Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии
Дисциплина: Математическая статистика

Домашнее задание №1

Выполнила: Щербатюк Д. С.
Группа: ИУ7-64
Вариант: 12

Москва, 2018 г.

Содержание

1 Задача №1. Предельные теоремы теории вероятностей

Условие. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 0.5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превосходит 0.2.

Решение.
Предположим, что истинное значение величины равно X_{real}. Тогда измеренное значение величины

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, n = 500.$$

Обозначим также отклонение от истинного за ε, дисперсию каждого измерения за

$$\mathsf{D}X_i = \sigma^2 = 0.5^2 = 0.25.$$

Необходимо найти

$$\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < \varepsilon\} = \mathsf{P}\left\{-\varepsilon < \frac{X_1 + ... + X_n - nX_{real}}{n} < \varepsilon\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{- - \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} < \frac{X_1 + ... + X_n - nX_{real}}{\sqrt{n\sigma^2}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right\}.$$

Так как $n >> 1$, то мы можем использовать *Центральную предельную теорему*, согласно которой величина $\frac{X_1+...+X_n-nX_{real}}{\sqrt{n\sigma^2}}$ распределена по нормальному закону. Тогда

$$\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < \varepsilon\} \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) = 2\Phi_o\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) =$$

$$= 2\Phi_o\left(0.2\sqrt{\frac{500}{0.25}}\right) = 2\Phi_o\left(8.9\right) \approx 1$$

Ответ. $\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < 0.2\} \approx 1.$

2 Задача №2. Метод моментов

Условие. С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X.

$$f_X(x) = \frac{1}{4!\theta^5} x^4 e^{-x/\theta},\ x > 0.$$

Решение. Рассморим данный закон распределения. Если заметить, что $\Gamma(5) = 4!$, то нетрудно понять, что $f_X(x)$ есть гамма-распределение с параметрами $\lambda = \theta,\ \alpha = 5$.

$$f_X(x) = x^4 \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^5 \Gamma(5)},\ x > 0.$$

Отсюда следует, что $X \sim \Gamma(5, \theta)$. Поэтому начальный момент

$$m_1(\theta) = \mathsf{M}X = 5\theta.$$

Начальный выборочный момент

$$\hat{\mu_1} = \bar{X},$$

где $\bar{X}$ – среднее выборочное.

Следуя методу моментов и приравнивая эти моменты между собой получаем

$$5\theta = \bar{X}, \theta = \frac{\bar{X}}{5}.$$

Ответ. $\theta = \frac{\bar{X}}{5}$, при $x > 0$.

3 Задача №3. Метод максимального правдоподобия

Условие.

Решение.

Ответ. $\theta =.$

4 Задача №4. Доверительные интервалы

Условие.

Решение.

Ответ. .