

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
А. А. Воронов  
12 января 2022 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**  
по направлению: **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,**  
подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»,**  
**09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,**  
**10.05.01 «Компьютерная безопасность»,**  
**16.03.01 «Техническая физика»,**  
**19.03.01 «Биотехнология»,**  
**27.03.03 «Системный анализ и управление»**  
физтех-школы: **для всех, кроме ФПМИ**  
кафедра: **высшей математики**  
курс: **2**  
семестр: **4**

лекции — 30 часов  
практические (семинарские)  
занятия — 30 часов  
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:  
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский  
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская  
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова

Программа принята на заседании кафедры  
высшей математики 25 ноября 2021 г.

Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства  $C[a, b]$ . Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы (кроме потока Я.М. Дымарского).
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета-функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций  $D$  и пространство обобщенных функций  $D'$ . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

## Литература

### Основная

1. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

### Дополнительная

7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

## ЗАДАНИЯ

### Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

### Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные \*, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

## I. Тригонометрические ряды Фурье

**С.2. §22:** 1(6); 2; 10; 14; 30; 41; 43; 45 В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье (кроме задачи 2) и исследуйте ряд на равномерную сходимость на  $\mathbb{R}$  (и в задаче 2 в том числе).

**С.2. §22:** 23; 65; 59; 66; 72; 110; 111(4;2;3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [0; \pi/2]$  по системам:

а)  $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ ;      б)  $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$ ;

в)  $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ ;      г)  $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ ?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда

а)  $x^9$ ;    б)  $x^8$ ;    в)  $|x|(x^2 - \pi^2)^2$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ ;    г)  $(\pi^2 - x^2) \sin^2 x$ .

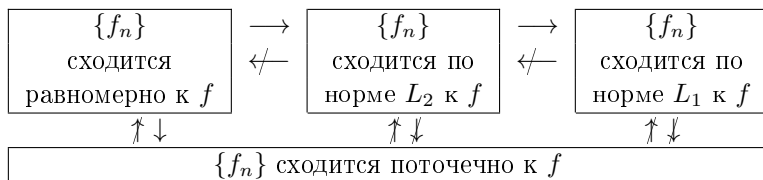
**С.2. §22:** 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы

рядов:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ .

**С.2. §16:** 47\*(2); 48(1; 2).

## II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если  $f$  – функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , а  $\{f_n\}$  – последовательность функций, непрерывных на  $[a, b]$ , то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):



**С.3. §18:** 92; 97; 98\*.

4. Докажите, что система функций  $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$  полна в пространствах  $C[a, b]$ ,  $CL_1[a, b]$ ,  $CL_2[a, b]$ .

**С.3. §19:** 116; 126\*.

**5.** Полна ли система функций  $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$  в пространстве

а)  $C([2; 3])$ ;      б) в пространстве  $C([0; 3])$ ?

**6.** Полна ли система  $\{\sin(2kx)\}_{k=1}^{\infty}$  в пространстве:

а)  $C[0; \pi/2]$ ;      б)  $[1/2; 1]$ ;      в)  $C[0; \pi/2]$  с условием  $f(0) = f(\pi/2) = 0$ ?

35 + 3\*

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–23 мая)

**I. Собственные интегралы, зависящие от параметра**

**С.3. §13:** 2(4); 14(4); 17; 18\*(3).

**II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра**

**С.3. §14:** 1(1) — исследовать также при  $\alpha \in (1; +\infty)$ .

1(2) — исследовать также при  $\alpha \in (0; 1)$

**С.3. §14:** 6(5); 7(4, 5, 6); 8(1).

**1.** Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

**С.3. §15:** 3(1); 3(5); 4(4); 6(1, 3, 5); 13(3); 14\*; 15(5).

**С.3. §16:** 1(4, 5, 6); 7(5); 9(5); 14(5).

**III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье**

**С.2. §12:** 253; 255.

**2.** Пусть функция  $f$  абсолютно интегрируема на любом подотрезке. Докажите, что если  $f$  нечетна, то

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

**С.3. §17:** 1(3); 3(1); 5(2); 6(1); 7(3); 8(2,6); 14(1, 3); 17\*(1).

**IV. Обобщенные функции**

**С.3. §21:** 60; 62.

3. Докажите, что в  $D'$  справедливы равенства:

а)  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$ ;      б)  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi \delta(x)$ .

**С.3. §21:** 73; 75\*; 77\*; 84.

4. Найдите в  $D'$

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

5. Упростите в  $D'$  выражения:

а)  $\left( \frac{x^{2021}}{1+x^{2022}} + \sin^7 x \cos^4 3x + e^{\cos x} \right) \delta(x)$ ;

б)  $(e^{\sin x} - 2 \operatorname{sh} x) \delta'(x)$ ;

в)  $(xe^x) \delta''(x)$ .

43 + 6*
---------

---

Составитель задания

ассистент М. В. Меликян