Домашняя работа.

§ 22

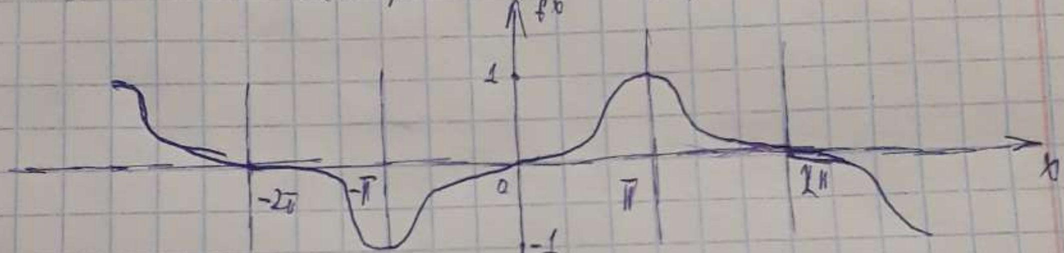
1.6 $\sin^5 x = \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac14\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$

$= \frac38 \sin x - \frac12 \sin x\cos 2x + \frac18 \cos 4x \sin x = \left| \sin\varphi\cos\theta = \frac12\left(\sin(\varphi+\theta)+\sin(\varphi-\theta)\right)\right| =$

$= \frac38\sin x - \frac14(\sin 3x - \sin x) + \frac1{16}(\sin 5x - \sin 3x) = \frac58 \sin x - \frac5{16}\sin 3x + \frac1{16}\sin 5x$

$f(x) = \frac58\sin x - \frac{3}{16}\sin 3x + \frac1{16}\sin 5x$ — непрерывна на $[-\pi;\pi]$ как композиция непрерывных

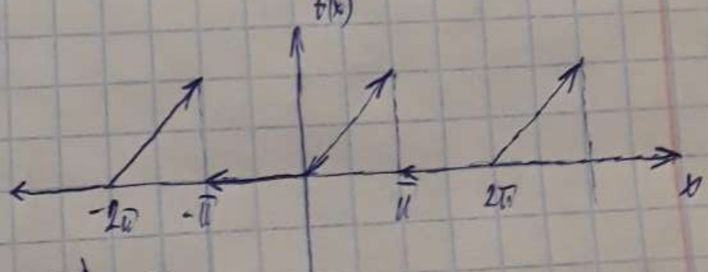
$f(-\pi) = f(\pi) = 0 \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна.



2 $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos kx + b_k \sin kx)$

$T_n(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos kx + b_k\sin kx)$, т.е. ряд Фурье такого полинома совпадает с самой функцией.

$T_n(x)$ непрерывен на $[-\pi;\pi]$ и
$T_n(-\pi) = T_n(\pi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$
$\Rightarrow$ р. Фурье $T_n(x)$ равномерно сходится.



10 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

$a_0 = \frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac\pi4$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi k}\int_0^\pi x\,d(\sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(x\sin kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin kx\,dx\right) = -\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi \sin kx\,d(kx) = \frac{1}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi k}\int_0^\pi x\,d(\cos kx) =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}(x\cos kx)\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi k}\cancel{\int_0^\pi \cos kx\,dx}^{\to 0} = -\frac{(-1)^k}{k}$$

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left((-1)^k - 1\right)\frac{\cos kx}{\pi k^2} + \frac{-(-1)^k}{k}\sin kx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-(-1)^k\right)\frac{\cos kx}{\pi k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\sin kx\right]$$

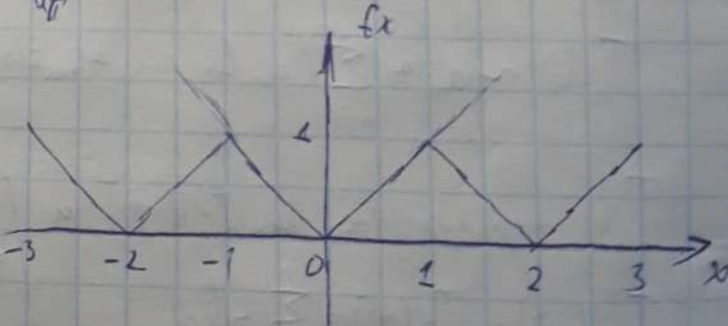
$$x_0 = -\pi \quad \Phi(x_0) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(-1)^k\right)\frac{(-1)^k}{\pi k^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\left(-2 - \frac{2}{9} - \frac{2}{25} \ldots\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right)}_{\frac{\pi^2}{8}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Или же $F(x_0) = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$

Из рисунка видно, что $\underbrace{f(-\pi)}_{0} \neq \underbrace{f(\pi)}_{\pi}$ $\Rightarrow$ ряд Φ не сходится.

(14) $f(x) = |x|$ на $[-1;1]$



периодическая с периодом 2π

f-четная $\Rightarrow b_k = 0$

$$a_0 = 1\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\underbrace{f(x)}_{\text{четн}}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)}_{\text{четн}}dx = 2\int_0^1 x\cos(\pi k x)\,dx = \frac{2}{\pi k}\left(x\sin(\pi k x)\right)\Big|_0^1 -$$

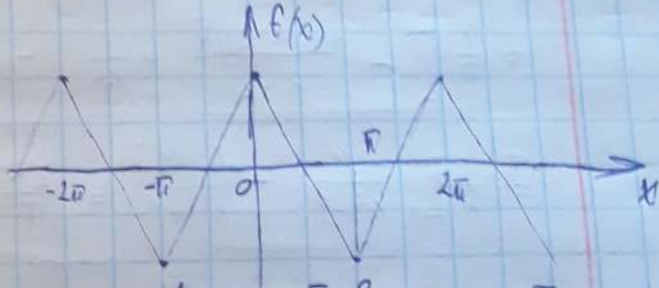
$$- \frac{2}{\pi k}\int_0^1 \sin(\pi k x)\,dx = \frac{2}{(\pi k)^2}\cos(\pi k x)\Big|_0^1 = \frac{2}{(\pi k)^2}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2} \cos(\pi(2n-1)x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

$f(x)$ непр на $[-1;1]$ и $f(-1) = f(1) = 1$ $\Rightarrow$ р.Ф. $f(x)$ равномерно сходится.

