1. Какова физическая размерность обобщенного импульса?
2. В каком случае переход от лагранжевой механики к гамильтоновой невозможен?
3. В чём состоят преимущества и недостатки канонических уравнений Гамильтона перед уравнениями Лагранжа?
4. Для каких гамильтоновых систем справедливо соотношение **H=T+П** ?
5. Некая скалярная функция от лагранжевых переменных является первым интегралом движения механической системы. Будет ли она являться первым интегралом этой системы при переходе к гамильтоновым переменным?
6. Каким образом по структуре гамильтониана можно установить первые интегралы движения?
7. Допустим, мы нашли несколько первых интегралов движения гамильтоновой системы. Как установить, являются ли они независимыми?
8. Механическая система имеет 2 степени свободы. Сколько у это системы независимых первых интегралов движения?
9. Пусть гамильтонова система имеет одну циклическую переменную. Каким образом можно понизить порядок системы на две единицы?
10. Гамильтонова система является обобщенно консервативной. Каким образом можно понизить её порядок на две единицы?
11. Одно из достоинств теореме Э.Нётер состоит в том, что эта теорема позволяет увидеть связь между законами сохранения в механике и некоторыми свойствами пространства и времени. В чём состоит эта связь?
12. Некая механическая система инвариантна к повороту относительно оси Oz. Какой закон сохранения в этой системе можно установить, используя теорему Э.Нётер?
13. Объяснить, почему действие по Гамильтону мы называем функционалом.
14. Что такое вариация действия по Гамильтону? В каком случае вариация действия по Гамильтону равна нулю?
15. В каком случае Принцип Гамильтона можно трактовать как **Принцип наименьшего действия**?
16. Могут ли два прямых пути одной системы пересекаться в расширенном

17. В механике актуальны как Задача Коши, так и Краевая Задача. Как обстоит дело с вопросом существования и единственности решения этих задач?
18. В чём состоит универсальность универсального интегрального инварианта Пуанкаре? Является ли универсальным интегральный инвариант Лиувилля (фазовый объём)?

19. Для каких гамильтоновых систем интегральные инварианты Лиувилля и Пуанкаре равны друг другу по модулю на любой трубке прямых путей?
20. Пусть система имеет три степени свободы. Какую размерность имеет множество точек, принадлежащих трубке прямых путей этой системы?
21. Пусть гамильтонова система имеет две степени свободы. Чему равна дивергенция правых частей этой гамильтоновой системы?
22. На некоторой трубке прямых путей гамильтоновой системы с гамильтонианом **H=(q, p, t)** подсчитаны интеграл Пуанкаре и интеграл Пуанкаре-Картана. Чему равна их разность?
23. При движении некоторой механической системы происходит диссипация энергии. Как при этом изменяется фазовый объём данной системы?
24. Теорема Ли Хуачжуна сравнивает между собой интегральный инвариант Пуанкаре и универсальный интегральный инвариант общего вида. На каких контурах происходит сравнение этих интегралов?
25. Каноническое преобразование имеет валентность **c=1**. Как нужно изменить это преобразование, чтобы оно, оставаясь каноническим, изменило свою валентность на **c=2** ?
26. Что производит производящая функция канонического преобразования ?
27. Две гамильтоновы системы с гамильтонианами H_1 и H_2 подвергнуты одному и тому же свободному каноническому преобразованию. Чему равна разность преобразованных гамильтонианов ?
28. В чём состоит полнота полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби?
29. Пусть некоторая функция S(q,t) обращает уравнение Гамильтона-Якоби в тождество, то есть является его решением. Можно ли её назвать полным интегралом этого уравнения?
30. Студент находит полный интеграл некоторого уравнения Гамильтона-Якоби, и видит, что его ответ не совпал с ответом в задачнике. Значит ли это, что студент ошибся?
31. Имеется два способа найти закон движения гамильтоновой системы: а) с помощью первых интегралов движения, б) с помощью полного интеграла уравнения Г.-Я. Указать преимущества и недостатки каждого метода.
32. Для того, чтобы из полного интеграла S уравнения Г.-Я. можно было найти

33. Для некоторой механической системы составлено уравнение Гамильтона-Якоби. Сравнить между собой три его решения: общее, частное, полный интеграл.
34. Как известно, задача Коши в механике имеет единственное решение. Как это увязать с тем, что уравнение Г.-Я. может иметь несколько различных полных интегралов ?

