УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2022 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория поля**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 5

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов

Экзамен – 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. В. Фомичев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
21 мая 2022 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.
Э. Т. Ахмедов

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. **Принцип относительности.** Однородность пространства и однородность времени, изотропия пространства, инерциальные системы отсчёта. Ньютонова механика и принцип относительности Галилея. Потенциальность сил и дальнодействие. Постоянство скорости света. Несовместимость конечности скорости распространения взаимодействий с принципом относительности Галилея. Принцип относительности Эйнштейна. Изменение представлений о свойствах пространства и времени в результате опытов со светом. Преобразования Лоренца, их вывод и следствия из них. Относительность одновременности и промежутков времени. Мысленные опыты по измерению длин, промежутков времени и синхронизации часов. Сокращение длин, замедление времени и собственное время. Релятивистское сложение скоростей и преобразование направлений. Эффект прожектора. Аберрация света.

2. **Четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского.** Декартовы координаты. Мировая точка (событие) и мировая линия. Интервалы между событиями как мера расстояния в пространстве Минковского. Пространственноподобные, времениподобные и нулевые интервалы. Световой конус. Принцип причинности. Инвариантность интервала и геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Аффинные преобразования. Понятие 4-вектора. Скалярное произведение. Метрика четырехмерного пространства. Контра- и ковариантное представление. 4-градиент и 4-дивергенция. 4-векторы скорости и ускорения. Ковариантность физических законов относительно преобразования Лоренца как переформулировка принципа относительности. Векторы и тензоры в трехмерном пространстве.

3. **Описание движения свободной релятивистской точечной частицы.** Понятие точечной элементарной частицы, её 4-координата и мировая линия. Ковариантная формулировка принципа наименьшего действия в пространстве Минковского, функция Лагранжа свободной частицы. Принцип соответствия. Энергия, импульс и гамильтониан свободной релятивистской частицы. 4-вектор импульса. Частицы с нулевой массой. Ультрарелятивистское движение. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы как следствие однородности пространства-времени. Лабораторная система и система центра масс. Применение закона сохра-

нения 4-импульса для описания упругих столкновений частиц. Эффективная масса системы. Неупругие столкновения и распады с образованием новых частиц. Дефект массы для составных систем. Порог реакции. Волновой 4-вектор. Эффект Доплера.

4. **Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем.** Понятия заряда точечной элементарной частицы и электромагнитного поля. 4-вектор потенциал электромагнитного поля. Действие и лагранжиан для точечной частицы во внешнем векторном поле. Энергия, обобщенный и кинематический импульсы. Уравнение Лагранжа и сила Лоренца. Функция Гамильтона. Градиентная (калибровочная) инвариантность. Ковариантный вывод уравнения движения заряженной частицы в четырехмерном виде. 4-вектор силы.

5. **Тензор электромагнитного поля.** Понятие тензора. 4-тензоры и их свойства. Абсолютно антисимметричный и метрический тензоры. Инвариантность 4-объема. Электрическое и магнитное поля́ как компоненты антисимметричного 4-тензора электромагнитного поля. Преобразование Лоренца для потенциалов (φ, $\mathbf{A}$) и напряженностей ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) из одной системы отсчета в другую. Инварианты поля и их следствия. Дуальный тензор поля.

6. **Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.** Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях. Средняя сила и средний момент силы для системы частиц во внешних слабонеоднородных электрическом и магнитном полях. Электрический и магнитный дипольные моменты. Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле. Гиромагнитное отношение. Прецессия магнитного момента во внешнем поле и теорема Лармора. Адиабатический инвариант и движение заряженной частицы в слабопеременном магнитном поле. Движение ведущего центра орбиты и поперечный дрейф заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле. Магнитные зеркала и примеры осуществления их в природе и технике.

7. **Уравнения электромагнитного поля.** Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов и их вывод из первых принципов. Первая пара уравнений Максвелла. Распределенные заряды. Переход от точечных зарядов к распределенной системе зарядов и токов при помощи δ-функции. Плотности заряда и тока системы точечных частиц. Закон сохранения электрического заряда и

уравнение непрерывности. 4-вектор плотности тока. Функционал действия и плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля. *Получение второй пары уравнений Максвелла из вариационного принципа.* Уравнения Максвелла в трехмерной и четырехмерной формах. Единственность решений уравнений Максвелла. Свойства симметрии уравнений Максвелла.

