

Nombre de Nombres et Nombres

Cours TalENS n°1

Matthieu Boyer



Table des matières

1	Quelques Définitions Utiles	2
2	La Taille d'un Ensemble	3
2.1	Bijections et Cardinaux	3
2.2	Dénombrabilité	3
2.3	Indénombrabilité	4
3	Nombres dans \mathbb{R}	5
3.1	Nombres Irrationnels	5
3.1.1	Nombre de Nombres Irrationnels	6
3.2	Quelques autres types de Nombres	6
4	Algèbricité	7
4.1	Polynômes et Equation Polynomiales	7
5	Extensions	8
5.1	Tous Ensembles Alors ?	8
5.2	Encore plus de Nombres	9

1 Quelques Définitions Utiles

Définition 1.1: Ensembles

On appelle ensemble une collection d'objets. On l'écrit entre accolades.

Exemple 1.0.1. *Quelques exemples d'ensembles :*

- $\{4, 19, 30173116, 19.2459, \pi\}$
- $\{a, b, \text{"lepetitchatestmort"}, \text{"uuuuuuu"}\}$
- $\{(0, 0), (42, 0), (31.41, 59.2)\}$
- $\{\{0\}, \{ \text{"a"} \}, \{19, 8\}\}$
- $\{31, \text{"n"}, \{19, \text{"b"}\}, (51, 17)\}$

Les ensembles ci-dessus sont écrits par énumération, mais on peut aussi les écrire par description :

Définition 1.2: Nombres Entiers

On note \mathbb{N} l'ensemble des nombres entiers et alors $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres pairs.

Définition 1.3: Image par une Fonction

Pour une fonction $f : A \rightarrow B$, on note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ et $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ si C est inclus dans B .

Exemple 1.0.2. $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{5}x + 3 = 0\} = P^{-1}(\{0\}) = P^{-1}(0)$

2 La Taille d'un Ensemble

2.1 Bijections et Cardinaux

Définition 2.1: Bijection

Une application $f : A \rightarrow B$ est dite *bijection* si elle permet une correspondance un à un entre A et B . Deux ensembles ont même *cardinal* noté $|A|$ s'ils sont en bijection.

Exemple 2.1.1. On a une bijection entre $\llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Définition 2.2: Cardinal

Le cardinal d'un ensemble est une quantité invariante par bijection, i.e. si F et G sont en bijection ils ont même cardinal. On notera $|\llbracket 1, n \rrbracket| = n$.

Remarque 2.3

Le cardinal représente le nombre d'éléments pour un ensemble fini, donc deux ensembles avec le même nombre d'éléments sont en bijection.

Et pour un ensemble infini alors ?

On ne peut pas mesurer directement le nombre d'éléments, seulement le comparer à d'autres

Définition 2.4: Surjectivité

- Une application $f : A \rightarrow B$ est dite *surjective* si elle prend toutes les valeurs dans B , donc si $|A| \geq |B|$
- Une application $f : A \rightarrow B$ est dite *injective* si deux éléments de A ont toujours une image distincte, donc si $|A| \leq |B|$

Remarque 2.5

Ces définitions sont valables aussi pour des ensembles infinis, et ont un sens dès qu'on dessine des patates. Maintenant, on peut partir mesurer l'infini.

2.2 Dénombrabilité

Proposition 2.6: Cardinalité de \mathbb{N}

\mathbb{N} est infini, et c'est le plus petit ensemble infini, en terme de cardinal. Autrement dit, si $|A| \leq |\mathbb{N}|$, soit il y a égalité, soit A est fini. On dit que \mathbb{N} est infini dénombrable.

Remarque 2.7

Que dire de $p : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n$ et $i : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n + 1$?
Elles sont bijectives. Donc il y a 'autant' de nombres pairs que de nombre impairs (logique) que de nombres entiers...

Définition 2.8: Constructions Entières

On note \mathbb{Z} l'ensemble des nombres relatifs (entiers, négatifs compris). On note \mathbb{N}^2 l'ensemble des couples de nombre entiers, i.e. l'ensemble des points du plan situés à une abscisse entière et une ordonnée entière. On note \mathbb{Q} l'ensemble des fractions de nombres entiers, appelé l'ensemble des nombres *rationnels* (qui viennent d'un ration/d'une division). \mathbb{Q} est en bijection avec \mathbb{N} , donc est dénombrable. On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Il est infini et inclus dans \mathbb{N} , il est donc en bijection avec \mathbb{N} et est donc dénombrable.

