

# Ball and Beam

Carlos Abraham Mendoza Maldonado  
Alejandro López Alcala  
Kevin Daniel Saavedra Rios  
Paralelo 1, 16:15 - 18:45  
Julio 2, 2019

**Resumen.-** En este informe se presenta los resultados obtenidos sobre la aplicación de dos controles, PID y LQR, a un sistema Ball and Beam. Se describe el procedimiento utilizado y la comparación entre resultados.

**Índice de Términos.-** Barra, bola, control, LQR, PID, sistema.

## 1. OBJETIVO

Lograr determinar los controles PID y LQR adecuados para el sistema y realizar una comparación en cuanto desempeño de ambos.

## 2. FUNDAMENTO TEÓRICO

El sistema barra bola es clásico de la ingeniería de control, es muy aplicado en áreas educativas, se encuentra en la clasificación de los sistemas subactuados por contar con dos grados de libertad y un actuador, la versión más conocida consiste en una esfera colocada sobre una barra horizontal, esta va acoplada a un motor que mediante un sistema de engranes controla el ángulo de inclinación de la barra que sostiene la esfera. Para poder controlar la posición de la esfera es necesario un sensor acoplado que obtenga datos sobre la posición de la misma.

Para la implementación se puede usar diferentes métodos de control, para este sistema se usarán el control PID y LQR.

El Controlador PID (Proportional, Integral, Derivativo) tiene la dinámica de control óptima que incluye un error de estado estacionario aproximado a cero, respuesta rápida, sin oscilaciones y mayor estabilidad. Puede ser

usado en procesos de orden superior que incluyan más de un solo almacenamiento de energía.

La función de transferencia del controlador PID está dado por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (I)$$

Dónde:

$K_p$ : ganancia proporcional.

$E(s)$ : error de proceso en dominio de  $s$ .

$T_i$ : tiempo de la acción integral.

$T_d$ : tiempo de la derivación. - :  $\epsilon$

El Control LQR (Lineal, Cuadratic, Regulator) opera con un sistema dinámico, su sistema se describe mediante un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Lineales, la solución del LQR está dada primeramente por la ecuación de Lagrange:

$$L = K - U$$

Dónde:

$K$ : energía cinética.

$U$ : energía potencial

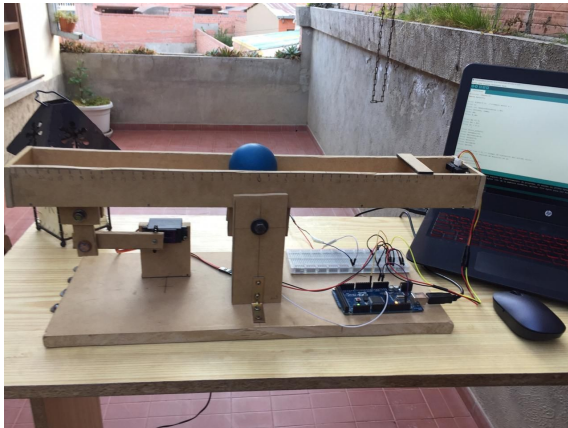
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0$$

La linealización nos permite entender mejor el comportamiento de sistemas no lineales en torno a un punto dado. La linealización está dada por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

### 3. PROCEDIMIENTO

#### 3.1. FIGURA



*Figura 1. Sistema*

*En la figura 1 se muestra el modelo físico de beam and ball*

#### 3.2. DESCRIPCIÓN

Para este sistema se consideró despreciable el coeficiente de fricción entre la barra y la bola, y que la bola rueda sin resbalar.

Primero se tomó datos sobre los materiales que se usarían en un modelo físico del sistema priorizando los más relevantes, una vez obtenidos, estos datos se reemplazaron en el modelo matemático obtenido del sistema y se procedió a simular el mismo en Matlab.

Una vez obtenida la señal del sistema en lazo abierto y a partir del resultado visto se

procedió a diseñar un controlador PID y LQR para estabilizar el mismo.