8. **Энергия и импульс электромагнитного поля. Уравнения для потенциалов.** Плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). Баланс энергии системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность импульса поля, тензор плотности потока импульса и тензор напряжений Максвелла. *Баланс импульса системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность силы Лоренца. 4-тензор энергии-импульса.* Калибровочная инвариантность уравнений электродинамики. Уравнения для потенциалов. Вид уравнений для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и в калибровке Лоренца. Оператор Д'Аламбера. Основные уравнения электро- и магнитостатики. Электростатический потенциал точечного заряда.

9. **Электро- и магнитостатика.** Уравнение Пуассона и его решение. Функция Грина уравнения Пуассона. Электрическое поле системы неподвижных зарядов на больших расстояниях. Мультипольное разложение потенциалов. Электрический квадрупольный момент. Энергия электростатического взаимодействия и устранение самодействия точечных частиц. Выражение энергии системы зарядов во внешнем слабонеоднородном электрическом поле через мультипольные моменты. Решение уравнения Пуассона для векторного потенциала стационарной системы токов. Закон Био–Савара. Магнитное поле усредненного по времени стационарного движения зарядов на больших расстояниях.

10. **Свободное поле. Неоднородные волновые уравнения.** Однородные волновые уравнения для потенциалов свободного электромагнитного поля в пустом пространстве и их решения. Плоские монохроматические электромагнитные волны и их поляризация. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации. Усреднение по времени и по поляризации. Решение неоднородных волновых уравнений с помощью функции Грина. Функция Грина в фурье-представлении по времени. Функция Грина волнового уравнения и принцип причинности. Определение запаздывающей функции Грина.

11. **Запаздывающие потенциалы. Излучение в дипольном приближении.** Запаздывающая и опережающая функции Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы. Дипольное приближение, его физический смысл и критерии применимости. Потенциалы поля излучения в дипольном приближении. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в волновой и квазистационарной зонах. Интенсивность излучения в дипольном приближении. Угловое и спектральное распределения дипольного излучения и его поляризация.

12. **Излучение движущихся зарядов вне дипольного приближения.** *Поле в волновой зоне колеблющихся магнитного диполя и электрического квадруполя. Интенсивность излучения магнитного диполя и электрического квадруполя.* Излучение релятивистски-движущихся частиц. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Формула Лармора. Синхротронное излучение и его полная интенсивность. Оценка длины формирования, углового и спектрального распределения синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае.

13. **Реакция излучения и рассеяние электромагнитных волн.** Сила радиационного трения. Затухание, вызываемое излучением. Естественная (классическая) ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях. Постановка задачи о рассеянии. Дифференциальное и полное сечение рассеяния монохроматической волны на заряде. Рассеяние света на свободном электроне. Томсоновское сечение рассеяния и классический радиус электрона. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн на связанном электроне как на осцилляторе с затуханием. Резонансное рассеяние.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — Мсква : Физматлит, 2014, 2016.

2. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — Москва : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.

Дополнительная

1. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.

2. *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. — Москва : Наука, 1985.

3. *Алексеев А.И.* Сборник задач по классической электродинамике. — Москва : Наука, 1977.

4. *Белоусов Ю.М.,Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2009.

5. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. — Москва : МФТИ, 2000.

ФОРМУЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

I. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Тензорные обозначения и векторный анализ

Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.
$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга.
$e_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный трехмерный тензор третьего ранга:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \qquad e_{123} = e_{xyz} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho} = \det\begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta\,, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}\,, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6\,.$$

Усреднение по единичному радиус-вектору $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$:

$$\overline{n_\alpha} = 0; \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0;$$

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\,.$$

Векторный оператор дифференцирования:

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\right\} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$\Delta = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\,, \quad \operatorname{grad}\varphi \equiv \boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}\,,$$

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \equiv a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z} = a_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a}\,, \quad \operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}\,,$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}] + [\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}] + (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,,$$

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = [\operatorname{grad} f\times\mathbf{a}] + f\operatorname{rot}\mathbf{a}\,,\ \operatorname{div} f\mathbf{a} = (\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{a}) + f\operatorname{div}\mathbf{a}\,.$$

