Темы к экзамену по теории поля.

Жуков Аркадий.

Содержание

Предисловие

Некоторые билеты были выкинуты, так как они повторяются. Другие билеты могли быть объединены, так как очень сильно пересекаются. В заголовке перечислены все темы билетов, которые вошли в соответствующую секцию. Если не оговорено иначе, мы считаем, что $\varepsilon = \mu = 1$ — все происходит в вакууме. Отдельную благодарность автор выражает Демиду Дорогинину, который компенсировал безграмотность и невнимательность автора, а также оказал небольшую помощь в оформлении содержания.

1 Преобразование Лоренца вдоль направления оси x. Гамма- и бета-факторы.

В Специальной Теории Относительности (СТО) мы постулируем следующее:

1. Скорость света в вакууме является максимально возможной скоростью в природе.

2. Пространство и время образуют четырехмерный ПВ континуум с метрикой пространства Минковского, то есть:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2. \tag{1}$$

Данная величина называется *интервалом.* Нетрудно заметить, что интервал не измениться при преобразовании, которое называется *лоренцевским бустом*:

$$\begin{aligned} ct' &= ct \operatorname{ch}\alpha + x \operatorname{sh}\alpha, \\ x' &= ct \operatorname{sh}\alpha + x \operatorname{ch}\alpha, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Еще один постулат гласит следующее: *Лоренцевский буст имеет физический смысл перехода из одной ИСО в другую, которая движется относительно первой вдоль оси x со скоростью v, то есть*

$$\operatorname{ch}\alpha = \gamma, \quad \operatorname{sh}\alpha = -\beta\gamma,$$

где $\beta = v/c$, а $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ — бета- и гамма-факторы соответственно.

2 Световой конус и относительность одновременности.

Определение. Точка в ПВ называется *событием* или *мировой точкой.* Множество мировых точек, которые соответствуют движению исследуемой точечной частицы в ПВ, называется *мировой линией.*

Отсюда можно заметить, что траектория частицы является проекцией мировой линии на пространственную часть ПВ.

Рассмотрим некоторую мировую точку. Проведем через нее все возможные лучи света, которые распространялись бы из этой точки вперед по времени. Аналогично, проведем все лучи, которые сходились бы в эту точку из прошлого. Используя тот факт, что свет будет распространяться по кратчайшему пути, получаем, что ему будет соответствовать значение интервала $\Delta s^2 = 0$, что является уравнением конуса. Таким образом, изображенная фигура является конусом, который называют *световым конусом.*

Так как любая точка не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света, наклон по отношению к оси ct касательной к мировой линии всегда меньше, чем 45 градусов. Поэтому если мировая линия проходит через вершину светового конуса, то она будет целиком находиться внутри него.

Заметим, что любая мировая точка внутри светового конуса соединяется с его вершиной отрезком, интервал которого $\Delta s^2 > 0$, так как для такого интервала выполнено $|\Delta \mathbf{x}| < c|\Delta t|$. То есть Δt нельзя положить нулем выбором СО, так как интервал бы поменял знак, а он является инвариантом. В этом случае интервал называется *времениподобным*.

Любая мировая точка вне светового конуса соединяется с вершиной светового конуса отрезком с интервалом $\Delta s^2 < 0$, так как выполнено $|\Delta \mathbf{x}| > c|\Delta t|$. В этом случае получается, что выбором СО можно менять знак Δt. Такие интервалы называются *пространственноподобными*.

Если же точка лежит на конусе, то она соединяется с вершиной интервалом $\Delta s^2 = 0$. Такие интервалы называются *светоподобными*.

Из этих рассуждений получается, что события внутри конуса находятся либо в *абсолютном будущем*, либо в *абсолютном прошлом* относительно вершины конуса — в любой СО это событие произойдет позже или раньше соответственно.

Рассмотрим мысленный эксперимент: пусть у нас имеется наблюдатель, который следит за пролетающим мимо него космическим кораблем, движущимся с релятивистской скоростью. На корабле находится пассажир, который держит пару фонарей, направленных в сторону хвоста и носа корабля соответственно. На самих хвосте и носе корабля расположены зеркала, отражающие свет в сторону пассажира. Когда пассажир равняется с наблюдателем, он включает фонари на бесконечно малое время. В СО пассажира и в СО наблюдателя испускание света происходят одновременно, и свет движется с одинаковой скоростью. В СО пассажира свет достигнет стенок хвоста и носа корабля так же одновременно. Однако в СО наблюдателя луч, направленный в сторону хвоста корабля, достигнет зеркала раньше, так как скорости сближения для каждого направления различные. Получается, что в СО наблюдателя события достижения светом носа и хвоста корабля не являются одновременными. Таким образом, имеет место *относительность одновременности*.

3 Лоренцево сокращение длин.

Пусть у нас имеется стрежень, движущийся в направлении своей оси с релятивистской скоростью. В собственной системе отсчета (ССО) стрежня его длина равна l_0. Тогда будем считать, что в ССО начало стержня соответствует началу координат $x_1' = 0$, а конец стержня — $x_2' = l_0$. Пусть теперь в ЛСО наблюдатель в какой-то момент t по его часам фиксирует один конец стержня в точке x_1, а в другой конец — в точке x_2. Найдем $l = x_2 - x_1$. Запишем выражение для буста:

$$0 = x_1' = (x_1 - \beta ct)\gamma, \quad l_0 = x_2' = (x_2 - \beta ct)\gamma,$$

Отсюда следует, что:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = l\gamma. \tag{1}$$

Получается, что длина стержня в ЛСО оказалась меньше, чем в ССО. Это явление называется *лоренцевым сокращением длин*.

4 Релятивистское сложение скоростей вдоль одного и того же направления.

Пусть у нас имеется космический корабль, движущийся с релятивистской скоростью v. Внутри корабля пассажир бросает бумажный стаканчик со скоростью u в ИСО пассажира в направлении движения корабля. Найдем скорость бумажного стаканчика в ЛСО. Для этого сделаем два буста: $x \to x'$ — из ЛСО в ИСО пассажира и $x' \to x''$ — из ИСО пассажира в ИСО бумажного стаканчика. Тогда будем иметь выражения:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha_1 & \operatorname{sh}\alpha_1 \\ \operatorname{sh}\alpha_1 & \operatorname{ch}\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha_2 & \operatorname{sh}\alpha_2 \\ \operatorname{sh}\alpha_2 & \operatorname{ch}\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Перемножая эти матрицы, мы получаем снова буст Лоренца, теперь уже с параметром $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда получится, что

$$\frac{V}{c} = \operatorname{th}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{th}\alpha_1 + \operatorname{th}\alpha_2}{1 + \operatorname{th}\alpha_1 \operatorname{th}\alpha_2} = \frac{\frac{v}{c} + \frac{u}{c}}{1 + uv/c^2}. \tag{1}$$

Если бросок бумажного стаканчика осуществлялся не параллельно движению корабля, то необходимо рассматривать проекцию на направление скорости корабля v. Конечный результат будет

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{d\mathbf{x}_\perp}{dt} = \frac{\mathbf{u}_\perp}{1 + \frac{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},\ \mathbf{V}_\parallel = \frac{d\mathbf{x}_\parallel}{dt} = \frac{\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{v}}{1 + \frac{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{c^2}}. \tag{2}$$

5 Аберрация света.

Пусть теперь пассажир скачет на некотором коне, движущемся с релятивистской скоростью $\mathbf{v}$, и излучает свет под некоторым углом θ (в ЛСО) к направлению движения коня, например, лазерной указкой. Запишем выражение для продольной компоненты скорости при сложении скоростей:

$$\mathbf{V}_\parallel = \frac{d\mathbf{x}_\parallel}{dt} = \frac{\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{v}}{1 + \frac{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{c^2}},$$

где $V_\parallel = c\cos\theta$, $u_\parallel = c\cos\theta'$ — проекции скорости света на направление движения коня в ЛСО и ИСО коня соответственно. Подставим эти величины:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}. \tag{1}$$

То есть у нас изменилось направление распространения света при переходе в другую ИСО. Это явление называется *аберрацией света.*

6 Собственное время.

Определение. *Собственным временем* в СО, всегда сопутствующей некоторым произвольно движущимся часам, называется время, которое показывают эти часы.

Так как произвольное движение в любой отдельный момент времени можно рассматривать как прямолинейное и равномерное, можно в каждый момент времени ввести систему, неподвижно связанную с часами — мгновенно сопутствующую ИСО. Таким образом, собственное время определено корректно и не зависит от ИСО.

В мгновенно сопутствующей системе пройденное расстояние за любое время равно нулю, то имеет место следующее выражение для собственного времени:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2, \tag{1}$$

где τ — собственное время. Из (1) можно получить другое выражение для собственного времени:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}, \tag{2}$$

где $\dot{\mathbf{x}}(t)$ — скорость часов в момент времени t в нашей ИСО. Используя собственное время, мы можем переписать формулу для длины мировой линии:

$$L = \int_1^2 ds = c\int_1^2 d\tau. \tag{3}$$

То есть, длина мировой линии — это время, "натикавшее" на часах, двигающихся вдоль этой мировой линии из положения 1 в положение 2, умноженное на скорость света.

7 Преобразование Лоренца произвольного вектора при бусте вдоль оси x.

Определение. *4-вектором* называется набор из четырех величин $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$, который определяет направление в ПВ и, следовательно, правильным образом преобразуется при преобразованиях Лоренца — комбинации трехмерных поворотов и лоренцевских бустов вдоль различных направлений:

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu. \tag{1}$$

В случае буста вдоль оси X ПЛ будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Отметим, что в общем случае лоренцевский буст можно получить, выполняя серию поворотов, чтобы совместить направление буста с одной из осей, а затем совершить повороты обратно. Также нетрудно заметить, что обратный буст получается из исходного заменой знака у скорости, что говорит о некой аналогии с поворотами.

Мы работаем в пространстве-времени с метрикой пространства Минковского. За $\eta_{\mu\nu}$ обозначим *метрический тензор Минковского*. Он выглядит следующим образом:

$$\|\eta_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тогда получаем выражение для вектора с нижним индексом:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu. \tag{4}$$

Отсюда следует, что если мы опускаем индекс, то у пространственной части 4-вектора меняется знак.

8 Вектор 4-скорости и 4-ускорения и их скалярное произведение.

Определение. Пусть задана мировая линия частицы $z^\mu(t) = (ct, \mathbf{z}(t))$, где $\mathbf{z}(t)$ — траектория частицы. *4-вектором скорости* u^μ назовем производную мировой линии по интервалу:

$$u^\mu = \frac{dz^\mu}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dz^\mu}{d\tau}. \tag{1}$$

Используя выражение для собственного времени, получаем компоненты 4-вектора скорости:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}). \tag{2}$$

Отсюда получается, что квадрат нормы u^μ равен

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1. \tag{3}$$

Аналогичным образом введем *4-ускорение*:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 z^\mu}{ds^2}. \tag{4}$$

Возьмем производную по s от соотношения (3):

$$2w^\mu u_\mu = 0. \tag{5}$$

Таким образом, эти 4-векторы ортогональны друг другу. Так как $u^\mu u_\mu = 1 \geq 0$, то 4-вектор скорости является *времениподобным.* Это означается, что 4-вектор ускорения всегда *пространственноподобен.*

9 Действие для свободной релятивистской частицы.

В качестве действия рассматривается длина мировой линии частицы потому что:

1. Длина является простейшим лоренц-инвариантом, который можно построить по заданной мировой линии;
2. Экстремальную длину имеет прямая линия, а мы как раз ожидаем, что свободная релятивистская частица будет двигаться по прямой в ПВ.

Итак, мы принимаем $S = al_{12}$, где a — некоторая постоянная, которая будет получена далее. Итого выражение для действия:

$$S = a\int_1^2 ds = ac\int_1^2 d\tau = ac\int_1^2 dt\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{z}}^2(t)}{c^2}}, \tag{1}$$

Теперь перейдем к нерелятивистскому пределу $\dot{\mathbf{z}}^2(t) \ll c^2$. Корень можно разложить до первой степени по формуле Тейлора:

$$S \approx \int_1^2 dt\left[ac - \frac{a\dot{\mathbf{z}}^2(t)}{2c}\right],$$

Тогда получается, чтобы получить выражение действия для нерелятивистской частицы, необходимо положить $a = -mc$, где m — масса частицы. Только так выражение под интегралом перейдет в сумму кинетической и потенциальной энергии. Итого получаем *лагранжиан для свободной частицы*:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{z}}^2(t)}{c^2}} = -mc\sqrt{\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu}, \tag{2}$$

Получим уравнения движение частицы с таким лагранжианом. Уравнение Лагранжа — Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial z_\mu} = 0.$$

В нашем случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} = -mc\frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}}, \quad \frac{\partial L}{\partial z_\mu} = 0. \tag{3}$$

Тогда уравнения принимают вид:

$$-mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = 0.$$

Вспоминая выражение для ds, получаем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = \frac{d}{dt}\frac{dz^\mu}{ds} = \sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}\frac{d}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}dt}u^\mu = \sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}w^\mu = 0. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение движения свободной релятивистской частицы:

$$w^\mu = 0.$$

10 Компоненты 4-импульса и связь энергии с трехмерным импульсом.

Если у нас имеется N взаимодействующих частиц, то действие будет выглядеть следующим образом:

$$S = -\sum_{q=1}^{N} m_q c\int dt\sqrt{\dot{z}_q^2(t)} + \sum_{q'\neq q}^{N}\int dt V[z_q - z_{q'}],$$

где V — некоторый потенциал, описывающий взаимодействие частиц. Нетрудно видеть, что действие не меняется при трансляции на некоторый постоянный 4-вектор:

$$S[\{z_q^\mu(t) + a^\mu\}] = S[\{z_q^\mu(t)\}]. \tag{1}$$

Используя, например, теорему Нётер, получаем, что в данном случае имеет место первый интеграл:

$$I = \sum_{q=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_q^\mu} = \text{const}. \tag{2}$$

Данный первый интеграл имеет смысл *4-импульса системы*. Проводя аналогичные рассуждения для одной частицы, получим, что 4-импульс частицы оказывается равен

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu}.$$

Используем выражение лагранжиана свободной частицы. Тогда получается более простое выражение для 4-импульса:

$$p_\mu = mcu_\mu. \tag{3}$$

Отсюда получается выражение для компонент 4-импульса:

$$p^\mu = (\gamma mc, mc\gamma\boldsymbol{\beta}). \tag{4}$$

В нерелятивистском пределе нулевая компонента, умноженная на скорость света, может быть разложена и будет иметь вид суммы энергии покоя $\mathcal{E}_0 = mc^2$ и нерелятивистской кинетической энергии

$$p^0 c = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}\beta^2 mc^2 = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Тогда получается, что временная компонента импульса есть ничто иное, как *релятивистская энергия*, деленная на скорость света $\mathcal{E}/c = \gamma mc$. Аналогичным рассмотрением получаем, что пространственная часть 4-импульса является релятивистским импульсом частицы $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. Тогда компоненты импульса примут вид

$$p^\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}), \tag{5}$$

а его 4-норма будет равна

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 u^\mu u_\mu = m^2c^2. \tag{6}$$

11 Можно ли превысить скорость света при движении под действием постоянной силы? Объяснение.