(30) $f(x) = \pi - 2x \qquad 0 < x \le \pi$

1) чётным образом 2) нечётным образом на $[-\pi; 0]$



① $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\,dx = 0$$

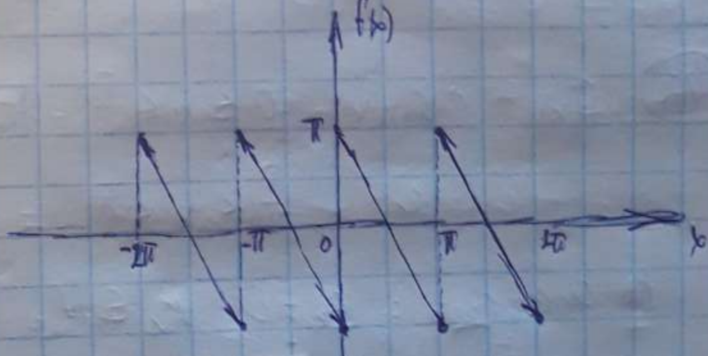
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos(kx)\,dx =$$

$$= \cancel{2\int_0^{\pi} \cos(kx)\,dx}^{\,0} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = -\frac{4}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} \frac{8}{\pi k^2} & \text{если } k \not\vdots\, 2 \\ 0 & \text{если } k \vdots 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$ ← равномерно сходится по Вейерштрассу, т.к.

$$\left|\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\right| \le \frac{1}{(2k-1)^2}$$ ← сходится

② нечётным образом



$a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\,dx =$$

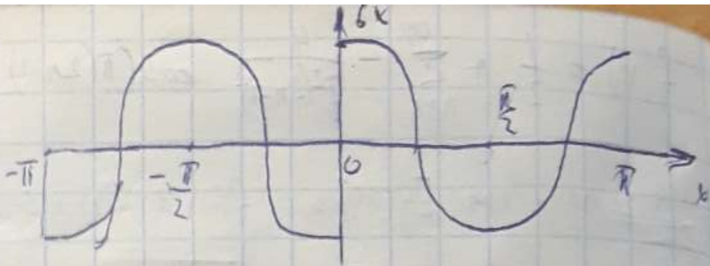
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin kx\,dx -$$

$$- \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = -\frac{2}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi k}\left(x\cos(kx)\right)\Big|_0^{\pi} - \cancel{\frac{4}{\pi k}\int \cos kx\,dx}^{\,0} =$$

$$= -\frac{2}{k}\left((-1)^k - 1\right) + \frac{4}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k} = \frac{2}{k}\left((-1)^k + 1\right) = \frac{4}{n}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k}\sin(kx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin(2nx)$$ РФ не сходится

(41) $f(x) = \cos 2x \quad 0 \le x \le \pi$



$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin kx \, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(k+2)x + \sin(k-2)x\right) dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(k+2)x}{k+2}\Big|_0^{\pi} + \frac{-\cos(k-2)x}{k-2}\Big|_0^{\pi} \right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+2)\pi}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{\cos(k-2)\pi}{k-2} + \frac{1}{k-2} \right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2k}{k^2-4} - \frac{(-1)^k}{k^2-4} \right] = \frac{2k}{\pi}\,\frac{1-(-1)^k}{k^2-4}$ $\to 0$ если $k = 2n$

$\to \frac{4k}{\pi(k^2-4)}$ если $k = 2n-1$

$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n+1)}{\pi(2n+3)(2n-1)} \sin((2n+1)x)$

$\Phi(x)$ разрывна $\Rightarrow$ нет равномерной сходимости

(43) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ на $[0; \pi]$

$б_{прод} = \begin{cases} \sin x & [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 0, & [-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

по синусам: $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(2kx)\, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos((1-2k)x) - \cos((1+2k)x)\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(1-2k)x\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(1+2k)x\, dx =$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(1-2k)\frac{\pi}{2}}{1-2k} - \frac{\sin(1+2k)\frac{\pi}{2}}{1+2k} \right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{1-2k} - \frac{(-1)^k}{1+2k} \right] = \frac{2\cdot(-1)^k}{\pi}\left[\frac{1}{1-2k} - \frac{1}{1+2k} \right] =$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{прод} \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)\,dx = k > 1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_{2m-1} = 0$$

$$b_{2m} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2m-1}(-1)^{m+1} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2m-1}(-1)^{m} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2m+1}(-1)^{m} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2m+1}(-1)^{m+1} =$$

$$\frac{1}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi(2m+1)} = \frac{4m(-1)^{m+1}}{\pi(4m^2-1)}$$

при $k=1$

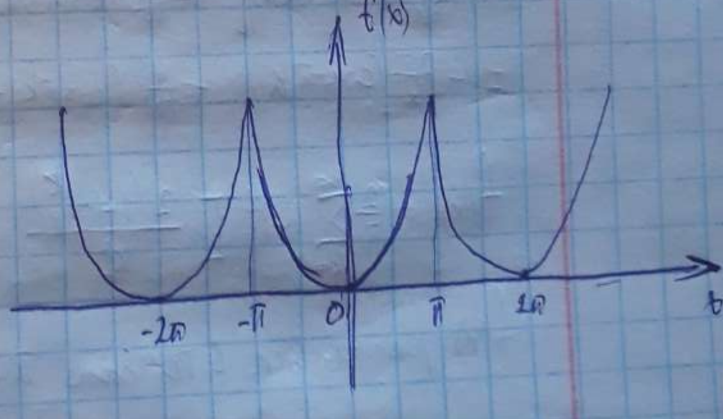
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m(-1)^{m+1}}{(4m^2-1)}\sin 2mx = S(x)$$

