

Cours TalENS 2023-2024

Matthieu Boyer

19 février 2024



1 Billard

Définition 1.1: Billard

Un billard ^a est un compact convexe du plan euclidien \mathbb{R}^2 dont la frontière est de classe \mathcal{C}^1 au moins et dans lequel toute trajectoire est de lumière.

^a. Suivant les Shadoks, la notion de billard est indépendante de la notion de trou

1.1 Compacité

Définition 1.2: Partie Compacte

Une partie est dite compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Ceci n'est vrai qu'en dimension finie. Dans le cadre plus général de la dimension quelconque, cela fonctionne un peu différemment :

Définition 1.3: Propriété de Borel-Lebesgue

On dit qu'un ensemble est compact s'il est séparé et quasi-compact, i.e. qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de l'ensemble par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 1.4: Bornitude

Une partie P est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0, \forall x \in P, \|x\| \leq M$$

Une partie est bornée si, en la regardant d'assez loin, on la voit en entier.

Définition 1.5: Partie Fermée

Une partie P est dite fermée si et seulement si toute suite convergente à valeurs dans P a sa limite dans P

Proposition 1.1: Exemples

- $[0, 1]$ est fermée
- $[0, +\infty[$ est fermée
- \mathbb{Q} n'est pas fermée car dense dans \mathbb{R}

Démonstration. Les inégalités passent à la limite. On rappelle qu'une suite qui tend vers $+\infty$ ne converge pas dans \mathbb{R} . ■

Définition 1.6: Frontière

On appelle frontière d'une partie K les éléments de $\overline{K} \setminus \overset{\circ}{K}$. On la note $\partial(K)$

Proposition 1.2: Paramétrisation

On peut paramétrer la frontière d'une partie bornée $\partial(K)$ par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $\text{Im}(f) = \partial(K)$ et f est L -périodique.

C'est le bord de la partie considérée. C'est une courbe fermée.

Théorème 1.1: des Bornes Atteintes

L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Démonstration. Soit X quasi-compact. Si on prend un recouvrement d'ouverts O_i de $f(X)$, comme f est continue, $X \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$. Par quasi compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$ et donc $f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_i$ est quasi-compact. ■

En particulier, l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs réelles est une union de segments et de points isolés.

1.2 Convexité

Définition 1.7: Partie Convexe

Une partie P de l'espace est convexe si :

$$\forall x, y \in P,]x, y[\subseteq P$$

En particulier, cela signifie, que tout points entre deux points d'un convexe est dans ce convexe. Intuitivement, en deux dimensions, cela correspond aux parties que l'on peut entourer d'un élastique sans trou.

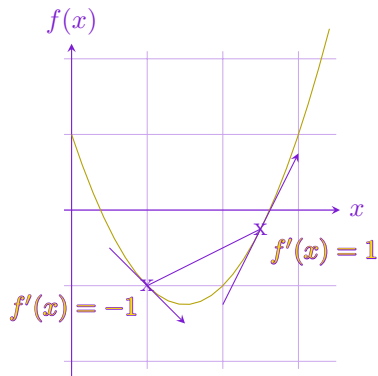
Proposition 1.3: Exemples

- Le disque est convexe. La boule est convexe.
- Le cylindre est convexe, le cube est convexe.
- Le cercle et la sphère ne sont pas convexes.

Définition 1.8: Fonction Convexe

Une fonction est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y, \forall t \in [0, 1] f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes
- f est au dessus de ses tangentes
- Son taux d'accroissement est croissant
- Si $f \in \mathcal{C}^1$, f' croît
- Si $f \in \mathcal{C}^2$, $f'' \geq 0$

Théorème 1.2: des Valeurs Intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est un connexe par arcs.

Démonstration. Soit $y_0, y_1 \in f(X)$. Soit x_0, x_1 des antécédents de ces points par f . Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue, telle que $\gamma(i) = x_i$. Alors, $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(X)$ est continue avec $f \circ \gamma(i) = y_i$. ■

Proposition 1.4: Connexité

Les convexes sont connexes par arcs, et même étoilés en tous leurs points.

En particulier, l'image d'un compact convexe par une fonction continue est un segment.

Théorème 1.3: Lois de Snell-Descartes

Un rayon de lumière entrant depuis un milieu 1 d'indice optique n_1 dans un milieu n_2 avec un angle à la normale i_1 est réfléchi et réfracté selon les lois suivantes :

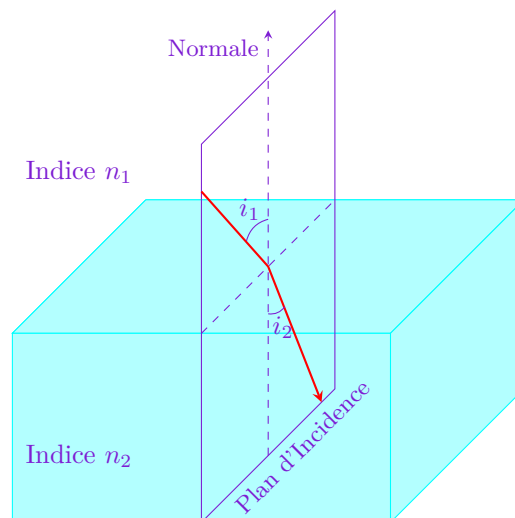
- **Réfraction** : Son angle i_2 de sortie dans le milieu 2 vérifie

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

- **Réflexion** : Son angle i'_1 de réflexion dans le milieu 1 est tel que la normale au milieu au point d'incidence est la bissectrice de l'angle $i_1 + i'_1$.