Proposition 2.9: Dénombrabilité

- L'application

$$r : n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

est bijective. Il y a donc autant de nombre relatifs que de nombres positifs.

- L'application $\psi : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$ est bijective. Il y a donc autant de couples d'entiers que d'entiers.

Remarque 2.10

Plus généralement, on montre qu'une union finie d'ensemble dénombrables est dénombrable, qu'une intersection quelconque d'ensembles dénombrables est au plus dénombrable (finie ou dénombrable). Un produit fini d'ensemble dénombrable est dénombrable. Un produit dénombrable d'ensemble finis, comme une union dénombrable d'ensemble finis est au plus dénombrable.

2.3 Indénombrabilité

Théorème 2.11: Indénombrabilité de \mathbb{R} et de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

L'ensemble des parties de \mathbb{N} n'est pas dénombrable, et \mathbb{R} non plus.

Démonstration. On ne démontre ici que la partie sur \mathbb{R} :

Supposons qu'on a une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . Cela revient à numéroter les nombres réels entre 0 et 1, car $[0, 1]$ et \mathbb{R} sont en bijection.

On a donc une liste :

0	0.189280493920472...
1	0.892019759218405...
2	0.249200000000000...
3	0.361846238100291...
\vdots	\vdots

En prenant le premier chiffre après la virgule du premier nombre, puis le second chiffre du second nombre puis ainsi de suite et en leur ajoutant tous 1, on crée un nombre qui diffère de chacun des nombres de la liste d'au moins un chiffre. Donc on ne peut pas avoir de bijection... ■

Remarque 2.12

En fait, on a montré qu'il n'y avait pas de surjection de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Remarque 2.13

On a utilisé une méthode appelée *Procédé Diagonal de Cantor*. On montre de même que jamais A et $\mathcal{P}(A)$ ne sont en bijection, c'est le théorème de Cantor.

Définition 2.14: Cardinaux Infinis

On note $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = \aleph_1$. On appelle ces nombres les premiers et seconds cardinaux infinis et on dit que \mathbb{R} est indénombrable. Il existe des cardinaux infinis encore plus grand. En fait, il en existe une infinité, en considérant $P(P(P(\dots P(P(\mathbb{R}))))$ autant de fois qu'on veut.

Si \mathbb{Q} contient les nombres rationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

3 Nombres dans \mathbb{R}

3.1 Nombres Irrationnels

Définition 3.1: Irrationalité

Un nombre irrationnel est un nombre dont le développement décimal est apériodique et infini (dénombrable!). De manière équivalente, ce sont des nombres qui ne s'écrivent pas sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Théorème 3.2: Périodicité rationnelle

Le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique.

Démonstration. On ne change pas le caractère (a)périodique du développement en multipliant par un nombre entier. On s'intéresse donc uniquement aux développements décimaux de la forme $\frac{1}{q}$. Pour calculer les termes du développement décimal, il suffit de diviser par l'entier q les restes successifs en partant de la première puissance de 10 supérieure à q .

Puisqu'il existe un nombre fini de restes (au plus $q - 1$), on va nécessairement calculer deux fois un même reste, auquel cas on tombe dans une période du développement. ■

Lemme 3.3: Préservation de la parité

Un nombre est pair si et seulement si son carré est pair.

Démonstration. Si $n = 2k$, $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair. Si $n = 2k + 1$, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$ est impair. ■

Proposition 3.4: Irrationalité

$\sqrt{2}, e, \pi$ sont irrationnels.

Des Irrationalités Promises. • Irrationalité de $\sqrt{2}$: Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Alors, $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Donc p^2 est pair et donc p est pair et donc q est impair. Or, avec $p = 2r$, on trouve que $q^2 = 2r^2$ est pair et donc que q est pair.

- Preuve de Niven de l'Irrationalité de π : On introduit $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ si on écrit $\pi = a/b$. On introduit ensuite

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^4(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

. On remarque d'abord que $F(0) + F(\pi)$ est entier. Ensuite, on montre que

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi)$$

Enfin, pour $0 < x < \pi$, on a : $0 < f(x) \sin x < \frac{(\pi a)^n}{n!}$. Donc quand n est suffisamment grand, on aboutit à une contradiction.

