

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD RAFAEL URDANETA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



**REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL (LQR) PARA UN SISTEMA DE BOLA Y
BARRA**

Trabajo especial de grado presentado ante la
Universidad Rafael Urdaneta para optar al título de:

INGENIERO ELECTRICISTA

Autor: Br. ANTONIO DEL NEGRO
Br. GIAN HURTADO
Tutor: Sergio De Pool

Maracaibo, diciembre de 2014

REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL (LQR) PARA UN SISTEMA DE BOLA Y BARRA

Del Negro Álvarez, Antonio Michele

C.I.: 21.355.608

Telf. (0414) 9685818

Email: andelnegro6@hotmail.com

Hurtado Mangialardo, Gian Antoni

C.I.: 22.480.872

Telf. (0414) 6658660

Email: gianhurtado93@gmail.com

Ing. De Pool Largo, Sergio (MSc.)

C.I.: 12.330.852

Telf. (0414) 6360835

Email: sergiodepool@gmail.com

Institución: Universidad Rafael Urdaneta

Cargo: Docente activo

APROBACIÓN

Este jurado aprueba el trabajo especial de grado titulado “**REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL PARA UN SISTEMA DE BOLA Y BARRA**”, presentado por los bachilleres Del Negro Álvarez, Antonio Michele, C.I.: 21.355.608 y Hurtado Mangialardo, Gian Antoni, C.I.: 22.480.872, para optar al título de ingeniero electricista. Universidad Rafael Urdaneta. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Maracaibo, diciembre de 2014.

JURADO EXAMINADOR

Ing. Sergio De Pool (MSc.)

C.I.: 12.330.852.

Tutor Académico

Jurado

C.I.:

Jurado

C.I.:

Ing. Arnaldo Largo.

C.I.: 9.785.008.

Director de la escuela de Ing. Eléctrica.

Jurado

C.I.:

DEDICATORIA

A mis padres Elio y Magaly, a Anna, Zuly, la Nonna y Sabrina

Antonio Del Negro

A mis padres Eliezer y Stela, a Stefania y Marina.

Gian Hurtado

AGRADECIMIENTOS

Al profesorado de ingeniería eléctrica de la Universidad Rafael Urdaneta, especialmente a la profesora Nancy Mora y al profesor Sergio De Pool por sus aportes al presente trabajo de investigación.

Antonio Del Negro y Gian Hurtado

DEL NEGRO ALVAREZ, Antonio Michele. HURTADO MANGIALARDO, Gian Antoni. **REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL PARA UN SISTEMA DE BOLA Y BARRA**. Trabajo especial de grado para optar al título de Ingeniero Electricista; Maracaibo – Venezuela: Universidad Rafael Urdaneta, Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica. 2014. 161p.

RESUMEN

El sistema de Bola y Barra es un sistema físico con fenómenos particulares y es un problema clásico de la teoría de control debido a su no linealidad. Este sistema físico se describe como una bola situada sobre una barra, que cambiará su posición la cual dependerá del ángulo en el cual la barra está situada. Es gracias a un servomecanismo instalado en el prototipo que la barra cambia su posición angular de tal manera que la bola cambia de posición. Un sistema de control es el responsable del movimiento adecuado del servomotor y el objetivo es colocar la bola en una posición deseada. Los objetivos de este trabajo son identificar las variables de este sistema físico, definir su modelo matemático y evaluar sus características en el tiempo y frecuencia, para así diseñar y simular los controladores. Tales controladores son un Regulador Cuadrático Lineal y un PID digital. Luego de esto, se implantaron en una tarjeta Arduino Uno. La investigación fue experimental y de tipo explicativa. Al momento de la implementación de los controladores, se pudo apreciar que las respuestas de simulación para el PID no eran acordes a la respuesta necesaria para el control, por lo cual se recurrió a modificar empíricamente los parámetros. Para la implantación con el controlador LQR sí hubo correlación con la respuesta de simulación del modelo continuo. Además, para profundizar el estudio del comportamiento físico del sistema, se definió de manera experimental un modelo matemático mediante los datos obtenidos del sistema físico a partir de pruebas, el cual no tuvo correlación con el fenómeno. Por último, se compararon las mejores implementaciones de ambas estrategias, las cuales tuvieron un alto desempeño, superando en efectividad y eficiencia el control óptimo LQR al clásico PID.

Palabras Clave: Bola y Barra, LQR, PID, Arduino, servomotor, control óptimo, control clásico, control moderno.

DEL NEGRO ALVAREZ, Antonio Michele. HURTADO MANGIALARDO, Gian Antoni. **LINEAR QUADRATIC REGULATOR FOR A BALL AND BEAM SYSTEM.** Thesis work required to obtain the Bachelor of Science degree in Electrical Engineering; Maracaibo – Venezuela: Universidad Rafael Urdaneta, Engineering School. 2014. 161p.

ABSTRACT

The Ball and Beam System is a physical system with particular phenomena. It is a classic problem in control theory because of its nonlinear characteristics. This physical system can be described as a ball in top of a beam that will change its position, which depends on the axis's angle of the beam. The beam changes thanks to a servomechanism. A control system is responsible for the adequate movement of the servomotor, and the objective is to move the ball into a desired location along the beam. The specific objectives of this project are to identify the variables within the physical system, to define its mathematical model and evaluate its time and frequency characteristics, and therefore design and simulate the controllers. The controllers are a Linear Quadratic Regulator, and a digital PID classic controller. Right after this process, they were programmed within an Arduino Uno board, which was installed to the prototype. The investigation was experimental and explicative. In the implementation process, it was noticeable that the simulation responses with the PID controller weren't adequate enough to control the system. Therefore, an empirical modification of the parameters was made. The LQR simulation response and its implementation parameters, however, were correlated. Moreover, in order to deepen the physical behavior study of the system, an experimental mathematical model was defined through test data acquisition, which wasn't able to describe the phenomena. Lastly, both strategies best implementations were compared. Classical and optimal control strategies had a high performance, being the LQR control method more effective than the classical PID controller.

Keywords: Ball and Beam, LQR, PID, Arduino, servomotor, optimal control, classical control, modern control.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
EL PROBLEMA	4
1.1. Planteamiento y formulación del problema	4
1.2. Objetivos de la investigación.....	8
1.2.1. Objetivo general.....	8
1.2.2. Objetivos específicos	9
1.3. Justificación e importancia de la investigación	9
1.4. Delimitación.....	10
1.4.1. Espacial	10
1.4.2. Temporal.....	10
1.4.3. Científica	10
MARCO TEÓRICO	12
2.1. Antecedentes de la investigación.....	12
2.2. Bases teóricas.....	15
2.2.1. Sistema de control	15
2.2.2. Modelado matemático.....	17
2.2.2.1. Ecuación diferencial	17
2.2.2.2. Transformada de Laplace.....	18
2.2.2.3. Transformada Z.....	20
2.2.2.4. Sistemas lineales	20
2.2.2.5. Función de transferencia	21
2.2.2.6. Diagramas de bloques	24
2.2.3. Modelado de espacio estado	25
2.2.3.1. Controlabilidad	29

2.2.3.2. Observabilidad	30
2.2.4. Respuesta en el tiempo de un sistema de control	31
2.2.5. Estabilidad	33
2.2.5.1. Estabilidad de entrada acotada y salida acotada (BIBO)	34
2.2.5.2. Relación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad	34
2.2.5.3. Criterio de Routh-Hurwitz	35
2.2.5.4. Diagrama de Nyquist	37
2.2.5.5. Diagrama de Bode	37
2.2.6. Controlador de tres términos (PID)	37
2.2.7. Regulador cuadrático lineal (LQR)	38
2.2.8. Sistema de bola y barra	41
2.2.9. Identificación de sistemas	42
2.2.9.1. Modelos lineales de identificación de sistemas	45
2.3. Definición de términos básicos	47
2.4. Operacionalización de las variables	49
MARCO METODOLÓGICO	58
3.1. Tipo de investigación	58
3.2. Diseño de la investigación	59
3.3. Población y muestra	59
3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	60
3.5. Fases de la investigación	61
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	65
4.1. Identificar las variables que interactúan en la estabilización del sistema bola y barra	65
4.1.1. Variables manipuladas	65
4.1.2. Variables controladas	65

4.1.3.	Perturbaciones.....	66
4.2.	Definir el modelo matemático del sistema físico	66
4.2.1.	Servomotor	67
4.2.2.	Interacción de la barra con la bola	68
4.3.	Analizar el modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial	
	73	
4.3.1.	Análisis del modelo matemático teórico continuo	73
4.3.1.1.	Dominio temporal	73
4.3.1.2.	Dominio frecuencial.....	76
4.3.2.	Análisis del modelo matemático teórico discreto	77
4.3.2.1.	Dominio temporal	77
4.3.2.2.	Dominio frecuencial.....	80
4.4.	Diseñar los controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio. 81	
4.4.1.	Controlador PID	81
4.4.1.1.	Controlador PID para la función de transferencia continua	81
4.4.1.2.	Controlador PID para la función de transferencia discreta	85
4.4.2.	Controlador LQR.....	88
4.4.2.1.	Controlador LQR para la función de transferencia continua.....	90
4.4.2.2.	Controlador LQR para la función de transferencia discreta.....	94
4.5.	Implantar los controladores en un sistema microprocesado	95
4.5.1.	Descripción de los componentes del prototipo	96
4.5.1.1.	Servomotor.....	97
4.5.1.2.	Sensor ultrasónico.....	97
4.5.1.3.	Sistema microprocesado	98
4.5.2.	Implantación del controlador PID	100
4.5.2.1.	Comparación de la implementación versus la simulación para la estrategia PID.....	103
4.5.2.2.	Comparación de implementaciones del PID	106
4.5.3.	Implantación del controlador LQR.....	107

4.5.3.1. Comparación de la implementación versus la simulación para la estrategia LQR	108
4.5.4. Modelo matemático experimental	109
4.5.4.1. Análisis del modelado matemático experimental.....	124
4.5.4.2. Diseño de control PID para el modelado experimental	126
4.5.4.3. Diseño de control LQR para el modelado experimental	129
4.6. Evaluación de los controladores implementados.....	131
CONCLUSIONES	132
RECOMENDACIONES	135
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	136
ANEXOS	139

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1. REPRESENTACIÓN DE UN PROCESO	16
FIGURA 2.2. SISTEMA DE CONTROL A LAZO ABIERTO	16
FIGURA 2.3. SISTEMA DE CONTROL A LAZO CERRADO	17
FIGURA 2.4. PLANO COMPLEJO S.....	19
FIGURA 2.5. DIAGRAMA DE BLOQUES EN FUNCIÓN DE S DE UN SISTEMA A LAZO CERRADO.....	25
FIGURA 2.6. VECTORES DE ESTADO, ENTRADA, SALIDA Y PERTURBACIÓN PARA EL MODELADO DE ESPACIO ESTADO	28
FIGURA 2.7. MATRICES DE ESTADO.....	29
FIGURA 2.8: RESPUESTA TÍPICA AL ESCALÓN UNITARIO DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	32
FIGURA 2.9: ERROR DE ESTADO ESTABLE TÍPICO, DEBIDO A UNA ENTRADA ESCALÓN.....	33
FIGURA 2.10. REGIONES ESTABLE E INESTABLE EN EL PLANO S.....	35
FIGURA 2.11. TABULADOR DE ROUTH	36
FIGURA 2.12. CONFIGURACIÓN CON RETROALIMENTACIÓN DEL REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL	39
FIGURA 2.13. ENTRADAS Y SALIDAS DE LA FIGURA 2.12.....	39
FIGURA 2.14. REPRESENTACIÓN BÁSICA DEL SISTEMA DE BOLA Y BARRA.....	41
FIGURA 2.15. REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROCESO BÁSICO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS	45
FIGURA 2.16. REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA ESTRUCTURA ARX	46
FIGURA 2.17. REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA ESTRUCTURA ARMAX	46
FIGURA 2.18. REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA ESTRUCTURA OE.....	47
FIGURA 2.19. REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA ESTRUCTURA BOX-JENKINS	47
FIGURA 4.1. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA FÍSICO BOLA Y BARRA.	67
FIGURA 4.2. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SERVOMOTOR.....	68
FIGURA 4.3. DIBUJO REPRESENTATIVO DE LA INTERACCIÓN DE LA BARRA CON LA BOLA	69
FIGURA 4.4. DIBUJO REPRESENTATIVO DE LOS PARÁMETROS R_B Y A_1	72
FIGURA 4.5. RESPUESTA AL ESCALÓN A LAZO ABIERTO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA.....	74
FIGURA 4.6. RESPUESTA AL ESCALÓN A LAZO CERRADO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA... ..	74
FIGURA 4.7. LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA.....	75
FIGURA 4.8. PRUEBA DE NYQUIST PARA EL SISTEMA CONTINUO A LAZO ABIERTO.....	77
FIGURA 4.9. RESPUESTA AL ESCALÓN A LAZO ABIERTO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA.	78
FIGURA 4.10. RESPUESTA AL ESCALÓN A LAZO CERRADO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA.	78
FIGURA 4.11. LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA.	79

FIGURA 4.12. PRUEBA DE NYQUIST PARA EL SISTEMA DISCRETO A LAZO ABIERTO.	80
FIGURA 4.13. DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO CON CONTROLADOR PID.	82
FIGURA 4.14. CONTROLADOR P PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO.	82
FIGURA 4.15. CONTROLADOR PI PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO.	83
FIGURA 4.16. CONTROLADOR PD PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO.....	83
FIGURA 4.17. CONTROLADOR PID PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO.....	84
FIGURA 4.18. DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO CON CONTROLADOR PID.	85
FIGURA 4.19. CONTROLADOR P PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO.....	86
FIGURA 4.20. CONTROLADOR PI PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO.....	86
FIGURA 4.21. CONTROLADOR PD PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO.	87
FIGURA 4.22. CONTROLADOR PID PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO.	87
FIGURA 4.23. DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA OBTENCIÓN DE LA MATRIZ K ÓPTIMA.....	90
FIGURA 4.24. RESPUESTA AL ESCALÓN DEL SISTEMA CONTINUO CON CONTROLADOR LQR CON PARÁMETROS DE LA REGLA DE BRYSON.....	92
FIGURA 4.25. RESPUESTA AL ESCALÓN DEL SISTEMA CONTINUO CON CONTROLADOR LQR CON PARÁMETROS DE LA ÚLTIMA ITERACIÓN.	93
FIGURA 4.26. RESPUESTA AL ESCALÓN DEL SISTEMA DISCRETO CON CONTROLADOR LQR CON PARÁMETROS DE LA REGLA DE BRYSON.....	94
FIGURA 4.27. DIAGRAMA ILUSTRADO DEL PROTOTIPO BOLA Y BARRA.....	96
FIGURA 4.28. SERVOMOTOR.	97
FIGURA 4.29. SENSOR ULTRASÓNICO.	98
FIGURA 4.30. ARDUINO UNO.	100
FIGURA 4.31. POSICIÓN DE LA BOLA EN LA IMPLANTACIÓN DEL CONTROLADOR PD DEL MODELADO TEÓRICO CONTINUO.....	101
FIGURA 4.32. POSICIÓN DE LA BOLA EN LA IMPLANTACIÓN DEL CONTROLADOR PD DEL MODELADO TEÓRICO DISCRETO.	102
FIGURA 4.33. SUPERPOSICIÓN DE TRES DEMOSTRACIONES DE LA IMPLANTACIÓN DEL CONTROLADOR PD (MODELADO TEÓRICO DISCRETO).	103
FIGURA 4.34. IMPLEMENTACIÓN FINAL DEL PID CON PARÁMETROS EMPÍRICOS.....	105
FIGURA 4.35. SUPERPOSICIÓN DE LAS 3 PRUEBAS DE LA IMPLANTACIÓN DEL CONTROLADOR LQR (MODELADO TEÓRICO CONTINUO).....	108
FIGURA 4.36. SEÑAL PSEUDO ALEATORIA DE ENTRADA (ÁNGULO DE LA BARRA) APLICADA AL SISTEMA FÍSICO.	110
FIGURA 4.37. MUESTRA 1 DEL MODELADO EXPERIMENTAL.	111

FIGURA 4.38. MUESTRA 2 DEL MODELADO EXPERIMENTAL.	112
FIGURA 4.39. MUESTRA 3 DEL MODELO EXPERIMENTAL.	112
FIGURA 4.40. MUESTRA 4 DEL MODELO EXPERIMENTAL.	113
FIGURA 4.41. MUESTRA 5 DEL MODELO EXPERIMENTAL.	113
FIGURA 4.42. SEÑAL DE ENTRADA U1 (ABAJO) VERSUS LAS CINCO MUESTRAS DE LA SEÑAL DE SALIDA Y1 (ARRIBA) DEL MODELADO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL.....	115
FIGURA 4.43. PORCENTAJE DE VALIDACIÓN PARA LA MUESTRA 2 UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ARMAX.	116
FIGURA 4.44. PORCENTAJE DE VALIDACIÓN PARA LA MUESTRA 1 UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ARMAX.	117
FIGURA 4.45. PORCENTAJE DE VALIDACIÓN PARA LA MUESTRA 3 UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ARMAX.	117
FIGURA 4.46. PORCENTAJE DE VALIDACIÓN PARA LA MUESTRA 4 UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ARMAX.	118
FIGURA 4.47. PORCENTAJE DE VALIDACIÓN PARA LA MUESTRA 5 UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ARMAX.	119
FIGURA 4.48. GRÁFICA DE AUTOCORRELACIÓN DE RESIDUOS Y CORRELACIÓN CRUZADA DE LA PRUEBA EXPERIMENTAL CON LA MUESTRA 2.	120
FIGURA 4.49. GRÁFICA DE AUTOCORRELACIÓN DE RESIDUOS Y CORRELACIÓN CRUZADA DE LA PRUEBA EXPERIMENTAL CON LA MUESTRA 1.	121
FIGURA 4.50. GRÁFICA DE AUTOCORRELACIÓN DE RESIDUOS Y CORRELACIÓN CRUZADA DE LA PRUEBA EXPERIMENTAL CON LA MUESTRA 3.	122
FIGURA 4.51. GRÁFICA DE AUTOCORRELACIÓN DE RESIDUOS Y CORRELACIÓN CRUZADA DE LA PRUEBA EXPERIMENTAL CON LA MUESTRA 4.	122
FIGURA 4.52. GRÁFICA DE AUTOCORRELACIÓN DE RESIDUOS Y CORRELACIÓN CRUZADA DE LA PRUEBA EXPERIMENTAL CON LA MUESTRA 5.	123
FIGURA 4.53. RESPUESTA AL ESCALÓN A LAZO ABIERTO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EXPERIMENTAL.....	125
FIGURA 4.54. LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAICES PARA LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EXPERIMENTAL.....	125
FIGURA 4.55. CONTROLADOR P PARA SIMULACIÓN CON MODELADO EXPERIMENTAL.	126
FIGURA 4.56. CONTROLADOR PI PARA SIMULACIÓN CON MODELADO EXPERIMENTAL.	127
FIGURA 4.57. CONTROLADOR PD PARA SIMULACIÓN CON MODELADO EXPERIMENTAL.	127
FIGURA 4.58. CONTROLADOR PID PARA SIMULACIÓN CON MODELADO EXPERIMENTAL.	128
FIGURA 4.59. RESPUESTA AL ESCALÓN DEL MODELO EXPERIMENTAL CON CONTROLADOR LQR CON PARÁMETROS DE LA REGLA DE BRYSON.....	130

INDICE DE TABLAS

TABLA 4.1. VARIABLE MANIPULADA.	65
TABLA 4.2. VARIABLES CONTROLADAS.	66
TABLA 4.3. PERTURBACIONES.	66
TABLA 4.4. PARÁMETROS DEL SISTEMA.	71
TABLA 4.5. PARÁMETROS Y RESPUESTA DE CONTROLES CLÁSICOS EN LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA CONTINUO.	84
TABLA 4.6. PARÁMETROS Y RESPUESTA DE CONTROLES CLÁSICOS EN LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA DISCRETO.	88
TABLA 4.7. ITERACIONES DE LQR PARA EL SISTEMA CONTINUO.	92
TABLA 4.8. ITERACIONES DE LQR PARA EL SISTEMA DISCRETO.	95
TABLA 4.9. TABLA DE CARACTERÍSTICAS DEL MODELO DEL SERVOMOTOR.	97
TABLA 4.10. TABLA DE CARACTERÍSTICAS DE LA TARJETA INTEGRADA ARDUINO UNO.	99
TABLA 4.11. TABLA COMPARATIVA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA IMPLEMENTACIÓN VERSUS LA SIMULACIÓN DE LA ESTRATEGIA PID.	104
TABLA 4.12. TABLA COMPARATIVA DE LAS PRUEBAS DE LA IMPLEMENTACIÓN CON CONTROLADOR PID EMPÍRICAS.	105
TABLA 4.13. TABLA COMPARATIVA DE LAS IMPLEMENTACIONES REALIZADAS CON EL PID.	106
TABLA 4.14. TABLA COMPARATIVA DE LAS PRUEBAS DE IMPLEMENTACIÓN PARA EL CONTROL LQR CON EL MODELADO TEÓRICO CONTINUO.	108
TABLA 4.15. TABLA COMPARATIVA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA IMPLEMENTACIÓN VERSUS LA SIMULACIÓN DE LA ESTRATEGIA LQR (SISTEMA CONTINUO).	109
TABLA 4.16. TABLA COMPARATIVA DE LAS MUESTRAS EXPERIMENTALES OBTENIDAS.	114
TABLA 4.17. COMPARACIÓN DE PORCENTAJE DE VALIDACIÓN ENTRE MUESTRAS EXPERIMENTALES.	123
TABLA 4.18. PARÁMETROS Y RESPUESTA DE CONTROLES CLÁSICOS EN LA SIMULACIÓN DEL MODELADO EXPERIMENTAL.	128
TABLA 4.19. ITERACIONES DE LQR PARA EL MODELADO EXPERIMENTAL.	130
TABLA 4.20. TABLA COMPARATIVA DE LOS CONTROLADORES IMPLEMENTADOS.	131

INDICE DE ECUACIONES

ECUACIÓN 2.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN SISTEMA DE N-ÉSIMO ORDEN.....	18
ECUACIÓN 2.2. TRANSFORMADA DE LAPLACE (1).	18
ECUACIÓN 2.3. TRANSFORMADA DE LAPLACE (2).	18
ECUACIÓN 2.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE (3).....	18
ECUACIÓN 2.5. TRANSFORMADA Z.	20
ECUACIÓN 2.6. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (1).....	22
ECUACIÓN 2.7. RELACIÓN ENTRADA-SALIDA PARA UN SISTEMA LIT.	22
ECUACIÓN 2.8. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (2)	23
ECUACIÓN 2.9. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (3)	23
ECUACIÓN 2.10. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA	23
ECUACIÓN 2.11. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN EL DOMINIO Z	24
ECUACIÓN 2.12. ECUACIONES DE ESTADO (1).....	27
ECUACIÓN 2.13. ECUACIONES DE SALIDA (1)	27
ECUACIÓN 2.14. ECUACIONES DE ESTADO (2).....	28
ECUACIÓN 2.15. ECUACIONES DE SALIDA (2).	28
ECUACIÓN 2.16. ECUACIONES DE ESTADO (3).....	29
ECUACIÓN 2.17. ECUACIONES DE SALIDA (3).	29
ECUACIÓN 2.18. MATRIZ DE CONTROLABILIDAD.....	30
ECUACIÓN 2.19. MATRIZ DE OBSERVABILIDAD.....	31
ECUACIÓN 2.20. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE SEXTO ORDEN.....	36
ECUACIÓN 2.21. FORMA GENERAL DEL CONTROLADOR PID	38
ECUACIÓN 2.22. FUNCIÓN DE COSTO J DEL CONTROLADOR LQR	40
ECUACIÓN 2.23. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE COSTO J DEL CONTROLADOR LQR.....	40
ECUACIÓN 2.24. EXPRESIÓN DE RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS DEL CONTROLADOR LQR.....	40
ECUACIÓN 2.25. MATRIZ K DEL CONTROLADOR LQR.....	41
ECUACIÓN 2.26. ECUACIÓN ALGEBRAICA DE RICCATI.	41
ECUACIÓN 4.1. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE FUERZAS DE LA INTERACCIÓN DE LA BOLA CON LA BARRA	69
ECUACIÓN 4.2. POSICIÓN DE LA BOLA	92
ECUACIÓN 4.3. BALANCE DE TORQUE DE LA BOLA	70
ECUACIÓN 4.4. MOMENTO DE INERCIA SOBRE LA BOLA	92
ECUACIÓN 4.5. ECUACIÓN QUE RELACIONA LA POSICIÓN DE LA BOLA CON EL ÁNGULO DE LA BARRA	70
ECUACIÓN 4.6. ECUACIÓN LINEALIZADA QUE RELACIONA LA POSICIÓN DE LA BOLA CON EL ÁNGULO DE LA BARRA	71

ECUACIÓN 4.7. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA POSICIÓN DE LA BOLA CON EL ÁNGULO DE LA BARRA .	71
ECUACIÓN 4.8. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA BOLA Y BARRA	92
ECUACIÓN 4.9. MODELO DE ESPACIO ESTADO DEL SISTEMA BOLA Y BARRA.....	92
ECUACIÓN 4.10. MODELO DE ESPACIO ESTADO DISCRETO	73
ECUACIÓN 4.11. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA	73
ECUACIÓN 4.12. MATRIZ DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA	75
ECUACIÓN 4.13. MATRIZ DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA	76
ECUACIÓN 4.14. MATRIZ DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA EN SU VERSIÓN DISCRETA	79
ECUACIÓN 4.15. MATRIZ DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA EN SU VERSIÓN DISCRETA	80
ECUACIÓN 4.16. ECUACIÓN DE ESTADO DEL MODELO MATEMÁTICO TEÓRICO	89
ECUACIÓN 4.17. ECUACIÓN DE ESTADO DE SALIDA	89
ECUACIÓN 4.18. MATRICES Q, R Y K DE LA ECUACIÓN DE RICCATI.....	89
ECUACIÓN 4.19. ECUACIÓN PARA DETERMINAR LOS COEFICIENTES DE Q Y R SEGÚN LA REGLA DE BRYSON	920
ECUACIÓN 4.20. COEFICIENTES DE BRYSON PARA EL CONTROLADOR LQR DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA.....	921
ECUACIÓN 4.21. MATRIZ K SEGÚN LOS COEFICIENTES DE BRYSON PARA LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA	921
ECUACIÓN 4.22. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EXPERIMENTAL	115

INTRODUCCIÓN

La teoría de control ha estado muy presente en la tecnología desde la revolución industrial, y en las últimas décadas se ha profundizado su aplicación y avances de manera exponencial. Este trabajo de investigación está fundamentado principalmente en promover dicho avance, y se pretende que con un modelo didáctico como lo es el Sistema Bola y Barra, se analice y se desarrolle profundamente el control óptimo lineal, mediante la utilización de un regulador cuadrático lineal.

Existen diferentes estrategias de control que son utilizadas en los diversos campos de la tecnología. Éstas, poseen características muy distintas entre ellas, tienen aplicaciones específicas, y dependiendo del fenómeno, unas son más eficientes que otras. El control clásico es una estrategia ampliamente conocida, y uno de los tipos más utilizados. Para esta investigación, además del control óptimo, se considera la estrategia clásica PID, y se incluye como objetivo a cumplir porque se espera un buen desempeño por parte del mismo, así como para proporcionarlo como comparación con el desempeño del regulador cuadrático lineal.

Se espera hacer una contribución significativa al avance de estas tecnologías en la localidad presente, para complementar las investigaciones existentes, profundizar los conocimientos del control óptimo y sus aplicaciones, y extrapolar tales conocimientos para aplicaciones prácticas ya sea industriales, comerciales, o militares.

Este trabajo de investigación está ordenado en cuatro capítulos. En el primer capítulo se describe la problemática, los objetivos de la investigación, así como la justificación y la delimitación del trabajo. Luego, en el capítulo II se hace referencia

a los antecedentes consultados para la realización del trabajo, al igual que la redacción de las bases teóricas, extraídas de varios libros académicos y artículos, ya sea de sistemas de control en tiempo continuo y en tiempo discreto, de identificación de sistemas, de la teoría del control óptimo, entre otros.

En el capítulo III se consigue la clasificación de la investigación según el tipo y el diseño, y las técnicas y herramientas de recolección de datos. Adicionalmente, están presentes las fases de la investigación. En última instancia se tiene el cuarto capítulo, en el cual se desarrollan los objetivos específicos, siguiendo cada una de las actividades explicadas en cada fase.

Es menester mencionar las conclusiones, en las cuales se presenta el veredicto de la investigación, así como las recomendaciones en las cuales se redactan los aspectos sugeridos para posteriores investigaciones y por último, se consiguen los anexos, los cuales son necesarios para complementar el trabajo.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento y formulación del problema

La teoría de control ha sido un pilar indispensable en el desarrollo tecnológico del mundo contemporáneo en este último siglo. Los avances y la automatización en las industrias son producto de la aplicabilidad de cientos de diferentes sistemas controlados, los cuales se han hecho más óptimos e innovadores gracias a nuevas técnicas y herramientas mediante ciencias aplicadas como la electrónica, las comunicaciones y la computación.

Esto ocurrió gracias a la influencia de la industrialización, el mercado de la guerra y la evolución del transporte durante los siglos XIX y XX, y hoy en día sigue el desarrollo de esta materia, producto de la necesidad de innovar, revolucionar y ser más eficientes en un mundo globalizado.

Un sistema de control según Dorf y Bishop (2005) “es una interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionarán una respuesta deseada” (p.2). Dichos sistemas pueden ser a lazo abierto, cuando la salida no afecta la acción de control impuesta por la entrada, o a lazo cerrado, cuando se mantiene una relación prescrita entre la salida y entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como acción de control.

Los sistemas poseen ciertas características que lo definen de forma específica dentro del área de controles, y determinan la complejidad de su comportamiento. Una de ellas es la linealidad del sistema. Morón (2011, p.49) puntualiza que:

Un sistema lineal, en tiempo continuo o discreto, es aquel que posee la importante propiedad de la superposición. Para esta clase de sistemas, si una entrada consiste de la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es la superposición- es decir, la suma ponderada- de las respuestas del sistema a cada una de esas señales.

De acuerdo a lo mencionado por Morón, un sistema no lineal es todo aquel que no cumpla con la propiedad de superposición. Por consiguiente, cualquier sistema de esta particularidad será mucho más difícil de modelar matemáticamente y su comportamiento con respecto a una entrada será menos predecible.

Asimismo, el número de variables controladas (variables de salida) y manipuladas (variables de entrada) son otra característica, por ello existen varias denominaciones para cada tipo de sistema, dependiendo si tiene una o varias variables de entrada, así como variables de salida. Las abreviaciones de estos sistemas son en inglés: SISO (una entrada, una salida), SIMO (una entrada, múltiples salidas), MISO (múltiples entradas, una salida) y MIMO (múltiples entradas, múltiples salidas) (Universidad de Oviedo, 2003).

Por otra parte, está la característica de acoplamiento; la Universidad Tecnológica Nacional (2004) la define como "un concepto abstracto que nos indica el grado de interdependencia entre módulos" (p.31). Es decir, cuando los módulos o componentes de un sistema son altamente acoplados, una o más de las variables de entrada afecta a una o más variables de salida. Mientras más notable sea el acoplamiento, más difícil será la aplicabilidad de un control.

Otro aspecto es la inestabilidad, que se define como la divergencia sin límite entre la salida y la entrada a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial (Ogata, 1998). Para evitar este comportamiento en la mayoría de los procesos, es necesaria la implementación de un controlador.

El conjunto de características explicadas anteriormente son capaces de describir a cabalidad un sistema físico cualquiera, tales como sistemas de seguimiento, reactores químicos, vehículos auto-balanceados, plantas de centrales eléctricas, aeronaves no tripuladas, entre otros. Por ello, cuando éstas son detalladas de manera apropiada, se tendrá una comprensión exacta de cómo abordar la resolución de los problemas del sistema a analizar.

Por lo anteriormente mencionado, la presente investigación se centra en el estudio de un sistema bola y barra, el cual se caracteriza por ser no lineal, SIMO, altamente acoplado e inestable a lazo abierto, y que debido a estas características, el diseño e implementación de un controlador es complejo.

Ahora bien, el sistema bola y barra es un sistema físico constituido por una barra metálica soportada por una base de madera. Encima de ella, estará colocada una masa esférica que variará su posición conforme a la variación del ángulo de la barra. Este ángulo cambia por medio de la acción de un servomecanismo instalado en su eje. El objetivo es situar la masa esférica en una posición de referencia establecida, esto se puede lograr gracias a dos controladores y dos retroalimentaciones: la del ángulo de la barra y la posición de la bola sobre la barra.

Existen diversas estrategias de control. Entre ellas es importante destacar el control clásico, el cual apareció por primera vez durante los años 30, cuando se desarrollaron los primeros reguladores de acción proporcional para sistemas mecánicos, que precedieron al control integral, introducido en un regulador de temperatura patentado por Mason en 1931. Posteriormente, a finales de los años 30 se introdujo la acción derivativa en controladores neumáticos dando lugar así al regulador PID de 3 términos (Piedrafita, Romero, Estrada, Iñigo, 2002).

Por otro lado, a la presente investigación le precede el trabajo especial de grado titulado "Controlador PID digital para un sistema de barra equilibrada", desarrollado por Petit y Ramírez en 2013 en la Universidad Rafael Urdaneta (Maracaibo, Venezuela). Este proyecto estuvo orientado al diseño, construcción física, simulación e implementación de un controlador PID para el sistema bola y barra.

El controlador clásico implementado arrojó resultados satisfactorios en cuanto a la regulación del sistema y la capacidad de mantener la respuesta dentro de una región estable. No obstante, se registraron tiempos de estabilización de 18 segundos en promedio, lo cual fue considerado poco eficiente (Petit y Ramírez, 2013).

Por lo tanto, entre las conclusiones de dicha investigación, se recomendó la implementación de otros tipos de controles pertenecientes a otras ramas de la teoría de control así como la utilización de sistemas micro procesados más prácticos como la plataforma Arduino (Petit y Ramírez, 2013).

Entre las gamas de la teoría de control posibles a implementar, se encuentra el control óptimo lineal, el cual fue introducido a partir de los años 50 con el objetivo de solucionar los problemas planteados en aplicaciones aeroespaciales y que recibió un gran impulso gracias al desarrollo de las computadoras digitales; en esta rama se encuentra el regulador cuadrático lineal (LQR) y el control lineal cuadrático gaussiano (LQG) (Piedrafita et al., 2002).

De la misma manera, en el trabajo de investigación titulado "Control of a Ball and Beam System" realizado por Wei Wang en 2007 en la Universidad de Adelaide (Australia), se desarrollaron diversos métodos de control para este mismo sistema

y se especifica que los métodos LQR y LQG consiguen el mejor desempeño (Wang, 2007).

Basado en estas referencias, se eligió la rama del control óptimo lineal para su utilización en el sistema físico de bola y barra, debido a que existe la posibilidad de una mejora en el desempeño del comportamiento del sistema, en contraste con el control clásico PID.

Tomando en cuenta lo anteriormente expuesto, es pertinente realizarse las siguientes preguntas:

- ¿Qué consideraciones deben tomarse para la implantación de un controlador óptimo lineal?
- ¿Se podrá regular el sistema bola y barra mediante la implementación de un controlador LQR?
- ¿Mejorará el control LQR las respuestas dinámicas del regulador PID?

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo general

- Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra.

