

Волновое уравнение.

Волной называется процесс, обладающий некоторым свойством инвариантности, что некоторая физическая величина представляется профилем перемещающимся с постоянной скоростью:

$$S(x, t) \equiv S(x \pm ut) \quad (1)$$

Волновое уравнение можно получить дважды продифференцировав (1)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{u^2 \partial^2 S}{\partial x^2}$$

В более общем трехмерном случае

$$\nabla^2 S - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Монохроматическая волна - это строго синусоидальная волна с постоянной во времени частотой ω , амплитудой a и начальной фазой φ .

В общем случае уравнение монохроматической волны имеет вид

$$S(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{r})).$$

Несколько важных примеров простейших типов монохроматических волн:

1) Плоская монохроматическая волна.

Описывается функцией координат и времени вида:

$$S(z, t) = a \cos(\omega t - kz - \varphi) \quad (1)$$

a - амплитуда волны,

$\Phi = \omega t - kz - \varphi$ - фаза волны,

$\varphi = \Phi(z=0, t=0)$ - начальная фаза

Из уравнения (1) видно, что в плоскости $z = \text{const}$ колебания происходят по одному и тому же закону с одной и той же частотой, амплитудой и одной и той же начальной фазой φ .

Поверхности, на которых колебания возмущения S происходят синфазно, называются

волновыми поверхностями.

Волна, описываемая уравнением

$$S(\vec{r}, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0)$$

называется **сферической**.

В самом общем виде уравнение **монохроматической волны**

$$S(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{r})) \quad (1).$$

Наряду с волной (1) рассмотрим волновой процесс вида

$$S_1(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \sin(\omega t - \varphi(\vec{r}))$$

Ясно, что линейная комбинация функций вида

$$V(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) - iS_1(\vec{r}, t) \quad (2).$$

также удовлетворяет волновому уравнению.

Используя тождество $\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}$, перепишем (2) в виде

$$V(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) e^{-i[\omega t - \varphi(\vec{r})]}$$

Получаем, что функцию $V(\vec{r}, t)$ можно записать в виде произведения двух функций

$$V(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

где $f(\vec{r}) = a(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})}$ есть **комплексная амплитуда волны**.

Уравнение Гельмгольца.

Комплексная функция $V(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ должна быть решением волнового уравнения

$$\nabla^2 V - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Дифференцируя $V(\vec{r}, t)$ дважды по координатам получаем

$$\nabla^2 V = e^{-i\omega t} \nabla^2 f$$

Дифференцируя дважды по времени

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f(\vec{r}) (-i\omega)^2 e^{-i\omega t}$$

подставляя выражения $\nabla^2 V$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ в волновое уравнение приходим к следующему равенству

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0$$

где $k = \frac{\omega}{v}$ - волновое число

Полученное уравнение для комплексных амплитуд называется **уравнением Гельмгольца**.

Интерференция плоской и сферической волн.

Интерференция плоских волн

Рассмотрим результат интерференции двух плоских волн, волновые векторы \vec{k}_1 и \vec{k}_2 которых составляют углы $\pm\alpha$ с нормалью к плоскости.

$$f_1(x, z) = a_1 e^{i(kx \sin \alpha + kz \cos \alpha)}, \quad f_2(x, z) = a_2 e^{i(-kx \sin \alpha + kz \cos \alpha)}$$

Результирующую картину интенсивности найдем, используя **общее соотношение**

$$I(x) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(2kx \sin \alpha)$$

Картина имеет вид чередующихся светлых и темных полос.

Ширина полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)}$$

Интерференция сферических волн

Две сферические волны излучаются точечными источниками S_1 и S_2 . Комплексные амплитуды волн в точке наблюдения есть

$$f_1 = \frac{a_0}{r_1} e^{ikr_1}, \quad f_2 = \frac{a_0}{r_2} e^{ikr_2}$$

Разность фаз в точке наблюдения $\Delta\varphi = k \cdot \Delta$, где $\Delta = r_2 - r_1$ - разность хода волн, приходящих в точку.

Если рассматривать небольшую область наблюдения, в которой амплитуды двух слагаемых волн примерно одинаковы: $a_0/r_1 \approx a_0$, $a_0/r_2 \approx a_0$, то получаем

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\omega}{c} \Delta\right) \right]$$

Уравнение плоской и сферической волн.

1) Для **плоской**

$$S(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$$

и в комплексной форме комплексная амплитуда для плоской волны имеет вид

$$f(\vec{r}) = a e^{i\varphi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = c e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

2) Для **сферической волны**

$$S(\vec{r}, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0)$$

и в комплексной форме комплексная амплитуда для сферической волны имеет вид

$$f(\vec{r}) = \frac{a}{r} e^{i\varphi_0} e^{ikr} = \frac{a_0}{r} e^{ikr + i\varphi_0}$$

Интерференция монохроматических волн.

Пусть в пространстве распространяются две **монохроматические волны** одинаковой частотой ω :

$$E_1(\vec{r}, t) = a_1(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi_1(\vec{r})), \quad E_2(\vec{r}, t) = a_2(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi_2(\vec{r}))$$

Согласно принципу суперпозиции колебательный процесс в любой точке наблюдения есть сумма гармонических колебаний. Квадрат амплитуды результирующего колебания есть

$$a^2(t) = a_1^2(t) + a_2^2(t) + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi(\vec{r})$$

где $\Delta\varphi(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r}) - \varphi_1(\vec{r})$ - разность фаз слагаемых колебаний в точке наблюдения.

Явление наложения волн, при котором результирующая интенсивность оказывается не равной в общем случае сумме интенсивностей слагаемых волн, называется **интерференцией**.

Интерференция плоской и сферической волн.

Интерференция плоских волн

Рассмотрим результат интерференции двух плоских волн, волновые векторы \vec{k}_1 и \vec{k}_2 которых составляют углы $\pm\alpha$ с нормалью к плоскости.

$$f_1(x, z) = a_1 e^{i(kx \sin \alpha + kz \cos \alpha)}, \quad f_2(x, z) = a_2 e^{i(-kx \sin \alpha + kz \cos \alpha)}$$

Результирующую картину интенсивности найдем, используя **общее соотношение**

$$I(x) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(2kx \sin \alpha)$$

Картина имеет вид чередующихся светлых и темных полос.

Ширина полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)}$$

Интерференция сферических волн

Две сферические волны излучаются точечными источниками S_1 и S_2 . Комплексные амплитуды волн в точке наблюдения есть

$$f_1 = \frac{a_0}{r_1} e^{ikr_1}, \quad f_2 = \frac{a_0}{r_2} e^{ikr_2}$$

Разность фаз в точке наблюдения $\Delta\varphi = k \cdot \Delta$, где $\Delta = r_2 - r_1$ - разность хода волн, приходящих в точку.

Если рассматривать небольшую область наблюдения, в которой амплитуды двух слагаемых волн примерно одинаковы: $a_0/r_1 \approx a_0$, $a_0/r_2 \approx a_0$, то получаем

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\omega}{c} \right) \Delta \right]$$

Расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности или между двумя соседними минимумами называют **шириной интерференционной полосы**.

Видность полос.

Контраст интерференционной картины принято характеризовать величиной **видности** V , определяемой равенством

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Влияние немонохроматичности света на видность интерференционных полос.

С ростом τ -времени относительного запаздывания видность (контраст) постепенно уменьшается. Наконец при $\tau \gtrsim \tau_0$ интерференционные полосы исчезают полностью.

Понятие о временной когерентности.

τ_0 -характерное время жизни атома в возбужденном состоянии.

Приходим к представлению о *квазимонохроматическом процессе* и можем записать колебания в виде

$$E(t) = a(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t))$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ - медленно и хаотически меняющиеся функции. Характерный временной масштаб их изменения τ_0 носит название *времени корреляции* или *времени когерентности*. Принято говорить, что значения $a(t)$ и $a(t + \tau)$ *коррелированы* при $\tau < \tau_0$ и *некоррелированы* при $\tau > \tau_0$. Это же относится и к значениям фазы $\varphi(t)$ и $\varphi(t + \tau)$.

Связь времени когерентности с шириной спектра: соотношение неопределённостей.

Наиболее важной является связь между шириной спектра $\Delta\omega$ (интервалом частот, в котором спектральная интенсивность заметно отличается от нуля) и временем когерентности τ_0 (интервал значений τ , в котором отлична от нуля функция когерентности $\Gamma(\tau)$).

Рассмотрим простой пример. Пусть функция $I(\omega)$ имеет вид

$$I(\omega) = \begin{cases} I_0, & |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2, \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2; \end{cases}$$

Тогда используя соотношение $dI = 2I(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta\right) \right] d\omega$ найдем

$$I = 2I_0 \int_{\omega - \Delta\omega/2}^{\omega + \Delta\omega/2} \left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta\right) \right) d\omega$$

В результате интегрирования получим

$$I = 2I_0 \left\{ 1 + \frac{\sin[(\Delta\omega/2c)\Delta]}{(\Delta\omega/2c)\Delta} \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\Delta\right) \right\}$$

допустимую разность хода Δ_{max} можно оценить из условия $\frac{\Delta\omega}{2c} \Delta_{max} = \pi$, когда выражение для огибающей обращается в нуль:

$$\Delta_{max} \approx \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$$

Сопоставляя выражения для максимально допустимой разности хода, полученные при временном ($\Delta_{max} \approx c\tau_0$) и спектральном подходах, находим связь между шириной спектра $\Delta\omega$ и временем корреляции τ_0

$$\tau_0 \Delta\omega \approx 2\pi$$

это соотношение называют **соотношением неопределенностей**.

