Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Фундаментальные науки
Кафедра: Математическое моделирование
Дисциплина: Математическая статистика

Лабораторная работа №2
Интервальные оценки

Выполнила: Щербатюк Д. С.
Группа:ИУ7-64
Вариант: 12

Москва, 2018 г.

1 Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   - вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X_n})$ и $S^2(\vec{X_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - вычисление нижней и верхней границ $\overline{\mu}(\vec{X_n})$, $\underline{\mu}(\vec{X_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - вычисление нижней и верхней границ $\overline{\sigma^2}(\vec{X_n})$, $\underline{\sigma^2}(\vec{X_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   - на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x_n})$, $y = \overline{\mu}(\vec{x_n})$ и $y = \underline{\mu}(\vec{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   - на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x_n})$, $z = \overline{\sigma^2}(\vec{x_n})$ и $z = \underline{\sigma^2}(\vec{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Отчёт

2.1 Определения и формулы

2.1.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть $\vec{X}_n$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно.

Предположим, что для параметра θ в построенном интервале $(\underline{\theta}(\vec{X}_n),\ \overline{\theta}(\vec{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ являются функциями случайной выборки $\vec{X}_n$, такими, что выполняется равенство

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n),\ \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверил γ (или, сокращенно, γ - доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки. Интервальная оценка $(\underline{\theta}(\vec{X}_n),\ \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное истинное значение параметра γ.

Интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}_n),\ \overline{\theta}(\vec{x}_n))$ называют доверительным интервалом для параметра в с коэффициентом доверия γ или γ - доверительным интервалом, где $\vec{x}_n$ – любая реализация случайной выборки $\vec{X}_n$.

2.1.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Нормальное распределение Пусть $\vec{X}_n$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Оценка для математического ожидания при известной дисперсии

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \tag{1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \tag{2}$$

где:

- $\overline{X}$ – оценка мат. ожидания,
- n – число опытов,
- $S(\vec{X}_n)$ точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}_n$, $t_{1-\alpha}(n-1)$ квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, α величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \tag{3}$$

$$\overline{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \tag{4}$$

где:

- n – объем выборки,
- $\chi^2_\alpha(n-1)$ – квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы,
- α – величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

3 Текст программы

```
function lw2()
    clear all;

    X = readFromFile();
    N = 1:40;

    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;

    mu = expectation(X);
    sSqr = variance(X);

    muArray = expectationArray(X, N);
    varArray = varianceArray(X, N);

    figure
    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
    hold on;
    plot(N, muArray, 'g');

    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r');
    grid on;
    hold off;

    fprintf('mu = %.2f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sSqr);
    fprintf('mu_low = %.2f\n', Ml(end));
    fprintf('mu_high = %.2f\n', Mh(end));


    figure
    plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');

    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r');

    grid on;
    hold off;
    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
end
```

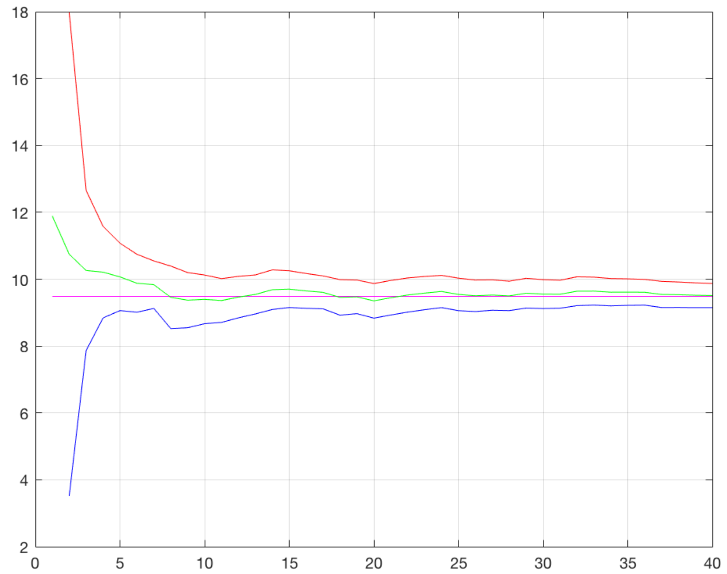
```
function X = readFromFile()
    X = csvread('data.csv');
end

function mu = expectation(X)
    mu = mean(X);
end

function sSqr = variance(X)
    sSqr = var(X);
end

function muArray = expectationArray(X, N)
    muArray = [];
    for i = N
        muArray = [muArray, mean(X(1:i))];
    end
end

function varArray = varianceArray(X, N)
    varArray = [];
    for i = N
        varArray = [varArray, var(X(1:i))];
    end
end
```

4 Результаты расчётов

$$\hat{\mu} = 9.49$$
$$S^2 = 1.22$$
$$(\underline{\mu},\ \overline{\mu}) = (9.15,\ 9.87)$$
$$(\underline{\sigma^2},\ \overline{\sigma^2}) = (1.32,\ 2.80)$$

5 Графики

$y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.



$y = S^2(\vec{x}_N),\ y = S^2(\vec{x}_n),\ y = \underline{\sigma^2}(\vec{x}_n),\ y = \overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.