Не умаляя общности, чтобы сократить размер формул, рассмотрим случай, когда в начальный момент времени $t = 0$ исследуемая частица имеет импульс $p_0 = \mathcal{E}_0 v_0/c^2$, а сила F направлена по импульсу. Запишем уравнение движения и уравнение для мощности силы:

$$\frac{dp}{dt} = F,$$
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Fv = \frac{c^2}{\mathcal{E}}Fp.$$

Интегрируя первое выражение, получаем

$$p = Ft + p_0.$$

Подставим это во второе уравнение и проинтегрируем его:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2) = \frac{1}{2}c^2F^2t^2 + c^2Fp_0t.$$

Отсюда получаем выражение для энергии

$$\mathcal{E} = c\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2}} = c\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + p_0^2\frac{c^2}{v_0^2}}.$$

Выражение для модуля импульса:

$$|p| = \sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + p_0^2}.$$

Тогда выражение для скорости будет равно

$$v = \frac{c^2|p|}{\mathcal{E}} = c\frac{\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + p_0^2}}{\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + p_0^2\frac{c^2}{v_0^2}}}.$$

Случай 1. Пусть $v_0 = c$. Тогда мы получаем $v_0 = c = \text{const}$. Таким образом, для частиц, уже имеющих скорость света, превысить ее не удастся.

Случай 2. Пусть $v_0 = \alpha c,\ \alpha < 1$. Тогда получаем выражение:

$$v = c\frac{\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + p_0^2}}{\sqrt{F^2t^2 + 2Fp_0t + \frac{p_0^2}{\alpha^2}}}.$$

Для любого момента времени $|t| < +\infty$ легко видеть, что числитель меньше знаменателя, то есть $v < c$, так как $\alpha < 1$. Условие $v = c$ возможно только в пределе $t \to \infty$. Таким образом, мы не только не можем разогнать тело до скоростей, больших скорости света, но и чтобы довести тело со скоростью, меньшей скорости света, нам требуется бесконечное время, или, в более общем случае, бесконечная работа.

12 Вывести формулу для эффекта Доплера.

Для безмассовой частицы удобно пользоваться формулой Планка для энергии:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega. \tag{1}$$

Тогда вектор 4-импульса можно переписать через *волновой 4-вектор*:

$$p^\mu = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) = \hbar k^\mu.$$

Из условия безмассовости следует равенство нулю нормы 4-импульса и, следовательно, волнового 4-вектора. Отсюда получается, что $|\mathbf{k}| = \omega/c$.

Пусть источник света частоты ω_0 движется со скоростью v. Найдем величину ω в ЛСО. Для этого сделаем буст со скоростью v. Тогда нулевая компонента преобразуется следующим образом:

$$\frac{\omega_0}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{k})}{c}\right) = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v\omega\cos\theta}{c^2}\right), \tag{2}$$

где θ — угол между направлением движения и направлением испускания в ЛСО. Отсюда получается выражение для ω:

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \tag{3}$$

Данная формула описывает *эффект Допплера* — изменение частоты из-за движения источника с релятивистской скоростью относительно ЛСО.

13 Может ли свободный электрон излучить фотон? Объяснение.

Пусть $p_e^\mu,\ p_e'^\mu$ — импульс электрона до и после излучения фотона соответственно. Пусть p_{ph}^μ — импульс излученного фотона. Запишем закон сохранения 4-импульса:

$$p_e^\mu = p_e'^\mu + p_{\text{ph}}^\mu. \tag{1}$$

Возведем выражение в квадрат:

$$p_e^\mu p_{e\mu} = p_{\text{ph}}^\mu p_{\text{ph}\mu} + p_e'^\mu p'_{e\mu} + 2p_{\text{ph}\mu}p'_{e\mu}. \tag{2}$$

Подставляя массы вместо 4-норм импульсов и записывая скалярное произведение через компоненты, получим

$$m_e^2c^2 = m_e^2c^2 + 2\left(\frac{\mathcal{E}'\mathcal{E}_{\text{ph}}}{c^2} - (\mathbf{p}_{\text{ph}}, \mathbf{p}'_e)\right). \tag{3}$$

Выражая импульс через энергию и скорость, получим:

$$0 = \frac{\mathcal{E}'\mathcal{E}_{\text{ph}}}{c^2}\left(1 - \frac{(\mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_{\text{ph}})}{c^2}\right). \tag{4}$$

Так как скорость света не может быть превышена, то выражение справа строго положительно. Поэтому данное равенство не может выполняться, то есть ответ **нет, свободный электрон не может излучить фотон**.

14 Эффективная масса нескольких частиц.

Найдем массу системы из двух фотонов. По отдельности масса фотонов равна нулю, поэтому мы можем записать их 4-импульсы в следующем виде: $p_i^\mu = (|\mathbf{p}_i|, \mathbf{p}_i)$. Тогда найдем квадрат суммарного 4-импульса:

$$(p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (p_1^\mu)^2 + (p_2^\mu)^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} = 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|(1 - \cos\theta),$$

где θ — угол между импульсами фотонов. Отсюда видно, что если $\theta \neq 0$, то эта величина не равна нулю. Она называется *эффективной массой*. По аналогии можно ввести эффективную массу для произвольного набора частиц:

$$M_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{c^2}\left(\sum_q p_q^\mu\right)^2. \tag{1}$$

15 Выражения для E и B через компоненты 4-потенциала.

Рассмотрим первую пару уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Попробуем выполнить эти уравнения автоматически. Из первого уравнения следует, что если область, в которой рассматривается **B**, является односвязной, то существует некоторый *векторный потенциал* A, такой что $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Тогда можно переписать второе уравнение в виде:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Отсюда по аналогии получается, что выражение в скобках является градиентом некоторой функции φ — *скалярного потенциала*:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{1}$$

Введем *4-потенциал* $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$. Тогда поля E и B будут выражаться следующим образом:

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k,$$
$$E_i = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i,$$

где нулевой индекс соответствует дифференцированию по координате $x^0 = ct$.

16 Калибровочные преобразования потенциалов в трехмерной и четырехмерной форме.

Рассмотрим выражения для E и B через векторный и скалярный потенциалы:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$
$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Легко видеть, что если заменить $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A} + \operatorname{grad} f$, то первое уравнение не изменится. Посмотрим, что произойдет со вторым:

$$\mathbf{E}' = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{1}$$

Данное равенство не изменится, если положить $\varphi' = \varphi - (1/c)\partial f/\partial t$. Данные преобразования называются *калибровочными преобразованиями.* Их форма в трехмерном виде:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2}$$

Используем выражение для 4-потенциала $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$ и получаем выражение для калибровочного преобразования в 4-векторной форме:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \tag{3}$$

17 Действие для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

У нас уже есть действие для свободной частицы:

$$S_{\text{free}} = -mc\int_1^2 ds. \tag{1}$$

Теперь подкорректируем выражение для этого действия, чтобы оно учитывало взаимодействие частицы с ЭМ полем. Для этого рассмотрим некоторую добавку к действию ΔS, которая будет учитывать наличие частицы в поле. Очевидно, что данная добавка должна обнуляться, если полей нет. Также она должна быть лоренц-инвариантом, а экстремальность прямого пути должна сохраняться при калибровочных преобразованиях. Одним из кандидатов на данную добавку может служить следующее выражение:

$$\int_1^2 A_\mu[z]dz^\mu = \int_1^2 A_\mu[z(s)]\frac{dz^\mu}{ds}ds = \int_1^2 A_\mu[z(s)]u^\mu ds.$$

Легко видеть, что данная добавка удовлетворяет всем условиям. Итого наше действие принимает вид:

$$S = -mc\int_1^2 ds + \kappa\int_1^2 A_\mu[z(s)]u^\mu ds, \tag{2}$$

где $\kappa = -e/c$ — константа, выбранная таким образом для того, чтобы в нерелятивистском случае внутри функции лагранжа потенциальная энергия взаимодействия с электростатическим полем приняла вид $e\varphi$. Тогда действие перепишется в виде:

$$S = -\int_1^2 \left(mc + \frac{e}{c}A_\mu[z(s)]u^\mu\right) ds =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{z}}^2(t)}{c^2}} - e\varphi[t, \mathbf{z}(t)] + \frac{e}{c}\mathbf{A}[t, \mathbf{z}(t)]\dot{\mathbf{z}}(t)\right) dt.$$

18 Уравнение движения для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной форме. Выражение для тензора электромагнитного поля через 4-потенциал и его связь с компонентами E и B.

Выражение для действия частицы в ЭМ поле:

$$S = -\int_1^2 \left(mc + \frac{e}{c}A_\mu[z(s)]u^\mu\right) ds.$$

Запишем производные, фигурирующие в уравнениях Лагранжа — Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial z^\mu} = -\frac{e}{c}\dot{z}^\nu \partial_\mu A_\nu[z(t)],$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = \frac{d}{dt}\left(-mc\frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}_\nu \dot{z}^\nu}} - \frac{e}{c}A_\mu[z(t)]\right).$$

Дифференцируя A_μ по времени как сложную функцию, получаем уравнение Эйлера — Лагранжа:

$$-\frac{e}{c}(\partial_\mu A_\nu)\dot{z}^\nu = -mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}_\beta \dot{z}^\beta}} - \frac{e}{c}(\partial_\nu A_\mu)\dot{z}^\nu.$$

Вспоминая определение ds, а так же выполняя перегруппировку слагаемых, получаем

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)u^\nu.$$

В скобках у нас находится некоторый кососимметричный тензор второго ранга. Обозначим его $F_{\mu\nu}$. Получаем отсюда уравнение движения релятивистской частицы во внешнем ЭМ поле:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu. \tag{1}$$

Введенный нами тензор называется *тензором ЭМ поля.* Еще раз отметим формулу для компонент данного тензора через 4-потенциал:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2}$$

Установим его связь с компонентами полей E и B. Для нулевой компоненты получаем:

$$F_{0i} = -F_{i0} = -\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i.$$

Аналогично:

$$F_{12} = -F_{21} = -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1 = -B_3.$$

Таким образом, получаем, что $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k$, умножая на ε_{ijn} и сворачивая, получаем $\varepsilon_{ijn}F_{ij} = -2\delta_{nk}B_k$. Делая небольшие преобразования, окончательно получаем следующие выражения:

$$E_i = F_{0i} = -F_{i0}, \tag{3}$$
$$B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}F_{ab}. \tag{4}$$

Эти соотношения устанавливают связь между тензором ЭМ поля и компонентами E и B.

19 Сила Лоренца.

Уравнение движение частицы в ЭМ поле:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu.$$

Умножим обе части равенства на ds/dt. Тогда по определению производной сложной функции мы можем заменить в дифференцирование по s на дифференцирование по t. Учитывая это, рассмотрим пространственные компоненты этого уравнения. Подставим выражения для компонент тензора ЭМ поля:

$$mc\frac{du_i}{dt} = \frac{e}{c}F_{\mu i}\frac{dz^\mu}{dt} = \frac{e}{c}\left(F_{0i}c + F_{ji}v_j\right) = \frac{e}{c}\left(cE_i + \varepsilon_{ijk}v_jB_k\right).$$

Учитывая, что $mcu^\mu = p^\mu$, получаем уравнение в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{1}$$

Сила, стоящая справа, называется *Силой Лоренца.*

20 Обобщенный импульс и энергия. Гамильтониан частицы в нерелятивистском приближении во внешнем электромагнитном поле.

Получим выражение для *обобщенного импульса*:

$$P_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = mc\frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}_\nu\dot{z}^\nu}} + \frac{e}{c}A_\mu = mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu. \tag{1}$$

Легко видеть, что обобщенный импульс отличается от кинематического импульса p_μ. Рассмотрим временную компоненту:

$$P^0 = \gamma mc + \frac{e}{c}\varphi.$$

Тогда получается, что полная энергия частицы в ЭМ поле дается выражением:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{kin}} + e\varphi. \tag{2}$$

Выразим 4-импульс через обобщенный 4-импульс, используя (1), а затем возведем в квадрат полученное выражение:

$$\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2.$$

Выражая отсюда энергию $\mathcal{E}$, получим ее выражение через обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Поэтому данное выражение будет являться также *функцией Гамильтона*

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{3}$$

В нерелятивистском пределе $v \ll c$ получается разложение:

$$H \approx mc^2 + \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\varphi. \tag{4}$$

21 Инварианты поля в четырехмерной и трехмерной форме исходя и тензора ЭМ поля.

Заметим, что преобразования Лоренца переводят тензор ЭМ поля в

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} F_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu}. \tag{1}$$

Таким образом, тензор ЭМ поля не является лоренц-инвариантом. Отметим, что при бусте в направлении оси X поля меняются следующим образом

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y).$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y).$$

Построим инварианты поля. Для этого свернем тензор с собой и парой метрических тензоров:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}. \tag{2}$$

Используя выражения для полей, получим:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ji} F^{ji} = -2 E_i E^i + (-\varepsilon_{ijk} B_k)(-\varepsilon_{ijn} B_n) = -2(E^2 - B^2).$$

Это *первый инвариант ЭМ поля.* Второй инвариант можно получить, используя символ Леви-Чевитта:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \widetilde{F}_{\mu\nu},$$

где $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ — *дуальный тензор ЭМ.* В нем компоненты E и B меняются местами. Получим выражение для инварианта через E и B:

$$F^{\mu\nu} \widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} 4 \varepsilon_{0ijk} F^{0i} F^{jk} = 2 E_i \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_l) = -4(\mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Таким образом, получаем инварианты ЭМ поля:

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2), \tag{3}$$

$$I_2 = F^{\mu\nu} \widetilde{F}_{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{4}$$

Других, не выражающихся через данные, инвариантов нет. Это можно объяснить, например, используя характеристическое уравнение для матрицы $F_{\mu\nu}$. Его коэффициенты являются инвариантами, так как инвариантами являются собственные значения исследуемой матрицы. Непосредственными вычислениями мы получим, что есть только два функционально независимых коэффициента.

22 Скорость дрейфа в скрещенных электромагнитных полях.