$S(x)$ сх. неравномерно к $f_{прод}$ на $[-\pi;\pi]$, т.к. $f_{прод}$ разрывна

45) $f(x) = x^2$

на $[-\pi;\pi]$ по cos



$f(x) = x^2$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$b_k = 0$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin kx}{k}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\,dx = \frac{2}{\pi k}\left(x^2 \sin kx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi k^2}(x\cos kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx$$

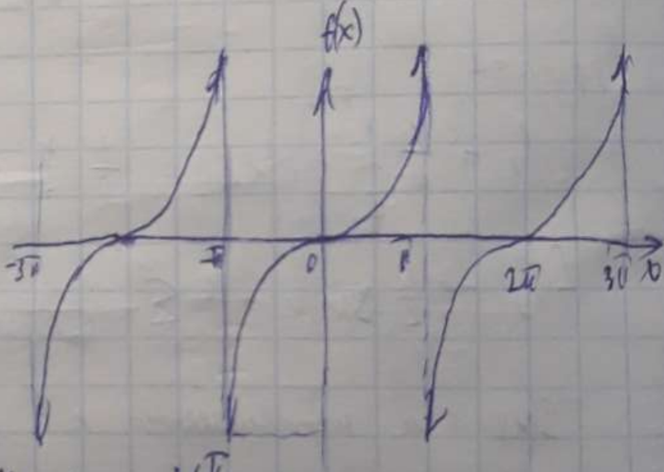
$$= \frac{2}{\pi k}\left(\underbrace{\pi^2 \sin \pi k}_{0} - 0\right) + \frac{4}{\pi k^2}\left(\pi \cos \pi k - 0\right) - \frac{4}{\pi k^3}(0-0) = \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + 4\sum \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \pi^2 \\ & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = S_1 \\ & f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0 \\ & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} = S_2 \end{aligned}}$$

$f(x)$ непр на $[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ $\Rightarrow$ РФ функции f равномерно сходится

2) продолжаем нечетно



$a_k = 0$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int f(x)\sin kx\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int x^2 \sin kx\,dx =$

$= -\frac{2}{\pi k}\left(x^2\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$

$= -\frac{2}{\pi k}\left(x^2\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi k^2}\left(x\sin kx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi k^3}\left(\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} =$

$= -\frac{2\pi}{k}\left(\cos \pi k\right) + \frac{4}{\pi k^3}\left(\cos \pi k - 1\right) = -\frac{2\pi}{k}(-1)^k + \frac{4}{\pi k^3}\left((-1)^k - 1\right)$ $\nearrow -\frac{2\pi}{k}$ $\searrow \frac{2\pi}{k} - \frac{8}{\pi k^3}$

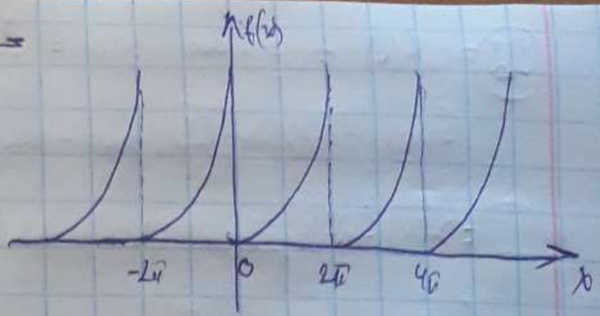
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{2(1-(-1)^k)}{k^3} - \frac{\pi^2}{k}\right]\cdot \sin kx$$

$f(x)$ разрывна в точках $\pi + 2\pi k \Rightarrow$ РФ расходится

3)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$



$$= \cancel{\frac{1}{\pi k}\left(x^2 \sin kx\right)\Big|_0^{2\pi}} - \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\, 2x\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(x\cos(kx)\right)\Big|_0^{2\pi} - \cancel{\frac{2}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(2\pi\cos 2\pi k - 0\cdot 1\right) = \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi k}\left(x^2\cos kx\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi k}\int_0^{2\pi} x\cos kx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left(4\pi^2\cdot 1 - 0\cdot 1\right) + \cancel{\frac{2}{\pi k^2}\left(x\sin kx\right)\Big|_0^{2\pi}} - \frac{2}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} \sin kx\, dx =$$

$$= -\frac{4\pi}{k} - \cancel{\frac{2}{\pi k^3}\left(\cos kx\right)\Big|_0^{2\pi}} = -\frac{4\pi}{k}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^2} - \frac{\pi\cdot\sin kx}{k}\right)$$

$\frac{\cos kx}{k^2}$ сходится $\frac{\sin kx}{k}$ расходится $\Rightarrow$ РФ $f(x)$ расходится

(23) $f(x) = \cos ax$, $a \notin \mathbb{Z}$ $x \in [-\pi; \pi]$ Получить р. Ф

$f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x)$ диф-ма $\Rightarrow$ f непр. на $[-\pi; \pi]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$, если ее продолжить

f - четная $\Rightarrow b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\,dx = \frac{2}{a\pi}\sin a\pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+a)x + \cos(k-a)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+a)\pi}{k+a} + \frac{\sin(k-a)\pi}{k-a}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^k \sin a\pi}{k+a} - \frac{(-1)^k \sin a\pi}{k-a}\right] =$$

$$= (-1)^k \frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{-2a}{k^2-a^2} = (-1)^k \sin a\pi \cdot \left(\frac{-2a\pi}{(\pi k)^2-(a\pi)^2}\right)$$

$$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{2a\pi \sin(a\pi)}{(a\pi)^2-(\pi k)^2}\cos(kx)$$

