Cours TalENS 2023-2024

Parpaing, Yu-Gi-Oh, Elastique

Matthieu Boyer

5 février 2024

Plan

Billard
- Compact
- Convexe
- Lois de Snell-Descartes

Le Résultat

Notion de Billard

Définition 1.1: Billard

Un billard est un compact convexe du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins et dans lequel toute trajectoire est de lumière.

Notion de Billard

Définition 1.1: Billard

Un billard est un compact convexe du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins et dans lequel toute trajectoire est de lumière.

Suivant les Shadoks, la notion de billard est indépendante de la notion de boule.

Compacité

Définition 1.2: Partie Compacte

Une partie est dite compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Compacité

Définition 1.2: Partie Compacte

Une partie est dite compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Définition 1.3: Bornitude

Une partie P est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0, \forall x \in P, \|x\| \leq P$$

Compacité

Définition 1.2: Partie Compacte

Une partie est dite compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Définition 1.3: Bornitude

Une partie P est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0, \forall x \in P, \|x\| \leq P$$

Une partie est bornée si, en la regardant d'assez loin, on la voit en entier.

Fermeture

Définition 1.4: Partie Fermée

Une partie P est dite fermée si et seulement si toute suite convergente à valeurs dans P a sa limite dans P

Fermeture

Définition 1.4: Partie Fermée

Une partie P est dite fermée si et seulement si toute suite convergente à valeurs dans P a sa limite dans P

Proposition 1.1: Exemples

- $[0, 1]$ est fermée
- $[0, +\infty[$ est fermée
- $\mathbb{Q}$ n'est pas fermée car dense dans $\mathbb{R}$

Frontières

Définition 1.5: Frontière

On appelle frontière d'une partie K les éléments de $\overline{K} \setminus \mathring{K}$.
On la note $\delta(K)$

Frontières

Définition 1.5: Frontière

On appelle frontière d'une partie K les éléments de $\overline{K} \setminus \mathring{K}$. On la note $\delta(K)$

Proposition 1.2: Paramétrisation

On peut paramétrer la frontière d'une partie bornée $\delta(K)$ par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où $Im(f) = \delta(K)$ et f est L-périodique.

C'est le bord de la partie considérée. C'est une courbe fermée.

Paramétrisation

On fonce dans le mur…

Théorème 1.1: des Bornes Atteintes

L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

On fonce dans le mur...

Théorème 1.1: des Bornes Atteintes

L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

En particulier, l'image d'un compact par une fonction continue est une union de segments et de points isolés.

Plan

Billard

- Compact
- Convexe
- Lois de Snell-Descartes

Le Résultat

Convexité

Définition 1.6: Partie Convexe

Une partie P de l'espace est convexe si :

$$\forall x, y \in P,]x, y[\subseteq P$$

Convexité

Définition 1.6: Partie Convexe

Une partie P de l'espace est convexe si :

$$\forall x, y \in P,]x, y[\subseteq P$$

En particulier, cela signifie, que tout points entre deux points d'un convexe est dans ce convexe.

Convexité

Définition 1.6: Partie Convexe

Une partie P de l'espace est convexe si :

$$\forall x, y \in P,]x, y[\subseteq P$$

En particulier, cela signifie, que tout points entre deux points d'un convexe est dans ce convexe.

Intuitivement, en deux dimensions, cela correspond aux parties que l'on peut entourer d'un élastique sans trou.

Exemples

Proposition 1.3: Exemples

- Le disque est convexe. La boule est convexe.

Exemples

Proposition 1.3: Exemples

- Le disque est convexe. La boule est convexe.
- Le cylindre est convexe, le cube est convexe.

Exemples

Proposition 1.3: Exemples

- Le disque est convexe. La boule est convexe.
- Le cylindre est convexe, le cube est convexe.
- Le cercle et la sphère ne sont pas convexes.

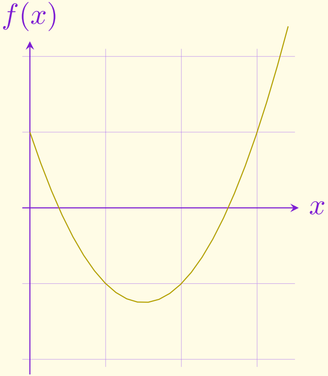
Fonctions Convexes

Définition 1.7: Fonction Convexe

Une fonction est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y, \forall t \in [0,1]\, f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

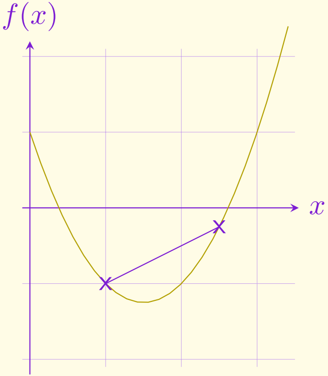
Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe

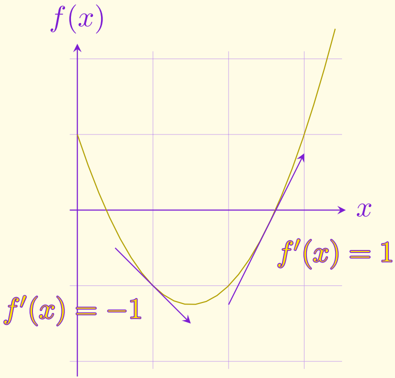
Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes

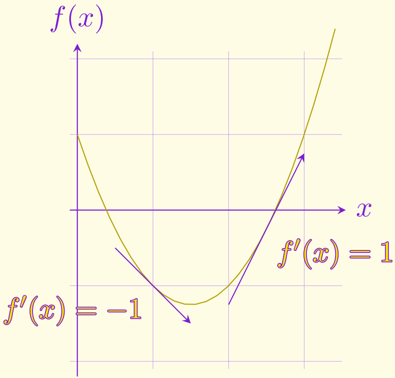
Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes
- f est au dessus de ses tangentes

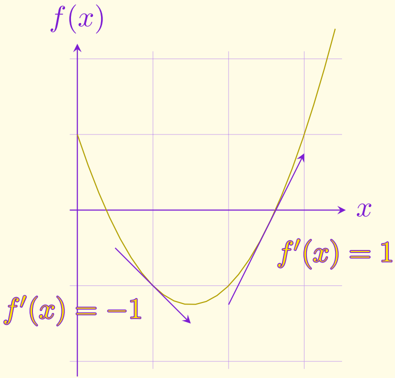
Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes
- f est au dessus de ses tangentes
- Son taux d'accroissement est croissant

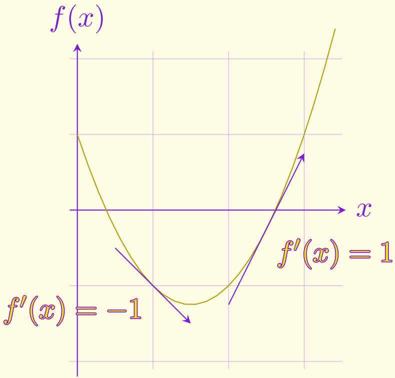
Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes
- f est au dessus de ses tangentes
- Son taux d'accroissement est croissant
- Si $f \in \mathcal{C}^1$, f' croît

Caractérisation



De manière équivalente, si f est une fonction :

- f est convexe
- f est sous ses cordes
- f est au dessus de ses tangentes
- Son taux d'accroissement est croissant
- Si $f \in \mathcal{C}^1$, f' croît
- Si $f \in \mathcal{C}^2$, $f'' \geq 0$

. . .et on rebondit !

Théorème 1.2: des Valeurs Intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est un connexe par arcs.

. . .et on rebondit !

Théorème 1.2: des Valeurs Intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est un connexe par arcs.

Proposition 1.4: Connexité

Les convexes sont connexes par arcs, et même étoilés en tous leurs points.

...et on rebondit !

Théorème 1.2: des Valeurs Intermédiaires

L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est un connexe par arcs.

Proposition 1.4: Connexité

Les convexes sont connexes par arcs, et même étoilés en tous leurs points.

En particulier, l'image d'un compact convexe par une fonction continue est un segment.

Plan

Billard

- Compact
- Convexe
- Lois de Snell-Descartes

Le Résultat

AZIZ ! LUMIÈRE !

Théorème 1.3: Lois de Snell-Descartes

Un rayon de lumière entrant depuis un milieu 1 d'indice optique n_1 dans un milieu n_2 avec un angle à la normale i_1 est réfléchi et réfracté selon les lois suivantes :

- Réfraction : Son angle i_2 de sortie dans le milieu 2 vérifie

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

AZIZ ! LUMIÈRE !

Théorème 1.3: Lois de Snell-Descartes

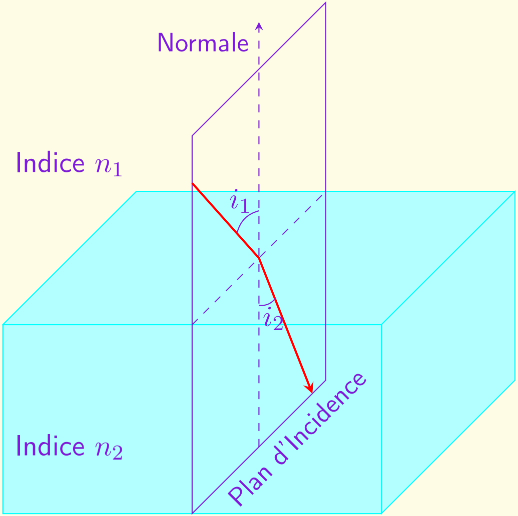
Un rayon de lumière entrant depuis un milieu 1 d'indice optique n_1 dans un milieu n_2 avec un angle à la normale i_1 est réfléchi et réfracté selon les lois suivantes :

- Réflexion : Son angle i_1' de réflexion dans le milieu 1 est tel que la normale au milieu au point d'incidence est la bissectrice de l'angle $i_1 + i_1'$.