Рассмотрим движение частицы с нерелятивистской скоростью в скрещенных полях E и B. Пусть B направлено вдоль оси z, а плоскость yz совпадает с плоскостью, в которой лежат E и B. Тогда запишем уравнение движения частицы по компонентам:

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}B,$$

$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}B,$$

$$m\ddot{z} = eE_z.$$

Последнее уравнение интегрируется

$$z(t) = \frac{e}{2m}E_z t^2 + v_{0z}t.$$

Сделаем преобразование координат: $\theta = \dot{x} + i\dot{y}$, где i — мнимая единица. Тогда, вводя частоту Лармора $\omega = eB/(mc)$, получаем

$$\dot{\theta} + i\omega\theta = i\frac{e}{m}E_y.$$

Решение данного уравнения

$$\theta = Ce^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{B}.$$

Положим начальные условия так, чтобы C была действительной. Тогда решение имеет вид

$$\dot{x} = a\cos\omega t + \frac{cE_y}{B}, \quad \dot{y} = -a\sin\omega t.$$

Среднее значение данных величин по времени

$$\langle\dot{x}\rangle = \frac{cE_y}{B}, \quad \langle\dot{y}\rangle = 0.$$

определяют среднюю скорость движения заряда в скрещенных ЭМ полях — скорость *электрического дрейфа*. Ее направление перпендикулярно обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде ее можно записать как $\mathbf{u} = c[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]/B^2$. Если вдруг окажется, что она превышает скорость света, то движение будет иметь другой характер: показатель экспоненты будет действительным, и мы будем наблюдать что-то вроде цепной линии. Выделяя оттуда постоянную составляющую, можно получить аналогичную скорость дрейфа.

23 Магнитное зеркало.

Если вам не нужно понимать, откуда берется уравнение движения в неоднородном поле, то вы можете сэкономить время, не читая две страницы достаточно нетривиальных выкладок, и перейти к ответу на билет.

Рассмотрим движение частицы в неоднородном постоянном магнитном поле, характерная длина изменения L которого достаточно велика, то есть:

$$L \gg \frac{u_\perp}{\omega},$$

где $u_\perp$ — скорость вращения в плоскости, перпендикулярной полю, а ω — угловая скорость этого вращения. Представим радиус-вектор частицы как:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_\perp(t),$$

где $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор ведущего центра, то есть медленно меняющаяся функция, а $\mathbf{r}_\perp(t)$ — радиус-вектор вращения вокруг ведущего центра, то есть быстро меняющаяся функция. Тогда скорость движения мы представим как $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, где $\mathbf{u}_\perp = \dot{\mathbf{r}}_\perp(t)$, $\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel = \dot{\mathbf{R}}(t)$. При этом $\mathbf{v}_\perp \perp \mathbf{B}$, а $\mathbf{v}_\parallel \parallel \mathbf{B}$. В таких обозначениях разложим вектор магнитной индукции:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(R) + (\mathbf{r}_\perp, \nabla)\mathbf{B}|_{r=R}.$$

Теперь мы можем все это подставить в уравнение движения в магнитном поле (далее аргумент в индукции опускается $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(R)$):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times(\mathbf{r}_\perp, \nabla)\mathbf{B}].$$

Учтем, что $\mathbf{u}_\perp$ удовлетворяет уравнению движения в однородном поле. Тогда, используя факт того, что $\gamma = \mathrm{const}$, получаем уравнение:

$$m\gamma\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) = \frac{e}{c}[\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}] + \frac{e}{c}[(\mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) \times (\mathbf{r}_\perp, \nabla)\mathbf{B}].$$

Теперь усредним наше равенство по времени. Так как функция $\mathbf{r}_\perp(t)$ меняется быстро, то слагаемые, линейные по ней, обратятся в ноль. Остается выражение:

$$m\gamma\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) = \frac{e}{c}[\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}] + \frac{e}{c}\left\langle [\dot{\mathbf{r}}_\perp \times (\mathbf{r}_\perp, \nabla)\mathbf{B}]\right\rangle.$$

Определим $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$. Тогда, используя невозмущенное уравнение движения (в котором поле не изменяется), имеем:

$$\dot{\mathbf{r}}_\perp = \omega[\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}].$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$\langle (r_\perp)_i (r_\perp)_j \rangle = \frac{1}{2} r_\perp^2 \delta_{ij}.$$

Одна вторая, а не одна третья, потому что движение, связанное с $r_\perp$, происходит в плоскости, а не в трехмерном пространстве. Тогда усредненное уравнение преобразится:

$$m\gamma\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) = \frac{e}{c}[\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}] + (\boldsymbol{\mu}, \nabla)\mathbf{B}.$$

Здесь введено обозначение магнитного момента:

$$\boldsymbol{\mu} \equiv -\mathbf{h}\frac{p_\perp^2}{2m\gamma B}.$$

Теперь поймем, в каком приближении мы работаем, чтобы по возможности избавиться от всего, что можно отнести к превышению точности. Правая часть уравнения имеет порядок величины

$$v_\perp \omega \sim v_\perp \frac{u_\perp}{r_\perp}.$$

Вводя характерное время изменения $v_\perp$ — $\boldsymbol{\tau} \sim L/v_\perp$, получаем серию оценок:

$$\frac{dv_\perp}{dt} \sim \frac{v_\perp}{\boldsymbol{\tau}} \sim v_\perp \frac{v_\perp}{L} \sim v_\perp \frac{v_\perp}{r_\perp}\frac{r_\perp}{L} \ll v_\perp \frac{v_\perp}{r_\perp} \ll v_\perp \frac{u_\perp}{r_\perp} = v_\perp \omega. \tag{1}$$

Четвертая оценка следует из исходного условия на характерное расстояния изменения магнитного поля, а пятая оценка следует из условия того, что $r_\perp$ — быстро меняющаяся функция. Таким образом, мы можем пренебречь слагаемым $d\mathbf{v}_\perp/dt$ в левой части выражения. Найдем более удобное выражение для $d\mathbf{v}_\parallel/dt$:

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \frac{d(v_\parallel \mathbf{h})}{dt} = \mathbf{h}\frac{dv_\parallel}{dt} + v_\parallel \frac{d\mathbf{h}}{dt}.$$

Даже если поле B стационарно, частица в нем движется. Это значит, что раз мы рассматриваем поле как функцию траектории частицы, то оно имеет полную производную по времени в силу уравнений движения (аналогично, например, тому, как функция, заданная на фазовом многообразии, будет иметь производную по времени в силу гамильтоновой системы, которая задает движение системы). Таким образом, производная по времени от

$\mathbf{h}$ в силу системы будет ничем иным, как производной от $\mathbf{h}$ по вектору $\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$. Однако вкладом перпендикулярной скорости мы пренебрегаем. Тогда получается формула

$$\dot{\mathbf{h}} = v_\parallel (\mathbf{h}, \nabla)\mathbf{h} = v_\parallel \frac{\mathbf{n}}{\rho},$$

где $\mathbf{n}$, ρ — нормаль и кривизна соответственно. Тогда получается выражение для производной параллельной компоненты:

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \mathbf{h}\dot{v}_\parallel + v_\parallel^2 \frac{\mathbf{n}}{\rho}. \tag{2}$$

Теперь поработаем с правой частью уравнения:

$$(\boldsymbol{\mu}, \nabla)\mathbf{B} = -\mu(\mathbf{h}, \nabla)\mathbf{h}B = -\mu B \frac{\mathbf{n}}{\rho} - \mu \mathbf{h}(\mathbf{h}, \nabla)B.$$

Тогда уравнение движения запишется в виде:

$$\mathbf{h}\dot{v}_\parallel + v_\parallel^2 \frac{\mathbf{n}}{\rho} = [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{h}] - \frac{\mu B}{m\gamma\rho}\mathbf{n} - \frac{\mu}{m\gamma}\mathbf{h}(\mathbf{h}, \nabla)B. \tag{3}$$

Умножим уравнение слева векторно на $\mathbf{h}$. Тогда, вводя вектор бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]$, получим уравнение:

$$\frac{v_\parallel^2 \mathbf{b}}{\rho} = \omega \mathbf{v}_\perp - \frac{\mu B}{m\gamma\rho}\mathbf{b}.$$

Подставляя выражения для ω и $p_\perp$, находим, что

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{b}}{\omega\rho}\left(v_\parallel^2 + \frac{u_\perp^2}{2}\right). \tag{4}$$

Но что это мы тут отвлеклись? Умножим уравнение (3) скалярно на $\mathbf{h}$. Тогда получится уравнение:

$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu}{m\gamma}(\mathbf{h}, \nabla)B = -\frac{\mu}{m\gamma v_\parallel}\frac{dB}{dt}.$$

Здесь было учтено выражение для производной функции по времени в силу уравнений движения. Поставляя выражение для $\mu = p_\perp^2/2m\gamma B$, получим

$$v_\parallel dv_\parallel = -\frac{u_\perp^2}{2B}dB.$$

Величина $-u_\perp^2/(2B)$ является адиабатическим инвариантом, то есть почти не меняется в ходе движения при медленно меняющемся параметре (в нашем случае — магнитной индукции). Тогда получаем, что если частица летит в область, где поле возрастает, то ее скорость уменьшается вплоть до нуля. Затем частица разворачивается. Это явление называется *магнитным зеркалом.*

24 Четыре-вектор плотности тока и его компоненты. Уравнение непрерывности в четырехмерной и трехмерной форме.

Система уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,\\
&\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Введением 4-потенциала, первая пара уравнений выполняется автоматически. Вторая пара уравнений описывает поля в присутствии каких-либо источников полей: подвижных и неподвижных зарядов. Запишем вторую пару уравнений Максвелла в ковариантной форме. Рассмотрим третье уравнение:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \partial_i E_i = \partial_i F^{i0} = \partial_\mu F^{\mu 0}.$$

Последнее равенство верно, так как $F^{00} = 0$. Теперь рассмотрим четвертое уравнение Максвелла:

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i}.$$

Таким образом, получилась пара уравнений:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi\rho, \quad \partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Тогда мы можем ввести *4-вектор плотности тока* $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$. С ним вторая пара уравнений запишется в виде:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{1}$$

Применим к уравнению 4-дивергенцию:

$$\frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Откуда получается *уравнение непрерывности* в четырехмерном виде:

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \tag{2}$$

Подставляя сюда компоненты 4-вектора плотности тока, получим уравнение непрерывности в трехмерной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{3}$$

25 Четыре-вектор тока для точечной частицы.

Выражение для действия для взаимодействия частицы с ЭМ полем имеет вид

$$\Delta S = -\frac{e}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{z}^\mu(\tau) A_\mu[z(\tau)] d\tau.$$

Используем дельта-функцию $\delta(x)$, чтобы переписать данный интеграл как интеграл по четырехмерному ПВ

$$\int d^4x = \iiiint cdt\ dx\ dy\ dz.$$

Возьмем с потолка 4-вектор:

$$j^\mu(x) = ec\int \dot{z}^\mu(\tau)\delta^{(4)}[x - z(\tau)] d\tau,$$

где $\delta^{(4)}[x-y] = \delta(x^0-y^0)\delta(x^1-y^1)\delta(x^2-y^2)\delta(x^3-y^3)$. Оказывается, что с помощью этой функции можно переписать действие в виде:

$$\Delta S = -\frac{1}{c^2}\int j^\mu(x) A_\mu(x) d^4x.$$

Действительно,

$$\frac{1}{c^2}\int j^\mu(x)A_\mu(x)d^4x = \frac{e}{c}\int A_\mu(x)\int \dot z^\mu(\tau)\delta^{(4)}[x-z(\tau)]d\tau\; d^4x =$$
$$= \frac{e}{c}\int \dot z^\mu(\tau)\int A_\mu(x)\delta^{(4)}[x-z(\tau)]\; d^4x\; d\tau = \frac{e}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\dot z^\mu(\tau)A_\mu[z(\tau)]d\tau.$$

Покажем, что введенная функция является *4-вектором плотности тока для точечной частицы.* Его нулевая компонента имеет вид:

$$j^0(x) = ec\int \dot z^0(\tau)\delta^{(4)}[x-z(\tau)]d\tau = ec\int dz^0\delta(x^0-z^0)\delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)] = ec\delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)].$$

Легко видеть, что это ничто иное, как плотность точечного заряда, умноженная на скорость света. Аналогично пространственная компонента:

$$\mathbf{j} = ec\int \dot{\mathbf{z}}(t)\delta(x^0-ct)\delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)]dt = e\delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)]\dot{\mathbf{z}}(t) = \rho(x)\mathbf{v}(t).$$

Таким образом, компоненты данного 4-вектора равны:

$$j^\mu(x) = ec\int \dot z^\mu(\tau)\delta^{(4)}[x-z(\tau)]d\tau = \frac{\rho(x)}{c}(1,\boldsymbol{\beta}(x)). \tag{1}$$

26 Первая и вторая пара уравнений Максвелла в четырехмерной форме.

Определим действие для самого ЭМ поля. Для этого рассмотрим инварианты поля I_1 и I_2. Интеграл от их линейной комбинации по всему ПВ является лоренц- и калибровочно инвариантным. Тогда рассмотрим их как добавку к действию, связанную непосредственно с ЭМ полем. Если из принципа наименьшего действия получатся правильные уравнения Максвелла, то мы сделали правильный выбор (если бы это было неверно, то такое действие бы не рассматривалось в учебной литературе). Итак, имеем

$$S_{\text{EM }\cancel{\text{detey}}} = S_{\text{EM}} = \int d^4x[c_1F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}].$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 4\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) = 4\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu\partial_\alpha A_\beta).$$

Здесь была использована кососимметричность тензора $\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}$ и равенство $\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0$. Таким образом, дифференциальная форма $\omega = F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}d^4x$ точна. Это значит, что интеграл от нее зависит только от значений на границе, то есть не меняет экстремальности прямого пути. Поэтому кладем $c_2 = 0$. Определим $c_1 = -1/(16\pi c)$ чтобы из принципа наименьшего действия получались уравнения Максвелла с правильными коэффициентами. Мы хотим также учесть влияние носителей зарядов на поле. Тогда получается такое выражение для действия:

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\int d^4x\; A_\mu(x)j^\mu(x). \tag{1}$$

Проварьируем этой действие, считая обобщенной координатой 4-потенциал A_μ:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x(F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}) - \frac{1}{c^2}\int d^4x\ j^\mu \delta A_\mu = \\
&= -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\ 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\int d^4x\ j^\mu \delta A_\mu = \\
&= -\frac{1}{8\pi c}\int d^4x\ F^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) - \frac{1}{c^2}\int d^4x\ j^\mu \delta A_\mu = \\
&= -\frac{1}{8\pi c}\int d^4x\ 2F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu - \frac{1}{c^2}\int d^4x\ j^\nu \delta A_\nu = \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x\left(\frac{1}{4\pi}\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\nu\right)\delta A_\nu.
\end{aligned}$$

Равенство должно выполняться при любой вариации A_ν. Это значит, то выражение в скобках тождественно нулю. Таким образом, мы получили вторую пару уравнений Максвелла четырехмерной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu.$$

Первая пара уравнений Максвелла автоматически выполнена выбором тензора ЭМ поля. Перепишем их в 4-векторном виде, используя трехмерную форму:

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{B} = \partial_i B_i = -\frac{1}{2}\partial_i \varepsilon_{ijk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}.$$

и

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j E_k + \frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t} = \varepsilon^{0ijk}\partial_j F_{0k} - \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}\partial_0 F_{jk} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} - 2\varepsilon^{i0jk}\partial_j F_{0k}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left((\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij\alpha\beta}\partial_j F_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^{i\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Тогда получаем объединенное уравнение:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0.$$

Итак, система уравнений Максвелла в четырехмерной форме:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{3}$$

27 Уравнения Максвелла в трехмерном виде.