1.2.2. Objetivos específicos

- Identificar las variables que interactúan en la estabilización del sistema bola y barra.
- Definir el modelo matemático del sistema físico.
- Analizar el modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial.
- Diseñar los controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio.
- Implantar los controladores en un sistema microprocesado.
- Evaluar los controladores implementados.

1.3. Justificación e importancia de la investigación

Desde el punto de vista técnico, el sistema a analizar posee varias características de control que son afines a procesos químicos, de mecatrónica, eléctricos, entre otros. Por ello es de gran importancia la realización de la presente investigación, ya que al poder controlar este sistema dichos conceptos podrían extrapolarse al control de diversos procesos industriales.

Por otra parte, desde el enfoque teórico se estaría validando un conjunto de teorías de control óptimo a ser utilizadas en el sistema, al igual que se espera verificar la efectividad del control LQR.

También, como beneficios personales para los autores de esta investigación se consolidarán y ampliarán enseñanzas adquiridas en la cátedra de sistemas de control y estos conocimientos se podrán aplicar en algún ámbito de trabajo o futuros estudios.

Por último, desde una perspectiva académica se sentará una base de estudio más amplia, para que otros estudiantes interesados en la cátedra mencionada puedan aprovechar este trabajo y utilizarlo como antecedente para futuras investigaciones relacionadas con la aplicación del control óptimo, la simulación de sistemas dinámicos y la implementación de controladores a sistemas físicos.

1.4. Delimitación

1.4.1. Espacial

Este trabajo especial de grado se realizará en el laboratorio de electrónica de la Universidad Rafael Urdaneta, Avenida 2 con calle 86, Maracaibo, estado Zulia, Venezuela.

1.4.2. Temporal

El tiempo estimado para la realización de la investigación es de seis meses.

1.4.3. Científica

Este trabajo de investigación se encuentra dentro del ámbito de la Ingeniería Eléctrica, utilizando el conocimiento de las siguientes cátedras: circuitos eléctricos, electrónica, microprocesadores y sistemas de control.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

Como antecedentes para el presente trabajo de investigación se mencionan una serie de estudios que se relacionan con la problemática expuesta en el capítulo primero.

En el año 2013, Esthefany Petit y Oswald Ramírez, realizaron su trabajo de investigación titulado: CONTROL PID DIGITAL PARA UN SISTEMA DE BARRA EQUILIBRADA, en la Universidad Rafael Urdaneta, Maracaibo, Venezuela.

El objetivo principal de la investigación mencionada consistió en implementar un controlador PID para el mismo sistema de bola y barra, y en el cual abarcaba la realización de los siguientes objetivos específicos: 1) identificar las variables dinámicas que interactúan en la estabilización de la barra, 2) seleccionar los distintos materiales y equipos a utilizar en el sistema de barra, 3) definir las estructuras de los modelos matemáticos de la barra equilibrada, 4) diseñar un control PID bajo técnicas de sintonización clásica y moderna, aplicadas a la estabilización de la barra y 5) implantar el sistema de control.

Esta investigación fue de tipo explicativa, y de diseño experimental. Su basamento teórico fue extraído principalmente de libros de sistemas de control, así como de artículos técnicos de internet. Tuvo como alcance la implementación de un control PID de un sistema bola y barra el cual fue implantado en un circuito microprocesado y puesto en marcha en un prototipo construido con materiales ergonómicos, y analizado mediante técnicas computacionales. Dentro de las cinco

fases comprendidas en el estudio en descripción, la primera fase consistió en la identificación de las variables dinámicas del sistema, luego en la selección de los materiales y equipos a utilizar en el sistema de barra, definición de estructuras de los modelos matemáticos, el diseño del control PID bajo técnicas de sintonización clásica y moderna aplicadas a la estabilización de la barra, y por último la quinta fase implicó la implantación del sistema de control.

Los autores concluyeron que el modelado matemático del sistema demostró que su comportamiento es inestable por naturaleza, y que con la aplicación de un control PID fue posible alcanzar la regulación del sistema de barra equilibrada de manera eficaz pero no eficiente.

Este trabajo especial de grado se considera antecedente directo para la presente investigación, ya que el prototipo de bola y barra diseñado y construido por esos autores va a ser utilizado para implementar el controlador LQR. Por ello, el sistema físico que se va a estudiar es el mismo, al igual que parte de los procedimientos, puesto que también está incluida la implementación del control clásico, aunque se hará únicamente para comparar sus resultados con el regulador cuadrático lineal.

En el año 2007, Wei Wang realizó un trabajo de investigación titulado: CONTROL OF A BALL AND BEAM SYSTEM, en la Universidad de Adelaide, Adelaide, Australia.

Esta investigación tuvo varios propósitos, los cuales son los siguientes: 1) construir un modelo de simulación para el sistema, 2) construir la planta real del sistema, 3) determinar los parámetros del sistema, 4) diseñar varios controladores lineales y comparar los resultados utilizando distintas técnicas de control, 5) usar los controles diseñados para controlar la planta, y comparar los distintos

desempeños y 6) si el tiempo lo permite, aplicar técnicas más avanzadas como controles no lineales y control robusto.

En resumen, el trabajo de Wang se basó en la comparación del control clásico con el control óptimo bajo diferentes estructuras de control. Los resultados obtenidos en esta investigación especificaron que en la simulación del sistema bajo distintas estructuras de control, el de mejor desempeño fue el control LQR sobre el control de ubicación de polos. Las recomendaciones indicadas se refirieron a la mejora del sensor de la posición de la bola, que en este caso es un divisor de voltaje dado por la posición en la que está la bola. La fricción generaba imperfecciones en el movimiento de la bola a lo largo de la barra, fenómeno que no fue considerado en el modelado matemático de este proyecto. También se recomendó la aplicación de controles no lineales y control robusto para este proyecto, ya que el sistema físico en estudio es no lineal.

El mencionado antecedente de Wang tiene importancia ya que posee un conjunto de fundamentos teóricos útiles para el desarrollo del presente estudio. El uso del control lineal cuadrático gaussiano y el regulador lineal cuadrático por parte de este autor, será referencia principal para la presente investigación.

En el año 2004, Evencio Rosales realizó un artículo científico de un trabajo de investigación titulado: BALL-ON-BEAM PROJECT KIT, en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT), Massachusetts, Estados Unidos.

Este trabajo consistió en la construcción económica y sencilla de un sistema de bola y barra, y se enfatizó en la utilización del sistema para posterior uso educacional. Procede con la descripción del modelo matemático, el cual tiene mucha similitud con el presente estudio, exceptuando parámetros distintos.

También detalló el diseño mecánico, los materiales utilizados, el costo total del proyecto y el proceso de construcción.

Luego de las especificaciones y la implementación del control –para este proyecto un controlador proporcional integral– se concluyó que el control de la bola sobre la barra fue un éxito ya que la bola volvía a su estado predeterminado, de manera eficiente. Los programas utilizados fueron SIMULINK y ControlDesk para el diagrama de bloques del sistema, las respuestas en el tiempo y la estabilización de la variable manipulada.

Se incluyó este antecedente debido a la importancia de su modelo matemático y diagrama de bloques del sistema, ya que estos poseen los mismos principios teóricos que la investigación en curso y también permitirá comparar distintas metodologías aplicadas al análisis y definición del sistema bola y barra.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Sistema de control

Un sistema de control es la conexión de varios componentes, que van a formar cierta configuración de tal manera que la respuesta de dicho sistema sea la que se desea (Dorf y Bishop, 2005). Esto tiene como objeto controlar cierto proceso de cualquier naturaleza, para darle un uso productivo y efectivo.

Ya especificado el objetivo de un sistema de control, se precisa que un proceso es una operación conformada por una serie de actividades relacionadas que se realizan de manera progresiva, que conducen a un resultado con un propósito

determinado. Un proceso puede ser representado mediante un bloque, de la siguiente manera:

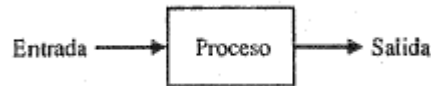


Figura 2.1. Representación de un proceso (Dorf y Bishop, 2005).

“La relación entrada-salida representa la relación causa y efecto del proceso, que a su vez representa un procesamiento de la señal de entrada para proporcionar una señal de salida.” Dorf y Bishop (2005, p.2)

Los sistemas de control, según su estructura pueden ser divididos en dos clasificaciones: sistemas de control a lazo abierto, y sistemas de control a lazo cerrado.

Un sistema de control a lazo abierto utiliza un actuador o regulador para obtener la respuesta deseada, como se muestra en la figura:

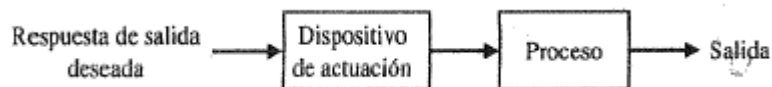


Figura 2.2. Sistema de control a lazo abierto (Dorf y Bishop, 2005).

En un sistema de control a lazo abierto “no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada” Ogata (1998, p.7), por lo que no pueden satisfacer criterios de desempeño críticos.

A diferencia de un sistema de control a lazo abierto, un sistema de control a lazo cerrado utiliza una medida o señal de realimentación de la salida real, para compararla con las respuestas de la salida deseada (Dorf y Bishop, 2005). La realimentación tiene como objeto disminuir el error entre la respuesta de salida deseada y la salida del sistema. En la siguiente figura se representa un sistema de control a lazo cerrado:

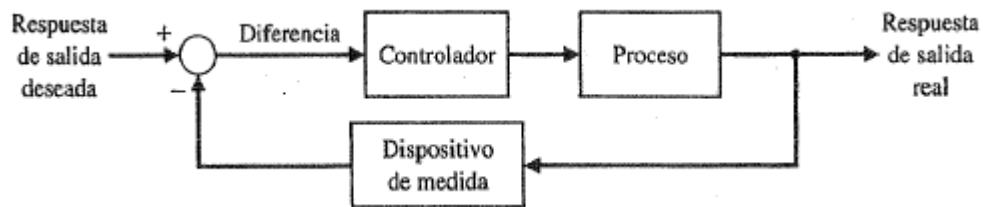


Figura 2.3. Sistema de control a lazo cerrado (Dorf y Bishop, 2005).

2.2.2. Modelado matemático

El modelado matemático es una serie de ecuaciones diferenciales que tienen la tarea de representar el sistema dinámico de la manera más precisa posible. Cualquier tipo de proceso, ya sea mecánico, eléctrico, térmico, económico, se va a describir mediante ecuaciones diferenciales. Parte del procedimiento en un modelado matemático involucra la identificación de variables que describen el sistema. “En general, dado un proceso controlado, primero se debe definir el conjunto de variables que describen las características dinámicas de dicho proceso” Kuo (1996, p.77). A lo largo de esta sección se van a definir una serie de fundamentos básicos relacionados con el modelado matemático de los sistemas.

2.2.2.1. Ecuación diferencial

“Una gran variedad de sistemas de ingeniería se modelan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones generalmente involucran variables dependientes con respecto a la variable independiente” Kuo (1996, p.25).

En general, la ecuación diferencial de un sistema de n-ésimo orden se escribe como:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad (\text{Ec. 2.1})$$

2.2.2.2. Transformada de Laplace

Dada la función real $f(t)$ que satisface la condición:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (\text{Ec. 2.2})$$

Para alguna σ real finita, la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{Ec. 2.3})$$

O

$$F(s) = \text{transformada de Laplace de } f(t) = L[f(t)] \quad (\text{Ec. 2.4})$$

La variable s se denomina el operador de Laplace, que es una variable compleja; esto es $s = \sigma + j\omega$ donde σ es la parte real y $j\omega$ la parte imaginaria. La ecuación 2.3 se llama transformada de Laplace unilateral, porque se evalúa desde $t=0$ hasta el infinito. La información de la función para tiempos menores a cero, es ignorada o se considera cero (Kuo, 1996). La variable s se puede describir en el plano complejo como:

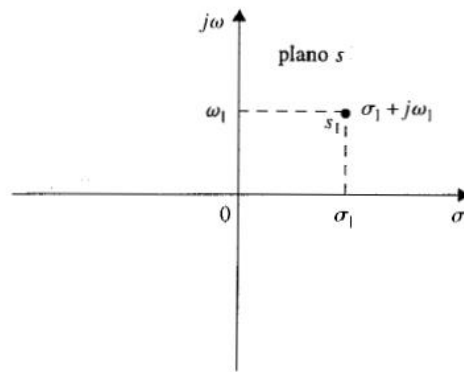


Figura 2.4. Plano complejo s (Kuo, 1996).

Esto no es una limitante ya que en los estudios en el dominio del tiempo para problemas lineales, el tiempo de referencia es $t=0$. Por otro lado, cuando se aplica una función de entrada en tiempo cero, la respuesta del sistema comenzará desde cero, por lo que tiempos menores a cero no son importantes. En otras palabras, la respuesta de un sistema no precede a la excitación. Tal sistema es conocido como causal, es decir, físicamente realizable. Es importante considerar a partir de esta declaración que todos los sistemas físicos son causales (Kuo, 1996).

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales pueden resolverse mediante el método de la transformada de Laplace. Primero debe transformarse la ecuación diferencial al dominio de s mediante la transformada de Laplace, se manipulan las ecuaciones y se resuelven para la variable de salida, se realiza una expansión en

fracciones parciales, y finalmente se obtiene la transformada inversa, llevando al dominio del tiempo una vez más la ecuación.

2.2.2.3. Transformada Z

Las señales en tiempo discreto surgen si el sistema involucra la operación de muestreo de señales en tiempo continuo. La señal muestreada es $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$,..., donde T es el periodo de muestreo. Tal secuencia de valores, que surge de la operación de muestreo, se puede escribir de manera general como $x(kT)$ (Ogata, 1996).

Al considerar la transformada z de una función del tiempo $x(t)$, sólo se toman en cuenta los valores muestreados de $x(t)$, esto es: $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$,..., donde T es el periodo de muestreo (Ogata, 1996).

El método de la transformada z es un método operacional muy poderoso cuando se trabaja con sistemas en tiempo discreto. Al considerar la transformada z de una función del tiempo $x(t)$, donde t es positivo, o de la secuencia de valores $x(kT)$, donde k adopta valores de cero o de enteros positivos y T es el periodo de muestro, se define mediante la siguiente ecuación:

$$X(z)=Z[x(t)]=Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

2.2.2.4. Sistemas lineales

Un sistema lineal corresponde a todo sistema que posea la propiedad de la superposición. Es decir, si una entrada consiste en la suma ponderada de varias

señales, entonces la salida es la superposición de las respuestas del sistema a cada una de esas señales. En otras palabras, es la suma ponderada de las respuestas del sistema (Morón, 2011).

Siendo $y_1(t)$ la respuesta a la entrada $x_1(t)$ y siendo $y_2(t)$ la respuesta a la entrada $x_2(t)$, entonces el sistema será lineal, si, según Morón (2011, p.49) cumple con las siguientes características: “a) la respuesta a $x_1(t)+x_2(t)$ es $y_1(t)+y_2(t)$. Propiedad de aditividad, y b) la respuesta a $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, donde α es cualquier constante. Propiedad de homogeneidad o de escalamiento”. Un sistema no lineal es, simplemente, todo aquel sistema que no cumpla con estas características.

Cuando los sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo operan alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas, es posible aproximarlos mediante un sistema lineal. Tal sistema es equivalente al no lineal considerado dentro de un rango limitado de operación. Este modelo, linealizado es muy importante para ingeniería de control (Ogata, 1998).

2.2.2.5. Función de transferencia

Para el modelado de sistemas lineales se suele utilizar la función de transferencia para representar las relaciones entre las variables del proceso. Para determinar una función de transferencia, se puede emplear la respuesta al impulso.

Considerando un sistema lineal invariante en el tiempo que tiene una entrada $u(t)$ y una salida $y(t)$ el sistema puede caracterizarse por su respuesta al impulso $g(t)$ que es definida como la salida cuando la entrada es una función impulso unitario $\delta(t)$. Al conocer la respuesta al impulso de un sistema lineal, la salida del sistema

se puede encontrar para cualquier entrada mediante la función de transferencia (Kuo, 1996).

“La función de transferencia es definida como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con todas las condiciones iniciales iguales a cero” Kuo (1996, p.78). La función de transferencia puede ser descrita como:

$$G(s)=L[g(t)]=\frac{Y(s)}{U(s)} \quad (\text{Ec. 2.6})$$

En la práctica, la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo con entrada en tiempo continuo, se describe mediante ecuaciones diferenciales. La función de transferencia se obtendrá de dichas ecuaciones, que son representadas como ecuaciones de n-ésimo orden con coeficientes reales constantes (Kuo, 1996).

La relación entrada-salida de un sistema lineal invariante en el tiempo se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (\text{Ec. 2.7})$$

La solución mediante el método que emplea las ecuaciones diferenciales de forma exclusiva, resulta tedioso y no se utiliza a menudo en análisis de sistemas de control. Por lo general, en términos de simulación, se comienza con la función de transferencia (Kuo, 1996).

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal representado en la ecuación 2.6, se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación, y suponiendo condiciones iniciales cero.

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0\right) U(s) \quad (\text{Ec. 2.8})$$

La función de transferencia entre $u(t)$ y $y(t)$ está dada por:

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{Ec. 2.9})$$

Por otro lado, la función de transferencia es independiente de la entrada del sistema. Hay que recordar que se expresan únicamente en función de la variable compleja s , y no en función de cualquier otra variable independiente. Además es pertinente recalcar, que la función de transferencia está definida solamente para un sistema lineal invariante con el tiempo y no está definida para sistemas no lineales (Kuo, 1996).

Luego de haber explicado la función de transferencia, es menester definir la ecuación característica: “es la ecuación que se obtiene al hacer que el polinomio denominador de la función de transferencia sea cero” Kuo (1996, p.80). La ecuación característica se define de la siguiente manera:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (\text{Ec. 2.10})$$

Es importante destacar que la estabilidad de los sistemas lineales con una entrada y una salida está gobernada completamente por las raíces de la ecuación característica.

Adicionalmente, la función de transferencia en el dominio de z relaciona la transformada z de la salida en los instantes de muestreo correspondientes a la entrada muestreada (Ogata, 1996). Se define a continuación:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = Z[G(s)] \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Es importante recordar que la respuesta del sistema a una señal muestreada mediante impulso, puede no describir el correcto comportamiento de la respuesta en el tiempo para el sistema real (Ogata, 1996).

2.2.2.6. Diagramas de bloques

Los diagramas de bloques son la herramienta empleada por los ingenieros de control para el modelado de sistemas. El uso de los diagramas de bloques puede ser empleado para sistemas tanto lineales como no lineales.

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de las señales. Este diagrama muestra las relaciones entre componentes, y es distinta de una representación meramente matemática ya que éste tiene la ventaja de indicar en forma más realista los procesos del sistema real (Ogata, 1998).

En un diagrama de bloques se entrelazan todas las variables del sistema. El bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Es importante destacar que las funciones de transferencia son introducidas en bloques (Ogata, 1998). El diagrama de bloques de un sistema a lazo cerrado está mostrado en la figura 2.3. En la siguiente figura, se muestra un diagrama a lazo cerrado en función de s :

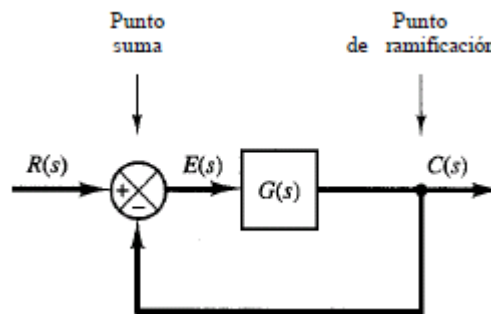


Figura 2.5. Diagrama de bloques en función de s de un sistema a lazo cerrado (Ogata, 1998).

2.2.3. Modelado de espacio estado

O también denominado diagramas de estado, es una representación matricial de ecuaciones diferenciales, en las que están involucradas varias variables de estado de un proceso a controlar.

El método de las variables de estado, en el cual se utilizan los diagramas de estado, es fundamental para el control óptimo. Una característica importante de la formulación en variables de estado es que se puede modelar de manera cualquier tipo de proceso: con una o varias variables, variantes o invariantes en el tiempo, y lineales o no lineales (Kuo, 1996).

Es de suma importancia la definición de estado en términos de sistemas de control, para que haya consonancia en el desarrollo de esta investigación. Ogata (1998, p.70) lo define como:

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) de modo que el conocimiento de esas variables en $t=t_0$ junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Las variables de estado determinan el estado del sistema dinámico. Si se necesitan n variables para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico denotadas x_1, x_2, \dots, x_n (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t=t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo) tales n variables son un conjunto de variables de estado (Ogata, 1998).

La selección de variables de estado no exige muchas limitaciones. Una variable que no representa cantidades físicas, o que no es medible ni observable, puede seleccionarse como una variable de estado. Esto da mucha libertad para el método de las variables de estado, aunque es recomendable en términos prácticos elegir variables fácilmente medibles, ya que las leyes de control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente (Ogata, 1998).

Si n cantidad de variables son necesarias para la descripción del comportamiento de un sistema, estas son consideradas los n componentes de un vector x , denominado vector de estado. Este determina de manera única el estado del sistema $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$ una vez que se obtiene el estado en $t=t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Ahora, un espacio de estados es todo espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje $x_1, x_2 \dots x_n$. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados (Ogata, 1998).

En el análisis de espacio estado, existen tres tipos de variables: variables de entrada, variables de salida y variables de estado. Están denotadas en las ecuaciones de estado de la siguiente manera:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t); w_1(t), w_2(t), \dots, w_v(t)] \quad (\text{Ec. 2.12})$$

Para las ecuaciones de estado, donde $i=1, 2, \dots, n$, la i -ésima variable de estado está representada por $x_i(t)$; donde $j=1, 2, \dots, p$ y la j -ésima entrada se denota $u_j(t)$; y $w_k(t)$ denota la k -ésima perturbación con $k=1, 2, \dots, v$ (Kuo, 1996).

Las ecuaciones de salida están descritas por las variables $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ como las q variables de salida del sistema. Por lo general, las variables de salida son funciones de las variables de estado y de las variables de entrada (Kuo, 1996). Tales ecuaciones, donde $j=1, 2, \dots, q$, de salida son representadas de la siguiente manera:

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t); w_1(t), w_2(t), \dots, w_v(t)] \quad (\text{Ec. 2.13})$$

El conjunto de n ecuaciones de estado de la ecuación 2.12 y de las q ecuaciones de salida de la ecuación 2.13 forman las ecuaciones dinámicas. Las mismas, para facilidad de expresión y manipulación, se expresan de manera matricial (Kuo, 1996). Se definen los siguientes vectores:

Vector de estado

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (n \times 1)$$

Vector de entrada

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (p \times 1)$$

Vector de salida

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad (q \times 1)$$

Vector de perturbación

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_v(t) \end{bmatrix} \quad (v \times 1)$$

Figura 2.6. Vectores de estado, entrada, salida y perturbación para el modelado de espacio estado (Kuo, 1996).

Así, las n ecuaciones de estado pueden escribirse:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)] \quad (\text{Ec. 2.14})$$

Donde \mathbf{f} denota una matriz columna de $n \times 1$ que contiene f_n funciones. De la misma manera, las q ecuaciones de salida de la ecuación 2.11 se convierten en:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)] \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, las ecuaciones dinámicas (ecuaciones de estado 2.14 y ecuaciones de salida 2.15) se escriben de la siguiente manera:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \quad (\text{Ec. 2.16})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t) \quad (\text{Ec. 2.17})$$

En donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (n \times p) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad (q \times n)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \quad (q \times p) \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1v} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nv} \end{bmatrix} \quad (n \times v) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1v} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{q1} & h_{q2} & \cdots & h_{qv} \end{bmatrix} \quad (q \times v)$$

Figura 2.7. Matrices de estado (Kuo, 1996).

Si bien la representación en el espacio de estados no es única para determinado sistema, la cantidad de variables de estado debe ser la misma para todas las formas.

2.2.3.1. Controlabilidad

Considerando un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por las ecuaciones dinámicas de estado 2.14 y 2.15, donde en la figura 2.6 se representan los vectores de estado, entrada, salida y perturbación respectivos, y

donde los coeficientes de las dimensiones apropiadas están definidos en la figura 2.7, según Kuo (1996, p.276) se puede decir que:

El estado $x(t)$ es controlable en $t=t_0$ si existe una entrada continua por intervalos $u(t)$ que moverá al estado a cualquier estado final $x(t_f)$ en un tiempo finito $(t_f-t_0) \geq 0$. Si cada estado $x(t_0)$ del sistema es controlable en un intervalo de tiempo finito, se dice que es un sistema de estado completamente controlable o simplemente controlable.

La condición de controlabilidad depende de los coeficientes de las matrices A y B del modelo de espacio estado, según el siguiente teorema:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.18})$$

Lo cual implica que para que el sistema descrito por la ecuación 2.14 sea completamente controlable, es necesario que la matriz de controlabilidad de $n \times nr$ tenga rango n . Algunas veces se dice que el par $[A, B]$ es controlable, lo que implica que S es de rango n (Kuo, 1996).

2.2.3.2. Observabilidad

Un sistema es completamente observable si cada variable de estado del sistema afecta a alguna de las salidas. Es conveniente obtener información sobre las variables de estado de las mediciones de salidas y entradas. Si cualquiera de los no es observable a partir de la medición de las salidas, se dice que el estado es no observable, y el sistema no es completamente observable. En otras palabras, Kuo (1996, p.280) lo define:

Considerando un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por las ecuaciones dinámicas de estado 2.14 y 2.15, se dice que el estado $x(t_0)$ es observable si dada cualquier entrada $u(t)$, existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$ tal que del conocimiento de $u(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$ son suficientes para determinar $x(t_0)$. Si cada estado del sistema es observable para un t_f finito, se dice que el sistema es completamente observable.

Dado el siguiente teorema:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.19})$$

Es necesario que la matriz de observabilidad de $n \times np$ tenga un rango n . En particular, si el sistema tiene sólo una salida, C es una matriz renglón de $1 \times n$; V es una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, el sistema sería completamente observable si V no es singular (Kuo, 1996).

2.2.4. Respuesta en el tiempo de un sistema de control

La descripción de la respuesta en el tiempo de un sistema de control es de gran interés debido a que el tiempo es la variable independiente en la gran mayoría de los sistemas a controlar (Kuo, 1996).

La respuesta en el tiempo se divide normalmente en dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. La respuesta transitoria se define como la parte de la respuesta total que se hace cero cuando el tiempo tiende a

infinito. Y la respuesta en estado estable es la parte de la respuesta total que permanece después de que la transitoria ha desvanecido (Kuo, 1996).

Para obtener la respuesta en el tiempo el sistema se debe evaluar con un escalón unitario, donde se obtiene lo siguiente:

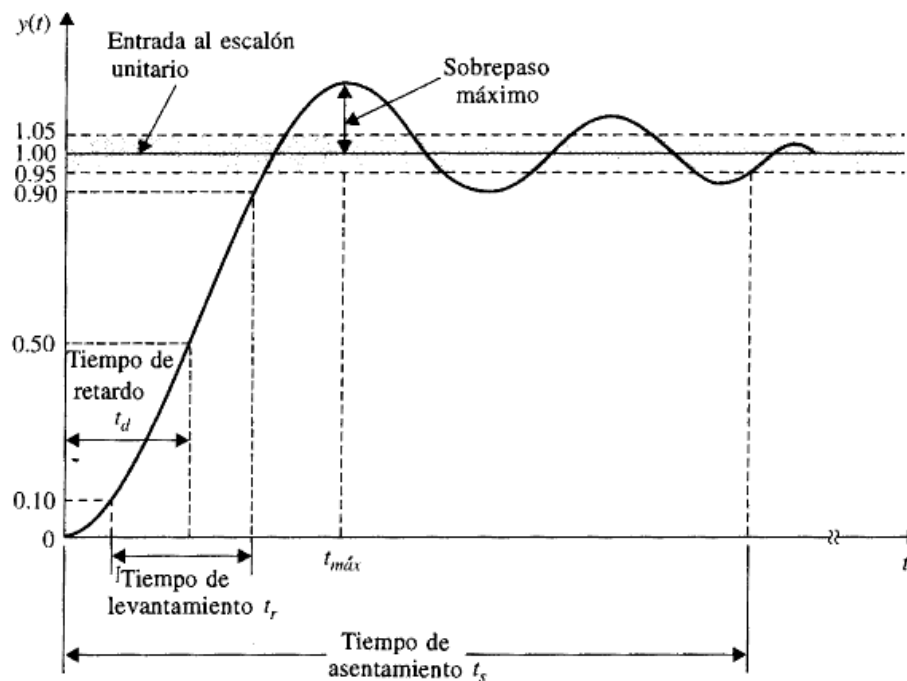


Figura 2.8: Respuesta típica al escalón unitario de un sistema de control (Kuo, 1996).

Las características que describen la respuesta son las siguientes (Kuo, 1996):

- **Sobrepaso máximo:** se define como el valor máximo de la respuesta menos el valor de la respuesta en estado estable y se usa para medir la estabilidad relativa de un sistema de control, ya que un sistema con gran sobrepaso es indeseable.

- Tiempo de retardo: se define como el tiempo requerido para que la respuesta alcance el 50% del valor final.
- Tiempo de levantamiento: se define como el tiempo requerido para que la respuesta se eleve del 10 al 90% de su valor final.
- Tiempo de asentamiento: se define como el tiempo requerido para que la respuesta permanezca dentro el 5% de su valor final.

Además de las características expuestas anteriormente se debe explicar el error de estado estable, el cual es definido como la diferencia entre la salida y la entrada de referencia (salida deseada en estado estable), por ello uno de los objetivos al diseñar un sistema de control es mantener el error de estado estable al mínimo o por debajo de cierto valor tolerable; así como también hacer que la respuesta transitoria satisfaga un conjunto de especificaciones (Kuo, 1996). Se muestra a continuación una gráfica representativa del error mencionado:

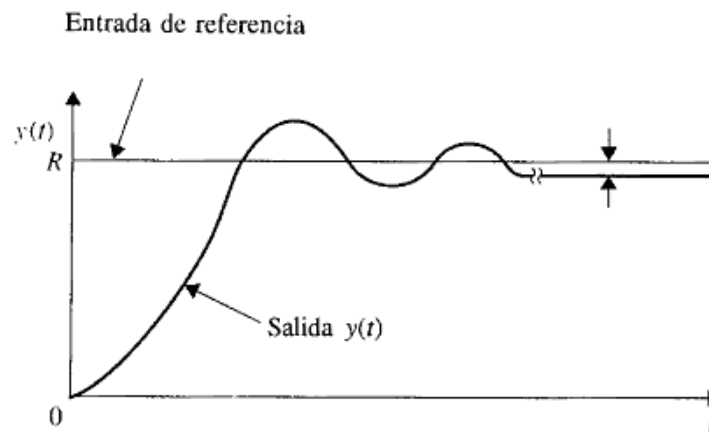


Figura 2.9: Error de estado estable típico, debido a una entrada escalón (Kuo, 1996).

2.2.5. Estabilidad

Según Dorf y Bishop (2005), "Un sistema estable se define como aquel que tiene una respuesta limitada. Esto es, se dice que el sistema es estable si, estando sujeto a una entrada o perturbación limitada, su respuesta es de magnitud limitada" (p.312). Este principio es aplicable a sistemas a lazo abierto y a lazo cerrado, mencionados anteriormente.

Además, la estabilidad se puede clasificar como absoluta y relativa. La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable o inestable, es una respuesta de sí o no. Cuando se sabe que un sistema es estable, es interesante determinar qué tan estable es, lo cual es una medida de estabilidad relativa (Kuo, 1996).

2.2.5.1. Estabilidad de entrada acotada y salida acotada (BIBO)

Sean $u(t)$ la entrada, $y(t)$ la salida y $g(t)$ la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Con condiciones iniciales cero, se dice que el sistema es estable de entrada-acotada/salida-acotada (Bounded-Input/Bounded-Output), o simplemente estable, si su salida $y(t)$ es acotada para una entrada $u(t)$ acotada (Kuo, 1996).

2.2.5.2. Relación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad

Para cumplir con los requisitos de estabilidad, las raíces de la ecuación característica, o los polos de $G(s)$, no pueden estar localizados en el semiplano derecho del plano s o todos deben quedar en el semiplano izquierdo del plano s

(Kuo, 1996). Se expone a continuación las regiones de estabilidad sobre el plano s :

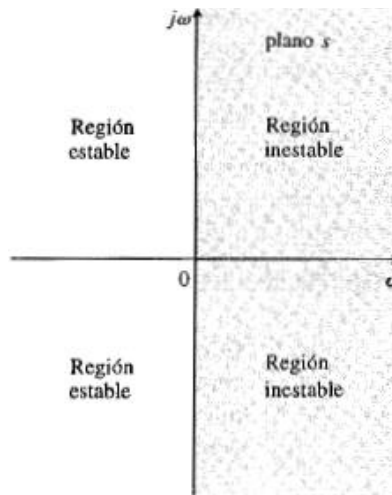


Figura 2.10. Regiones estable e inestable en el plano s (Kuo, 1996).

También se hace referencia a la situación en que la ecuación característica tenga raíces simples sobre el eje $j\omega$ y ninguna sobre el semiplano derecho del plano s , en este caso, el sistema se considera marginalmente estable o marginalmente inestable (Kuo, 1996).

2.2.5.3. Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz representa un método para determinar la localización de los ceros de un polinomio con coeficientes constantes reales con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s , sin obtener los ceros (Kuo, 1996).

Teniendo la ecuación característica mostrada en la ecuación 2.9, se debe formar el siguiente arreglo, por ejemplo, para una ecuación característica de sexto orden:

$$a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Y posteriormente se utiliza el tabulador de Routh, ejemplificado de la ecuación tal:

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$\frac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A$	$\frac{a_5a_3 - a_6a_1}{a_5} = B$	$\frac{a_5a_0 - a_6 \times 0}{a_5} = a_0$	0
s^3	$\frac{Aa_4 - a_5B}{A} = C$	$\frac{Aa_3 - a_5a_0}{A} = D$	$\frac{A \times 0 - a_5 \times 0}{A} = 0$	0
s^2	$\frac{BC - AD}{C} = E$	$\frac{Ca_0 - A \times 0}{C} = a_0$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	0
s^1	$\frac{ED - Ca_0}{E} = F$	0	0	0
s^0	$\frac{Fa_0 - E \times 0}{F} = a_0$	0	0	0

Figura 2.11. Tabulador de Routh (Kuo, 1996).

La columna de eses en el lado izquierdo se utiliza para propósitos de identificación. La columna de referencia mantiene el rastro de los cálculos, y el último renglón de la tabulación de Routh debe ser siempre el renglón s^0 (Kuo, 1996).

Al completar la tabulación de Routh, se deben investigar los signos de los coeficientes de la primera columna de la tabulación, que contiene la información sobre las raíces de la ecuación (Kuo, 1996).

Se dice que las raíces de la ecuación están todas en el semiplano izquierdo del plano s si todos los elementos de la primera columna de la tabulación de Routh son del mismo signo. Y también, el número de cambios de signos en los

elementos de la primera columna es igual al número de raíces con partes reales positivas o en el semiplano derecho del plano s (Kuo, 1996).

2.2.5.4. Diagrama de Nyquist

El criterio de Nyquist, Kuo (1996, p.334) lo define como:

“un método semigráfico que provee información sobre la diferencia entre el número de polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado que están en el semiplano derecho del plano s mediante la observación del comportamiento de la gráfica de Nyquist de la función de transferencia de lazo”.