- Preuve de l'Irrationalité de e : On utilise la définition de e par une série convergente, et la formule de Taylor avec reste intégral. ■

Corollaire 3.5: Théorème de Lambert

La tangente d'un nombre rationnel est irrationnelle.

3.1.1 Nombre de Nombres Irrationnels

Théorème 3.6: Indénombrabilité des nombres Irrationnels

Il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Autrement dit, si on prend un nombre réel 'au hasard', il sera irrationnel.

Démonstration. En effet, sinon, on pourrait écrire \mathbb{R} comme l'union de deux ensembles dénombrables \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et on montre qu'alors \mathbb{R} est dénombrable, en choisissant à tour de rôle dans le premier ensemble ou dans le second. ■

Toutefois, on peut toujours approcher un nombre irrationnel par une suite de nombre rationnels : c'est le développement décimal :

Théorème 3.7: Densité de \mathbb{Q}

Pour $u \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor 10^n u \rfloor}{10^n}$ converge vers u . On dit que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

Démonstration. On a : $|u_n - u| \leq \frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ par construction. ■

3.2 Quelques autres types de Nombres

Nous ne démontrerons rien sur ces nombres, il s'agit plus de présentation culturelles.

Définition 3.8: Nombres Normaux

Les Nombres Normaux, sont des nombres dont les décimales sont équiréparties. C'est à dire, qu'en moyenne, chacun des chiffres de 0 à b apparaît autant de fois dans leur développement en base b :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{b}$$

Presque tout nombre réel est un nombre normal.

Il existe des liens entre ces nombres et la théorie des langages formels¹, puisque ces nombres sont « facilement » représentés en base dix.

Définition 3.9: Nombres Univers

On appelle nombre univers tout nombre qui contient toute suite finie de chiffre.

1. Voir plus tard...

Proposition 3.10: Existence de Nombres Univers

Le nombre 123456789101112131415161718192021... (constante de Champernowne) est un nombre univers. Depuis l'invention du CD-Rom, on sait que chaque nombre univers contient l'entièreté des livres, films, musiques jamais écrits.

Proposition 3.11: Nombre de Nombres Univers

Presque tout réel est un nombre univers, ce qui fait que si on prend un réel au hasard, il sera un nombre univers.

Remarque 3.12

La communauté mathématique pense que e et π sont des nombres univers, mais cela n'a pas été prouvé.

4 Algébricité

4.1 Polynômes et Equation Polynomiales

Définition 4.1: Equations et Polynômes

Une équation Polynomiale est une équation de la forme : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ où les a_i sont des nombres appartenant à un corps ^a \mathbb{K} . Elle est dite de degré n sur \mathbb{K} . On dit que $P = a_n X + \dots + a_0$ est un polynôme (formel) sur $\mathbb{K}[X]$, appelé anneaux ^b des polynômes sur \mathbb{K} . On dit que n est le degré $\deg(P)$ du polynôme. On appelle solution tout x vérifiant l'équation.

^a. On ne définit pas vraiment les corps ici, comprendre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

^b. On ne définit pas non plus cette notion ici.

Proposition 4.2: Racines des Equations Quadratiques

Dans le cas $n = 2$, on a : $ax^2 + bx + c$ et on connaît les solutions : $x_{+,-} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Théorème 4.3: Intégrité de l'anneau des Polynômes

Une équation de degré n admet au plus n solutions. Toutes ne sont pas dans \mathbb{K} .

Démonstration. Si λ est une solution de $P(x) = 0$ où P est un polynôme de degré n sur \mathbb{K} , P peut s'écrire $(X - \lambda)Q(x) = 0$ et le degré d'un produit de polynôme étant la somme des degrés, $\deg Q = n - 1$. On conclut par récurrence. ■

Définition 4.4: Algébricité

On appelle nombre algébrique sur \mathbb{K} tout nombre x tel qu'il existe une équation sur \mathbb{K} dont il est solution :

$$\mathcal{A}(\mathbb{K}) = \{x \mid \exists P \in E[X], P(x) = 0\}$$

Un nombre non algébrique est dit transcendant.

Proposition 4.5: Transcendance de Certains Nombres

π et e sont transcendants.

Proposition 4.6: Possible Non Clôture d'un Corps

Tous les nombres algébriques ne sont pas dans \mathbb{K} , mais tout nombre a de \mathbb{K} est algébrique.