Формулы для величин, содержащих радиус-вектор и его модуль $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\boldsymbol{\nabla} r = \mathbf{r}/r \equiv \mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\nabla} f(r) = df/dr\cdot\mathbf{n}; \quad \operatorname{div}\mathbf{r} = 3; \quad \operatorname{rot}\mathbf{r} = 0;$$

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a}; \quad \operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{r}] = 2\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \mathrm{const}).$$

Лапласиан от сферически-симметричной функции:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}.$$

Теоремы Гаусса и Стокса:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a} = \oint\!\!\!\oint_S (\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}); \quad \oint_L (\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}) = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S})\,.$$

Разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{a}\cdot\nabla)^2\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathbf{a}\cdot\nabla)^n\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{a}\cdot\nabla)}\mathbf{F}(\mathbf{r})\,.$$

2. Преобразование Фурье

(разложение по плоским волнам)

$$\mathbf{A}(\mathbf{k},\omega) = \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\, d^3\mathbf{r}\, dt\,,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k},\omega) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\, \frac{d^3\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4}\,.$$

3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала по полиномам Лежандра

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)\,,\ (R>r)\,.$$

Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{l+1/2}(z)\,.$$

Ортогональность полиномов Лежандра:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{l\,l'} \frac{2}{(2l+1)}\,, \quad P_l(1) = 1\,.$$

$$P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,.$$

4. Формула Сохотского. Дельта-функция

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{1}{x-i\delta} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)\,.$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0)\,, & a<x_0<b\,, \\ 0\,, & x_0<a\,, x_0>b\,; \end{cases}$$

$$\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\frac{dk}{2\pi}\,, \qquad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)\,,$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x - x_n)\,, \quad (f(x_n) = 0)\,.$$

5. **Функции Грина**

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\, G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})\,, \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\,.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)\, G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})\,, \quad G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\,.$$

Волновое уравнение:

$$\Box\, G(\mathbf{r},t) \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) G(\mathbf{r},t) = 4\pi\delta(\mathbf{r})\delta(t)\,,$$

$$G(\mathbf{r},t) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}\,.$$

II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. **Четырехмерные векторы и тензоры**

4-вектор контравариантный $A^i \equiv (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^\alpha)$,
4-вектор ковариантный $A_i \equiv (A^0, -\mathbf{A}) \equiv (A^0, -A^\alpha)$.
Скалярное произведение 4-векторов

$$A^i B_i = A^0 B^0 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = A^0 B^0 - A^\alpha B^\alpha\,.$$

4-радиус-вектор $x^i = (ct, \mathbf{r})$. Интервал $s = \sqrt{x^i x_i}\,$, $s^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2$, $\quad ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$, $\quad ds \equiv c\,d\tau = c\,dt\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Преобразование Лоренца (скорость направлена параллельно оси x, а также $\beta = v/c = \operatorname{th}\psi\,,\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \operatorname{ch}\psi\,,\ \beta\gamma = \operatorname{sh}\psi$):

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \;\; A'^i = \alpha^i{}_k A^k\,,$$

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}, \qquad A^i = \alpha_k{}^i A'^k\,,$$

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \qquad A'_i = \alpha_i{}^k A_k\,,$$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}, \quad A_i = \alpha^k{}_i A'_k\,.$$

Интервал и метрика: $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$,

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{ik}, \quad g_i{}^k \equiv \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha^i{}_k \alpha_l{}^k = \delta^i_l\,, \quad \alpha_i{}^k \alpha^i{}_l = \delta^k_l\,, \quad A_i = g_{ik} A^k\,, \quad A^i = g^{ik} A_k\,.$$

2. Кинематика релятивистской частицы

Действие и лагранжиан для свободной частицы:

$$S = -mc \int_1^2 ds = \int_1^2 L dt \quad \Rightarrow \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,.$$

4-скорость частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,\ \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right), \qquad u^i u_i = 1\,.$$

4-импульс:

$$p^i = mcu^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}\,, \quad p^i p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

m — масса, $\mathcal{E}$ — энергия, $\mathbf{p}$ — импульс частицы. $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p})\,.$$