Видность интерференционных полос при использовании квазимонохроматических источников света.

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|, \quad I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|$$

$$V \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)|$$

В случае $I_1 = I_2 = I, V = |\gamma(\tau)|$.

Максимальное число наблюдаемых полос.

В случае спектральной линии

$$m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

В общем случае

$$m_{max} = \frac{\Delta_{max}}{\lambda} = \frac{c\tau_0}{\lambda} = \frac{\tau_0}{T_0}$$

Максимально допустимая разность хода в интерференционных опытах.

В случае спектральной линии

$$\Delta_{max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

В общем случае

$$\Delta_{max} = c\tau_0$$

Апертура интерференционной схемы и влияние размеров источника на видность интерференционных полос.

Наиболее важными характеристиками любой интерференционной схемы являются : угол схождения волн β в точке наблюдения и угол Ω между лучами, исходящими из источника, которые каким-либо способом сводятся далее в точку наблюдения. Этот угол Ω называется **апертурой интерференции**.

Как показывает опыт, при увеличении размеров источника видность интерференционной картины постепенно уменьшается и при достаточно больших размерах интерференционные полосы исчезают вовсе.

Понятие о пространственной когерентности.

Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференционные полосы, называются **пространственно когерентными**. Если же интерференционных полос получить нельзя, то источники называются **пространственно некогерентными**.

Радиус пространственной когерентности.

Колебания в любых двух точках, лежащих внутри площадки размера ϱ_0 , называемой радиусом пространственной когерентности, частично когерентны, а в точках, расстояние между которыми больше ϱ_0 - некогерентны.

Связь радиуса пространственной когерентности с угловым размером протяженного источника.

Рассмотрим интерференционную картину, создаваемую протяженным источником, как сумму интерференционных картин от отдельных точек источника. В качестве примера обратимся к опыту Юнга.

Протяженный источник - светящаяся полоска шириной b - и плоскость наблюдения Π находятся на расстояниях z_0 и z от экрана с отверстиями S_1 и S_2 , расстояние между отверстиями d .

Картина интерференции, созданная в плоскости наблюдения центральной точкой источника имеет вид

$$dI_0 = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{l} x \right) \right] d\xi$$

$l = \frac{\lambda}{d} z$ - ширина интерференционной полосы.

Из рисунка также ясно, что элемент $d\xi$, имеющий координату ξ , создает картину интерференции, смещенную на расстояние $x = \xi \frac{z}{z_0}$.

Мы полагаем, что расстояние z и z_0 велики по сравнению с размером источника b и расстоянием между отверстиями d , т.е.

$$dI_0 = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{l} \left(x - \frac{z}{z_0} \xi \right) \right] \right\} d\xi$$

Результирующую картину интерференции найдем суммированием картин по всем точкам источника. Получаем

$$I(x) = 2I_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{l} \left(x - \frac{z}{z_0} \xi \right) \right] \right\} d\xi$$

Произведя интегрирование, найдем

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda z_0/b} \right)}{\pi \frac{d}{\lambda z_0/b}} \cos \left(\frac{2\pi}{l} x \right) \right]$$

находим степень пространственной когерентности, которая определяет видность интерференционной картины:

$$V = |\gamma_{12}| = \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda z_0/b} \right)}{\pi \frac{d}{\lambda z_0/b}} \right|$$

Как следует из уравнения для видности, степень когерентности колебаний в двух точках, разнесенных на d уменьшается от 1 при $d = 0$ до нуля при $d = \rho_0 = \frac{2\pi z}{kb} = \frac{\lambda z}{b}$.

Таким образом, если расстояние между точками S_1 и S_2 меньше $\frac{\lambda z}{b}$, то колебания в этих

точках частично когерентны.

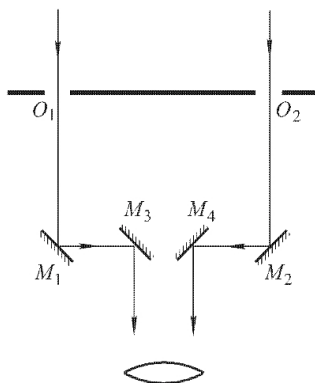
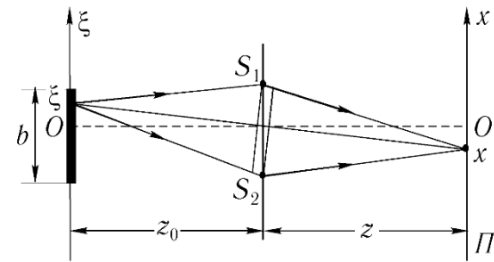
Вводя угловой размер источника $\psi = \frac{b}{z_0}$, можно записать

$$\rho_0 = \frac{\lambda}{\psi}$$

Видность интерференционных полос при использовании протяженных источников света.

$$V = |\gamma_{12}| = \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda z_0/b} \right)}{\pi \frac{d}{\lambda z_0/b}} \right|$$

Лучи от звезды падают на два круглых отверстия O_1 и O_2 и после отражения от зеркал M_1, M_3 и M_2, M_4 попадают в объектив телескопа. Изменяя расстояние между отверстиями O_1 и O_2 с одновременным перемещением зеркал M_1 и M_2 , можно полного исчезновения полос. Зная расстояние между центрами отверстий O_1 и O_2 в этот момент, можно вычислить угловой размер звезды по **формуле**.



Максимально допустимая разность хода в интерференционных опытах.

В случае спектральной линии

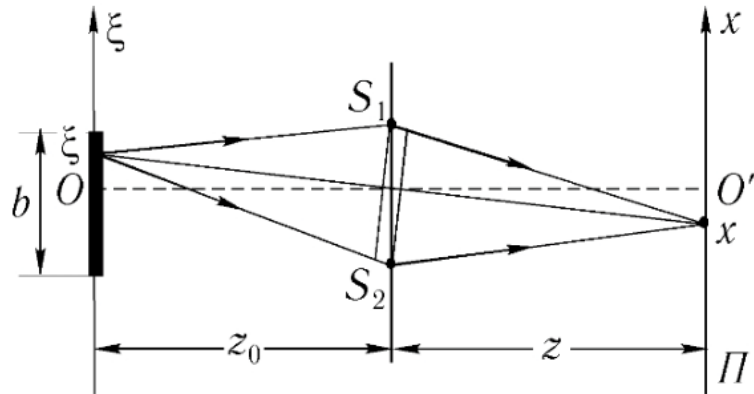
$$\Delta_{max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

В общем случае

$$\Delta_{max} = c\tau_0$$

Связь радиуса пространственной когерентности с угловым размером протяженного источника.

Рассмотрим интерференционную картину, создаваемую протяженным источником, как сумму интерференционных картин от отдельных точек источника. В качестве примера обратимся к опыту Юнга.



Протяженный источник - светящаяся полоска шириной b - и плоскость наблюдения Π находятся на расстояниях z_0 и z от экрана с отверстиями S_1 и S_2 , расстояние между отверстиями d .

Картина интерференции, созданная в плоскости наблюдения центральной точкой источника O имеет вид

$$dI_0 = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{l} x \right) \right] d\xi$$

$l = \frac{\lambda}{d} z$ - ширина интерференционной полосы.

Из рисунка также ясно, что элемент $d\xi$, имеющий координату ξ , создает картину интерференции, смещенную на расстояние $x = \xi \frac{z}{z_0}$.

Мы полагаем, что расстояние z и z_0 велики по сравнению с размером источника b и расстоянием между отверстиями d , т.е.

$$dI_0 = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{l} \left(x - \frac{z}{z_0} \xi \right) \right] \right\} d\xi$$

Результирующую картину интерференции найдем суммированием картин по всем точкам источника. Получаем

$$I(x) = 2I_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{l} \left(x - \frac{z}{z_0} \xi \right) \right] \right\} d\xi$$

Произведя интегрирование, найдем

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda z_0/b} \right)}{\pi \frac{d}{\lambda z_0/b}} \cos \left(\frac{2\pi}{l} x \right) \right]$$

находим степень пространственной когерентности, которая определяет видность интерференционной картины:

$$V = |\gamma_{12}| = \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda z_0/b} \right)}{\pi \frac{d}{\lambda z_0/b}} \right|$$