1) **Какова физ. размерность обобщенного импульса.**
   Размерность обобщенного - размерность момента количества движения: если линейное (q = x, y, z) то mV если вращательное (q = ф) то момент импульса
2) **В каком случае переход от Лагранжевой механики к Гамамильтоновой невозможен.**
   Есть непотенциальная сила или не все связи идеальны и Гессиан Лагранжана не равен 0
3) **Плюсы и минусы уравнений Гамильтона перед уравнениями Лагранжа**
   +:Более простая структура, система в нормальной форме Коши.
   -:Более узкий круг систем: нельзя в непотенциальные силы и неидеальные связи
4) **Для каких гамильтоновых систем справедливо соотношение H = T + П?**
   Для консервативных систем. (Не потенц. силы не сов. работы)
   Для натуральных склерономных систем. (Склерономная - нет явной зависимости от T, натуральная - силы имеют обычный или обобщенный потенциал)
5) **Некая скалярная функция от лагранжевых переменных является первым интегралом движения механической системы. Будет ли она являться первым интегралом этой системе при переходе к гамильтоновым переменным?**

Критерий первого интеграла в изначальном виде сформулирован в Лагранжевых координатах, а критерий для Гамильтониана получаем просто подстановкой в него Гамльитоновых переменных.

//не уверен, но вероятно да просто выражаем q. через обобщенные импульсы и подставляем, значение функции не изменится.

6) **Каким образом по структуре гамильтониана можно установить первые интегралы движения?**

Если переменные отделяемы, т.е. например H = H(f1(q1,p1), f2(q2,p2)) то f1 и f2 являются первыми интегралами.

Также если t не входит в H то он первый интеграл, очевидно из критерия 1го интеграла.

Если гамильтониан не зависит от какой-либо переменной => она циклическая, то обобщенный импульс соответствующий этой переменной -- первый интеграл.

(+ структура матрешки, независимых индексов; + если куски уравнения содержат только один индекс, то можно этот кусок считать первым интегралом)

7) **Допустим, мы нашли несколько первых интегралов движения гамильтоновой системы. Как установить, являются ли они независимыми?**

Пусть $f_1, \cdots, f_n$ -- первые интегралы. Вычислим ранг матрицы $\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(q_1, \cdots, q_m, p_1, \cdots, p_m)}$.

Если её ранг равен n, то $f_1, \cdots, f_n$ - независимы

Первые интегралы $G_1, \ldots, G_k$ независимы, если не существует функции Φ такой, что

$$\Phi(G_1(\overrightarrow{x}), \ldots, G_k(\overrightarrow{x})) = 0$$

8) **Механическая система имеет 2 степени свободы. Сколько у этой системы независимых первых интегралов движения?**

Система имеет не более 3 независимых интегралов.

Для доказательства допустим, что есть 4 первых интеграла $f_1, \cdots, f_4$. Тогда получим систему из 4 уравнений вида

$$f_i(q, p) = C_i, \ i = \overline{1 \cdots 4}$$

Это система из 4 уравнений с 4 неизвестными q_1, q_2, p_1, p_2⇒её можно разрешить:

$$q_i = q^*_i, \ p_i = p^*_i$$

Таким образом, движение отсутствует, значит четвёртого интеграла быть не может

+ Нюанс: если берешь автономные системы, то 3 интеграла, но если допускаешь среди первых интегралов зависящие от времени, то их будет 4

9) **Пусть гамильтонова система имеет одну циклическую переменную. Каким образом можно понизить порядок системы на 2 единицы?**

Пусть переменная q_1- циклическая, тогда из уравнений Гамильтона с n степенями свободы

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow p_1 = const = C_1$$

Подставим эту константу в остальные $2n - 2$уравнений и получим, что уравнение $\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$не зависит от остальных. Таким образом, получаем систему на 2 порядка ниже. Решая ее, подставляем результат в $\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$и получаем итоговый ответ.