Рекомендуется повторить вывод уравнений Максвелла из предыдущей темы при ответе на этот билет в том числе.

Подставляя выражение для тензора ЭМ поля через поля E и B, можно обратно получить уравнения в трехмерном виде:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\
&\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений можно переписать в интегральной форме. Сделаем это:

Будем последовательными и начнем с третьего уравнения. Проинтегрируем по объему и используем теорему Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q, \tag{1}$$

где Q — полный заряд внутри объема, по которому брался интеграл. Выражение слева представляет собой поток поля E через замкнутую поверхность, которая является краем исходного объема. Это уравнение демонстрирует *теорему Гаусса*: поток электрического поля через замкнутую поверхность зависит только от заряда, находящегося внутри объема, который ограничивает поверхность.

Выполним аналогичные действия для первого уравнения:

$$\iint\limits_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \tag{2}$$

Это уравнение утверждает, что *магнитных зарядов не существует.*

Проинтегрируем второе уравнение по некоторой поверхности. Применим теорему Стокса к интегралу от ротора. Итого получается:

$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint\limits_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \tag{3}$$

Это уравнение демонстрирует *закон электромагнитной индукции Фарадея*: ЭДС индукции возникает в контуре ∂S при изменении потока магнитного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Делая аналогичные действия с последним уравнением получаем:

$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S}, \tag{4}$$

где J — полный ток через поверхность S. Это дает нам *теорему о циркуляции*: циркуляция магнитного поля через любой замкнутый контур пропорциональна сумме полного тока проводимости через натянутую на этот контур поверхность S и полного тока смещения. Роль тока смещения с точностью до коэффициента играет второе слагаемое.

28 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Опять же, ниже приведены основные понятия, связанные с тензором энергии-импульса для полного понимания происходящего, перейти к форме тензора ЭИ для ЭМ поля можно здесь.

Введем *лагранжеву плотность* $\mathscr{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu, \{z_q^\mu(\tau_q)\})$ по формуле:

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x\ \mathscr{L}.$$

Используя принцип наименьшего действия, а так же положив интеграл по границе ПВ (это понадобится при интегрировании по частям) равным нулю, можно прийти к следующему виду уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}. \tag{1}$$

В случае ПВ, как легко убедиться, имеет место трансляционная симметрия (любые сдвиги на постоянные величины). Это значит, что $\mathscr{L}$ не зависит от положения зарядов в ПВ. Тогда имеет место тождество:

$$\partial_\mu \mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu}\partial_\mu A_\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)}\partial_\mu \partial_\alpha A_\nu.$$

Тогда, используя уравнения (1), получаем:

$$\partial_\mu \mathscr{L} = \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)}\right)\partial_\mu A_\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)}\partial_\mu \partial_\alpha A_\nu.$$

Следовательно,

$$\partial_\alpha \delta^\alpha_\mu \mathscr{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)}\partial_\mu A_\nu\right).$$

Окончательно получаем

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)}\partial_\mu A_\nu - \delta^\alpha_\mu \mathscr{L}\right) = 0.$$

Выражение в скобках обозначается за T^α_μ и называется *канонический тензор энергии-импульса*. Легко видеть, что к тензору можно всегда добавить любой другой тензор, чья 4-дивергенция тождественна равна нулю. Мы будем рассматривать следующий вид таких добавок:

$$\Delta T^\mu_\nu = \partial_\alpha G^{\mu\alpha}_\nu,\ \ G^{\mu\alpha}_\nu = -G^{\alpha\mu}_\nu.$$

В силу перестановочности частных производных, данный тензор имеет нулевую 4-дивергенцию. Подберем ΔT^μ_ν таким образом, чтобы полученный тензор $\widehat{T}^{\nu\mu} \equiv T^{\nu\mu} + \Delta T^{\nu\mu}$ был симметричным[1]. Оказывается, если это можно сделать, то будет сохраняться *тензор момента энергии-импульса*:

$$\mathscr{M}^{\mu\nu\alpha} = x^\mu \widehat{T}^{\nu\alpha} - x^\nu \widehat{T}^{\mu\alpha}. \tag{2}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\partial_\alpha \mathscr{M}^{\mu\nu\alpha} = \widehat{T}^{\nu\mu} - \widehat{T}^{\mu\nu} = 0$. Далее мы будет считать, что тензор энергии-импульса уже выбран симметричным.

Рассмотрим выражение для действия в ЭМ поле:

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\int d^4x\ A_\mu(x) j^\mu(x).$$

Пусть носители зарядов отсутствуют. Тогда второе слагаемое равно нулю. В наших обозначениях получаем:

$$\mathscr{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi}F_{\nu\mu}F^{\nu\mu}.$$

Тогда находим:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{16\pi}2(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4\pi}F^{\nu\mu}.$$

В этом случае получается:

$$T^\nu_\alpha = -\frac{1}{4\pi}F^{\nu\mu}\partial_\alpha A_\mu + \frac{1}{16\pi}\delta^\nu_\alpha F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}.$$

Теперь прибавим к нему

$$\Delta T^\nu_\alpha = \frac{1}{4\pi}\partial_\mu(F^{\nu\mu}A_\alpha). \tag{3}$$

[1] Заметим, что здесь был поднят индекс у тензора — это сделано специально для того, чтобы удобнее было проверять симметричность.

Так как у нас нет носителей зарядов, вторая пара уравнений Максвелла перепишется в виде $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Поэтому тензор ЭМ поля можно вынести за знак дифференцирования. Тогда, используя определение тензора ЭМ поля, получаем

$$\widehat{T}^{\nu\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\nu\mu}F^{\alpha}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu\alpha}F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}\right).$$

Не трудно видеть, что след этого тензора равен нулю. Более того, он является симметричным, а также калибровочно инвариантным. Таким образом, мы получили выражение для *тензора энергии-импульса электромагнитного поля.*

29 Плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Умова — Пойнтинга.

ТЭИ для ЭМ поля имеет вид:

$$T^{\nu\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\nu\mu}F^{\alpha}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu\alpha}F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}\right).$$

Распишем его компоненты по отдельности (опустив один из индексов):

$$T^0_0 = -\frac{1}{4\pi}\left[F^{0\mu}F_{0\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[E^2 + \frac{1}{2}(B^2 - E^2)\right] = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2). \tag{1}$$

Величина $W = T^0_0$ является *плотностью энергии ЭМ поля.* Действительно, лагранжева плотность пропорциональна первому инварианту $F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}$, он, в свою очередь, пропорционален разности $E^2 - B^2$. Первое слагаемое соответствует *кинетической энергии ЭМ поля* T, так как оно содержит только производные по времени от переменных A_μ; второе же слагаемое соответствует *потенциальной энергии ЭМ поля* U, так как оно не содержит производных по времени. Таким образом, так как лагранжева плотность равна $T - U$, то $W = T + U$, то есть действительно является плотностью энергии.

Теперь рассмотрим вектор:

$$S_i \equiv -cT^0_i = \frac{c}{4\pi}F^{0j}F_{ij} = \frac{c}{4\pi}(-E_j)(-\varepsilon_{ijk}B_k) = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_i.$$

Этот вектор называется *вектором Умова — Поинтинга.*

Запишем нулевую компоненту закона сохранения ТЭИ, умноженную на скорость света:

$$c\partial_\mu T^\mu_0 = c\partial_0 T^0_0 + c\partial_i T^i_0 = c\partial_0 W + \partial_i S_i = \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{S}$ является потоком ЭМ энергии.

30 Тензор энергии-импульса для точечной частицы. Закон сохранения тензора энергии-импульса.

Рассмотрим уравнение движения частицы во внешнем ЭМ поле:

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu.$$

Умножим данное выражение на $\delta^{(4)}[x - z(s)]$ и проинтегрируем по интервалу ds:

$$mc\int\frac{du^\mu}{ds}\delta^{(4)}[x - z(s)]ds = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\int u_\nu\delta^{(4)}[x - z(s)]ds = \frac{1}{c^2}F^{\mu\nu}j_\nu.$$

Возьмем интеграл слева по частям, считая пределы интегрирования $\pm\infty$. Так же нам понадобится равенство

$$\frac{d}{ds}\delta^{(4)}[x-z(s)] = -(\partial_\nu \delta^{(4)}[x-z(s)])\frac{dz^\nu}{ds} = -(\partial_\nu \delta^{(4)}[x-z(s)])u^\nu,$$

которое можно получить, используя производную сложной функции. Тогда получится уравнение:

$$mc\partial_\nu \int u^\nu u^\mu \delta^{(4)}[x-z(s)]ds = \frac{1}{c^2}F^{\mu\nu}j_\nu.$$

Введем обозначение

$$T^{\mu\nu}_{\text{part}} = mc^2 \int u^\mu u^\nu \delta^{(4)}[x-z(s)]ds. \tag{1}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\mu}_{\text{part}} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu. \tag{2}$$

Введенная величина является *тензором энергии-импульса точечной частицы*. Записав $ds = dtds/dt$, выполним интегрирование в (1):

$$T^{\mu\nu}_{\text{part}} = mc\frac{ds}{dt}u^\mu u^\nu \delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)].$$

Нулевая компонента

$$T^{00}_{\text{part}} = mc^2 u^0 \delta^{(3)}[\mathbf{x}-\mathbf{z}(t)].$$

является *плотностью энергии точечной частицы*, в чем можно убедиться, проинтегрировав выражение выше по области, содержащей точечную частицу. Аналогично $T^{0i}_{\text{part}} = T^{00}_{\text{part}}v^i$ — это *плотность импульса точечной частицы.*

Запишем ТЭИ поля с поднятым индексом:

$$T^{\mu\nu}_{\text{field}} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha - \frac{1}{4}\delta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right).$$

Теперь определим 4-вектор:

$$4\pi f^\mu = -\frac{4\pi}{c}F^{\mu\nu}j_\nu.$$

Подставим выражение для 4-вектора плотности тока из второй пары уравнений Максвелла:

$$4\pi f^\mu = -F^{\mu\nu}\partial^\alpha F_{\alpha\nu} = -\partial^\alpha(F^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}) + F_{\alpha\nu}\partial^\alpha F^{\mu\nu}.$$

Запишем первую пару уравнений Максвелла в виде:

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} = 0$$

Умножим это равенство на $F_{\alpha\nu}$ и просуммируем. Рассмотрим третье слагаемое:

$$F_{\alpha\nu}\partial^\mu F^{\alpha\nu} = \partial^\mu\left(F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu}\right) - F^{\alpha\nu}\partial^\mu F_{\alpha\nu}.$$

Во втором слагаемом опустим индексы у $F^{\alpha\nu}$ и поднимем индексы у $F_{\alpha\nu}$. Тогда все метрические тензоры сократятся, и знак не изменится. То есть получили $F_{\alpha\nu}\partial^\mu F^{\alpha\nu} = 1/2\cdot\partial^\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. Теперь рассмотрим всю сумму:

$$F_{\alpha\nu}\partial^\alpha F^{\mu\nu} + F_{\alpha\nu}\partial^\nu F^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\partial^\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0.$$

Меняя индексы у тензоров ЭМ поля во втором слагаемом местами, а также делая в нем замену $\alpha \to \nu$ и $\nu \to \alpha$, получим в точности первое слагаемое. Поэтому по итогу получаем выражение:

$$F_{\alpha\nu}\partial^\alpha F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\partial^\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$4\pi f^\mu = -\partial^\alpha \left(F^{\mu\nu}F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\alpha F_{\nu\beta}F^{\nu\beta} \right).$$

Теперь, подняв индекс в скобках и опустив его у производной, получаем $f^\mu = \partial_\alpha T^{\alpha\mu}_{\text{field}}$. Подставляя это в уравнение (2), получаем

$$\partial_\alpha T^{\alpha\mu}_{\text{part}} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu = -\partial_\alpha T^{\alpha\mu}_{\text{field}}.$$

То есть имеет место закон сохранения ТЭИ для системы “точечная частица + ЭМ поле”:

$$\partial_\alpha \left(T^{\alpha\mu}_{\text{part}} + T^{\alpha\mu}_{\text{field}} \right) = 0. \tag{3}$$

31 Калибровка Лоренца и вторая пара уравнений Максвелла в ней.

Рассмотрим вторую пару уравнений Максвелла:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu.$$

Перепишем эти уравнения, используя 4-потенциал A_μ:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{1}$$

У нас есть некоторая свобода выбора 4-потенциала, связанная с калибровочной инвариантностью. $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$. Мы можем попытаться наложить какие-то дополнительные условия на 4-потенциал A_μ и получить некоторый “более решаемый” вид уравнения (1). Такие условия называются *калибровками.*

Рассмотрим *калибровку Лоренца*:

$$\partial_\mu A'^\mu = 0. \tag{2}$$

Это означает, что мы ищем такую f, чтобы условие (2) было выполнено. В этой калибровке уравнения примут виде:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{3}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c}j^\nu, \tag{4}$$

где $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$ — *оператор д'Аламбера* или “ящик”, как его иногда называют теорфизики во время разговоров за гаражами[2].

[2]Экзамен будет проводиться не за гаражами, поэтому первое название более подходящее.

32 Уравнение Пуассона и его решение. Потенциал Кулона.

Исследуем решение уравнения, когда имеется покоящийся заряд в начале координат. В таком случае никаких токов нет, а следовательно, решение векторной части уравнения $\mathbf{A} \equiv 0$. Это решение единственно, как было доказано, например в курсе общей физики. Тогда поле B тоже равно нулю. Остается уравнение:

$$\Box\varphi = 4\pi e\delta^{(3)}(\mathbf{x}).$$

Из калибровки Лоренца следует, что $\partial_t\varphi = 0$. Тогда остается уравнение:

$$-\Delta\varphi = 4\pi e\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

В более общем случае справа находится некоторая функция координат f. Такие уравнения называются *уравнения Пуассона*. Чтобы его решить, применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения, вспоминая выражение для фурье-образа от производной функции:

$$(-ik)^2\mathcal{F}[\varphi](\mathbf{k}) = -4\pi e, \tag{2}$$

так как фурье-образ дельта-функции (при нормировке обратного преобразования на 2π, а прямого — на 1) равен единице. Данное уравнение решается очевидным образом. Тогда получаем выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 4\pi e\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}}{k^2}.$$

Данный интеграл можно вычислить в сферических координатах, используя выражение для интеграла Дирихле. Конечный результат получится следующий:

$$\varphi(x) = \frac{e}{|\mathbf{x}|}. \tag{3}$$

Данная функция называется *потенциалом Кулона.* Из вида исходного дифференциального уравнения получается, что найденная функция — это функция Грина $G(x)$, умноженная на заряд частицы. Таким образом, если мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(x), \tag{4}$$

то решение будет иметь вид

$$\varphi = -4\pi\rho(x) * G(x) = \int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}d^3r'. \tag{5}$$

Здесь $*$ означает свертку двух функций.

