Решения задач экзаменационной контрольной работы по оптике

26 мая 2021 г.

ВАРИАНТ А

1А. *(Федоров Г.Е., ред. Попов П.В.)* На диаграмме Френеля векторы, соответствующие перекрытым зонам, *вычитаются* из полной амплитуды A_0. Следовательно, максимальная амплитуда достигается при перекрытии 2-й и 4-й зоны Френеля и равна $A_{max} = A_0 + 2 \cdot 2A_0 = 5A_0$, то есть $J_{max} = 25J_0$. Радиусы колец $\rho_m = \sqrt{m\lambda z} = \sqrt{mcz/\nu} = \sqrt{0{,}5 \cdot m}$ [м], $r_1 \approx 71$ см, $R_1 = 100$ см, $r_2 \approx 122$ см, $R_2 \approx 144$ см.

2А. *(Овчинкин В.А.)* Для функции пропускания решетки имеем $(x) = \cos^2 \Omega x = \frac{1+\cos 2\Omega x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-2i\Omega x}$. После фильтрации получаем $\tau'(x) = \frac{i}{2} + \frac{1}{4}e^{2i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-2i\Omega x} = \frac{1}{2}(i + \cos 2\Omega x)$. Интенсивность на экране: $J' = |\tau'|^2 = \frac{1}{4}(i + \cos 2\Omega x)(-i + \cos 2\Omega x) = \frac{1}{4}(1 + \cos^2 2\Omega x)$. Максимальная и минимальная интенсивность (в относительных единицах): $J'_{max} = 1/2$, $J'_{min} = 1/4$. Видность картины: $V = \frac{1/2-1/4}{1/2+1/4} = \frac{1}{3}$.

3А. *(Кленов С.Л.)* Угловое разрешение глаза: $\psi_0 = \frac{1.2\lambda}{d} = 2 \cdot 10^{-4}$ рад. Угловой диаметр источника на расстоянии L: $\psi_1 = \frac{D}{L} = 5 \cdot 10^{-5} < \psi_0$, поэтому при наблюдении невооруженным глазом изображение на сетчатке дифракционное. В этом случае площадь пятна на сетчатке: $S_1 = \pi(a\psi_0)^2$ (a – расстояние от зрачка до сетчатки), а его освещенность $E_1 = E_0 \frac{\pi d^2}{4S_1} \propto \left(\frac{d^2}{1.2\lambda a}\right)^2$, где E_0 – световой поток от маяка в точке наблюдения. Угловой размер источника при использовании трубы: $\psi_2 = \Gamma\psi_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \gg \psi_0$, то есть в трубу видно настоящее изображение. Площадь пятна на сетчатке: $S_2 = \pi\left(\frac{a\psi_2}{2}\right)^2$. Поскольку диаметр объектива телескопа при нормальном увеличении равен Γd, освещенность пятна на сетчатке равна $E_2 = E_0 \frac{\pi(\Gamma d)^2}{4S_2} \propto \left(\frac{2dL}{D}\right)^2$. Отношение освещенностей:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{2.4\lambda L}{Dd}\right)^2 = \left(\frac{\psi_0}{\psi_1/2}\right)^2 = \left(\frac{2.4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^3}{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 64.$$

4А. *(Касьянова Н.В.)* Разность фаз зондирующего и опорного лучей (учитывая, что луч дважды проходит через плазму):

$$\Delta\varphi = \int \Delta k dl = 2\frac{\omega}{c}\int_{-a}^{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)dr \approx \int_{-a}^{a}\frac{\omega}{c}\frac{n_e(r)}{n_{cr}}dr,$$

где $n_{cr} = \frac{m_e\omega^2}{4\pi e^2} = \frac{\pi m_e c^2}{\lambda^2 e^2} = \frac{3.14 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{(4.8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot (915 \cdot 10^{-4})^2} \approx 1{,}3 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$ – критическая концентрация. Подставляя $n_e(r) = n_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, получим

$$m = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = 2\frac{\omega n_0}{2\pi c n_{cr}}\int_0^a\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)dr = \frac{4n_0 a}{3n_{cr}\lambda_0}.$$

Отсюда $n_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{m\lambda}{a} \cdot n_{cr} = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot \frac{0{,}0915}{68} \cdot n_{cr} \approx 0{,}01 n_{cr} \approx 1{,}3 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$.

