Решения задач экзаменационной контрольной работы по физике

Для студентов 2-го курса МФТИ *05 июня 2012г.*

ВАРИАНТ А

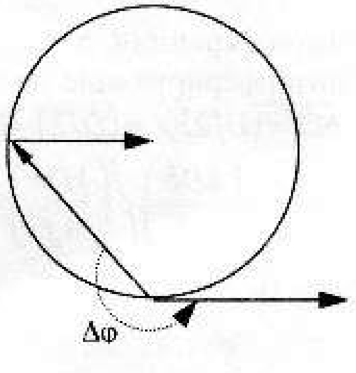
1А. (Склизков Г.В., Гавриков А.В.) После призмы происходит отклонение луча света на угол $\delta = \alpha\,(n-1)$. Расстояние между изображениями источников $L = 2\cdot\delta\cdot f$. Угол схождения лучей на экране: $\beta = L/2f = \delta$. Ширина полосы $\Delta x = \lambda/\beta$, следовательно $\beta = 1/N$. $\underline{\alpha = 1/(N(n-1)) = 0{,}035 = 2°}$. Максимальное число полос $m = 2\lambda/\Delta\lambda$, откуда $\underline{\Delta\lambda = 10\text{ нм}}$. Видность пятидесятой полосы: $V = \sin\left(\frac{\Delta k\beta}{2}x_{50}\right)\Big/\left(\frac{\Delta k\beta}{2}x_{50}\right)$, $\quad x_{50} = 50\cdot N\lambda$, $\quad \frac{\Delta k\beta}{2}x_{50} = \frac{2\pi\Delta\lambda\cdot 50N\lambda}{2N\lambda^2} = \frac{2\pi\Delta\lambda\cdot 50}{2\lambda} = \frac{\pi}{2}$. Отсюда: $V = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big/\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{0{,}64}$. Отметим, что $\delta\cdot f = 0{,}7\text{ см} > \Delta x\cdot m/2 = 0{,}57\text{ см}$, т.е. число полос ограничивается именно немонохроматичностью волны, а не границами области интерференции.

2А. (Петухов В.А.) Для осуществления пробоя на расстоянии L от телескопа необходимо, чтобы телескоп фокусировал излучение в эту точку. Интенсивность I в центре пучка в фокусе на расстоянии L равна $W/\tau S_{эфф} = I = cE^2/8\pi$ (модуль вектора Пойнтинга), где $S_{эфф} \approx \pi/4\cdot(1{,}22\lambda L/D)^2$ (оценочно считаем, что радиус эффективного сечения вдвое меньше радиуса пятна Эйри, т.е. что максимальная интенсивность в центре пятна вчетверо выше средней). Отсюда $W = (c\tau/32)(1{,}22\lambda LE/D)^2 = 62$ Дж.

Решения студентов с размером эффективного сечения, равным площади пятна Эйри, или с иным (разумным) их отношением также предлагается считать правильными.

Примечание. Более точно интенсивность в центре пятна и связанный с ней эффективный диаметр можно найти из представления о раскрутке спирали Френеля в фокусе линзы — см. задачу из задания 6.43 и её решение в методическом пособии Францессона. При таком подходе эффективный диаметр пятна равен $(4/\pi)(\lambda L/D) \Rightarrow S_{эфф} = (4/\pi)(\lambda L/D)^2$, $W = (c\tau/2\pi^2)(\lambda LE/D)^2 = 67{,}5$ Дж.

3А. (Локшин Г.Р.) Неполяризованный свет представляет собой сумму двух некогерентных взаимно-перпендикулярно поляризованных волн E_x и E_y с интенсивностью $I_0/2$ каждая. Пусть разрешённое направление поляроида параллельно оси x. Для этой компоненты имеем прозрачный диск в полторы (по площади) зоны Френеля. Амплитуда этой компоненты в точке P максимальна, если диск вносит фазовую задержку $\Delta\varphi = \pi/4 + \pi = (5/4)\pi$. Она равна $A_x = A_0/\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(A_0/\sqrt{2}\right) = \left(1 + 1/\sqrt{2}\right)A_0$, $I_x = \left(1 + 1/\sqrt{2}\right)^2 I_0$. Для компоненты y диск не прозрачен. В т. P имеем пятно Пуассона с интенсивностью $I_0/2$. Результирующая интенсивность $I = I_x + I_y = \left(1+1/\sqrt{2}\right)^2 I_0 + I_0/2 = \underline{2\left(1+1/\sqrt{2}\right)I_0}$.



