陈世腾老师随机算法 2025 年题目

(20 分) 具体的题目忘记了，要求使用概率工具证明定理，总共四小问。

陈世腾老师近似算法 2025 年题目

(20 分) 3 机器调度问题：第一问证明该问题的判断问题为 NP-Hard 问题；第二问从集合划分问题出发证明该问题是 NP-Complte 问题；第三问和第四问忘记了。

陈世腾老师随机算法 2024 年题目

(15 分) 输入三个 $n \times n$ 的 0-1 矩阵 A, B 和 C. 设计一个随机算法判定在 $\mathbb{F}_2$ 上是否有 $AB + C = I$ (I 是单位矩阵. 所有矩阵乘法和加法都是 $\mathbb{F}_2$ 上的运算. 即算出来的结果要 mod 2)。分析算法成功率和复杂度。

要求:

1. 无论输入是什么, 算法必须有 2/3 以上的正确率。
2. 比直接做矩阵乘法计算快 (矩阵乘法目前需要 $O(n^{2.371552})$ 的时间, 要比这个更好)。

陈世腾老师随机算法、近似算法 2024 年题目

(25 分) Not-all-equal SAT (NAE-SAT) 是这样一个问题: 给定一个合取范式 $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{m}(l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3})$。问是否存在对所有变量的一个赋值, 使得每个子句的几个文字取值不全相等。

和 SAT 略有不同, SAT 允许一些子句全取 1。Not-all-equal SAT 不能。一般来说我们把式子写成 $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{m}(l_{i_1}, l_{i_2}, l_{i_3})$ 以示和 SAT 区别。NAE-k-SAT 表示每个子句的文字数不超过 k 的 NAE-SAT 问题。

(1) (5 分) 对于给定的 3-合取范式 $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{m}(l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3})$。构造新的公式 $\Psi = \bigwedge_{i=1}^{m}(l_{i_1}, l_{i_2}, l_{i_3}, s)$。其中 s 是每个子句共有的一个新的变量。证明 Ψ 存在满足赋值当且仅当 Ψ 存在 $s = 0$ 的 NAE 赋值 (即使得每个子句的几个文字取值不完全相同)。

(2) (5 分) 考虑在 (1) 中构造的公式 Ψ。证明 Ψ 存在 $s = 0$ 的 NAE 赋值当且仅当 Ψ 存在 NAE 赋值。并以此证明 NAE-4-SAT 是 NP-complete 问题。

(3) (5 分) 证明 NAE-3-SAT 是 NP-complete 问题。(提示: 从 NAE-4-SAT 开始归约，尝试缩短子句长度。)

(4) (5 分) 和 MAX-3-SAT 类似, Max-NAE-3-SAT 问题是 NAE-3-SAT 问题的优化版本。给定每个子句恰好有三个不同变量的 NAE-3-SAT 公式 Φ, 寻找对 Φ 的变量的一个赋值, 使满足 NAE 条件的子句数量尽可能多。简要说明 Max-NAE-3-SAT 是 NP-hard 问题，并设计一个常数近似比的针对 Max-NAE-3-SAT 的随机算法, 即该算法满足 NAE 条件的子句的期望数目必须达到至少是最优解数目的常数倍，

(5) (5 分) 将 (4) 中的随机算法改成确定性算法，(允许跳过 (4) 直接做 (5) 的确定性算法，可以得到 (4) (5) 的全部分数。)

孙老师随机算法、近似算法历年考试题

2019 年

(1) 设计算法证明矩阵 $AB = BA$（A、B 都是 $n * n$ 矩阵），并说明算法的复杂度。

(2) 解释什么是 BPP（2/3）。

(3) 证明 BPP（2/3）= BPP（0.99）。

2020 年

1. (18 分) 假设将 $2n$ 个球独立随机的放入 n 个盒子中，用随机变量 X 表示空盒子的个数，用 $0-1$ 随机变量 Y_i 表示第 i 个盒子是否为空 ($Y_i = 1$ 表示非空):

   (1) (4 分) 利用 $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 证明: $E(X) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

   (2) (8 分) 证明: Y_i 彼此负相关, 即 $\forall i_1 < i_2$,

   $$E(Y_{i_1}Y_{i_2}) - E(Y_{i_1})E(Y_{i_2}) < 0.$$

   (3) (4 分) 利用 $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 和 (2) 的结论证明 $var(X)$ 的上限: $var(X) \leq n/4$.

   (4) (2 分) 证明: $Pr\left(\frac{n}{e^2} - n^{0.51} \leq X \leq \frac{n}{e^2} + n^{0.51}\right) \geq 1 - o(1)$.

2. (12 分) 对某个问题 Q, 已知一个 BPP 算法 A, 其每次运行成功的概率不小于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, 其中 n 是问题 Q 的输入规模。请设计一个 BPP 算法 (通过调用算法 A) 求解问题 Q, 使得算法的成功概率至少是 $1 - \frac{1}{n^c}$, 并且算法的运行时间不超过 $O(n^c)$, c 是某个常数。

2021 年

1. 同 2020 年 1 题，把 2n 变成 n。

2. (10 分) 设计一个复杂度为 $O(n^3)$ 的算法，验证三个 $n \times n$ 的 0-1 矩阵 A, B, C 在 $\mathbb{F}_2$ 上是否有 $ABC = I$

2023 年

1. 同 2020 年 1 题。

2. (15 分) 设计一个复杂度为 $O(n^3)$ 的随机算法, 验证三个 $n \times n$ 的 $0-1$ 矩阵 A, B, C 在 $\mathbb{F}_2$ 上是否有 $AB \oplus C = I$。