Réfraction

Loi de la Réfraction :

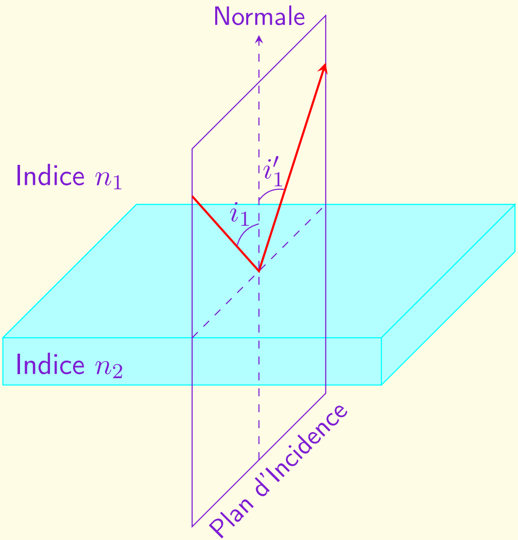
$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$



Réflexion

Loi de la Réflexion :

$$i_1 = -i'_1$$



Trajectoire de Lumière

Proposition 1.5: Boule de Billard

Une boule de Billard suit une trajectoire de Lumière, i.e. vérifie les lois de Descartes, la réfraction étant ici nulle.

On cherche donc à prouver que, sur un compact convexe, pour tout point, il existe une trajectoire de lumière contenant ce point et contenant n réflexions.

Plan

Billard

Le Résultat

Hypothèse

Résultats Intermédiaires

La Preuve

Hypothèse

On se donne un billard K.

On voudrait montrer le résultat suivant, plus fort que ce qu'on cherche :

Théorème 2.1: Trajectoires Polygonales

Un polygone à n côtés inscrits dans $\delta(K)$ de périmètre minimal est une trajectoire de lumière.

Plan

Billard

Le Résultat

Hypothèse

Résultats Intermédiaires

La Preuve

Définitions

Définition 2.1: Polygone

Un polygone à n côtés est inscrit dans $\delta(K)$ si ses sommets sont des éléments de $\delta(K)$.

Définitions

Définition 2.1: Polygone

Un polygone à n côtés est inscrit dans $\delta(K)$ si ses sommets sont des éléments de $\delta(K)$.
Formellement, on le décrit par ses n sommets $S_1, \ldots, S_n$, des points éléments de $\delta(K)$.

Définitions

Définition 2.1: Polygone

Un polygone à n côtés est inscrit dans $\delta(K)$ si ses sommets sont des éléments de $\delta(K)$.
Formellement, on le décrit par ses n sommets $S_1, \ldots, S_n$, des points éléments de $\delta(K)$.

Dans la suite on note :

- L la longueur de $\delta(K)$
- F une paramétrisation de $\delta(K)$ de classe $\mathcal{C}^1$ au moins.
- $\mathfrak{C} = \{(t_1, \ldots, t_n), 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq L\}$.

Rappels sur le Produit Scalaire

Proposition 2.1: Norme et Produit Scalaire

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$

Rappels sur le Produit Scalaire

Proposition 2.1: Norme et Produit Scalaire

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$
- La distance $AB = \|A - B\|$ est définie par $\sqrt{\langle A - B, A - B\rangle}$

Rappels sur le Produit Scalaire

Proposition 2.1: Norme et Produit Scalaire

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$
- La distance $AB = \|A - B\|$ est définie par $\sqrt{\langle A - B, A - B\rangle}$
- On a : $\frac{1}{\lambda}\langle x, y\rangle = \left\langle x, \frac{y}{\lambda}\right\rangle$ et $\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = \langle x, y + z\rangle$.

Rappels sur le Produit Scalaire

Proposition 2.1: Norme et Produit Scalaire

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$
- La distance $AB = \|A - B\|$ est définie par $\sqrt{\langle A - B, A - B \rangle}$
- On a : $\frac{1}{\lambda} \langle x, y \rangle = \left\langle x, \frac{y}{\lambda} \right\rangle$ et $\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = \langle x, y + z \rangle$.
- On a : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Plan

Billard

Le Résultat

- Hypothèse
- Résultats Intermédiaires
- La Preuve

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

L'ensemble $\mathfrak{C}$ est compact : borné car inclus dans $[0, L]^n$ borné, et fermé car les inégalités passent à la limite.

