Exercices de maths
MPSI-MP

Hadrien Chalandon
Matthieu Boyer

1^{er} décembre 2023

Table des matières

Introduction

Ce livre est une collection d'exercices de maths de prépa MPSI-MP/MP*. S'il est conçu pour des élèves de MPSI et de MP, d'autres filières de prépa peuvent l'utiliser.

Le but du livre est de regrouper un maximum d'exercices intéressants. Des digressions offrant plus de perspectives sur les maths hors programme de prépa sont insérées dans les sections appropriées. Ces digressions peuvent procurer du pur plaisir mathématique et (peut-être) servir pour les concours X-ENS (attention cependant à bien connaître ce qui et ce qui n'est pas au programme pour éviter de perdre des points en utilisant des résultats hors programme) ou comme inspiration pour un TIPE de maths.

Les exercices sont regroupés plus par thème que par chapitre (par exemple, les chapitres espaces vectoriels normés et espaces vectoriels normés de dimension finie sont regroupés dans la section « Topologie »).

Certains exercices plus durs ont des astuces (données dans la partie « Astuces ») pour éviter de regarder directement la correction (ainsi, faire ces exercices se rapproche d'une khôlle ou d'un oral où l'examinateur donne des pistes de réflexion).

Il est très très vivement conseillé de ne pas regarder la correction (ou les astuces) d'un exercice avant de l'avoir longuement cherché. Si vous êtes en prépa, votre ou vos prof(s) vous ont probablement déjà prévenus.

Ce livre suppose le cours de prépa déjà connu et aucun rappel n'est en général fourni. Ce livre n'est pas non plus un substitut pour des TDs avec un prof en chair et en os. Il est probablement mieux utilisé pour réviser ou comme supplément de TD.

Si vous êtes prof/TDman/peut-importe comment vous vous désignez, oui, vous pouvez chourrer des exos d'ici, personne vous jugera.

- Vous avez un exercice que vous pensez qui est bien et vous voudriez le voir ajouté au livre ?
- Vous pensez qu'un exercice est bien trop dur et a besoin d'une astuce ?
- Vous avez trouvé une erreur ?
- Vous avez envie de me traiter de noms d'oiseaux ?

Si vous avez répondu « oui »à au moins $\frac{1}{2}$ question ci-dessus alors contactez moi ! //mettre addresse mail maths

Comment utiliser ce livre

- Les exercices ne sont pas nécessairement à faire dans l'ordre.

- Les exercices comportant une astuce sont marqués d'une étoile ($\star$).
- Certains exercices utilisent des résultats d'exercices précédents.
  Si l'exercice dont on utilise les résultats n'est pas dans le même chapitre, alors l'exercice utilisé est soit mentionné dans l'énoncé, soit (s'il n'est pas strictement nécessaire ou jugé retrouvable) précisé dans la partie « astuces ».

Table des matières

Première partie

Exercices de MPSI

Chapitre 1

Raisonnement, ensembles, applications et relations

1.1 Raisonnements

Les trois exercices suivants sont extrêmement classiques.

Exercice 1.1.1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (bonus : généraliser).

Exercice 1.1.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si n^2 est impair, n l'est aussi.

Exercice 1.1.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que
$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an$$
2. En déduire que
$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$$
3. Prolonger ce résultat en
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$$
(il est possible que cette question demande du cours qui n'a pas encore été vu ; si c'est le cas, attendre le cours sur les nombres réels)

Exercice 1.1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

1.2 Ensembles

Exercice 1.2.1 (Théorème de Cantor)**.** Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

1.3 Applications et relations

Exercice 1.3.1. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2. Même question pour que f soit surjective.

Exercice 1.3.2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

1. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$.
2. Le résultat subsiste-t-il si on suppose seulement f injective ? Surjective ?

1.4 Digressions et exercices supplémentaires

Exercice 1.4.1. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E réflexive et transitive (on dit que $\mathcal{R}$ est un *préordre*).

1. Montrer que la relation binaire sur E $\sim$ définie par
$$\forall x, y \in E, (x \sim y) \iff (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x)$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer que la relation binaire $\leq$ définie sur l'ensemble $E/\sim$ par
$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in E/\sim, (\overline{x} \leq \overline{y}) \iff (x \mathcal{R} y)$$
est bien définie (ne dépend pas du choix du représentant) et est une relation d'ordre.

