2 неделя Несобственные интегралы, зависящие от параметра

§14

(1.1) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$

1) $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ при $\forall$ фикс. $\alpha_1 \in E$ $I(\alpha)$ – сходящийся интеграл

на $[1; +\infty)$ $|f(x,\alpha)| = \left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x)$ $\forall \alpha \in E$

признак В $\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_0}} dx \underset{\alpha > 1}{<} \infty \Rightarrow$ (по призн. Вейерштрасса)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится равномерно

2) $\alpha \in (1; +\infty) = E_0$

Покажем, что $I(\alpha)$ сх-ся неравномерно (отриц. крит. Коши):

$\exists \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}: n > [a]$ $\exists R_n' = n$, $R_n'' = 2n$ & $\exists \alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$:

$\int_n^{2n} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{x^{(-\frac{1}{n})}}{-\frac{1}{n}}\Big|_n^{2n} = \frac{n}{1}(n^{-\frac{1}{n}} - (2n)^{-\frac{1}{n}}) = \frac{\sqrt[n]{2n} - \sqrt[n]{n}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2n^2}} =$

$= \frac{(1 - \sqrt[n]{2})}{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}} \underset{n \to \infty}{\to} \ln 2$

т.к. $1 \ge \frac{\ln 2}{2} = \varepsilon_0$

(1.2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0; \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$

1) $I(\alpha)$ сх-ся при $\forall$ фикс. $\alpha_1 \in E$

призн. В. $\begin{cases} \text{на } (0; \alpha) \quad |f(x,\alpha)| = \left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \underset{\alpha_0 < 1}{\le} \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x) \quad \forall \alpha \in E \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty, \text{т.к. } \alpha_0 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса

$I(\alpha)$ сходится равномерно

2) $E = (0;1)$

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^{\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{e^{(1-\alpha)\ln\xi}}{1-\alpha} = \varphi(\xi,\alpha)$$

$$\sup_{\alpha\in E}\left|\int_0^{\xi}\frac{dx}{x^{\alpha}}\right| \geq \left|\varphi\left(\xi, 1+\frac{1}{\ln\xi}\right)\right| = \left|-\frac{1}{e}\ln\xi\right| \underset{\xi\to 0}{\not\to} 0$$

по опр. неравн. сх-сти

$\Rightarrow$ $I(\alpha)$ сх-ся неравномерно на E

6.5 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx \quad E_1 = [\alpha_0;+\infty), \alpha_0>0; \ E_2 = (0;+\infty)$

1) $\alpha \in E_1$, $I(\alpha)$ сход

$e^{-\alpha x^4} \leq e^{-\alpha x}$

$\tilde{f}(x,\alpha) = \left(x^2 e^{-\frac{\alpha}{2}x}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}} \leq e^{-\frac{\alpha}{2}x} \quad \forall x \geq x_\alpha$

$\tilde{f}(x\alpha) \leq e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} \quad \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} dx < \infty \Rightarrow$ по призн. В

признак В.

I сх-ся равномерно по α на E_1

2) $\alpha \in E_2$, $I(\alpha)$ сх-ся

Запишем отриц. крит. Коши:

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \in N \ \exists R_n' = n \ \& \ R_n'' = 2n \ \& \ \exists \alpha_n = \frac{1}{n^4}$:

$$\left|\int_n^{2n} x^2 e^{-\frac{x^4}{n^4}} dx\right| \geq e^{-16} \cdot n^2 \geq e^{-16} = \varepsilon_0 \Rightarrow \text{сх-ся неравномерно}$$

7.4,5,6 4) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{1+x^2} dx \quad E = (0;+\infty)$

] $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ (1)

$\Rightarrow I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}\,(1+t^{\frac{\alpha}{2}})}\,dt \qquad E=(0;+\infty)$

$\frac{\sin t}{2\sqrt{t}\,(1+t^{\frac{\alpha}{2}})} \le \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt < \infty$, т.к. $f(t) = \sin t \Rightarrow |F(t)| < M$

$\frac{1}{\sqrt{t}}$ монотонно $\to 0$

$\Rightarrow$ по Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ сх-ся $\Rightarrow$ по признаку В $I(\alpha)$ равном. сх-ся.

15) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \quad E = \mathbb{R}$

Запишем отрицание крит. Коши

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}, n > [\delta]} \quad \exists R_n' = n \quad \exists R_n'' = 2n \quad \exists \alpha_n = \frac{1}{2n}$

$\int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{1+x^2}{4n^2}} dx \geq \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{1+4n^2}{4n^2}} dx \geq$ $\quad -\frac{1+4n^2}{4n^2} \geq -\frac{5n^2}{4n^2}$

$\geq \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{5}{4}} dx \geq \left(\frac{1}{2n} + o(1)\right) \cdot e^{-\frac{5}{4}} \cdot (2n - n) \geq \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{5}{4}} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{e^2}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon = \frac{1}{2e^2} : \forall n \quad R_n' = n, R_n'' = 2n \quad \exists \alpha_n = \frac{1}{2n} :$

$\left| \int_n^{2n} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| \geq \varepsilon$

16) $I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha} \quad E(0;2)$

$\exists\, t = \frac{1}{x} : \Rightarrow I(\alpha) = \int_1^{+\infty} -\sin t \cdot \frac{dt}{t^{2-\alpha}} = -\int_1^{+\infty} \underbrace{\sin t}_{f(t)} \cdot \underbrace{t^{\alpha-2}}_{g(t)} dt$

$dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$-\frac{1}{t^2} dt = dx$

1) $f(t) = \sin t \quad F(t) = \cos t \leq 2 \quad \forall x \geq 1$

2) $g(t) = t^{\alpha-2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad$ 3) $g'(t) = (\alpha-2) \cdot t^{\alpha-3} = \frac{\alpha-2}{t^{3-\alpha}}$

для каждого фикс. $\alpha \in E$ $g'(t)$ не меняет знака на $[1; +\infty)$

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле $I(\alpha)$ сх-ся равномерно $\forall \alpha$.

Р1) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1-x^2)^\alpha} dx \quad E = [0; \frac{1}{2}]$

(T1) вычислить интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx$$

I) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}$ (*)

] $a>0$. Тогда рассмотрим

$$\Phi(a,b) = \int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin ax}{x}\,dx \quad , b>0$$

При фикс. $b>0$ этот интеграл сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по Дирихле, т.к. $\frac{1}{x}e^{-bx}$ монотонно убывает на $(0;+\infty)$, а $\sin ax$ имеет огранич. первообразную $\frac{\cos ax}{-a}$.

При $a=0$ $\Phi(0,b)=0$. $K(a,b)=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\cdot \frac{\sin ax}{x}\,dx$ — сх-ся рав-но по b

продифференцируем $\Phi(a,b)$:

$$\Phi'_a(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-bx}\cdot \frac{\sin ax}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-bx}\cos ax\,dx =$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

Интегрируя на $[0;\alpha]$

$$\Phi(a,b) - \Phi(0,b) = b\int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$$

т.к. $\Phi(0,b)=0 \Rightarrow \forall b>0$ верно $\Phi(a,b) = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-bx}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \quad (1)$$

] $\alpha>0$. Найдем значение интеграла (*)

При каждом фикс. $\alpha>0$ $\Phi(a,b)$ сх-ся р-но по b на $[0;1]$

по признаку Дирихле, т.к. $\frac{e^{-bx}}{x}$ монотонно убывает до 0 при $x\to+\infty$

а $\sin ax$ имеет огр. первообразную.

Из равномерной сх-сти (1) и
непрерывности $e^{-bx}\cdot\frac{\sin ax}{x}$ на $G=\{(x,b): 0\le x<+\infty,\ 0\le b\le 1\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Непрерывность $\Phi(a,b)$ по b на $[0;1]$ и в частности $b\to 0$.

А это значит, что мы можем записать

$$\lim_{b\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-bx}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\lim_{b\to+0}\left(e^{-bx}\frac{\sin ax}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+0}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Т.к. $\frac{\sin ax}{x}$ нечетная по a функция, то

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(a)$$

II) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$; $K(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx$

Пусть $\alpha>0$.