33 Дипольный электрический момент и поле, создаваемое им.

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов:

$$\varphi(R) = \sum_q\frac{e_q}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_q|}. \tag{1}$$

Если выполнено условие $R \gg r_q$, то можно разложить это выражение по степеням $\mathbf{r}_q$:

$$\varphi(R) = \sum_q\left(\frac{e_q}{R} - e_q(\mathbf{r}_q,\nabla)\frac{1}{R}\right).$$

Можно ввести следующие обозначения: $\sum e_q = Q$ — полный заряд и $\sum e_q \mathbf{r}_q = \mathbf{d}$ — *дипольный момент системы зарядов*. Пристально глядя в эти формулы или проводя аналогию с аффинной комбинацией векторов, получаем, что если суммарный заряд системы равен нулю, то дипольный момент не зависит от выбора начала СК.

В таком случае потенциал будет определяться формулой:

$$\varphi^{(1)} = -(\mathbf{d}, \nabla)\frac{1}{R} = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3}.$$

Тогда поле получится равным:

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)} = \frac{3(\mathbf{R}, \mathbf{d})\mathbf{R} - R^2\mathbf{d}}{R^5} = \frac{3(\mathbf{n}, \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3}. \tag{2}$$

34 Квадрупольный момент.

Получим второе слагаемое в разложении потенциала:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_q e_q r_q^i r_q^j \frac{\partial^2}{\partial R^i \partial R^j}\frac{1}{R}. \tag{1}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial R^i \partial R^i}\frac{1}{R} = 0$$

в силу уравнения Пуассона. Поэтому можно переписать $\varphi^{(2)}$ в виде:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_q e_q \left[r_q^i r_q^j - \frac{1}{3}\mathbf{r}_q^2 \delta^{ij}\right]\right)\frac{\partial^2}{\partial R^i \partial R^j}\frac{1}{R}$$

Выражение в скобках является *тензором квадрупольного момента системы*

$$D_{ij} = \sum_q e_q \left[3 r_q^i r_q^j - \mathbf{r}_q^2 \delta^{ij}\right]. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что данный тензор является симметричным, а также его след равен нулю. Отсюда получается, что в нем есть только 5 независимых компонент. С помощью этого тензора выражение (1) переписывается:

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ij}}{6}\frac{\partial^2}{\partial R^i \partial R^j}\frac{1}{R} = \frac{D_{ij} n_i n_j}{2R^3}, \tag{3}$$

где n_i — компоненты вектора $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$.

35 Энергия электрического диполя и квадруполя во внешнем поле. Потенциальная энергия взаимодействия диполя с диполем.

Пусть система зарядов находится во внешнем поле с потенциалом φ и напряженностью $\mathbf{E}$. Начало координат положим внутри системы зарядов. Полная потенциальная энергия взаимодействия системы с полем:

$$U = \sum_q e_q \varphi(r_q). \tag{1}$$

Потенциал можно разложить по степеням r_q в окрестности нуля:

$$U = \sum_q (e_q\varphi(0) + e_q(\mathbf{r}_q, \nabla)\varphi(0)) + U^{(2)} + ...$$

Выражение для $U^{(2)}$ будет выписано и рассмотрено чуть позже. Преобразуя данное выражение, получим

$$U = \varphi(0)Q + (\mathbf{d}, \nabla)\varphi(0) + ... = \varphi(0)Q - (\mathbf{d}, \mathbf{E}_0) + ..., \tag{2}$$

где $E_0 = -\nabla\varphi(0)$. Отсюда получаются выражения для силы и момента силы, действующие на систему:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \mathbf{E}_0 Q + \nabla(\mathbf{d}, \mathbf{E}_0),$$
$$\mathbf{K} = \sum_q [\mathbf{r}_q \times \mathbf{E}_0] e_q = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}_0].$$

Теперь рассмотрим поправку $U^{(2)}$:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_q e_q r_q^i r_q^j \frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial R^i \partial R^j}.$$

Так как источник поля внешний, то, считая, что он находится далеко от начала координат, получаем, что φ удовлетворяет уравнению Лапласа в нуле: $\Delta\varphi(0) = 0$. Тогда получается, что выражение можно переписать через квадрупольный момент:

$$U^{(2)} = \frac{D_{ij}}{6}\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial R^i \partial R^j}. \tag{3}$$

Рассмотрим взаимодействие двух систем, суммарный заряд каждой из которой равен нулю. Ограничимся лишь дипольным взаимодействием и рассмотрим его вклад в потенциальную энергию. Пусть первая система является источником внешнего поля $\mathbf{E}_1$, которое дается выражением поля диполя. Вторая система будет испытывать воздействие поля E_1, и у нее будет соответствующая потенциальная энергия взаимодействия $U = -(\mathbf{d}_2, \mathbf{E}_1)$. Подставляя выражение для $\mathbf{E}_1$, получаем:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1, \mathbf{R})(\mathbf{d}_2, \mathbf{R})}{R^5} \tag{4}$$

— *потенциальная энергия взаимодействия двух диполей.* Заметим, что данное выражение симметрично по индексам $1, 2$, что говорит о непротиворечивости проведенных рассуждений.

36 Калибровка Кулона и уравнение на пространственный потенциал A в присутствии стационарного тока. Закон Био — Савара — магнитное поле, создаваемое стационарным током.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, движущимися по финитным траекториям. В таком случае имеет место стационарное распределение вектора плотности тока. Тогда имеем уравнения на вектор B:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{1}$$

Усредним данные уравнения по времени, учитывая, что среднее производной по времени от ограниченной величины равно нулю. Опустим знаки усредненных величин и везде далее будет подразумевать их наличие:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \operatorname{rot} \langle \mathbf{A} \rangle , \quad \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle .$$

Используем здесь *Калибровку Кулона*:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{2}$$

Тогда, подставив выражение для B во второе уравнение, получим:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{3}$$

Мы уже знаем, чему равна функция Грина для данного уравнения:

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}|}. \tag{4}$$

Поэтому решением уравнения будет:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3r'. \tag{5}$$

Тогда получается выражение для среднего поля:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \tag{6}$$

Эта формула выражает *закон Био — Савара.*

37 Дипольный магнитный момент и поле, создаваемое им.

Пусть у нас имеется система зарядов. Тогда выражение для плотности тока:

$$\mathbf{j} = \left\langle \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q \delta^{(3)}[\mathbf{x} - \mathbf{r}_q(t)] \right\rangle .$$

Тогда выражение для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{x}|} \left\langle \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q \delta^{(3)}[\mathbf{x} - \mathbf{r}_q(t)] \right\rangle = \frac{1}{c}\sum_q \left\langle \frac{e_q \dot{\mathbf{r}}_q(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_q(t)|} \right\rangle .$$

Усредняемой выражение разложим по степеням $\mathbf{r}_q$ в нуле, поместив этот ноль внутри системы токов. Останавливаясь на линейных членах, получаем:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR}\left\langle \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q \right\rangle - \frac{1}{c}\left\langle \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \nabla)\frac{1}{R} \right\rangle .$$

В первом слагаемом дифференцирование по времени можно вынести из под суммы, поэтому это полная производная по времени. Так как движение финитное, среднее от этого слагаемого равно нулю. Теперь поработаем со вторым слагаемым: запишем явно $\nabla 1/R$, тогда у нас получится

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{cR^3}\left\langle \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) \right\rangle .$$

Теперь преобразуем усредняемое выражение:

$$\sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) = \frac{1}{2}\left(\sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) + \sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R})\right) = \frac{1}{2}\sum_q e_q \dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\sum_q e_q \mathbf{r}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) - \sum_q e_q \mathbf{r}_q (\dot{\mathbf{r}}_q, \mathbf{R})\right).$$

Перегруппировав слагаемые и учтя, что среднее от производной по времени равно нулю, получаем, что

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2cR^3}\left\langle \sum_q e_q (\dot{\mathbf{r}}_q (\mathbf{r}_q, \mathbf{R}) - \mathbf{r}_q (\dot{\mathbf{r}}_q, \mathbf{R})) \right\rangle .$$

Используя формулу двойного векторного произведения, получаем:

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}]}{R^3} = -\left[\boldsymbol{\mu} \times \nabla \frac{1}{R}\right], \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\left\langle \sum_q e_q [\mathbf{r}_q \times \dot{\mathbf{r}}_q] \right\rangle \tag{2}$$

— вектор *магнитного дипольного момента* системы зарядов.

Отсюда легко получить поле магнитного диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{R^3}, \tag{3}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$.

38 Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Частота Лармора.

Пусть у нас имеется система частиц, которая движется со скоростями, много меньшими скорости света. Также все частицы имеют одинаковое отношение массы к заряду $e/m =$ const:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\left\langle \sum_q e_q [\mathbf{r}_q \times \dot{\mathbf{r}}_q] \right\rangle = \frac{e}{2mc}\left\langle \sum_q m_q [\mathbf{r}_q \times \dot{\mathbf{r}}_q] \right\rangle = \frac{e}{2mc}\mathbf{M},$$

где $\mathbf{M}$ — механический момент системы. Отсюда получаем *гиромагнитное соотношение*:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{e}{2mc}. \tag{1}$$

В более общем случае, гиромагнитное соотношение может задаваться формулой:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{e}{mc}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right), \tag{2}$$

где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Рассмотрим движение этой системы в постоянном магнитном поле. Выражения для средних силы и момента сил:

$$\mathbf{F} = \left\langle \sum_q \frac{e_q}{c}[\dot{\mathbf{r}}_q \times \mathbf{B}] \right\rangle = 0,$$

$$\mathbf{K} = \left\langle \sum_q \frac{e_q}{c}[\mathbf{r}_q \times [\dot{\mathbf{r}}_q \times \mathbf{B}]] \right\rangle \neq 0.$$

Сила равна нулю, так как поле является постоянным. В выражении для момента сил распишем двойное векторное произведение, затем проделаем все шаги из прошлого для выделения выражения магнитного момента (мысленно заменяя B на R). Тогда получится формула:

$$\mathbf{K} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}]. \tag{3}$$

Выражения для силы и момента сил верны для произвольной системы зарядов во внешнем постоянном поле. Теперь, используя гиромагнитное соотношение:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\mu}], \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\Omega} \equiv e/(2mc)\ \mathbf{B}$ — *частота Лармора*. Полученное выражение определяет *прецессию магнитного момента системы во внешнем магнитном поле*.

39 Вектор потенциал A для плоской и монохроматической электромагнитной волны.

Рассмотрим уравнения Максвелла в калибровке Лоренца:

$$\begin{cases} \Box A^\mu &= 0, \\ \partial_\mu A^\mu &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

Данные уравнения являются линейными по 4-потенциалу. Этот факт является отражением *принципа суперпозиции*. Также этот факт позволяет нам решать уравнение методом комплексных амплитуд. То есть мы будем искать решение уравнения в виде:

$$A_\mu = \xi_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}, \tag{2}$$

где k_ν — *волновой 4-вектор*, а ξ_μ — некоторый комплексный вектор, который называется *4-вектор поляризации*. Вектор ξ_μ является постоянным, поэтому никак не влияет на дифференцирование. Подставляя (2) в систему (1), получаем:

$$\begin{cases} k_\mu k^\mu &= 0, \\ \xi_\mu k^\mu &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения следует, что вектор k_μ является светоподобным. Таким образом, из условия $k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$ следует, что поворотом СК можно получить волновой 4-вектор в виде $(k, k, 0, 0)$. Заметим, что если заменить ξ_μ на $\xi_\mu + ak_\mu$, то, в силу первого уравнения системы (3), второе будет по-прежнему выполнено. Используя введенные обозначения, перепишем второе уравнение системы (3):

$$\xi_\mu k^\mu = k\xi_0 - k\xi_1 = 0.$$

Таким образом, у нас имеет место решение $\xi_\mu = (\xi_0, \xi_0, \xi_2, \xi_3)$. Заменим данный вектор по формуле $\xi^\mu \to \xi^\mu + \alpha k^\mu$, где $\alpha = -\xi^0/k$. Тогда мы получим решение в виде $\widetilde{\xi}^\mu = (0, 0, \xi^2, \xi^3)$ — вектор поляризации. Получается, что вектор поляризации имеет только две независимые компоненты, которые являются пространственными компонентами в направлениях, перпендикулярных распространению волнового фронта (поверхности постоянной фазы).

Учитывая все сказанное, получаем выражение для 4-потенциала:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= 0, \\ A_i &= \xi_i e^{-ik(ct-x)}, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

Такая волна волна имеет уровни постоянной фазы, параллельные плоскости yz. Поэтому такую волну называют *плоской*. Волновой вектор можно записать в виде $k = \omega/c$, где ω — частота волны. Тогда получается:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ — направление распространения волны, а λ — ее длина. Мы получили, что волна соответствует определенной частоте, поэтому она называется *монохроматической.*

40 Векторы E, B и Умова — Пойнтинга в плоской и монохроматической электромагнитной волне.

Найдем выражения для E и B для электромагнитной волны. Нам уже известно, что можно положить $A_0 = \varphi = 0$ (см. предыдущую секцию). Также можно сделать A только функцией $t - x/c$. Действительно, если A не зависит от y, z, уравнения Максвелла примут вид:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathbf{A}(t, x) = 0. \tag{1}$$

Легко видеть, что если $A = A(t - x/c)$, то уравнение (1) выполнено. Калибровка Лоренца примет вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{2}$$

Откуда получаем, что $\operatorname{div} A = 0$, так как $\varphi = 0$. Теперь запишем выражения для векторов E и B:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Подставляя сюда $A = A(t - x/c)$, получаем:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}\left(t - \frac{x}{c}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}] = -\frac{1}{c}[\mathbf{n} \times \mathbf{A}'], \tag{3}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, а A' — производная по аргументу. Если волна монохроматическая, получаем:

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}]. \tag{4}$$

Таким образом, $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$. То есть $(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = 0$ и $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$. Используя эти выражения, найдем вектор Умова — Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}.$$

Плотность энергии при этом равна:

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}.$$

То есть $\mathbf{S} = cW\mathbf{n}$. Тогда имеет место тождество:

$$c^2W^2 - S^2 = 0. \tag{5}$$

41 Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны.

Выражение для полей через вектор-потенциал:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}\left(t - \frac{x}{c}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}] = -\frac{1}{c}[\mathbf{n} \times \mathbf{A}'].$$

Легко видеть, что в таком случае векторы E и B будут тоже выражаться через комплексные амплитуды:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_\nu x^\nu},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{ik_\nu x^\nu},$$

где $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ — некоторые комплексные векторы. Рассмотрим только вектор $\mathbf{E}$: подберем вектор $\mathbf{b}$ в представлении $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{i\alpha}$ так, чтобы квадрат $\mathbf{b}$ был действительным. То есть, если $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$, векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ должны быть ортогональны.