10) **Гамильтонова система является обобщённо консервативной. Как можно понизить ее порядок на 2 единицы?**

Если гамильтонова система обобщенно консервативная, значит ее гамильтониан не зависит от времени, значит из критерия первого интеграла следует, что гамильтониан является первым интегралом движения. Итого, H - первый интеграл, t - циклическая переменная, далее действуем аналогично 9)

Вопрос решается с помощью уравнения Уиттекера

(Пусть время не входит в Гамильтониан, тогда вместо времени будем использовать координаты. Получаются уравнения Уиттекера, с помощью которых можно понизить порядок на два)

Рассмотрим теперь обобщенно консервативную систему. В ней, как было установлено, гамильтониан является первым интегралом:

$$\mathcal{H}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}) = h = const$$

Выразим из этого уравнения обобщенный импульс p_1 в предположении, что гамильтониан явно зависит от p_1:

$$p_1 = -K(\overrightarrow{q}, p_2, \ldots, p_n, h)$$

Подставив этот обобщенный импульс обратно в гамильтониан, получим тождество

$$\mathcal{H}\left[\overrightarrow{q}, -K, p_2, \ldots, p_n\right] \equiv h$$

Продифференцировав полученное тождество по переменным q_i, p_i, $i \in [2, n]$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}\left(-\dfrac{\partial K}{\partial q_i}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}\left(-\dfrac{\partial K}{\partial p_i}\right) = 0 \end{cases}$$

Теперь уравнения Гамильтона при $i \in [2, n]$ можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}\dfrac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_1 \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}\dfrac{\partial K}{\partial q_i} = \dot{q}_1 \dfrac{\partial K}{\partial q_i}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dq_1} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dq_1} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_i} \end{cases}$$

— **уравнения Уиттекера**.

11) **Одно из достоинств теоремы Эмми Нётер состоит в том, что эта теорема позволяет увидеть связь между законами сохранения в механике и некоторыми свойствами пространства и времени. В чем состоит эта связь?**
Если лагранжиан системы не содержит координату qi то элементарное действие по гамильтону инвариантно к сдвигу по координате qi* = qi + a; => из формы первого интеграла Ф = p dq*/dt - H dt*/da следует сохранение pi = const. Аналогично со временем => ЗСЭ. Сдвиг по координате есть однородность пространства, => ЗСИ, а сдвиг по времени - однородность времени => ЗСЭ

12) **Некая механическая система инвариантна к повороту относительно оси Oz. Какой закон сохранения в этой системе можно установить, используя теорему Эмми Нётер.**
ЗСМИ (относительно оси z!), аналогично с зси. в данном случае qi - угол поворота. Элементарное действие по Гамильтону инвариантно относительно qi*

= qi + a => из формы первого интеграла Ф = p dq*/dt - H dt*/da следует сохранение pi - момента импульса.

в) Рассмотрим преобразование поворота вокруг оси Oz:

$$x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z^* = z, \quad t^* = t$$

Пусть система замкнута

Оно тождественно при $\alpha = 0$, дифференцируемо, T и П не меняются при повороте значит $dW^* = dW$. Найдем интеграл Нётер:

$$\Phi = p_x \frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + p_y \frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = p_x y - p_y x = K_z$$

То есть $K_z = const$ если T и П не меняются при преобразовании поворота.

13) **Объяснить, почему действие по Гамильтону мы называем функционалом**

Действие по Гамильтону W = $\int_{t1}^{t2}$ L(q,q',t)dt. Подставляя разные функции q(t) получаем разные значения W это и означает что W функционал

14) **Что такое действие по Гамильтону? В каком случае вариация действия по Гамильтону равна нулю?**

Вариация действия по гамильтону для некоторого семейства $q(\alpha)$:

$\delta W = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha$Вариация равна 0 на прямом пути. Обратное тоже верно. Это и есть **Принцип Гамильтона**.

15) **В каком случае принцип Гамильтона можно трактовать как принцип наименьшего действия?**

Принцип наименьшего действия ($W_{пр} < W_{ок}$) справедлив до первого сопряженного кинетического фокуса (т.е. если на прямом пути нет кин. фокусов), если же его нет, то то Wпр минимальна всюду. (например, если единственное решение краевой задачи)

16) **Могут ли 2 прямых пути пересекаться в расширенном фазовом пространстве?**

Могут в сопряженном фокусе

17) **В механике актуальны как задача Коши, так и краевая задача. Как обстоит дело с вопросом существования и единственности решения этих задач?**

Решение задачи Коши (заданы t0 q0 q0.) существует и единственно. В расширенном фазовом.