Este criterio es significativo porque determina la estabilidad absoluta del sistema, provee información sobre la estabilidad relativa de un sistema estable y además el grado de inestabilidad si el sistema es inestable. También, la gráfica de Nyquist proporciona información sobre las características en el dominio de la frecuencia.

2.2.5.5. Diagrama de Bode

Este diagrama es una gráfica de la magnitud de la función de transferencia de lazo $G(j\omega)H(j\omega)$ en decibels y de la fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ en grados, en función de la frecuencia ω . La estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al observar el comportamiento de estas gráficas.

2.2.6. Controlador de tres términos (PID)

El controlador PID es ampliamente utilizado en procesos industriales debido a su buen comportamiento en un amplio intervalo de condiciones de operación y a su sencillez funcional, lo cual permite a los ingenieros operar con ellos de manera sencilla y directa (Dorf y Bishop, 2005). El mismo es representado por la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_D s \quad (\text{Ec. 2.21})$$

El controlador PID proporciona un término proporcional, un término integral y un término derivativo, por ello se debe buscar un parámetro para cada término. Donde la acción del término integral reduce el error de estado estable y la acción del término derivativo disminuye el tiempo de estabilización y el sobrepaso máximo.

2.2.7. Regulador cuadrático lineal (LQR)

Antes de llegar a la definición del regulador cuadrático lineal, es importante la descripción de varios conceptos necesarios para la adecuada comprensión de este método de control.

El control óptimo, primeramente, es una rama de control moderno que tiene el fin de proveer diseños analíticos. El sistema controlado como resultado del control óptimo, no necesariamente cumple los estándares de estabilidad, ni de tener cierto ancho de banda, o que satisfaga algún requerimiento común del el control clásico, sino que está diseñado para ser el mejor sistema posible de cierto tipo; por ello la palabra óptimo (Anderson, 1989).

El control lineal óptimo, por otro lado, es una sub-rama del control óptimo. Simplemente el proceso a controlar es asumido como lineal, y el controlador, que es el dispositivo que genera el control óptimo, está determinado para ser lineal. Los controladores lineales se consiguen con el desarrollo de índices de desempeño cuadráticos. Estos índices son cuadráticos en el control y regulación y seguimiento de errores de las variables. Tales métodos, los cuales consiguen el control óptimo lineal, son denominados métodos cuadrático-lineales (Anderson, 1989).

El regulador cuadrático lineal está representado de la siguiente manera:

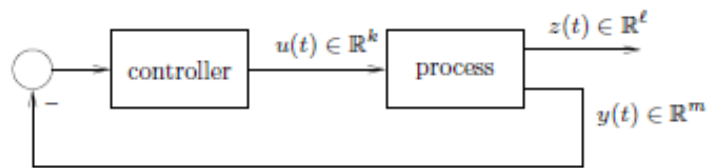


Figura 2.12. Configuración con retroalimentación del regulador cuadrático lineal (Hespanha, 2007).

Donde se pueden identificar las siguientes entradas y salidas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x &\in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, \\ y &= Cx, & y &\in \mathbb{R}^m, \\ z &= Gx + Hu, & z &\in \mathbb{R}^\ell \end{aligned}$$

Figura 2.13. Entradas y salidas de la figura 2.12. (Hespanha, 2007).

Las salidas son denominadas $y(t)$ y $z(t)$ donde $y(t)$ corresponde a señales que pueden ser medidas en el proceso y están disponibles para controlar. Por otro lado, $z(t)$ corresponde a señales de perturbaciones, y por lo tanto se desea que sean lo más pequeñas posibles.

El regulador óptimo consiste en conseguir la entrada de control $u(t)$, $t \in [0, \infty)$ que haga que la siguiente expresión sea lo más pequeña posible:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 + \rho \|u(t)\|^2 dt \quad (\text{Ec. 2.22})$$

Donde ρ es una constante positiva. Adicionalmente, el término de la izquierda representa la energía de la salida controlada y el término de la derecha (exceptuando la constante) representa la energía de la señal de control (Hespanha, 2007).

Se desea buscar un controlador que minimice ambas energías. Sin embargo, una menor energía de la salida controlada requiere una gran señal de control, y una pequeña señal de control conllevará a grandes salidas controladas. Por otra parte, la función de la constante es equilibrar la relación entre ambos términos, mediante la asignación arbitraria de valores (Hespanha, 2007). La forma general de la ecuación 2.22 es la siguiente:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} z(t)' Q z(t) + \rho u'(t) R u(t) dt \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Para solventar el problema mencionado, se utilizará la versión de retroalimentación de estados del regulador cuadrático lineal.

El regulador cuadrático lineal de retroalimentación de estados es una matriz simple de la forma:

$$u = -Kx \quad (\text{Ec. 2.24})$$

Donde K es la matriz p x n dada por:

$$K=(H'QH+\rho R)^{-1}(B'P+H'QG) \quad (\text{Ec. 2.25})$$

Y P es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$A'P+PA+G'QG-(PB+G'QH)(H'QH+\rho R)^{-1}(B'P+H'QG)=0 \quad (\text{Ec. 2.26})$$

Conocida como la ecuación algebraica de Riccati.

2.2.8. Sistema de bola y barra

El sistema físico bola y barra es muy representativo, ya que es simple y didáctico. Se utiliza para estudiar las diversas teorías de control en la ingeniería y es por ello que tiene una gran importancia. El modelo clásico del sistema de bola y barra es representado de la siguiente manera:

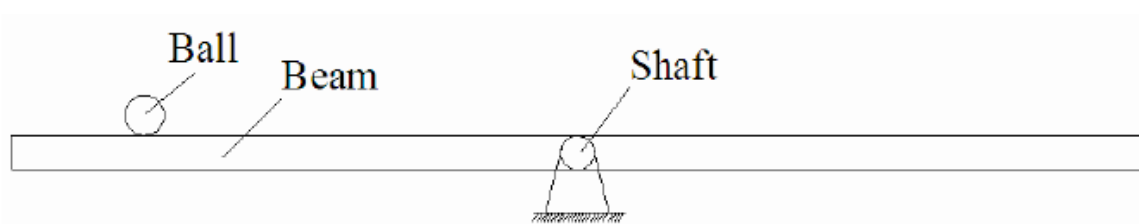


Figura 2.14. Representación básica del sistema de bola y barra (Wang, 2007).

Más adelante en el capítulo IV se especificará el modelado matemático del sistema físico bajo estudio. Por otro lado en la figura 2.14, se puede observar la bola sobre una barra en un punto de equilibrio, que reside sobre un eje. La masa esférica a utilizar es de goma, y ésta va a girar a lo largo de toda la barra metálica. Con esta disposición física, también se incluye un servomotor que acciona en el eje de la barra; con el fin de hacerla girar dentro de un rango angular limitado.

El cambio de ángulo en la barra hará girar a la masa esférica de posición. El cambio de posición de la bola será registrado mediante un sensor ultrasónico, con la función de realimentar la referencia y así corregir el giro del servomotor de manera continua, hasta llegar a la posición deseada. Es importante destacar que este sistema es inestable a lazo abierto debido a que para una entrada acotada del servomotor, la salida (posición de la bola) puede incrementarse de manera ilimitada.

El control a aplicar tiene como función principal regular de manera automática la masa esférica en la barra, en una posición deseada. De esta manera, regulará la corrección de la posición que brinda la retroalimentación (acción del sensor ultrasónico) para que la entrada del servomotor sea más precisa y acorde con los cambios instantáneos en la posición de la masa esférica.

2.2.9. Identificación de sistemas

La identificación de sistemas maneja el problema de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basados en data observada de los sistemas. Este proceso consta de tres partes básicas.

La primera, trata de la grabación de la data. Esta parte se refiere a la adquisición de información del comportamiento de variables del sistema bajo análisis, durante un experimento diseñado para la identificación, donde el usuario puede determinar qué señales medir y en qué momento, al igual que el tipo de señal de entrada (Ljung, 1987).

La idea del diseño experimental es que la data obtenida sea lo más descriptiva del sistema posible. En ocasiones, el usuario no tendrá la posibilidad de manipular el sistema para obtener información a su discreción, y debe de recopilarla desde la operación normal de la planta (Ljung, 1987).

La segunda parte consta de un conjunto de modelos candidatos, obtenida de una mayor colección de modelos. A partir de la data compilada, se desarrollarán los modelos y se elegirá el más adecuado. Esta sección es la más difícil del proceso puesto que debe tenerse conocimiento formal de las propiedades de los modelos físicos, así como intuición de ingeniería (Ljung, 1987).

Este conjunto de modelos pueden ser contruidos mediante leyes físicas básicas y otras relaciones ya establecidas (White Box); también pueden ser usados modelos lineales estándares, sin referencia a las características físicas, mediante el ajuste del modelo a la data (Black Box); además, pueden crearse modelos mixtos, tomando en cuenta parámetros físicos y la data obtenida (Gray Box) (Ljung, 1987).

La tercera y última parte trata de determinar el mejor modelo posible, guiado por la data. Este es el método de identificación. La valoración de la calidad del modelo está basada en su desempeño a la hora de reproducir la data medida (Ljung, 1987).

Posterior a la selección del modelo que mejor describa la data acorde a los criterios seleccionados, queda probar si el modelo es lo suficientemente bueno, es decir, si es válido para su propósito. Dichas pruebas se conocen como validación de modelos, donde se evalúa la relación del modelo con la data observada, el conocimiento del sistema y la función que se requiere que cumpla. Un comportamiento deficiente con respecto a lo mencionado será causa del rechazo del modelo, mientras, un buen desempeño hará que se desarrolle confianza en el modelo conseguido (Ljung, 1987).

Cierto modelo, por muy buena que sea su respuesta, nunca podrá ser aceptado como la descripción final del sistema, sin embargo, podrá ser lo suficientemente bueno en ciertos aspectos que le interesen al usuario (Ljung, 1987).

A continuación se muestra en un diagrama de bloques el procedimiento básico a seguir para identificar un sistema:

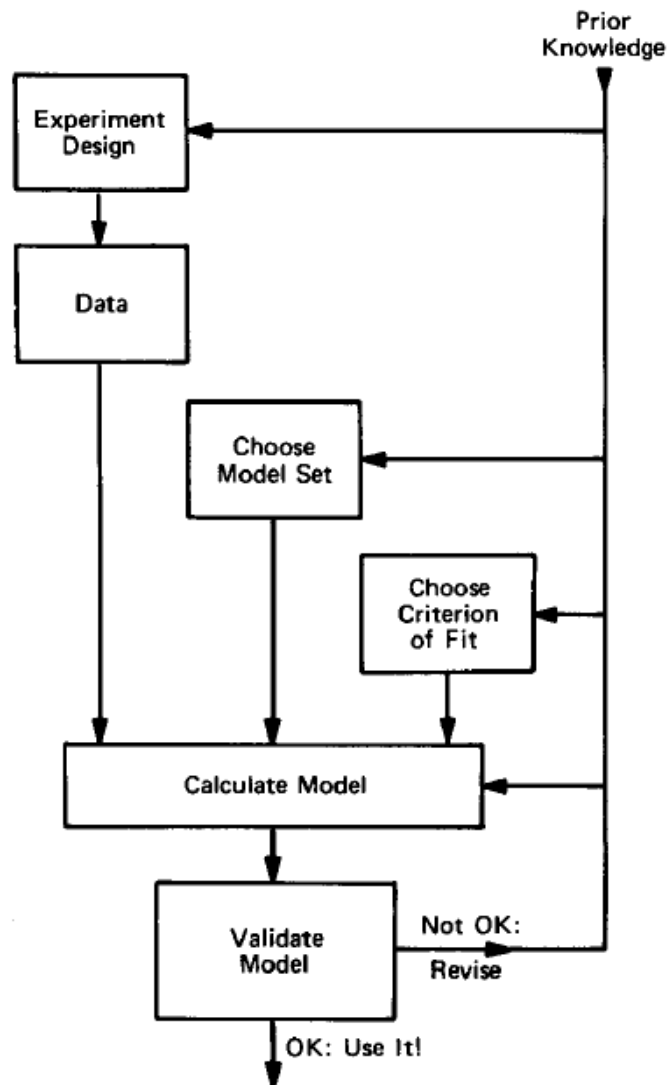


Figura 2.15. Representación en diagrama de bloques del proceso básico de identificación de sistemas (Ljung, 1987).

2.2.9.1. Modelos lineales de identificación de sistemas

La familia de los modelos de funciones de transferencia para la identificación de sistemas está formada por: ARX, ARMAX, OE (Output error method) y BJ (Box Jenkins method).

El análisis y estudio de estos modelos, así como la manera de desarrollarlos, no serán expuestos puesto que están fuera del alcance de esta investigación. Sin embargo, se muestra a continuación la estructura básica de dichos modelos en diagrama de bloques:

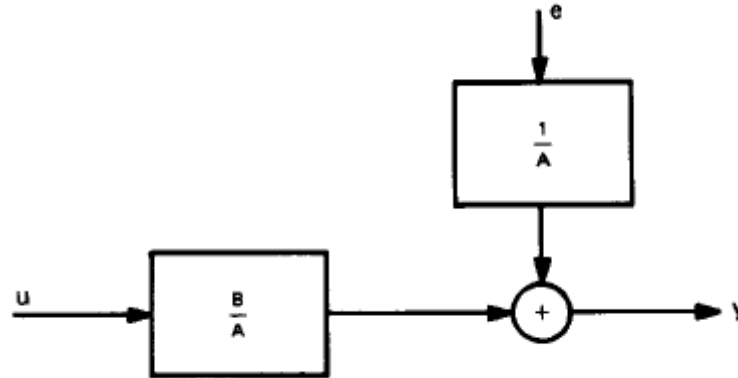


Figura 2.16. Representación en diagrama de bloques de la estructura ARX (Ljung, 1987).

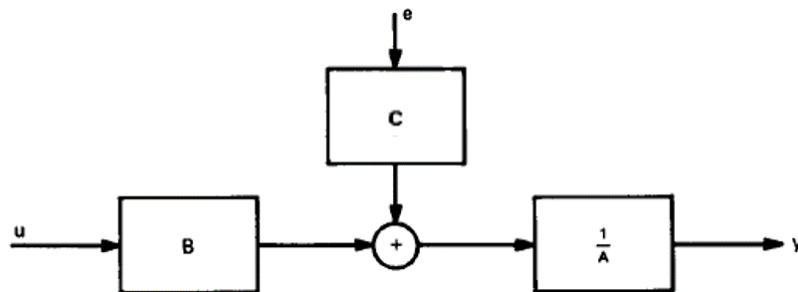


Figura 2.17. Representación en diagrama de bloques de la estructura ARMAX (Ljung, 1987).

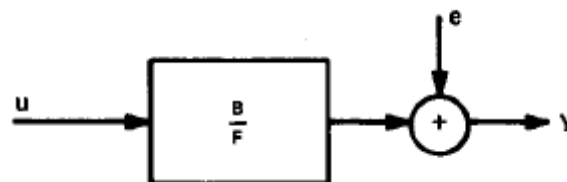


Figura 2.18. Representación en diagrama de bloques de la estructura OE (Ljung, 1987).

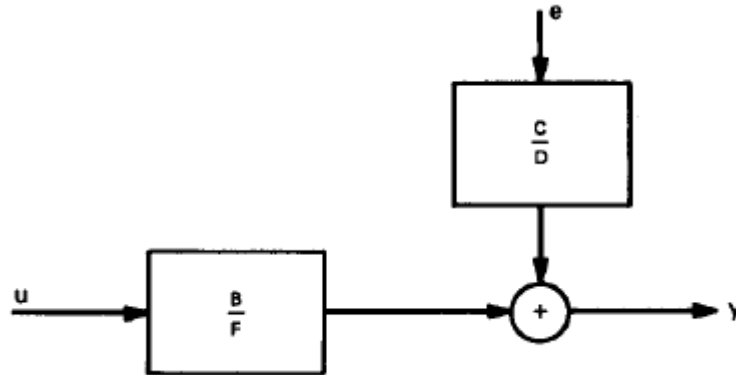


Figura 2.19. Representación en diagrama de bloques de la estructura Box-Jenkins (Ljung, 1987).

2.3. Definición de términos básicos

- **Actuador:** "Es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia" Ogata (1998, p.212).
- **Controlador:** "Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño" Ogata (1998, p.211).
- **Matriz singular:** "Se dice que una matriz es singular si el valor de su determinante es cero" Kuo (1996, p.47).

- **Microcontrolador:** "Es un circuito integrado programable que contiene todos los componentes necesarios para controlar el funcionamiento de una tarea determinada" Palacios, Remiro y López (2004, p.1).
- **Modulación de ancho de pulso (PWM):** Es una señal digital compuesta por un tiempo en alto (1 lógico) y un tiempo en bajo (0 lógico), con el objetivo de controlar el movimiento de los motores DC, en nuestro caso el servomotor, debido a que el grado de desplazamiento del mismo es proporcional al tiempo en alto de la señal (Palacios et al., 2004).
- **Perturbación:** "Es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de salida del sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada" Ogata (1998, p.2).
- **Señal pseudo aleatoria:** Es un conjunto de señales periódicas y de cierta longitud de tal forma que, dentro de cada periodo, la señal pueda aproximarse a una señal aleatoria.
- **Sensor:** "El sensor o elemento de medición, es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable manejable que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia" Ogata (1998, p.213).
- **Planta:** Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas, con el propósito de ejecutar una operación particular, se llama planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (Ogata, 1998).

- **Servomotor:** Es un tipo de motor de corriente continua al cual se le introduce una señal de PWM para obtener un movimiento deseado. Los servomotores poseen un control interno para mejorar la exactitud de sus desplazamientos y por lo mismo son muy usados en la robótica (Ogata 1998).
- **Sistema:** "Es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado" Ogata (1998, p.2).
- **Variable manipulada:** "Es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada" Ogata (1998, p.2).
- **Variable controlada:** "Es la cantidad o condición que se mide y controla" Ogata (1998, p.2).

2.4. Operacionalización de las variables

Por la naturaleza del presente estudio, se han identificado dos variables, ellas son:

a) **Variable 1: Sistema bola y barra.**

- **Definición conceptual:** el sistema bola y barra es un sistema físico comprendido por un conjunto de elementos mecánicos y eléctricos interconectados, de tal manera que se concrete la funcionalidad de una planta modelo que presenta una serie de características afines a diversos procesos industriales.

- **Definición operacional:** el sistema bola y barra es un sistema constituido por una barra metálica soportada por una base de madera. Encima de ella, estará colocada una masa esférica que variará su posición conforme a la variación del ángulo de la barra. Este ángulo cambia por medio de la acción de un servomecanismo instalado en su eje. El objetivo es situar la masa esférica en una posición de referencia establecida, esto se puede lograr gracias a dos controladores y dos retroalimentaciones: la del ángulo de la barra y la posición de la bola sobre la barra.

b) Variable 2: Controlador LQR.

- **Definición conceptual:** el regulador cuadrático lineal (LQR) es un controlador de la rama del control óptimo lineal, que tiene como objetivo conseguir la condición óptima de operación de determinado proceso a controlar mediante la resolución de la ecuación de Riccati y consecuentemente obteniendo la matriz K necesaria para controlar el sistema.
- **Definición operacional:** el regulador cuadrático lineal es un controlador que para que se consiga la mejor respuesta por parte del sistema, es necesaria la realización de un proceso iterativo, en el cual se modifican los parámetros involucrados en la ecuación de Riccati y así obtener la matriz K hasta conseguir la respuesta satisfactoria.

c) Cuadro de variables:

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Identificar las variables que interactúan en la estabilización del sistema	Sistema bola y barra	Variables manipuladas	Ángulo viga	Grados [grados]
		Variables controladas	Posición de la bola	Metros [m]
		Perturbaciones	Fuerzas externas aplicadas a la bola	Newton [N]
			Fluctuaciones de voltaje	Voltios [V]
Definir el modelo matemático del sistema físico		Modelado matemático en función de transferencia y espacio estado para su versión continua y discreta	Ecuaciones físicas y electromecánicas	Servomotor Interacción de la bola con la barra
Analizar el modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial		Respuesta temporal continua	Estabilidad BIBO	Estabilidad absoluta
			Ubicación de polos	Estabilidad absoluta
			Controlabilidad	Controlable en los estados
			Observabilidad	Observable en los estados

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Analizar el modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial	Sistema bola y barra	Respuesta frecuencial continua	Diagrama de Nyquist	Estabilidad absoluta
		Respuesta temporal discreta	Estabilidad BIBO	Estabilidad absoluta
			Ubicación de polos	Estabilidad absoluta
			Controlabilidad	Controlable en los estados
			Observabilidad	Observable en los estados
		Respuesta frecuencial discreta	Diagrama de Nyquist	Estabilidad absoluta
Diseñar los controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio	Controlador LQR	Diseño del PID para modelos matemáticos teóricos continuo y discreto	Parámetros	Kp Ki Kd
			Evaluación del desempeño	Estabilidad absoluta Error de estado estable [.] Sobrepaso máximo [.] Tiempo de levantamiento [seg] Tiempo de asentamiento [seg]

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Diseñar los controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio	Controlador LQR	Diseño del LQR para funciones de transferencia teóricas continua y discreta	Parámetros	Matriz R Matriz Q Matriz K
			Evaluación del desempeño	Estabilidad absoluta Error de estado estable [.] Tiempo de asentamiento [seg]
Descripción de componentes del prototipo		Barra	Longitud [m]	
		Bola	Peso [gr] Radio [m]	
		Servomotor	Rotación máxima [grados] Torque [onza-pulgada] Velocidad [seg/60°]	
		Sensor ultrasónico	Rango [m] Voltaje de alimentación [V]	
		Sistema microprocesado (Arduino Uno)	Microcontrolador Voltaje de operación [V] Velocidad del reloj [MHz]	
Implantar los controladores en un sistema microprocesado				

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Implantar los controladores en un sistema microprocesado	Controlador LQR	Implantación del controlador PID	Modelado teórico continuo	Estabilidad absoluta Error de estado estable [m] Tiempo de estabilización [seg]
			Modelado teórico discreto	Estabilidad absoluta Error de estado estable [m] Tiempo de estabilización [seg]
			Comparación de la implementación vs. la simulación	Parámetros Tiempo de levantamiento [seg] Tiempo de estabilización [seg] Sobrepaso máximo [%] Error de estado estable [.]
			Parámetros empíricos	Parámetros Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [m]
			Comparación de implementaciones	Parámetros Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [m]

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Implantar los controladores en un sistema microprocesado	Controlador LQR	Implantación del controlador LQR	Modelado teórico continuo	Parámetros Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [m]
			Comparación de la implementación vs. la simulación	Parámetros Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [.]
		Modelado matemático experimental	Caracterización del fenómeno físico	Obtención de la función de transferencia
			Análisis del modelo matemático experimental	Estabilidad absoluta
			Diseño del controlador PID	Parámetros Estabilidad absoluta Error de estado estable [.] Sobrepaso máximo [.]
				Tiempo de levantamiento [seg] Tiempo de asentamiento [seg]

Objetivo general: Implementar un control LQR digital para un sistema de bola y barra				
Objetivos específicos	Variable	Dimensiones	Sub-dimensión	Indicadores
Implantar los controladores en un sistema microprocesado	Controlador LQR	Modelado matemático experimental	Diseño del controlador LQR	Parámetros Estabilidad absoluta Error de estado estable [.] Tiempo de asentamiento [seg]
Evaluar los controladores implementados		Evaluación de desempeño	Implementación PID	Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [m]
			Implementación LQR	Tiempo de estabilización [seg] Error de estado estable [m]

CAPITULO III
MARCO METODOLÓGICO

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación se refiere al nivel de profundidad con la cual se acomete un estudio, es decir, según el alcance de la misma. Es pertinente mencionar que según el propósito se distinguen cuatro categorías: exploratorias, descriptivas, correlacionales y explicativas.

Primeramente, una investigación exploratoria “se realiza cuando el objetivo consiste en examinar un tema poco estudiado” Hernández et al. (2010, p.79).

Además, una investigación descriptiva, según Hernández, Fernández & Baptista (2010, p.85) “busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de las personas, grupos, comunidades, procesos, objetos, o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis”.

También, una investigación correlacional tiene como finalidad “conocer la relación o grado de asociación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular” Hernández et al. (2010, p.85).

Por último, una investigación explicativa “está dirigida a responder por las causas de los eventos y fenómenos físicos o sociales. Se enfoca en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se manifiesta, o por qué se relacionan dos o más variables” Hernández et al. (2010, p.85).

Analizando los conceptos anteriormente descritos y tomando en cuenta los objetivos específicos, se dedujo que la presente investigación de tipo explicativa,

debido a que el propósito principal reside en detallar y comprender los fenómenos físicos del bola y barra y de las distintas variables involucradas en el sistema, así como también analizar y comparar el desempeño de los controladores implementados.

3.2. Diseño de la investigación

Es pertinente mencionar la definición de diseño para mayor comprensión de esta sección. Hernández et al. (2010, p. 120) definen diseño como el “plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación”.

Para determinar el diseño de la investigación se recurre al concepto de experimento, según Hernández et al. (2010, p.122) que lo definen como una “situación de control en la cual se manipula, de manera intencional, una o más variables independientes (causas) para analizar las consecuencias de tal manipulación sobre una o más variables dependientes (efectos)”.

Por consiguiente, se concluyó que esta investigación es experimental, ya que se manipularon los parámetros de los controladores PID y LQR respectivamente, para observar el comportamiento bajo tales variaciones y maximizar el desempeño del sistema.

3.3. Población y muestra

La población, según Hernández et al. (2010, p. 174) es el “conjunto de todos los casos que concuerdan con determinadas especificaciones” y la muestra se define

como el “subgrupo de la población del cual se recolectan los datos y debe ser representativo de ésta” Hernández et al. (2010, p. 173).

La población estuvo representada por el conjunto de estrategias de control, entre las cuales se encuentra el control clásico y el control moderno, que a su vez se divide en control óptimo, control robusto, control adaptativo, lógica difusa y control neuronal. La muestra fue representada por un controlador clásico (PID) y un controlador óptimo (LQR).

Además, se definió la muestra de esta investigación como no probabilística, ya que “selecciona participantes por uno o varios propósitos y no pretende que los casos sean representativos de la población” Hernández et al. (2010, p. 171). Es decir, los dos tipos de controladores fueron elegidos de manera selectiva. La razón de la elección del controlador PID, fue su sencillez y su afinidad con el antecedente principal de este trabajo, y la del controlador óptimo LQR fue debido al interés en maximizar el desempeño de estabilización del sistema bola y barra.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Es esencial destacar que “las técnicas de recolección de datos son las distintas formas o maneras de obtener la información” Arias (1999, p. 38). Además, según Sabino (1992, p. 114) “un instrumento de recolección de datos es, en principio, cualquier recurso que se vale el investigador para acercarse a los fenómenos y extraer de ellos información”.

Una técnica usada fue la observación documental: ésta se refiere a la extracción de información de referencias bibliográficas correspondientes a libros, artículos, revistas, tesis, páginas web u otros. Para el caso de esta investigación se recurrió principalmente a libros y trabajos especiales de grado para la recopilación de

información sobre el modelado matemático y la interacción de las variables en el sistema.

También se aplicó la observación directa, la cual se define como “aquella en la cual el investigador puede observar y recoger datos mediante su propia observación” Tamayo y Tamayo (2003, p. 183). Fue mediante la utilización del software que se obtuvieron las características del modelado matemático del sistema y los parámetros de los controladores, y además se simuló la aplicación de los mismos para evaluar su comportamiento. Últimamente, a nivel de implementación se pudo obtener el desempeño real de dichos controladores al estabilizar la posición de la bola en un tiempo específico.

3.5. Fases de la investigación

Fase I. Identificación de las variables dinámicas que interactúan en la estabilización del sistema

- Recopilar y revisar documentación relacionada con el análisis del sistema bola y barra.
- Describir el conjunto de variables del sistema: manipuladas, controladas, y perturbaciones.
- Determinar las unidades de las variables involucradas en el comportamiento físico bajo estudio.

Fase II. Definición del modelo matemático del sistema físico

- Consultar bibliografías, referencias y antecedentes que abarquen la modelización de sistemas físicos relacionados.

- Representar gráficamente mediante diagramas de bloques el sistema bajo estudio.
- Definir el modelo matemático continuo y discreto mediante funciones de transferencia y modelado de espacio de estados.

Fase III. Análisis del modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial

- Analizar mediante MATLAB y SIMULINK la respuesta temporal, para determinar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema para su versión continua y discreta.
- Analizar mediante las herramientas computacionales mencionadas la respuesta frecuencial para determinar la estabilidad del sistema en función del criterio de Nyquist, para su versión continua y discreta.

Fase IV. Diseño de controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio

- Determinar mediante herramientas computacionales los parámetros del controlador PID para el sistema continuo y discreto.
- Evaluar mediante la simulación del sistema el desempeño de dicho controlador para su versión continua y discreta.
- Determinar mediante técnicas computacionales la matriz K que establece el controlador LQR, para su versión continua y discreta
- Evaluar mediante simulación del sistema el desempeño del controlador LQR, para los casos continuo y discreto.

Fase V. Implantación de los controladores en un sistema microprocesado

- Describir los componentes del prototipo.
- Implantar el controlador PID en el sistema físico bajo estudio.

- Comparar el desempeño de la implementación versus su simulación para el controlador PID.
- Comparar el desempeño de las implementaciones del PID.
- Implantar el controlador LQR en el sistema físico bajo estudio.
- Comparar el desempeño de la implementación versus su simulación para la estrategia LQR.
- Definir un modelo matemático experimental
- Analizar el modelo matemático experimental en el dominio temporal y frecuencial.
- Diseñar los controladores PID y LQR para el modelado matemático experimental.
- Evaluar la factibilidad de implementación de las estrategias de control en función del modelado matemático experimental.

Fase VI. Evaluación de los controladores implementados

- Comparación del desempeño de las implementaciones realizadas.

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Identificar las variables que interactúan en la estabilización del sistema bola y barra

Una revisión de los antecedentes fue necesaria para la comprensión y recopilación de la información concerniente al comportamiento del sistema físico y la interacción entre sus variables, las cuales se pueden clasificar en manipuladas, controladas, y perturbaciones.

4.1.1. Variables manipuladas

La variable manipulada es toda aquella variable que puede ser modificada con el objetivo de obtener la respuesta deseada del sistema. Para este estudio la variable a manipular es la posición de referencia introducida en el microcontrolador, es decir, la posición deseada de la bola sobre la barra.

Tabla 4.1. Variable manipulada.

Variable	Descripción	Unidad
x_{ref}	Posición de referencia	Metros

4.1.2. Variables controladas

Las variables controladas son aquellas que se miden y controlan dependiendo del efecto de la variable manipulada y perturbaciones en el comportamiento del sistema. En el presente estudio se presentan dos variables controladas: el ángulo de la barra y la posición de la bola en la misma.

Tabla 4.2. Variables controladas.

Variable	Descripción	Unidad
θ	Ángulo de la barra con respecto al eje horizontal	Grados
x	Posición de la bola en la barra	Metros

4.1.3. Perturbaciones

Las perturbaciones son todas aquellas alteraciones internas o externas que afectan la estabilidad del sistema, y por consiguiente producen salidas no deseadas. Las perturbaciones que podrían influir son dos: una fuerza externa ejercida a la masa esférica y fluctuaciones de voltaje.

Tabla 4.3. Perturbaciones.

Variable	Descripción	Unidad
F_r	Fuerza externa aplicada sobre la masa esférica	Newton
ΔV	Fluctuaciones de voltaje	Voltios

4.2. Definir el modelo matemático del sistema físico

Luego de la revisión de los antecedentes y referencias, se posee la información necesaria para describir el modelado de los componentes que conforman el sistema físico. Las partes que integran el sistema, y la relación entre ellas se representan gráficamente mediante el siguiente diagrama de bloques:

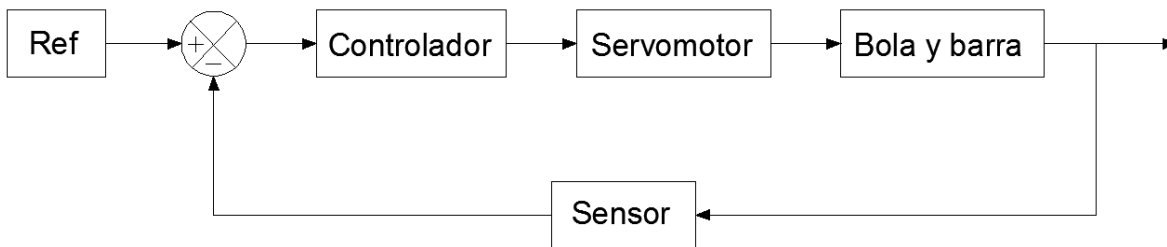


Figura 4.1. Diagrama de bloques del sistema físico bola y barra.

Para la descripción en detalle del modelado matemático de los procesos, es pertinente explicar el comportamiento del servomotor y la relación de la barra con la bola de manera individual.

4.2.1. Servomotor

Un servomotor es un motor de corriente continua que es capaz de ubicarse en cualquier posición dentro de un rango de operación (generalmente 180 grados) y mantenerse estable en dicha posición. Los servomotores son muy utilizados en robótica y automatización debido a su gran precisión en su posicionamiento. (Universidad de Alicante, 2007)

En general, los servos están compuestos por cuatro elementos fundamentales (Universidad de Alicante, 2007):

- Motor de corriente continua: es el elemento que le brinda movilidad al servo, al aplicar un potencial en sus dos terminales el motor girará en un sentido a su velocidad máxima.
- Engranajes reductores: tren de engranajes que se encarga de reducir la alta velocidad de giro del motor para acrecentar su capacidad de torque.

- Sensor de desplazamiento: suele ser un potenciómetro colocado en el eje de salida del servo, que se utiliza para conocer la posición angular del motor.
- Circuito de control: es una placa electrónica que controla la posición del servomotor mediante una retroalimentación, comparando la señal de entrada de referencia con la posición actual medida por el potenciómetro. La diferencia entre la posición actual y la deseada es amplificada y utilizada para mover el motor en la dirección necesaria para reducir el error.

A continuación, se muestra la representación gráfica del servomotor, mediante un diagrama de bloques:

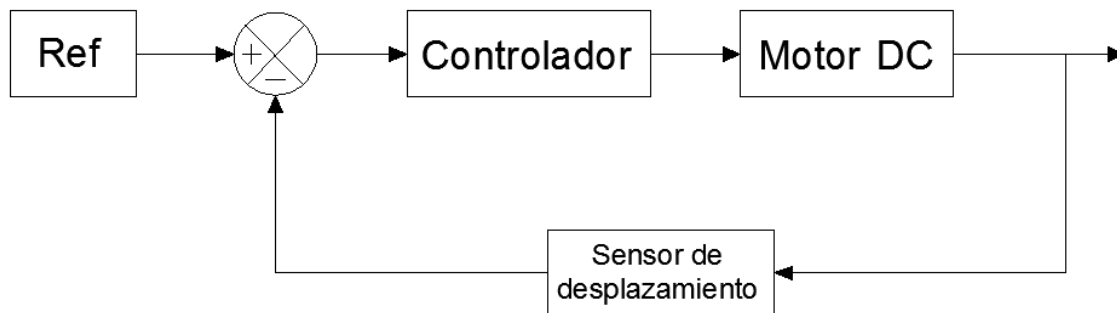


Figura 4.2. Diagrama de bloques del servomotor.

Se consideró el servomotor como un sistema cerrado y estable debido a que su funcionamiento está predeterminado de manera que realiza el proceso de control automáticamente para que a una entrada de referencia (desplazamiento angular deseado), se obtenga la salida esperada de manera rápida y precisa.