Пусть теперь x — ось распространения ЭМ волны, а вектор $\mathbf{b}_1$ направлен по оси y. Тогда решение можно записать в виде:

$$E_y = |b_1|\cos(\omega t - (\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \alpha), \quad E_z = \pm|b_2|\sin(\omega t - (\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \alpha).$$

Таким образом,

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1.$$

Получается, в самом общем случае вектор $\mathbf{E}$ описывает эллипс в плоскости yz, такая поляризация называется *эллиптической*. Если $|b_1| = |b_2|$, то эллипс вырождается в круг, и говорят, что волна *поляризована по кругу*. Если $|b_i| = 0$ для некоторого i, то поле направлено по одной из осей плоскости yz. Последняя поляризация называется *линейной*.

($*$) Если свет является, например, естественным, то у него нет какой-либо фиксированной поляризации — в таком случае $\mathbf{E}_0$ является некоторой медленной функцией времени, и говорят, что свет *частично поляризован*. Тогда рассматривают следующий тензор:

$$J_{ij} = \left\langle E_{0i}E_{0j}^* \right\rangle,$$

где a^* — элемент, сопряженный к a. След этого тензора является *интенсивностью* волны J, и на нее обычно нормируют этот тензор. Таким образом можно ввести *тензор поляризации*:

$$\rho_{ij} = \frac{J_{ij}}{J}. \tag{1}$$

Легко видеть, что $\rho_{ii} = 1$, а его диагональные элементы комплексно сопряжены $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Поэтому поляризационный тензор параметризуется всего тремя вещественным параметрами. *Необходимым и достаточным условием полной поляризованности волны* является равенство нулю определителя $\det \rho_{ij} = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21}$. Выполнение этого условия означает, что компоненты $\mathbf{E}_0$ не зависят от времени.

Если же поляризация полностью отсутствует, все направления эквивалентны, в таком случае $\rho_{ij} = (1/2)\delta_{ij}$. Определитель тогда будет равен $1/4$.

В общем случае определитель тензора поляризации меняется от 0 до $1/4$. Поэтому можно ввести *степень поляризации* P, определяемую как положительное решение уравнения:

$$\det \rho_{ij} = \frac{1}{4}(1 - P^2). \tag{2}$$

Она пробегает значения от 0 для полностью неполяризованного света до 1 до полностью поляризованного.

42 Разложение электромагнитного поля на осцилляторы. Фурье разложение A, E и B. Действие для осцилляторов электромагнитного поля.

В силу принципа суперпозиции любое решение уравнений Максвелла можно представить как сумму плоских монохроматических волн с волновыми 4-векторами k_μ и 4-векторами поляризации $\xi_\mu(k) \equiv \widehat{A}_\mu(k)$:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \widehat{A}_\mu(k) e^{-ik_\nu x^\nu} \delta(k_\alpha k^\alpha), \tag{1}$$

где $\delta(k_\alpha k^\alpha)$ — дельта функция в нуле, то есть в ней учитывается то, что $k_\alpha k^\alpha = 0$. Заметим, что d^4k является лоренц-инвариантом, так как якобиан ПЛ равен единице, поэтому выражение под интегралом является 4-вектором, так как 4-вектором является $\widehat{A}_\mu(k)$. Также заметим, что:

$$\iiiint d^4k\delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2)... = \int dk_0 \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) \iiint \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}... = \iiint \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}...,$$

где первое равенство получено из свойств дельта-функции. Теперь вспомним, что всегда можно выбрать вектор A_μ так, что $A_0 = 0$, поэтому и $\widehat{A}_0(k) = 0$. Переобозначая функцию $\widehat{A}_\mu(k)$ таким образом, чтобы в ней находились зависимость от времени и все коэффициенты:

$$\widehat{A}_\mu(k) \to \frac{1}{k} \frac{\widehat{A}_\mu(k)}{(2\pi)^4} e^{-ikct} \equiv \widehat{A}_\mu(t, \mathbf{k}),$$

получим выражение для вектор-потенциала:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int d^3k \widehat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}. \tag{2}$$

Отсюда получаем разложение для поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \int d^3k \frac{\partial \widehat{\mathbf{A}}}{\partial t}(t, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \tag{3}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = i \int d^3k [\mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}. \tag{4}$$

Теперь подставим выражение (1) в уравнения Максвелла. После некоторых преобразований получится:

$$\ddot{\widehat{\mathbf{A}}} + c^2k^2 \widehat{\mathbf{A}} = 0. \tag{5}$$

То есть каждая Фурье-мода ЭМ волны представляет собой свободный осциллятор. Это означает, что поле разбивается на набор независимых осцилляторов с данными Фурье-модами.

Можно проверить, что уравнение (5) можно получить из принципа наименьшего действия с помощью действия

$$S = \int dt \int d^3k \left[|\dot{\widehat{\mathbf{A}}}|^2 - c^2 k^2 |\widehat{\mathbf{A}}|^2 \right]. \tag{6}$$

43 Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля и ее свойства.

Далее будет проведен достаточно трудоемкий вывод выражения для *запаздывающей функции Грина*. Скорее всего на экзамене больше, чем иметь о нем представления не нужно, поэтому нет ничего стыдного в том, чтобы пропустить этот вывод и перейти к самому выражению.

Снова рассмотрим уравнения Максвелла в калибровке Лоренца:

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu,$$
$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Для решения их в общем виде нам необходимо знать *функцию Грина* $G(x, R)$ для данного уравнения. В нашем случае это функция, которая является решением уравнения:

$$\Box_x G(x, R) = \delta^{(4)}(x - R), \tag{1}$$

где $\Box_x$ — 4-дивергенция по первому аргументу. То есть решением уравнения, когда источником тока является некоторая частица в мировой точке R. Заметим также, что уравнение на функцию Грина обладает трансляционной симметрией, поэтому правильной формой для функции будет следующая: $G(x, R) = G(|x - R|)$, где модуль означает расстояние в 4-мерном ПВ. Проверкой в лоб можно убедиться, что при таком выражении для G уравнение на калибровку выполнится автоматически. Применим к уравнению (1) преобразование Фурье и учтем выражение для фурье-образа от производной функции:

$$(-ik_\alpha)(-ik^\alpha)\mathcal{F}[G](k) = 1.$$

Отсюда получается:

$$\mathcal{F}[G](k) = -\frac{1}{k^2} + C\delta(k),$$

где C — постоянная. Второе слагаемое появляется так как мы решаем уравнение в обобщенных функциях с целью регуляризовать расходимость решения в нуле $k_\alpha k^\alpha = 0$. Первое слагаемое не является функцией из $L_1(\mathbb{R}^4)$, поэтому обратное преобразование Фурье по одной из компонент необходимо записывать по определению — в смысле главного значения. Сделаем это по нулевой компоненте. Слагаемое, связанное с $C\delta(k)$, будет иметь тождественно нулевую 4-дивергенцию, поэтому мы его отбросим. Мы так делаем, потому что у нас всегда имеет место вклад однородных решений в виде ЭМ волн без собственных источников, которые мы исключаем из рассмотрения в силу физичности задачи. Тогда, мы получаем выражение для функции Грина:

$$G(x - R) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G]](x - R) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lim_{P\to+\infty} \int_{-P}^{P} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ek_0(x-R)_0 - i(\mathbf{k},(\mathbf{x}-\mathbf{R}))}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2}.$$

У подынтегрального выражения имеются полюсы первого порядка в точках $k_0 = \pm k$. Выйдем на комплексную плоскость. Интеграл

$$\lim_{P\to+\infty}\int_{-P}^{P}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ik_0(x-R)_0-i(\mathbf{k},(\mathbf{x}-\mathbf{R}))}}{k_0^2-\mathbf{k}^2}=\text{v.p.}\int\ldots$$

можно заменить на интеграл по контуру в комплексной плоскости при определенных условиях. Сначала заменим множество интегрирования $\{z\in\mathbb{C}: \text{Im } z=0, |\text{Re } z|\le R\}$ на такой же отрезок, деформированный таким образом, чтобы точки полюсов не содержались в нем (например “обойдя” их по полуокружностям, которые находится в полупространстве $\text{Im } z<0$).

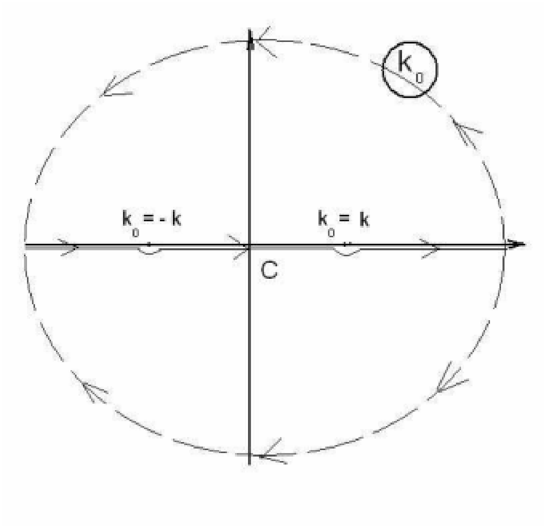

Рис. 1: Иллюстрация обхода контура, 2018-ый год, скрин оригинала.

Теперь замкнем наш деформированный отрезок полуокружностью радиуса P. Тогда, так как функция под интегралом убывает на бесконечности, в пределе вклад от интеграла по полуокружности окажется равен нулю. Теперь выберем каким контуром замыкать:

Случай 1. Пусть $(x^0-R^0)<0$. Тогда выберем “нижнюю” полуокружность. Полученный контур ограничивает область, внутри которой наша подынтегральная функция не имеет особых точек. Поэтому по, например, теореме Стокса интеграл от нее равен нулю, то есть $G(x-R)=0$ при $(x^0-R^0)<0$.

Случай 2. Пусть $(x^0-R^0)>0$. Тогда выберем “верхнюю” полуокружность. Внутри области, которую ограничивает наш контур имеется два полюса первого порядка. Поэтому по теореме Коши о вычетах:

$$\oint_C\frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ek_0(x-R)_0-i(\mathbf{k},(\mathbf{x}-\mathbf{R}))}}{k_0^2-\mathbf{k}^2}=-2\pi\, i\sum_i\text{res}_{k_0=a_i}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ek_0(x-R)_0-i(\mathbf{k},(\mathbf{x}-\mathbf{R}))}}{k_0^2-\mathbf{k}^2}\right). \tag{2}$$

Здесь $\text{res}_{k_0=a_i}$ — комплексный вычет в полюсе a_i. Знак минус указывает на направление обхода контура.

Вычислив данное выражение, а также добавив функцию Хевисайда $\theta(x^0-R^0)$ в качестве множителя, чтобы учесть разный результат для разного знака (x^0-R^0), получаем выражение для функции Грина:

$$G_R(x-R)=-\theta(\Delta x^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i(\mathbf{k},\Delta\mathbf{x})}\frac{\sin[k\Delta x^0]}{k}, \tag{3}$$

где $\Delta x^0 = x^0 - R^0$, $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{R}$. Данный интеграл можно вычислить, используя полярные координаты в пространстве $\mathbf{k}$. После не очень долгих, но достаточно мучительных преобразований, получаем выражение для функции Грина:

$$G_R(\Delta x) = \frac{\theta(\Delta x^0)}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|}\left[\delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|) - \delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|)\right]. \tag{4}$$

Второе слагаемое равно нулю, так как $\delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|) \neq 0$ только на множестве, где $\theta(\Delta x^0) = 0$. Поэтому это слагаемое можно отбросить, и получить окончательный ответ для запаздывающей функции Грина:

$$G_R(x - R) = \frac{1}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|}\delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|), \tag{5}$$

здесь нижний индекс R от слова “retarded” (~~slow or limited in mental development~~ запаздывающий). Эта функция удовлетворяет *принципу причинности*: возмущение должно приходить в мировую точку x только после того, как оно было создано в мировой точке R. Более того, она не равна нулю только на множестве $\Delta x^0 = |\Delta\mathbf{x}| > 0$, то есть на части светового конуса, которая исходит из мировой точки R в будущее. Действительно, ЭМ волна должна распространяться только после своего появления, причем со скоростью света, вперед в будущее.

44 Получить запаздывающие потенциалы из запаздывающей функции Грина.

Выражение для функции Грина:

$$G_R(x - y) = \frac{1}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|}\delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|).$$

Мы знаем, что решением уравнения Максвелла будет:

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c}\int d^4y G_R(x - y) j^\mu(y).$$

Поэтому получаем выражение для *запаздывающих потенциалов*:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c}\int d^3y \frac{j^\mu(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Используя выражения для компонент и более привычные обозначения, получим:

$$\varphi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{|r - r'|} d^3r', \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{j(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{|r - r'|} d^3r', \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор к точке наблюдения, а $\mathbf{r}'$ — вектор в элементу заряда.

45 Получить Потенциалы Лиенара — Вихерта в трехмерной и четырехмерной форме из запаздывающих потенциалов.

Определим *запаздывающее время* $t' = t - R(t')/c$. В системе отсчета, в которой в момент времени частица t' покоится, поле в точке наблюдения в момент времени t дается кулоновским потенциалом, то есть

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \tag{1}$$

Перепишем потенциал в виде:

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')} = \frac{e\gamma}{\gamma[c(t-t') - (\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{v}/c)]} = \frac{e\gamma}{R_\nu u^\nu}, \tag{2}$$

где u^ν — 4-скорость, а $R^\nu = (c(t-t'), \mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Тогда для 4-потенциала можно получить:

$$A^\mu = e\frac{u^\mu}{R_k u^k}. \tag{3}$$

Теперь подставим в (3) выражение для $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = \mathbf{R}$ и скорость частицы:

$$\varphi = \frac{e}{R - (\mathbf{v}, \mathbf{R})/c}, \tag{4}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{e\mathbf{v}}{R - (\mathbf{v}, \mathbf{R})/c}. \tag{5}$$

Эти выражения задают *потенциалы Лиенара — Вихерта.*

Наш лектор решил не воспринимать данный вывод (взятый из учебника Ландау — Лифшица), поэтому приведем еще один более строгий и прозрачный:

Для этого нам целых два раза понадобится свойство дельта-функции Дирака:

$$\delta[g(x)] = \sum_q \frac{\delta(x-x_q)}{|g'(x_q)|}, \tag{6}$$

которое имеет место если $g(x_q) = 0$ для всех q. С его помощью получаем:

$$\delta[(x-y)^2] = \frac{1}{2|\Delta\mathbf{x}|}\left[\delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|) + \delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|)\right].$$

Так как в функции Грина можно написать сколько угодно дельта функций от сумм вида $\delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|)$, то функция Грина перепишется в виде:

$$G_R(x-y) = \frac{\theta(x^0-y^0)}{2\pi}\delta[(x-y)^2],$$

где квадрат понимается в смысле пространства Минковского. Теперь надо свернуть ~~себе шею~~ функцию Грина с 4-вектором тока j^μ:

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c}\int d^4y ec \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\ u^\mu(s)\delta^{(4)}[y-z(s)]\frac{\theta(x^0-y^0)}{2\pi}\delta[(x-y)^2]. \tag{7}$$

Возьмем интеграл по d^4y:

$$A^\mu = 2e\int ds\ u^\mu(s)\theta[x^0 - z^0(s)]\delta[\{x-z(s)\}^2].$$

Теперь снова используем свойство (6):

$$\delta[\{x-z(s)\}^2] = \frac{\delta(s-s')}{\left|\frac{d[x-z(s)]^2}{ds}\right|},$$

где s' — запаздывающий интервал, то есть решение уравнения $[x-z(s)]^2 = 0$ при $x^0 > z^0(s)$. Его смысл в том, что это (с точностью до скорости света) собственное время на часах излученной в прошлом ЭМ волны, которая наблюдается в мировой точке x. Найдем явное выражение для знаменателя:

$$\frac{d[x-z(s)]^2}{ds} = -2[x-z(s)]_\mu \frac{dz^\mu(s)}{ds} = -2R^\mu u_\mu,$$

где $R^\mu = [x-z(s)]^\mu = (c(t-t'), \mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — обозначение из прошлого вывода. Таким образом,

$$A^\mu(x) = 2e\int \frac{\delta(s-s')}{\left|\frac{d[x-z(s)]^2}{ds}\right|} u^\mu(s)ds = \frac{eu^\mu(s')}{R^\mu(s')u_\mu(s')}. \tag{8}$$

Подставляя явные выражения для 4-скорости и R^μ, получим искомые потенциалы.