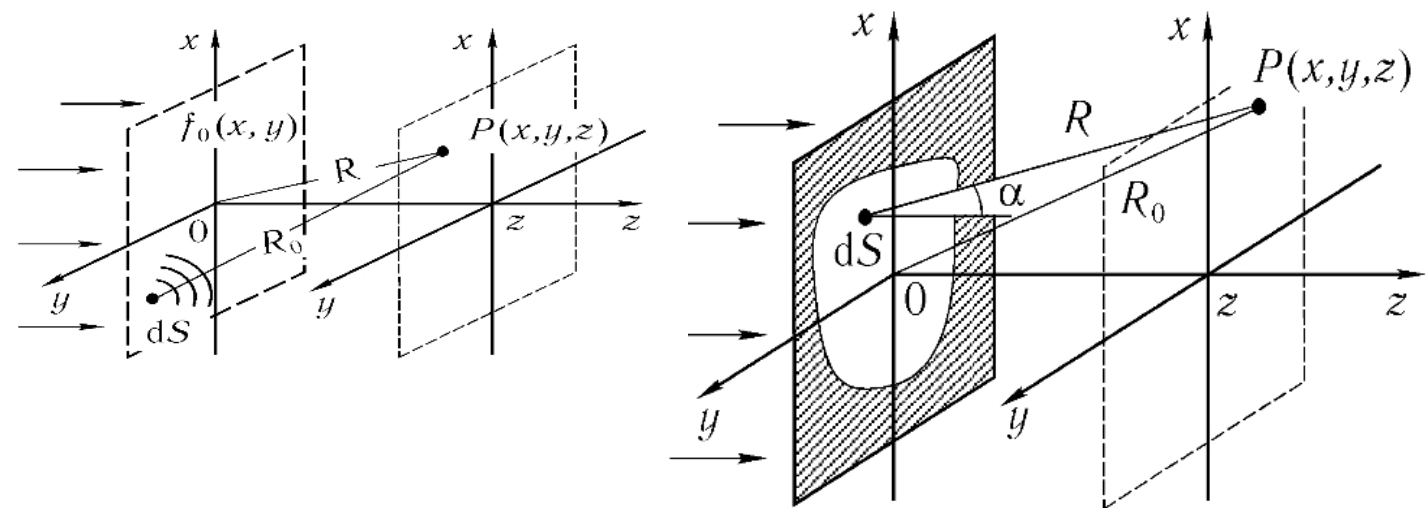
Как следует из уравнения для видности, степень когерентности колебаний в двух точках, разнесенных на d уменьшается от 1 при $d = 0$ до нуля при $d = \rho_0 = \frac{2\pi z}{kb} = \frac{\lambda z}{b}$.

Таким образом, если расстояние между точками S_1 и S_2 меньше $\frac{\lambda z}{b}$, то колебания в этих точках частично когерентны.

Вводя угловой размер источника $\psi = \frac{b}{z_0}$, можно записать

$$\rho_0 = \frac{\lambda}{\psi}$$

Принцип Гюйгенса-Френеля.



Пусть волна света, созданная источниками, расположенными в области $z < 0$, достигла плоскости $z = 0$. Световое поле в этой плоскости нам известно. Пусть его комплексная амплитуда есть $f_0(x, y) = a_0(x, y)e^{i\varphi_0(x, y)}$, где функции $a_0(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ описывают распределение амплитуд и фаз колебаний в плоскости $z = 0$.

Согласно принципу Гюйгенса каждую точку (x, y) плоскости $z = 0$, куда пришла волна, можно рассматривать как источник вторичной волны. То есть можно представить себе, что волна возбуждает колебания некоторого фиктивного источника, который и переизлучает вторичную волну. Френель дополнил принцип Гюйгенса, предложив рассматривать световое колебание в любой точке наблюдения P в области $z > 0$ как результат интерференции этих вторичных волн.

Поясним принцип Гюйгенса-Френеля, рассмотрев задачу - дифракции на непрозрачном экране с отверстием. Маленькая площадка $d\sigma$, расположенная в точке (x, y) на открытой части волнового фронта рассматривается как источник сферической волны:

$$\frac{a(x, y)}{R} e^{i(kR + \varphi(x, y))}$$

где R -расстояние от источника до точки наблюдения P .

Согласно принятым граничным условиям, на открытой части волнового фронта, т.е. в области отверстия, волна не искажается препятствием, причем работают лишь вторичные источники, находящиеся на открытой части, не затененной непрозрачным экраном.

Амплитуда $a(x, y)$ пропорциональна также размеру переизлучающей площадки $d\sigma$.

Предполагается, что амплитуда колебаний в точке наблюдения пропорциональна видимой из этой точки величине площадки $d\sigma$, т.е. пропорциональна $d\sigma \cos \alpha$. Итак, $a(x, y) \sim a_0(x, y) \cos \alpha d\sigma$, а

$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y)$. Таким образом, вклад элемента $d\sigma$ можно записать в виде

$$\frac{a_0(x, y)}{R} e^{i(kR + \varphi_0(x, y))} \cos \alpha d\sigma = f_0(x, y) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha \cdot d\sigma.$$

Полное световое колебание есть результат интерференции всех вторичных волн, т.е. волн, посылаемых всеми площадками $d\sigma$, расположенными в области отверстия:

$$f(P) = K_0 \int_S f_0(x, y) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha \cdot d\sigma$$

Для определения константы K_0 рассмотрим случай, когда препятствие на пути волны отсутствует $r_0 \rightarrow \infty$. Мы получаем

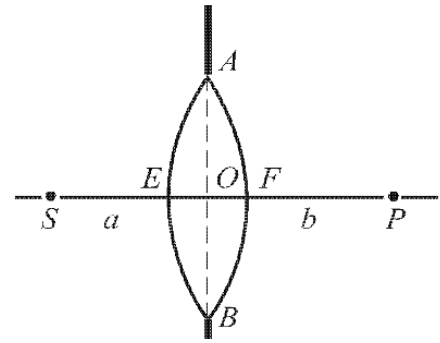
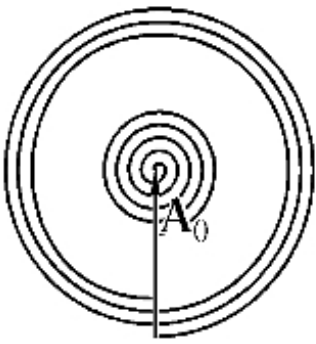
$$\pi \int_0^\infty \exp\left(\frac{ik}{2z}\xi\right) d\xi = \lambda z i$$

Учитывая, что при отсутствии препятствия $f(P) = A_0 e^{ikz}$, находим $A_0 e^{ikz} = K_0 (A_0 e^{ikz}) \lambda z i$, откуда получаем $K_0 = 1 / (i\lambda)$.

Количественная формулировка принципа Гюйгенса - Френеля принимает вид

$$f(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_S f_0(x, y) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha \cdot d\sigma$$

Спираль Френеля.



При открытии отверстия открываются все новые и новые зоны Френеля: начинают работать все ювые и новые витки очень медленно скручивающейся спирали, называемой **спиралью Френеля**.

Пятно Пуассона и условия его наблюдения.

Пусть на пути плоской волны расположен непрозрачный круглый диск (либо круглый шарик). Каков бы ни был диаметр диска, в центре P его геометрической тени должно наблюдаться **светлое пятнышко**.

Это явление получило название **пятно Араго-Пуассона**.

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

1. Поставим между точечным источником S и точкой наблюдения P непрозрачный экран с круглым отверстием.

Согласно Френелю, действие такого препятствия сходится к тому, что экран как-бы устраняет часть волнового фронта.

Будем предполагать, кроме того, что размеры отверстия можно менять, что дает возможность открывать любое число зон Френеля.

Если открыть первую зону Френеля, то амплитуда и интенсивность света в той же точке будут $a_1 = 2a_0, I_1 = (2a_0)^2 = 4I_0$.

При удалении от центра P интенсивность будет монотонно убывать. При расширении отверстия в точку P начнут проходить вторичные волны. Их интерференция с ранее пришедшими волнами вызовет уменьшение интенсивности в той же точке. Когда отверстие откроет две первые зоны Френеля, то их действия в точке P практически полностью уничтожат друг-друга из-за интерференции. В точке P получится темный кружок, окруженный светлым кольцом. Вообще, при нечетном количестве открытых зон центр дифракционных колец светлый, при четном темный.

2. Определим теперь размеры и число m зон Френеля, укладывающихся в отверстии AB . Пусть D -диаметр отверстия, а a и b - расстояние от его центра до точек S и P . Из точек S и P как из центров опишем сферы, проходящие через край отверстия AB . Пренебрегая квадратами отрезков OE и OF , по известной теореме можно написать:

$$(D/2)^2 \approx OF \cdot 2a, \quad (D/2)^2 \approx OE \cdot 2b$$

Отсюда

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Число m найдется делением этого отрезка на $\lambda/2$. Оно равно

$$m = \frac{D^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Если m целое, то D будет диаметром, а $R_m = D/2$ - радиусом m -ой, точнее ее внешнего края.

Следовательно

$$R_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}$$

Зонная пластинка Френеля. Область геометрической оптики.

Для плоской волны, бегущей вдоль оси $z(u=0)$ набег фазы равен kz . Для волны с пространственной частотой u он равен $\varphi(u) = \sqrt{k^2 - u^2}z$, или приближенно:

$\varphi(u) \approx kz - (z/2k)u^2$. Разность фазовых набегов $\Delta\varphi \approx (z/2k)u^2$.

Пространственные частоты плоских волн, бегущих от щели не превышают величины $|u| < 2\pi/b$, поэтому разность фазовых набегов не превышает величины

$$\Delta\varphi < \frac{z}{2k} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 = \frac{\pi\lambda z}{b^2}$$

Если эта разность много меньше величины π , то можно считать, что все плоские из интересующего нас интервала приобретают один и тот же фазовый набег, равный kz .

Условие $\Delta\varphi \ll \pi$ выполнено, если

$$p^2 = \frac{\lambda z}{b^2} \ll 1$$

Это и есть условие геометрической оптики.

Идеальная линза.

Фокусное расстояние для тонкой линзы f определяется формулой

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Надо придерживаться правила знаков.

Для двояковыпуклой $R_1 > 0$ и $R_2 < 0$ и $f > 0$

Для двояковогнутой $R_1 < 0$ и $R_2 > 0$ и $f < 0$

Фокусировка света.

При помощи **линзы**. При помощи **зонной пластинки Френеля**.