Эффективная масса системы N частиц соответствует их квадрату энергии в системе ц.м.:

$$s \equiv m^2_{\text{эфф}} = (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{Ni})(p_1^i + p_2^i + \dots + p_N^i)/c^2 \,.$$

Для встречных пучков (2 частицы, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|); \quad s \simeq 4\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \text{(у.-р. предел).}$$

Для фиксированной мишени (частица 2 покоится, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2; \quad s \simeq 2\varepsilon_1 m_2 \quad \text{(у.-р. предел).}$$

3. **Электромагнитное поле и взаимодействие с частицами**

Действие и лагранжиан для частиц в электромагнитном поле:

$$S = -\int_1^2 \left(-mcds - \frac{e}{c}A_i dx^i\right) = \int_1^2 Ldt \,,$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) \,.$$

4-потенциал $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, где φ — скалярный, а $\mathbf{A}$ — векторный потенциалы, электрическое и магнитное поля́

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \,, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \,.$$

Калибровочные преобразование и инвариантность:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \,, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}; \quad A_i' = A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} \,, \quad \text{и} \quad F_{ik}' = F_{ik} \,.$$

Тензор электромагнитного поля:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \,, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \nabla^i; \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \nabla_i \,.$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma \end{pmatrix} \,,$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma \end{pmatrix} .$$

Дуальный тензор:

$$\widetilde{F}_{ik} = \frac{1}{2}e_{iklm}F^{lm} , \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1 .$$

$$\widetilde{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & e_{\alpha\beta\gamma}E_\gamma \end{pmatrix} ,$$

$$\widetilde{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & e_{\alpha\beta\gamma}E_\gamma \end{pmatrix} .$$

$$\widetilde{F}_{ik}(\mathbf{E},\mathbf{H}) \Rightarrow F^{ik}(\mathbf{E} \to -\mathbf{H}, \mathbf{H} \to -\mathbf{E}) .$$

Преобразование Лоренца для полей:

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}]\right),$$

$$H'_\parallel = H_\parallel, \quad \mathbf{H}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{E}]\right).$$

Инварианты электромагнитного поля — 4-скаляры:

$$F^{ik}F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) , \quad F^{ik}\widetilde{F}_{ik} = -4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) .$$

Уравнения движения заряженной частицы:

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k ; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right] , \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) .$$

Радиус орбиты и угловая частота обращения в магнитном поле:

$$R = \frac{cp_\perp}{eH}; \quad \omega = \frac{eHc}{\mathcal{E}} \underbrace{\to}_{v \ll c} \frac{eH}{mc} .$$

Адиабатический инвариант: $p_\perp^2/H = \mathrm{const}$.

4. **Уравнения электромагнитного поля**

Действие для электромагнитного поля, взаимодействующего с частицами:

$$S = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_{ct_{\mathrm{A}}}^{ct_{\mathrm{B}}}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} d^4x F^{ik}F_{ik} - \frac{1}{c^2}\int\limits_{ct_{\mathrm{A}}}^{ct_{\mathrm{B}}}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} d^4x A_i j^{\,i}\,.$$

Уравнения Максвелла:
Первая пара

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,;$$

$$\frac{\partial\widetilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0\,.$$

Вторая пара

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,;$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^{\,i}\,, \quad j^{\,i} = (c\rho, \mathbf{j})\,.$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\mathbf{r},t) = \sum\nolimits_a e_a\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)\right),\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum\nolimits_a e_a\mathbf{v}_a(t)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)\right);$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\,,\ \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,.$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0\,.$$

5. **Постоянное электромагнитное поле**

Электростатические и магнитостатические поля и потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) = \int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,,$$

$$\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \quad \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\frac{\left[\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,.$$

Электрический ($\mathbf{d}$) и магнитный ($\mathfrak{m}$) дипольные моменты системы зарядов:

$$\mathbf{d} = \sum\nolimits_a e_a \mathbf{r}_a\,, \qquad \mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum\nolimits_a e_a[\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]\,.$$

Для нерелятивистской частицы: $\mathfrak{m} = g\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}$ — момент импульса, g — гиромагнитное отношение). В классике $g = e/(2mc)$.