Chapitre 2

Réels, complexes, trigonométrie, sommes et produits

2.1 Compléments sur les réels

Quelques exercices sur la manipulation de la borne supérieure :

Exercice 2.1.1. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ majorées non vides. Montrer que $\sup(A+B)$ existe et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 2.1.2. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^+$ majorées. Montrer que $A \times B$ est majorée et que $\sup(A \times B) = \sup(A) \times \sup(B)$.

Exercice 2.1.3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ bornée. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Montrer que si $\lambda \geq 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.
- Montrer que si $\lambda < 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

Exercice 2.1.4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

2.2 Complexes et trigonométrie

Exercice 2.2.1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Exercice 2.2.3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn(x)}\frac{\pi}{2}$$

Où sgn(x) est le signe de x.

2.3 Sommes et produits

Exercice 2.3.1. Calculer

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 2.3.2. Trouver les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

2.4 Digressions et exercices supplémentaires

Chapitre 3

Fonctions usuelles : Dérivées, Intégrales, équations différentielles

3.1 Dérivées

3.2 Intégrales

3.3 Équations différentielles

Chapitre 4

Suites, limites, continuité

4.1 Suites

Exercice 4.1.1. Soit x irrationnel. Soient $(p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $(q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Montrer que $(|p_n|)$, (q_n) divergent vers $+\infty$.

Suites récurrentes

Exercice 4.1.2. 1. Calculer, pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

(où il y a $n-1$ radicaux).

2. En déduire

$$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

(où il y a $n-1$ radicaux).

3. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

4.2 Continuité

Exercice 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Dans l'éventualité où vous avez un doute, la somme jusqu'à l'infini est la limite des sommes finies, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$. Il faut prouver qu'elle existe.

Chapitre 5

Dérivation

5.1 Fonctions dérivables

5.2 Convexité

Chapitre 6

Analyse asymptotique

6.1 Analyse asymptotique des suites

6.2 Développements limités

Chapitre 7

Structures algébriques

7.1 Groupes

Exercice 7.1.1.

Exercice 7.1.2. Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe $x \in G$ différent de e tel que $x^2 = e$.

Exercice 7.1.3. Soit G un groupe fini et f un endomorphisme de G tel que

$$|\{x \in G \mid f(x) = x^{-1}\}| > \frac{|G|}{2}$$

Montrer que f est une involution (c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{Id}_G$).

7.2 Anneaux et corps

7.3 Digressions et exercices supplémentaires

Exercice 7.3.1. Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative (E est donc un magma associatif). Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $x^2 = x$.

Chapitre 8

Arithmétique

8.1 Divisibilité, PGCD, PPCM

8.2 Nombres premiers

Exercice 8.2.1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_2(5^{2^n} - 1)$.

8.3 Digressions et exercices supplémentaires

Chapitre 9

Polynômes et fractions rationnelles

9.1 Polynômes

9.2 Fraction rationnelles

9.3 Digressions et exercices supplémentaires

Chapitre 10

Algèbre linéaire de base

10.1 Sous-espaces et applications linéaires

Exercice 10.1.1. Soient F, G des sous-espaces de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 10.1.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.
2. En déduire que pour $a \in \mathbb{K} \setminus 0, \lambda$, $u - a\mathrm{Id} \in \mathrm{Gl}(E)$.

10.2 Dimension finie

Chapitre 11

Matrices

Chapitre 12

Uniforme continuité, intégration

Exercice 12.0.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Chapitre 13

Séries

Exercice 13.0.1. Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ après avoir vérifié son existence.

Exercice 13.0.2. Soit (a_n) une suite réelle. Montrer que $\sum |a_n|$ converge si et seulement si pour toute suite réelle (b_n) de limite nulle, $\sum a_n b_n$ converge.

Chapitre 14

Groupe symétrique et déterminants

Notations.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, le groupe symétrique d'ordre n sera noté $\mathfrak{S}_n$.

14.1 Groupe symétrique

Exercice 14.1.1. Soit E un ensemble fini. Soit $f : E \to E$ une involution (c'est-à-dire $f \circ f = \mathrm{Id}_E$). On pose $P = \{x \in E \mid f(x) = x\}$. Montrer que $\mathrm{Card}(P) \equiv \mathrm{Card}(E)$ [2].