Волновой параметр (число Френеля).

Основными параметрами, существенно определяющими характер дифракционных явлений, являются: длина волны λ , размер отверстия b , расстояние до плоскости (или до точки наблюдения) z . Как показывает дальнейший анализ (?) тот или иной характер дифракционных явлений существенно зависит от значения волнового параметра.

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}$$

$p \ll 1$ - область геометрической оптики

$p \gg 1$ - область дифракции Фраунгофера

$p \approx 1$ - область дифракции Френеля

Область геометрической оптики.

Для плоской волны, бегущей вдоль оси $z(u=0)$ набег фазы равен kz . Для волны с пространственной частотой u он равен $\varphi(u) = \sqrt{k^2 - u^2}z$, или приближенно:

$\varphi(u) \approx kz - (z/2k)u^2$. Разность фазовых набегов $\Delta\varphi \approx (z/2k)u^2$.

Пространственные частоты плоских волн, бегущих от щели не превышают величины $|u| < 2\pi/b$, поэтому разность фазовых набегов не превышает величины

$$\Delta\varphi < \frac{z}{2k} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 = \frac{\pi\lambda z}{b^2}$$

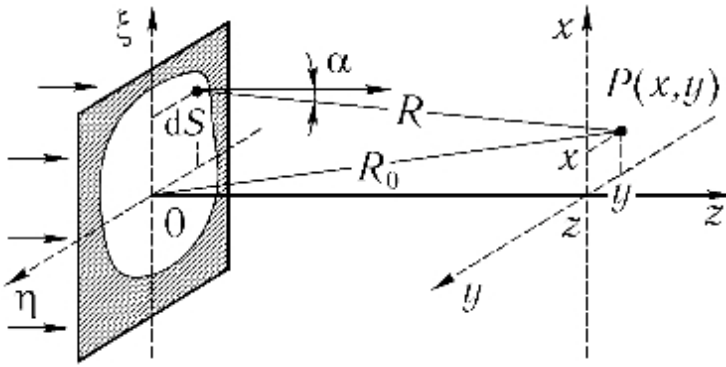
Если эта разность много меньше величины π , то можно считать, что все плоские из интересующего нас интервала приобретают один и тот же фазовый набег, равный kz .

Условие $\Delta\varphi \ll \pi$ выполнено, если

$$p^2 = \frac{\lambda z}{b^2} \ll 1$$

Это и есть условие геометрической оптики.

Дифракция Фраунгофера.



Удаляясь от препятствия все дальше и дальше, мы оказываемся в дальней волновой зоне, где

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b} \gg 1$$

Обратимся к **принципу Гюйгенса-Френеля и его математической формулировке.**

Можно заменить множитель $1/R$ на постоянный $1/R_0$. Множитель наклона $\cos \alpha$ также считаем приблизительно одинаковым (равным единице). Получаем

$$f(P) = \frac{1}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{ikR} d\xi d\eta$$

Точное выражение для расстояния R от вторичного источника до точки наблюдения

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Вычисляя величину R , входящую в фазовый множитель e^{ikR} , мы не можем довольствоваться грубой оценкой $R = R_0$: ошибка при вычислении фазы колебаний kR должна быть мала по сравнению с π и, следовательно, ошибка в вычислении R мала по сравнению с длиной волны λ .

$$\text{Запишем: } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi - 2y\eta + (\xi^2 + \eta^2)}$$

и далее, поскольку $z^2 + y^2 + x^2 = R_0^2$

$$R = R_0 \sqrt{1 - 2\frac{x\xi + y\eta}{R_0^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_0^2}} \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0}$$

Очевидно, что последнее слагаемое ограничено величиной:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} \lesssim \frac{b^2}{2R_0}$$

Чтобы пренебречь им потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\frac{b^2}{2R_0} \ll \lambda$ или что то же

$$p = \frac{\sqrt{\lambda R_0}}{h} \gg 1$$

Итак получим следующее приближенное выражение для R :

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0}$$

и подставляя в начальное выражение

$$f(P) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i((kx/R_0)\xi + (ky/R_0)\eta)} d\xi d\eta$$

Введем обозначения $kx/R_0 = u, ky/R_0 = v$. Тогда имеем

$$f(P) \sim \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta$$

В одномерном случае

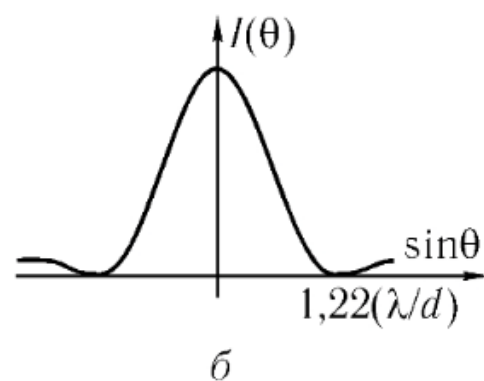
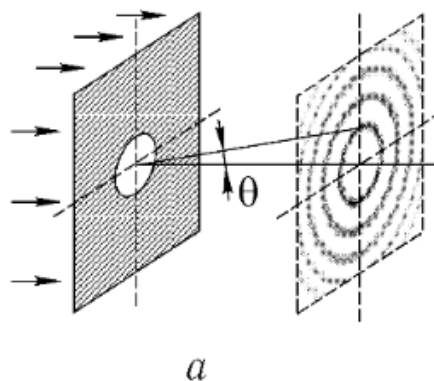
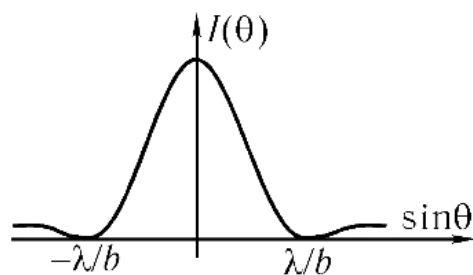
$$f(\theta) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik\xi \sin(\theta)} d\xi$$

и для интенсивности

$$I(\theta) \sim \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik\xi \sin(\theta)} d\xi \right|^2$$

Дифракция Фраунгофера на щели и круглом отверстии.

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.



Дифракция Фраунгофера на щели (ширина щели b , щель освещается слева плоской нормально падающей волной). Это задача аналогична нахождению спектра прямоугольного импульса

$$f(\theta) \sim \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta}$$

Распределение интенсивности $I(\theta) = |f(\theta)|^2$

С уменьшением ширины щели уширяется пространственный спектр - спектр плоских волн, бегущих от щели.

Наблюдается картина (а). Соответствующий график показан на рис (б). Угловая полуширина пятна Эйри (главного максимума в картине $I(\theta)$) определяется условием

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

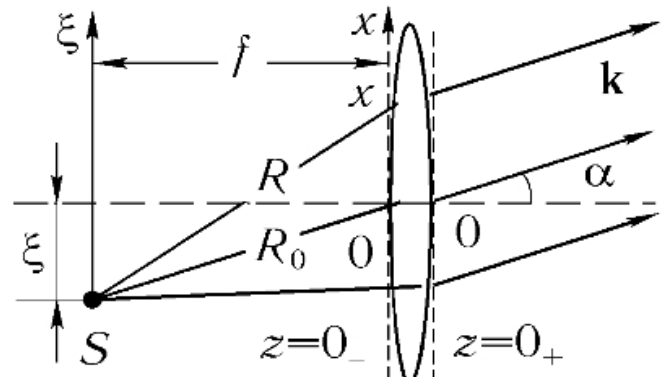
В телесном угле θ сосредоточена подавляющая доля потока энергии ($\sim 80\%$) дифрагированной волны.

Связь с преобразованием Фурье.

Последнее соотношение в выводе формулы для Дифракции Фраунгофера означает, что для нахождения светового поля в точке наблюдения достаточно найти преобразование Фурье граничного поля $f_0(\xi, \eta): f(x, y, z) \sim C_0(u, v)$, взяв в качестве аргументов преобразования $u = kx / R_0, v = ky / R_0$.

Поле в фокальной плоскости линзы.

Рассмотрим точечный источник - светящуюся точку S , находящуюся в фокальной плоскости идеальной линзы, на расстоянии ξ от оптической оси.



В области значений x , малых по сравнению с расстоянием R_0 от источника до центра линзы O , амплитуду колебаний в сферической волне можно считать постоянной величиной

$\frac{a_0}{R} \approx \frac{a_0}{R_0} = a = \text{const.}$ Распределение фаз колебаний есть

$\varphi(x) = kR = k\sqrt{(x - \xi)^2 + f^2}$. Заменяя, как и ранее, сферический волновой фронт параболическим, найдем

$$\varphi(x) = kR_0 - k\frac{\xi}{R_0}x + \frac{kx^2}{2R_0}$$

где $R_0^2 = f^2 + \xi^2$.

Играет роль, конечно, относительная фаза колебаний

$$\varphi(x) = -k\frac{\xi}{R_0}x + \frac{kx^2}{2R_0}$$

Вводя угол α и полагая его малым, так что в последнем слагаемом можно положить $R_0 \approx f$ получим

$$\varphi(x) = -kx \sin \alpha + \frac{kx^2}{2f}$$

При распространении через линзу возникает дополнительный набег фазы $\Delta\varphi = -\frac{k}{2f}x^2$.

Таким образом, на выходе из линзы, т.е. в плоскости, примыкающей к линзе справа, получаем

$$\varphi_+(x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = -k \sin \alpha \cdot x$$

Это формула выражает очень важный результат, волна от точечного источника, расположенного в фокальной плоскости, преобразуется линзой в волну с плоским волновым фронтом.