Толщина диска: $\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m \;\Rightarrow\; \underline{d = \frac{\left(m + \frac{5}{8}\lambda\right)}{n-1}}$, $\quad m = 0, 1, \ldots$.

4А. (Козел С.М.) 1. Разность хода $\Delta = 2\frac{r^2}{2R} = \frac{r^2}{R}$; интенсивность $I(r) \sim 1 - \cos k\frac{r^2}{R}$; на фотоплёнке $\rho = 2r$; $I_\phi(\rho) \sim 1 - \cos k\frac{\rho^2}{4R}$. Число колец ($r \le r_0$): $\frac{r^2}{R} = m\lambda$; $m = \frac{r^2}{\lambda R} = 200$.

2. Ширина Δl крайнего кольца на фотоплёнке : $2\rho d\rho = 4Rdm\lambda$; $\quad d\rho = \Delta l$; $\quad dm = 1$; $\quad 2\rho = 4r_0 \Rightarrow$ $\Delta l = \dfrac{R\lambda}{r_0} = 5\cdot 10^{-3}\,см$. Условие разрешения глаза: $\dfrac{\Delta l}{L} \ge 1{,}22\dfrac{\lambda}{d_{зр}}$; $\dfrac{\Delta l}{L} = 2\cdot 10^{-4}$; $1{,}22\dfrac{\lambda}{d_{зр}} = 1{,}22\cdot 10^{-4}$; т.е. разрешение возможно, но на пределе.

3. Просвечивание фотоплёнки (голограммы): $E \sim I_\Phi(\rho) \sim 1 - \underbrace{\frac{1}{2}\exp\left(ik\frac{\rho^2}{4R}\right)}_{\text{мнимое изображение}} - \underbrace{\frac{1}{2}\exp\left(-ik\frac{\rho^2}{4R}\right)}_{\text{действительное изобр}}$. Мнимое и действительное изображения находятся на расстоянии $2R$ от голограммы.

5А. (Миславский В.В.) Пластинка из PbTe будет играть роль эталона Фабри-Перо. Энергетический коэффициент отражения поверхностей (за счет Френелевского отражения) $r = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2 \approx 0{,}5$. Разрешающая способность интерферометра (добротность) $R = \dfrac{2\pi L n\sqrt{r}}{\lambda(1-r)} = 1{,}03\cdot 10^4$. Ширина максимума пропускания (ширина резонанса) $\delta\lambda_э = \lambda/R$; $\delta\nu_э = c\delta\lambda_э/\lambda^2$. Отсюда длительность импульса $\tau = \dfrac{1}{\delta\nu_э} = \dfrac{\lambda^2}{c\delta\lambda_э} = \dfrac{\lambda R}{c} \approx 166\,пс$.

Решения студентов с оценкой добротности без $\sqrt{r}$ также предлагается считать правильными ($\tau \approx 240$ пс).

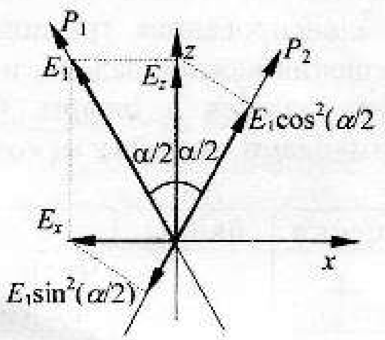
ВАРИАНТ Б

1Б. (Склизков Г.В., Гавриков А.В.) Т.к. ширина полосы не зависит от положения экрана, то источник находится в фокусе линзы. Угол схождения лучей на экране $\alpha = 2\delta\cdot(n-1)$. Ширина интерференционной полосы $\Delta x = \lambda/\alpha$ = <u>50 мкм</u>. Наибольшая ширина области пересечения волн будет на расстоянии $L = D/(2\alpha)$ = <u>25 см</u>.

Видность при использовании протяжённого источника $V = \sin\left(\dfrac{kb\Omega}{2}\right)\bigg/\left(\dfrac{kb\Omega}{2}\right)$, где Ω — апертура интерференции, b — размер источника. Если экран находится на расстоянии L от бипризмы, то лучи, интерферирующие на экране, проходят через бипризму на расстоянии $D/2$ друг от друга. Поэтому $b\Omega = (D/2)\psi = (D/2)\cdot(b/f)$, где ψ — угловой размер источника. Таким образом, $V = \sin\left(\dfrac{kDb}{4f}\right)\bigg/\left(\dfrac{kDb}{4f}\right) = 0{,}64$, т.е. $\dfrac{kDb}{4f} = \dfrac{\pi}{2}$, откуда $b = \lambda f/D = 40\,мкм = \underline{4\cdot 10^{-3}\,см}$. Отметим, что $\psi = 10^{-4} \ll \delta$.

