Ball and Beam es un sistema comúnmente utilizado para exponer a los estudiantes de pregrado al diseño del controlador.
El paso de este proceso de diseño es desarrollar un modelo matemático para describir el comportamiento del sistema. Existen varios métodos posibles para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico. Estos incluyen Langrangian y mecánica newtoniana. Muchos autores no logran derivar adecuadamente el modelo para el sistema Ball-and-Beam Porque obvian varios términos de aceleración. Aunque estos términos no afectan el modelo lineal,pero son Importante para simulaciones no lineales. Cuando el modelo se deriva de los métodos de Euler-Lagrange, estos términos aparecen naturalmente. En este artículo se demuestra que las ecuaciones de movimiento obtenidas de ambos métodos son idénticas. A partir de la ecuación de movimiento, se desarrollan ecuaciones no lineales de espacio de estado. Las ecuaciones no lineales son entonces linealizadas sobre el punto de equilibrio y se obtiene una función de transferencia adecuada para un diseño de controlador lineal.

Modelo de mecánica Lagrangiana

El método de Lagrange es un enfoque basado en la energía para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico.
Esto es conveniente ya que no requiere el uso de vectores. Por esta razón, muchos sistemas complicados a menudo se analizan utilizando este método. Ahora derivaremos las ecuaciones de los movimientos de la bola y la viga usando este método.

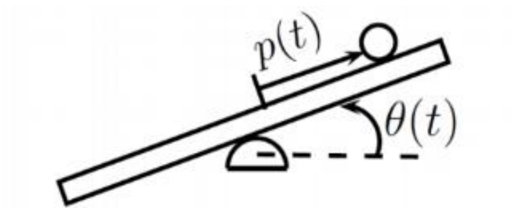

Figura 1. Esquema de Ball and beam

La bola rueda sobre la viga sin deslizarse bajo la acción de la fuerza de la gravedad. La viga se inclina desde un par externo para controlar la posición de la bola en la viga. Primero definimos un conjunto de coordenadas generalizadas que describen completamente el sistema. Las coordenadas generalizadas se definen como:

$$q(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

donde p(t) es la posición de la bola en la viga y θ(t) es el ángulo de la viga. El lagrangiano de un sistema es una cantidad que se define como:

$$L = K - U \qquad (2)$$

Donde K es la energía cinética y U es la energía potencial del sistema. Para facilitar la evaluación de K y U, definimos las coordenadas cartesianas x(t) y y(t) como se muestra en la Figura 2.

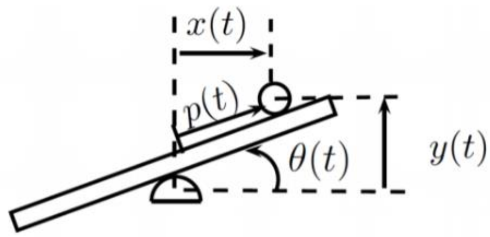

Figura 2. Coordenadas cartesianas y coordenadas generalizadas.

Donde la energía cinética de la barra es:

$$K_1 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

Donde J es el momento de inercia de la viga.
La energía cinética de la pelota es:

$$K_2 = \frac{1}{2}J_b\dot{\theta_b}^2 + \frac{1}{2}m{v_b}^2 \qquad (4)$$

Donde $\dot{\theta}_b$está la velocidad angular de la bola y v_b es la velocidad lineal de la bola. La cantidad $\dot{\theta}_b$ puede expresarse en términos de las coordenadas generalizadas como:

$$\dot{\theta}_b = \frac{p}{r} \qquad (5)$$

Donde r es el radio de la pelota. También podemos expresar v_b en términos de las coordenadas generalizadas:

$${v_b}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \qquad (6)$$
$$x = p\ cos(\theta) \qquad (7)$$
$$\dot{x} = \dot{p}\cos(\theta) - p\ \dot{\theta}\sin(\theta) \qquad (8)$$
$$\dot{x}^2 = \dot{p}^2cos^2(\theta) - 2p\dot{p}\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) + p^2\dot{\theta}^2sin^2(\theta) \qquad (9)$$
$$y = p\sin(\theta) \qquad (10)$$
$$\dot{y} = \dot{p}\sin(\theta) + p\ \dot{\theta}\cos(\theta) \qquad (11)$$
$$\dot{y}^2 = \dot{p}^2sin^2(\theta) - 2p\dot{p}\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) + p^2\dot{\theta}^2cos^2(\theta) \qquad (12)$$