$\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}$ непр при $\forall x,\forall\alpha$ $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx$

сходится равномерно по α на $[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$

$$\Rightarrow I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx$$

Сложим его с интегралом Дирихле почленно:

$$I'(\alpha)+\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}-\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx$$

Дифференцируем почленно по α:

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I''(\alpha) - I(\alpha) = 0 \Rightarrow I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$$

$$|I(\alpha)| \le I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$C_1 e^{\alpha} \to \infty$ при $\alpha \to \infty$ | $\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

$C_2 e^{-\alpha} \to 0$ при $\alpha \to \infty$

$\Rightarrow I(0) = C_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$

т.к. $I(\alpha)$ четная, то $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in R$

$I'(\alpha) = -k(\alpha)$

$\Rightarrow k(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

т.е. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

Т.к. $k(\alpha)$ нечетная, то выходит

$$k(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \cdot \operatorname{sign}(\alpha) \quad \alpha \in R$$

~~3.1~~ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin^2 \alpha x}{x}\,dx =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x\,(1-\cos^2 \alpha x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}}_{=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sign}(\alpha)} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\overbrace{\sin \alpha x}^{dv}\,\overbrace{\cos 2\alpha x}^{u}}{x}\,dx =$

$dv = \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$

$v = \frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{4}\overbrace{\ }^{\operatorname{sign}(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\overbrace{\ }^{\operatorname{sign}(\alpha)}\cdot\cos(2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\overbrace{\ }^{\operatorname{sign}(\alpha)}\int_0^{+\infty} d(\cos 2\alpha x) =$

$= \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha - \frac{\pi}{4}\cos(2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} + \frac{\pi}{4}\cdot(\cos 2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha$

3.5 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}\,dx =$

$= I_1 - 2I_2 + I_3$

$I_1 = \frac{\pi}{2}$

$I_2 = \frac{\pi}{4}$ (ug 3.1)

$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx$

$\sin 3t$ $(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t =$

$= \cos^3 t + 3i\cos^2 t\sin t - 3\cos t\sin^2 t - i\sin^3 t$

$\Rightarrow \sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t =$

$3\sin t - 4\sin^3 t$

$\Rightarrow \sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}$

(3.1) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3(\alpha x)}{x} dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3\alpha x)}{3x} 3dx =$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sign}(\alpha) - \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\alpha)$

(3.5) $\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^4 x}{x} dx}_{I} = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx}_{I_1} - 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx}_{I_3} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx}_{I_5}$

$= I_1 - 2I_3 + I_5$

$I_1 = \frac{\pi}{2}$; $I_3 = \frac{\pi}{4}$

$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx$

$\sin 5t = \sin^5 t - 10\sin^3 t(1-\sin^2 t) + 5(1-\sin^2 t)^2\sin t =$

$= \sin^5 t - 10\sin^3 t + 10\sin^5 t + 5\sin^5 t - 10\sin^3 t + 5\sin t =$

$= 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = 16\sin^5 t - 10\sin t + 5\sin 3t$

$\Rightarrow \sin^5 t = \frac{\sin 5t - 5\sin 3t + 10\sin t}{16}$

$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x} dx - \frac{5}{16}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x} dx + \frac{5}{8}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{3\pi}{16}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$

4.4 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} dx \oplus$ ~~$-2\int \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)}{x^2}$~~ dx

$\ominus \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\beta x}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2} dx$

$I(\alpha)$ ~~$I(\alpha)$~~ $= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2} dx$. Для β будет аналогично

покажем для

$f(x,\alpha) = \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}$ имеет разрыв в ~~то~~ $x=0$

доопределим $f(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}, & x>0 \\ \frac{\alpha^2}{2} & x=0 \end{cases}$

- Тогда $f'_\alpha(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{\sin\alpha x}{x} & x>0 \\ \alpha & x=0 \end{cases}$

- $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ непр на $[0;+\infty) \times (-\infty;+\infty)$

$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ сх-ся ~~равном~~ $\forall \alpha$, т.к. по призн. В. ~~тор~~ $\left|\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} < \infty$

- $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ сх-ся равномерно по α по призн. Дирихле:

1) $\sin\alpha x$ имеет ограниченную первообразную $\left|\int_a^b \sin\alpha x\right| = \left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\Big|_a^b\right| \leq \frac{2}{\delta}$

2) $\frac{1}{x}$ монотонно $\to 0$ при $x \to +\infty$

$A = [\delta; +\infty)$

Выполнены условия теоремы о дифференцировании!

