Cours TalENS 2023-2024

Détermination, Crayons, Angles Droits, Glissières

Matthieu Boyer

27 Janvier 2024

Introduction Historique

Le Corps

Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

Le Corps

Définition 2.2: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre 0 notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$

Le Corps

Définition 2.3: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre 0 notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre 1 notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Le Corps

Définition 2.4: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre 0 notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre 1 notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Pour laquelle tout élément (sauf 0) est inversible pour la multiplication et la loi de produit nul est vérifiée.

Le Corps

Définition 2.5: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre 0 notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre 1 notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Pour laquelle tout élément (sauf 0) est inversible pour la multiplication et la loi de produit nul est vérifiée.

On notera $\mathbb{K}$ un tel ensemble

Polynômes

Définition 2.6: Polynôme sur $\mathbb{K}$

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

Polynômes

Définition 2.7: Polynôme sur $\mathbb{K}$

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

On les note sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Polynômes

Définition 2.8: Polynôme sur $\mathbb{K}$

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

On les note sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

On appelle le symbole X l'indéterminée. Ce n'est pas un nombre.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Calcul sur les Polynômes

Proposition 2.9: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1, d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme.

Calcul sur les Polynômes

Proposition 2.10: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1, d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme.
- $X^k P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{i+k}$ est un polynôme.

Calcul sur les Polynômes

Proposition 2.11: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1,d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme.
- $X^k P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{i+k}$ est un polynôme.
- En particulier, PQ est un polynôme et si $k \in \mathbb{N}$, P^k est un polynôme.

Calcul sur les Polynômes

Proposition 2.12: Composition