4.2.2. Interacción de la barra con la bola

La representación gráfica de la cual va a derivar el modelo matemático de la interacción de la barra con la bola se muestra en el siguiente dibujo:

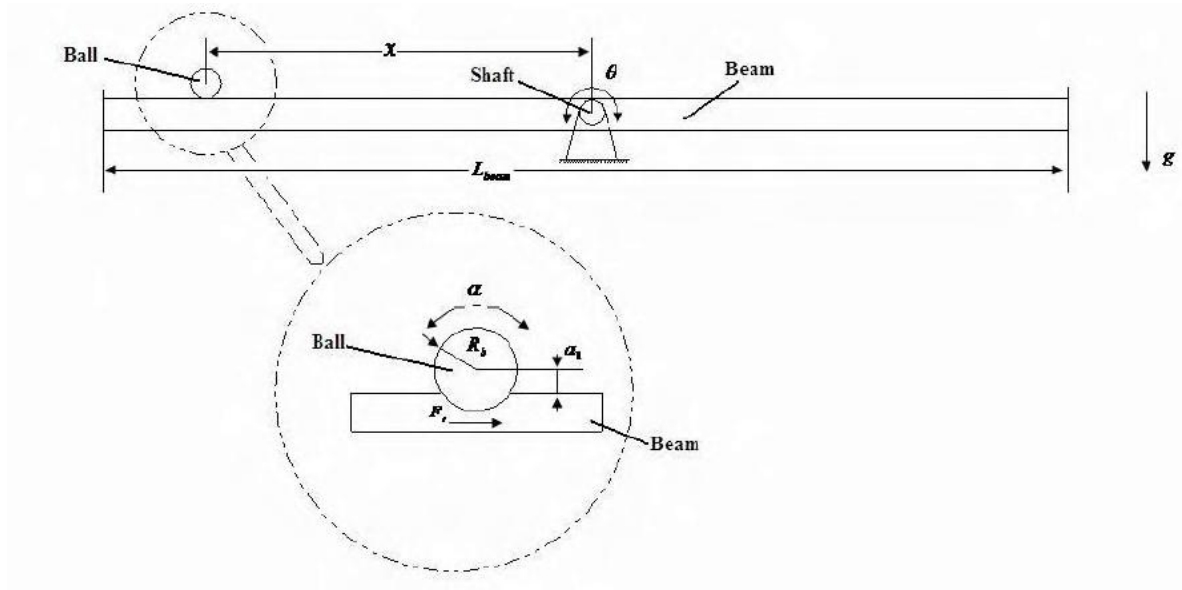


Figura 4.3. Dibujo representativo de la interacción de la barra con la bola (Wang, 2007).

De acuerdo a las leyes de la física, se tiene la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_b = M_{ball} \cdot g \cdot \text{Sen}\theta - F_r = M_{ball} \cdot \ddot{x} + b_1 \cdot \dot{x} \quad (\text{Ec. 4.1})$$

Donde M_{ball} es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, x es la distancia vertical entre el centro de la bola y el centro de la superficie de la barra, b_1 es la constante de fricción mientras la bola está rodando a lo largo de la barra, θ es el ángulo de inclinación de la barra y F_r representa una fuerza externa aplicada.

La posición de la bola es igual al ángulo rotacional de la bola, α , multiplicado por a_1 que es la distancia vertical entre el eje horizontal de la bola y el punto de contacto entre la bola y la barra. Se representa mediante la siguiente expresión:

$$x = \alpha \cdot a_1 \quad (\text{Ec. 4.2})$$

El balance de torque de la bola se expresa como:

$$\sum \tau_b = F_r \cdot a_1 = J_{\text{ball}} \cdot \ddot{\alpha} \quad (\text{Ec. 4.3})$$

Donde $\ddot{\alpha}$ es la aceleración angular de la bola, $\sum \tau_b$ es la suma del torque sobre la bola, J_{ball} es el momento de inercia sobre la bola, dado por:

$$J_{\text{ball}} = \frac{2}{5} M_{\text{ball}} \cdot R_b^2 \quad (\text{Ec. 4.4})$$

Donde R_b es el radio de la bola. De las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente expresión que relaciona la posición de la bola con el ángulo de la barra:

$$\left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R_b}{a_1}\right)^2\right) \ddot{x} + \frac{b_1 \dot{x}}{M_{\text{ball}}} = g \cdot \text{Sen} \theta \quad (\text{Ec. 4.5})$$

Se aprecia que el modelado matemático es no lineal. Debido a que se espera que la barra del sistema opere en o alrededor de cero grados se puede aproximar: $\sin \theta \approx \theta$, linealizando el sistema. Además, se despreciará b_1 debido a la baja fricción entre la bola y la barra.

Entonces, tenemos que:

$$\left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R_b}{a_1}\right)^2\right) \ddot{x} = g \cdot \theta \quad (\text{Ec. 4.6})$$

De donde se obtiene la función de transferencia de la posición de la bola en relación al ángulo de la barra, luego de aplicar la transformada de Laplace:

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{g}{\left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R_b}{a_1}\right)^2\right) s^2} \quad (\text{Ec. 4.7})$$

Los parámetros involucrados en la función de transferencia mostrada son los siguientes:

Tabla 4.4. Parámetros del sistema.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidad
R_b	Radio de la bola	0.0285	m
a_1	Distancia entre el eje horizontal de la bola y punto de contacto entre la bola y la barra	0.023	m
G	Gravedad	9.8	m/s^2

En la presente investigación el prototipo bola y barra utilizado fue el realizado en el trabajo especial de grado de Petit y Ramírez. Por consiguiente, para la obtención de los parámetros, se utilizó un vernier con el cual se midió el diámetro de la bola a utilizar, así como la distancia desde el punto de contacto entre la bola y la barra hasta el eje horizontal de la bola. En la siguiente imagen puede apreciarse R_b y a_1 :

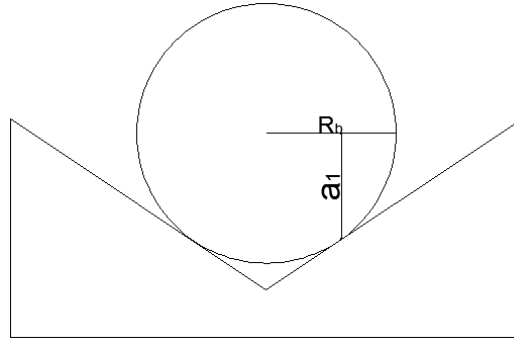


Figura 4.4. Dibujo representativo de los parámetros R_b y a_1 .

Como resultado se pueden sustituir los valores de los parámetros en la función de transferencia de la posición de la bola en relación al ángulo de la barra:

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{9.8}{\left(1 + \frac{2 \left(\frac{0.0285}{0.023}\right)^2}{5}\right) s^2} = \frac{9.8}{1.61418 s^2} \quad (\text{Ec. 4.8})$$

A partir de esta función de transferencia es posible obtener el modelo de espacio de estados correspondiente, que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 6.0712] \quad D = 0 \quad (\text{Ec. 4.9})$$

Con el modelado de espacio estado continuo, es posible definir su versión discreta aplicando la ecuación 2.4, que corresponde a la forma general del método de la transformada z para modelos de espacio estado.

Definiendo un tiempo de muestreo de 0,02 segundos y con el método de reconstrucción de señal *zoh* (Zero order hold), se obtuvieron las siguientes matrices de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.0002 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 6.0689] \quad D = 0 \quad (\text{Ec. 4.10})$$

También, a partir de la función de transferencia teórica se pudo determinar la versión discreta de tal función, una vez más, aplicando la transformada z , con tiempo de muestreo de 0,02 segundos y con el método *zoh*. Dicha función es la siguiente:

$$G_{\text{discreta}} = \frac{0.001214z + 0.001214}{z^2 - 2z + 1} \quad (\text{Ec. 4.11})$$

4.3. Analizar el modelo matemático en el dominio temporal y frecuencial

En esta sección se hicieron una serie de pruebas para el modelo matemático teórico, en sus versiones continua y discreta de manera separada, con la finalidad de analizar detalladamente el sistema.

4.3.1. Análisis del modelo matemático teórico continuo

4.3.1.1. Dominio temporal

Para el análisis en el dominio temporal, se utilizaron las herramientas de MATLAB para determinar la respuesta a lazo abierto, las raíces del sistema, la controlabilidad y la observabilidad.

Primeramente, se aplicó una función escalón unitario a la función de transferencia correspondiente a la ecuación 4.8, a lazo abierto. Se obtuvo la siguiente respuesta:

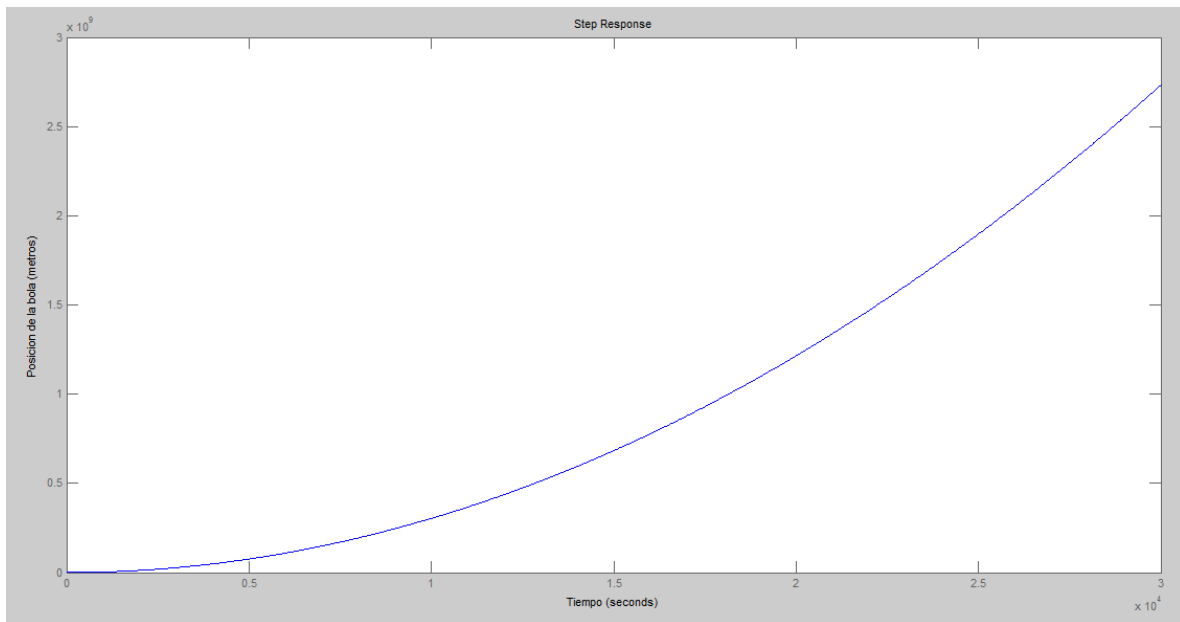


Figura 4.5. Respuesta al escalón a lazo abierto de la función de transferencia continua.

Donde claramente se aprecia que la posición de la bola tiende a infinito. Además, se observa el comportamiento del sistema a lazo cerrado en la siguiente imagen:

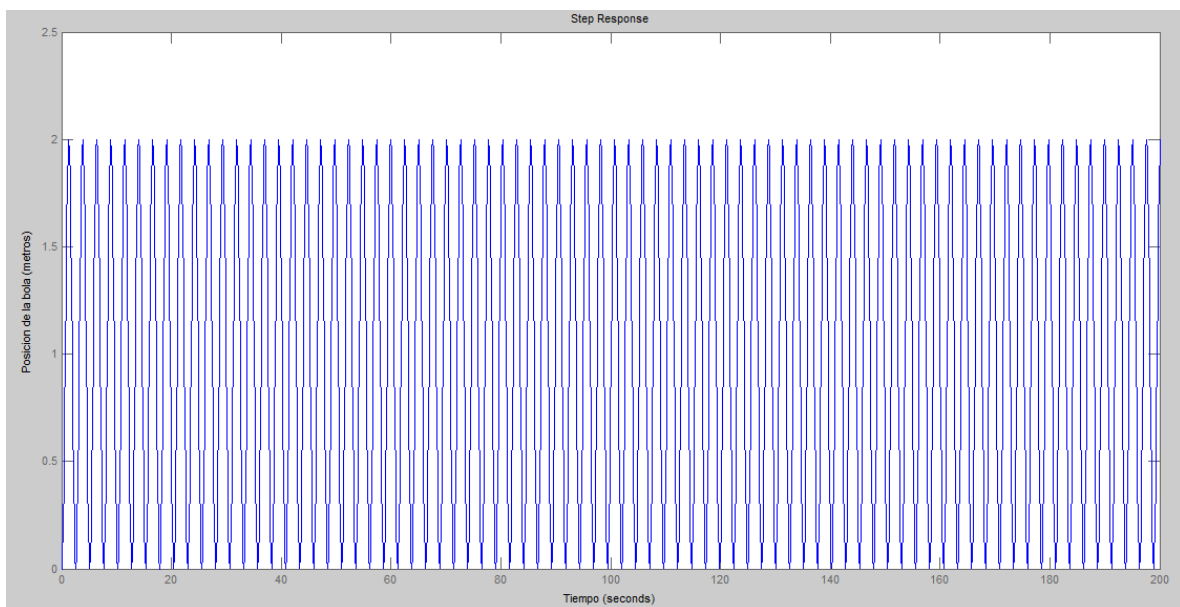


Figura 4.6. Respuesta al escalón a lazo cerrado de la función de transferencia continua.

Luego de observar la gráfica, se deduce a simple vista que el comportamiento es críticamente estable, o mejor dicho, inestable. Se observa a continuación el lugar geométrico de las raíces a lazo abierto en la siguiente gráfica:

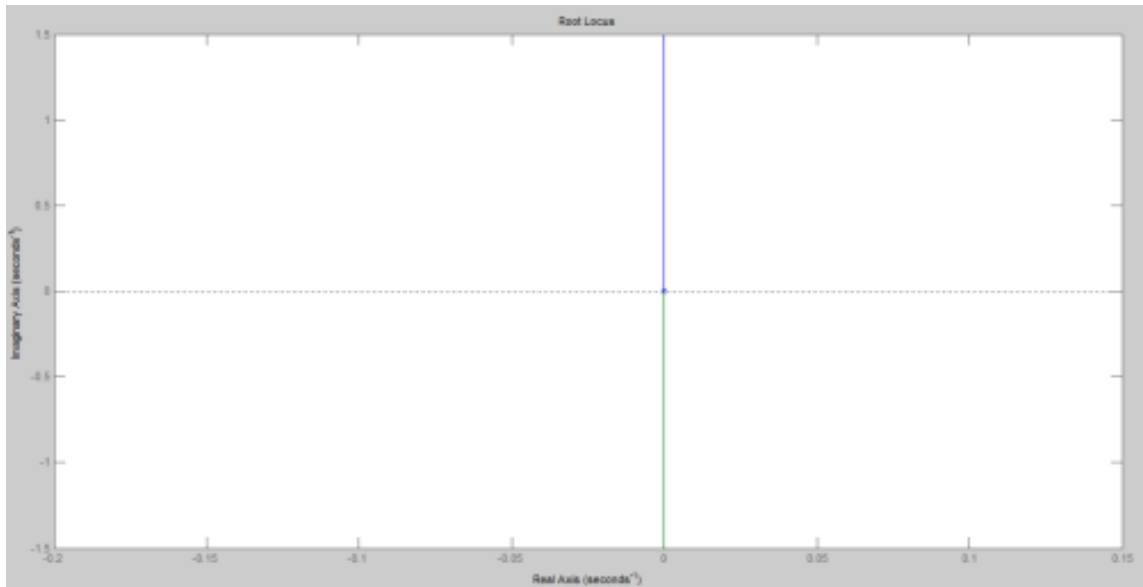


Figura 4.7. Lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia continua.

Se tiene que los polos del denominador de la función de transferencia están ubicados en (0,0), lo cual lo describe como sistema inestable.

También se obtuvo la controlabilidad y observabilidad del sistema, que se consiguieron a partir del modelo de espacio de estados. La matriz de observabilidad es la siguiente:

$$\text{OBSV} = \begin{bmatrix} 0 & 6.0712 \\ 6.0712 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.12})$$

Se puede observar que la matriz posee el mismo rango que el orden del denominador de la función de transferencia (segundo orden), lo que indica que el sistema es observable. La matriz de controlabilidad se expresa a continuación:

$$\text{CTRB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.13})$$

Se aprecia que el rango de la matriz de controlabilidad es 2: el mismo número de orden del denominador de la función de transferencia, por lo cual el sistema es controlable. Es importante recordar que si el sistema es controlable y observable, se pueden observar y controlar todos los estados de dicho sistema, lo que hace posible el diseño de controladores óptimos.

4.3.1.2. Dominio frecuencial

A continuación se muestra la prueba de Nyquist. En este punto, la información útil es la determinación de la estabilidad.

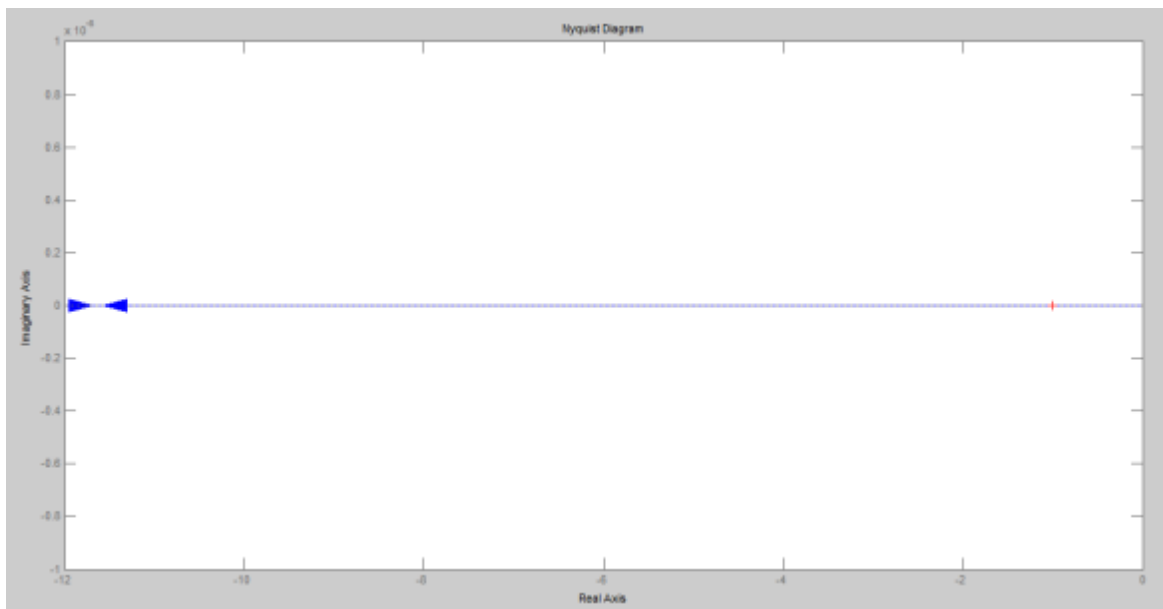


Figura 4.8. Prueba de Nyquist para el sistema continuo a lazo abierto.

Puede observarse a simple vista que no hay círculos que encierren el punto $(-1,0)$ de la gráfica de Nyquist, y por consiguiente el sistema es inestable a lazo abierto.

4.3.2. Análisis del modelo matemático teórico discreto

4.3.2.1. Dominio temporal

Se realizó el mismo procedimiento para el modelo matemático en su versión discreta, con la finalidad de corroborar las características fundamentales del sistema físico.

Primeramente se aplicó la función de escalón unitario a la ecuación 4.11 correspondiente a la función de transferencia discreta, para observar su comportamiento a lazo abierto:

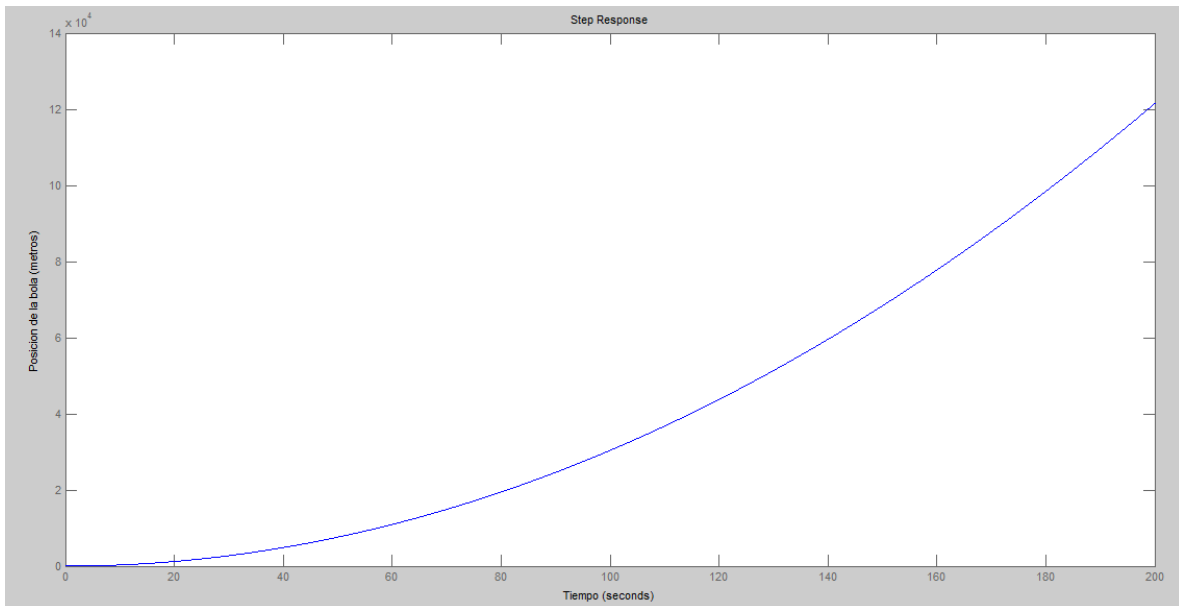


Figura 4.9. Respuesta al escalón a lazo abierto de la función de transferencia discreta.

Donde al igual que en el caso continuo, la posición de la bola tiende al infinito. Ahora, se observa el comportamiento a lazo cerrado del sistema en su versión discreta:

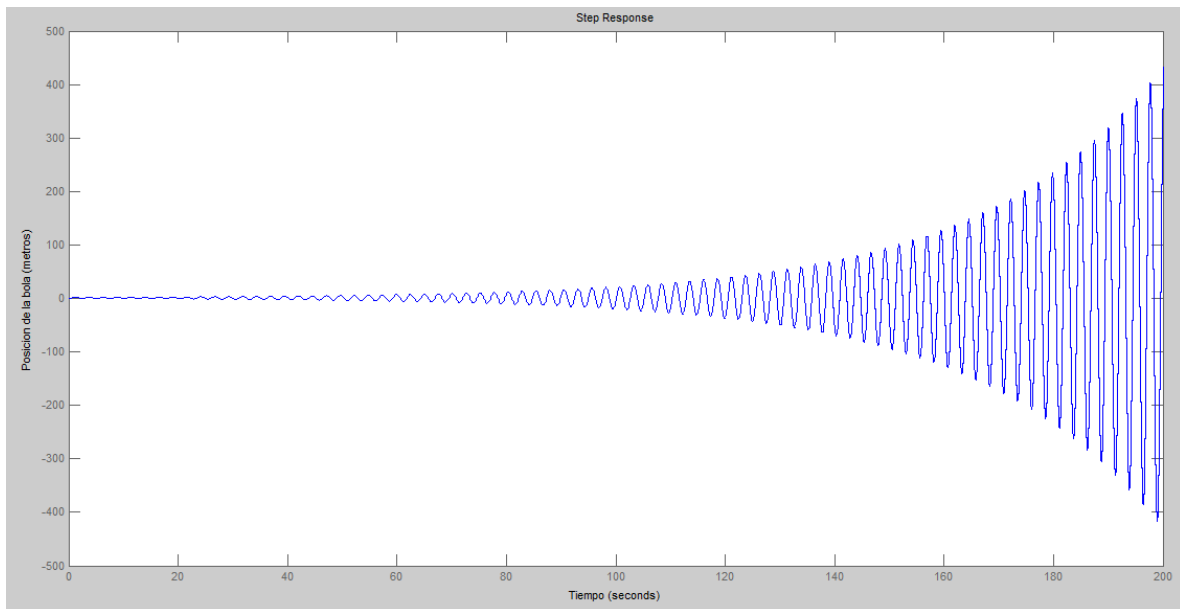


Figura 4.10. Respuesta al escalón a lazo cerrado de la función de transferencia discreta.

Se observa claramente que la respuesta es inestable tal y como el comportamiento a lazo abierto. Por otra parte se analizó el lugar geométrico de las raíces a lazo abierto. La gráfica correspondiente es la siguiente:

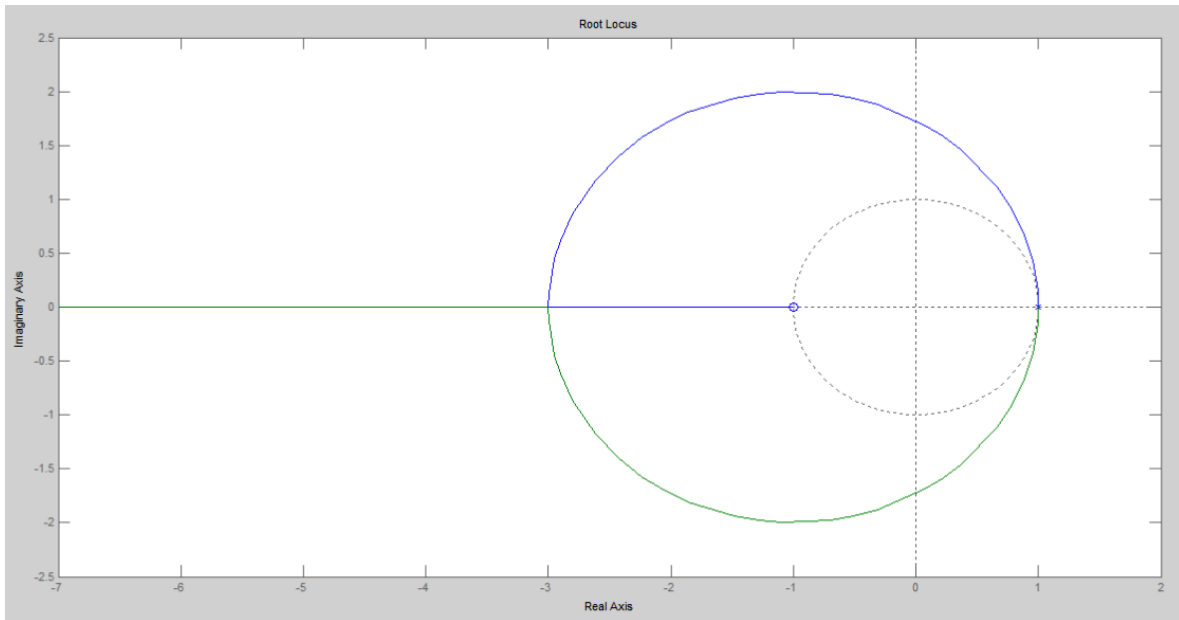


Figura 4.11. Lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia discreta.

Se ve claramente que los polos de la función de transferencia no están dentro del círculo unitario (circunferencia punteada) lo que indica que el sistema es inestable.

Por último se obtuvo la observabilidad y controlabilidad del sistema discreto, conseguido a partir del modelo de espacio de estados. La matriz de observabilidad es la siguiente:

$$OBSV_{Discreta} = \begin{bmatrix} 0 & 6.0689 \\ 0.1214 & 6.0689 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.14})$$

Se puede observar que la matriz posee el mismo rango que el orden del denominador de la función de transferencia discreta (segundo orden), lo que indica que el sistema es observable, al igual que su versión continua. La matriz de controlabilidad se expresa a continuación:

$$CTRB_{Discreta} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.0002 & 0.0006 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.15})$$

Se aprecia que el rango de la matriz de controlabilidad es del mismo orden que el denominador de la función de transferencia discreta, por lo cual el sistema es controlable, de la misma manera que su versión continua.

4.3.2.2. Dominio frecuencial

Así como en su versión continua, se mostrará la prueba de Nyquist para la función de transferencia discreta:

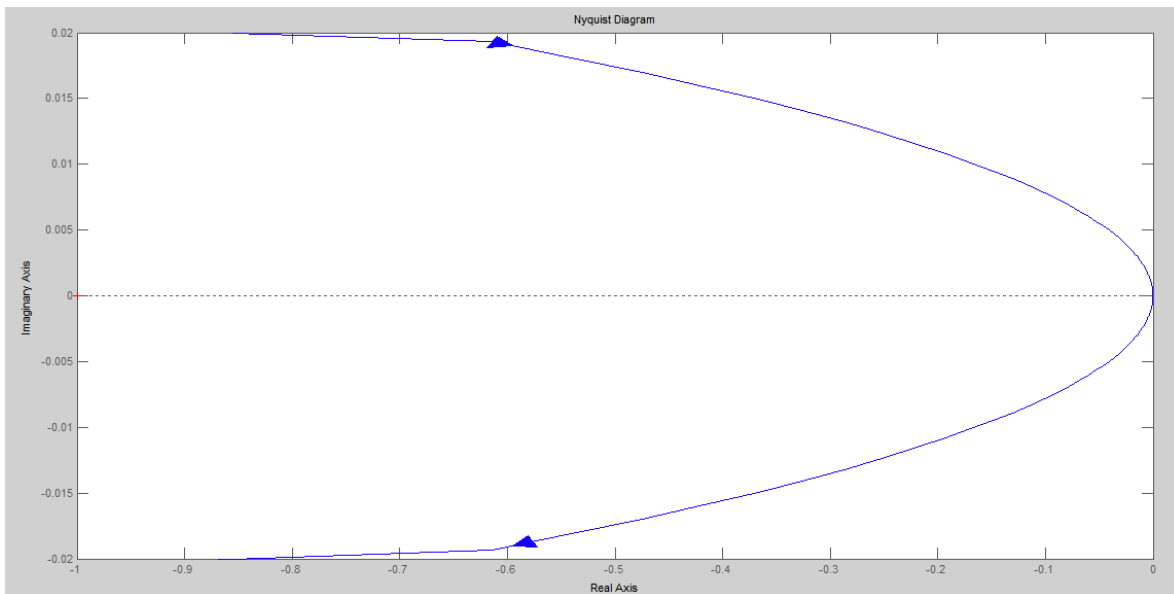


Figura 4.12. Prueba de Nyquist para el sistema discreto a lazo abierto.

Como la trayectoria de Nyquist no encierra el punto $(-1, j0)$, el sistema puede considerarse como inestable.

Con los análisis de estabilidad continuo y discreto, se determinó con seguridad que el sistema bola y barra, es decir, la relación física entre el cambio de ángulo

de la barra metálica con la posición de la bola en la misma es totalmente inestable a lazo abierto y cerrado.

4.4. Diseñar los controladores PID y LQR para el sistema bajo estudio

Luego de corroborar la característica de inestabilidad de la relación de la posición bola con el ángulo de la barra, fue necesaria la aplicación de controladores al sistema.

4.4.1. Controlador PID

4.4.1.1. Controlador PID para la función de transferencia continua

Para la simulación del sistema con un controlador clásico, se recurrió a la herramienta SIMULINK para encontrar los parámetros necesarios para controlar el sistema, mediante técnicas de sintonización.

El procedimiento de la sintonización consta de linealizar el sistema y considerar el controlador clásico como parte de la planta, de esta manera se incluye a todos los bloques en un lazo de control. Luego se calcula un diseño inicial balanceado entre robustez y desempeño, el cual podrá ser modificado a discreción. Cabe destacar que el sintonizador basa su diseño inicial de control en la respuesta frecuencial a lazo abierto de la planta linealizada.

El diagrama de bloques utilizado en la sintonización fue el siguiente:

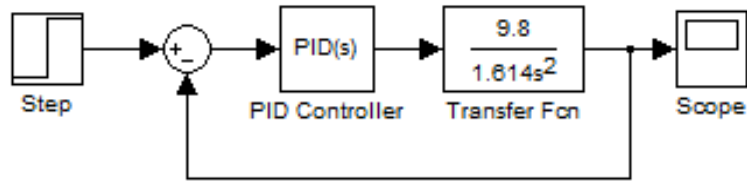


Figura 4.13. Diagrama de bloques de la simulación del sistema continuo con controlador PID.

A continuación se mostrarán las respuestas de distintas configuraciones PID: control proporcional (P), proporcional integral (PI), proporcional derivativo (PD), y proporcional integral derivativo (PID) para la versión continua del sistema.

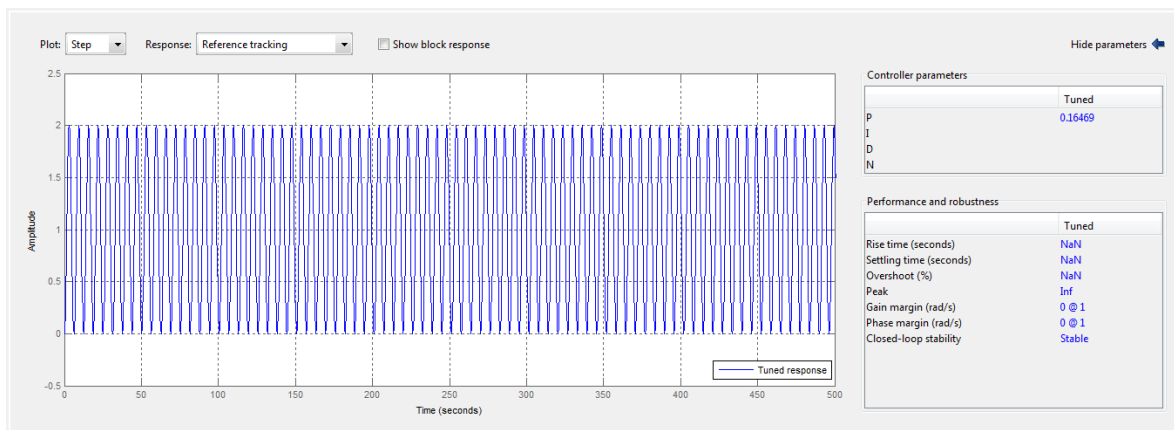


Figura 4.14. Controlador P para la simulación del sistema continuo.

Puede apreciarse que el sistema es críticamente estable al aplicársele un componente proporcional. El controlador P, por consiguiente, no estabiliza el sistema.

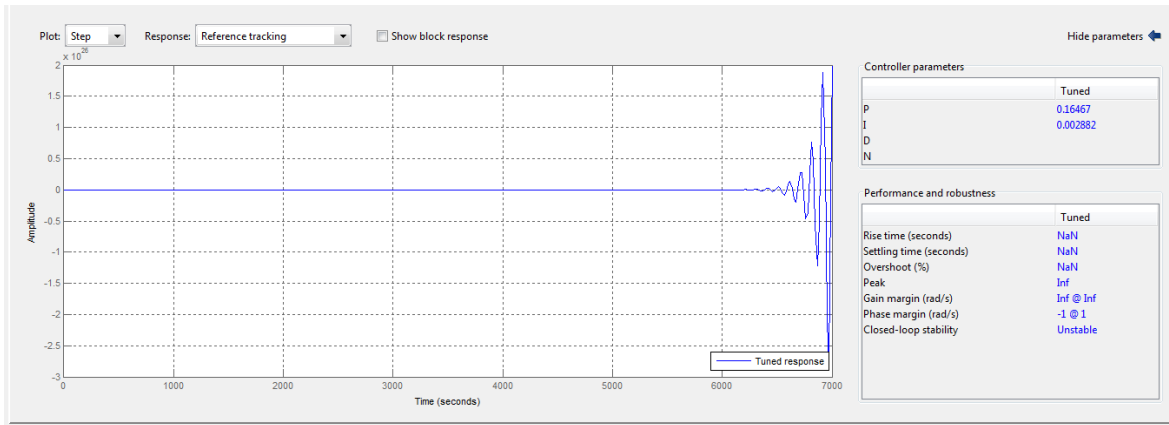


Figura 4.15. Controlador PI para la simulación del sistema continuo.