Sustituyendo (9) y (12) en (6):

$${v_b}^2 = \dot{p}^2 + p^2\dot{\theta}^2 \qquad (13)$$

Sustituyendo (5) y (13) en (4), obtenemos la expresión de la energía cinética de la bola en términos de las coordenadas generalizadas.

$$k_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\dot{p}^2 + \frac{1}{2}mp^2\dot{\theta}^2 \qquad (14)$$

La energía potencial está dada por:

$$U = m\ g\ p\ \sin(\theta) \qquad (15)$$

Sustituyendo (3), (14) y (15) en (2), se obtienen el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\dot{p}^2 + \frac{1}{2}(mp^2 + J)\dot{\theta}^2 - mpgsin(\theta) \qquad (16)$$

La primera ecuación de Lagrange está dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \qquad (17)$$

Calculando:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = \left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\dot{p} \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) = \left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\ddot{p} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = mp\dot{\theta}^2 - mgsin\theta \qquad (20)$$

Sustituyendo (18) - (20) en (17) derivamos la primera ecuación de movimiento del sistema de bola y viga

$$\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\ddot{p} + mgsin\theta - mp\dot{\theta}^2 = 0 \qquad (21)$$

La segunda ecuación de Lagrange está dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \qquad (22)$$

Donde τ es el par externo aplicado a la viga. Derivamos esta ecuación utilizando un enfoque similar.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (mp^2 + J)\dot{\theta} \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mp\dot{p}\dot{\theta} + (mp^2 + J)\ddot{\theta} \qquad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgpcos\theta \qquad (25)$$

Sustituyendo (24) y (25) en (22) obtenemos la segunda ecuación de movimiento para la Bola y la viga:

$$(mp^2 + J)\ddot{\theta} + 2mp\dot{p}\dot{\theta} + mgpcos\theta = \tau \qquad (26)$$

Es decir, (21) y (26) son las ecuaciones de movimiento para el sistema Ball and Beam.

Modelado a partir de mecánicas newtonianas.

Ahora procederemos a derivar las ecuaciones de movimiento para el sistema Ball and Beam utilizando la mecánica newtoniana.

Definimos el eje x para que sea paralelo a la viga. Como este eje gira con el tiempo, debemos considerar las derivadas de tiempo de los vectores unitarios al calcular las velocidades y las aceleraciones. La aceleración absoluta de un cuerpo viene dada por:

$$a_a = \dot{\omega}\ x\ r + \ \omega\ x(\omega\ x\ r) + 2\omega\ x\ v_{rel} + a_{rel} \qquad (27)$$

Donde ω es la velocidad angular del eje de rotación, r es el vector de posición, v_{rel} es la velocidad con respecto al eje de rotación y a_{rel} es la aceleración del cuerpo con respecto al sistema de coordenadas de rotación. Considere el conjunto de ejes de coordenadas que giran con una velocidad angular de ω que se muestra en la Figura 3.