$\Rightarrow$ ~~$I(\alpha)$~~ $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha)$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + C$

И тогда $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(|\beta| - |\alpha|)$

6.3

6.1 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$

$f(\alpha,\beta)$ имеет разрыв в $x=0$. доопределим её:

$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-\beta x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Теперь $f(x,\alpha,\beta)$ непрерывна на $[0;+\infty)$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x}$ непрерывна на $\mathbb{R}[0;+\infty)$

Фиксируем β

$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x} dx$ р-но сх-ся по признаку D:

$\int_0^{x} \sin \alpha x \, dx = \left| -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right|_0^x \leq \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{\alpha}$

$g(x) = e^{-\beta x}$ монотонно $\to 0$ при $x \to +\infty$

$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha) dx$ сходится при каждом фикс. α

$\Rightarrow I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} d\alpha$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2+\beta^2) - \ln(\beta^2) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1\right) + C(\beta)$

$I(0) = \frac{1}{2}\ln(1) + C(\beta) = 0 \Rightarrow C(\beta) = 0$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right)$

(6.3) $I(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx \qquad \alpha,\beta>0$

Проверка условий теоремы о дифференцируемости:

1) $f(x)$ непр на $(0;+\infty)$ и имеет разрыв в $x=0$. Исследуем $x=0$

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x = 0$$

доопределим $f(x)$ нулем в нуле

$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos\lambda x$ — непр на $[0;+\infty)$ как композиция непрерывных

2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial \lambda}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos\lambda x\,dx$ равномерно сходится по признаку Дирихле:

- $\cos\lambda x$ имеет огран. первообразную
- $\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)$ монотонно сходится к 0 при $x\to\infty$

3) $\left|\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cdot\sin(\lambda x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,\lambda x\right| \le$

$$\leq \left|\int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx\right| + \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx\right| < \infty$$

$$\underset{<\infty}{} \qquad \underset{<\infty}{}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda \cdot x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = \int \frac{\alpha \cdot d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2} - \int \frac{\beta \cdot d\lambda}{\beta^2+\lambda^2} = \int \frac{d\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} - \int \frac{d\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)}{1+\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + C(\alpha,\beta)$$

$I(0) = 0 - 0 + C(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow C(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow I(\lambda) = \operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\beta}$ 13

6.5 $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}}_{f(x)} dx$

~~f(x) непрерывна~~ доопределим $f(x)$ в $x=0$

$\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\right) = \alpha \Rightarrow$ доопределим $f(x)$ α в нуле.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{1+\alpha^2x^2}$$

1) $f(x,\alpha)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны в $[0;1]\times R$

2) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1+\alpha^2x^2)}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — сх-ся $\xRightarrow{\text{признак В}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ сх-ся равномерно по α.

3) $I(\alpha,\beta)=0$

$\Rightarrow$ Применима Теорема о дифференцировании

$$I'(\lambda)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\lambda^2x^2)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{1+\lambda^2\sin^2u}=\int_{t=\operatorname{tg}u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\lambda^2\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\right)}=$$

$(u=\arcsin x)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+t^2+\lambda t^2}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\sqrt{\lambda^2+1}\,t\right)}{\left(\sqrt{\lambda^2+1}\,t\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda^2+1}\,t\right)\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^2+1}}$$

$$I(\lambda)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right)+C$$

$I(0)=0=C\Rightarrow C=0\Rightarrow\quad I(\lambda)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right)$

$\frac{\lambda}{\beta}$

13.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx=2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right),\quad\alpha,\beta>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}}{x^2}$$