Puede observarse que el sistema no responde ante la función escalón sino luego de aproximadamente 6300 segundos. Posterior a esto, la salida varía hasta llegar al infinito, consecuentemente, el controlador PI no estabiliza el sistema.

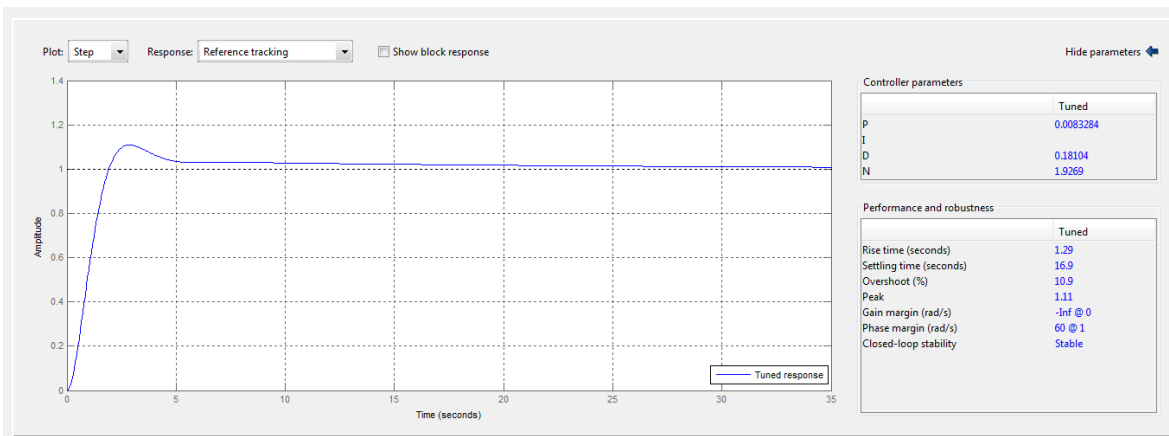


Figura 4.16. Controlador PD para la simulación del sistema continuo.

Se puede visualizar una reacción inmediata ante la función escalón, que conlleva a una posición muy cercana a la unitaria luego de 5 segundos, con un porcentaje de sobrepaso del 10.9%. Posteriormente, la posición se mantiene en el tiempo acercándose a la unidad. Con este resultado es posible decir que el controlador PD estabiliza el sistema.

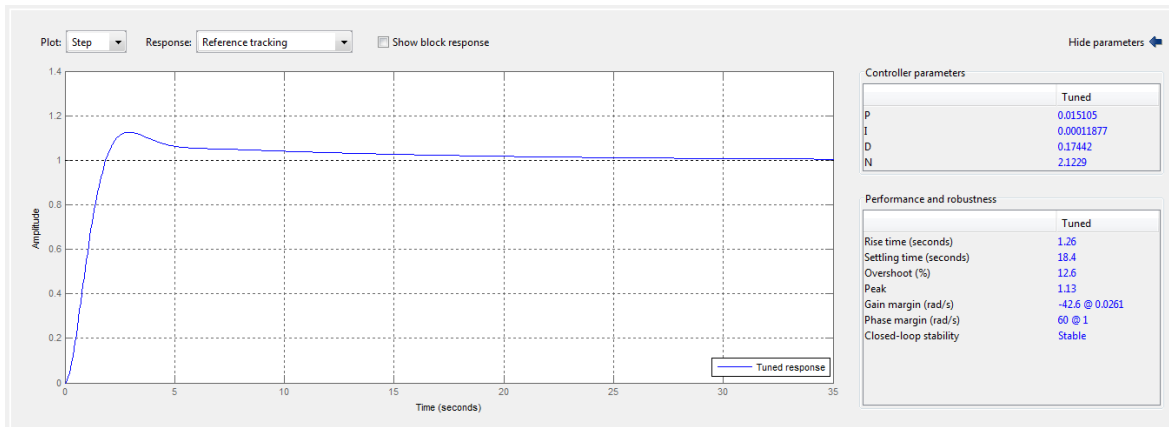


Figura 4.17. Controlador PID para la simulación del sistema continuo.

De la misma manera que el controlador PD, la salida del sistema reacciona de manera inmediata, capaz de estabilizar la posición, pero con un sobrepaso un poco mayor que la configuración mencionada (12.6%). Es importante resaltar que el tiempo de asentamiento es mayor que la configuración PD, con un tiempo de 18.4 segundos.

En la siguiente tabla, se proyectan los parámetros de cada estrategia de control, así como las características de desempeño de cada uno.

Tabla 4.5. Parámetros y respuesta de controles clásicos en la simulación del sistema continuo.

	P	PI	PD	PID
K_p	0.16469	0.16467	0.0083284	0.015105
K_i	-	0.002882	-	0.00011877
K_d	-	-	0.18104	0.17442
Tiempo de asentamiento	Críticamente estable	Inestable	16.9 seg	18.4 seg
Tiempo de levantamiento	-	-	1.29 seg	1.26 seg
Sobrepaso	-	-	10.9%	12.6%

máximo				
Error de estado estable	-	-	0	0

Puede apreciarse que la configuración de control con los componentes proporcional y proporcional integral, no controlan el sistema bajo ninguna modificación de parámetros posible. Y, además, se destaca el desempeño de los controladores PID y PD, teniendo el controlador PD un tiempo de asentamiento 1.5 segundos menor, y un menor sobrepaso máximo.

4.4.1.2. Controlador PID para la función de transferencia discreta

Se utilizó SIMULINK para la simulación del sistema discreto. Con la herramienta de sintonización anteriormente mencionada en la sección 4.4.1.1, se determinaron los parámetros óptimos de control para las distintas configuraciones. El diagrama de bloques se muestra a continuación:

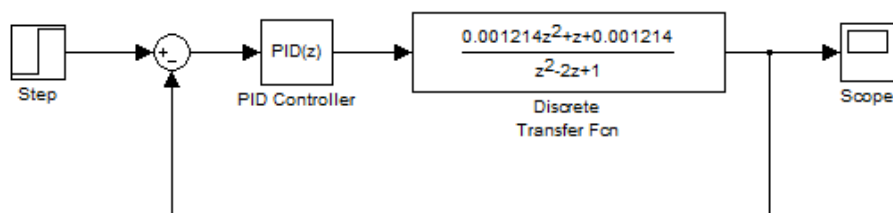


Figura 4.18. Diagrama de bloques de la simulación del sistema discreto con controlador PID.

A continuación se mostrarán las respuestas de distintas configuraciones PID: control proporcional (P), proporcional integral (PI), proporcional derivativo (PD), y proporcional integral derivativo (PID) para la versión discreta del sistema.

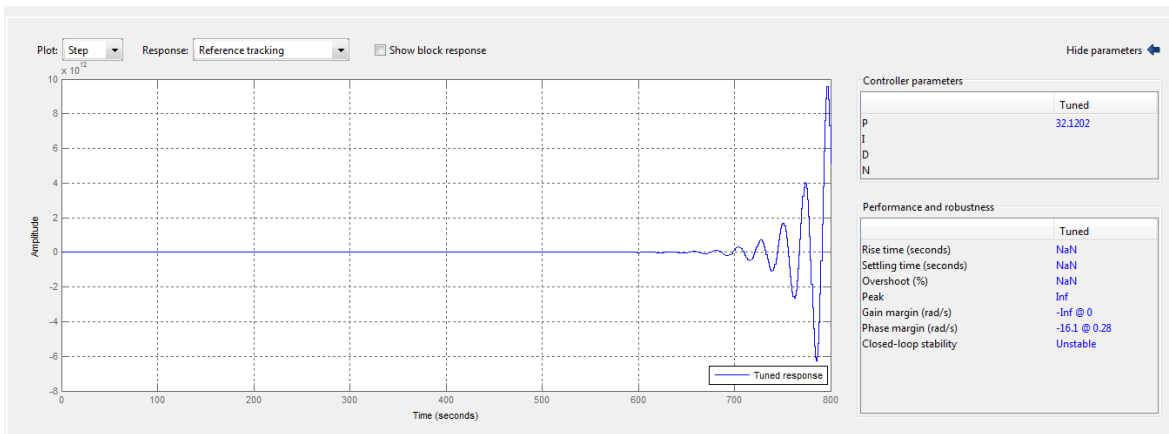


Figura 4.19. Controlador P para la simulación del sistema discreto.

Se puede observar que el sistema responde luego de aproximadamente 600 segundos de inactividad en la salida, a partir de ahí comienza a variar de manera oscilatoria, creciendo hacia el infinito. Con esto, es posible decir que el controlador P no estabiliza.

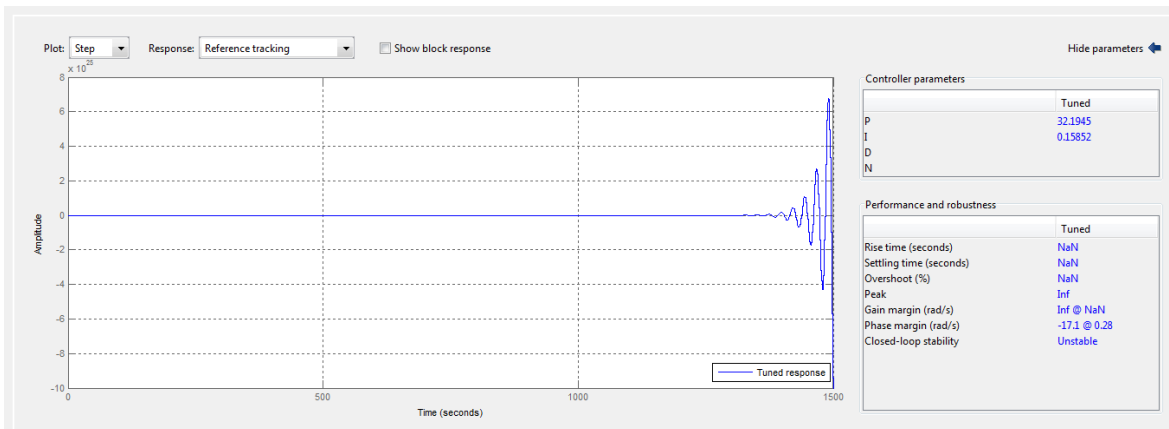


Figura 4.20. Controlador PI para la simulación del sistema discreto.

La planta con la configuración PI posee las mismas características que la versión proporcional P, sin embargo, el tiempo de reacción de la planta es de aproximadamente 1300 segundos, es decir, mucho mayor. Finalmente, la posición tiende a infinito, por consiguiente no estabiliza el sistema.

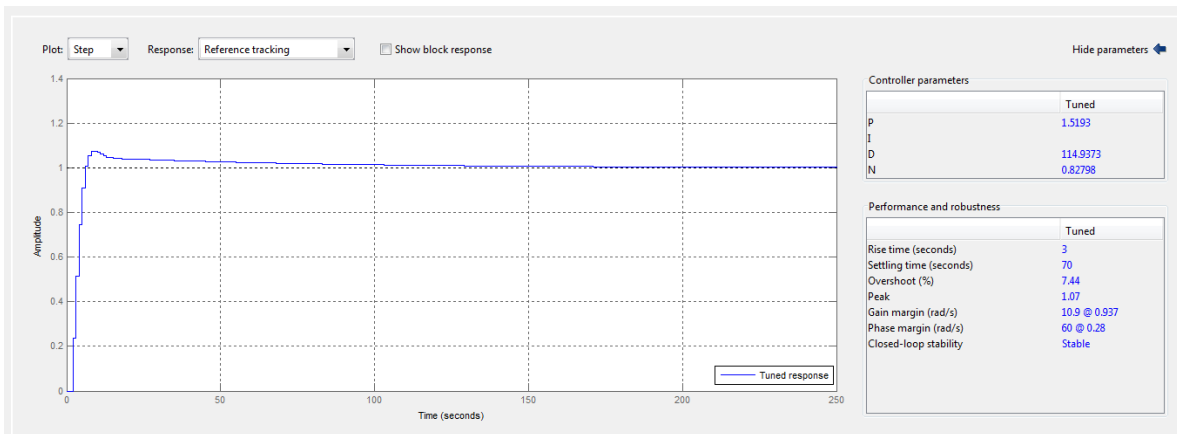


Figura 4.21. Controlador PD para la simulación del sistema discreto.

Es posible observar una variación de la salida casi inmediatamente luego de $t=0$, con un tiempo de levantamiento de 3 segundos y llegando hasta un sobrepaso de 7.44%, nivelando su valor lentamente a la unidad, con un tiempo de asentamiento de 70 segundos. Con esto, se puede decir que el controlador PD estabiliza el sistema.

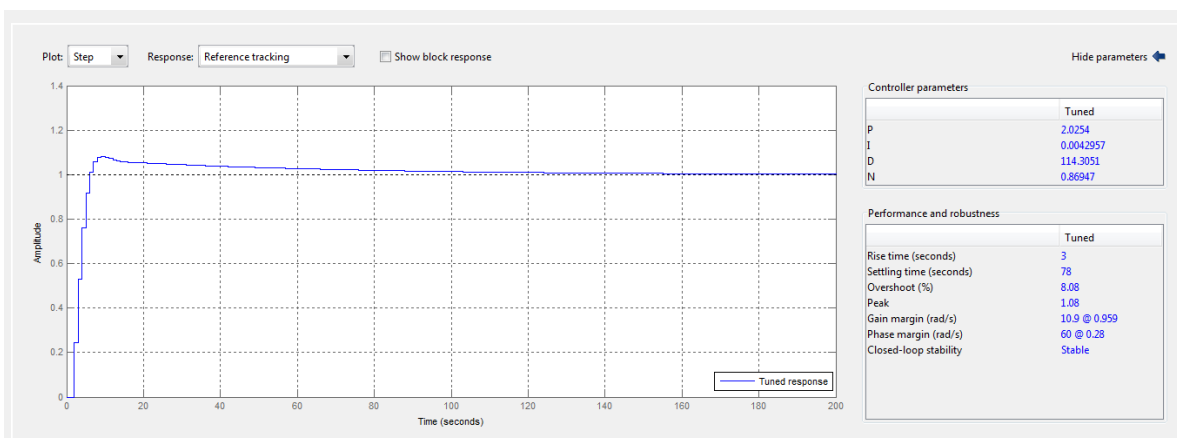


Figura 4.22. Controlador PID para la simulación del sistema discreto.

De la misma manera que el controlador PD para el sistema discreto, la configuración PID logra que la posición varíe a un máximo de 8.08% de sobrepaso, donde luego va disminuyendo lentamente hasta acercarse a la unidad,

con un tiempo de asentamiento mayor al del PD (78 segundos). Así, es posible declarar que el controlador PID estabiliza el sistema.

A continuación se muestra una tabla resumen con los parámetros de cada estrategia de control para el sistema discretizado, junto con las características de desempeño de cada uno.

Tabla 4.6. Parámetros y respuesta de controles clásicos en la simulación del sistema discreto.

	P	PI	PD	PID
Kp	32.1202	32.1945	1.5193	2.0254
Ki	-	0.15852	-	0.0042957
Kd	-	-	114.9373	114.3051
Tiempo de asentamiento	Inestable	Inestable	70 seg	78 seg
Tiempo de levantamiento	-	-	3 seg	3 seg
Sobrepaso máximo	-	-	7.44%	8.08%
Error de estado estable	-	-	0	0

Como en el caso del sistema continuo, la configuración de control con el componente proporcional y el proporcional integral, no son capaces de regular el sistema. Sin embargo, los controladores PD y PID sí controlan el sistema, aunque tienen un tiempo de respuesta mayor a los del caso continuo, respectivamente.

4.4.2. Controlador LQR

Para el diseño del controlador LQR, descrito en la sección 2.2.7, es necesaria la resolución de la ecuación de Riccati (ecuación 2.26), para la cual se deben de determinar las matrices Q y R. Al resolver esta ecuación, se obtiene la matriz K del regulador. Se observa de manera detallada el procedimiento descrito a continuación.

Primeramente se debe tomar en cuenta el tamaño de las matrices de espacio estado del modelado matemático teórico, es decir las matrices A, B, C y D correspondientes a la ecuación 4.9. Las siguientes ecuaciones ilustran la ecuación de estado del modelo matemático teórico.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{Ec. 4.16})$$

Donde la matriz A es de tamaño $n \times n$ y la matriz B es de tamaño $n \times p$. Adicionalmente, la expresión de estado de salida $y(t)$ es la siguiente:

$$y(t) = [0 \quad 6.0712] x(t) + [0] u(t) \quad (\text{Ec. 4.17})$$

Donde la matriz C es de tamaño $p \times n$ y la matriz D de tamaño $p \times p$. De acuerdo a estas ecuaciones, el tamaño de las matrices Q y R y K antes mencionadas es de $n \times n$, $p \times p$ y $p \times n$ respectivamente, que se muestran a continuación:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad R = [r_1] \quad K = [k_1 \quad k_2] \quad (\text{Ec. 4.18})$$

Para determinar los valores de los coeficientes de las matrices Q y R, se recurre a la regla de Bryson, que toma como referencia el rango máximo que toman las

variables en el sistema bola y barra, de tal manera que el regulador opera en el rango establecido (Hespanha, 2007). La forma es la siguiente:

$$r_1, q_1, q_2 = \left(\frac{1}{\text{rango}} \right)^2 \quad (\text{Ec. 4.19})$$

Donde r_1 es el coeficiente que representa el máximo valor aceptable del ángulo de la barra, q_1 es el coeficiente que representa el máximo valor aceptable para la posición de la bola sobre la barra y q_2 es el coeficiente que representa el máximo valor aceptable para la velocidad de la bola sobre la barra.

A partir de los valores conseguidos por la regla de Bryson, puede ilustrarse el proceso para optimizar el regulador de la siguiente manera:

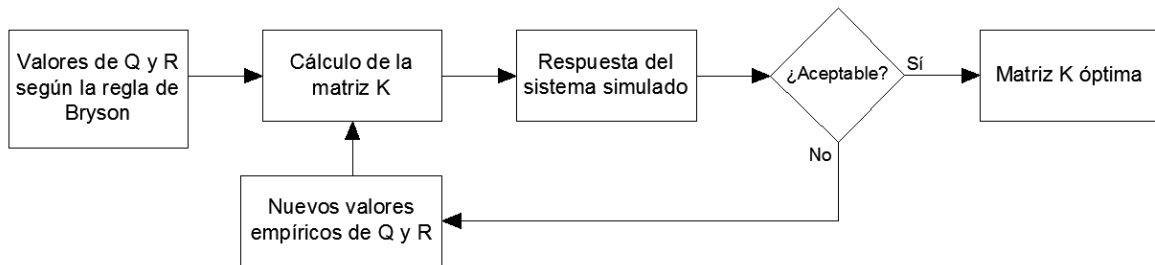


Figura 4.23. Diagrama de flujo para la obtención de la matriz K óptima.

Se observa en el diagrama de flujo el proceso iterativo correspondiente para obtener la matriz K óptima, donde se debe evaluar mediante una simulación la respuesta del sistema, tomando en cuenta la estabilidad, el error de estado estable y el tiempo de estabilización de la misma.

4.4.2.1. Controlador LQR para la función de transferencia continua

En esta sección se aplicaron los pasos mostrados en el diagrama de flujo anterior para conseguir la matriz K óptima para la función de transferencia continua que regulara de manera adecuada el sistema.

Primeramente, los valores iniciales obtenidos por la regla de Bryson fueron los siguientes:

$$r_1 = \left(\frac{1}{15}\right)^2 = 0.0044 \quad q_1 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1 \quad q_2 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^2 = 4 \quad (\text{Ec. 4.20})$$

Donde el rango de r_1 es 15 debido a los límites operativos establecidos para el ángulo de la barra, limitación impuesta para disminuir empíricamente el efecto de la no linealidad. El rango de q_1 , por otro lado, es 1 y equivale al largo de la barra en metros. Por último el rango de q_2 equivale a la velocidad máxima que puede tener la bola sobre la barra, y se estima de manera empírica un valor de 0,5 metros por segundo.

Se realizó el proceso iterativo para obtener la matriz K óptima, donde fue necesaria la resolución de la ecuación de Riccati. A partir de los valores iniciales obtenidos por la regla de Bryson, se calculó dicha matriz, cuyo valor fue:

$$K = [16.9580 \quad 30.1511] \quad (\text{Ec. 4.21})$$

La respuesta al escalón obtenida de la primera iteración simulada fue la siguiente:

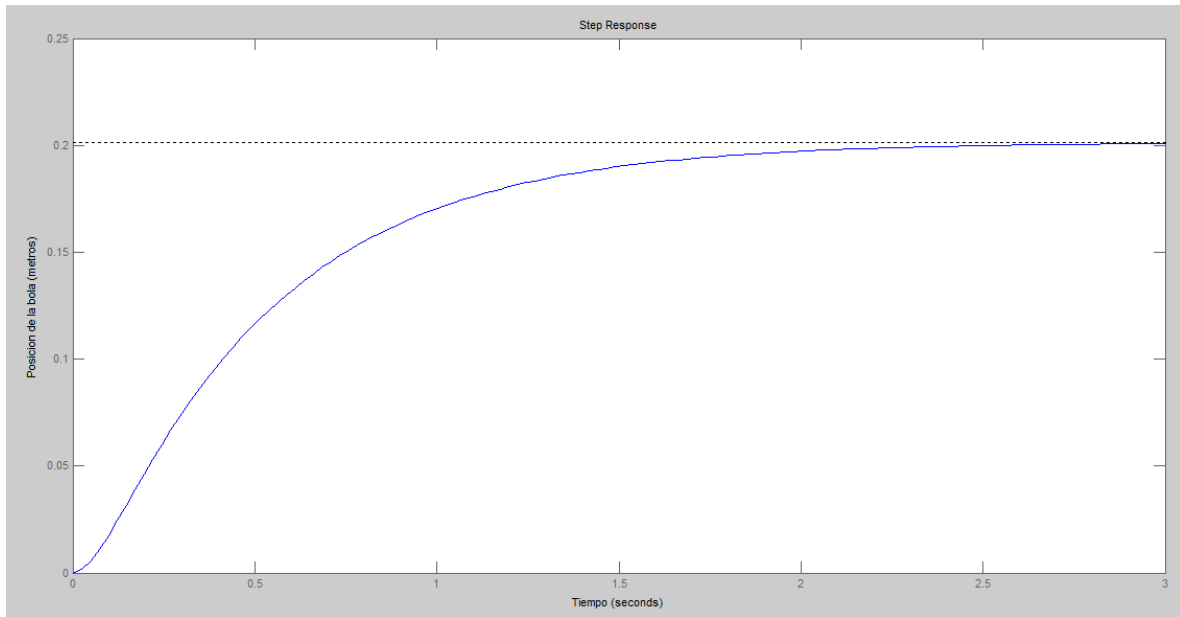


Figura 4.24. Respuesta al escalón del sistema continuo con controlador LQR con parámetros de la regla de Bryson.

Se observa un considerable error de estado estable (0.8), y con un tiempo de asentamiento de 1.52 segundos. Se procede a realizar modificaciones empíricas en los parámetros base para optimizar la respuesta y se muestra a continuación un cuadro que contiene las continuas modificaciones de los coeficientes de las matrices Q y R, el resultado de la matriz K así como la respuesta del sistema (amplitud y tiempo de estabilización) ante el efecto del controlador LQR.

Tabla 4.7. Iteraciones de LQR para el sistema continuo.

Iteración	Matriz K	r_1	q_1	q_2	Amplitud	Tiempo de asentamiento
Bryson	[16.96 30.1511]	0.0044	1	4	0.2	1.52seg
#1	[4.7591 6.3246]	0.1	1	4	0.96	1.73seg
#2	[51.9615 100]	0.0004	1	4	0.0607	1.52seg
#3	[48.3014 30.1511]	0.0044	10	4	0.201	4.66seg
#4	[9.1121 30.1511]	0.0044	0.1	4	0.203	0.664seg

#5	[20.4442 95.3463]	0.0044	1	40	0.0636	0.519seg
#6	[15.6953 9.5346]	0.0044	1	0.4	0.634	4.65seg
#7	[3.6013 6.0302]	0.11	0.1	4	1.01	1.25seg

Las primeras seis iteraciones tuvieron como función la apreciación de la influencia de los coeficientes en la simulación de la respuesta del sistema. Estos coeficientes se variaron individualmente, aumentando y reduciendo sus valores. La séptima iteración considera las mejores características de las iteraciones anteriores, es decir, el menor tiempo de asentamiento y la cercanía a la amplitud del escalón unitario.

A continuación se observa respuesta de la simulación de la iteración 7:

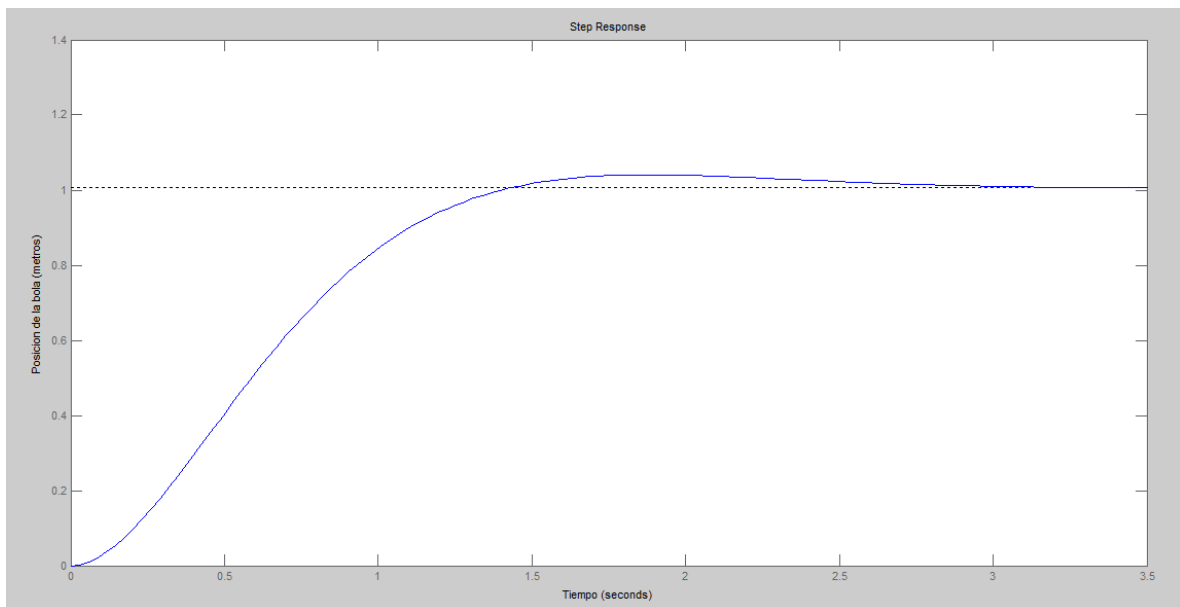


Figura 4.25. Respuesta al escalón del sistema continuo con controlador LQR con parámetros de la última iteración.

Donde se aprecia que la amplitud de salida, de 1.01, es prácticamente igual a la amplitud del escalón unitario, además, el tiempo de asentamiento fue corto (1.25 segundos).

4.4.2.2. Controlador LQR para la función de transferencia discreta

Aplicando el mismo procedimiento iterativo para la versión continua del sistema, se desarrollaron las iteraciones para obtener el controlador LQR óptimo utilizando la función de transferencia discreta (ecuación 4.11). A continuación se muestra la gráfica número uno, correspondiente a los parámetros iniciales de Bryson:

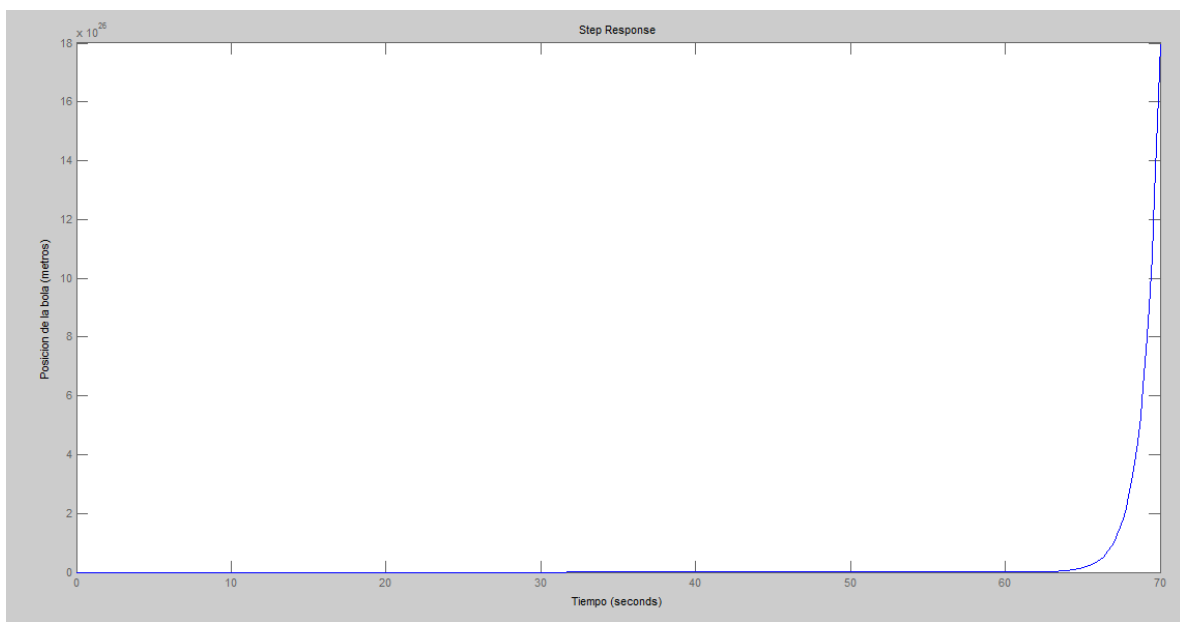


Figura 4.26. Respuesta al escalón del sistema discreto con controlador LQR con parámetros de la regla de Bryson.

Puede apreciarse claramente que el controlador LQR, bajo los parámetros impuestos por la regla de Bryson y para el sistema discreto con un tiempo de muestreo de 0.02 segundos, no pudo controlar la posición de la bola en esta simulación. Por consiguiente, se procedió a realizar el proceso iterativo (tal y como se hizo en el modelo continuo) para tratar de controlar el fenómeno. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.8. Iteraciones de LQR para el sistema discreto.

Iteración	Matriz K	r_1	q_1	q_2	Amplitud	Tiempo de asentamiento
Bryson	[14.5950 25.4628]	0.0044	1	4	∞	-
#1	[4.5993 6.0307]	0.1	1	4	∞	-
#2	[32.2408 60.6056]	0.0004	1	4	∞	-
#3	[30.5237 18.9090]	0.0044	10	4	∞	-
#4	[8.6020 27.5263]	0.0044	0.1	4	∞	-
#5	[17.5139 77.7686]	0.0044	1	40	∞	-
#6	[13.5107 8.1543]	0.0044	1	0.4	∞	-

Puede notarse que ningún cambio en los parámetros logró hacer estable el sistema con función discreta. Además de las iteraciones de la tabla, se realizaron otros intentos con valores diferentes y en distinta proporción entre ellos, que tampoco lograron estabilizar el sistema.

Debido a que las configuraciones anteriores no estabilizaron el sistema, se recurrió a variar el tiempo de muestreo de la función discreta, que se había simulado con un tiempo de 0.02 segundos. Los resultados, de igual manera no lograron estabilización alguna, para tiempos de muestreo de 0.1 segundos y de 0.01 segundos.

4.5. Implantar los controladores en un sistema microprocesado

Esta sección corresponde a la implantación de los controladores previamente sintonizados al sistema físico, mediante un sistema microprocesado. Primeramente, se hace una descripción de los componentes utilizados para este objetivo, y luego a la implantación de ambos controladores.

4.5.1. Descripción de los componentes del prototipo

En esta sección se describen los componentes que conforman el prototipo de sistema de bola y barra en el cual se implementaron los controladores. Dicho prototipo fue el diseñado, construido y posteriormente utilizado por Petit y Ramírez (2013) en su trabajo especial de grado.

A continuación se detalla un diagrama ilustrado que reseña cada componente del prototipo: la barra, la bola, el servomotor, la tarjeta Arduino Uno y el sensor ultrasónico.

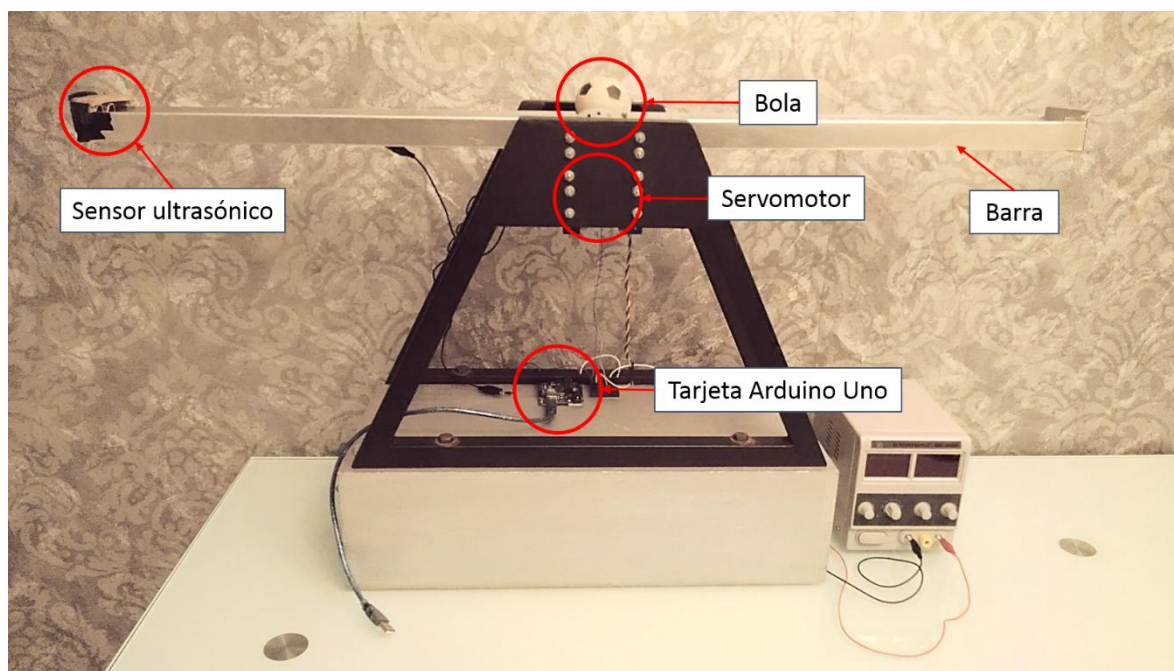


Figura 4.27. Diagrama ilustrado del prototipo bola y barra.

Cabe destacar que la base es de madera, el soporte es de acero, la barra es de aluminio, cuya longitud es de 100 centímetros, y la bola es de goma, con un diámetro de 0.057 metros.