### 4. DATOS EXPERIMENTALES

$M_b = 0.105 \text{ kg}$  Masa de la bola

$M_v = 0.4824 \text{ kg}$  Masa de la viga

$R = 0.03025 \text{ m}$  Radio de la esfera

$d = 0.03 \text{ m}$  Longitud del brazo

$g = 9.78 \text{ m/s}^2$  Aceleración gravedad

$L = 40 \text{ cm}$  Longitud de la barra

$J_{bola} = 0.0000329 \text{ kgm}^2$  Momento de inercia de la esfera

$J_{viga} = 0.236376 \text{ kgm}^2$  Momento de inercia de la viga

Variables

$R$  Posición de la bola

$\alpha$  Ángulo de la viga

$\theta$  Ángulo del brazo

### 5. ANÁLISIS DE DATOS

#### 5.1. ANALOGÍA MATEMÁTICA

Se procedió a obtener la función de transferencia del sistema, primero se calculó el Lagrangiano del movimiento de la bola:

$$O = \left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr(\ddot{\alpha})^2$$

Se linealiza la ecuación alrededor del ángulo de la barra  $\alpha = 0$  obteniendo:

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg \alpha$$

Luego se aproximó, la ecuación de relación entre el ángulo de la barra con el ángulo del brazo, con una relación lineal:

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\frac{d}{L}\theta$$

Aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero se obtiene la función de transferencia:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)R(s)s^2 = -mg\frac{d}{L}\theta(s)$$

Reacomodando se obtiene la función de transferencia de la posición de la bola respecto al ángulo del brazo

$$\frac{R(s)}{\theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)}\frac{1}{s^2}$$

### Variables de ganancia:

Para las variables de ganancia es necesario un cambio de variable en las ecuaciones del sistema, se refiere al cambio en el orden de las ecuaciones del mismo un par de ecuaciones de segundo orden a tener cuatro ecuaciones de primer orden y así simplificar el proceso de la solución, para nuestro modelo primeramente se tienen las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = q_1,$$

$$x_2 = \dot{q}_1$$

$$x_3 = q_2$$

$$x_4 = \dot{q}_2$$

si se derivan las nuevas variables se tiene:

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{q}_1$$

$$\dot{x}_3 = \dot{q}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{q}_2$$

en los cuales  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$  son nuestras variables de ganancia.

## 5.2. GRÁFICAS

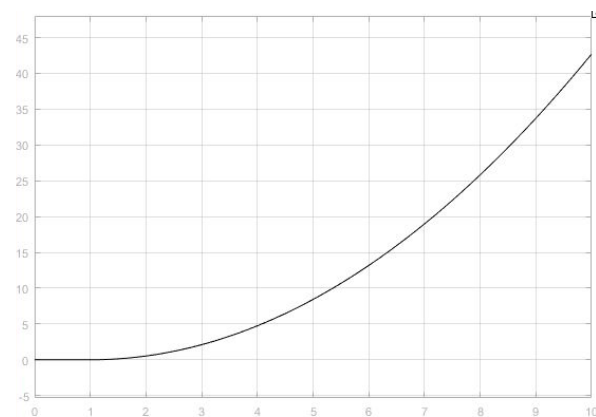
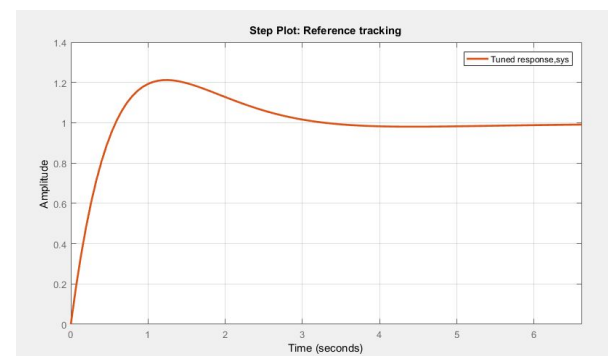