Рассмотрим, что из себя представляет картина поля в фокальной плоскости, если идеальная линза освещается произвольной монохроматической волной с комплексной амплитудой $f(x)$. Эту волну можно представить в виде суперпозиции плоских волн разных направлений α_n , т.е. разных пространственных частот $u_n = k \sin \alpha_n$. Каждая плоская волна, фокусируясь идеальной линзой в свою точку $\xi_n \approx f \sin \alpha_n = fu_n/k$, создает в этой точке колебания, амплитуда и фаза которых определяются амплитудой и фазой той плоской волны, которая в эту точку фокусируется.

Картина в фокальной плоскости линзы является преобразованием Фурье поля, падающего на линзу.

Заметим, что картина фраунгоферовой дифракции также связана преобразованием Фурье с граничным полем, причем аргументом преобразования является величина $k\xi/z$. Таким образом, для наблюдения дифракции Фраунгофера нет необходимости удаляться от препятствия на большое расстояние - достаточно установить за препятствием линзу и наблюдать ее картину в ее фокальной плоскости, которая лишь масштабом отличается от картины дифракции Фраунгофера.

Дифракция Фраунгофера в оптических приборах.

Изображением светящейся точки в сопряженной плоскости является дифракционная картина, состоящая из концентрических колец, окружающих центральный светлый дифракционный кружок. Он называется **пятном Эйри**.

Конечный объект можно рассматривать как совокупность точечных источников, каждый из которых изображается кружком Эйри.

В простейшем случае сложный объект состоит из двух точечных источников. Если расстояние между центрами кружков Эйри от этих точечных источников мало по сравнению с радиусом самих кружков то их изображения сольются в одно единое. Говорят, что в этом случае светящиеся точки не разрешаются оптическим прибором.

Величина l_{min} называется разрешаемым расстоянием, а обратная ему величина $\frac{1}{l_{min}}$ - разрешающей способностью.

Точно указать величину l_{min} невозможно. Она в значительной степени зависит от индивидуальных особенностей глаза или другого приемника излучения.

Согласно Рэлею, за l_{min} принимается расстояние равное радиусу кружка Эйри.

В случае некогерентных источников

$$I = I_1 + I_2$$

В случае когерентных

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta}{2}$$

Разрешающая способность телескопа и микроскопа.

$$l_{min} = 1,22 \frac{\lambda z}{D}$$

в случае удаленных объектов, то обычно говорят об угловом расстоянии $\alpha = l / z_1$.

Имеем

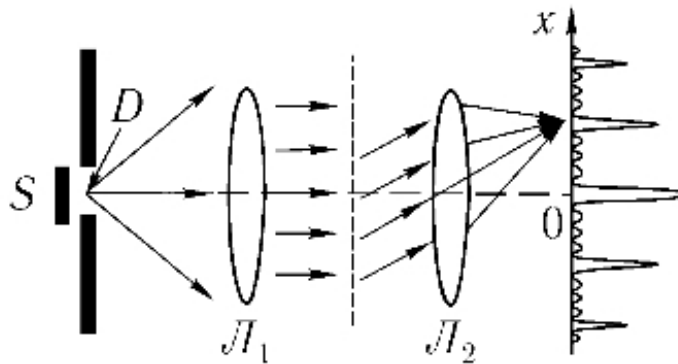
$$\alpha_{min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Критерий Релея.

Для разрешения двух максимумов необходимо, чтобы расстояние между ними было больше полуширины этих максимумов.

Дифракционная решетка как спектральный прибор.

Схема спектрального прибора, основанного на использовании дифракционной решетки.



В фокальной плоскости возникает картина дифракционных максимумов, положение которых есть

$$x_m = \frac{m\lambda f}{d}$$

Разрешающая способность и область дисперсии.

Для длины волны λ

$$x_1 = f \sin \theta_1 = \frac{m\lambda f}{d}$$

Для длины волны $\lambda + \delta\lambda$

$$x_2 = f \sin \theta_2 = m \frac{\lambda + \delta\lambda}{d} f$$

Согласно критерию Рэлея предельно разрешимыми считаются спектральные линии, для которых смещение дифракционных максимумов $\Delta x = \frac{m\delta\lambda f}{d}$ в точности равно их полуширине

$$\delta x = \frac{\lambda f}{Nd}$$

Используя критерий Рэлея $\Delta x = \delta x$, находим

$$\frac{m\delta\lambda}{d} = \frac{\lambda}{Nd}$$

откуда получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m_{\max} N \approx \frac{D}{\lambda}$$

получаем оценку минимально разрешимого интервала длин волн

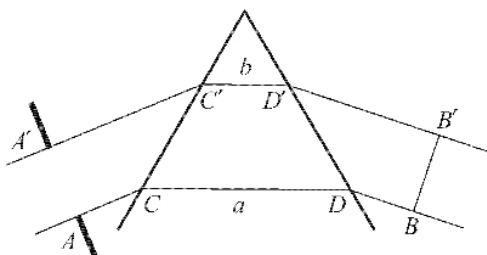
$$(\delta\lambda)_{\min} \approx \frac{\lambda^2}{D}$$

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

Этот максимально допустимый диапазон $\Delta\lambda$ называется областью дисперсии. Находим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Разрешающая способность призмы.



$$\begin{aligned} AC + n(\lambda')a + DB &= A'C' + n(\lambda')b + D'B' \\ AC + n(\lambda)a + DB &= A'C' + n(\lambda)b + D'B' + \lambda \end{aligned}$$

вычитая почленно получаем

$$(a-b)[n(\lambda') - n(\lambda)] = -\lambda$$

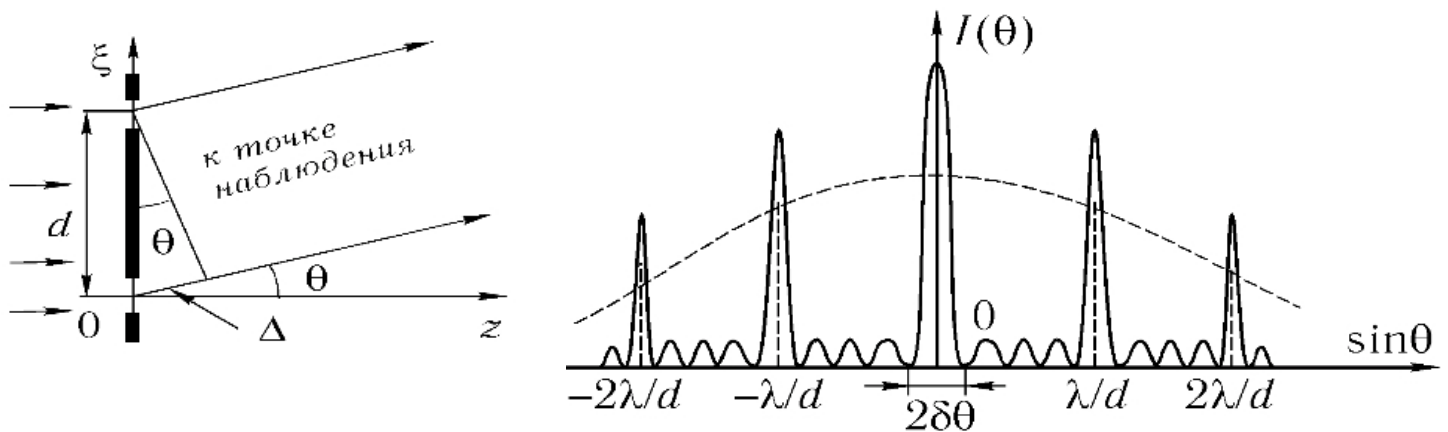
или

$$(a-b) \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = -\lambda$$

Отсюда для разрешающей способности призмы получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = -(a-b) \frac{dn}{d\lambda}$$

Дифракция Фраунгофера на решетке: положение и интенсивность главных максимумов, их ширина и максимальный порядок.



Рядом со щелью, дифракцию на которой мы рассмотрели выше, расположим параллельно еще одну такую же щель, центр которой находится в точке $\xi = d$. Расстояние от второй щели до точки наблюдения меньше на величину $\Delta = d\sin\theta$ меньше расстояния между соответствующим элементом первой щели и точкой наблюдения. Соответственно, фаза колебаний отличается на величину $\alpha = -k\Delta = -kd\sin\theta$. Если мы имеем решетку состоящую из N параллельно расположенных щелей (d -период решетки), суммарное колебание имеет вид

$$g(\theta) = f(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha}$$

В нашем случае $\alpha = kd\sin\theta$ и мы получаем

$$g(\theta) = f(\theta) \frac{\sin(Nkd \sin \theta/2)}{\sin(kd \sin \theta/2)}$$

Штриховой линией показана "огибающая" - зависимость от θ первого сомножителя в $I|f(\theta)|^2$, описывающего картину фраунгоферовой дифракции на щели ширины b .

Необходимо, чтобы разность фаз колебаний от двух соседних щелей решетки в точке наблюдения изменилась на величину $\delta\alpha = 2\pi / N$.

$$\delta(kd \sin \theta) = \frac{2\pi}{N} \text{ или } \delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{Nd}$$

Для сравнительно небольших углов θ можно написать

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

Максимальное значение порядка максимумов ограничено величиной

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}$$

Реально же заметными являются лишь те дифракционные максимумы, которые лежат в пределах углов

$$|\sin \theta| \leq \frac{\lambda}{b}$$

Поэтому (при $b > \lambda$) максимальный порядок m можно оценить из условия

$$m_{\max} \leq \frac{d}{b}$$

При этом общее число главных дифракционных максимумов равно приблизительно $1 + 2d / b$.