14.2 Déterminants

Chapitre 15

Espaces vectoriels préhilbertiens

Chapitre 16

Dénombrement

Chapitre 17

Probabilités

Deuxième partie

Exercices de MP

Chapitre 18

Rappels et compléments d'analyse

Exercice 18.0.1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit :

$$\limsup u_n = \lim_{n \to +\infty} \sup\{u_k \mid k \geq n\}$$

1. Justifier que $\limsup u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Calculer $\limsup(-1)^n$ et $\limsup \frac{(-1)^n}{n}$.
3. On suppose que $\limsup u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que c'est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 18.0.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) \leq n(\ln(n) + 1)$.

Exercice 18.0.3.

La réciproque du lemme de Cesàro est-elle vraie ?

La réciproque est-elle vraie pour une suite monotone ?

Supposons que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

18.1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

On replace cet exercice classique ici :

Exercice 18.1.1. Soit $G \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que ou bien G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$, ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

De ce résultat utile découlent quelques applications :

Exercice 18.1.2. Soit $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 18.1.3. Que dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes ?

Exercice 18.1.4. Caractériser les sous-groupes de $(\mathbb{U}, \times)$.

18.2 Séries numériques

Exercice 18.2.1. Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{p=1}^{n} p^p$.

Exercice 18.2.2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Le résultat subsiste-t-il si (u_n) n'est plus supposée décroissante ?

Exercice 18.2.3. Donner un développement asymptotique à l'ordre 4 de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Chapitre 19

Intégrales généralisées

Exercice 19.0.1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.0.2. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.0.3. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 19.0.4. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.0.5. Montrer l'équivalent

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,\mathrm{d}x \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$$

Exercice 19.0.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n converge.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire une expression pour I_n.

Exercice 19.0.7. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2+t)\,\mathrm{d}t$.
Indication : écrire $\cos(t^2+t) = (2t+1)\cos(t^2+t)\frac{1}{2t+1}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 19.0.8. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 19.0.9. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.0.10. Soit $x > 0$. On pose $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente.

2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 19.0.11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \frac{t-\lfloor x \rfloor}{t^2} \end{array}$$

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et convergente.
2. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\ln(j+1) - \ln(j) - \frac{1}{j+1} \right)$$

3. Montrer que (u_n) converge vers $1 - \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19.0.12. Soit (a_n) décroissante de limite nulle. On pose pour $x > 0$, $N(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq x\}$. Montrer que N est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Chapitre 20

Suites et séries de fonctions

20.1 Suites de fonctions

Exercice 20.1.1. Étudier la convergence simple, uniforme et localement uniforme de la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Exercice 20.1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)^{\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}} \end{array}$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^x}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 20.1.3. Étudier la convergence (simple, uniforme ou localement uniforme) sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Exercice 20.1.4. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ lipschitziennes de même rapport $M > 0$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers f. Montrer que la convergence est uniforme.

20.2 Séries de fonctions

Exercice 20.2.1. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $]1,+\infty[$.
2. Donner les limites en $+\infty$ et 1^+ de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice 20.2.2. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire l'expression de f sur $]-1,1[$.

Exercice 20.2.3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Exercice 20.2.4. 1. Montrer que pour $x \in [0,1[$, $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Exercice 20.2.5 (Décomposition en Série de Fonctions de la Valeur Absolue - Horriblement Difficile et si peu Intéressant)**.** Soit f la fonction 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = |x|$$

Exercice 20.2.6 (Série de Primitives)**.** Soit $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On définit f_n par récurrence par $f_{n+1}(x) = \int\limits_a^x f_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$. Etudier et évaluer la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Exercice 20.2.7. 1. Soient $n \geq 1$, $f_0, \ldots, f_{n-1}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles forment une famille libre si et seulement si il y a n réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que la matrice $f_i(a_j)$ soit inversible.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'une suite de F converge simplement si et seulement si elle converge uniformément.

Chapitre 21

Intégrales à paramètre

Exercice 21.0.1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[0,1]$, strictement croissante et telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)^n \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 21.0.2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Exercice 21.0.3. Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I est bien définie sur $[0, +\infty]$.
2. Montrer que I est dérivable sur $[0, +\infty]$.
3. En déduire I.

Exercice 21.0.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21.0.5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21.0.6 (D'Alembert-Gauss avec des intégrales à paramètres)**.** On admet que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, alors alors on dispose de $\rho, \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec ρ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $f = \rho e^{i\theta}$.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$ 2π-périodique. On pose

$$I(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour $r \geq 0$, on pose $P_r : t \mapsto P(re^{it})$.
   (a) On suppose que P ne s'annule pas. Soit $J : r \to I(P_r)$.

i. Montrer que J est constante.

ii. Soit $n = \deg P$. Étudier $z \mapsto \frac{zP'(z)}{P(z)}$ quand $|z|$ tend vers l'infini puis établir une contradiction. Que vient-on de démontrer ?