5А. *(Попов П.В.)* Для разрешения необходимо, чтобы ширина интерференционной полосы как минимум вдвое превосходила размер зерна фотоэмульсии (максимум и минимум приходятся на соседнюю пару линий): $\Delta x > 2d$. Минимальная ширина полос достигается при максимальном угле схождения интерферирующих лучей, то есть на краю фотопластинки. Ширины полос у края пластинки: $\Delta x \approx \frac{\lambda}{\theta+\alpha}$, где $\alpha \approx \frac{D}{2z} = 0{,}05$ рад – угловой радиус голограммы, угол наклона пучка $\theta \approx 0{,}175$ рад. Таким образом, необходимый размер зерна:

$$d < \frac{\Delta x}{2} = \frac{\lambda/2}{\theta + \alpha} \approx \frac{1}{2}\frac{0.63}{0.225} \approx 1{,}4 \text{ мкм}.$$

Тот же результат можно получить, вычислив непосредственно функцию пропускания голограммы (на оси $y = 0$, в параболическом приближении):

$$\tau(x) \propto \left|e^{-ik\theta x} + e^{\frac{ikx^2}{2z}}\right|^2 = 2(1 + \cos\Delta\varphi), \quad \text{где} \quad \Delta\varphi = k\theta x + \frac{kx^2}{2z}.$$

Отсюда находим ширину полосы в точке $x = D/2$:

$$k\theta\Delta x + \frac{kx\Delta x}{z} = 2\pi \quad \to \quad \Delta x \approx \frac{\lambda}{\theta + kx/z} < \Delta x_{min} = \frac{\lambda}{\theta + D/2z}.$$

Поскольку восстановление ведётся нормально падающей плоской волной, минимальный размер деталей определяется дифракцией на размере голограммы: $b > 1.2\frac{\lambda}{D} \cdot z \approx 7{,}5$ мкм.

Степень монохроматичности определяется максимальным порядком интерференции. Следует учесть, что из-за наклона опорного пучка волны являются синфазными в точке $x_0 = -\theta z$. Поэтому разность фаз равна

$$\Delta\varphi = k\theta(x - x_0) + \frac{k(x^2 - x_0^2)}{2z} = \frac{k}{2z}(x - x_0)^2.$$

Максимальный порядок интерференции и немонохроматичность источника:

$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{|\Delta\varphi_{max}|}{2\pi} = \frac{z}{2\lambda}(\alpha + \theta)^2 \approx \frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 0.63} \cdot 0.225^2 \approx 2{,}4 \cdot 10^4, \;\; \Delta\lambda \sim 0{,}3 \text{ А}.$$

6А. *(Петухов В.А.)* Вершина импульса движется медленнее, чем края, поэтому колебания «растягиваются» в передней части импульса и «сжимаются» в конце. Если запаздывание Δt вершины меньше половины длительности импульса, то уменьшение частоты на переднем и увеличение на заднем фронтах можно оценить как

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{\Delta t}{\tau/2}, \quad \Delta t = \frac{L n_2 J_0}{c} \approx 0{,}05 \text{ пс}.$$

Полное уширение составит

$$\Delta\nu \sim \frac{4\nu\Delta t}{\tau} = \frac{4\nu L n_2 J_0}{c} = \frac{4 L n_2 J}{\lambda\tau} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}.$$

Поскольку эта ширина значительно превосходит исходную $\Delta\nu_0 \sim \frac{1}{\tau} = 10^{11}$ Гц, то именно она и определяет конечную ширину спектра.

Альтернативно (Попов П.В.) Набег фазы волны в точке z в момент времени t равен

$$\varphi = nkz - \omega_0 t = n_0 kz + n_2 J(z,t)kz - \omega_0 t.$$

По условию огибающая интенсивности сохраняет свой вид, поэтому можно записать $J(z,t) = J(z - vt)$, где v — скорость волны (в отсутствие дисперсии нет различия между фазовой и групповой скоростью). Тогда производная фазы по времени даст эффективную частоту колебаний:

$$\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega_0 - n_2 kz \cdot \frac{\partial J}{\partial t} = \omega_0 + n_2 kz \cdot vJ',$$

где J' -- производная по переменной $\zeta = z - vt$, которая имеет смысл координаты, отсчитанной от центра импульса. Максимальную величину производной оценим по модулю как $|vJ'| = \left|\frac{\partial J}{\partial \tau}\right| \sim \frac{J_0}{\tau/2}$, где $\tau/2$ – время нарастания/спада импульса. На переднем фронте волны $J' < 0$ и частота становится меньше, и наоборот, на заднем фронте $J' > 0$ и частота возрастает. Суммарное уширение спектра:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx 4\frac{n_2 J_0}{\lambda\tau} L \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}. \qquad (\Delta\nu \gg \Delta\nu_0 \sim 1/\tau)$$

ВАРИАНТ Б

1Б. *(Федоров Г.Е., Попов П.В.)* Аналогично 1А имеем $A_{max} = A_0 + 2 \cdot 2A_0 = 5A_0$, $J_{max} = 25J_0$. Радиусы колец $\rho_m = \sqrt{m\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{mca}{2\nu}} = \sqrt{0{,}3 \cdot m}$ [м]. $r_1 \approx 55$ см, $R_1 \approx 77$ см, $r_2 \approx 95$ см, $R_2 \approx 110$ см.

