Cours TalENS 2023-2024

Dérivée, Volume, Aire, Périmètre

Matthieu Boyer

chaipakan

Plan

Dérivée par rapport à une variable

Definition

Si f est dérivable, $f^{'}(x) = \lim\limits_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$. $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en x.

Toutes les fonctions que nous allons étudier seront dérivables, et même souvent rationnelles. Règles de dérivation usuelles :

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\,g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\,g + f\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g)$

Règle de la chaîne - Changement de Variable

Theorem (Règle de la Chaîne)

Soit f dérivable, g dérivable : $(f(g(v))) = g'(v) \times f^{'}(g(v))$.

Definition (Changement de Variable)

On appelle poser dans f le changement de $u = g(v)$ le fait d'écrire : $f(u) = f(g(v))$. On a alors : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(f(u)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(v)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(f(g(v)))$

Exemples : Poser le changement de variable $x = \exp y$ pour calculer la dérivée de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x))$.

Plan

Polygones Réguliers : Aire et Périmètre

Un n-gone régulier est un polygone (convexe) à n côtés de même longueur c.
On fait ici un abus de notation, en ne considérant que les polygones convexes pour parler des n-gones réguliers, pourquoi ?

Theorem

En notant ρ l'apothème du polygone (la distance du centre à un côté) :

- $P(n, c) = nc$
- $A(n, c) = n\frac{c\rho}{2} = P(n, c)\frac{\rho}{2}$

Un catalogue des Solides de Platon

Definition

Les solides de Platon sont les polyèdres réguliers convexes, i.e. des solides dont les faces sont planes polygonales régulières, similaires et se rencontrent selon des segemnts appelés arêtes.

Exhaustivité

Theorem

Il y en a 5 et seulement 5 : Le Tétraèdre (pyramide à ? faces), le cube (hexaèdre), l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre.

Démonstration.

On a toujours : $S - A + F = 2$ et $pF = 2A = qS$, où p est le nombre de côtés des faces, et q le nombre de face se rejoignant à chaque sommet. On en déduit qu'on doit avoir : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Mais comme $p, q \geq 3$, on n'a bien que 5 possibilités qui sont autant de solides.

Plan

Rayon, Périmètre, Aire

Plan

Plan

Le Carré

Le Triangle Equilatéral

Les n-gones Réguliers

Le Cube

Plan

Un Espace en d Dimensions ?

Un Solide en d Dimensions

Aire et Volume d'un Solide en d Dimensions

Plan

Le cas du Cube

Plan

Rappels Mathématiques

Constatations

Généralisation

- L'Aire et le Volume en d Dimensions
- Relation entre Volume et Aire en d Dimensions pour un Solide
- Et pour une forme quelconque ?

Famille Lisse de Formes Uni-Paramétrées

Famille Lisse de Formes k-Paramétrées