Интерферометр Фабри-Перо как оптический резонатор.

$$A = A_0 \tau^2 + A_0 \tau^2 \rho^2 e^{i\alpha} + A_0 \tau^2 \rho^4 e^{i2\alpha} + \dots = \frac{A_0 \tau^2}{1 - \rho^2 e^{i\alpha}}$$

набег фазы $\alpha = 2Lk \cos \theta$

Внутри резонатора, амплитуда, падающей волны

$$A_{\rightarrow} = A_0 \frac{\tau}{1 - R} = \frac{A_0}{\sqrt{1 - R}}$$

а амплитуда волны отраженной от зеркала

$$A_{\leftarrow} = A_0 \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1 - R}}$$

при значениях R близких к единице: получаем, что внутри резонатора интенсивность больше интенсивности падающей волны в 100 раз.

Условие резонанса

$$\Delta_m = 2L \cos \theta = m\lambda$$

Разрешающая способность интерферометра, связь с добротностью.

Как и для дифракционной решетки

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

Максимальный порядок для интерферометра Фабри-Перо определяется

$$m = \frac{\Delta_m}{\lambda} = \frac{2L \cos \theta}{\lambda} \approx \frac{2L}{\lambda}$$
$$N_{ef} \approx 1/T = 1/(1 - R)$$

Получаем оценку в итоге

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{2L}{\lambda(1 - R)}$$

Одной из важных характеристик любого резонансного устройства является добротность Q

$$Q = 2\pi \frac{W}{\delta W}$$

$$\Delta W = 2W(1 - R)$$

$$\delta W = \frac{T_0}{\tau} \Delta W = \frac{\lambda}{L} W(1 - R)$$

Период колебания $T_0 = \lambda / c$

Время обхода резонатора $\tau = 2L / c$

В итоге для добротности

$$Q \approx \frac{2\pi L}{\lambda(1 - R)}$$
$$I(\alpha) = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \alpha}$$

При R , близких к единице, можно получить

$$\varepsilon = \frac{2(1 - R)}{\sqrt{R}}$$

С другой стороны, изменение разности фаз $\varepsilon = \alpha - 2\pi m$ при отклонении длины волны $\lambda_1 = \lambda_m + \delta\lambda$ от резонансного значения λ_m можно найти из равенств

$$\alpha_m = 2 \frac{2\pi}{\lambda_m} L \cos \theta = 2\pi m; \quad \alpha = 2 \frac{2\pi L \cos \theta}{\lambda_m + \delta\lambda}$$

при малых $\delta\lambda$ находим

$$\alpha = 2 \frac{2\pi}{\lambda_m} \left(\frac{1}{1 + \delta\lambda/\lambda_m} \right) L \cos \theta \approx 2 \frac{2\pi}{\lambda_m} L \cos \theta \left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_m} \right) = 2 \frac{2\pi}{\lambda_m} L \left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_m} \right)$$

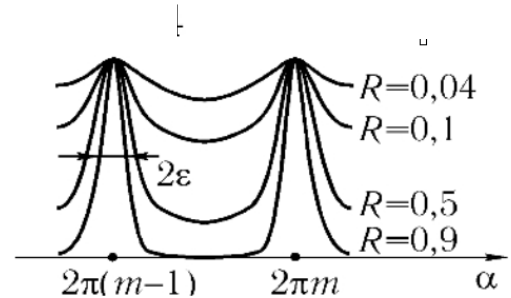
откуда

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_m = 2\pi m \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R} = \frac{2\pi L \sqrt{R}}{\lambda(1 - R)}$$

Это и есть правильное выражение для разрешающей способности, справедливое при значениях R , близких к единице.



Принципы Фурье-оптики: представление произвольной волны в виде суперпозиции плоских волн разных направлений.

Поле плоской волны в плоскости $z = 0$ можно записать в виде

$$f(x, 0) = ce^{iux}$$

где множитель $c = ae^{i\varphi}$ определяет как амплитуду a так и начальную фазу φ волны, а через u обозначена x -компонента вектора \vec{k} : $k \sin \alpha = k_x = u$.

Представим граничное поле $f_0(x)$ в виде

$$f_0(x) = \sum c_n e^{iu_n x}$$

Произвольное граничное поле $f_0(x)$ представляется в виде интеграла

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} du$$

т.е. в виде непрерывной суммы плоских волн различных пространственных частот.

Соотношение неопределенностей должно связывать протяженность Δx граничного поля с шириной Δu его пространственного спектра:

$$\Delta x \cdot \Delta u \approx 2\pi$$

. Пространственная протяженность граничного поля определяется характерным размером препятствия, в нашем примере - размером b отверстия в непрозрачном экране.

Поэтому ширина спектра плоских волн можно оценить так:

$$\Delta u = \frac{2\pi}{b}$$

Разброс пространственных частот определяет разброс направлений слагаемых плоских волн за препятствием:

$$\Delta u = k \Delta(\sin \alpha)$$

Откуда для малых углов

$$\Delta \alpha \approx \frac{\lambda}{b}$$

Это и есть дифракционная расходимость пучка света за отверстием размера b .

$$C_0(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint f_0(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Поле на расстоянии z

$$C(u, v, z) = C_0(u, v) e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z}$$

в случае непрерывного спектра

$$f(x, y, z) = \iint C(u, v, z) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Пространственное преобразование Фурье.

$$C_0(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint f_0(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Пространственная частота.

На основании представления о колебаниях, по аналогии, величина $u = k \sin \alpha$ может быть названа *пространственной частотой*.

Метод Релея в задачах дифракции.

Состоит в том, что любое монохроматическое поле можно представить как суперпозицию плоских волн той же частоты.

Дифракция Френеля на периодических структурах. Эффект саморепродукции.

В плоскости $z = 0_+$, примыкающей к структуре справа, возникает пространственно-периодическое поле $f_0(x)$

$$f_0(x) = \sum c_n e^{in(2\pi/d)x}$$

Величина $\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} z$ представляет собой набег фазы плоской волны, имеющей пространственную частоту u_n .

Будем полагать, что в сумме плоских волн, образующих периодическую структуру, существенно отличны от нуля, лишь значения c_n , для которых $u_n = n \cdot 2\pi/d$ много меньше $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

В этом случае

$$\varphi_n \approx kz - \frac{z}{2k} u_n^2$$

Или, поскольку $u_n = n \cdot 2\pi/d$, то $\varphi_n = kz - (z/2k)(2\pi/d)^2 n^2$.

Существенную роль играет лишь разность фазовых набегов ($\varphi_0 = kz$). Мы получаем

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_n = \frac{z}{2k} \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2 n^2 = \frac{n^2 \pi \lambda z}{d^2}$$

Получаем замечательный результат: на расстояниях $z_m = m \frac{2d^2}{\lambda}$

поле можно выразить следующим образом

$$f(x, z_m) = e^{ikz_m} f_0(x)$$

мы наблюдаем в плоскостях z_m периодическую структуру, тождественно повторяющую граничное поле $f_0(x)$.

Описанный эффект называют эффектом самовоспроизведения или эффектом Талбота.

Теория Аббе формирования оптического изображения.

Пусть произвольная монохроматическая волна (от предмета) падает на линзу. Тогда по принципу Аббе в фокальной плоскости мы получим спектр этой волны (первичное изображение). По этому принципу фокальную плоскость называют фурье-плоскостью.

Далее каждая точка фурье-плоскости рассматривается как источник сферической волны. Все сферические волны, исходящие из разных точек фурье-плоскости, интерферируя, образуют в плоскости собственно изображение объекта. Это изображение Аббе назвал **вторичным**.

Фурье-плоскость оптической системы.

Так называют фокальную плоскость линзы, так как каждая гармоника - плоская волна определенного направления - фокусируется линзой в "свою" точку, таким образом в фокальной плоскости образуется картина пространственного спектра.

Принципы пространственной фильтрации.

В фурье плоскости возможно избирательное воздействие на разные пространственные гармоники: установив в любой точке ξ фурье-плоскости маленькую пластинку, вносящую определенное поглощение и (или) фазовую задержку. Можно направленно изменять

п

Методы наблюдения фазовых структур.

Метод фазового контраста

на центральную ось в фурье-плоскости устанавливается пластинка с задержкой в $\frac{\pi}{2}$.

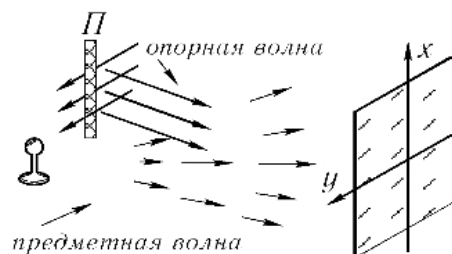
Метод темного поля

на центральную ось в фурье-плоскости устанавливается маленький непрозрачный экран.

Голография.

Голография - интерференционный метод регистрации и последующего восстановления изображений.

На фотопластинку установленную в плоскости $z = 0$ падают две волны: предметная волна, создающая на фотопластинке поле $f_p(x, y)$, и опорная волна с известным распределением амплитуды и фаз колебаний $f_o(x, y)$. При этом необходимо обеспечить когерентность предметной и опорной волны - волны должны интерферировать.