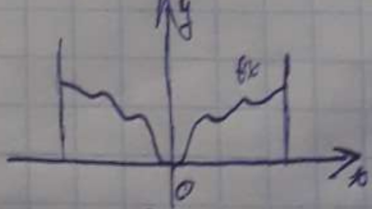
$$\operatorname{ctg}(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{2a\pi}{(a\pi)^2-(\pi k)^2}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^\infty \frac{2x}{x^2-(\pi k)^2}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

(65) Если $f(x)$ абс. интегр. на $[0;\pi]$; $f(\pi - x) = f(x)$, то

1) $a_{2n-1} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ при разложении f в РФ по косинусам

$b_k = 0$



$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx =$$

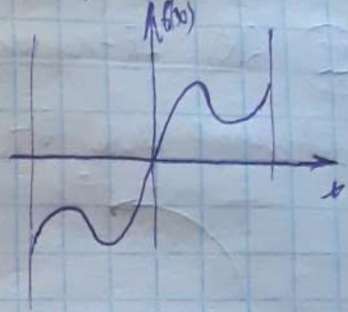
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos((2n-1)x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos((2n-1)x)\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = \pi - x \\ dt = -dx \\ \pi - t = \pi \Rightarrow t = 0 \\ \pi - t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t)\cos((2n-1)(\pi - t))(-dt) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2n-1)x\,dx}_{A} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\underbrace{\cos(2\pi n - \pi - 2nt + t)}_{-\cos(2n-1)t}\,dt =$$

$= A - A = 0$ $\uparrow$

2) $b_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ при разложении f в РФ по синусам



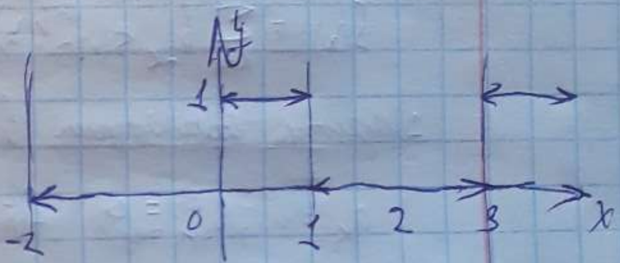
$a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \left|\begin{matrix} t = \pi - x \\ x = \pi - t \\ \pi - t = \pi \Rightarrow t = 0 \\ \pi - t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n\pi - 2nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(\overset{2n}{kx})\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2nt) = 0 \uparrow$$

(59)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 3 \end{cases} \qquad f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$



$l = \frac{3}{2}$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{\pi n x i}{l}}\,dx = \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\, e^{-\frac{2\pi n}{3} x i}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 1\cdot e^{-\frac{2\pi}{3} n x i}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2\pi n i}\, e^{-\frac{2\pi}{3} n i x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n i}\left(e^{-\frac{2\pi n}{3} i} - 1\right) = \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{3} i}\right)\cdot\frac{1}{2\pi n i}$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n}{}' \frac{\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3} n}\right)}{n}\, e^{inx\frac{2\pi}{3}}$$

суммирование по всем n кроме 0.

(68) $f(x)$ раскладывается по косинусам (1) причем по нечетным (2)

(1) $\rightarrow f(x)$ четно продолжаем и $b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

② => $f(\pi - x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x) \sim \sum\limits_{n}^{\infty} a_n \cos[(2n-1)x]$

(72) $f(x)$ 2π-периодическая ф-ия

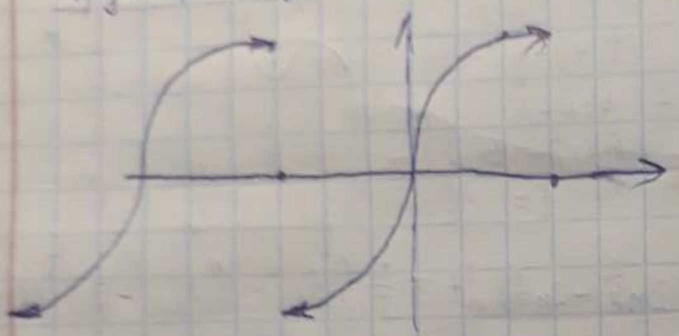
1) центр сим. в т. $(0,0)$ и $(\pm\frac{\pi}{2}; 0)$

Ф-ия нечетна

$a_k = 0$

$f(\pi - x) = -f(x)$

$b_{2k-1} = 0$



$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \sin(2kx)$$

2) центр симметрии в $(0;0)$ и оси симметрии в $x = \pm\frac{\pi}{2}$

$a_k = 0$, $b_{2k} = 0$ $f(\pi - x) = f(x)$

(110) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ сх. равн $\Rightarrow S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Д-ть что $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(x)\,dx = a_0$

$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(kx)\,dx = a_k$

$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(kx)\,dx = \beta_k$

Док-во

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(a_k \cos kx + b_k \sin kx)}_{0}\right] = a_0$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin kx\,dx}_{0} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{a_m \cos mx \sin kx}_{\text{орт. штука}} + b_m \sin mx \sin kx)\right] =$$

орт. штука
=> интеграл от нее 0

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b_k\,dx = b_k$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{\frac{a_0}{2}\cos mx}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos mx + \cancel{b_k \sin kx \cos mx}\Big] =$$

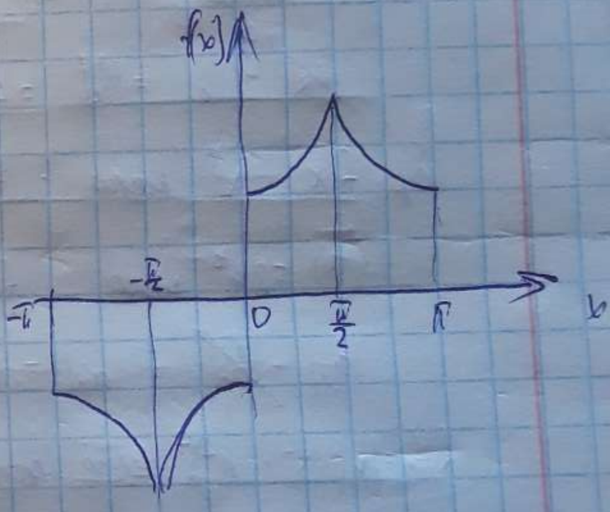
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_m\,dx = a_m$$