Найдем $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\,dx=I(\lambda)$

$$\left.\begin{aligned}f(x,\lambda)&=\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\\ f'_\lambda(x,\lambda)&=-e^{-\lambda x^2}\end{aligned}\right\}\text{ непр. на }(0;+\infty)\cup(0;-\infty)$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}-e^{-\lambda x^2}\,dx$ $\overbrace{\text{сх-ся}}^{\text{равн-но}}$ при $\forall$ фикс. $\lambda\in(0;+\infty)$ по признаку В

$$\left|-e^{-\lambda x^2}\right|\le e^{-x^3};\quad\int_0^{+\infty}e^{-x^3}\,dx<\infty$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x^3}}{x^2}\,dx\quad\left|\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\right|\le\frac{e^{-x^3}}{x^2};\quad\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^3}}{x^2}<\infty\Rightarrow\text{по признаку В}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x,\lambda)\ \text{сх-ся.}$$

$\Rightarrow$ можем применить теорему о дифференцировании

$$I'_\lambda(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}x)^2} d(\sqrt{\lambda}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow I(\lambda) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = -\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\lambda} + C$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx - 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2}}{x^2} dx =$$

$$= -2\sqrt{\alpha\pi} + 2\sqrt{\beta\pi} = 2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)$$

15.5 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}}_{f(x,\alpha)} dx$

1) $f(x,\alpha)$ непр в $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$
$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = -\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}$ непр. в $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}$ сх-ся, т.к. $\left|\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\right| \overset{\text{призн В.}}{\leq} \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ~~$\sim \frac{1}{x^4}$~~ ~~$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4} < \infty$~~

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} < \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} f\, dx$ сх-ся

3) $\left|\int_0^{+\infty} -\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2} dx\right| \overset{\text{призн В}}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx < \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ сх-ся р-но

$\Rightarrow$ применим теорему о дифференцировании

$$I'_\alpha(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin\alpha x \cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha x\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\underbrace{\int^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx}_{\text{интеграл Лапласа}} = -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

$$I(\alpha) = I(0) - \frac{\pi}{4}\int_0^{\alpha} t e^{-|t|} dt = I(0) + \frac{\pi}{4}\left((t+1)e^{-t}\right)\Big|_0^{\alpha} =$$

$$= I(0) + \frac{\pi}{4}e^{-|\alpha|}(1+|\alpha|) - \frac{\pi}{4}$$

$$I(0) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} \underset{x=\mathrm{tg}\,t}{=} \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{\pi}{4}e^{-|\alpha|}(1+|\alpha|)$$

$\boxed{\text{БК}}$

(1.4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ – ?

Воспользуемся формулой дополнения: $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ $0<p<1$

$\Rightarrow$ При $p=\frac{1}{2}$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}}$ $\Rightarrow$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(1.5) $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ – ?

~~по опр~~ Воспользуемся связью эйлеровых интегралов

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{=1}} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$$

(1.6) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \ldots =$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(n-\frac{2i-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$$

(7.5) $\int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\,dx = \int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{1}{3}}\,dt = B\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\cdot1\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

9.5

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta}\,dx = \left| \begin{aligned} & t = \frac{1}{x^\beta+1} \qquad x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & dt = -\beta \cdot \frac{x^{\beta-1}}{(1+x^\beta)^2}\,dx \\ & \Rightarrow dx = -\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{dt}{t^2} \end{aligned} \right| =$$

$$= +\int_0^{1} \frac{1}{\beta}\, t \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \cdot \frac{dt}{t^2} =$$

$$= +\frac{1}{\beta}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot t^{-1}\,dt = -\frac{1}{\beta}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\,dt =$$

$$= +\frac{1}{\beta} B\left(1-\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{\alpha}{\beta}\right) = +\frac{1}{\beta}\cdot \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) / \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = +\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi/\beta)}$$

14.5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx \Leftrightarrow \alpha > -1;\ \beta > -1$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{aligned} & t = \sin x \\ & dt = \sqrt{1-t^2}\,dx \\ & dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ & \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{aligned} \right| = \cancel{\int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^{\frac{\beta}{2}} (1+t)^{\frac{\beta}{2}}\, \frac{dt}{(1-t)^{\frac12}(1+t)^{\frac12}}} = \cancel{\int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} (1+t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt}$$

$$= \int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t^2)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt = |u = t^2| =$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}} (1-u)^{\frac{\beta-1}{2}} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-u)^{\frac{\beta-1}{2}}\,du = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2};\ \frac{\beta+1}{2}\right)$$