Важно отметить, что соответствие между $t \equiv x^0/c$ и $t' \equiv z^0(t')/c$ взаимно однозначное. Это обстоятельство связано с тем, что скорость частицы всегда меньше скорости света, поэтому ее мировая линия не может выйти за пределы светового конуса — это оставляет нам два решения: излучение волны в прошлом и будущем. Так как нас интересует только излучение волны из прошлого, то мы получаем единственное решение уравнения на s', следовательно, взаимно однозначное соответствие между t и t' (они связаны тем же уравнением, что и x и s).

46 Характер зависимости поля произвольно двигающегося заряда от расстояния. Волновая зона. Характер поведения полей E и B вблизи двигающегося заряда.

Используя потенциал Лиенара — Вихерта, мы можем получить выражения для полей произвольно двигающейся частицы:

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3} + \frac{e\left[\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{a}\right]\right]}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3}, \tag{1}$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)[\mathbf{v}\times\mathbf{n}]}{cR^2\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3} + \frac{e\left(c[\mathbf{a}\times\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\times[[\mathbf{v}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{n}]]\right)}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3}, \tag{2}$$

где $\mathbf{R}(t) = \mathbf{x}-\mathbf{z}(t)$, $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}}(t)$, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. Все величины вычисляются в момент запаздывающего времени $t' = t - R/c$.

В каждой формуле присутствует два слагаемых: первое не зависит от ускорения частицы и убывает достаточно быстро $\sim 1/R^2$ — это поле равномерно движущегося заряда; второе — вклад, зависящий от ускорения и убывающий достаточно медленно $\sim 1/R$.

Пусть мы находимся вблизи системы зарядов, то есть $R \ll (1-v^2/c^2)c^2/a$. Тогда в выражении полей остаются только первые слагаемые. Таким образом, вблизи двигающегося заряда мы получаем поле равномерно движущегося заряда. Если выполнено обратное равенство

$$R \gg \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{c^2}{a}. \tag{3}$$

Тогда выражения для полей становятся немного проще:

$$\mathbf{E} = \frac{e\left[\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{a}\right]\right]}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]. \tag{4}$$

Здесь мы пренебрегли первыми слагаемыми. Зависимость от расстояния в этом случае достаточно плавная, поэтому, как мы увидим в следующей секции, волна не затухает на бесконечности. Область, в которой оправдано такое приближение, называется *волновой зоной* излучения.

47 Характер распределения по углам излучения в ультрарелятивистском случае.

Рассмотрим поле движущейся частицы в случае, когда точка наблюдения находится достаточно далеко, чтобы пренебречь вкладом поля равномерно движущегося заряда. Тогда выражения для полей

$$\mathbf{E} = \frac{e\left[\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{a}\right]\right]}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^3}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}].$$

В таком приближении поток энергии через площадку с телесным углом $d\Omega$ равен:

$$dI = (\mathbf{S},\mathbf{n})R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi}E^2R^2d\Omega,$$

что при подстановке переходит в

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{\left[\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{a}\right]\right]^2}{\left(1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c}\right)^6}. \tag{1}$$

Как мы видим, поток энергии не затухает при удалении от источника. Поэтому говорят об *излучении* ЭМ волны.

В случае ультрарелятивистской частицы $v\sim c$ перепишем знаменатель формулы (3)

$$1-\frac{(\mathbf{v},\mathbf{n})}{c} = 1-\frac{v}{c}\cos\theta,$$

где θ — угол между направлением скорости частицы и направлением распространения ЭМ волны. Данная величина представлена в знаменателе в шестой степени, поэтому в данном приближении возникает резкая анизотропия излучения — почти все излучение будет сосредоточено в небольшом конусе с осью направленной по скорости частицы. Оценим угловой размер этой области:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \approx 1-\frac{v}{c}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) \approx 1-\frac{v}{c}+\frac{v}{c}\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)+\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right), \tag{2}$$

где γ — гамма-фактор. Таким образом, когда $\theta\sim 1/\gamma$ знаменатель стремится к нулю при приближении скорости к скорости света. Как и ожидалось, получается конус с углом раствора $\sim 1/\gamma$ и с осью, параллельной скорости, внутри которого сосредоточена подавляющая часть излучения.

48 Критерий применимости нерелятивистского приближения для излучения.

Вспомним выражение для запаздывающих потенциалов:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c}\int d^3y\frac{j^\mu(x^0-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},$$

Рассмотрим ситуацию, когда $y \ll x$. Тогда получается

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx x - (\mathbf{n}, \mathbf{y}),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/x$. Мы можем спокойно пренебречь вторым слагаемым в модуле в знаменателе, потому что он даст нам погрешность малого порядка. Однако мы не можем так же просто это сделать внутри 4-вектора плотности тока, потому что нам неизвестно, насколько быстро он меняется за время $(\mathbf{n}, \mathbf{y})/c$. Таким образом, получаем

$$A^\mu \approx \frac{1}{cx} \int d^3y j^\mu(x^0 - x + (\mathbf{n}, \mathbf{y}), \mathbf{y}).$$

Определим условия, при которых мы можем пренебречь скалярным произведением внутри 4-вектора плотности тока. Пусть d — характерный размер системы, тогда $(\mathbf{n}, \mathbf{y})/c \sim d/c$. Пусть T — характерное время изменения j^μ. Тогда период излучения будет порядка T. То есть получается, что $d/c \ll T$, или, используя характерную длину волны излучения λ, $d \ll \lambda$. С другой стороны, $T \sim d/v$, где v — характерная скорость движения частиц в системе. Тогда мы получаем, что $\lambda \sim cd/v$, что, с использованием условия $d \ll \lambda$, перепишется в виде:

$$v \ll c. \tag{1}$$

Это выражение определяет *критерий применимости дипольного приближения.*

49 Интенсивность излучения в дипольном приближении.

Формула

$$\mathbf{A} \approx \frac{1}{cx} \int d^3y \, \mathbf{j}(x^0 - x + (\mathbf{n}, \mathbf{y}), \mathbf{y}).$$

в дипольном приближении принимает вид

$$\mathbf{A} \approx \frac{1}{cx} \int d^3y \, \mathbf{j}(t - \frac{x}{c}, \mathbf{y}), \quad t = \frac{x^0}{c}.$$

Подставим выражение для плотности тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho = \mathbf{v} \sum_q e_q \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}_q).$$

Тогда получается

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{1}{cx} \sum_q e_q \mathbf{v}_q \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Вспоминая определение дипольного момента системы

$$\sum_q e_q \mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{d}},$$

мы получаем выражения для полей:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2 x} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]. \tag{1}$$

Таким образом, заряды излучают только если они движутся ускоренно. Используя определение интенсивности

$$dI = \frac{c}{4\pi} B^2 x^2 d\Omega,$$

получаем окончательное выражение

$$dI = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta d\Omega. \tag{2}$$

Легко видеть, что распределение является почти изотропным. Интегрируя по телесному углу, получаем полную интенсивность излучения:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}. \tag{3}$$

50 Мощность потерь на излучение в релятивистском случае и его связь с полной интенсивностью излучения.

За время dt' в телесный угол $d\Omega$ частица испускает энергию, равную $-d^2\mathcal{E} = dIdt$. Тогда получаем выражение:

$$-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'd\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}\frac{dt}{dt'}.$$

Нас интересует мощность потерь за полный телесный угол, поэтому:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int \frac{dI}{d\Omega}\frac{dt}{dt'}d\Omega.$$

Так как $t' = t - R(t')/c$, получаем, что

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{d}{dt'}\frac{R(t')}{c} = \left(1 - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{v})}{c}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. То есть получаем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int \left(1 - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{v})}{c}\right)\frac{dI}{d\Omega}d\Omega \neq \int \frac{dI}{d\Omega}d\Omega \equiv I. \tag{2}$$

То есть мощность потерь не равна полной интенсивности. Чтобы получить выражение для мощности потерь, запишем ее в мгновенно сопутствующей ИСО:

$$-\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau'} = \int \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_0 d\Omega = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}. \tag{3}$$

Поскольку угловое распределение является четной функцией, то не происходит потери пространственного импульса, то есть $dP^\mu_0 = (-d\mathcal{E}_0, 0)$. Тогда, выполняя буст обратно, получим выражение:

$$-d\mathcal{E} = -\gamma d\mathcal{E}_0.$$

Отсюда

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\gamma\frac{d\mathcal{E}_0}{dt'}.$$

Теперь воспользуемся выражением $d\tau' = dt'/\gamma$. Тогда получится

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau'}.$$

Поэтому мощность потерь на излучение является лоренц-инвариантом. Запишем его в инвариантной форме, используя, что в сопутствующей СО $-c^4 w_\mu w^\mu = \mathbf{a}^2$, так как в ней $w^\mu = (0, \mathbf{a}/c^2)$:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2c}{3}w_\mu w^\mu. \tag{4}$$

51 Длина формирования излучения или длина когерентности. Характерная частота при синхротронном излучении.

Определение. Излучение при вращении в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$ в плоскости, перпендикулярной этому полю, в отсутствие электрического поля называется *синхротронным* или *магнитно-тормозным*.

Используя уравнение движения частицы

$$w^{\nu} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_{\mu} = \frac{e\gamma}{mc^3} \left(0, \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right),$$

получим выражение для мощности потерь синхротронного излучения:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4\gamma^2 v^2 B^2}{3m^2c^5}. \tag{1}$$

В случае очень быстрых частиц $v \approx c$, получаем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \approx \frac{2e^4\gamma^2 B^2}{3m^2c^3}.$$

Из уравнения движения так же получается, что $eB \sim m\gamma/R$, где R — радиус траектории частицы. Поэтому

$$W = -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \sim \frac{e^2\gamma^4}{R^2}. \tag{2}$$

Так как у нас ультрарелятивистская частица, то почти все излучение сосредоточено в конусе с раствором угла $1/\gamma$. В таком направлении излучение может идти только с части траектории, длина которой:

$$l_{\text{eff}} \sim R\Delta\theta \sim \frac{R}{\gamma}.$$

и называется *длиной формирования излучения* или *длиной когерентности*. Отсюда время формирования получится:

$$\Delta t' \sim \frac{R}{\gamma c}.$$

Тогда длительность сигнала будет

$$\Delta t \sim \frac{dt}{dt'} \Delta t' \sim \left(1 - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{v})}{c}\right) \Delta t' \sim \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \Delta t' \sim \frac{R}{c\gamma^3}.$$

Это означает, что *характерная частота излучения* в γ^3 раз больше, чем частота обращения частицы по окружности:

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{\gamma^3 c}{R} \sim \gamma^3 \omega. \tag{3}$$

Характерная зависимость спектра мощности потерь от частоты излучения представлена ниже:

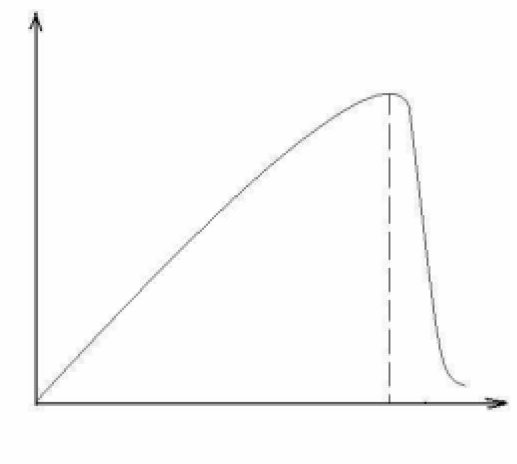

Рис. 2: Зависимость спектра мощности потерь от частоты $W_\omega(\omega)$. Пик находится в $\omega = \omega_c$.

Если $\omega > \omega_c$, то мощность излучения быстро падает до нуля. На участке $\omega < \omega_c$ представлен плавный рост, поэтому можно ожидать $W_\omega \sim \omega^\nu$, где ν — некоторая константа. Тогда полная мощность приближенно равна:

$$W \sim \int\limits_0^{\omega_c} d\omega W_\omega \sim \omega_c^{\nu+1} \sim \gamma^{3(\nu+1)}. \tag{4}$$

Из (2) известно, что $W \sim \gamma^4$, откуда получаем, что $\nu = 1/3$, то есть $W_\omega \sim \omega^{1/3}$, что действительно верно воспроизводит точный расчет.

52 Радиационная сила трения. Критерий применимости.

В общем случае нам необходимо решать совместно систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= 4\pi e \int d\tau\ u^\mu(\tau)\delta^{(4)}[x - z(\tau)], \\ mcw^\mu &= \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu + F^\mu, \end{aligned}$$

где F^μ — внешняя 4-сила. Решать такие уравнения точно мы не станем — вместо этого наложим какие-нибудь условия малости, чтобы получить приближенные решения.

Пусть влияние излучения на движение частицы очень мало. Количественно это запишем, сравнивая изменение кинетической энергии частицы за время Δt и потерю энергии на излучение за то же время.

Оценим обе энергии в СО, в которой скорость частицы много меньше скорости света:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}\Delta t = \frac{2e^2\dot{v}}{3c^3}\Delta v,$$

где Δv — изменение скорости за время Δt. При этом $\Delta\mathcal{E}_{\text{kin}} = mv\Delta v$. Мы требуем, что $\Delta\mathcal{E}_{\text{rad}} \ll \Delta\mathcal{E}_{\text{kin}}$:

$$\frac{2e^2\dot{v}}{3c^3} \ll mv,$$

а значит,

$$\Delta t \approx \frac{v}{\dot{v}} \gg \frac{2e^2}{3mc^3} \sim \frac{r_e}{c}, \tag{1}$$

где $r_e = e^2/(mc)^2$ — *классический радиус электрона.*

Итак, мы получили, что характерный масштаб времени для изменения скорости частицы должен превышать время распространения ЭМ волны на расстояние порядка классического радиуса частицы. В этом и состоит *критерий применимости силы радиационного трения*, о которой мы сейчас поговорим.