(11) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1}$, если проинтегрировать, то получим гармонический ряд, к. расходится (ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ является, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ является, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ сходится

(T1) $f(x) = e^{x}$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$



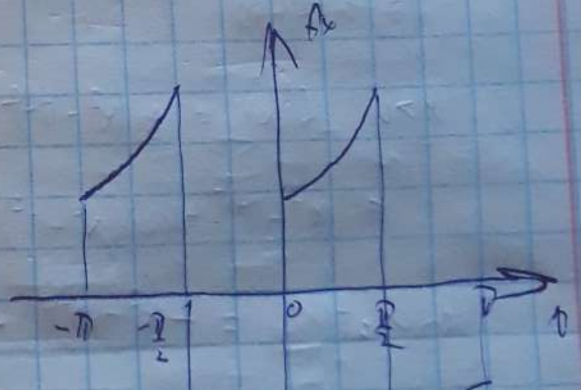
а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$

$a_k = 0$ – ф-ия нечетная

$b_k = 0$ – оси симметрии в $\pm\frac{\pi}{2}$

$f(x)$ разрывная ф-ия => равномерной сх-сти нет

б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$

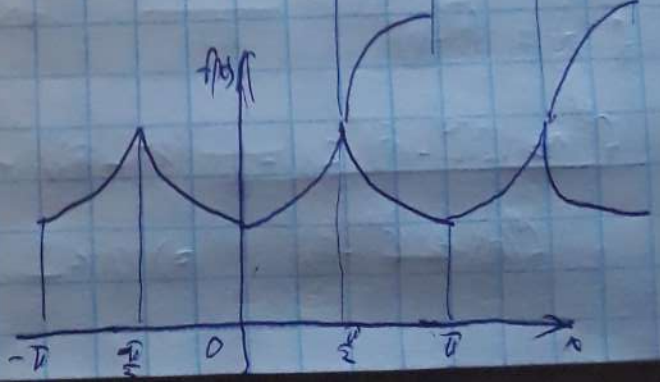


$a_k = 0$ ф-ия нечетная

$b_{2k-1} = 0$ центры симметрии $\pm\frac{\pi}{2}$

$f(x)$ разрывна => равномерной сх-сти нет

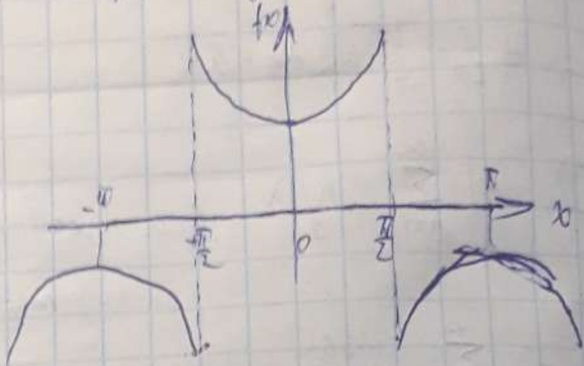
в) $\{\cos 2kx\}_{k=1}^{\infty}$



$b_k = 0$ – ф-ия четная

$a_{2k-1} = 0$ $\pm\frac{\pi}{2}$ оси

$S(x)$ – кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$ => РФ $f(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$



в) $\{\cos((2k-1)x)\}_{k=1}^{\infty}$

$b_k = 0$ – четная ф-ция

$a_{2k} = 0$ т. $\frac{\pi}{2}$ – центр. сим.

$S(x)$ разрывна => нет равномерной сх-сти.

(115)

(Т2) а) $f(x) = x^9$ непр. $f'(x)$ и $f''(x)$ непр

$f(\pi) \neq f(-\pi)$ => $q < 0$

$\cancel{|a_k|} + |b_k| = |b_k| = o\left(\frac{1}{k}\right)$

б) $f(x) = x^8$ непр ; $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^8$

$f'(x) = 8x^7$ непр $f'(\pi) \neq f'(-\pi)$ => $q < 1$

$|a_k| + \cancel{|b_k|} = |a_k| = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

г) $f(x) = |x|(x^2 - \pi^2)^2$ непр. как комп. непр.

$f(\pi) = f(-\pi)$

$x > 0$: $f'(x) = x(x^2-\pi^2)^2 = (x^2-\pi^2)^2 + x\, 2(x^2-\pi^2)\cdot 2x =$

$= (x^2-\pi^2)^2 + 4x^2(x^2-\pi^2)$ $f'(x)$ кусочно непрерывна

$x < 0$: $f'(x) = -(x^2-\pi^2)^2 - 4x^2(x^2-\pi^2)$

$f'(\pi) = f'(-\pi)$

$f'' = 2(x^2-\pi^2)\, 2x + 8x(x^2-\pi^2) + 4x^2 \cdot 2x$ $f''(x)$ кусочно непрерывна

$f''(\pi) \neq f''(-\pi)$ => $q < 2$ => $|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^3}\right)$

2) $(\pi^2-x^2)\sin^2 x = \frac{\pi^2-x^2}{2} - \frac{\pi^2-x^2}{2}\cos 2x$ непр

$f(\pi) = f(-\pi)$

$f'(x) = -x - x\cos 2x + (\pi^2 - x^2)\sin 2x$ непр

$f'(\pi) \neq f'(-\pi)$

$f''(x)$ непр $\Rightarrow q = 1 \Rightarrow |a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

115) $f(x) = \pi x - x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & x \geq 0 \\ \pi x + x^2, & x < 0 \end{cases}$$ непр на $[-\pi; \pi]$

