§ Комплексные числа

§1

1(2,4) 2) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}=\cancel{5(2+4i+(1-2i)^2}\; 5\cdot\frac{3+i}{4+3i}=$

$=5\cdot\frac{(i+3)(4-3i)}{25}=\frac{12-5i+3}{5}=3-i$

4) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}=\frac{1+4i-4-(1-3i+3i^2-i^3)}{27+54i+36i^2+8i^3-4-4i-i^2}=$

$-36 \qquad +1$

$=\frac{4i-4+3i+3-i}{-12+42i}$ (=) $\frac{6i-1}{-12+58i}=\frac{1}{2}\frac{(6i-1)\cdot(-(12+58i))}{877}=$

$=-\frac{1}{2}\frac{-12-58i+72i-658}{877}=$ $-6+29i$

$36+29^2$

$(30-1)^2$

$900-60+1$

841

$+36$

877

$29 \cdot 29$

261

58

841

$=-\frac{1}{12}\frac{-360+14i}{877}$

$\frac{180-7i}{6\cdot 877}$

(5) $\frac{6i-1}{-12+42i}=-\frac{1}{6}\frac{6i-1}{2-7i}=\frac{-1}{6}\frac{(6i-1)\cdot(2+7i)}{4+49}=-\frac{1}{6\cdot 53}(-44+5i)=$

$=\frac{22}{159}-\frac{5i}{318}$

N2 2) $z=(-3+4i)^3$

$(5\cdot e^{i\varphi})^3=125\cdot e^{i\cdot 3\varphi}=125\cdot(\cos(3\varphi)+i\sin(3\varphi))$

$\cancel{\varphi=\operatorname{arctg}3/4}$ $\qquad \varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

3) $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = 2\cos^2\frac{\pi}{14} + i\cdot 2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14} =$

$= 2\cos\frac{\pi}{14}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right) = \underbrace{2\cos\frac{\pi}{14}}_{\rho}\cdot e^{i\frac{\pi}{14}}$

4) $z = \frac{(1+i)^9}{(1-\sqrt{3}i)^6}$

$(1+i)^9 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9 = 16\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{4}}$

$(1-\sqrt{3}i)^6 = \left(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 64\cdot e^{i(-2\pi)} = 64$

$z = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{9\pi}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) =$

$= 2^{-\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

№3 $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$

$z = x + iy$

$x^2 + y^2 - 2ix + 2y + 2i = 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & (y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1 \\ 2 - 2x = 0 & \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - i$

№4 2) $\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4 \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i| \end{cases}$

$z = x + iy \qquad x^2 - y^2 + (2xy - 2)i$

$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2 = 16 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$

$4x + 4y = 0 \quad x = -y$

$$4(x^2+1)^2=16$$

$$(x^2+1)^2=4$$

$$x^2+1=2$$

$$x^2=1 \quad x=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad z_1=1-i$$

$$z_2=-1+i$$

№5 4) $z^8=1+i$

$$z^8=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z=2^{\frac{1}{16}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)/8},\ n\in\{0,\dots,7\}$$

№6 Доказать, что $z=\overline{z_0}$ корень $P(z)$ с действительными к-ми, если $z=z_0$ уже является его корнем

$$P(z)=az^n+bz^{n-1}+\dots+p$$

$$P(z_0)=0$$

$$(x_0+iy_0)^n$$

$$(x_0^n+C_n^1x_0^{n-1}y_0\cdot i+\dots+(iy_0)^n)$$

$$P(\overline{z_0})=a(\overline{z_0})^n+\dots+p=a\overline{(z_0^n)}+\dots+p=\overline{P(z_0)}=0$$

по св-вам сопряжения

т.к. z_0 корень

$\Rightarrow$ $z=\overline{z_0}$ тоже корень.

№4 3) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a \qquad a>\frac{1}{2}|z_2-z_1|$

эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и большой полуосью a

№9 3) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$

$z = x+iy$ $\operatorname{Im} \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = 0$

$\operatorname{Im}\left(x^2-1+(x+1-x+1)iy+y^2\right) = 0$

$\Rightarrow 2y = 0 \quad y = 0 \quad x \in R$

прямая соответствующая оси абсцисс

4) $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$

$\operatorname{Re}\left[(x-a+iy)(x+a-iy)\right] = 0$

$\operatorname{Re}\left[x^2-a^2+y^2+2a\cdot iy\right] = 0$

$x^2+y^2 = a^2$

окружность в начале координат с радиусом a.

№10 7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$

$z = x+iy \quad \arg(x+(y+1)i)$

$~~arctg~~ 1 < \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x} < \infty$

угол $\frac{\pi}{4}$ образованный осями $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$

в ~~вв~~ точке $-i$.

g) $Re\ z^4 > Im\ z^4$

$(x^2-y^2+2xy\,i)^2$

$\left[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4xy(x^2-y^2)\,i\right]$

$(x^2-y^2)^2-4x^2y^2 > 4xy(x^2-y^2)$

$x^4-6x^2y^2+y^4 > 4x^3y-4xy^3$

$x^4-4x^3y-6x^2y^2+4xy^3+y^4>0$

$(x+y)^4 > 8x^3y+12x^2y^2$

$4xy(2x^2+3xy)$

$(x+y)^4 > 4x^2y(2x+3y)$

$\bar{z}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$Re\left[\rho^4(\cos4\varphi+i\sin4\varphi)\right] > Im\left[\rho^4(\cos4\varphi+i\sin4\varphi)\right]$

$\cancel{\rho^4}\cos4\varphi > \cancel{\rho^4}\sin4\varphi$

$\cos4\varphi-\sin4\varphi>0$

$\sqrt{2}\cos\left(4\varphi+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$-\frac{\pi}{2}<4\varphi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}k<\varphi<\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}k$