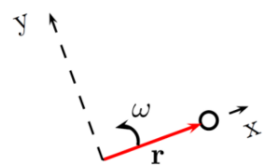

Figura 3. Ejes giratorios

Usando la misma notación usada en la Figura 1, podemos definir los vectores necesarios

$$r = pi \qquad (28)$$
$$\omega = \dot{\theta}k \qquad (29)$$
$$v_{rel} = \dot{p}i \qquad (30)$$
$$a_{rel} = \ddot{p}i \qquad (31)$$

Ahora procedemos a realizar los productos vectoriales necesarios para calcular la aceleración absoluta (27).

$$\dot{\omega}\ x\ r = \ddot{\theta}k\ x\ pi = p\ddot{\theta}j \qquad (32)$$
$$\omega\ x\ r = \dot{\theta}k\ x\ pi = p\dot{\theta}j \qquad (33)$$
$$\omega\ x\ (\omega\ x\ r) = \dot{\theta}k\ x\ p\dot{\theta}j = -p\dot{\theta}^2 i \qquad (34)$$
$$2\omega\ x\ v_{rel} = 2\dot{\theta}k\ x\ \dot{p}i = 2\dot{\theta}\dot{p}j \qquad (35)$$

Sustituyendo (31) - (35) en (27) obtenemos la aceleración relativa a los ejes giratorios

$$a_a = p\ddot{\theta}j + p\dot{\theta}^2 i + 2\dot{\theta}\dot{p}j + \ddot{p}i \qquad (36)$$
$$a_a = \left(\ddot{p} - p\dot{\theta}^2\right)i + \left(p\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{p}\right)j \qquad (37)$$

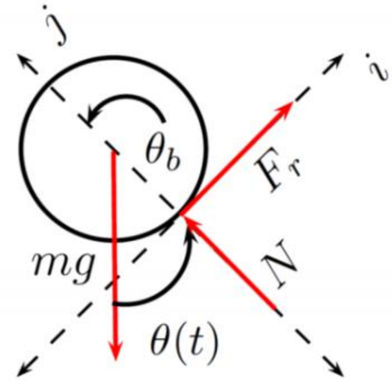

Figura 4. Diagrama de cuerpo libre de la bola giratoria

Considere el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la Figura 4. Torsiones de suma sobre el eje de rotación de los rendimientos de la bola

$$j_b\ddot{\theta}_b = F_r * r \qquad (38)$$

Donde J_b es el momento de inercia de la pelota sobre su centro. El ángulo de rotación de la bola alrededor de su centro θ_b está dado por:

$$\theta_b = -\frac{p}{r} \qquad (39)$$

Donde r es el radio de la pelota. Sustituyendo (39) en (38) y resolviendo los rendimientos de F_r

$$F_r = -\frac{J_b}{r^2}\ddot{p} \qquad (40)$$

Ahora procedemos a sumar las fuerzas que actúan sobre la bola en la dirección i. Usando el componente i del vector de aceleración relativa (37) se obtienen:

$$F_r - mg\ sin\theta = m\left(\ddot{p} - p\dot{\theta}^2\right) \qquad (41)$$

Sustituyendo (40) en (41), llegamos a nuestra primera ecuación de movimiento:

$$\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\ddot{p} + mgsin\theta - mp\dot{\theta}^2 = 0 \qquad (42)$$

que coincide con (21).

Para calcular la segunda ecuación de movimiento, primero debemos calcular la fuerza normal N como se muestra en la Figura 4. La suma de las fuerzas que actúan sobre la bola en la dirección j es la siguiente:

$$N = m\left(p\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{p}\right) + mgcos\theta \qquad (43)$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre de la viga que se muestra en la siguiente figura 5:

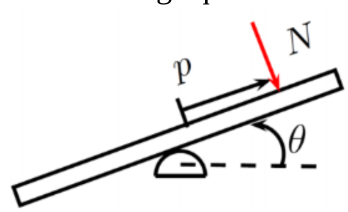

Figura 5. Figura 5: Diagrama de cuerpo libre de la viga.

Torques que actúan sobre la viga:

$$\tau - Np = J\ddot{\theta} \qquad (44)$$

Donde τ es el torque externo aplicado y J es la inercia de la viga. Sustituyendo (43) en (44) se obtiene nuestra segunda ecuación de movimiento.

$$(mp^2 + J)\ddot{\theta} + 2mp\dot{p}\dot{\theta} + mgpcos\theta = \tau \qquad (45)$$

que coincide con (26) como se esperaba.
El término $mp\dot{\theta}^2$ en (42) y el término $2mp\dot{p}\dot{\theta}$ en (45) faltarían si no tomamos en consideración el efecto del eje giratorio de la viga. Estos términos son importantes para las simulaciones no lineales del sistema.