4.5.1.1. Servomotor

El servomotor utilizado en el prototipo es el modelo SPG5685A-BM marca Servo-City, con las siguientes características:

Tabla 4.9. Tabla de características del modelo del servomotor.

Modelo del servomotor	SPG5685A-BM
Rotación máxima (grados)	180
Peso (Kg)	0.36
Torque para 6V (onza-pulgada)	785
Torque para 7.4V (onza-pulgada)	895
Velocidad para 6V (seg/60°)	1seg
Velocidad para 7.4V (seg/60°)	0.85seg

El servomotor está acoplado en el eje de la barra, protegido por un recubrimiento metálico y que permite mover dicha barra de manera angular. El servomotor se muestra a continuación:

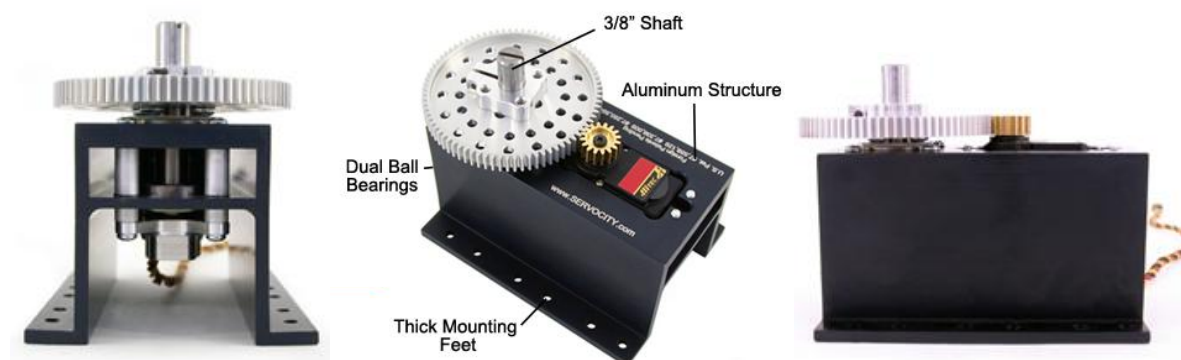


Figura 4.28. Servomotor.

4.5.1.2. Sensor ultrasónico

El sensor ultrasónico es de marca Parallax, y posee las siguientes características técnicas:

- Ángulo de aceptación estrecho
- Rango de aproximadamente 1 pulgada a 10 pies (2 centímetros a 3 metros)
- Cabezal macho de 3 pines con espaciado de 0.1 pulgadas entre ellos
- 5 voltios DC y 35mA requeridos.
- Comunicación de pulso TTL positivo
- Rango de temperatura operacional de 0°C a 70°C

Este sensor está instalado en un extremo de la barra, y posee la función de retroalimentar la posición de bola y así corregir el giro del servomotor. Dicho sensor se muestra a continuación:



Figura 4.29. Sensor ultrasónico.

4.5.1.3. Sistema microprocesado

El sistema microprocesado que se programará para implementar los controladores es una tarjeta integrada Arduino Uno (plataforma abierta). Este dispositivo tiene

todo lo necesario para respaldar al microcontrolador que tiene integrado, y posee las siguientes características:

Tabla 4.10. Tabla de características de la tarjeta integrada Arduino Uno.

Microcontrolador	ATmega328
Voltaje de operación	5V
Voltaje de entrada (recomendado)	7-12V
Voltaje de entrada (límites)	6-20V
Pines digitales	14 (6 de ellos permiten PWM)
Pines análogos	6
Corriente DC por pin digital	40mA
Corriente DC para el pin de 3.3V	50mA
Memoria Flash	32KB (ATmega328) y 0.5KB usados por el gestor de arranque
SRAM	2KB (ATmega328)
EEPROM	1KB (ATmega328)
Velocidad del reloj	16MHz

Para utilizar el Arduino Uno se debe descargar el software libre que proporciona la compañía en su página web oficial llamado Arduino IDE. La programación del dispositivo está basada en C++ lo que lo hace una herramienta versátil y sencilla. Se observa a continuación el Arduino Uno R3:

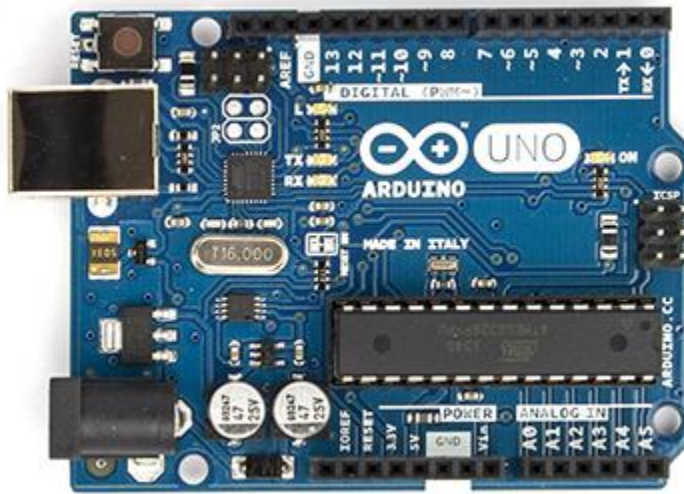


Figura 4.30. Arduino Uno.

4.5.2. Implantación del controlador PID

Para la implantación del controlador PID en el prototipo se realizó un programa en la tarjeta Arduino Uno, usando las librerías facilitadas por el fabricante en su página web; se muestra en el anexo 1 el programa utilizado.

Primeramente, se realizó la implantación de los controladores PID del modelado matemático teórico continuo y se escogió el controlador PD debido a que fue el de mejor comportamiento a nivel de simulación. La prueba de desempeño se realizó de la siguiente manera: se colocó la bola en la posición inicial (0.5m), y luego se le aplicó manualmente una perturbación, moviendo la bola hacia un extremo de la barra con el objetivo de comprobar que el controlador seleccionado estabilizara su posición a la inicial.

Se muestra a continuación la gráfica de la posición de la bola (adquirida mediante las lecturas del sensor ultrasónico) de la prueba descrita anteriormente, con el controlador PD para el modelado teórico continuo:

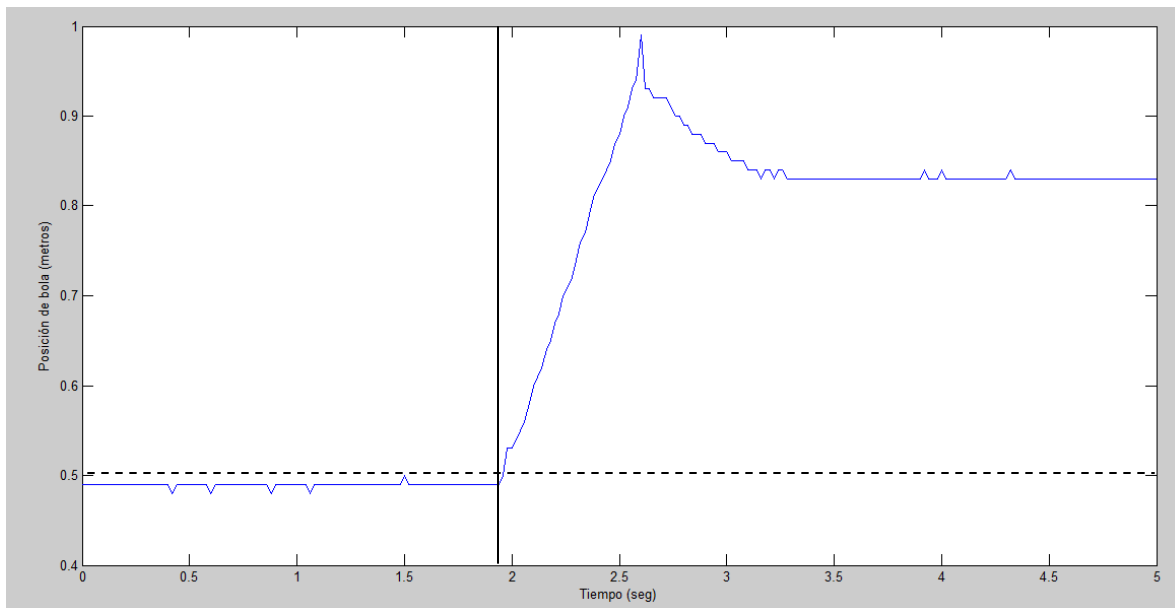


Figura 4.31. Posición de la bola en la implantación del controlador PD del modelado teórico continuo.

Se aprecia que al perturbar la posición (indicado con la vertical roja) de la bola a partir de los 2 segundos, la misma varía hacia un extremo de manera lineal, hasta que choca con el límite físico de la barra (aproximadamente a los 2.5 segundos). Posterior al choque, la bola rebota y se estabiliza al llegar a los 0.83 metros. Esto significa que si no fuera por el impedimento físico de la barra, la posición seguiría variando descontroladamente, por consiguiente, el controlador no fue capaz de regular de manera correcta la posición de la bola y devolverla a la posición inicial o setpoint (denotado con la horizontal punteada).

Posteriormente, se realizó la misma prueba de desempeño para el controlador PD del modelado teórico discreto (ya que fue el controlador que tuvo mejor respuesta a nivel de simulación) con los parámetros correspondientes al mejor resultado. La siguiente gráfica muestra la posición de la bola para esta configuración de control:

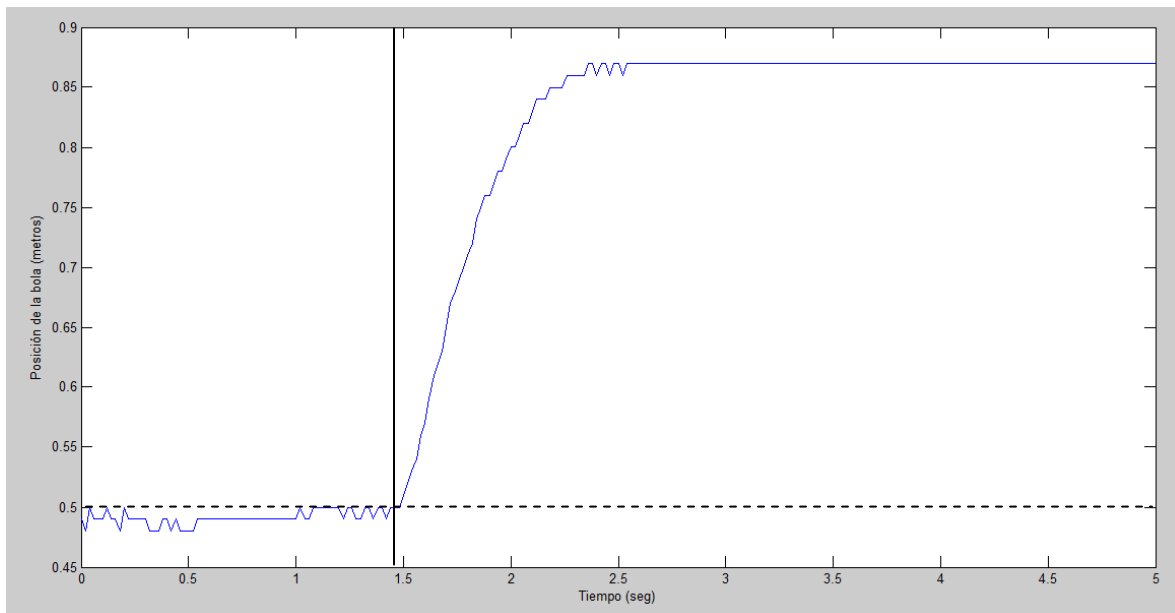


Figura 4.32. Posición de la bola en la implantación del controlador PD del modelado teórico discreto.

Puede apreciarse que al aplicar la perturbación a los 1.5 segundos, la posición de la bola varió hasta los 0.875 metros, pero el controlador no fue capaz de devolverla a la posición inicial (setpoint). Con esto, puede decirse que logró estabilidad de posición, sin embargo, hay un error de estado estable de 0.375 metros.

Para corroborar que el comportamiento del sistema con el controlador PD tiene definitivamente las características descritas en el párrafo anterior, se recurrió a realizar 2 pruebas más, una para cada lado de la barra. La siguiente gráfica muestra la superposición de las 3 demostraciones:

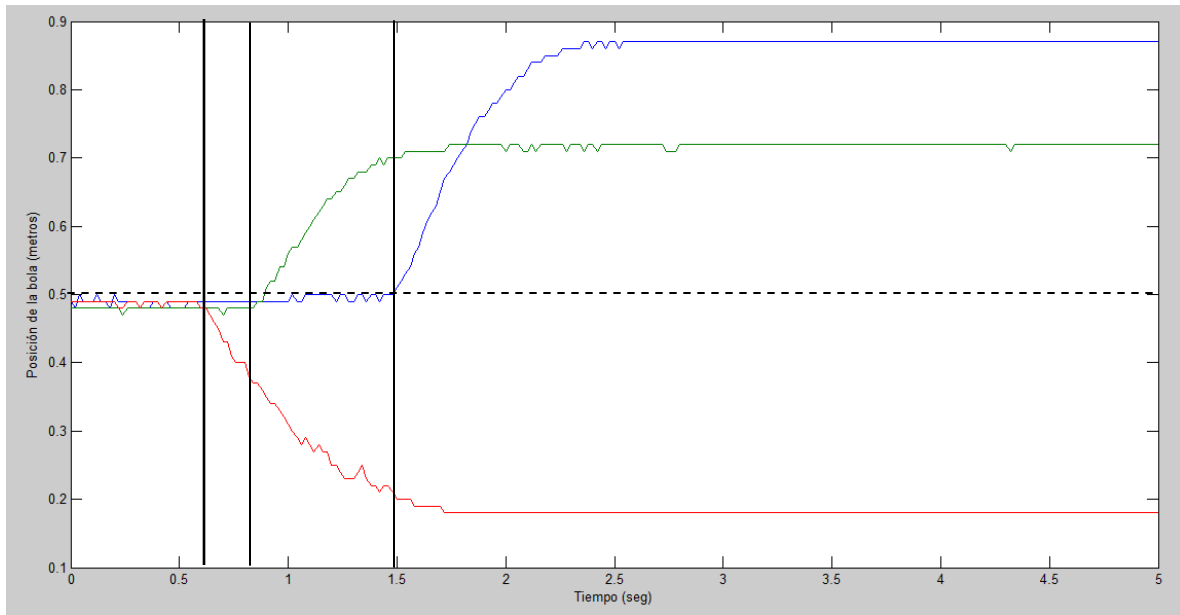


Figura 4.33. Superposición de tres demostraciones de la implantación del controlador PD (modelado teórico discreto).

Donde la salida azul es la prueba original. Puede apreciarse que para las 3 pruebas, el controlador estabiliza la posición de la bola, sin embargo, no la devuelve a su posición deseada. Se debe resaltar que las verticales (de color negro) corresponden a los momentos en los cuales se aplicó la perturbación a cada señal, respectivamente, al igual que la horizontal punteada que representa el setpoint.

4.5.2.1. Comparación de la implementación versus la simulación para la estrategia PID

A continuación se muestra una tabla comparativa, en la cual están referidas las características de las respuestas de la simulación del sistema para los casos teórico y continuo con configuración PD, con respecto a las características de la implementación de los mismos.

Tabla 4.11. Tabla comparativa de las características de la implementación versus la simulación de la estrategia PID.

Características	Modelado teórico continuo		Modelado teórico discreto	
	Simulación (figura 4.16)	Implantación (figura 4.31)	Simulación (figura 4.21)	Implantación prueba 1 (figura 4.32)
K_p	0.0083284		1.5193	
K_d	0.18104		114.9373	
Tiempo de levantamiento	1.29 seg	-	3 seg	-
Tiempo de estabilización	16.9 seg	Inestable	70 seg	0.65 seg
Sobrepaso máximo	10.9%	-	7.44%	-
Error de estado estable	0	-	0	0.38 m

En relación al modelado teórico continuo, se puede apreciar que la respuesta de la implementación no corresponde con su resultado a nivel de simulación, ya que es inestable. Por otro lado, en relación al modelado teórico discreto, puede observarse que la respuesta de la implementación tampoco corresponde a su simulación, sin embargo a nivel de implementación el controlador logra estabilizar el movimiento de la bola en 0.65 segundos.

Comparando ambas implementaciones, es pertinente comentar que la implantación del controlador PD ya sea discreto o continuo (al igual que ninguna de las otras configuraciones), no estabiliza la posición de la bola en el setpoint. Sin embargo, la implantación del controlador PD con los parámetros según el modelo discreto logra estabilizar el movimiento de la bola, con un error de estado estable de 0.38 metros.

Posterior a estos resultados se recurrió a variar los parámetros con el controlador PID implantado, observando la modificación en vivo de la respuesta del prototipo (posición de la bola). La siguiente gráfica refleja 3 pruebas, basadas en la aplicación de una perturbación, tal como en las implementaciones anteriores.

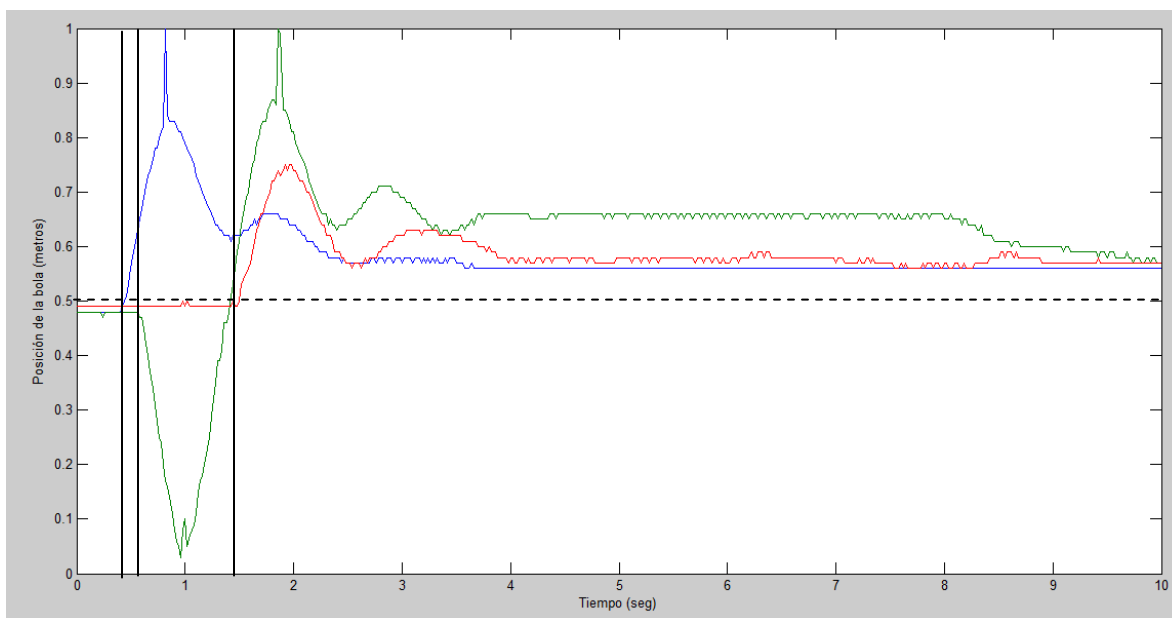


Figura 4.34. Implementación final del PID con parámetros empíricos.

Con esta gráfica, es posible observar que para las 3 pruebas de perturbación, la posición de la bola se devolvió a cerca de la posición deseada. En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos:

Tabla 4.12. Tabla comparativa de las pruebas de la implementación con controlador PID empíricas.

	Prueba 1 (azul)	Prueba 2 (verde)	Prueba 3 (rojo)
K_p, K_i, K_d	10, 0.7, 18		
Tiempo de estabilización	3.3 seg	8.6 seg	2.4 seg
Error de estado estable	0.06 m	0.07 m	0.07 m

Con esto se tiene que las pruebas de implementación empíricas realizadas, poseen un error de estado estable similar, al igual que el tiempo de estabilización exceptuando el caso de la prueba 2. También se observa que el menor error de estado estable lo tuvo la prueba 1 y que el menor tiempo de estabilización lo tuvo la prueba 3.

4.5.2.2. Comparación de implementaciones del PID

Ya que se implementó este controlador bajo distintas premisas, se consideró pertinente comparar las tres implementaciones realizadas: la primera, hecha en función del modelo teórico continuo, la segunda en función del modelo teórico discreto, y la tercera en función de la variación empírica en vivo de los parámetros colocados. Se debe destacar, que para la primera y segunda implementación, se utilizó la estrategia de control PD, debido a que fue la mejor respuesta en sus simulaciones, y para la tercera implementación, se utilizó la prueba 3, cuyo tiempo de estabilización fue el menor. La tabla comparativa es la siguiente:

Tabla 4.13. Tabla comparativa de las implementaciones realizadas con el PID.

	Con modelo teórico continuo (figura 4.31)	Con modelo teórico discreto (figura 4.32)	Implementación empírica prueba 3 (figura 4.34)
K_p	0.0083284	1.5193	10
K_i	-	-	0.7
K_d	0.18104	114.9373	18
Tiempo de estabilización	Inestable	0.65 seg	2.4 seg
Error de estado estable	-	0.38 m	0.07 m

Puede apreciarse gran diferencia entre las 3 implementaciones, siendo la versión según la simulación del modelado teórico continuo incapaz de estabilizar el sistema. Además, se puede observar que el tiempo más corto de estabilización lo posee la implementación 2 (según la simulación del modelo teórico discreto), pero con un considerable error de estado estable de 0.38 metros alejado de la posición deseada. En contraposición, la implementación 3 (empírica) posee un error de estado estable es de 0.07 metros, y su tiempo de estabilización es mayor (2.4 segundos).

4.5.3. Implantación del controlador LQR

Al igual que con el PID, el controlador LQR (del modelado teórico continuo) se implementó en el sistema con la tarjeta Arduino Uno y el programa utilizado puede apreciarse en el anexo 2. Para ejecutar la implementación, se aplicó la perturbación respectiva y se recogieron 3 muestras para observar el comportamiento del prototipo, que son mostradas en la siguiente gráfica:

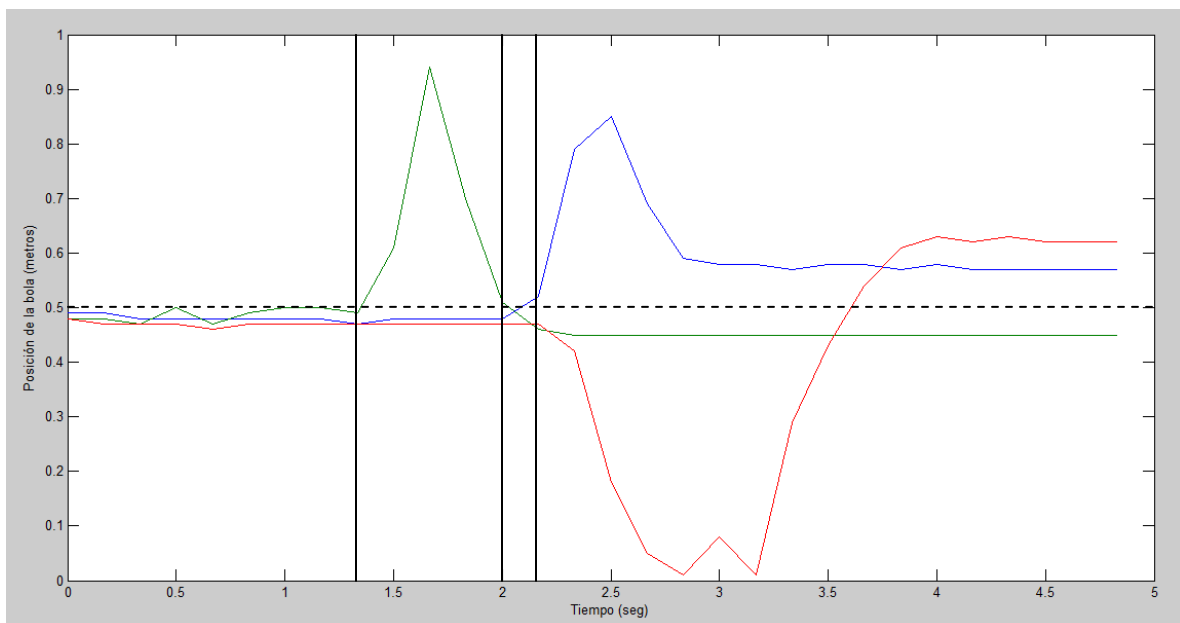


Figura 4.35. Superposición de las 3 pruebas de la implantación del controlador LQR (modelado teórico continuo).

Se puede apreciar que luego de las perturbaciones aplicadas entre los 1.2 y 2.5 segundos (representadas con las verticales de color negro, para cada prueba respectivamente), la posición de la bola se estabiliza, aunque existe error de estado estable. A continuación se muestra una tabla comparativa de las 3 pruebas de implementación para esta configuración:

Tabla 4.14. Tabla comparativa de las pruebas de implementación para el control LQR con el modelado teórico continuo.

	Prueba 1 (azul)	Prueba 2 (verde)	Prueba 3 (rojo)
Matriz K	[3.6013 6.0302]		
Tiempo de estabilización	0.9 seg	1.05 seg	1.8 seg
Error de estado estable	0.07 m	0.05 m	0.12 m

Puede observarse que las respuestas de las tres pruebas ante la implementación del LQR según la simulación con el modelo teórico continuo, poseen semejanzas. La prueba con menor tiempo de estabilización fue la primera con menos de 1 segundo, mientras que la tercera prueba fue la más lenta con casi 2 segundos. En relación al error de estado estable, la prueba 2 posee el menor con 0.05 m de diferencia a la posición deseada.

El controlador LQR del modelado teórico discreto no fue implementado puesto que a nivel de simulación no hubo una configuración que lograra estabilizar la planta.

4.5.3.1. Comparación de la implementación versus la simulación para la estrategia LQR

A continuación se muestra una tabla comparativa con las características de las respuestas de la simulación del sistema en su versión continua para la estrategia de control LQR, versus su implantación. Cabe destacar, que la respuesta del sistema a nivel de simulación elegida para esta comparación, corresponde a la iteración #7, que fue la iteración con la respuesta más adecuada. Además, las respuestas de la implantación a mostrar en la tabla, corresponden a las muestras de color azul (prueba 1) y verde (prueba 2) de la figura 4.24.

Tabla 4.15. Tabla comparativa de las características de la implementación versus la simulación de la estrategia LQR (sistema continuo).

	Simulación LQR (figura 4.25)	Implantación LQR prueba 1 (figura 4.35)	Implantación LQR prueba 2 (figura 4.35)
Matriz K	[3.6013 6.0302]		
Tiempo de estabilización	1.25 seg	0.9 seg	1.05 seg
Error de estado estable	0.01	0.07	0.05

Se puede observar con esta tabla que la respuesta de la implantación del controlador LQR corresponde con su respuesta a nivel de simulación: existe un error de estado estable de 0.07 metros para la prueba 1 y de 0.05 metros para la prueba 2; con una diferencia de 4 a 6 centímetros respecto al error de la simulación de 0.01. Además, los tiempos de estabilización de la posición de las pruebas son más cortos que el tiempo respectivo a nivel de simulación.

4.5.4. Modelo matemático experimental

Con el objetivo de profundizar el conocimiento sobre el sistema físico, se consideró pertinente el diseño de un modelado matemático experimental, y para su realización, consta de varios pasos.

Primeramente se debe aplicar una señal de entrada al sistema (ángulo de la barra), para registrar la salida (posición de la bola) correspondiente. La señal de entrada utilizada fue pseudo aleatoria, con el objetivo de describir de manera precisa el fenómeno físico mediante la adquisición de varias muestras de salida. El programa utilizado para esta tarea es mostrado en el anexo 3, y la gráfica de la señal de entrada es la siguiente:

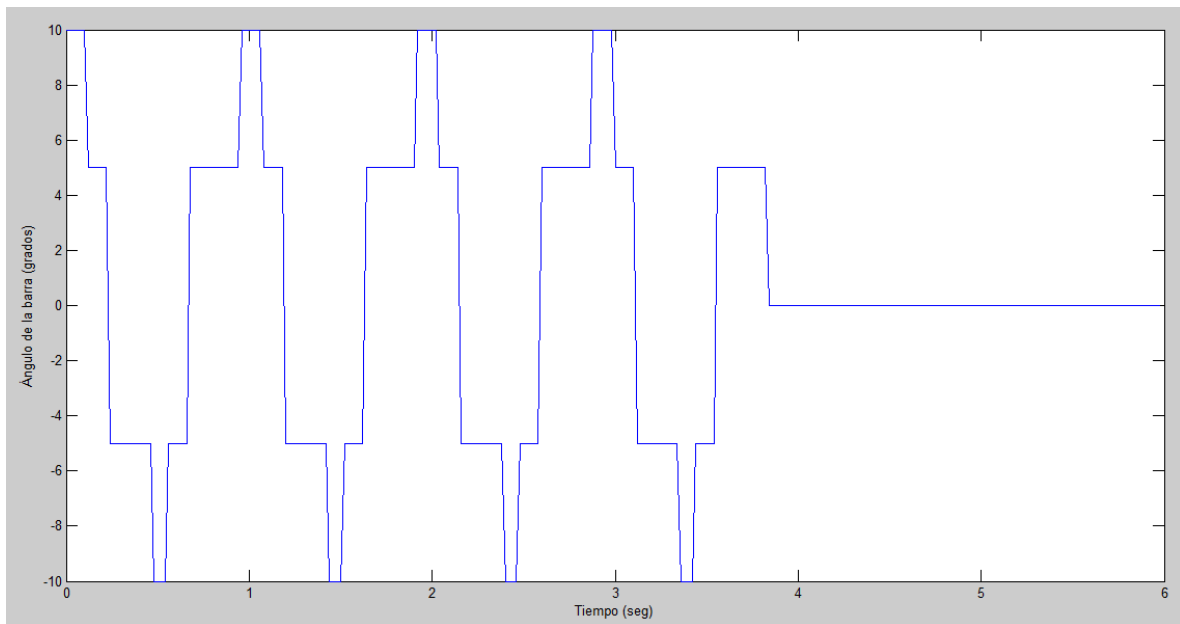


Figura 4.36. Señal pseudo aleatoria de entrada (ángulo de la barra) aplicada al sistema físico.

Luego del registro de las muestras, se lleva la información a Matlab para graficar en el tiempo las posiciones registradas. Es pertinente destacar que el muestreo de la posición de la bola se realizó cada 20 milisegundos. Tales muestras de posición fueron las siguientes:

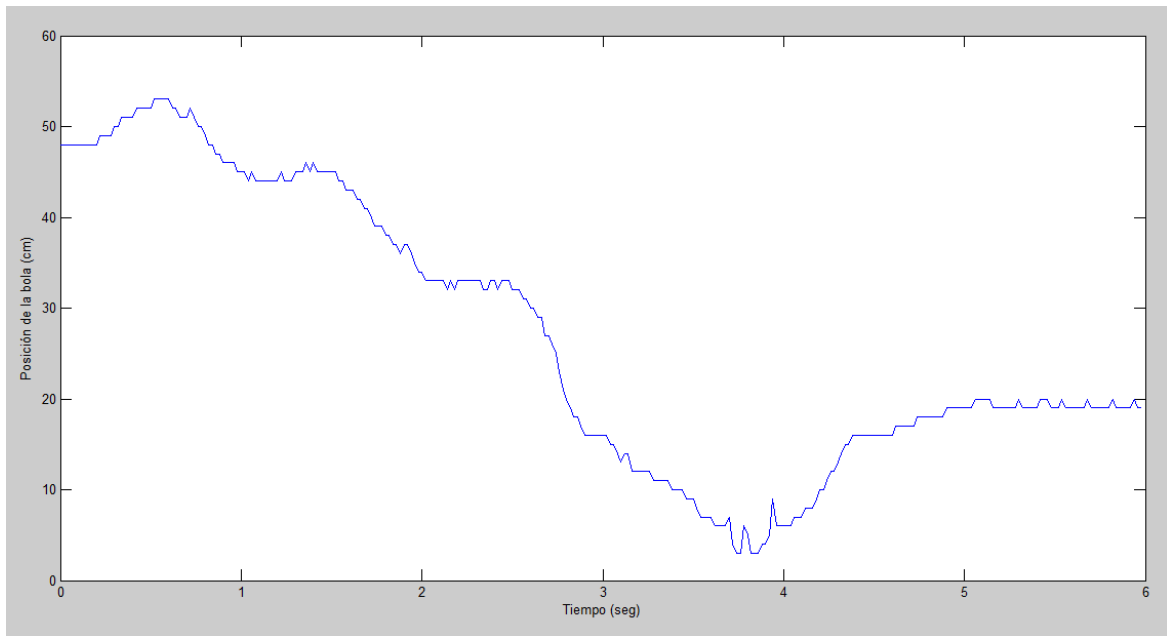


Figura 4.37. Muestra 1 del modelado experimental.

La posición inicial de la bola para la muestra 1 fue de 0.48 metros. Al aplicarse la señal pseudo aleatoria, puede apreciarse que la bola reacciona y varía su posición hasta que choca con un extremo del prototipo, a los 3.8 segundos aproximadamente. Finalmente, se estabiliza en 0.2 metros a los 5 segundos.

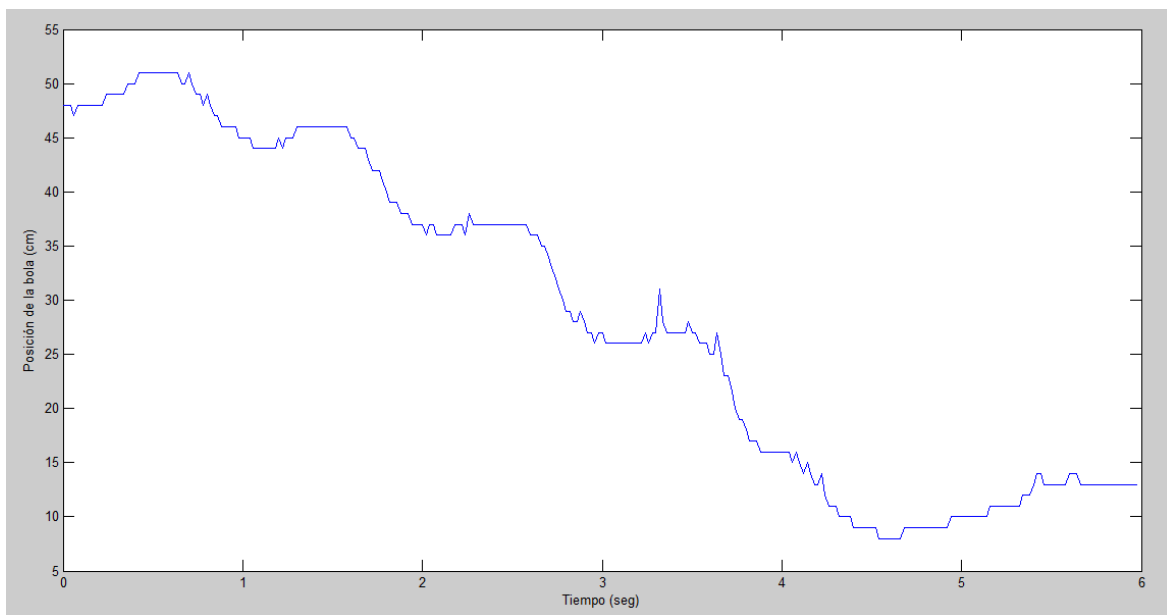


Figura 4.38. Muestra 2 del modelado experimental.

Se observa que la posición inicial de la bola para la muestra 2 fue de 0.47 metros. Así como en la muestra anterior, puede apreciarse que la bola reacciona ante la señal de entrada y varía su posición hasta que llega a un valor mínimo de 0.08 metros, y se estabiliza en 0.13 metros a los 5.5 segundos.

