Cours TalENS 2023-2024

Goûters, Socialisme, Chaleur et PB&J

Matthieu Boyer

16 Décembre 2023

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

> Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

> Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
>
> Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.

Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.

Cependant, vous n'avez pas tous aussi faim les uns que les autres.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

> Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
>
> Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.
>
> Cependant, vous n'avez pas tous aussi faim les uns que les autres.
>
> Comment faire pour le découper sans que personne ne soit lésé et que le découpeur ne soit assailli pour ses préférences dans le groupe d'amis.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $\llbracket 1, n \rrbracket$

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.
On représente la faim du mangeur i par une mesure de probabilité μ_i de densité f_i.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.
On représente la faim du mangeur i par une mesure de probabilité μ_i de densité f_i.
On cherche une partition $X_1, \ldots, X_n$ du gâteau, que l'on modélise par l'ensemble $[0, 1]$.

Théorème de Partage de Gâteau

Theorem (De Partage de Gâteau)

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \quad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

Théorème de Partage de Gâteau

Theorem (De Partage de Gâteau)

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

On cherche donc à démontrer ce Théorème.

Partitions

On appelle partition d'un ensemble toute sous division de cet ensemble en plusieurs parties sans recouvrement.

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i \in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Par exemple, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ est une partition de $[\![1, 4]\!]$

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Dans le cas de $[0,1]$ on dénote une partition comme une suite strictement croissante de réels $x_1, \ldots, x_n$ de sorte qu'on *découpe* l'intervalle en plus petits intervalles.

Permutations

On appelle permutation d'un ensemble, toute manière de le réordonner.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.
On note souvent les permutations entre parenthèses : $(1\ 2\ 3)$ est une permutation de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ mais aussi de $[\![1, 4]\!]$.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.
On note souvent les permutations entre parenthèses : $(1\ 2\ 3)$ est une permutation de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ mais aussi de $[\![1, 4]\!]$.
Dans le cas de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, on note l'ensemble de ses permutations $\mathfrak{S}_n$ et on l'appelle Groupe Symétrique d'ordre n. Il est de cardinal $n!$ (c'est beaucoup)

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.
Puisque la faim de chacun ne dépend pas de la position autour de la table, on doit pouvoir résoudre le problème, quel que soit l'ordre des mangeurs, i.e. quelle que soit la permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des mangeurs.

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0,1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.
Puisque la faim de chacun ne dépend pas de la position autour de la table, on doit pouvoir résoudre le problème, quel que soit l'ordre des mangeurs, i.e. quelle que soit la permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ des mangeurs.
On cherche alors une partition du gâteau, i.e. du segment $[0,1]$, dépendant de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ des mangeurs.

Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une fonction des parties de cet univers (les évènements) dans $\mathbb{R}^+$

Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une fonction des parties de cet univers (les évènements) dans $\mathbb{R}^+$
Cette application doit vérifier les propriétés suivantes :

$p(\Omega) = 1, $, si $A \cap B = \emptyset, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ et $p(A^{\complement}) = 1 - p(A)$

Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une fonction des parties de cet univers (les évènements) dans $\mathbb{R}^+$
Cette application doit vérifier les propriétés suivantes :

$p(\Omega) = 1,$, si $A \cap B = \varnothing, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ et $p(A^\complement) = 1 - p(A)$

L'application de cette fonction à un évènement représente la probabilité de celui-ci. On peut généraliser la propriété sur l'union ci-dessus à un nombre dénombrable d'évènements.

Densité

Dans le cas d'une mesure de probabilité p sur un ensemble continu, on dit qu'elle est non-atomique lorsque $p(\{x\}) = 0$.

Densité

Dans le cas d'une mesure de probabilité p sur un ensemble continu, on dit qu'elle est non-atomique lorsque $p(\{x\}) = 0$. On dit de plus qu'elle est à densité lorsqu'il existe une fonction μ_p telle que :

$$\forall A \subseteq \Omega, p(A) = \int_A \mu_p \, \mathrm{d}\lambda$$

où λ correspond *intuitivement* à la taille de l'ensemble A. En particulier $\lambda([a, b]) = b - a$.