Démonstration. • a est solution de $x - a = 0$.

- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est solution de $X^2 - 2 = 0$.

■

Dans la suite, on dira qu'un nombre est algébrique s'il est algébrique sur \mathbb{Q} . On cherche l'ensemble des nombres algébriques. On sait que ce n'est pas \mathbb{R} car il y a des nombres dans \mathbb{R} qui ne sont pas algébriques, et que $x^2 = -1$ n'a pas de solution sur \mathbb{R} .

Définition 4.7: Clôture Algébrique

La clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} est le plus petit ensemble contenant \mathbb{Q} et tel que toute équation de degré au moins 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admet au moins une solution sur $\overline{\mathbb{Q}}$. C'est équivalent au fait que toutes les solutions d'une équation de degré au moins 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$, ce qui se montre par récurrence sur le degré.

Trouver la clôture algébrique d'un ensemble n'est pas un problème très compliqué en théorie. On peut s'en rendre compte en regardant $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$: il suffit de rajouter toutes les solutions aux équations sur \mathbb{Q} . Toutefois, en pratique, cela génère des ensembles abstraits et sans forme simple.

Un Théorème dû à Kedlaya fait état d'un lien entre la clôture algébrique d'un espace de fonctions, i.e. les solutions à des équations à coefficients fonctionnels, et les développements numériques en base q . Mais ce théorème qui se base sur la théorie des séries de Laurent et celle des langages formels (voir plus tard...) est hors de notre portée.

5 Extensions

5.1 Tous Ensembles Alors ?

Définition 5.1: Groupe

Un groupe est un ensemble muni d'une loi interne, associative, unifère, inversible. C'est à dire une application $\cdot : G \times G \rightarrow G$ qui vérifie :

- Pour tous a, b, c dans G , $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Il existe $e \in G$ tel que $e \cdot x = x$ pour tout $x \in G$
- Pour tout x , il existe y tel que $xy = e$.

Ici le groupe est noté multiplicativement, mais on aurait pu choisir d'adopter une convention additive, c'est à dire pour une loi $+$.

Définition 5.2: Espace Vectoriel Réel

Un espace vectoriel réel ^a sur \mathbb{R} est un groupe E , noté additivement, stable par multiplication par un réel, i.e. si $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda x \in E$.

Deux espaces vectoriels sont dit isomorphes s'ils sont en bijection par une application linéaire f , i.e. qui préserve la somme.

^a. On peut les définir sur tout corps

Définition 5.3: Familles Génératrices, Bases

Les groupes (resp. les espaces vectoriels) reposent parfois (resp. toujours) sur une famille d'éléments qui les engendre, i.e. un ensemble $\{g_1, \dots, g_n\}$ tel que si $g \in G$, $g = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \dots g_n^{t_n}$ pour certains t_i .

On appelle un tel ensemble une famille génératrice. Une famille génératrice de cardinal minimal est appelée une base.

On appelle Indice d'un groupe le cardinal d'une base de ce groupe (elles ont toutes le même). C'est une nouvelle notion de taille d'ensemble qui est invariante par la notion d'isomorphisme, une notion de bijection remaniée.

Dans le cadre d'un espace vectoriel E sur \mathbb{R} , le cardinal d'une base est appelé *dimension* de l'espace et noté $\dim E$. Lorsqu'il est fini, E est de cardinal indénombrable égal à \aleph_1 . Toutefois, on peut montrer que E est en bijection avec $\mathbb{R}^{\dim E}$, et donc, lorsqu'il est infini, selon sa valeur, E va devenir plus ou moins grand.

Proposition 5.4: Dimension et Cardinal

- Si $\dim E = \aleph_0$, E est en bijection avec $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles.
- Lorsque $\dim E = \aleph_1$, E est en bijection avec $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions réelles.

Remarque 5.5

En réalité, il s'agit plus que d'une bijection, puisqu'il s'agit d'un isomorphisme, mais cela importe peu.

5.2 Encore plus de Nombres

Définition 5.6: Nombres de Liouville

Un nombre de Liouville est un nombre vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q_n > 1, p_n, 0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^n}$$

Remarque 5.7

Ce sont des nombres facilement approchés par des nombres rationnels.

Théorème 5.8: Transcendance des Nombres de Liouville

Tout nombre de Liouville est transcendant (voir plus haut), mais que à presque tout nombre réel est transcendant sans être de Liouville.