$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x \geq 0 \\ \pi + 2x, & x < 0 \end{cases}$$ непр на $-\pi; \pi$

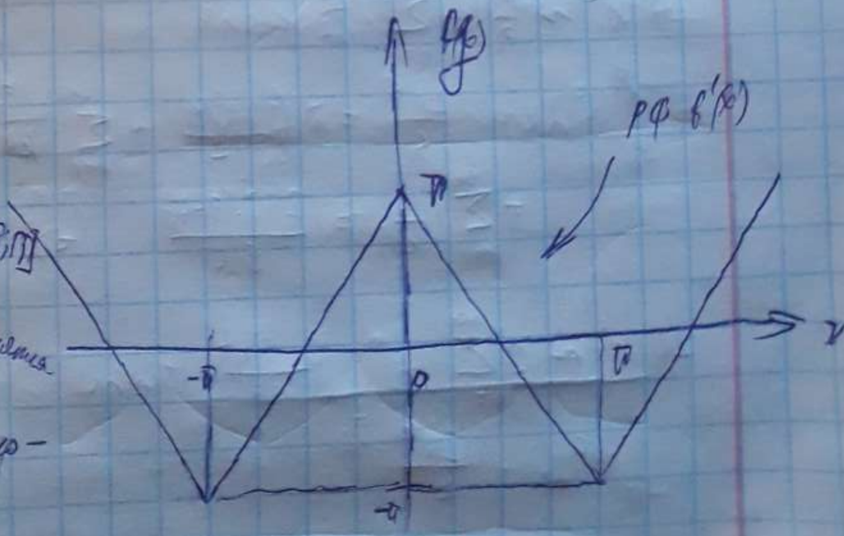
$f(-\pi) = f(\pi) = 0$

По теореме о равномерной сх-сти ряд Фурье $f(x)$ сходится равномерно

По теореме о почленном диф-ии РФ: из того, что f кусочно-гладкая и $f(-\pi) = f(\pi)$ получаем, что РФ $f'(x)$ получается из РФ ф-ии f путем почленного диф-рия

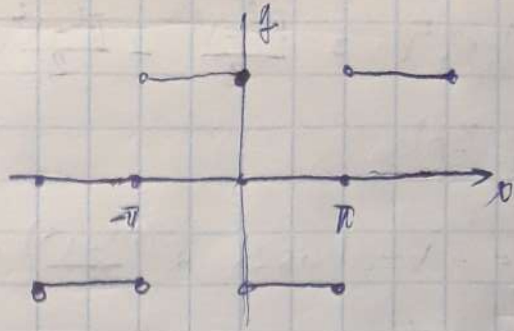
По теореме о почленном диф-ии

Кроме. РФ $f'(x)$ кусочно-гладкая на $[-\pi, \pi]$ и $f'(\pi) = f'(-\pi)$ $\Rightarrow$ что РФ $f''(x)$ получается из РФ f' путем почленного диф-ференцирования



$$f''(x) = \begin{cases} -2 & x \geq 0 \\ 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

разрывна



(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} = f(x) \quad 0 < x < 2\pi \quad (1)$

Т.к. $f(x)$ кусочно-непр на $[0, \pi]$, то

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{A_0}{2} + \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{\sin kx}{k} - b_k \frac{\cos kx}{k}\right),$$ где a_k, b_k - к-ты Ф ф-ии f

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)dx \qquad \varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}$$

В (1): $a_0, a_k = 0 \quad b_k = \frac{1}{k}$

$$\int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} \qquad \varphi(x) = \int_0^x \frac{\pi - t}{2}dt = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{\pi \cdot 4\pi^2}{4} - \frac{8\pi^3}{12} = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$

Вычислим с помощью ряда Парсеваля суммы рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

1) $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos kx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} = \pi\left(\frac{4\pi^4/9}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}\right)$$

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4} = \frac{2\pi^5\cdot(9-5)}{9\cdot 5} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

2) $x^3 \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3}\sin nx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx = \frac{2\pi^7}{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n(6-\pi^2 n^2)}{n^3}\right]^2\cdot\pi = \frac{2\pi^7}{7}$$

$$\frac{2\pi^6}{7} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(6-(\pi n)^2)^2}{n^6} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{36}{n^6}-\frac{12\pi^2}{n^4}+\frac{\pi^4}{n^2}\right) =$$

$$= 36\cdot 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} + 4\cdot 12\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + 4\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2\pi^6}{7} = 144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} + 4\cdot 12\pi^2\cdot\frac{\pi^4}{90} + \frac{4\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum\frac{1}{n^6} = \pi^6\left(\frac{2}{7\cdot 4\cdot 36} + \frac{4\cdot 12}{90\cdot 36\cdot 4} - \frac{4}{36\cdot 4\cdot 6}\right) = \frac{\pi^6}{945}$$

§16

(48) 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \qquad \sigma = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{1}{S_0}+\overset{0}{S_1}+\overset{1}{S_2}+\dots+S_n}{n+1}$

Δ подпосл σ_n: $\sigma_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{2}$; $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \sigma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$