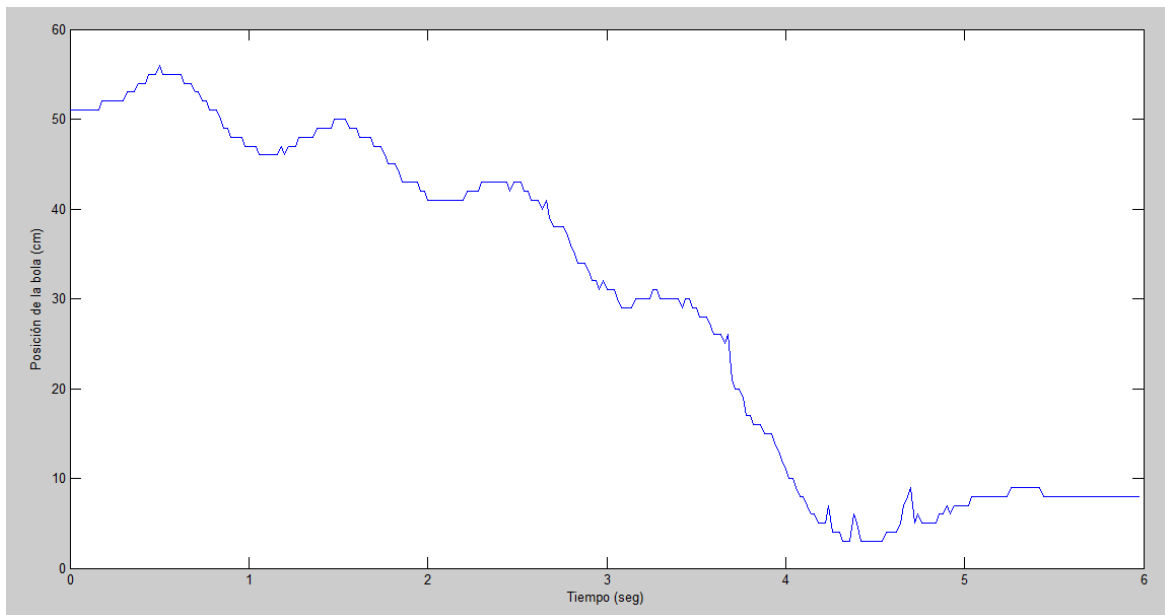


Figura 4.39. Muestra 3 del modelado experimental.

Se tiene para la muestra 3 que la posición inicial de la bola fue de 0.51 metros. Es posible detallar que la posición de la bola cambia ante la entrada, y a los 4.3 segundos aproximadamente, se topa con un extremo del prototipo de igual manera que las muestras anteriores, y finalmente se asienta en 0.08 metros a los 5.1 segundos.

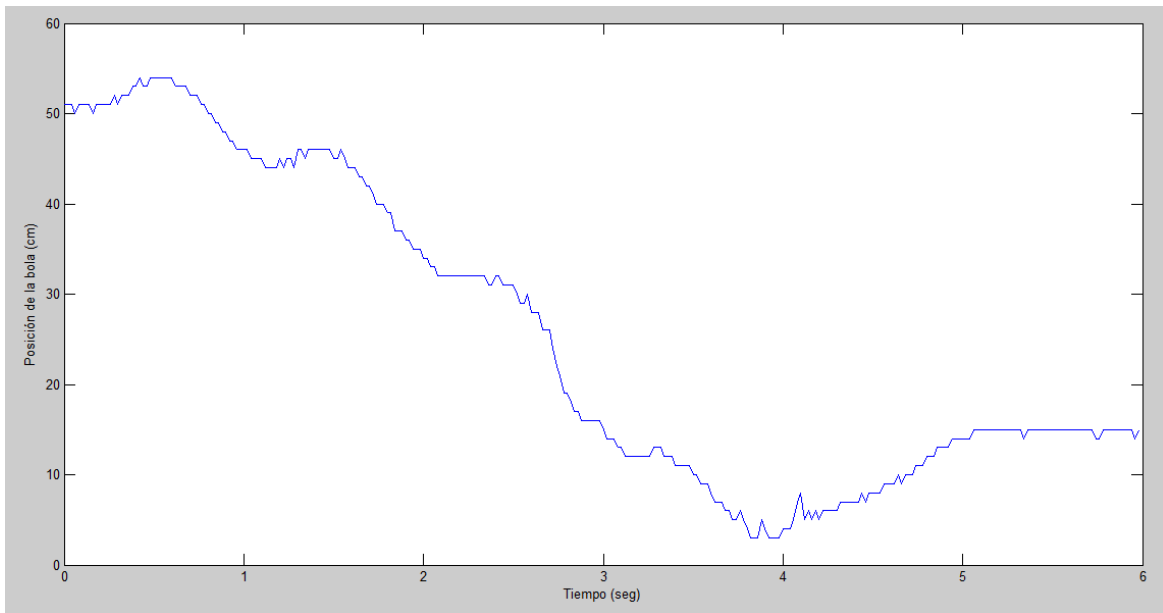


Figura 4.40. Muestra 4 del modelo experimental.

La posición inicial de la bola para la muestra 4 fue de 0.51 metros, al igual que la muestra 3. La posición de la bola varía conforme a la entrada hasta los 0.04 metros cuando colisiona en un extremo de la barra, a aproximadamente 3.9 segundos, por último, se fija en 0.14 metros a los 5 segundos.

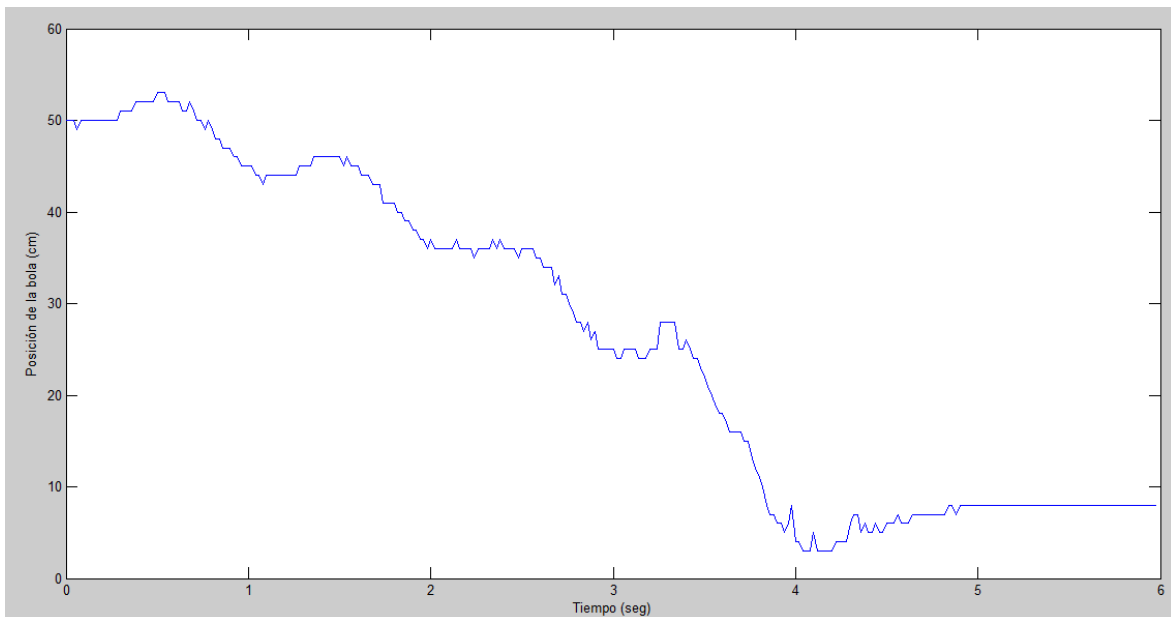


Figura 4.41. Muestra 5 del modelo experimental.

Finalmente, se puede ver que la posición inicial de la bola en la muestra 5 fue de 0.5 metros. El cambio de la posición en función de la entrada llega hasta los 4.1 segundos cuando se tropieza con un extremo de la barra y finalmente se mantiene en 0.08 metros aproximadamente, a los 4.9 segundos.

En la siguiente tabla comparativa se muestran las diferencias entre las muestras obtenidas del prototipo.

Tabla 4.16. Tabla comparativa de las muestras experimentales obtenidas.

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5
Posición inicial	0.48 m	0.47 m	0.51 m	0.51 m	0.5 m
Valor máximo	0.53 m	0.51 m	0.55 m	0.54 m	0.53 m
Valor mínimo	0.03 m	0.08 m	0.03 m	0.03 m	0.03 m
Tiempo de choque	3.8 seg	-	4.3 seg	3.9 seg	4.1 seg
Posición de estabilización	0.19 m	0.13 m	0.08 m	0.15 m	0.08 m
Tiempo de estabilización	5 seg	5.5 seg	5.1 seg	5 seg	4.9 seg

Se muestra en la tabla que las muestras de posición de la bola cumplen un patrón definido, no obstante, poseen pequeñas diferencias entre ellas. Fue necesario porcentualizar las señales de entrada y salida, de esta manera, se traducen a señales de energía donde los valores máximos y mínimos del ángulo de la barra y la posición de la bola correspondan a cantidades máximas y mínimas de energía en el sistema.

Con todas las muestras porcentualizadas, se generó una figura donde se muestra en la parte superior estas señales de muestra superpuestas, y en la parte inferior la señal de entrada. Tal figura se muestra a continuación:

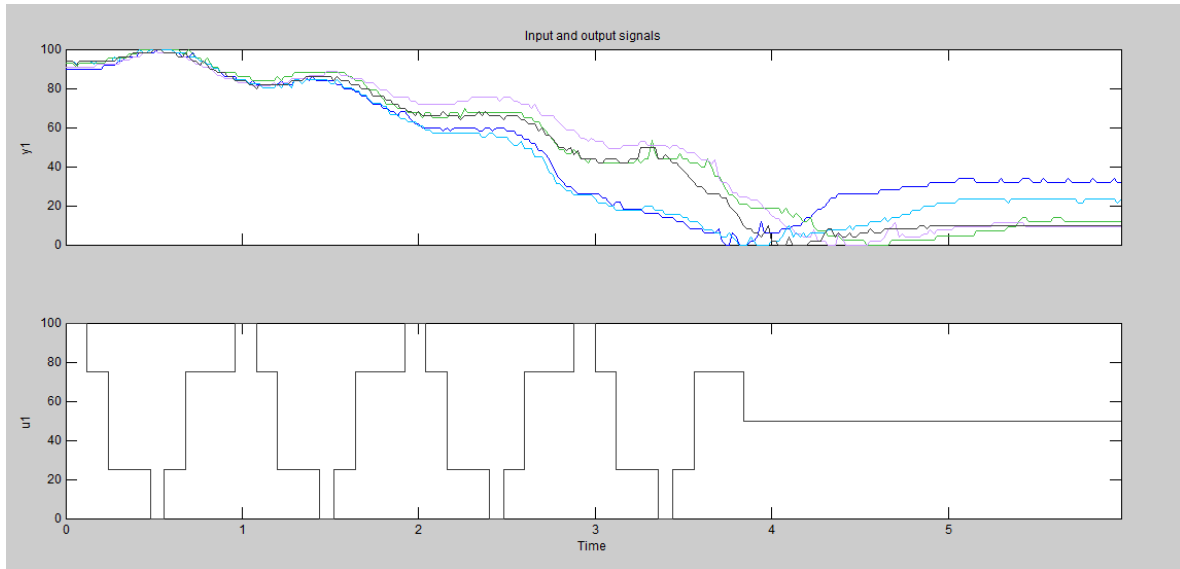


Figura 4.42. Señal de entrada u1 (abajo) versus las cinco muestras de la señal de salida y1 (arriba) del modelado matemático experimental.

Leyenda: muestra 1: azul. Muestra 2: verde. Muestra 3: lila. Muestra 4: celeste. Muestra 5: negro. Se observa en la gráfica que la energía aplicada de la entrada genera cambios de energía en la salida; por consiguiente, es posible decir que para todos los casos las salidas reaccionan ante cambios en la entrada.

Se procedió a generar un modelo matemático a partir de la señal de entrada y la muestra número 2 (elegida arbitrariamente), mediante el método de identificación de sistemas ARMAX. El modelo se eligió de segundo orden debido a la facilidad a la hora de la implementación. El siguiente es:

$$G_{\text{exp2}}(z) = \frac{-0.009099z - 0.003345}{z^2 - 0.09742z - 0.9032} \quad (\text{Ec. 4.22})$$

A la función de transferencia mostrada, se le aplicó la misma entrada (figura 4.25) que a las muestras obtenidas anteriormente, con el objetivo de validar la correlación de la función de transferencia generada con respecto al fenómeno físico. Se observa a continuación la comparación del modelo experimental de la muestra 2 con la función de transferencia obtenida experimentalmente (ecuación 4.13):

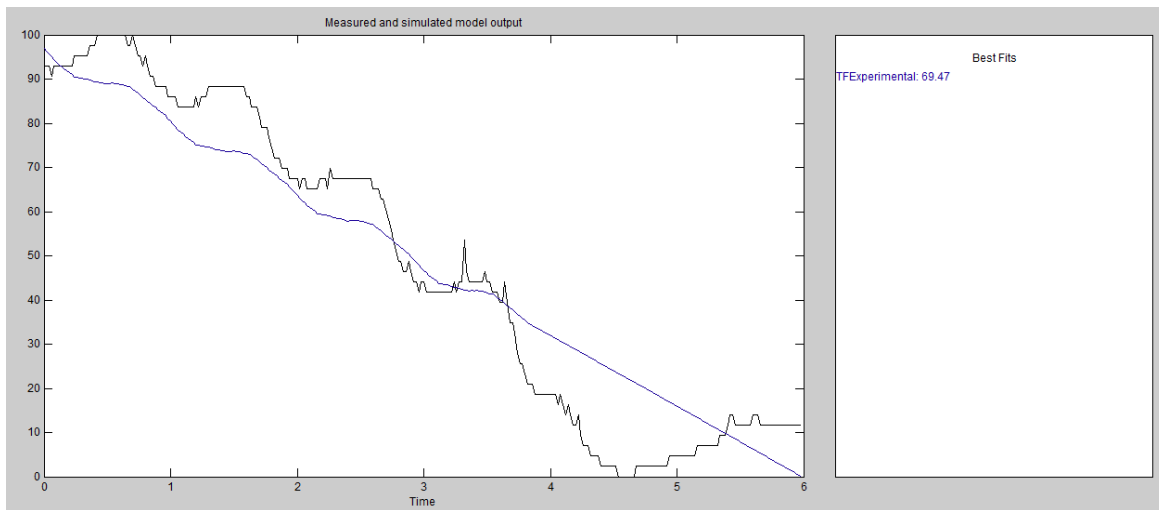


Figura 4.43. Porcentaje de validación para la muestra 2 utilizando el método de identificación de sistemas ARMAX.

Donde puede observarse una relación de 69.47% entre las dos señales, aunque a partir del segundo 4 el modelado experimental no sigue la data de la muestra. Esto es, debido a que la señal de entrada se mantiene constante en un ángulo de barra, y la bola sigue modificando su posición sobre la misma. A continuación se muestran las gráficas de validación del modelo para las demás muestras:

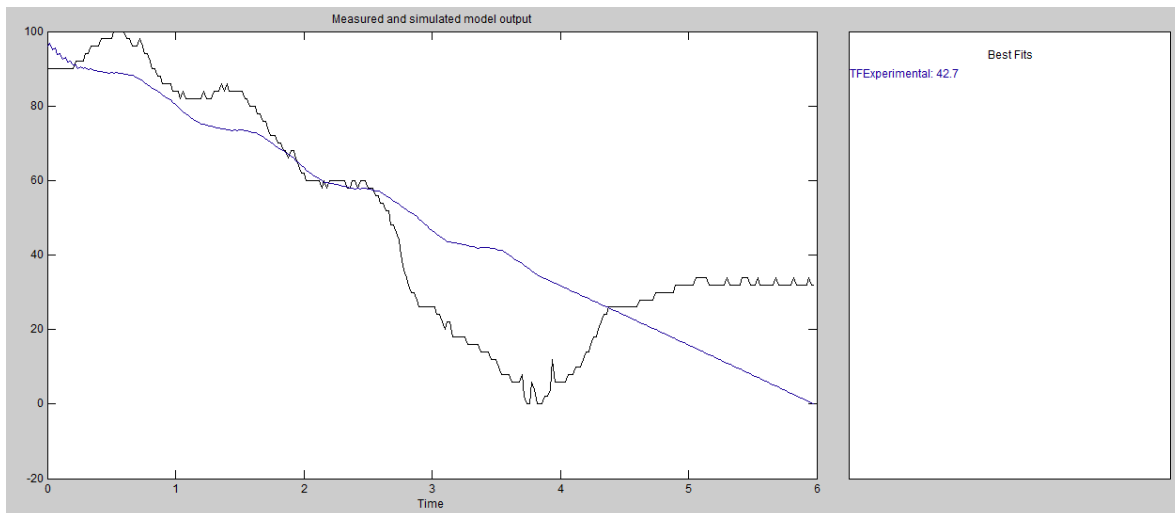


Figura 4.44. Porcentaje de validación para la muestra 1 utilizando el método de identificación de sistemas ARMAX.

A partir de la gráfica mostrada se observa que para la muestra 1 se tiene un porcentaje de validación de 42.7%, el cual es menor al de la muestra 2 ya que con la misma fue creado el modelo experimental. A partir de los 3 segundos, el modelo deja de ser cónsono con la data de la muestra y empieza a variar casi linealmente su valor hasta los 6 segundos, lo que hace que haya disparidad entre las dos señales.

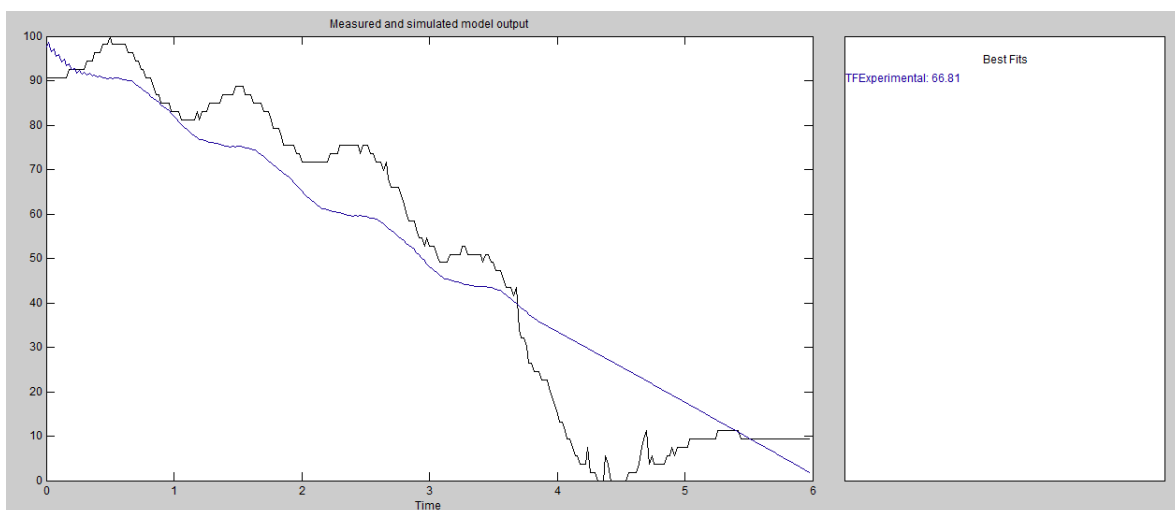


Figura 4.45. Porcentaje de validación para la muestra 3 utilizando el método de identificación de sistemas ARMAX.

Al igual que la muestra 1, la muestra 3 posee un porcentaje de validación menor al de la muestra 2, este es de 66.81%. A partir del cuarto segundo, el modelo empieza a variar linealmente dejando de seguir a la muestra de la gráfica, lo que conlleva a que disminuya su porcentaje de validación.

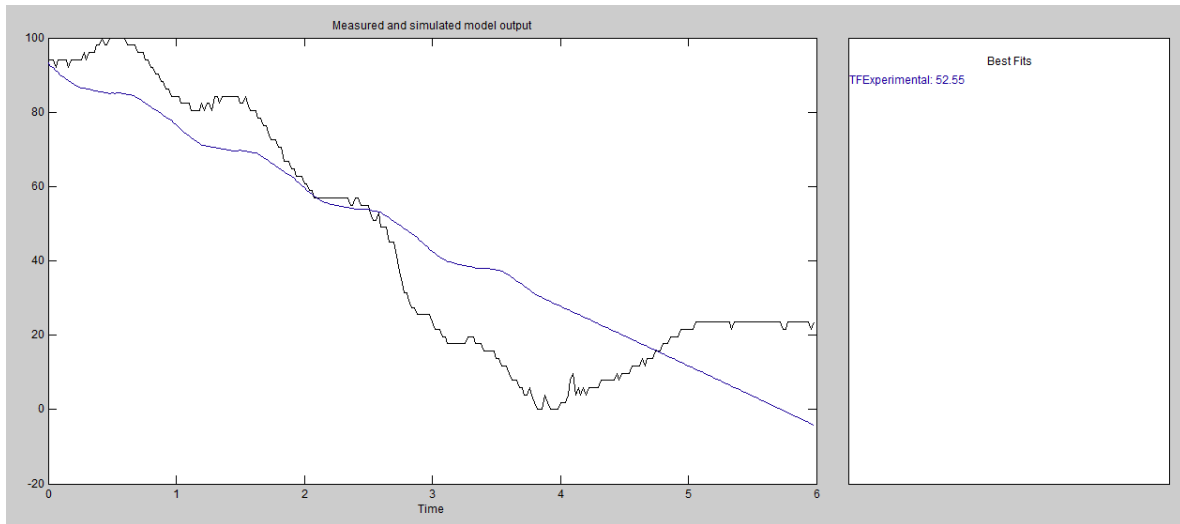


Figura 4.46. Porcentaje de validación para la muestra 4 utilizando el método de identificación de sistemas ARMAX.

Para la muestra 4 el porcentaje de validación fue de 52.55%, y de igual manera que la muestra 1, al tercer segundo el modelo empieza a variar linealmente, siendo diferente la respuesta versus la data de la muestra.

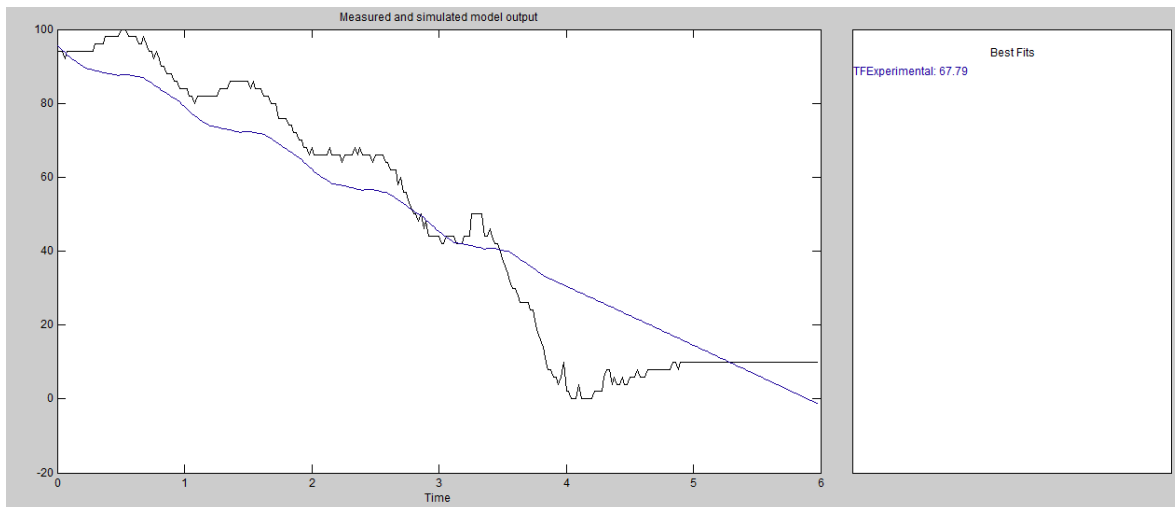


Figura 4.47. Porcentaje de validación para la muestra 5 utilizando el método de identificación de sistemas ARMAX.

Por último, se observa la gráfica para la muestra 5, la cual tiene un 67.79% de validación, y es a partir de los 3.5 segundos aproximadamente, que hay una disparidad entre la data de la muestra de la gráfica y del modelo simulado.

Además, se puede apreciar en la siguiente gráfica de residuos, la correlación entre la data obtenida y el modelo correspondiente, de la muestra 2:

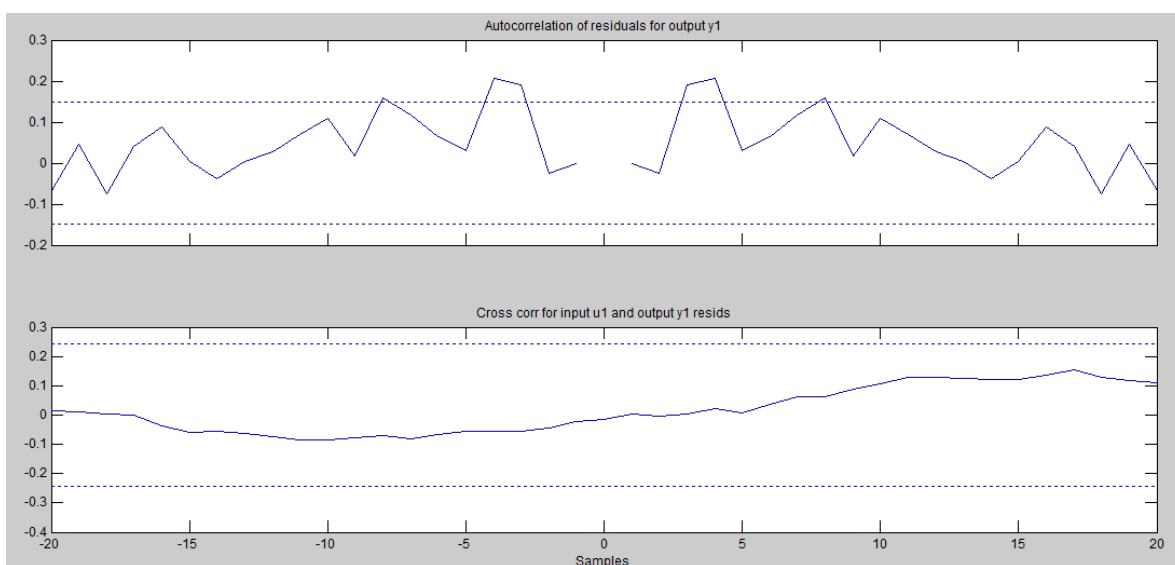


Figura 4.48. Gráfica de autocorrelación de residuos y correlación cruzada de la prueba experimental con la muestra 2.

En la parte superior puede apreciarse la autocorrelación de residuos, en la cual se demuestra la similitud que hay entre la data obtenida y la muestra simulada. Cuando existe un alto valor de residuos para la correlación entre las señales a lo largo de los retrasos de la gráfica, esto indica que no hay correspondencia entre la data de salida y la señal fabricada; lo que quiere decir que no hay una representación adecuada de la señal.

Por otro lado, en la parte inferior está la gráfica de correlación cruzada entre la entrada y los residuos de la salida del sistema. En un sistema bien descrito, debe de haber poca o nula (dentro de las horizontales punteadas) correlación entre los residuos de salida y la entrada, de manera que si hay una alta correlación, el modelo no describe correctamente la formación de la data de salida a partir de la entrada.

En la gráfica anterior, puede observarse una superación del límite recomendado de 0.15 para la validación adecuada de la data. En la parte inferior, se demuestra la similitud de la señal de entrada con la señal de salida y se puede observar que la correlación cruzada está dentro de los límites recomendados de 0.25. De la misma manera, se muestran las gráficas de correlación del modelo experimental de las demás muestras:

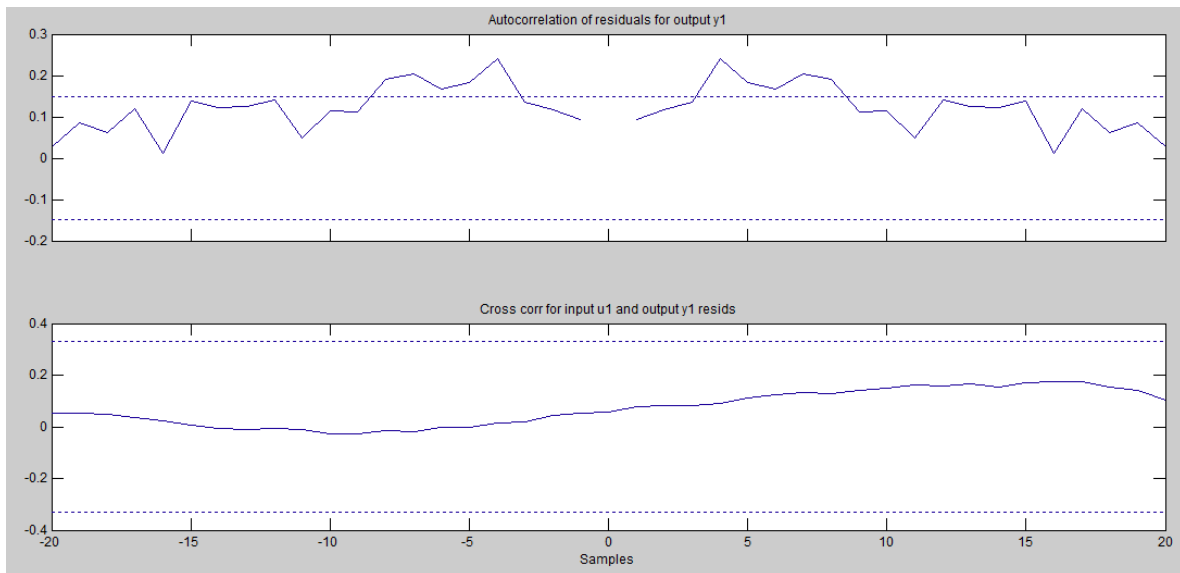


Figura 4.49. Gráfica de autocorrelación de residuos y correlación cruzada de la prueba experimental con la muestra 1.

Puede apreciarse que la autocorrelación de residuos de salida sobrepasa los límites recomendados, eso indica que hay poca correspondencia entre las señales de salida para un retraso de entre 4 y 9 muestreos. Además, la correlación cruzada está dentro de los límites recomendados.

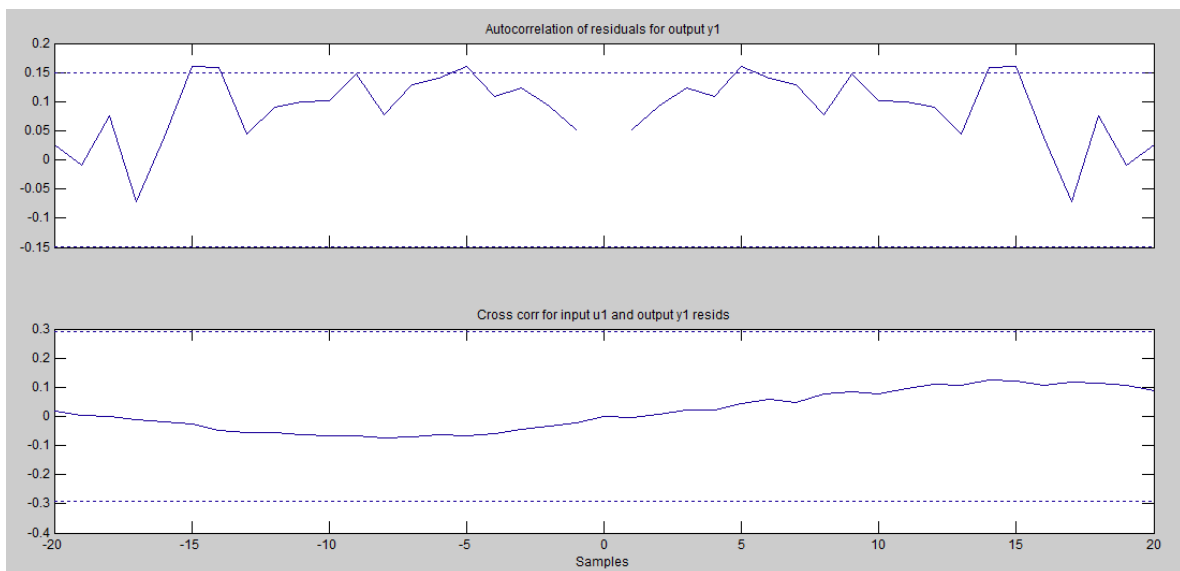


Figura 4.50. Gráfica de autocorrelación de residuos y correlación cruzada de la prueba experimental con la muestra 3.

La autocorrelación de residuos de salida en esta muestra, sobrepasa los límites recomendados. Eso indica que hay poca correspondencia entre las señales de salida, cuando hay un retraso de 4, y de 14 y de 15 muestras. Además, la correlación cruzada está dentro de los límites, de igual manera que la muestra 1.

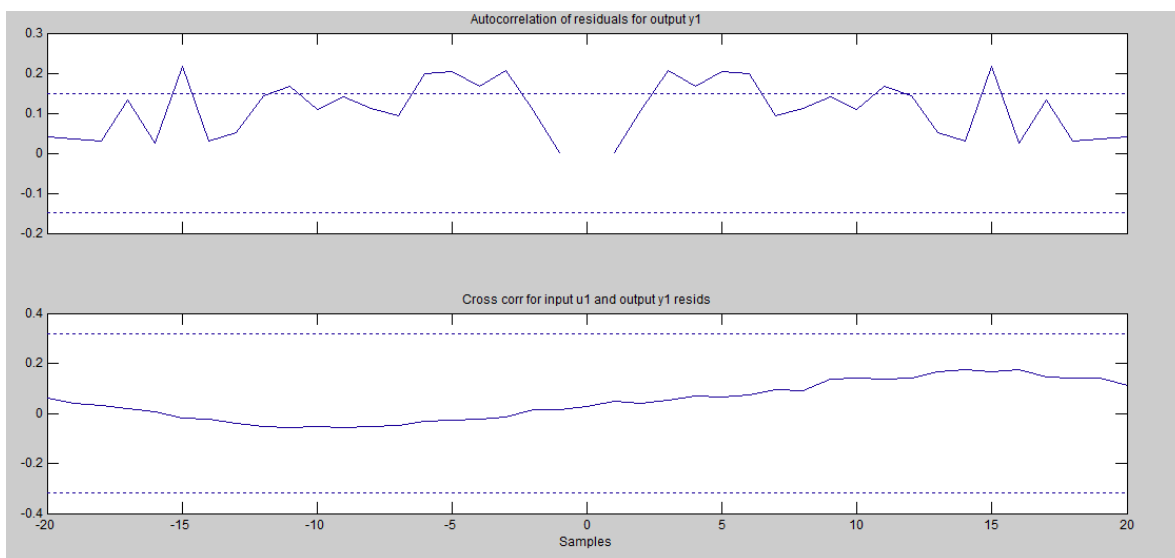


Figura 4.51. Gráfica de autocorrelación de residuos y correlación cruzada de la prueba experimental con la muestra 4.

Puede notarse para esta muestra un sobrepaso de los límites recomendados de correlación para un retraso de 15, y de 3 a 7 muestreos, lo cual indica una carencia de consonancia entre la data de salida de la muestra con la señal simulada. Adicionalmente, la correlación cruzada está dentro de los límites establecidos.