Решение краевой задачи (заданы t1 q1 t2 q2) может существовать но не быть единственным или не существовать вовсе. В расширенном координатном пространстве.

18) **В чем состоит универсальность универсального интегрального инварианта Пуанкаре. Является ли универсальным интегральным инвариантом Луивилля (фазовый объем)?**
Интеграл Пуанкаре является универсальным, т.к. он не зависит от гамильтониана системы. Интеграл Лиувилля (сохранение фазового объема) зависит только от области G в фазовом пространстве по которой он берется => не зависит от гамильтониана => универсален.

Универсальность означает инвариантность для любой гамильтоновой системы (гамильтониан не входит в выражение для интеграла), то есть значение этого интегрального инварианта одинаково для любой гамильтоновой системы, если рассматривается одна и та же трубка прямых путей.

19) **Для каких гамильтоновых систем интегральные инварианты Луивилля и Пуанкаре равны друг другу по модулю на любой трубке прямых путей?**
Применяем формулу грина к интегралу Пуанкаре: Получаем:

$\oint\limits_{C} p'dq \ = \ -\oint\limits_{G} \frac{dp'}{dp} dqdp$ // I[A] - интеграл по множеству A; C - контур на трубке, граница G. Видим что если dp’/dp = 1 то правая часть это -фазовый объем (интеграл Лиувилля)

20) **Пусть система имеет 3 степени свободы. Какую размерность имеет множество точек, принадлежащих трубке прямых путей этой системы?**
Всегда двумерная вне зависимости от размерности фазового пространства: некий контур параметризуется q0(a) p0(a) t0(a). a - задает траекторию на трубке; t - задает точку на этой траектории.

21) **Пусть гамильтонова система имеет 2 сепени свободы. Чему равна дивергенция правых частей этой гамильтоновой системы?**
дивергенция правых частей системы {q.=dH/dp; p.=-dH/dq} div(dH/dp; -dH/dq) = 0 т.к. система гамильтонова (сохраняется фазовый объем)

$$\dot{V}_t = \int\limits_{G_t}\!\cdots\!\int \operatorname{div}\vec{F}(\vec{x})dx_1\ldots dx_n$$

ну или в лоб: div = SUM[i =1,2](d2H/dqidpi - d2H/dpidqi).

22) **На некоторой трубке прямых путей гамильтоновой системы с гамильтонианом H(q, p, t) подсчитаны интегралы Пуанкаре и Пуанкаре-Картана. Чему равна их разность?**

$J\text{п} - J\text{пк} \ = \ \oint\limits_{C}(p'dq) \ - \oint\limits_{C}(p'dq \ - \ H(q,p,t)dt) \ = \oint\limits_{C} H(q,p,t)dt$

23. При движении некоторой механической системы происходит диссипация энергии. Как при этом изменяется фазовый объём данной системы?
24. Теорема Ли Хуачжуна сравнивает между собой интегральный инвариант Пуанкаре и универсальный интегральный инвариант общего вида. На каких контурах происходит сравнение этих интегралов?

23) Уменьшится

24) По контуру одновременных состояний (Изохронные контуры)

25) **Каноническое преобразование имеет валентность с = 1. Как нужно изменить это преобразование чтобы оно, оставаясь каноническим, изменило свою валентность на с = 2?**
Преобразование каноническое => выполняется p~dq~ - c * pdq = -dF(q, p, t), c = 1; чтоб валентность с стала равной 2 можно вместо p~ в преобразовании взять p~/2: тогда p~dq~ - 2c * pdq = -2dF(q, p, t) = -dG(q, p, t). т.е. преобразование каноническое с валентностью 2с

26) **Что производит производящая функция канонического преобразования?**
Производящая функция может задавать p и p~: p = 1/c dS/dq; p~ = -dS/dq~ => может “производить” преобразование если дана она сама и валентность, из {p; p~} выражаются p(q~, p~, t) и q(q~, p~, t)