(b) Montrer que pour $r \geq 0$, $I(P_r)$ est le nombre de racines de P comptées avec leur multiplicité dont le module est strictement inférieur à r.

3. Montrer la supposition énoncée au début.

Exercice 21.0.7. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$, puis montrer que l'expression obtenue fonctionne aussi en $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $F(x)$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21.0.8 (Astuce de Feynman)**.** On veut calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour ce faire, on considère :

$$I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que I est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que f est continue en 0. Conclure.

Chapitre 22

Structures algébriques

22.1 Groupes

Notations.

- On considérera des groupes d'élément neutre e.
- Quand la loi de composition interne d'un groupe n'est pas précisée, on adoptera la notation multiplicative : $x * y$ sera noté xy et l'inverse de x est x^{-1}.
- L'ordre d'un élément $x \in G$ sera noté $o(x)$.

L'exercice classique par excellence sur les groupes est le théorème de Lagrange sur les groupes finis. Ce théorème n'est pas au programme de CPGE mais son utilisation dans d'autres exercices sur les groupes est commune.

Exercice 22.1.1 (Théorème de Lagrange)**.** Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $\mathrm{Card}(H) \mid \mathrm{Card}(G)$.

Le corollaire du théorème de Lagrange est un résultat au programme de MP. La preuve n'est cependant exigible que dans le cas abélien. Le théorème de Lagrange permet de donner une démonstration générale de son corollaire.

Exercice 22.1.2 (Corollaire du théorème de Lagrange)**.** Soit G un groupe fini. Soit $x \in G$. Montrer que $x^{\mathrm{Card}(G)} = e$.

Ces relations de divisibilité dans les groupes finis les lient à des notions d'arithmétique.

Exercice 22.1.3. Soit G un groupe fini d'ordre p premier. Que dire de la structure de G ?

Exercice 22.1.4. Soit G un groupe. On pose $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$ le centre de G. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 22.1.5. Soit G un groupe abélien.

1. Soient $a, b \in G$ d'ordres finis. Montrer que $o(ab)$ est d'ordre fini et que si $o(a) \wedge o(b) = 1$, alors $o(ab) = o(a)o(b)$.
2. Le résultat subsiste-t-il si G n'est plus abélien ?

Exercice 22.1.6. Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G choisis au hasard (uniformément) commutent est inférieure à 5/8.

Exercice 22.1.7 (Dévissage en produit direct interne)**.**

1. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On suppose $H \cap K = 1$, $G = HK$ et enfin $hk = kh$ pour tout $(h, k) \in H \times K$. Montrer que $G \simeq H \times K$.
2. Soit G un groupe et $f : G \to \mathbb{Z}$ un morphisme surjectif. Montrer $G \simeq \ker f \times \mathbb{Z}$.
3. Classer les groupes d'ordre 6.

22.2 Anneaux et corps

22.2.1 Nombres et entiers algébriques

On dit qu'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(a) = 0$.

Exercice 22.2.1.

1. Montrer que $\sqrt{5}$ et i sont algébriques.
2. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $\{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(z) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer que $3^{1/2} + 2^{1/3}$ est algébrique. Essayer de généraliser la méthode pour montrer que si x, y sont algébriques alors $x + y$ l'est aussi.
4. Montrer que si x est algébrique non nul, $\frac{1}{x}$ l'est aussi.

22.3 Digressions et exercices supplémentaires

En prépa, on a tendance à définir un corps comme étant commutatif. Certains auteurs ne demandent pas cette hypothèse d'un corps. Cependant, un corps fini est toujours commutatif (Théorème de Wedderburn).