Тензор квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = \sum\nolimits_a e_a \left(3x_{a\,\alpha}x_{a\,\beta} - (\mathbf{r}_a)^2\delta_{\alpha\beta}\right)\,.$$

Мультипольное разложение электрического потенциала и электрического поля

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \ldots\,;$$

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{e}{r^2} + \frac{3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \ldots\,.$$

Поле магнитного диполя

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathfrak{m}} \times \mathbf{r}]}{r^3}\,, \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\bar{\mathfrak{m}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \bar{\mathfrak{m}}}{r^3}\,.$$

Система зарядов во внешнем электрическом поле

$$U_{\mathrm{e}} = e\varphi - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}D_{\alpha\beta}\,,\ \mathbf{F}_{\mathrm{e}} = (\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}\,,\ \mathbf{K}_{\mathrm{e}} = [\mathbf{d}\times\mathbf{E}].$$

Энергия магнитного диполя, сила и момент сил, действующих на него во внешнем магнитном поле:

$$\bar{U}_{\mathrm{m}} = -(\bar{\mathfrak{m}}\cdot\mathbf{H})\,, \quad \bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{m}} = (\bar{\mathfrak{m}}\cdot\nabla)\mathbf{H}\,, \quad \overline{\mathbf{K}}_{\mathrm{m}} = [\bar{\mathfrak{m}}\times\mathbf{H}]\,.$$

Угловая скорость прецессии магнитного диполя: $\boldsymbol{\Omega} = -g\mathbf{H}\,.$

6. Волновые уравнения и их решения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi \equiv \Box\varphi = 4\pi\rho\,, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} \equiv \Box\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0\,, \quad \nabla^i\nabla_i = \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{r}\,', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}\,d^3\mathbf{r}\,'\,;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}'\,.$$

Потенциалы Лиенара—Вихерта:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\,t)=\left.\frac{e\mathbf{v}}{cR\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)}\right|_{t'},\quad \varphi(\mathbf{r},\,t)=\left.\frac{e}{R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)}\right|_{t'}.$$

$$\mathbf{R}(t')=\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\,,\quad \mathbf{n}(t')=\mathbf{R}(t')/R(t')\,,\quad t=t'+R(t')/c\,.$$

Электромагнитное поле релятивистски-движущейся частицы:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\,t)=\frac{e\{c\,[\mathbf{w}\times\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\times[\,[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]\times\mathbf{n}]\,]\}}{c^3R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}+\left.\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)[\mathbf{v}\times\mathbf{n}]}{cR^2\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}\right|_{t'},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\,t)=\frac{e\,[\mathbf{n}\times[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}]\,]}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}+\left.\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}\right|_{t'}.$$

7. Энергия и импульс электромагнитного поля

Плотность W и поток $\mathbf{S}$ энергии электромагнитного поля

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{S}=0\,,\quad W=\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2}{8\pi}\,,\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,.$$

Плотность $\mathbf{g}$ и тензор плотности потока $T_{\alpha\beta}\equiv-\sigma_{\alpha\beta}$ импульса электромагнитного поля ($\sigma_{\alpha\beta}$ – тензор напряжений Максвелла)

$$\frac{\partial \mathrm{g}_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0\,,$$

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]=\frac{\mathbf{S}}{c^2}\,,\quad T_{\alpha\beta}=W\delta_{\alpha\beta}-\frac{E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta}{4\pi}\,.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\mathrm{g}^{ik}F_{lm}F^{lm}-F^{il}F^{k}{}_{l}\right);$$

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c\\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz}\\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz}\\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c\\ \mathbf{S}/c & -\sigma_{\alpha\beta}\end{pmatrix}.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля и частиц

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} F^{ik} j_k = 0\,,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}) = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{g}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]_\alpha = 0\,.$$

8. **Плоская монохроматическая волна**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)}\right\}\,, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\,,$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\,, \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}) = 0\,, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}\,, \quad k = \frac{\omega}{c}\,, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)}\,, \quad \Big((\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{e}^{(2)*}) = 0\,,\ (\mathbf{e}^{(1,2)}\cdot\mathbf{n}) = 0\Big)\,.$$

Линейный базис

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}\,,\ \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}\,,\ (\mathbf{n}\parallel z)\,,$$

циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)}\right)\,,\ \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)}\right)\,.$$