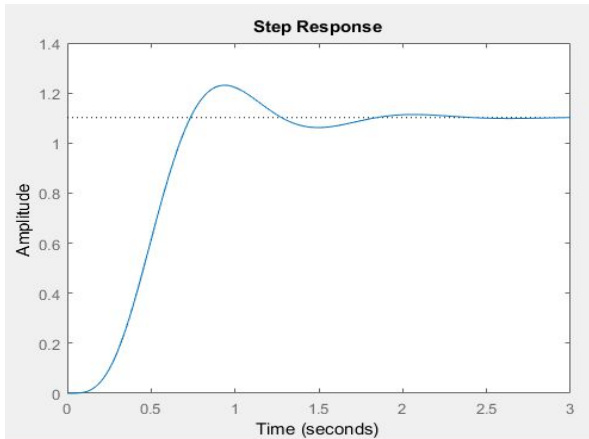
Figura 2. Función de transferencia

En la figura 2 se muestra al sistema en lazo abierto, se ve que el sistema es naturalmente inestable causando que la bola salga fuera de la barra.



*Figura 3. Función de transferencia estabilizada con PID*

*En la figura 3 se muestra al sistema estabilizado por un controlador PID ante una respuesta de la bola de entrada escalón de 0.01m.*



*Figura 4. Función de transferencia estabilizada con LQR*

*En la figura 4 se muestra al sistema estabilizado por un controlador LQR ante una respuesta de la bola de entrada escalón de 0.011m.*

### 5.3. PARÁMETROS DE PID

Parámetros obtenidos por medio de matlab:

$$P = 5.8$$

$$I = 1.6$$

$$D = 5.3$$

Parámetros obtenidos por medio de pruebas físicas:

$$P = 1.5$$

$$I = 0.1$$

$$D = 20.0$$

### 5.4. PARÁMETROS DE LQR

Parámetros obtenidos por medio de matlab:

$$k1 = -1.1078$$

$$k2 = -0.4407$$

$$k3 = 0.9449$$

$$k4 = 0.1240$$

Parámetros obtenidos por medio de pruebas físicas:

$$k1 = -21.0000$$

$$k2 = -0.0000$$

$$k3 = 1.0000$$

$$k4 = 0.0000$$

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En conclusión, se logró encontrar la función de transferencia y determinar los parámetros del controlador PID y LQR para el sistema, siendo los valores obtenidos de forma teórica, diferentes a los valores finales establecidos de forma experimental, debido a que los valores teóricos volvían al sistema demasiado violento o no generaban una respuesta lo suficientemente alta dejando al sistema inactivo.

Se logró apreciar experimentalmente que el control PID alcanza el valor deseado de manera mucho más rápida, el control LQR tiene mayor error en estado estacionario que el control PID, y se comprobó que la ganancia del integrador desestabiliza aún más el sistema, por lo tanto para este sistema el control adecuado a implementar es el PD.

Se recomienda tener en cuenta limitar la distancia a la que la bola puede acercarse al

sensor, puesto que el sensor de nuestro sistema puede obtener medidas erróneas de la distancia de la bola si esta se acerca demasiado, se debe tomar en cuenta el ruido que puede afectar al sensor, siendo el aplicado en el sistema un sensor infrarrojo, la contaminación lumínica y el color de la bola deben ser tomados en cuenta, para estos casos se usó un filtro promediador en el código, pero debido a datos atípicos muy altos este filtro no es suficiente, para un mejor desempeño se recomienda usar más de un filtro.

*<https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/59/1/MestradoVictorAbreu.pdf>*

En cuanto al modelo físico del sistema, para obtener un mejor desempeño se recomienda armar un modelo firme que no genere movimientos no deseados al momento del funcionamiento, y tener en cuenta el uso de un servomotor de alto torque y precisión puesto que un servomotor débil no se desempeña bien al momento de trabajar con datos precisos, también se recomienda usar una placa que procese los datos de manera rápida ya que la placa usada fue un Arduino-Mega y al momento de implementar el control LQR no se generaba una respuesta lo suficientemente rápida.

## **7. BIBLIOGRAFÍA**

*<http://dgsa.uaeh.edu.mx:8080/bibliotecadigital/handle/231104/1832>*

*<https://roble.uno/control-pid-barra-y-bola-arduino/>*

*Enciclopedia hispánica: macropedia. Barcelona: Barza Planeta, 2001*

*Universidad Nacional de La Plata- Apunte de curso. Septiembre 2015*

*<http://robotics.ee.uwa.edu.au/theses/2003-Balance-Ooi.pdf>*