$S_0 = \frac{1}{2}$; $S_n = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta \quad n\in\mathbb{Z} \mapsto$

$$\sigma_n = \frac{S_0+\dots+S_n}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\cos\theta)+\dots+(\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots\cos k\theta)}{n+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1)+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos k\theta}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}\left[(n+1)+2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta - 2\sum_{k=1}^{n}k\cos k\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[(n+1)+2(n+1)\cdot\frac{2\sin\theta/2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta}{2\sin\theta/2} - 2\sum_{k=1}^{n}(\sin k\theta)'_\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\cancel{(n+1)}+2(n+1)\cdot\frac{\sin(\theta/2+\theta n)-\cancel{\sin\theta/2}}{2\sin\theta/2} - 2\sum_{k=1}^{n}(\sin k\theta)'\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[(n+1)\cdot\frac{\sin(n\theta+\theta/2)}{\sin\theta/2} - 2\,\frac{\cos\theta/2-\cos(\theta+\frac{1}{2}k)}{2\sin\theta/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n\theta+\theta/2)}{\sin\theta/2} - \frac{-\sin\theta/2\,(\frac{1}{2})+\sin(n\theta+\theta/2)(n+\frac{1}{2})}{\sin\theta/2} + \frac{\cos\theta/2-\cos(n\theta+\theta/2)\cos\theta/2}{2\sin^2\theta/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n\theta+\theta/2)}{2\sin\theta/2} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sin^2\theta/2} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\cos\theta/2\cos(n\theta+\theta/2)}{2\sin^2\theta/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left[\frac{\sin\theta/2 \, \sin(n\theta + \theta/2) + 1 - \cos\theta/2 \cos(n\theta + \theta/2)}{2\sin^2 \theta/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1 - \cos(n+1)\theta}{2\sin^2 \theta/2} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2((n\theta + \theta)/2)}{\sin^2 \theta/2} = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^2$$

Т.к. $\exists \lim \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \right)^2 = 0$, то ряд $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$ $\alpha |\theta| < \pi$

суммируется по Чезаро.

(Т3)

① и ②

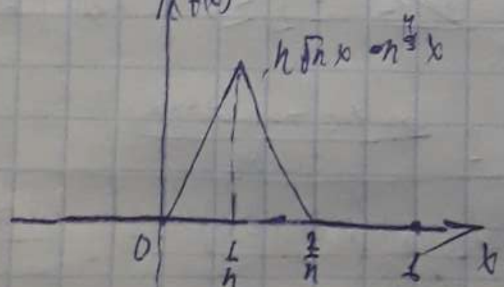
$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|\,dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\;\sqrt{\int_a^b 1\,dx} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} = \|f\|_{L_2} \sqrt{b-a}$$

$\Rightarrow \|f\|_{L_1} \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_{L_2}$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot \|f_n - f\|_{L_1} \le \|f_n - f\|_{L_2} \le \|f_n - f\|_C \sqrt{b-a}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

По теореме о замыкании посл-стей

③ Р-м посл-ть $f_n(x) = \begin{cases} x n^{\frac{4}{3}} & x \in [0; \frac{1}{n}] \\ -n^{4/3}(\frac{2}{n} + x) & x \in (\frac{1}{n}; \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}; 1] \end{cases}$ $n \ge 2$

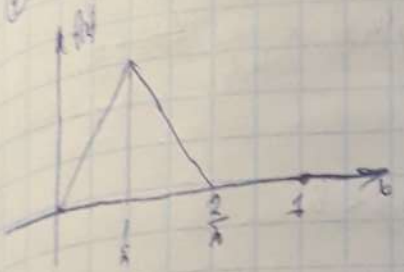


$$\|f_n - f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)dx} \ge \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} n^{\frac{8}{3}} x^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^{4/3}}{3n^3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Но $\|f_n - f\|_C = \max\limits_{x\in[0;1]} |f_n - f| = \sqrt[3]{n^2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

④ Д последовательность: $f_n(x) = \begin{cases} x n^{3/2} & x \in [0; \frac{1}{n}] \\ -n^{3/2}(\frac{2}{n} + x) & x \in (\frac{1}{n}; \frac{2}{n}) \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}; 1] \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$



$$\|f_n - f\|_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

но $\|f_n - f\|_{L_2} = \|f_n - 0\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)dx} \geq \sqrt{\int_0^{1/n} f_n^2(x)dx} =$

$= \sqrt{\int_0^{1/n} n^3 x^2 dx} = \sqrt{\frac{n x^3}{3}\Big|_0^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \not\to 0$

⑤ Д посл-сть: $f_n(x) = x^n$ на $[0; 1]$ сход. поточечно к $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0;1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

но посл-сть непр. ф-ий не может сходиться равномерно к разрывной ф-ии

⑥ $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{} f$ при $n \to \infty$ если $\forall x \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N\ |f_n - f| \leq \varepsilon$

опред. поточечной сходимости

$f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$ если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ \forall x \in [a, b]\ |f_n - f_x| \leq \varepsilon$

опред. равномерной сх-сти

В опр-нии поточечной сх-сти для ~~[illegible]~~ каждого x свое N

в опр равномерн. сх-сти N для всех одинаково

$\Rightarrow$ поточечная — ч.сл. равномерной.

⑦-⑨

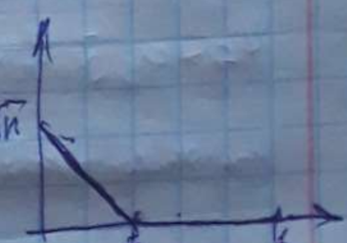
$f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x_0 \neq 0$ $f_n \to 0$

но $f_n \to f$ $\|f_n - f\|_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x)dx| = 1 \not\to 0$

$\|f_n - f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)dx} \geq \sqrt{\int_0^{1/n} n^4 x^4 dx} =$

$= \sqrt{n^4 \cdot \frac{1}{3n^3}} = \sqrt{\frac{n}{3}} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

⑧ + ⑮



$\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$

$\|f_n - f\|_{L_2} \to 0$ $n\to\infty$ но в т.0 $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

нет конечн

§18

(92) Пространство $C[a,b]$ с метрикой $\rho(x,y) = \max\limits_{[a,b]} |x(t) - y(t)|$, $x, y \in C[a,b]$

Пусть посл-ть ф-ий фундаментальна, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ \forall m \geq N \mapsto \rho(x_n; x_m) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ \forall m \geq N \mapsto \max |x_n(t) - y_n(t)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall m \geq N \mapsto |x_n(t) - y_n(t)| < \varepsilon \Rightarrow$ По крит. Коши

функц. посл. $x_n(t)$ сх-ся равномерно на $[a,b]$ к $x_n(t)$. Поэтому $x(t) \in C[a,b]$

(94) Контрпример: $|x| = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, $|a_k| \leq \frac{c}{k^2}$

$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \cos kx$ - непр. диф. ф-ия

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_n \cos kx\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{c}{k^2} < c\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) < \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ посл. фунд. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0\ \forall t \in [a,b]\ |F_{n+p}(t) - F_n(x)| < \varepsilon$

$n_0 = [c/\varepsilon] + 1$

Т.к. ~~y=x~~ $y = |x|$ не явл. непр. диф-мой ф-ией, а фунд. посл. являются, то

подпр-во не явл-ся полным, т.к. сх-ся ~~к непр~~ не к непериод. ф-иям.