Усреднение по времени

$$\overline{\left(\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}\right\}\cdot\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}\right\}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{B}_0^*)\,.$$

Усреднение по поляризации: $\overline{e_\alpha e_\beta^*} = \left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right)/2\,.$

9. **Излучение и рассеяние электромагнитных волн**

Интенсивность мультипольного излучения

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}\,, \quad I_d = \int \frac{dI_d}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{d}}^2\,;$$

$$I_m = \frac{2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{m}}^2\,; \quad I_q = \frac{1}{180c^5}\,\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}\,.$$

Полная интенсивность излучения релятивистской частицы

$$I = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3}\left\{\mathbf{w}^2 - \frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]^2}{c^2}\right\}.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}\,.$$

Сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\,r_0^2\,; \qquad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\,; \qquad \sigma = \sigma_T\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\,.$$

План семинаров

1. Преобразования Лоренца.
2. Тензорная математика.
3. Релятивистская кинематика.
4. Движение релятивистской частицы в скрещенных полях.
5. Адиабатический инвариант.
6. Движение и дрейф в слабонеоднородном магнитном поле.
7. Прием первого задания.
8. Уравнение Пуассона в электростатике.
9. Квадрупольный момент.
10. Поле гармонически колеблющегося диполя.
11. Излучение при столкновениях.
12. Синхротронное излучение.
13. Рассеяние света осциллятором.
14. Прием второго задания.
15. Прием заданий.

ЗАДАНИЕ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1-е задание

1. Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ относительно системы K, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{V}$ те же самые углы, что и оси системы K. Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K' (а также обратного преобразования). Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K.
   Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости $\mathbf{V}$ векторов: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$, где $\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{V})\mathbf{V}/V^2\,, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{V})\,\mathbf{V}/V^2\,.$

2. * Пусть произведено два последовательных преобразования Лоренца вдоль оси y и вдоль оси x со скоростью v. Используя систему компьютерной символьной алгебры, подобрать скорости v_1 и v_2 последовательных преобразований Лоренца вдоль оси y и вдоль оси x, которые приведут систему в неподвижное положение относительно начального состояния. Как будет выглядеть матрица суперпозиции всех четырех преобразований? Как будет зависеть угол поворота от начальной скорости v?

3. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?

4. Доказать, что трехмерные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантными тензорами. Вычислить свертки
   а) $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\mu\alpha}$;
   б) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}$;
   покоординатно проверить, что $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ эквивалентно $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$.

5. Раскрыть в тензорных обозначениях выражения:
   $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathrm{rot}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathrm{rot}(f\mathbf{A})$, $\mathrm{div}(f\mathbf{A})$, $\mathrm{div}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

Вычислить: а) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$ — постоянные векторы; б) $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div}\mathbf{r}$, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$, $(r \equiv |\mathbf{r}|)$.

6. Для получения γ-квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.

7. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- \,.$$

Зная энергию $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ каждого из пучков e^+ и e^- соответственно, найти энергию и импульсы μ^+ и μ^-. Каков энергетический порог этой реакции? Найти пороговое условие в общем случае $\mathcal{E}^+ \neq \mathcal{E}^-$. Сравнить порог реакции в частном случае $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-$ с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

8. Для нейтрино, образующихся при распаде π-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π-мезона ≈ 140 МэВ, масса μ-мезона ≈ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π-мезона распад $\pi \to \mu + \nu$ происходит изотропно. Построить график углового распределения, соответствующий параметрам задачи.

9. * Плоское зеркало движется со скоростью V в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

10. Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z, может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\} \,.$$

Градиентным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{H}, \mathbf{r}]$.

11. Прямыми вычислениями доказать, что векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int\limits_0^1 \xi\, d\xi\, [\mathbf{r},\, \mathbf{H}(\xi\,\mathbf{r})]$$

соответствует магнитному полю $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (при условии $\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$).

12. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В случае $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$ определить скорость дрейфа Используя графический редактор, построить графики траекторий движения $\mathbf{r}(t)$ частицы в случаях $E = H/2$, $E = H$ и $E = 2H$ при условии, что в начале движения частица покоилась в начале координат.

