Контрольная работа

14.6

Дано

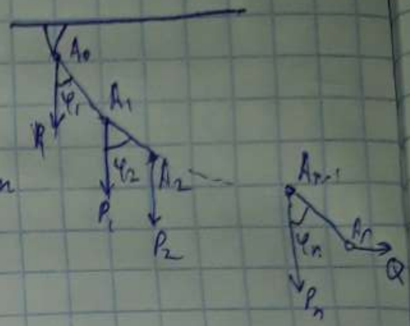
$A_0, \dots, A_n$

m, l

Q

$\bar{q} = (\varphi_1, \dots \varphi_n)^T - ?$

Решение



У этой системы n степеней свободы

Пусть обобщенными координатами будут углы $\varphi_1, \dots \varphi_n$

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

Реакции связей, ортогональных перемещению, равны 0.

$$\delta A = P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 + \dots + P_n \delta y_n + Q \delta x$$

$y_1 = l \cos\varphi_1$ | $\delta y_1 = -l \sin\varphi_1 \delta\varphi_1$

$y_2 = l(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$ | $\Rightarrow \delta y_2 = -l \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 - l \sin\varphi_1 \delta\varphi_1$

$\vdots$

$\cancel{x_n}\ y_n = l(\cos\varphi_1 + \dots + \cos\varphi_n)$ | $\Rightarrow \delta y_n = -l(\sin\varphi_1 \delta\varphi_1 + \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 + \dots \sin\varphi_n \delta\varphi_n)$

$x_n = l(\sin\varphi_1 + \dots + \sin\varphi_n)$ | $\delta x_n = l(\cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + \cos\varphi_2 \delta\varphi_2 + \dots \cos\varphi_n \delta\varphi_n)$

$m = m_1 = \dots = m_n$ $\quad \delta A = m_1 g \cdot (-l \sin\varphi_1 \delta\varphi_1) + m_2 g(-l \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - l \sin\varphi_2 \delta\varphi_2) \dots +$

$$+ Q l (\cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + \cos\varphi_2 \delta\varphi_2 + \dots \cos\varphi_n \delta\varphi_n) =$$

$$= \cancel{l(m_1 g \sin\varphi_1\ l(-m_1 g \sin\varphi_1 - m_2 g \sin\varphi_1 + Q\cos\varphi_1)l\delta\varphi_1}$$

$$= (-m_1 g \sin\varphi_1 - m_2 g \sin\varphi_1 - m_3 g \sin\varphi_1 - \dots - m_n g \sin\varphi_1 + Q\cos\varphi_1) l\delta\varphi_1 +$$

$$+ (-m_2 g \sin\varphi_2 - m_3 g \sin\varphi_2 - \dots - m_n g \sin\varphi_2 + Q\cos\varphi_2) l\delta\varphi_2 \dots$$

$$\dots (-m_n g \sin\varphi_n + Q\cos\varphi_n) l\delta\varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -g\sin\varphi_1\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} m_i + Q\cos\varphi_1 = 0 \\ -g\sin\varphi_2\cdot\sum\limits_{i=2}^{n} m_i + Q\cos\varphi_2 = 0 \\ \vdots \\ -m_n g\sin\varphi_n + Q\cos\varphi_n = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = n\cdot m} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{Q}{n\cdot mg}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_{n-1} = \dfrac{Q}{2mg}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{Q}{mg}$

Ответ: ~~tg~~ $\operatorname{tg}\varphi_k = \dfrac{Q}{(n-k+1)mg}$, где $k = 1,\dots,n$

1.66

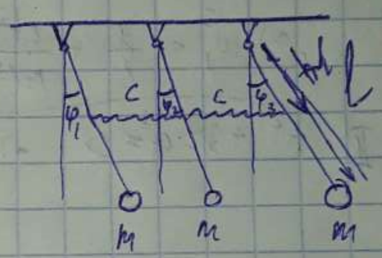
Дано: m, l, c, h

Найти малые колебания системы

Решение:

У системы 3 степени свободы

Пусть обобщенными координатами будут углы: $q = \begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\end{bmatrix}$



Тогда их энергии запишутся так:

$$T = \frac{ml^2}{2}\left(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_3^2\right)$$

$$\Pi = -mgl\cos\varphi_1 - mgl\cos\varphi_2 - mgl\cos\varphi_3 + \frac{ch^2}{2}(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2)^2 + \frac{ch^2}{2}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2$$

при малых $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: $\Pi \approx -mgl\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) - mgl\left(1 - \frac{\varphi_2^3}{2}\right) - mgl\left(1 - \frac{\varphi_3^2}{2}\right) + \frac{ch^2}{2}\left((\varphi_3 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2\right)$

Запишем ур-ние Лагранжа: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi_i} - \dfrac{\partial T}{\partial\varphi_i} = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi_i}$

$$\begin{cases} ml^2\ddot\varphi_1 + mgl\varphi_1 - ch^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ ml^2\ddot\varphi_2 + mgl\varphi_2 + ch^2(\varphi_2 - \varphi_1) - ch^2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0 \\ ml^3\ddot\varphi_2 + mgl\varphi_3 + ch^2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0 \end{cases}$$

Заменим координаты $\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\sin(\omega t + \alpha)$

Тогда $\begin{cases} (-ml^2\omega^2+mgl+ch^2)u_1 - ch^2 u_2 = 0 \\ -ch^2u_1 + (-ml^2\omega^2+mgl+2ch^2)u_2 - ch^2u_3 = 0 \\ -ch^2u_2 + (-ml^2\omega^2+mgl+ch^2)u_3 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = (-ml^2\omega^2+mgl+ch^2)^2(-ml^2\omega^2+mgl+2ch^2) - 2c^2h^4(-ml^2\omega^2+mgl+ch^2) =$$

$$= (-ml^2\omega^2+mgl+ch^2)\Big((\underbrace{-ml^2\omega^2+mgl+ch^2}_{t})(\underbrace{-ml^2\omega^2+mgl+2ch^2}_{t}) - 2c^2h^4\Big) = 0$$

I $-ml^2\omega^2+mgl+ch^2=0$

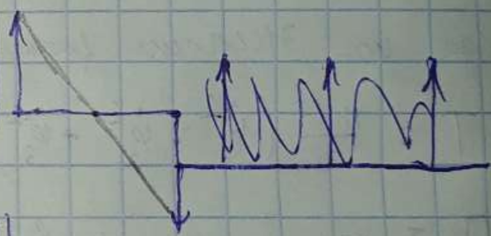
$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{ch^2}{ml^2}}$

II $t^2+3t\cdot ch^2 = 0 \Rightarrow$ ① $t=0 \to -ml^2\omega^2+mgl=0$, $\boxed{\omega_2^2 = \frac{g}{l}}$

② $t=-3ch^2 \to -ml^2\omega^2+mgl+3ch^2=0$

$$\boxed{\omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3ch^2}{ml^2}}$$

$\underline{\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{ch^3}{ml^2}} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = -u_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



$\underline{\omega_2^2 = \frac{g}{l}} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 \\ u_3 = u_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3ch^3}{ml^2}} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = -2u_1 \\ u_3 = u_1 \end{cases} \quad \bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{ch^2}{ml^2}}\, t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \alpha_2\right) +$$

$$+ C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3ch^2}{ml^2}}\, t + \alpha_3\right)$$

(4.12.a) $\ddot{x} + \dot{x} + x - y = 0$; $\ddot{y} + 2y - x = 0$

$\exists\ p = \dot{x},\ q = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{p} = -p - x + y \\ \dot{q} = x - 2y \\ \dot{x} = p \\ \dot{y} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot (-\lambda^3) + (\lambda^2 + 2) + \overbrace{(-1)}^{+2\lambda(\lambda+1)} = \lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Все коэф-ты хар-кого многочлена положительны $\Rightarrow$

система асимптотически устойчива