2Б. (Петухов В.А.) Решение аналогично задаче с "лазеромобилем" (2А).
$D = 1{,}22\lambda L E_0(c\tau/32W)^{0,5} = 3{,}74$ м. Если решать более точно, то 1,22 нужно заменить на $4/\pi$ и получится $D = 3{,}90$ м.
Как и в 2А, решения с вдвое большими диаметрами предлагается считать правильными.

3Б. (Кобякин А.С.) После первого поляроида выходит линейно поляризованный свет с интенсивностью $I_1 = I_0/2 = E_1^2$. Углы между направлением вектора напряженности и осями пластинки равны $\alpha/2 = 30°$ и $90° - \alpha/2 = 60°$. Таким образом, проекции амплитуды на оси пластинки равны $E_x = E_1 \sin(\alpha/2)$ и $E_y = E_1\cos(\alpha/2)$. Интерферирующие проекции этих проекций на разрешённое направление второго поляроида — $E_1 \sin^2(\alpha/2) = E_1/4$ и $E_1\cos^2(\alpha/2) = 3E_1/4$.



Пластинка создает разность фаз $\pm\frac{2}{3}\pi$ ($\pm$ — т.к. главная ось не определена как быстрая или медленная). Полная разность фаз между интерферирующими волнами $\Delta\varphi = \pm\frac{2}{3}\pi + \pi$ ($+\pi$ — т.к. проекции на разрешенное направление второго поляроида имеют разные знаки). В результате интерференции получившаяся интенсивность $I = E_1^2\left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} - \frac{2}{16}\sqrt{9}\cos\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{13}{16}E_1^2 = \frac{13}{32}I_0$.

4Б. (Локшин Г.Р.) Положение плоскостей саморепродукции (самовоспроизведения периодической структуры) для линий λ_1 и λ_2: $z_1 = \frac{2d^2}{\lambda_1}m_1$, $z_2 = \frac{2d^2}{\lambda_2}m_2$. При условии $z_1 = z_2$ m_1-плоскость для линии λ_1 совпадает с m_2-плоскостью для линии λ_2, откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{600}{450} = \frac{4}{3}$, т.е. при $m_1 = 4$ и $m_2 = 3$ плоскости z_1 и z_2 совпадают, при этом изображение в оранжевом цвете совпадает с изображением в синем цвете, интенсивность максимальна и равна сумме интенсивностей $I = I_{\text{ор}} + I_{\text{син}}$. $z = \frac{2d^2}{6\cdot 10^{-5}}\cdot 4 = 53{,}3\ см$.

5Б. (Миславский В.В.) Толщина эталона будет выбираться из 2-х условий. С одной стороны, чтобы дисперсионная область $\Delta\nu_э$ была больше половины ширины линии усиления лазера $\Delta\nu_0$: $\Delta\nu_э \geq \frac{\Delta\nu_0}{2}$. Тогда, если один из максимумов пропускания эталона будет совпадать с максимумом линии усиления, соседние максимумы пропускания эталона выйдут за пределы контура усиления.
С другой стороны, ширина максимума пропускания эталона Фабри-Перо $\delta\nu_э$ должна быть меньше межмодового расстояния $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$. Из условия $\Delta\nu_э = \frac{c}{2\pi L_э} \geq \frac{\Delta\nu_0}{2}$ получим $L_э \leq \frac{c}{n\Delta\nu_0} \approx 5{,}71\ см$.

$\delta\nu_э = \frac{\nu}{R}$, где $R = \frac{2\pi L_э n\sqrt{r}}{\lambda(1-r)}$ — разрешающая способность (добротность) эталона. Из условия $\delta\nu_э = \frac{c(1-r)}{2\pi L_э n\sqrt{r}} \leq \frac{c}{2L}$ получим оценку $L_э \geq \frac{L(1-r)}{\pi n\sqrt{r}} \approx 1{,}66\ см$. Таким образом, оценка даёт $\underline{1{,}66\ см \leq L_э \leq 5{,}71\ см}$.

Учитывая условие, что на оптической длине эталона должно укладываться целое число полуволн т.е. $L_э = m\lambda/2n$, где m – целое число, можно найти одно из значений $L_э = 3{,}7\ см$.

Как и в задаче 5А, решения студентов с оценкой добротности без $\sqrt{r}$ также предлагается считать правильными.