13. а) Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2. Получить формулу для адиабатического инварианта в случае, когда импульс частицы направлен произвольно.
    б) * Получить уравнения движения для скорости заряженной частицы в линейно меняющемся со временем (при $t > 0$) однородном магнитном поле $H(t) = H_0(1 + \omega_0\eta t)$, где ω_0 – частота вращения частицы при начальном значении поля H_0 и энергии частицы $\mathcal{E}_0$, а η – безразмерный параметр. Численно решив уравнения, построить траекторию движения, исследовать изменение радиуса кривизны траектории и проверить сохранение адиабатического инварианта при разной скорости изменения магнитного поля со временем.

14. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial H_z/\partial z = -h = \text{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси z? Найти радиальные компоненты поля вне оси z. Представить картину силовых линий.

15. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь (компактную систему стационарно движущихся заряженных частиц) в неоднородном постоянном магнитном поле.

16. Найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы в неоднородном постоянном магнитном поле и скорость поперечного дрейфа. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.)

17. * На больших расстояниях магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{3\mathbf{r}(\mathfrak{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\mathfrak{m}\}/r^5$ с магнитным моментом

$$\mathfrak{m} = 8.1 \cdot 10^{25}\text{Гс} \cdot \text{см}^3 \,.$$

а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли. в) Используя результаты предыдущей задачи 13, найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

2-е задание

18. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

19. Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью электронного облака

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где e — заряд электрона и $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром:
а) считая ядро точечным зарядом;
б) считая ядро сферически-симметричным заряженным шаром радиуса $r_0 \sim 10^{-13}$ см с плотностью заряда $\rho_{\text{ядра}}(r)$. Получить ответ для частного случая равномерно заряженного шара.

20. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом Q и полуосями a, b и c относительно

его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, а также энергию взаимодействия этого эллипсоида с диполем $\mathbf{d}$, расположенным в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ на большом расстоянии от эллипсоида (с учетом диполь-квадрупольного члена).

21. Вычислить средние значения произведений компонент единичных векторов:

$$\langle n_\alpha \rangle\,,\ \ \langle n_\alpha n_\beta \rangle\,,\ \ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle\,,\ \ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle\,,\ \ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle\,.$$

Усреднение ведется по единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$.

22. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

23. * Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте L над идеально проводящей металлической плоскостью. Найти угловое распределение интенсивности излучения диполя в зависимости от углов наблюдения (θ и φ) и угла между диполем и нормалью к плоскости α. Исследовать предельные случаи $L \ll \lambda$ и $L \gg \lambda$.

24. Два одноименных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2;\ e_1 e_2 > 0$) испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Отдельно рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$ (квадрупольное излучение).

25. * Электрон рассеивается на атоме водорода, который можно представить как точечный заряд $|e|$ в центре атома, окруженный электронным облаком с плотностью заряда $\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где $e = -|e|$ — заряд электрона и $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти энергию его дипольного излучения за все время пролета как функцию скорости электрона V на бесконечности и прицельного параметра R. Результат представить в графической форме.

26. Два противоположных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2;\ e_1 e_2 < 0$) обращаются один вокруг другого по круговой орбите радиуса R. Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени.

27. * Равномерно заряженный эллипсоид с полуосями a, b и c вращается с угловой скоростью ω вокруг одной из главных осей. Найти интенсивность излучения.

28. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле H за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение.

29. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

30. Релятивистский электрон пролетает со скоростью V через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой ω_0. Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.

31. а) В момент времени $t = 0$ покоящийся заряд начинает движение под действием линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны. Определить изенение скорости заряда со временем и среднюю скорость заряда вдоль направления распространения волны. Реакцию излучения не учитывать.
    б) * Показать, что учет силы радиационного трения приводит к дополнительной средней силе, действующей на частицу в поле электромагнитной волны, и определить с учетом этого закон изменения со временем средней скорости частицы вдоль направления распространения волны. Построить график скорости.

32. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния естественного света с частотой ω (а также линейно поляризованного света) осциллятором с затуханием.

33. * Найти сечение рассеяния линейно поляризованного света на идеально проводящем металлическом шаре радиуса R в пределе $R \ll \lambda$.

1-я контрольная и сдача 1-го задания:
17.10 — 24.10.2022 г.
2-я контрольная и сдача 2-го задания:
05.12 — 12.12.2022 г.