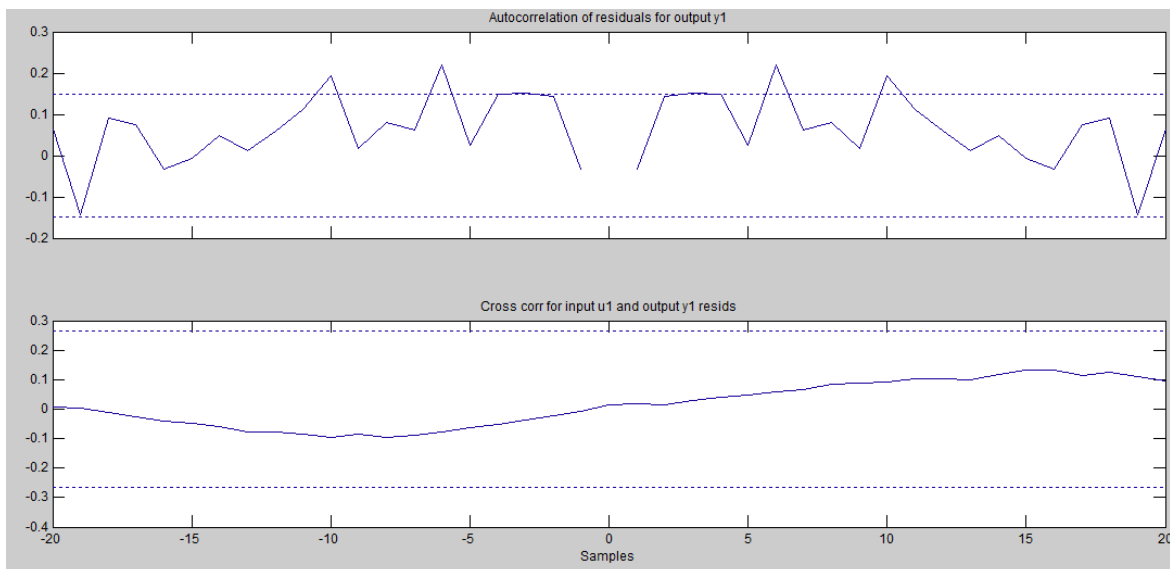


Figura 4.52. Gráfica de autocorrelación de residuos y correlación cruzada de la prueba experimental con la muestra 5.

La autocorrelación de residuos de salida para la muestra 5 sobrepasa los límites para los retrasos de 6 y 10 muestras, y la correlación cruzada está en los límites recomendados.

Tomando en cuenta las gráficas de porcentaje de validación de modelos, así como las de correlación para cada muestra, es posible realizar una tabla comparativa a partir de la información obtenida:

Tabla 4.17. Comparación de porcentaje de validación entre muestras experimentales.

Muestras	Porcentaje de validación	Sobrepaso del límite de autocorrelación	Sobrepaso del límite de correlación cruzada
Muestra 1	42.7%	Sí	No
Muestra 2	69.47%	Sí	No
Muestra 3	66.81%	Sí	No
Muestra 4	52.55%	Sí	No

Muestra 5	67.79%	Sí	No
-----------	--------	----	----

Al observar la tabla comparativa, se tiene que la muestra 1 es la que tiene menor porcentaje de validación, y la muestra 2 corresponde a la que tiene el mayor porcentaje de validación. Esto es, debido a que el modelo matemático experimental diseñado fue hecho en base a la data obtenida de la muestra 2. Es menester destacar que los porcentajes de validación son cercanos ya que el modelo respondió de manera similar para los 5 experimentos.

También se resalta de la tabla que para la autocorrelación de las muestras con el modelo ninguna estuvo dentro de los límites establecidos, por otro lado, al realizar la correlación cruzada, todos los valores de correlación estuvieron dentro de los límites.

4.5.4.1. Análisis del modelado matemático experimental

Una vez determinada la función de transferencia del modelo matemático experimental, se analizará su respuesta en el dominio temporal, para observar y comparar con el modelo teórico sus características. La siguiente gráfica corresponde a la respuesta a lazo abierto del modelo experimental ante una función escalón de entrada:

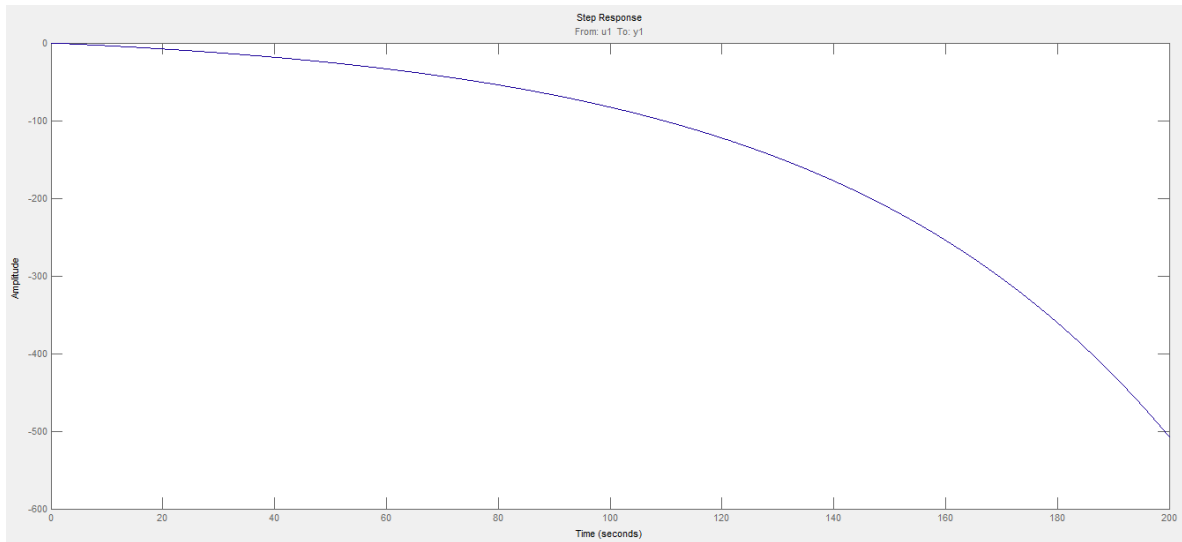


Figura 4.53. Respuesta al escalón a lazo abierto de la función de transferencia discreta experimental.

Donde se observa que la posición de la bola tiende a infinito, por consiguiente, el sistema es inestable a lazo abierto. A continuación, se muestra el lugar de las raíces para la función de transferencia experimental:

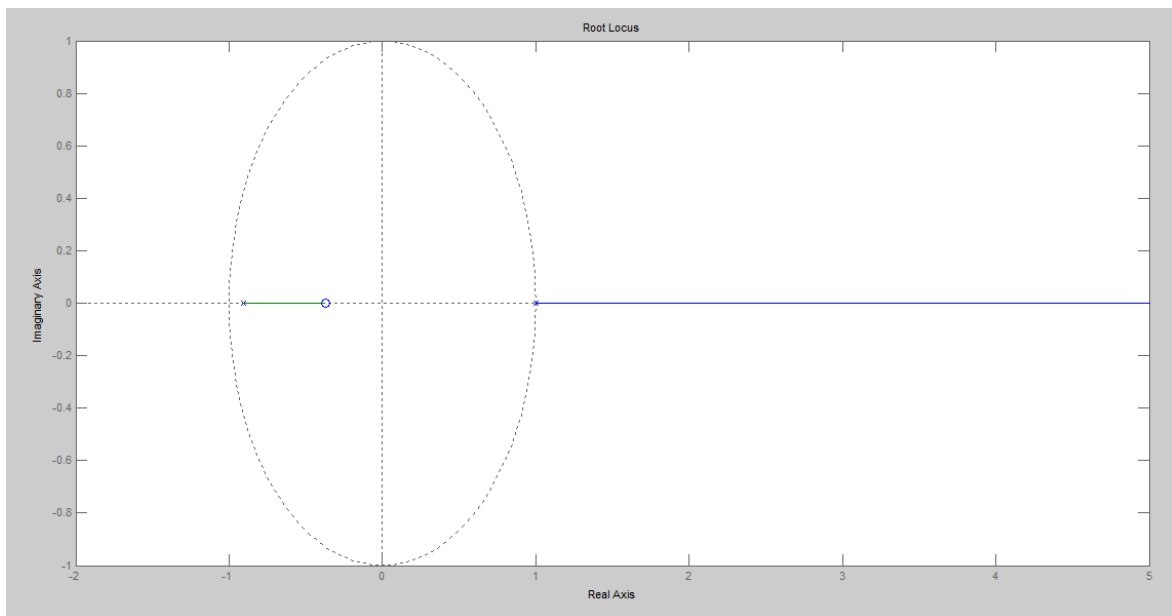


Figura 4.54. Lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia discreta experimental.

Puede apreciarse que un polo está situado dentro del círculo unitario, mientras que el otro polo (derecha) está situado fuera de él. Esto, junto con la inestabilidad de la posición de la bola ante la función escalón, determina que el modelado matemático experimental es inestable a lazo abierto, de igual manera que el modelado teórico.

4.5.4.2. Diseño de control PID para el modelado experimental

En esta sección se procedió a diseñar los controladores clásicos para el modelado experimental determinado anteriormente. Las gráficas siguientes corresponden a las distintas configuraciones de los controladores clásicos para el modelado:

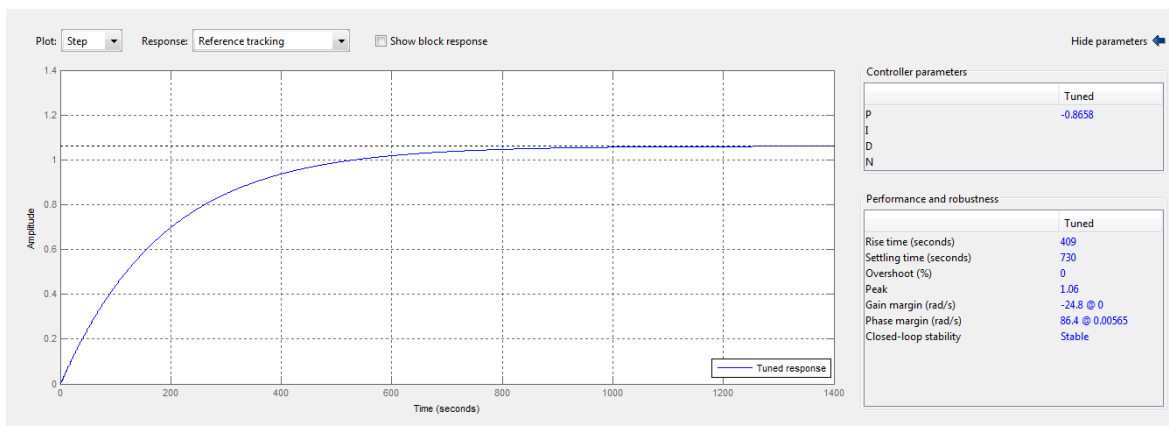


Figura 4.55. Controlador P para simulación con modelado experimental.

Para la simulación del modelo experimental con controlador P, se tiene que el sistema posee un tiempo de levantamiento fue de 409 segundos, y un tiempo de asentamiento fue de 730 segundos, por lo cual es posible decir que dicha simulación fue capaz de estabilizar el sistema, con un error de estado estable de 0.06.

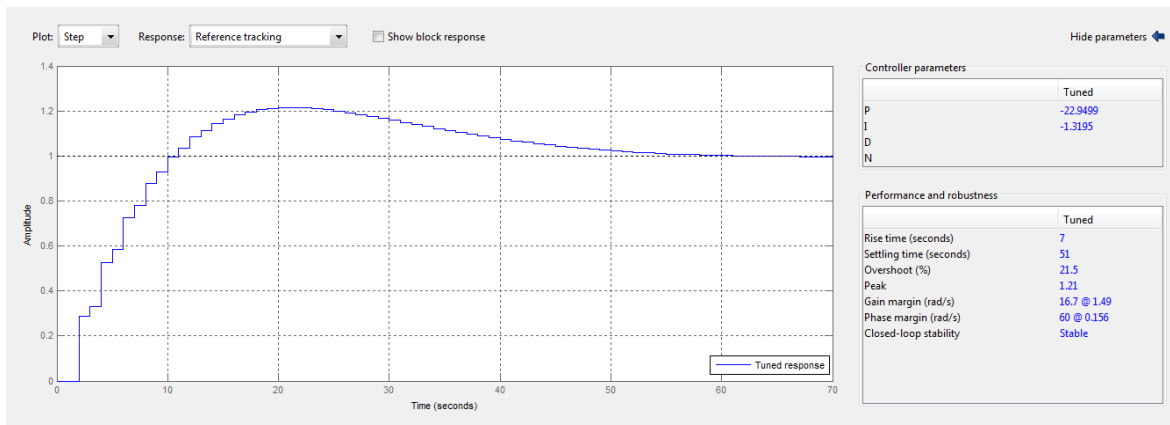


Figura 4.56. Controlador PI para simulación con modelado experimental.

Para la simulación del modelo con la configuración de control PI, se tiene un tiempo de levantamiento de 7 segundos y un tiempo de asentamiento de 51 segundos, teniendo éste una respuesta más rápida que la simulación con controlador P. También es pertinente destacar que no hay error de estado estable, y que hay un sobrepaso de 21.5%.

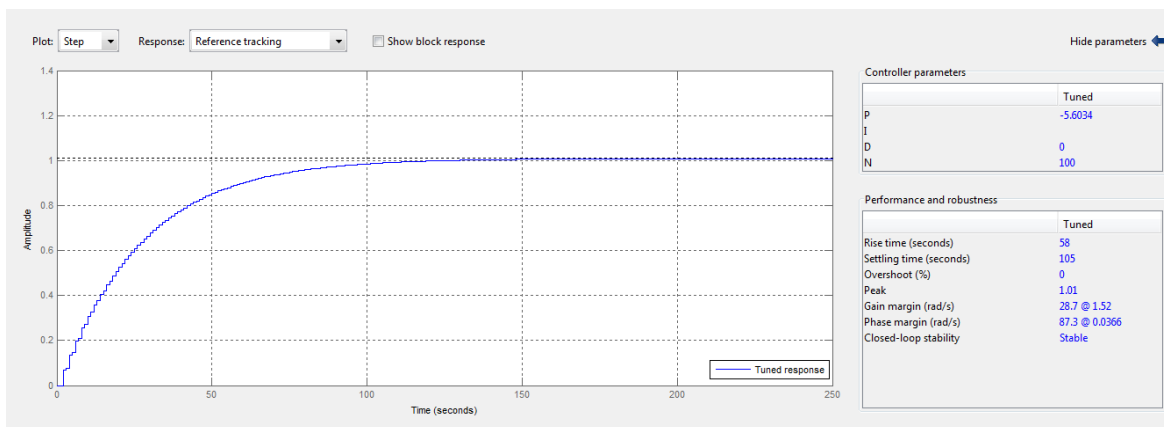


Figura 4.57. Controlador PD para simulación con modelado experimental.

Puede observarse en la simulación del modelo con controlador PD un tiempo de levantamiento de 58 segundos, y un tiempo de asentamiento de 105 segundos. El error de estado estable, por otro lado, es de apenas 0.01 y no hubo sobrepaso en la respuesta.

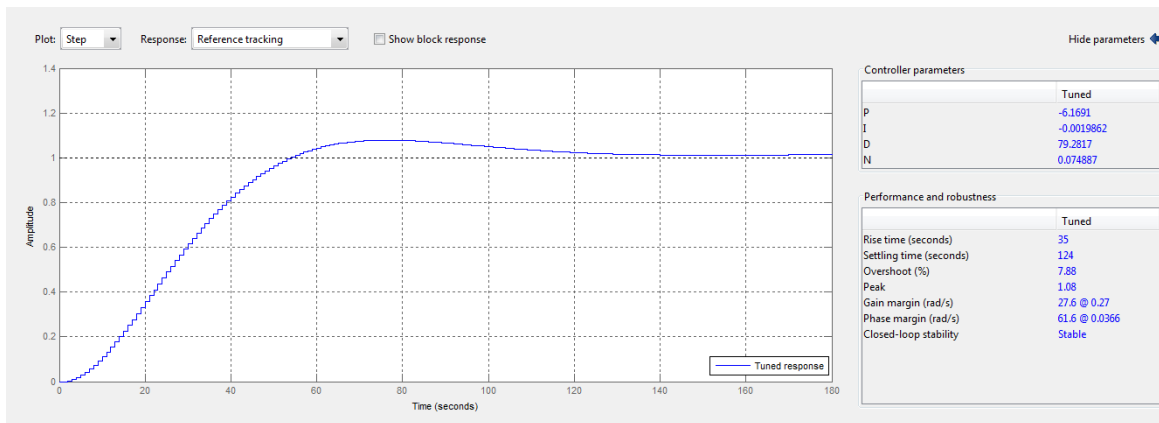


Figura 4.58. Controlador PID para simulación con modelado experimental.

La simulación del modelo con el controlador PID posee características similares a la simulación con el controlador PD. Tuvo un tiempo de levantamiento de 35 segundos y un tiempo de asentamiento de 124 segundos, con un error de estado estable de 0.01 y un sobrepaso máximo de 7.88%.

Se aprecia que todas las configuraciones de control logran estabilizar el sistema, pero con tiempos de estabilización muy prolongados, y en algunos casos con error de estado estable. La siguiente tabla especifica todas las propiedades de cada configuración de control:

Tabla 4.18. Parámetros y respuesta de controles clásicos en la simulación del modelado experimental.

	P	PI	PD	PID
Kp	-0.8658	-22.9499	-5.6034	-6.1691
Ki	-	-1.3195	-	-0.0019862
Kd	-	-	0	79.2817
Tiempo de asentamiento	730 seg	51 seg	105 seg	124 seg

Tiempo de levantamiento	409 seg	7 seg	58 seg	35 seg
Sobrepaso máximo	0%	21.5%	0%	7.88%
Error de estado estable	0.06	0.0003	0.01	0.01

A partir de estos resultados, se llevó a cabo la implementación del controlador PID al prototipo con los parámetros de la tabla anterior. Luego de probar los controladores, se pudo apreciar que ninguna de las configuraciones fue capaz de estabilizar la posición de la bola luego de ser aplicada la perturbación.

4.5.4.3. Diseño de control LQR para el modelado experimental

Para el diseño del controlador LQR con el modelado matemático experimental, se realizó el mismo procedimiento que en la sección 4.4.2. Así, determinando la matriz K a partir de los parámetros Q y R (con valores basados en la regla de Bryson) se aplicó la función escalón unitario al sistema. La respuesta fue la siguiente:

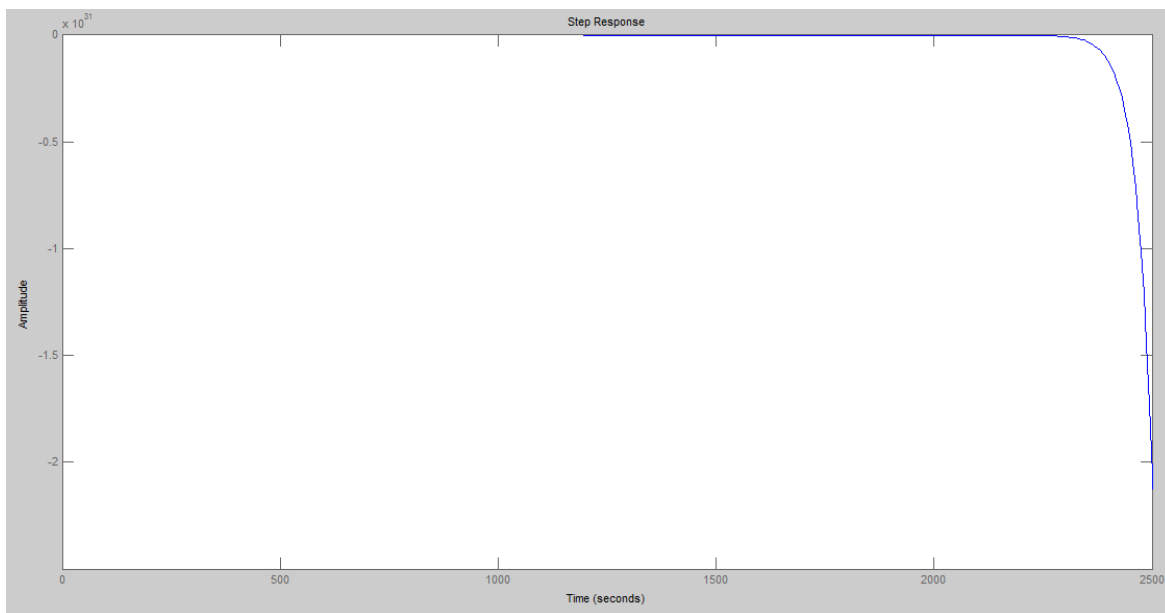


Figura 4.59. Respuesta al escalón del modelo experimental con controlador LQR con parámetros de la regla de Bryson.

La gráfica muestra que la posición de la bola tiende a $-\infty$, y por consiguiente el controlador con estos parámetros no logra estabilizar el sistema. La siguiente tabla muestra las iteraciones en las cuales se variaron individualmente los parámetros r_1 , q_1 y q_2 que dieron resultado a distintas matrices K , y por consiguiente distintos controladores.

Tabla 4.19. Iteraciones de LQR para el modelado experimental.

Iteración	Matriz K	r_1	q_1	q_2	Amplitud	Tiempo de asentamiento
Bryson	[0.0974 0.9024]	0.0044	1	4	∞	-
#1	[0.0972 0.8858]	0.1	1	4	∞	-
#2	[0.0974 0.9031]	0.0004	1	4	∞	-
#3	[0.0974 0.9029]	0.0044	10	4	∞	-
#4	[0.0974 0.9022]	0.0044	0.1	4	∞	-
#5	[0.0974 0.9031]	0.0044	1	40	∞	-
#6	[0.0974 0.9004]	0.0044	1	0.4	∞	-

Puede detallarse que ninguna iteración logró estabilizar el sistema. Adicionalmente a esta tabla, se varió de manera aleatoria la proporción de los parámetros anteriormente mencionados, dando el mismo resultado.

4.6. Evaluación de los controladores implementados

Tomando en cuenta los resultados de la implantación del PID del modelo discreto y la implementación empírica, así como también del LQR del modelo continuo, se llevó a cabo una tabla comparativa en la cual se evaluarán las configuraciones ya mencionadas. Cabe destacar que la implantación del PID del modelo continuo y del modelo experimental, no fueron incluidas ya que fueron incapaces de controlar el sistema, al igual que la implantación del LQR del modelo discreto y experimental. La tabla es la siguiente:

Tabla 4.20. Tabla comparativa de los controladores implementados.

	PID discreto teórico (figura 4.33)	PID empírico (figura 4.34)	LQR continuo teórico prueba 1 (figura 4.35)	LQR continuo teórico prueba 2 (figura 4.35)
Tiempo de estabilización	0.65 seg	2.4 seg	0.9 seg	1.05 seg
Error de estado estable	0.38 m	0.07 m	0.07 m	0.05 m

Donde puede apreciarse que la implementación con menor tiempo de estabilización es el PID discreto teórico con 0.65 segundos, sin embargo, su error de estado estable es más de 5 veces mayor que la mayoría de las configuraciones. Además, la implementación con menor error de estado estable es la segunda prueba con el controlador LQR, teniendo un valor de 0.05 metros.

CONCLUSIONES

Culminada la investigación, se puede concluir que se identificaron las variables que interactuaron en el sistema y se determinó el modelado matemático exitosamente. Posterior a esta etapa, al analizar dicho modelo, se logró determinar que el sistema analizado es inestable por naturaleza, y que es observable y controlable.

Tomando en cuenta la premisa anterior, se procedió a diseñar los controladores PID y LQR para las versiones modelo matemático continuo y discreto, donde se obtuvo que para la estrategia clásica, considerando el diseño según ambos modelados matemáticos, fue la configuración PD la más efectiva para todos los indicadores, considerando: el error de estado estable, el sobrepaso máximo, el tiempo de asentamiento y el tiempo de levantamiento.

Con el controlador óptimo lineal, por otro lado, se puede concluir que a nivel de simulación para el modelado teórico continuo hubo una regulación del sistema satisfactoria luego de haber hecho las iteraciones correspondientes, consiguiendo un tiempo de estabilización satisfactoria y un error de estado estable despreciable. Contrariamente, al simular la respuesta del sistema para el modelado teórico discreto, el regulador no logró controlar la planta, por lo cual fue un resultado insatisfactorio.

Al proceder a la implantación de los controladores, para el caso clásico, se partió de los parámetros utilizados en las simulaciones que lograron controlar el sistema. Primeramente, el controlador PD con el modelo continuo no logró estabilizar la posición de la bola. Sin embargo para el modelo discreto, dicho controlador logró estabilizar su movimiento, aunque con valor de error de estado estable lo suficientemente alto como para considerar esta implementación inaceptable. Por lo tanto, se puede decir que tales implantaciones fueron insatisfactorias.

Con los resultados obtenidos de las pruebas realizadas con el controlador PID, es posible concluir que no hay correlación entre las respuestas del sistema con las configuraciones de control a nivel de simulación (ya sea según el modelado discreto o continuo) con las respuestas del prototipo al realizar la implantación. Debido a esto, se procedió a realizar modificaciones empíricas de los parámetros de control a nivel de implementación. Luego de varias modificaciones en línea, se logró reducir el error de estado estable considerablemente, comparado con el obtenido en la implementación del controlador PD del modelado matemático teórico discreto.

Con respecto a la implementación del controlador LQR, se consideró solamente la utilización de la matriz K obtenida en la simulación con el modelo matemático teórico continuo, debido a que con la versión discreta del sistema el regulador no logró estabilizar la planta. Entonces, al realizar la implantación, se obtuvo una respuesta excelente, con un mejor tiempo de estabilización que la simulación, aunque con un error de estado estable mayor. Con esto se puede constatar que hay una correlación entre la simulación realizada y la implementación ya mencionada.

Ahora, basándose en la premisa de profundizar el estudio del fenómeno físico, se procedió a diseñar un modelo matemático experimental, a partir de la obtención de data mediante la estimulación del sistema. Con el modelo conseguido, se diseñaron las estrategias de control bajo estudio.

Primero, en relación a la estrategia clásica, fue posible estabilizar el sistema a nivel de simulación, siendo la configuración PI la más efectiva en comparación con todas las demás, sin embargo el tiempo de asentamiento fue considerablemente prolongado. A la hora de la implantación, dicha estrategia fue inefectiva debido a que no logró estabilizar el sistema.

En referencia a la estrategia de control óptima, a nivel de simulación, el controlador LQR diseñado con el modelo experimental, no logró estabilizar el sistema, y por consiguiente, no fue implantado. Con esto, se puede confirmar que no hubo correlación entre el fenómeno físico y el modelado experimental obtenido.

En última instancia, al comparar las implementaciones efectivas del controlador PID (con parámetros empíricos) y LQR (con parámetros obtenidos a partir de la simulación con el modelado teórico continuo), se puede concluir que, tomando en cuenta todas las características de desempeño a nivel de implementación, llámese tiempo de estabilización y error de estado estable, la implantación del regulador cuadrático lineal fue más efectiva que su contraparte PID.

RECOMENDACIONES

Primeramente, se sugiere utilizar controladores de una rama distinta, ya sea lógica difusa, control adaptativo, entre otros, con la finalidad de comparar estrategias y conseguir una profundización del estudio del fenómeno físico. Adicionalmente, es pertinente considerar la implementación del controlador LQG agregando al controlador LQR un filtro Kalman.

Por otro lado, se aconseja profundizar el estudio de identificación de sistemas, considerando un mayor orden de la ecuación característica, para obtener un modelado matemático experimental más cónsono con el fenómeno físico.

Además, es recomendable construir un prototipo distinto con un motor DC que esté acoplado al eje de la barra mediante una correa. Esto es con el objetivo de tener un nuevo prototipo para estudiar y controlar. También, sería beneficioso comprar otro sensor ultrasónico, debido a que el utilizado en este proyecto arrojaba errores de distancia esporádicos que debían ser corregidos manualmente.

Se propone, además, elaborar una guía didáctica que englobe los estudios realizados a lo largo de esta investigación, con la finalidad de promover y facilitar los conocimientos de teoría de control para distintas áreas académicas universitarias.

Por último, se sugiere aplicar tecnología de acceso remoto, de manera que se pueda programar de forma inalámbrica la tarjeta integrada al sistema y así implantar laboratorios remotos para la enseñanza de la ingeniería de control.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, B., & Moore, J. (1989). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs, E.E.U.U.: Prentice-Hall, Inc.
- Arias, F. (1999). *El proyecto de investigación (Ed. 3)*. Caracas, Venezuela: Episteme.
- Dorf, R., & Bishop, R. (2005). *Sistemas de Control Moderno (Ed. 10)*. Madrid, España: Pearson Prentice Hall.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. D. (2010). *Metodología de la investigación (Ed. 5)*. México D.F., México: McGraw Hill.
- Hespanha, J. (2007). *Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR Controller Design*.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de Control Automático (Ed. 7)*. Naucalpan de Juárez, México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, E.E.U.U.: Prentice-Hall, Inc.
- Morón, J. (2011). *Señales y Sistemas*. Maracaibo, Venezuela: Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta.
- Ogata, K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto (Ed. 2)*. Naucalpan de Juárez, México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de Control Moderno (Ed. 3)*. Naucalpan De Juárez, México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Palacios, E., Remiro, F., & López, L. (2004). *Microcontrolador PIC16F84*. Madrid, España: RA-MA Editorial.
- Petit, E., & Ramirez, O. (2013). *Control PID Digital para un Sistema de Barra Equilibrada*. Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo, Venezuela.
- Piedrafita, R.; Romero, A.; Estrada, C.; Iñigo, J. (2002). *Historia de los Sistemas de Control*. Obtenido de Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Zaragoza, Área de Ingeniería de Sistemas y Automática: http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/control_clasico.htm
- Sabino, C. (1992). *El Proceso de Investigación*. Caracas, Venezuela: Panapo.
- Tamayo y Tamayo, M. (2003). *El proceso de la investigación científica (Ed. 4)*. México D.F.: Limusa, S.A.
- Universidad de Alicante. (2007). *Servomotores*. Obtenido de Grupo de Automática, Robótica y Visión Artificial: <http://www.aurova.ua.es:8080/proyectos/dpi2005/docs/publicaciones/pub09-ServoMotores/servos.pdf>
- Universidad de Oviedo. (2003). *Análisis Dinámico de Sistemas*. Obtenido de Ingeniería de Sistemas y Automática: http://isa.uniovi.es/~idiaz/ADSTel/Tema1_ADS.pdf

Universidad Tecnológica Nacional. (2004). *Diseño de Sistemas*. Obtenido de
Facultad Regional Resistencia:
http://exa.unne.edu.ar/informatica/anasistem2/public_html/apuntes/de1.pdf

Wang, W. (2007). *Control of a Ball and Beam System*. The University Of Adelaide,
South Australia, Australia.

ANEXOS

ANEXO 1: Programa para la implementación del PID digital

```
#include <Servo.h>
#include <PID_v1.h>
Servo myservo;
long val, duration, cm;
const int Pinsensor = 7;
double Setpoint, Input, Output; PID myPID(&Input, &Output, &Setpoint, 10, 0.7, 18,
DIRECT);

void setup()
{
  myservo.attach(9);
  Serial.begin(9600);
  myservo.write(99);
  delay(2000);
  Setpoint = 0.5;
  myPID.SetOutputLimits(-255,255);
  myPID.SetSampleTime(16);
  myPID.SetMode(AUTOMATIC);
}

void loop()
{
  pinMode(Pinsensor, OUTPUT);
  digitalWrite(Pinsensor, LOW);
  delayMicroseconds(5);
  digitalWrite(Pinsensor, HIGH);
  delayMicroseconds(5);
  digitalWrite(Pinsensor, LOW);
  pinMode(Pinsensor, INPUT);
  duration = pulseIn(Pinsensor, HIGH);
  cm = microsecondsToCentimeters(duration);
  Input = cm*0.01;
  myPID.Compute();
  float Lower = - 13;
  float Upper = 13;
  val = map(Output, Lower, Upper, 79, 119);
  myservo.write(val);
  Serial.print(cm);
  Serial.print(" ");
```

```
}  
long microsecondsToCentimeters(long microseconds)  
{  
    return microseconds / 29 / 2;  
}
```

ANEXO 2: Programa para la implantación del Regulador cuadrático lineal.

```
#include <Servo.h>
Servo myservo;
long val, duration, cm;
const int Pinsensor = 7;
double Setpointpos, Setpointvel;
float Lecturas [100];
float Vel;
int i;

void setup()
{
  myservo.attach(9);
  Serial.begin(9600);
  myservo.write(99);
  delay(1000);
  Setpointpos = 50;
  Setpointvel = 0;
}

void loop()
{
  for (i = 0; i < 100; i++) {

    pinMode(Pinsensor, OUTPUT);
    digitalWrite(Pinsensor, LOW);
    delayMicroseconds(2);
    digitalWrite(Pinsensor, HIGH);
    delayMicroseconds(5);
    digitalWrite(Pinsensor, LOW);
    pinMode(Pinsensor, INPUT);
    duration = pulseIn(Pinsensor, HIGH);

    cm = microsecondsToCentimeters(duration);
    Lecturas[i] = cm;
    Vel = (Lecturas[i] - Lecturas[i + 1]);

    int Controlador [2][2] = {
      {-3.6013, -6.0302},
      {1.0000, 0.0000}};

    float Input1= Setpointpos - cm;
    float Input2= Setpointvel - Vel;
```

```

float Input [2][1] = {
{Input1},
{Input2}};

float Output1 = Controlador[0][0]*Input[0][0] + Controlador[0][1]*Input[1][0];
float Output2 = Controlador[1][0]*Input[0][0] + Controlador[1][1]*Input[1][0];

float Output [2][1] = {
{Output1},
{Output2}};

val = map(Output[0][0], -360, 360, 114, 84);
myservo.write(val);

Serial.print(cm);
Serial.print(" ");

}}
long microsecondsToCentimeters(long microseconds)
{
return microseconds / 29 / 2;
}

```

ANEXO 3: Programa para la excitación del sistema y consecución del modelado experimental

```
#include <Servo.h>
Servo myservo;
const int pingPin = 7;
long duration, cm;

void setup()
{
  myservo.attach(9);
  Serial.begin(9600);
  myservo.write(100);
  delay(1000);
}

void Leer()
{
  pinMode(pingPin, OUTPUT);
  digitalWrite(pingPin, LOW);
  delayMicroseconds(10);
  digitalWrite(pingPin, HIGH);
  delayMicroseconds(10);
  digitalWrite(pingPin, LOW);
  pinMode(pingPin, INPUT);
  duration = pulseIn(pingPin, HIGH);
  cm = microsecondsToCentimeters(duration);
  Serial.print(cm);
  Serial.print(" ");
  delay(20);
}

void loop()
{
  for (int val=0; val < 4 ; val++)
  {
    myservo.write(109);
    for (int time = 0; time < 6; time++)
    {Leer();}

    myservo.write(104);
    for (int time = 0; time < 6; time++)
    {Leer();}

    myservo.write(94);
```



```

for (int time = 0; time < 12; time++)
{Leer();}

myservo.write(89);
for (int time = 0; time < 4; time++)
{Leer();}

myservo.write(94);
for (int time = 0; time < 6; time++)
{Leer();}

myservo.write(104);
for (int time = 0; time < 14; time++)
{Leer();}
}

myservo.write(100);
for (int time = 0; time < 600; time++)
{Leer();}

delay(15000);
}
long microsecondsToCentimeters(long microseconds)
{
return microseconds / 29 / 2;
}

```