Les Primitives

Classe Inversée Formation

Matthieu Boyer

30 septembre 2023

Fonction

Une fonction f est un objet mathématique qui prend une valeur d'entrée x, et renvoie une valeur de sortie $f(x)$.
Dans notre cas, x et $f(x)$ seront des nombres *réels*, comme
$1, 2, 3.14, \pi, e, \sqrt{2}, 42, 469497.840019$
On peut alors représenter une fonction par sa courbe.

Dérivation

On appelle dérivée d'une fonction f, la fonction $f^{'}$ qui a x, associe la pente de la tangente à la courbe de f en $(x, f(x))$.
Cette définition implique que toute fonction n'est pas dérivable.
On dispose de nombreuses règles de dérivation, les seules qui nous intéressent ici étant :

- Si c est une fonction constante, $c^{'} = \tilde{0}$, et ce sont les seules fonctions de dérivée nulle.
- Si f et g sont des fonctions : $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$ (linéarité de la dérivation)

Primitive d'une Fonction

On appelle Primitive de f toute fonction F telle que $F^{'} = f$.
Une telle fonction n'est pas nécessairement unique : Si F est une primitive de f, si c est une constante, $F + c$ l'est aussi.
On en déduit que deux primitives d'une même fonction sont égales à constante près.

Aire sous la Courbe

On note : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'aire sous la courbe de f sur le segment $[a, b]$ i.e. entre a et b.
On appelle ce nombre l'intégrale de f entre a et b On ne peut définir ce nombre que pour certaines fonctions, dites continues par morceaux.
On remarque par ailleurs que l'aire sous la courbe de f sur le segment $[a, a]$ est nulle, et donc que l'intégrale de f entre a et a est nulle.

Primitives par l'Aire sous la Courbe

On peut montrer que la fonction

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

est une primitive de f, la seule qui vaut 0 en a.

Ceci montre que toute fonction continue a une primitive. On appelle ce résultat *Théorème Fondamental du Calcul Intégral*

Aire sous la Courbe par Primitive

On peut montrer réciproquement que si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ceci découle du fait que deux primitives d'une même fonction sont égales à constante près.