Разрешающая способность голограммы.

Голограмма, аналогично пятну Эйри, создает изображение размер которого определяется аналогичной формулой:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda r_0}{D}$$

где r_0 - расстояние от точечного источника до голограммы, D - размер голограммы.

Голограмма точечного источника (голограмма Габора).

Рассмотрим в качестве предмета точечный источник S , т.е. создадим сферическую предметную волну. В качестве опорной возьмем плоскую волну, падающую нормально на фотопластинку.

$$f_o = ae^{ikz} = a$$

Поле предметной волны есть $\frac{a_0}{r} e^{ikr}$, где $r = \sqrt{r_0^2 + x^2 + y^2}$ - расстояние от источника S до точки (x, y) фотопластинки.

Для упрощения формул можно считать что $\frac{a_0}{r} \approx a$. Тогда суммарное поле есть

$$f = ae^{ikr} + a$$

После необходимой фото обработки получаем голограмму с функцией пропускания

$$t(x, y) \sim I(x, y) = |a + ae^{ikr}|^2 = 2a^2 + a^2 e^{ikr} + a^2 e^{-ikr}$$

Для восстановления изображения освещаем полученную голограмму плоской волной с амплитудой 1, $f_-(x, y) = 1$ (восстанавливающей волной).

На выходе получаем

$$f_+(x, y) = f_-(x, y) \cdot t(x, y) = 2a^2 + a^2 e^{ikr} + a^2 e^{-ikr}$$

- 1) $f_1 = 2a^2$ - отвечает за появление плоской волны
- 2) $f_2 = a^2 e^{ikr}$ - расходящаяся сферическая волна, создающая слева от голограммы мнимое изображение.
- 3) $f_3 = a^2 e^{-ikr}$ - сходящаяся сферическая волна, создающая справа от голограммы действительное изображение.

Функцию для интегральности можно переписать в виде:

$$I(x, y) = a^2 |1 + e^{ikr}|^2 = 2a^2(1 + \cos kr)$$

Используем параболическое приближение $r = \sqrt{r_0^2 + x^2 + y^2} \approx r_0 + \frac{\rho^2}{2r_0}$.

В результате получим

$$I(\rho) = 2a^2 \left(1 + \cos \frac{k\rho^2}{2r_0} \right)$$

Мы видим, что интерференционная картина имеет вид колец.

Радиусы светлых и темных колец находятся по формуле

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda r_0}$$

Для записи и восстановления голограммы можно использовать наклонный опорный пучок.

$$f_p = \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2r_0}\right)$$

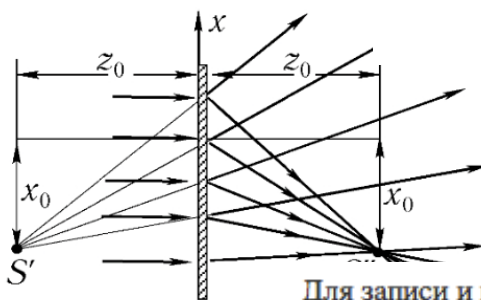
$f_o = ae^{iu_0 x}$, где $u_0 = k \sin \alpha$ - пространственная частота опорной волны.

В итоге получаем расположение мнимого и действительного изображения как показано на рисунке.

$$x_0 = r_0 \sin \alpha.$$

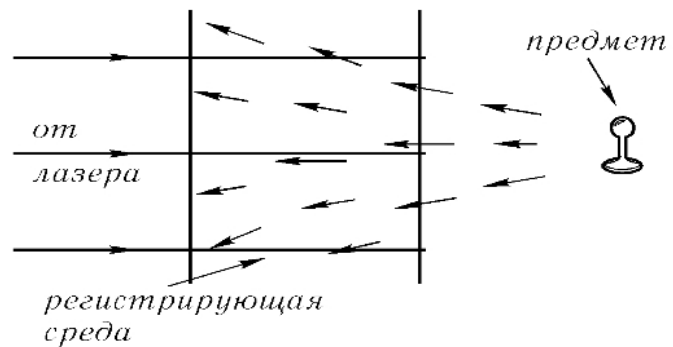
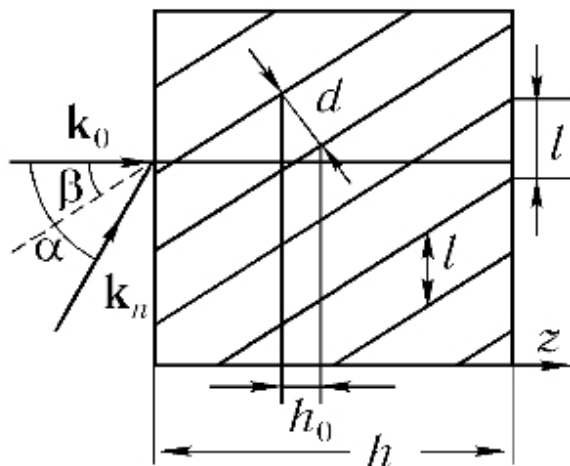
Угол наклона должен быть правильно выбран: чем шире пространственный спектр предметной волны, тем больше должен быть угол наклона опорного пучка.

Понятие о голограмме с наклоном



Объёмная голограмма.

Рассмотрим какие возможности открывает объёмная регистрирующая среда. Одну из волн, бегущую вдоль оси z , $f_o = ae^{ikz}$ будем считать опорной, а вторую $f_p = ae^{i(kx \sin \alpha + kz \cos \alpha)}$, волновой вектор которой составляет угол α с осью z .



Легко найти интенсивность суммарной волны

$$I(x, z) = |f_o + f_p|^2 = 4a^2 \cos^2[kx \sin \alpha - kz(1 - \cos \alpha)] / 2$$

Максимумы интенсивностей располагаются вдоль плоскостей

$$x \sin \alpha - z(1 - \cos \alpha) = \pi n$$

Эти плоскости составляют угол $\beta = \alpha / 2$, плоскости направленные по биссектрисе угла между направлениями опорной и предметной волны.

Расстояние между плоскостями интерференционных максимумов

$$d = l \cos \beta = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}$$

Сдвиг на ширину полосы происходит при расстоянии $\Delta z = h_0 = \frac{d}{\sin \alpha/2} = \frac{\lambda}{1 - \cos \alpha}$.

Эффект объёмности фоторегистрирующей среды проявляется, если её толщина h превышает величину h_0 .

Восстановление изображения объёмной голограммой.

Прямой лазерный пучок, проходящий через фотоземлюсию слева направо - это опорная волна, а отраженный от предмета и идущий ему навстречу - это предметная волна.

Углы схождения волн в этой схеме близки к π , что и обеспечивает выполнение условия объёмности.

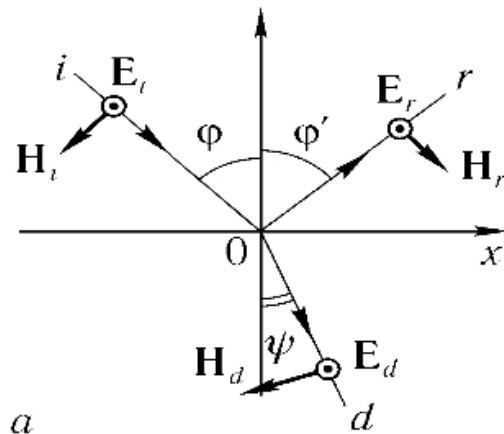
При восстановлении изображения необходимым условием интерференции отраженных от зеркал лучей является

$$2d \sin \beta = \lambda'$$

Объёмная голограмма обладает **спектральной избирательностью**.

При большом числе отражающих зеркальных слоев интенсивность восстановленной волны оказывается близкой к интенсивности волны, падающей на голограмму при реконструкции изображения.

Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков.



Граничные условия

$$\vec{E}_I = \vec{E}_{II} \rightarrow E_i + E_r = E_d$$

граничное условие должно выполняться в течении времени, поэтому частоты всех трех волн должны совпадать (отражение и преломление сохраняют цвет). Из поперечности волн и параллельности векторов $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_d$ слудует, что все три волновых вектора $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_d$ лежат в одной плоскости - плоскости падения. Из равенства частот граничное условие можно записать в виде

$$E_{i0} \exp(ikx \sin \varphi) + E_{r0} \exp(ikx \sin \varphi') = E_{d0} \exp(ik'x \sin \psi)$$

потребуем чтобы наше граничное условие выполнялось в каждой точке поверхности, получаем

$$k \sin \varphi = k \sin \varphi' = k(n_{II}/n_I) \sin \psi$$

Мы получаем аналитически из законов электродинамики правила вычисления углов отражения и преломления.

$$\varphi = \varphi', \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n = \frac{n_{II}}{n_I}$$

Введем амплитудные коэффициенты отражения r и прозрачности t следующим образом

$$E_{r0} = r E_{i0}; \quad E_{d0} = t E_{i0}.$$

В наших предположениях $H = n(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} E$, при этом имеет смысл удерживать только фактор n , все прочее можно будет в наших уравнениях сократить.

$$[\vec{E}_\tau] = 0 \rightarrow E_i + E_r = E_d$$

$$[\vec{H}_\tau] = 0 \rightarrow -H_i \cos \varphi + H_r \cos \varphi = -H_d \cos \psi \rightarrow$$

$$\rightarrow -E_i \cos \varphi + E_r \cos \varphi = -n E_d \cos \psi$$

Система сводится с помощью ранее введенных коэффициентов к

$$1 + r = t; \quad (1 - r) \cos \varphi = t \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \cos \psi$$

Ответ:

$$r_\perp = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}; \quad t_\perp = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

В случае когда векторы \vec{E} лежат в плоскости падения, получаем

$$r_\parallel = \frac{\tan(\varphi - \psi)}{\tan(\varphi + \psi)} \quad t_\parallel = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)};$$

В общем случае падения получаем $r_0 = \frac{n-1}{n+1}; t_0 = \frac{2}{n+1}$

Поляризация отражённой и преломлённой волн.

