On se place ici dans une situation typique : Plusieurs personnes cherchent à partager équitablement un paquet de nouilles. On supposera ici que le paquet de nouilles est homogène, et que n personnes cherchent à se le partager en fonction de leur faim, que l'on représentera par des mesures de probabilités μ_i sur l'intervalle $X = [0;1]$ avec une densité f_i. Le lecteur attentif aura alors remarqué qu'on cherche une partition $X_1, \dots, X_n$ de X où la i-ème personne reçoit la part représentée par X_i des nouilles.

On cherche à traduire mathématiquement. On introduit ainsi le système d'équations que l'on cherche à résoudre :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \tag{$\star$}$$

Théorème 1 (De Partage des Nouilles)**.** *Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de l'ensemble des mangeurs de nouilles le système ($\star$) a une solution.*

Pour cela, on rappelle le théorème de Borsuk-Ulam :

Théorème 2 (Borsuk-Ulam)**.** *Si f est une fonction continue sur une sphère de dimension n, i.e. sur la frontière de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$, à valeurs dans un espace euclidien de dimension n, il existe deux points antipodaux sur cette sphère de même image par f. Autrement dit :*

$$\forall f : S^n \to \mathbb{R}^n, \ \textit{continue}, \exists x_0 \in S^n, f(x_0) = f(-x_0)$$

Démonstration. On ne démontre ici que le cas en dimension 2, celui-ci se généralisant aisément par le lecteur curieux en dimension n. On raisonne par l'absurde, avec les notations ci-dessus. On rappelle que S^2 est simplement connexe et que son groupe fondamental est trivial. On définit sur S^2 :

$$g : x \in S^2 \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g est bien définie puisqu'on suppose qu'il n'existe pas de point x_0 convenable. On considère le lacet α de S^2 défini par : $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Comme g est impaire, on a, en notant g_* le morphisme du groupe fondamental de S^2 dans celui de S^1 induit par g :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], g_*\alpha(t + 1/2) = -g_*\alpha(t) \tag{1}$$

Par ailleurs, il existe une homotopie ρ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que le lacet $g_*\alpha$ de S^1 s'écrive :

$$\forall t \in [0,1], g_*\alpha(t) = (\cos(2\pi\rho(t)), \sin(2\pi\rho(t))), \text{avec } \rho(0) = 0$$

De (1) on déduit alors :

$$\forall t \in [0, 1/2] \ \ 2\nu(t) = 2(\rho(t + 1/2) - \rho(t)) \in \mathbb{Z}$$

D'où, par continuité de la fonction ν, celle-ci étant définie sur un connexe et à valeurs dans un ensemble discret, elle est constante et s'écrit sous la forme $c/2$ où $c \mod 2 = 1$. On en déduit que :

$$\rho(1) = \rho\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2} = \left(\rho(0) + \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2} = c$$

Donc $\rho(1)$ est impair, différent de 0. En particulier, $g_*\alpha$ n'est pas homotope à un point, et fait c tours autour du cercle. Ainsi, l'image de g_* est différente de l'élément neutre, mais g_* est un morphisme du groupe trivial dans un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, ce qui conclut le raisonnement par l'absurde. ■

Démonstration. (Du théorème de Partage des Nouilles 1) On introduit les fonctions F_i définies sur $S^{n-1} = \{e = (e_0, \dots, e_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid \|e\|_2\}$ par :

$$F_i(e) = \text{sgn}(e_{i+1}) \times \int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\mathrm{d}x - \text{sgn}(e_1) \int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x$$

On définit également f par $f(e) = (F_1(e), \dots, F_{n-1}(e))$. f étant clairement continue et antipodale, par le Théorème de Borsuk-Ulam 2, il existe $e \in S^{n-1}$ tel que $f(\tilde{e}) = 0$ Alors, avec $x_0 = 0$ puis par récurrence en définissant $x_i = x_{i-1} + \tilde{e}_i^2$, le lecteur pourra vérifier qu'on obtient bien une solution au système ($\star$). ■

Par ailleurs, on aurait pû donner une autre démonstration du Théorème de Partage des Nouilles 1 se basant sur le théorème du Sandwich au Jambon, corollaire du Théorème de Borsuk-Ulam 2

Théorème 3 (Du Sandwich au Jambon)**.** *Étant données n parties Lebesgue-mesurables d'un espace euclidien de dimension n, il existe au moins un hyperplan affine divisant chaque parties en deux sous-ensembles de mesure égale.*

La preuve de ce théorème est laissée en exercice au lecteur, puisqu'il ne s'agit que d'une application du Théorème de Borsuk-Ulam 2 Je te laisse un lien vers un article qui présente ce problème :
`https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheze/equitable-simple-cake-cutting-cheze.pdf`