УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
12 января 2022 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 25 ноября 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).

2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.

3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.

   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).

   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).

4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных урав-нений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.

3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

<u>*Дополнительная*</u>

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Зависимость решений от параметра и начальных условий

Ф.: 1064; <u>1066</u>; 1067*.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: <u>667</u>; 668; 679.

С. §9: 10; 24; 52; 74 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

<u>1</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=\text{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: <u>723</u>; 726.

С. §10: <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

<u>2</u>. Доказать, что в случае $q(x)\le 0$ краевая задача $y''+q(x)y=0, y(x_1)=a$, $y(x_2)=b$, при любых a,b и $x_1\ne x_2$ имеет единственное решение.

<u>3</u>. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y''+2x^2y'+(2x+1)y=0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

4. Доказать, что любое решение уравнения

$$y''+(2+\cos 3x)y=0$$

имеет хотя бы один нуль на отрезке $[-1;3]$.

5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0,+\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1}-x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n\to+\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 978*.

С. §13: 39; 44; 57.

Ф. §25: 166.

V. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 897; 915; 889*.

$\boxed{29+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 1; <u>12</u>.

Ф.: <u>1164</u>.

<u>1</u>. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, в пунктах а), б) и в) исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$;

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$;

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dot{y} = v, & \dot{v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dot{z} = w, & \dot{w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$

где $\varphi(x, y, z)$ — всюду дифференцируемая функция.

С. §16: 5; 26.

3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1, 1)/T(2, 2)$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; <u>14</u>; 24; 42; 91.

<u>4</u>. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;

б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;

в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

5*. Для всех $t \geq 0$ и $y \geq 0$ найти решение следующей задачи:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

при условии, что

$$f(0, x, y, u, v) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{-b(u^2+v^2)}$$

и для $v \geq 0$,

$$f(t, x, 0, u, v) = \frac{1 + 0.5 \sin \Omega t}{x^2} e^{-b(u^2+v^2)}.$$

III. Вариационное исчисление

С. §19: 13; 38; 57; 102.
С. §20.1: 3; 9; 14.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 4.
С. §21: 8.

6. Найти допустимую экстремаль изопериметрической задачи:

$$J(y) = \int_0^\pi [y^2 - (y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1,$$

$$\int_0^\pi y \cos x dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi y \sin nx dx = \pi.$$

IV. Повторение

С. §6: 31.
С. §7: 56.
С. §8: 129.
С. §9: 31.
С. §11: 35.
С. §13: 49.
С. §17: 84.
С. §20.1: 8.

35+2*

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор, А. М. Бишаев