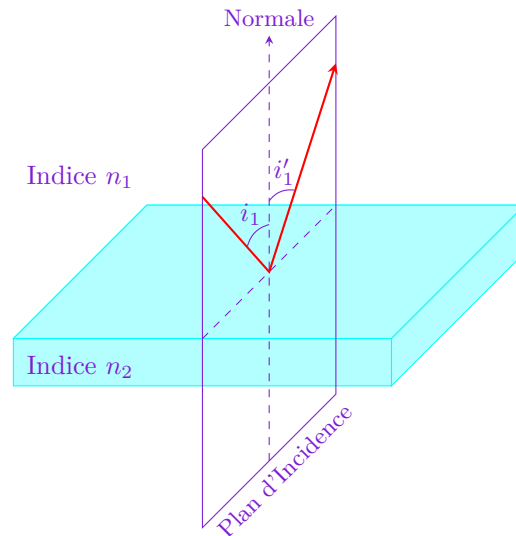
Loi de la Réfraction :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$



Loi de la Réflexion :

$$i_1 = -i'_1$$



Proposition 1.5: Boule de Billard

Une boule de Billard suit une trajectoire de Lumière, i.e. vérifie les lois de Descartes, la réfraction étant ici nulle.

On cherche donc à prouver que, sur un compact convexe, pour tout point, il existe une trajectoire de lumière contenant ce point et contenant n réflexions.

2 Le Résultat

2.1 Hypothèse

On se donne un billard K .

On voudrait montrer le résultat suivant, plus fort que ce qu'on cherche :

Théorème 2.1: Trajectoires Polygonales

Un polygone à n côtés inscrits dans $\partial(K)$ de périmètre minimal est une trajectoire de lumière.

À priori, on ne sait pas si celui-ci est vrai, mais on se doute bien qu'il a des chances de l'être.

Définition 2.1: Polygone

Un polygone à n côtés est inscrit dans $\partial(K)$ si ses sommets sont des éléments de $\partial(K)$. Formellement, on le décrit par ses n sommets S_1, \dots, S_n , des points éléments de $\partial(K)$.

Proposition 2.1: Norme et Produit Scalaire

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$
- La distance $AB = \|A - B\|$ est définie par $\sqrt{\langle A - B, A - B \rangle}$
- On a : $\frac{1}{\lambda} \langle x, y \rangle = \langle x, \frac{y}{\lambda} \rangle$ et $\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = \langle x, y + z \rangle$.
- On a : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.2 La Preuve

Dans la suite on note :

- L la longueur de $\partial(K)$
- F une paramétrisation de $\partial(K)$ de classe \mathcal{C}^1 au moins.
- $\mathfrak{C} = \{(t_1, \dots, t_n), 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq L\}$.

Proposition 2.2: Existence d'un Polygone de Périmètre Maximal

Pour tout $n \geq 2$, il existe un polygone inscrit dans $\partial(K)$ de périmètre minimal.

Démonstration. L'ensemble \mathfrak{C} est compact : borné car inclus dans $[0, L]^n$ borné, et fermé car les inégalités passent à la limite.

On définit

$$\Phi : (t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{C} \mapsto \sum_{k=1}^n \|F(t_k) - F(t_{k+1})\|$$

Cette fonction, continue, atteint un maximum en u_1, \dots, u_n sur le compact \mathfrak{C} . On note $M_k = F(u_k)$. On peut supposer que les M_k sont distincts. Sinon, si $t_k < t_{k+1} = t_{k+2}$, on a :

$$\begin{aligned} \|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\| &\geq \|F(t_k) - F(t_{k+2})\| \\ &= \|F(t_k) - F(t_{k+1})\| + \|F(t_{k+1}) - F(t_{k+2})\| \end{aligned}$$

On peut alors remplacer t_{k+1} par t .

On a ainsi démontré qu'il existe bien un polygone à n côtés de périmètre minimal. ■

Démonstration du théorème 2.1. On veut maintenant démontrer qu'un tel polygone est une trajectoire de lumière.

On conserve les notations précédemment introduites. Par définition, pour tout k :

$$f_k : t \in [t_k, t_{k+2}] \mapsto \|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\|$$

atteint un maximum en t_{k+1}

De plus, elle est dérivable sur $]t_k, t_{k+1}[$ $f : t \mapsto \|F(t_0) - F(t)\|$ l'étant en tout point non congru à t_0 modulo L avec

$$f'(t) = \frac{\langle -F'(t), F(t_0) - F(t) \rangle}{\|F(t_0) - F(t)\|}$$

On a alors, pour $t \in]t_k, t_{k+2}[$

$$\begin{aligned} f'_k(t_{k+1}) &= \frac{\langle -F'(t_{k+1}), F(t_k) - F(t_{k+1}) \rangle}{\|F(t_k) - F(t_{k+1})\|} \\ &\quad + \frac{\langle -F'(t_{k+1}), F(t_{k+2}) - F(t_{k+1}) \rangle}{\|F(t_{k+2}) - F(t_{k+1})\|} \\ &= \left\langle -F'(t_{k+1}), \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_k}}{M_{k+1}M_k} + \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}}{M_{k+1}M_{k+2}} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs $u_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_k}}{M_{k+1}M_k}$ et $v_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}}{M_{k+1}M_{k+2}}$ sont unitaires et colinéaires à $\overrightarrow{M_{k+1}M_k}$ et $\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}$. $u_k + v_k$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{M_{k+1}M_k}, \overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}})$ orthogonal à $F'(t_{k+1})$, il dirige donc la normale à la courbe en M_{k+1} . Ainsi, une trajectoire allant de M_k à M_{k+1} repart après rebond de M_{k+1} vers M_{k+2} .

Finalement, la trajectoire $M_1 \dots M_n$ le long du polygone est bien une trajectoire de lumière. ■