Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии
Дисциплина: Математическая статистика

Домашнее задание №1

Выполнила: Щербатюк Д. С.
Группа: ИУ7-64
Вариант: 12

Москва, 2018 г.

1 Задача №1. Предельные теоремы теории вероятностей

Условие. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 0.5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превосходит 0.2.

Решение.
Предположим, что истинное значение величины равно X_{real}. Тогда измеренное значение величины

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, n = 500.$$

Обозначим также отклонение от истинного за ε, дисперсию каждого измерения за

$$\mathsf{D}X_i = \sigma^2 = 0.5^2 = 0.25.$$

Необходимо найти

$$\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < \varepsilon\} = \mathsf{P}\Big\{-\varepsilon < \frac{X_1 + ... + X_n - nX_{real}}{n} < \varepsilon\Big\} =$$

$$= \mathsf{P}\Big\{- - \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} < \frac{X_1 + ... + X_n - nX_{real}}{\sqrt{n\sigma^2}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\Big\}.$$

Так как $n >> 1$, то мы можем использовать *Центральную предельную теорему*, согласно которой величина $\frac{X_1 + ... + X_n - nX_{real}}{\sqrt{n\sigma^2}}$ распределена по нормальному закону. Тогда

$$\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < \varepsilon\} \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) = 2\Phi_o\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) =$$

$$= 2\Phi_o\left(0.2\sqrt{\frac{500}{0.25}}\right) = 2\Phi_o\left(8.9\right) \approx 1$$

Ответ. $\mathsf{P}\{|X - X_{real}| < 0.2\} \approx 1.$

2 Задача №2. Метод моментов

Условие. С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X.

$$f_X(x) = \frac{1}{4!\theta^5} x^4 e^{-x/\theta},\ x > 0.$$

Решение. Рассморим данный закон распределения. Если заметить, что $\Gamma(5) = 4!$, то нетрудно понять, что $f_X(x)$ есть гамма-распределение с параметрами $\lambda = \theta,\ \alpha = 5$.

$$f_X(x) = x^4 \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^5 \Gamma(5)},\ x > 0.$$

Отсюда следует, что $X \sim \Gamma(5, \theta)$. Поэтому начальный момент

$$m_1(\theta) = \mathsf{M}X = 5\theta.$$

Начальный выборочный момент

$$\hat{\mu_1} = \bar{X},$$

где $\bar{X}$ – среднее выборочное.

Следуя методу моментов и приравнивая эти моменты между собой получаем

$$5\theta = \bar{X}, \theta = \frac{\bar{X}}{5}.$$

Ответ. $\theta = \frac{\bar{X}}{5}$, при $x > 0$.

3 Задача №3. Метод максимального правдоподобия

Условие. С использование метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_5)$.

$$f_X(x) = \frac{\theta^3}{2!}x^2 e^{-\theta x}, \ x > 0;$$

$$\vec{x}_5 = (0.4, 1.5, 0.8, 0.7, 2.7).$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, мы имеем дело с гамма-распределением с параметрами $\lambda = \frac{1}{\theta}, \ \alpha = 3$.

$$f_X(x) = x^2 \frac{e^{-\theta x}\theta^3}{\Gamma(3)}, \ x > 0.$$

Отсюда следует, что $X \sim \Gamma(3, \frac{1}{\theta})$.

Определим функцию правдоподобия:

$$L(\vec{X_n}; \theta) = \frac{\theta^3}{\Gamma(3)} \prod_{i=1}^{n} \left(X_i^2 e^{-\theta X_i} \right) \tag{1}$$

Пролагарифмируем (1):

$$\ln L(\vec{x_n}; \theta) = \ln\left(\frac{\theta^3}{\Gamma(3)}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^2 e^{-\theta x_i}\right)\right) = 3\ln\theta - \ln 2 + \ln\left(e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i^2\right) =$$

$$= 3\ln\theta - \ln 2 + \ln\left(e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i^2 = 3\ln\theta - \ln 2 + \theta\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{2}$$

Продифференцируем (2) и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x_n}; \theta)}{\partial\theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x_n}; \theta)}{\partial\theta} = \frac{3}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Отсюда

$$\theta = \frac{3}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Для $\vec{x}_5 = (0.4, 1.5, 0.8, 0.7, 2.7)$ получаем:

$$\theta = \frac{3}{0.4 + 1.5 + 0.8 + 0.7 + 2.7} = \frac{30}{61}.$$

Ответ. $\theta = \frac{30}{61}$.

4 Задача №4. Доверительные интервалы

Условие. Среднее значение дальности до ориентира, полученного по результатам $n = 10$ независимых измерений, равно 3230 м. Считая, что ошибки измерения распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, а среднее квадратичное отклонение ошибки составляет $\sigma = 8$ м, найти 95%ый доверительный интервал для дальности ориентира.

Решение. Пусть

1. m – теоритическое значение дальности до ориентира;
2. X – случайная величина, принимающая значения, равные измеренной дальности до ориентира.

$$X = m + (error)$$

По условию

$$(error) \sim N(0, \sigma^2)$$

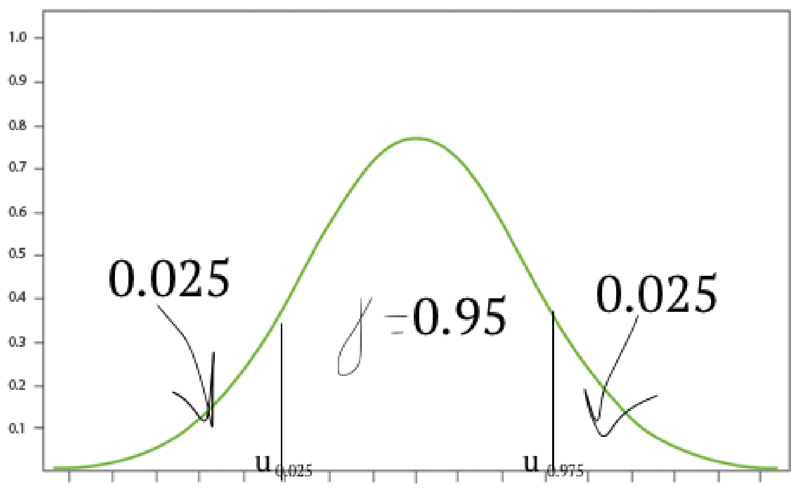
Тогда

$$X \sim N(0, \sigma^2), \sigma = 8$$

$$\mathsf{M}\left[m + (error)\right] = m + \mathsf{M}\left[error\right] = m$$

Таким образом необходимо оценить m. Используес статистику

$$T(\vec{X}) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1);$$



$$\mathsf{P}\{-u_{0.975} < T < u_{0.975}\} = \gamma;$$

$$\mathsf{P}\{-u_{0.975} < \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{0.975}\} = \gamma;$$

$$\mathsf{P}\{\bar{X} - \frac{\sigma u_{0.975}}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma u_{0.975}}{\sqrt{n}}\} = \gamma;$$

Примем за $\underline{m}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{\sigma u_{0.975}}{\sqrt{n}}$ и $\bar{m}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{\sigma u_{0.975}}{\sqrt{n}}$

$$u_{0.975} = 1.977$$

$$\frac{\sigma u_{0.975}}{\sqrt{n}} = \frac{8 * 1.977}{\sqrt{10}} = 5.001 \approx 5$$

$$\bar{X} = 3230$$

Таким образом $\underline{m} = 3230 - 5 = 3225$ и $\bar{m} = 3230 + 5 = 3235$

Ответ. $3225 < m < 3235$