Добавим в уравнение движения некоторую эффективную силу $\mathbf{F}_{\text{rad}}$:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\text{rad}}.$$

Подберем эту силу так, чтобы ее мощность была мощностью потерь на излучение частицы:

$$(\mathbf{F}_{\text{rad}}, \mathbf{v}) = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} = -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) + \frac{2e^2}{3c^3}(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{v}}).$$

Теперь потребуем, чтобы движение было **финитным**. Тогда равенство в среднем будет выполнено в силу зануления среднего полной производной. Тогда можно выбрать

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}} \tag{2}$$

— *лоренцевская сила радиационного трения.* Тогда уравнение движения перепишется в виде:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{3}$$

Полученное уравнение движения будет содержать третью производную от координат, что является противоестественным. Более того, некоторые решения неограниченно растут даже при отсутствии внешней силы. Поэтому мы сошлемся на физический смысл и не будем рассматривать такие решения.

53 Лоренцева линия. Естественная ширина линии.

Рассмотрим приближение радиационной силой трения в случае гармонического осциллятора:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}. \tag{1}$$

Будем решать это уравнение последовательными приближениями. В нулевом порядке выполнено уравнение осциллятора, поэтому положим $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0, \quad \Gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3} \ll \omega_0, \tag{2}$$

если характерная длина волны $\lambda_0 \gg r_e$. Решим этом уравнение методом комплексных амплитуд:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}.$$

Откуда получаем уравнение:

$$\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2 = 0 \implies \omega \approx -\frac{i}{2}\Gamma + \omega_0,$$

если $\Gamma \ll \omega_0$. Таким образом,

$$\mathbf{r} \sim e^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega_0 t}.$$

Тогда дипольный момент, а вместе с ним и поле:

$$\mathbf{E} \sim \ddot{\mathbf{d}} \sim \ddot{\mathbf{r}} \sim \mathbf{r} \sim e^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega_0 t}.$$

Спектр такой напряженности:

$$\mathbf{E}_\omega = \int_0^{+\infty} dt\ \mathbf{E}(t)e^{i\omega t} = \frac{\mathbf{E}_0}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}},$$

где $\mathbf{E}_0$ — постоянный вектор. Тогда спектральная плотность интенсивности:

$$I_\omega \sim |\mathbf{E}_\omega|^2 \sim \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},$$

И получается полная интенсивность:

$$I_0 = C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} = C\frac{2\pi}{\Gamma}.$$

Следовательно,

$$I_\omega = \frac{I_0}{2\pi}\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{3}$$

Такая формула спектра называется *лоренцевкой линией.*

Как мы видим, если силы радиационного трения нет, то осциллятор излучает с одной частотой. Если же эту силу учесть, то нас появляется конечная ширина спектра. При этом Γ называется *естественной шириной линии.*

54 Классический радиус электрона и как он возникает в выражениях, описывающих рассеяние электромагнитных волн. Формула Томсона для сечения рассеяния и его критерий применимости.

Рассмотрим теперь задачу о гармоническом осцилляторе с учетом силы радиационного трения, когда у нас имеется внешнее поле. Тогда частица будет совершать вынужденные колебания, двигаться ускоренно и излучать ЭМ волны. Такие волны называются *рассеянными*, а сам процесс — *рассеянием падающей ЭМ волны.*

Запишем уравнение движения, считая, что скорость движения частицы $v \ll c$, также считаем амплитуду колебаний частицы много меньше длины падающей волны. Таким образом, мы можем выкинуть поле B, а также набег фазы, связанный с волновым вектором в экспоненте. Итого имеем:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

Решим систему последовательными приближениями. В первом порядке применим метод комплексных амплитуд:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0e^{-i\omega t}.$$

Тогда, решая все аналогично предыдущей секции, получаем:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\Gamma\omega)}.$$

Считая дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, найдем распределение интенсивности:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3}|[\mathbf{d}\times\mathbf{n}]|^2 = \frac{e^4\omega^4|\mathbf{E}_0|^2\sin^2\theta}{8\pi c^3m^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2]}. \tag{1}$$

Можно еще ввести *эффективное дифференциальное сечение*, которое определяется как отношение потока рассеянного излучения в элемент телесного углу к полному потоку падающего излучения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\mathbf{S}|}\frac{dI}{d\Omega}, \tag{2}$$

где $|\mathbf{S}| = c|\mathbf{E}_0|^2/(8\pi)$ — плотность потока энергии в падающей волне. Используя (1), запишем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = \frac{r_e^2 \omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \tag{3}$$

где r_e — классический радиус электрона.

Частным случаем формулы (3) является случай свободного заряда, когда $\omega_0 = 0$ и к тому же $\Gamma \ll \omega$, так что можно положить $\Gamma = 0$. В этом случае дифференциальное сечение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\theta,$$

а полное сечение определяется *формулой Томсона*:

$$\sigma \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int r_e^2 \sin^2\theta d\Omega = 2\pi r_e^2 \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{4}$$

55 Вычислительные задачи из вопросов.

55.1 Вычислить $\varepsilon_{ijk} x_i x_k$.

$$A \equiv \varepsilon_{ijk} x_i x_k = -\varepsilon_{kji} x_i x_k \overset{i\Leftrightarrow k}{=\!=} -\varepsilon_{ijk} x_i x_k = -A.$$

Получается $2A = 0$, откуда

$$\varepsilon_{ijk} x_i x_k = 0.$$

55.2 Вычислить $\delta_{ij}\partial_i x_k$.

$$\delta_{ij}\partial_i x_k = \partial_j x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}.$$

55.3 Вычислить $\mathbf{div}(\mathbf{r})$.

По определению дивергенции

$$\mathrm{div}(\mathbf{r}) = \partial_i x^i = n,$$

где n — размерность пространства.

55.4 Вычислить $\delta_{ij}\partial_i x_j$.

Сначала просуммируем по индексу i, потом — по индексу j:

$$\delta_{ij}\partial_i x_j = \partial_j x_j = n,$$

где n — размерность пространства.

55.5 Вычислить grad$(1/|\mathbf{r}|)$.

Определение градиента:

$$\mathrm{grad}(f)_i = \partial_i f.$$

Вычислим компоненту grad$(1/|\mathbf{r}|)$:

$$\partial_j \left(\frac{1}{\sqrt{x_k x^k}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2 x_i \delta_{ij}}{(\sqrt{x_k x^k})^3} = -\frac{x_j}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Таким образом:

$$\mathrm{grad}(1/|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

55.6 Вычислить grad $(1/(\mathbf{k}, \mathbf{r}))$, где k — постоянный вектор.

Вычислим компоненту градиента:

$$\partial_p \frac{1}{(\mathbf{k}, \mathbf{r})} = \partial_p \frac{1}{k_m x^m} = -\frac{k_i \delta_{ip}}{(k_m x^m)^2} = -\frac{k_p}{(\mathbf{k}, \mathbf{r})^2}.$$

Отсюда получается, что

$$\mathrm{grad}\,(1/(\mathbf{k}, \mathbf{r})) = -\frac{\mathbf{k}}{(\mathbf{k}, \mathbf{r})^2}.$$

55.7 Вычислить grad$(e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})})$, где k — постоянный вектор.

Компонента градиента:

$$\partial_n e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})} = \partial_n \exp(i k_t x^t) = \exp(i k_t x^t)\,(i k_t \delta_{tn}) = \exp(i k_t x^t) i k_n = e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})} i k_n.$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{grad}(e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})}) = e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})} i\mathbf{k}.$$

55.8 Краткая теория для решения задач на усреднение.

Далее будет использоваться некоторый “метод” усреднения по направлению вектора. Получим основные формулы для этого “метода”:

Пусть у нас имеется некоторый вектор $\mathbf{n}$, который имеет постоянный модуль, но не имеет фиксированного направления, а меняется согласно некоторому распределению $f(\mathbf{n})$. Нас могут интересовать средние значения каких-нибудь функций от $\mathbf{n}$ — будем обозначать такие функции $\psi(\mathbf{n})$. В рамках нашего курса мы рассматриваем полилинейные функции ψ и изотропное распределение направлений. Формально это дает нам следующее выражение для среднего значения:

$$\langle \psi \rangle = \int \psi(\mathbf{n}) \frac{d\Omega}{4\pi}, \tag{1}$$

где $\psi(\mathbf{n}) = \psi_{i_1 i_2 \ldots i_q} n^{i_1} n^{i_2} \ldots n^{i_q}$. В силу линейности среднего, мы можем всегда рассмотреть мономы по отдельности.

Основной идеей “метода” является следующее рассуждение: пусть исходная величина является тензором типа (q, p), тогда усредненное значение будет тоже тензором типа (q, p), при этом оно будет обладать свойством инвариантности относительно $n-$мерных поворотов. Из линейной алгебры следует, что для тензоров определенного ранга такой тензор является единственным с точностью до множителя. Приведем примеры некоторых таких тензоров:

$$\begin{aligned}
&\text{инвариантный тензор первого ранга} — 0,\\
&\text{инвариантный тензор второго ранга} — \delta_{ij},\\
&\text{инвариантный тензор третьего ранга} — \varepsilon_{ijk},\\
&\text{инвариантный тензор } 2n\text{-го ранга} — \sum_{\sigma\in\widehat{S}_{2n}} \delta_{\sigma(1)\sigma(2)}\delta_{\sigma(3)\sigma(4)}\delta_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)},
\end{aligned}$$

где $\widehat{S}_{2n}$ — множество всех различных перестановок S_{2n}. Например, перестановка $\delta_{ij}\delta_{lk} \to \delta_{il}\delta_{jk}$ и $\delta_{ij}\delta_{lk} \to \delta_{kj}\delta_{li}$ не являются различными, потому что внутри одного символа Кронекера можно менять индексы местами точно так же, как и порядок множителей.

Доказательство для тензора 1-го ранга следует из матричной структуры преобразования поворота, для тензора 2-го ранга мы можем использовать разложение тензора на симметричный и кососимметричный тензор. Для $2n$-го ранга можно доказать по индукции.

Получение формул непосредственно для каких-либо полилинейных функций будет продемонстрировано на конкретных задачах. Отметим только формулу для $\langle n_{i_1}n_{i_2}...n_{i_{2n}}\rangle$:

$$\langle n_{i_1}n_{i_2}...n_{i_{2n}}\rangle = \frac{|n|^{2n}}{(2n+1)!!}\sum_{\sigma\in\widehat{S}_{2n}} \delta_{\sigma(1)\sigma(2)}\delta_{\sigma(3)\sigma(4)}\delta_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}.$$

55.9 Вычислить среднее $\langle(\mathbf{a},\mathbf{n})(\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$ при постоянных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Запишем в тензорном виде исследуемое выражение:

$$\langle(\mathbf{a},\mathbf{n})(\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle = \langle a_i n_i b_j n_j\rangle = \langle a_i b_j n_i n_j\rangle = a_i b_j \langle n_i n_j\rangle ,$$

где последнее равенство выполнено в силу постоянства векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Рассмотрим усредняемое слагаемое:

$$\langle n_i n_j\rangle = c\delta_{ij}.$$

Чтобы найти c, свернем выражение по индексам i, j:

$$\langle n_i n_i\rangle = \left\langle n_i^2\right\rangle = 1 = c\delta_{ii} = 3c.$$

Отсюда получаем:

$$\langle(\mathbf{a},\mathbf{n})(\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle = \frac{1}{3}a_i b_j\delta_{ij} = \frac{1}{3}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

55.10 Вычислить среднее $\langle[\mathbf{a},\mathbf{n}](\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$ при постоянных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Запишем выражение в тензорном виде:

$$\langle[\mathbf{a},\mathbf{n}](\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle_i = \langle\varepsilon_{ijk}a_j n_k b_l n_l\rangle = \varepsilon_{ijk}a_j b_l\langle n_k n_l\rangle = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_l\delta_{kl} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k,$$

где предпоследнее равенство следует из предыдущей задачи. Откуда получается

$$\langle[\mathbf{a},\mathbf{n}](\mathbf{b},\mathbf{n})\rangle = \frac{1}{3}[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

55.11 Вычислить среднее $\langle([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r})\rangle$ или $\langle[[\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r}]\rangle$ или $\langle(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{r}\rangle$ по всем направлениям вектора $\mathbf{r}$ при постоянных $|\mathbf{r}|,\mathbf{a},\mathbf{b}$.

1)Запишем выражение в тензорном виде:

$$([\mathbf{a},\mathbf{x}],\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk}a_i x_j x_k = a_i(\varepsilon_{ijk}x_j x_k) = 0.$$

Последнее равенство выполнено в силу пункта (55.1). Получается, что равенство нулю выполнено для произвольной ориентации вектора $\mathbf{r}$. Значит, среднее тоже равно нулю, то есть

$$\langle([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r})\rangle = 0.$$

2)Запишем выражение в тензорном виде:

$$\langle[[\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r}]_n\rangle = \langle\varepsilon_{nml}(\varepsilon_{mjk}a_j x_k)x_l\rangle = \varepsilon_{nml}\varepsilon_{mjk}a_j\,\langle x_k x_l\rangle = \frac{|r^2|}{3}\varepsilon_{nml}\varepsilon_{mjk}a_j\delta_{kl} =$$
$$= \frac{|r|^2}{3}\varepsilon_{nml}\varepsilon_{mjl}a_j = -\frac{|r|^2}{3}\varepsilon_{nml}\varepsilon_{jml}a_j = -\frac{2|r|^2}{3}\delta_{nj}a_n = -\frac{2|r|^2}{3}a_j.$$

Тогда получаем ответ:

$$\langle[[\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r}]\rangle = -\frac{2|r|^2}{3}\mathbf{a}.$$

3)И мы снова запишем выражение в тензорном виде:

$$\langle(\mathbf{a},\mathbf{r})x_j\rangle = \langle a_i x_i x_j\rangle = \frac{|r|^2}{3}a_i\delta_{ij} = \frac{|r|^2}{3}a_j.$$

Тогда получается ответ:

$$\langle(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{r}\rangle = \frac{|r|^2}{3}\mathbf{a}.$$

55.12 Вычислить среднее $\langle([\mathbf{a},\mathbf{n}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$ при постоянных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Запишем в тензорном виде:

$$\langle([\mathbf{a},\mathbf{n}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\rangle = \langle\varepsilon_{ijk}a_j n_k\varepsilon_{ilm}b_l n_m\rangle = \varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{ilm}b_l\,\langle n_k n_m\rangle = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{ilm}b_l\delta_{km} = \frac{1}{3}\varepsilon_{jki}\varepsilon_{lki}a_j b_l.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\varepsilon_{jki}\varepsilon_{lki} = 2\delta_{jl}$. Используя это, получаем

$$\langle([\mathbf{a},\mathbf{n}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\rangle = \frac{2}{3}\delta_{jl}a_j b_l = \frac{2}{3}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$