Chapitre 23

Topologie

23.1 Topologie des espaces vectoriels normés

23.2 Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

23.3 Séries vectorielles

23.4 Digressions et exercices supplémentaires

Chapitre 24

Compléments d'algèbre linéaire

Chapitre 25

Réduction des endomorphismes

Exercice 25.0.1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Chapitre 26

Probabilités de spé

26.1 Dénombrabilité

26.2 Variables aléatoires discrètes

Chapitre 27

Fonctions vectorielles

Exercice 27.0.1 (Une Démonstration du Théorème de Cayley-Hamilton)**.** On se place sur $\mathbb{C}$
On assimilera ici $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}I_n$ où $n \in \mathbb{N}$, et on note $A^{-1} = \frac{1}{A}$ même pour une matrice.
On prend $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ suffisamment grand, $\det(z - A) \neq 0$
2. En déduire que pour r assez grand, l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(re^{i\theta})^{k+1}}{re^{i\theta} - A} \frac{d\theta}{2\pi}$$
a un sens.
3. Montrer que si A est suffisamment 'petite' :
$$\frac{1}{1-A} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale de la question 2.
5. Calculer $\chi_A(A)$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Chapitre 28

Séries entières

28.1 Séries Génératrices en Dénombrement

Exercice 28.1.1 (Des Partitions d'un Ensemble fini)**.** On note b_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Calculer $b_0, \ldots, b_3$
2. Trouver une relation de récurrence entre les b_n
3. Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$
4. Donner une expression de b_n

Chapitre 29

Espaces euclidiens

29.1 Isométries et matrices orthogonales

29.2 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Exercice 29.2.1 (Racine carrée d'un endomorphisme positif)**.** Soit u un endomorphisme autoadjoint positif de E.

1. Montrer qu'il existe v endomorphisme autoadjoint positif de E tel que $v^2 = u$ et que si u est défini positif, v l'est aussi.
2. Montrer que $v \in \mathbb{R}[u]$.

Exercice 29.2.2 (Décomposition polaire)**.** Soit $u \in \mathrm{Gl}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(o, s) \in \mathcal{O}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $u = os$.

29.3 Digressions et exercices supplémentaires

Exercice 29.3.1 (Théorème de Müntz : Difficile, voir Mines Maths II 2009 MP)**.** On se place sur l'espace vectoriel E des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ muni de $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 fg$. On notera $x^\alpha : x \mapsto x^\alpha$. On se donne une suite de réels strictement positifs α_n. On dit que u est adhérent aux x^{α_i} si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_i} \right\| \leq \varepsilon$$

On dit que les x^{α_i} sont denses dans E si tout $u \in E$ est adhérent aux x^{α_i}.

1. On note $E_n = \mathrm{Vect}\,(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$. Montrer que u est adhérent aux x^{α_i} si et seulement si la distance de u à E_n

   $$d(u, E_n) = \inf_{e_n \in E_n} \|u - e_n\|$$

   tend vers 0 quand $n \to \infty$.

2. Pour un réel $\beta > 0$, montrer que
$$d(x^\beta, E_n) = \frac{1}{\sqrt{2\beta+1}} \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\alpha_i - \beta}{\alpha_i + \beta + 1} \right|$$
On pourra étudier la matrice de Gram des x^{α_i} i.e. la matrice des $\langle x^{\alpha_i}, x^{\alpha_j} \rangle$
3. En déduire que les x^{α_i} sont denses dans E si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\alpha_i}$ diverge. On se souviendra du théorème de Weierstrass [1].

1. Ceci donne une preuve de la divergence de la série harmonique !

Chapitre 30

Équations différentielles linéaires

Chapitre 31

Calcul différentiel

Troisième partie

Astuces

Quatrième partie

Solutions : MPSI

Cinquième partie

Solutions : MP

Sixième partie

Annexe : trucs utiles en général

Annexe A

Liste non exhaustive de symboles utilisés en mathématiques

A.1 Alphabet grec

Caractère	Nom	Utilisation
Aα	Alpha	α : variable (souvent coefficient) A : pas utilisé
Bβ	Bêta	78
$\Gamma\gamma$	Gamma	778
$\Delta\delta$	Delta	18744
Eε	Epsilon	788
Zζ	Zêta	
Hη	Êta	
$\Theta\theta$	Thêta	
Iι	Iota	
Kκ	Kappa	
$\Lambda\lambda$	Lambda	
Mμ	Mu	
Nν	Nu	
$\Xi\xi$	Xi	
Oo	Omicron	
$\Pi\pi$	Pi	
Pρ	Rho	
$\Sigma\sigma$	Sigma	
Tτ	Tau	
Yυ	Upsilon	
$\Phi\varphi$	Phi	
Xχ	Chi	
$\Psi\psi$	Psi	
$\Omega\omega$	Omega	

A.2 Algèbre

A.3 Analyse

Annexe B

Formulaire

B.1 Inégalités à connaître

B.2 Formules célèbres