27) **Две гамильтоновых системы с гамильтонианами H1 и H2 подвергнуты одному и тому же свободному каноническому преобразованию Чему равна разность преобразованных гамильтонианов?**
Преобразование гамильтониана: H~ = cH + dS/dt. Т.е. H1~ - H2~ = c(H1 - H2)

28) **В чем состоит полнота полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби?**
1. S имеет определенный набор аргументов,
2. S - решение гамильтона-якоби,
3. Помогает разрешить $\beta = \; -\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ относительно q. При этом всем информации, заложенной в S, если он полный интеграл, достаточно чтобы восстановить исходное уравнение Гамильтона-Якоби.

29) **Пусть некоторая функция S(q, t) обращает уравнение Гамильтона-Якоби в тождество, то есть является его решением. Можно ли её назвать полным интегралом этого уравнения?**
Нельзя, полный интеграл это просто решение Гамильтона-Якоби с набором аргументов S(q,a,t) но функция позволяющая разрешить систему Bi = dS/da. Т.е. должно выполняться неравенство гессиана det (d2S/dadq) != 0.

30) **Студент находит полный интеграл некоторого уравнения Гамильтона-Якоби, и видит, что его ответ не совпал с ответом в задачнике. Значит ли это, что студент ошибся?**
Не значит, константы можно выбирать по-разному различными методами. Также в определении полного интеграла ни слова про единственность

31) **Имеется 2 способа найти полный закон движения гамильтоновой системы:**
а) первые интегралы
б) полный интеграл (Г-Я)
Указать преимущества и недостатки обоих.
а) **Первые интегралы:**
+: если нам все же удалось найти первые интегралы, то дальнейшие расчеты достаточно просты, тк мы понизим порядок системы и дальше уже можно выписать ответ (ну хотя бы в квадратурах)
-: нет способа гарантированного нахождения первых интегралов, т.е. задача по их поиску не решается за конечное время (как повезет).

б) **Ур-ние Г-Я:**

“+”: если определим вид в котором искать S (разделение переменных, подсказки) то дальнейшие действия по алгоритму и, соответственно, производятся за конечное время.
“-”: ответ будет громоздким с большим количеством констант в лучшем случае, а в более реальном - в квадратурах, тяжело анализировать.

32)
Необходимо разрешить систему Bi = dS/da для нахождения q = q (p, a, B, t)

33) **Для некоторой механической системы составлено уравнение Г.-Я. Сравнить между собой три его решения: общее, частное, полный интеграл**
Полный интеграл:

Поясним название „полный интеграл. (11)
Далеко не любая функция S, удовлетворяющая уравнению Г.-Я. $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$ является полным интегралом в смысле трех свойств, указанных на листе 4.
У полного интеграла имеется замечательное свойство: заложенной в нем информации вполне достаточно, чтобы восстановить исходное уравнение Г.-Я. Например, по корням полинома нельзя восстановить точно полином. А по $S(q,\alpha,t)$ восстановить ур. Г-Я. можно.

Его свойства с листа 4:

1) Функция $S = S(q, \alpha, t)$ имеет [illegible] ...лённый набор аргументов: $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, t. Здесь n – число степеней свободы.

2) Функция $S = S(q, \alpha, t)$ обращает уравнение $(2')$ в тождество, то есть является его решением

3) Функция $S = S(q, \alpha, t)$ при её подстановке в $(5'')$ позволяет разрешить полученную алгебраическую систему $\beta = \beta(q, \alpha, t)$ относительно неизвестных q, т.е. $\left| \dfrac{\partial^2 S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha\, \partial q} \right| \neq 0$.

Гессиан

S является решением уравнения Г.-Я., частным как минимум. При подстановке сюда:

$$\beta = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha} \qquad (5'') \Rightarrow \beta = \beta(q, \alpha, t)$$

Можно вытащить полное решение системы.

34) **Как известно, задача Коши в механике имеет единственное решение. Как это увязать с тем, что уравнение Г.-Я. может иметь несколько различных полных интегралов?**

//не уверен но мб т.к. Полный интеграл не есть решение задачи движения, и разные полные интегралы при разрешении Bi = dS/da дают одно и то же движение