2Б. *(Овчинкин В.А.)* Для функции пропускания решетки имеем $\tau(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-i\Omega x}$. После фильтрации $\tau'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i\Omega x} + \frac{1}{4}e^{-i\Omega x} = -\frac{1}{2}(1 + i\sin\Omega x)$. Интенсивность на экране:

$$J' = |\tau'|^2 = \frac{1}{4}(1 + i\sin\Omega x)(1 - i\sin\Omega x) = \frac{1}{4}(1 + \sin^2\Omega x).$$

Максимальная и минимальная интенсивность: $J'_{max} = 1/2$, $J'_{min} = 1/4$. Видность картины: $V = \frac{1/2 - 1/4}{1/2 + 1/4} = \frac{1}{3}$.

3Б. *(Клёнов С.Л.)* Угловое разрешение глаза: $\psi_0 = \frac{1.22\lambda}{d} = 2 \cdot 10^{-4}$. Угловой размер линзы маяка на расстоянии L_1: $\psi_1 = \frac{2R}{L_1} = 10^{-3} \gg \psi_0$, т.е. изображение на сетчатке геометрическое. Угловой размер линзы маяка на расстоянии L_2: $\psi_2 = \frac{2R}{L_2} = 4 \cdot 10^{-5} \gg \psi_0$, т.е. изображение на сетчатке дифракционное. Соответствующие световые потоки в зрачок глаза: $\Phi_1 = BS_0S_{зр}/L_1^2$, $\Phi_2 = BS_0S_{зр}/L_2^2$, где B – яркость линзы маяка, $S_0 = \pi R^2$ - площадь, $S_{зр}$ – площадь зрачка, $\Phi_2/\Phi_1 = (L_1/L_2)^2$. В случае 1 освещённость сетчатки: $E_1 = \Phi_1/S_1$, где $S_1 =$

$S_0\left(\frac{a}{L_1}\right)^2$ -- площадь изображения, a – длина глаза. В случае 2: $E_2 = \Phi_2/S_2$, где $S_2 = \pi\left(\frac{1.2\lambda a}{d}\right)^2$ – площадь дифракционного пятна. Тогда отношение

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2\left(\frac{Rd}{1.2\lambda L_1}\right)^2 = \left(\frac{Rd}{1.2\lambda L_2}\right)^2 = \frac{0.5\ 3\ 10^{-3}}{1.22\ 5\ 10^{-7}\ 25\ 10^3} = 0{,}01.$$

4Б. *(Касьянова Н.В.)* Аналогично **4А** находим критическую концентрацию $n_{cr} = \frac{m_e\omega^2}{4\pi e^2} = \frac{\pi m_e v^2}{e^2} = \frac{3.14\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot(0.9\cdot 10^{12})^2}{(4.8\cdot 10^{-10})^2} \approx 1{,}0\cdot 10^{16}$ см$^{-3}$. Из полученной в 4А формулы $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{4\Delta n_0 a}{3 n_{cr}\lambda_0}$ находим

$$\Delta n_0 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\frac{3n_{cr}c}{4av} = 5\cdot\frac{3\cdot 3\cdot 10^{10}}{4\cdot 68\cdot 0.9\cdot 10^{12}}n_{cr} = 1{,}8\cdot 10^{-3}n_{cr} = 1{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{см}^{-3}.$$

5Б. *(Попов П.В.)* Аналогично **5А** находим максимальный угол наклона, при котором ширина интерференционной полосы меньше двух зёрен фотопластинки: $2d < \frac{\lambda}{\theta+a}$.

$$\theta_{max} = \frac{\lambda}{2d} - \alpha = \frac{n\lambda}{2} - \frac{D}{2z} = 0{,}11\ \text{рад} \approx 6{,}3^\circ.$$

Минимальный размер деталей: $b > 1.2\frac{\lambda}{D}\cdot z \approx 6{,}4$ мкм. Степень монохроматичности:

$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{|\Delta\varphi_{max}|}{2\pi} = \frac{z}{2\lambda}(\alpha+\theta)^2 \approx \frac{5\cdot 10^5}{2\cdot 0.53}\cdot 0.16^2 \approx 1{,}2\cdot 10^4,\ \ \Delta\lambda \sim 0{,}5\ \text{А}.$$

6Б. *(Петухов В.А.)* Аналогично **6А**, если запаздывание Δt вершины меньше половины длительности импульса, то уменьшение частоты на переднем и увеличение на заднем фронтах можно оценить как

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta t}{\tau/2}, \qquad \Delta t = \frac{Ln_2 I}{c} \approx 4\cdot 10^{-14}\ \text{с},$$

что на 1,5 порядка меньше τ. Полное уширение составит

$$\Delta v = v\cdot\frac{4\Delta t}{\tau} = \frac{4Ln_2 I}{\lambda\tau} \sim 10^{14}\ \text{Гц}.$$

Начальная ширина спектра $\Delta v_0 \sim 1/\tau \sim 10^{12}$ Гц. Следовательно, спектр стал шире в $\frac{\Delta v}{\Delta v_0} \sim \frac{4Ln_2 I}{\lambda} \approx 100$ раз.