Representación no variable y variable del estado no lineal y lineal

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \qquad (46)$$

Este vector de estado se compone del conjunto mínimo de variables requerido para determinar la respuesta futura del sistema dada la entrada y el estado actual. Las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en términos de las variables de estado como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{m(x_1{x_4}^2 - g\ sinx_3)}{\dfrac{J_b}{r^2} + m} \\ x_4 \\ \dfrac{-2mx_1x_2x_4 - mgx_1cosx_3 + \tau}{(m{x_1}^2 + J)} \end{bmatrix} = f(x, \tau) \qquad (47)$$

También definimos un punto de operación correspondiente a una posición constante de la bola p_0 y velocidad cero. El ángulo correspondiente y la velocidad angular de la barra también son cero. El estado operativo está dado por:

$$x_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (48)$$

También definimos la entrada operativa requerida para mantener este punto operativo, el par de equilibrio al igualar $f(x, \tau)$ en (47) a cero y evaluar en el punto operativo es:

$$u_\tau = mgp_0 \qquad (49)$$

Esto es simplemente el par de torsión requerido para mantener la bola estacionaria en la posición p_0. El jacobiano del lado derecho de (47) con respecto al vector de estado x produce:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{m{x_4}^2}{\dfrac{J_b}{r^2} + m} & 0 & \dfrac{-mgcosx_3}{\dfrac{J_b}{r^2} + m} & \dfrac{2mx_1x_4}{\dfrac{J_b}{r^2} + m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial x_1} & \dfrac{-2mx_1x_4}{m{x_1}^2 + J} & \dfrac{mgx_1sinx_3}{m{x_1}^2 + J} & \dfrac{-2mx_1x_2}{m{x_1}^2 + J} \end{bmatrix} \qquad (50)$$

Donde:

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{(-2mx_2x_4 - mgcosx_3)(m{x_1}^2 + J) - (-2mx_1x_2x_4 - mgx_1cosx_3 + \tau)}{(m{x_1}^2 + J)^2} \qquad (51)$$

La evaluación en el punto operativo produce la matriz A de la representación de variable de estado:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{\frac{J_b}{r^2} + m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{m{p_0}^2 + J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (52)$$

El jacobiano con respecto a la entrada τ:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x, \tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m{x_1}^2 + J} \end{bmatrix} \qquad (53)$$

Evaluating at the operating point yields the B matrix of the state variable representation

$$B = \frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m{p_0}^2 + J} \end{bmatrix} \qquad (54)$$

Al definir la salida del sistema como la posición de la bola, se obtiene la matriz C de la representación de la variable de estado

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (55)$$

Usando estas matrices, el sistema ahora puede escribirse en una representación de espacio-estado de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (56)$$
$$y(t) = Cx(t) \qquad (57)$$

Sustituyendo los parámetros del sistema de bola y viga:

$$m = 0.105Kg$$
$$r = 0.025m$$
$$g = 9.21\frac{m}{s^2}$$
$$I_{barra} = J = \frac{1}{12}m_{barra}x^2 = \frac{1}{12} * 0.4824 * (0.45)^2 = 0.008140Kgm^2$$
$$I_{bola} = J_b = \frac{2}{5}m_b r^2 = \frac{2}{5} * 0.105 * (0.025)^2 = 0.00002625Kgm^2$$
$$p_0 = 0$$

Finalmente:

$$\dot{x(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.007142857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -126.541769 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 122.8501 \end{bmatrix} \tau(t) \qquad (58)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad (59)$$

Desde esta representación de espacio de estado, el sistema puede ser analizado y puede diseñar un controlador.