(74) $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пр-ве:

$C[a,b]$

По 2й Th Вейерштрасса:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x) = c_0 + \dots + c_n x^n: \max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$

При этом $\max |f(x) - P_n(x)| \overset{def}{=} \|f(x) - P_n(x)\|_{C[a,b]} \Rightarrow \{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$

В-

§19

(116)

Пр

~~В пр-ве~~ Т.к. $0 < \frac{1}{\sqrt{b-a}}\int_a^b |f|dx \le \sqrt{\int_a^b f^2 dx} \le \max_{x\in[a,b]} |f| \sqrt{b-a}$, то

$\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $CL_1[a,b]$ и в $CL_2[a,b]$

§ 19

(116) 1) а) для произвольной ф-ии f на $[-\pi;\pi]$: $f(-\pi)=f(\pi)$ выполн. усл.

Th Вейерштрасса: $\forall \varepsilon_f > 0 \ \exists T_m : \forall x \in R \to |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon_f$, т.е.

$\max |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon_f$, где $\|f(x) - T_m(x)\|_C$ $\max_{[-\pi;\pi]} |f(x) - T_m(x)|$

т.е. система полна

б) $f = \sin x$

$\max |\sin x \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx| > |\sin 0 - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos 0| = \sum_{k=0}^{n} a_k$

2) продолжим ф-ии из $C([0;\frac{\pi}{2}])$ симм-но отн-о $\frac{\pi}{2}$ на $[\frac{\pi}{2};\pi]$, а после

продолжим нечетным образом на $[-\pi;0]$

Воспользуемся док-вом Th Вейерштрасса: вписанная ломанная облад. св-ми

$f(\pi - x) = f(x)$ и $f(-x) = f(x)$

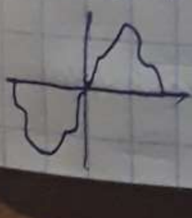
к-т Фурье у этой ломаной $a_n = 0 \ \forall n \in N$, $b_{2k} = 0 \ \forall k \in Z \Rightarrow$

функция из этого множества приближена триг. многочленом от

$\sin x, \sin 3x \dots$ $\Rightarrow$ система $\{\sin x, \sin 3x \dots\}$ полна в $C([0;\frac{\pi}{2}])$

(115) $\{x, x^3 \dots x^{2k+1} \dots\}$

а) $C([2;3])$ Можем непр. продолжить f до нечетной



ф-ии ~~до~~ для к. РФ ск-ся и рав-но, а в разложении

будет только $\sin kx$, к. можно сколь угодно ~~продолжать~~ точно приближать многочленом степени ст. x $\Rightarrow$ полна

б) $C([0;3])$

ф-ии, у к. $f(0)\neq 0$ нельзя продолжить нечетн. образом — образуется разрыв. При продолж. четным образом в разложении появ. $\cos kx$ и четные степени $t \Rightarrow$ не полна.

(7б) $\{\sin(2kx)\}_{k=1}^{\infty}$ в пр-ве:

а) $C[0;\frac{\pi}{2}]$

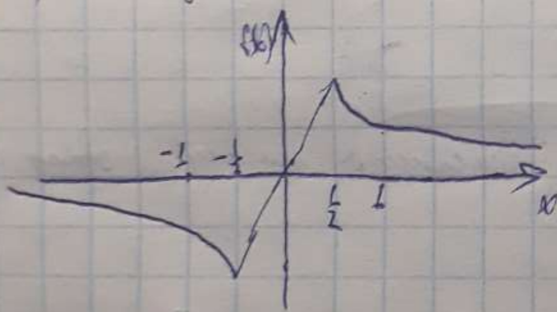
$\exists$ система полна. $\forall f\in C[0;\frac{\pi}{2}]$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists T_n: \|f-T_n\|_C<\varepsilon$

$\exists$ $f(x)=1$, где $x\in[-1;1]$

$$\|f-T_n\|_{C[0;\pi]}=\sup|f(x)-T_n(x)|\geq|\underset{=1}{f(0)}-\underbrace{T_n(0)}_{=0}|=1$$

сост. из $\sin$ $(\sin k0=0)$

б) Доопределим $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$



$g(x)\in C[\frac{1}{2};1]$ нечет. ф-ция

РФ g состоит только из $\sin \Rightarrow$

По Th Вейерштрасса част. сумма ряда Фейера состоит из $\sin$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists T_n=\sigma_n[g]: \|g-T_N\|_{C[-\pi;\pi]}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists T_n=\sigma_n[g]$ $\|f-T_N\|_{C[\frac{1}{2};1]}<\varepsilon$ $\Rightarrow$ система полна

в) Т.к. $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$, то можем продолжить ф-ию нечетн. образом $\Rightarrow$ но Th В част. сумма ряда Фейера состоит из $\sin \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists T_n=\sigma_n[g]: \|g-T_n\|_{C[-\pi;\pi]}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists T_n=\sigma_n[g]: \|f-T_n\|_{C[0;\frac{\pi}{2}]}<\varepsilon$ $\Rightarrow$ система полна