При $\varphi + \psi = \pi/2$ - видно из **полученных формул**, что при этом $r_\parallel = 0$. Это означает, что в отраженном свете вектор \vec{E} строго перпендикулярен плоскости падения. Находим соответствующий угол падения

$$\varphi_B = \arctan n$$

Закон Брюстера — закон оптики, выражающий связь показателя преломления с таким углом, при котором свет, отражённый от границы раздела, будет полностью поляризованным в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а преломлённый луч частично поляризуется в плоскости падения, причем поляризация преломленного луча достигает наибольшего значения.

Закон Малюса.

Интенсивность I линейно поляризованного света после прохождения через анализатор зависит от угла, образованного плоскостью колебания с разрешенным направлением анализатора.

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Это соотношение носит название закона Малюса.

Дихроизм.

В некоторых двоякопреломляющих кристаллах коэффициенты поглощения для двух взаимно перпендикулярных поляризованных лучей отличаются настолько сильно, что уже при небольшой толщине кристалла один из лучей гасится почти полностью, и из кристалла выходит линейно поляризованный пучок света. Это явление носит название - дихроизма.

Поляроиды.

В настоящее время дихроические пластинки изготавливаются в виде тонких пленок, закрытых стеклами - поляроидов.

Если поляроиды используются для создания поляризованного света их называют **поляризаторами**, если для определения характера поляризации - **анализаторами**.

Способы получения линейно-поляризованного света.

Отражение света от диэлектрической пластинки.

Преломление света в стеклянной пластинке.

Преломление света в двоякопреломляющих кристаллах.

Поглощение света в дихроических пластинках.

Электромагнитные волны в одноосных кристаллах. Обыкновенная и необыкновенная волны.

Оптически одноосными называются кристаллы, свойства которых обладают свойством симметрии относительно некоторого направления, называемого **оптической осью** кристалла. разложим электрические векторы \vec{E} и \vec{D} на составляющие $\vec{E}_{||}$ и $\vec{D}_{||}$ вдоль оптической оси и составляющие \vec{E}_{\perp} и \vec{D}_{\perp} , перпендикулярные к ней. Тогда

$$\vec{D}_{||} = \varepsilon_{||} \vec{E}_{||}, \quad \vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp}$$

Плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль \vec{N} к фронту волны, называется **главным сечением кристалла**. рассмотрим два частных случая

Вектор \vec{D} перпендикулярен к главному оптическому сечению кристалла. В этом случае $\vec{D} \equiv \vec{D}_{\perp}$. Кристалл ведет себя как изотропная среда с диэлектрической проницаемостью ε_{\perp} . Для нее

$$\vec{D} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}$$

и получаем

$$D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E$$

откуда

$$v = v_{\perp} \equiv v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}$$

таким образом, если электрический вектор перпендикулярен к главному сечению, то скорость волны не зависит от направления ее распространения. Такая волна называется **обыкновенной**.

Случай 2: Вектор \vec{D} лежит в главном сечении. Так как вектор \vec{E} лежит также в главном сечении, то $\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_D$, где \vec{E}_N - составляющая этого вектора вдоль N , а E_D - вдоль D . Очевидно

$$E_D = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{D} = \frac{E_{||} D_{||} + E_{\perp} D_{\perp}}{D} = D \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{||}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}} \right)$$

где α угол между оптической осью и волновой нормалью. Если ввести обозначение

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{||}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}}$$

то получится $D = \varepsilon E_D$, и мы придем к соотношениям

$$\varepsilon E_D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E_D$$

Нормальная скорость волны будет определяться соотношением

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{||}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{-1/2} \equiv v_{||}$$

Она изменяется с изменением направления волновой нормали \vec{N} . По этой причине волну, электрический вектор которой лежит в главном сечении кристалла, называют **необыкновенной**.

Двулучепреломление.

Допустим, что плоская волна падает на плоскопараллельную пластинку из одноосного кристалла. При преломлении на первой поверхности пластинки волна внутри кристалла разделится на обыкновенную и необыкновенную. Эти волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются внутри пластинки в разных направлениях и с разными скоростями. Волновые нормали обеих волн лежат в плоскости падения. Обыкновенный луч, поскольку его направление совпадает с направлением волновой нормали, также лежит в плоскости падения. Но необыкновенный луч, вообще говоря, выходит из этой плоскости. Если падающая волна, ограничена диафрагмой, то в пластинке получатся два пучка света, которые при достаточной толщине пластинки окажутся разделенными пространственно. При преломлении на второй границе пластинки из нее выйдут два пучка света, параллельные падающему лучу. Они будут линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Интерференция поляризованных волн.

Интерференция света, явление, возникающее при сложении когерентных поляризованных световых колебаний. Наибольший контраст интерференционной картины наблюдается при сложении колебаний одного вида поляризации (линейных, круговых, эллиптических) с совпадающими азимутами. Ортогональные колебания не интерферируют. Так, при сложении двух линейно поляризованных взаимно перпендикулярных колебаний в общем случае возникает эллиптически поляризованное колебание, интенсивность которого равна сумме интенсивностей исходных колебаний.

Генерация второй гармоники.

При малых смещениях \vec{r} , сила действующая на электрон со стороны поля ядра и стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия, предполагалась пропорциональной смещению

$$\vec{f} = -k\vec{r}$$

Рассмотрим вначале эффекты связанные, к которым приводит появление первой нелинейной поправки

$$\vec{f} = -k\vec{r} + l\vec{r}^2$$

Уравнение движения электрона, осциллирующего под действием поля $\vec{E}(t)$ световой волны, имеет при этом вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + l\vec{r}^2 + e\vec{E}(t)$$

Можно перейти к скалярному уравнению

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r - \frac{l}{m} r^2 = \frac{e}{m} E(t)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - собственная частота малых колебаний осциллятора.

Решая этот диффур, находим что

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi_0 E_0 \cos \omega t + \frac{\beta E_0^2}{\omega_0^2} + \frac{\beta E_0^2}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t$$

Условие фазового синхронизма.

Итак, пусть исходная волна, бегущая в кристалле, имеет вид

$$E(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_1 z)$$

Это плоская волна частоты ω , волновое число k_1 этой волны определяет её фазовую скорость

$$v = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n(\omega)},$$

$n(\omega)$ - показатель преломления для волны, имеющей частоту ω .

Это волна возбуждает в каждой точке среды колебания поляризации с частотой 2ω .

Эту волну поляризации можно рассматривать как бегущую в среде антенну или колеблющийся с частотой 2ω диполь.

Из-за движения между волнами, излучаемыми "антенной" в разные моменты времени (и в разных местах) возникает фазовый сдвиг, равный $\Delta\varphi = (k_2 - k_1)z$

Пока путь волны в кристалле достаточно мал:

$$\Delta\varphi = (k_2 - k_1)z \ll \pi$$

все "вторичные волны", излученные бегущей антенной, складываются синфазно, поэтому амплитуда суммарной волны нарастает.

Условие, при котором волны второй гармоники, испущенные разными осцилляторами среды, складываясь синфазно, образуют в сумме волну, амплитуда которой при распространении в кристалле нарастает, называется *условием фазового синхронизма*.

Самофокусировка.

Рассмотрим пучок света ограниченного сечения частоты ω распространяющийся в нелинейной среде вдоль оси z .

Согласно $n = n_0 + n_1 E_0^2$ в пределах сечения пучка показатель преломления под действием поля в пучке увеличивается ($n > n_0$); вне пучка при $|x| > d/2$ показатель преломления остается равным n_0 . В лазерных пучках света интенсивность обычно максимальна у оси пучка и спадает к краям. Соответственно и показатель преломления n максимален на оси, постепенно уменьшаясь к краям, т.е среда под действием светового пучка становится подобной собирающей линзе. Диаметр пучка по мере распространения уменьшается так, как если бы на его пути находилась фокусирующая линза. Этот нелинейный эффект называется **самофокусировкой**.

Пороговая мощность.

Угловая расходимость пучка определяемая дифракцией, равна $\sin \theta_0 \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{nd}$, где λ_0 - длина волны в вакууме.

Используя угол полного отражения. Получаем

$$\sin \alpha_{pred} = \cos \theta_0 = \frac{n_0}{n_0 + n_1 E_0^2}$$

Поскольку разность показателей мала, тогда $\cos \theta_0 \approx 1 - \theta^2/2$

Правую часть равенства также приближенно представим в виде

$$\frac{n_0}{n_0 + n_1 E_0^2} \approx 1 - \frac{n_1}{n_0} E_0^2$$

Используя далее выражение для угла дифракционной расходимости, находим

$$E_0^2 \approx \frac{\lambda_0^2}{2n_0 n_1 d^2}$$

Для пороговой мощности находим выражение для мощности

$$P_{porog} \approx \frac{\pi \epsilon_0 c \lambda_0}{16 n_1}$$