$\blacksquare$

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

L'ensemble $\mathfrak{C}$ est compact : borné car inclus dans $[0, L]^n$ borné, et fermé car les inégalités passent à la limite.

On définit

$$\Phi : (t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{C} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k+1})\|$$

■

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

L'ensemble $\mathfrak{C}$ est compact : borné car inclus dans $[0, L]^n$ borné, et fermé car les inégalités passent à la limite.
On définit

$$\Phi : (t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{C} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k+1})\|$$

Cette fonction, continue, atteint un maximum en $u_1, \ldots, u_n$ sur le compact $\mathfrak{C}$. On note $M_k = F(u_k)$. ■

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

On peut supposer que les M_k sont distincts. Sinon, si $t_k < t_{k+1} = t_{k+2}$, on a :

$$\begin{aligned} \|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\| &\geq \|F(t_k) - F(t_{k+2})\| \\ &= \|F(t_k) - F(t_{k+1})\| + \|F(t_{k+1}) - F(t_{k+2})\| \end{aligned}$$

■

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

On peut supposer que les M_k sont distincts. Sinon, si $t_k < t_{k+1} = t_{k+2}$, on a :

$$\begin{aligned}\|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\| &\geq \|F(t_k) - F(t_{k+2})\| \\ &= \|F(t_k) - F(t_{k+1})\| + \|F(t_{k+1}) - F(t_{k+2})\|\end{aligned}$$

On peut alors remplacer t_{k+1} par t.

$\blacksquare$

Existence d'un Polygone de Périmètre Minimal

Démonstration.

On peut supposer que les M_k sont distincts. Sinon, si $t_k < t_{k+1} = t_{k+2}$, on a :

$$\begin{aligned}\|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\| &\geq \|F(t_k) - F(t_{k+2})\| \\ &= \|F(t_k) - F(t_{k+1})\| + \|F(t_{k+1}) - F(t_{k+2})\|\end{aligned}$$

On peut alors remplacer t_{k+1} par t. On a ainsi démontré qu'il existe bien un polygone à n côtés de périmètre minimal. ■

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

On veut maintenant démontrer qu'un tel polygone est une trajectoire de lumière.

On conserve les notations précédemment introduites. ∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Par définition, pour tout k :

$$f_k : t \in [t_k, t_{k+2}] \mapsto \|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\|$$

atteint un maximum en t_{k+1}

∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Par définition, pour tout k :

$$f_k : t \in [t_k, t_{k+2}] \mapsto \|F(t_k) - F(t)\| + \|F(t) - F(t_{k+2})\|$$

atteint un maximum en t_{k+1}

De plus, elle est dérivable sur $]t_k, t_{k+1}[$ $f : t \mapsto \|F(t_0) - F(t)\|$

l'étant en tout point non congru à t_0 modulo L avec

$$f'(t) = \frac{\langle -F'(t), F(t_0 - F(t)) \rangle}{\|F(t_0) - F(t)\|}$$

■

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

On a alors, pour $t \in]t_k, t_{k+2}[$

$$\begin{aligned} f_k'(t_{k+1}) = & \frac{\langle -F'(t_{k+1}), F(t_k) - F(t_{k+1})\rangle}{\|F(t_k) - F(t_{k+1})\|} \\ & + \frac{\langle -F'(t_{k+1}), F(t_{k+2}) - F(t_{k+1})\rangle}{\|F(t_{k+2}) - F(t_{k+1})\|} \\ = & \left\langle -F'(t_{k+1}), \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_k}}{M_{k+1}M_k} + \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}}{M_{k+1}M_{k+2}} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Les vecteurs $u_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_k}}{M_{k+1}M_k}$ et $v_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}}{M_{k+1}M_{k+2}}$ sont unitaires et colinéaires à $\overrightarrow{M_{k+1}M_k}$ et $\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}$.

∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Les vecteurs $u_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_k}}{M_{k+1}M_k}$ et $v_k = \frac{\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}}{M_{k+1}M_{k+2}}$ sont unitaires et colinéaires à $\overrightarrow{M_{k+1}M_k}$ et $\overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}$.

$u_k + v_k$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{M_{k+1}M_k}, \overrightarrow{M_{k+1}M_{k+2}}\right)$ orthogonal à $F'(t_{k+1})$, il dirige donc la normale à la courbe en M_{k+1}. ∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Ainsi, une trajectoire allant de M_k à M_{k+1} repart après rebond de M_{k+1} vers M_{k+2}.

∎

Trajectoire de Lumière

Démonstration.

Ainsi, une trajectoire allant de M_k à M_{k+1} repart après rebond de M_{k+1} vers M_{k+2}.

Finalement, la trajectoire $M_1 \ldots M_n$ le long du polygone est bien une trajectoire de lumière. ■