

В.П. Коряков

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБЩЕМ КУРСЕ ФИЗИКИ

ОПТИКА

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений
Российской Федерации
по образованию в области
прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Прикладная математика и физика»
и по другим направлениям и специальностям
в области математических и естественных наук,
техники и технологии

Москва «Студент» 2012

УДК 535
ББК 22.343
К66

Рецензенты:

кафедра «Менеджмент» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета), зав. кафедрой — канд. техн. наук, доц. И.Г. Кудрявцева; д-р экон. наук, проф. С.В. Смирнов (Московский государственный индустриальный университет)

Корявов В.П.

К66 Методы решения задач в общем курсе физики. Оптика: Учеб. пособие. — М.: Студент, 2012. — 344 с.: ил.

ISBN 978-5-4363-0008-5

В учебном пособии подробно разобраны методы решения задач по курсу оптики. Задачи систематизированы по разделам, каждый из которых предваряется кратким изложением теоретического материала.

Для студентов технических вузов, а также преподавателей физики высших и средних учебных заведений.

УДК 535
ББК 22.343

ISBN 978-5-4363-0008-5

© ООО «ТИД «Студент», 2012

Предисловие

В данной книге продолжается рассмотрение методов решения задач в общем курсе физики, начатое в уже вышедших изданиях: Коряев В.П. Методы решения задач в общем курсе физики. Механика: Учеб. пособие — М.: Высш. шк., 2007; Коряев В.П. Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. пособие — М.: Высш. шк., 2009 и Коряев В.П. Методы решения задач в общем курсе физики. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие — Торгово-издат. Дом «Студент», 2011. Ссылки на них в тексте будут отмечаться 1, 2 и 3 соответственно с указанием страниц.

Особенности преподавания физики в Московском физико-техническом институте (МФТИ) заключаются, во-первых, в значительности затрачиваемого времени (шесть семестров) на изучение предмета и, во-вторых, в привлечении к преподаванию по совместительству сотрудников исследовательских физических институтов Российской Академии Наук (РАН) и различных министерств, т. е. высококвалифицированных специалистов.

Любая практическая деятельность физиков фактически сводится к решению конкретных задач. Понимание этого привело к тому, что и в процессе обучения, и при проверке знаний на экзаменах на кафедре общей физики МФТИ большое внимание уделяется умению решать задачи. Поэтому все экзамены включают письменные контрольные работы. О достаточной сложности предлагаемых задач свидетельствует то, что студентам на письменных экзаменах разрешается пользоваться учебниками, книгами, конспектами и другими учебными пособиями.

Придумывать новые задачи — обязательное требование к преподавателям кафедры общей физики. О количестве задач можно судить, например, по тому, что в первом семестре, посвященном изучению механики, необходимо иметь 20 задач (контрольная по первому заданию и экзаменационная работа по два варианта из пяти задач). Эта трудная работа (придумывание задач) проводится на кафедре более полувека. Накоплено много хороших задач. Практически исчерпаны все возможные варианты. Лучшие и показательные (представительные) задачи вошли в три тома сборника под редакцией В.А. Овчинкина. В первом томе (Сборник задач по общему курсу физики: В 3 ч. / Под ред. В.А. Овчинкина. — Ч. 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МФТИ, 2002) содержится 1060 задач по механике и 827 задач по термодинамике и молекулярной физике. Во втором томе (Сборник задач по общему курсу физики / Под

ред. В.А Овчинкина. — Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика. — М.: Физматкнига, 2004) содержится 715 задач по электричеству и магнетизму и 627 задач по оптике.

Методы решения задач по оптике приведены в данной книге. Полнота методов подтверждается ссылками на задачи указанного сборника задач. Каждый из 11 тематических разделов начинается с краткого изложения основных теоретических сведений.

В отличие от имеющихся различных задачников с решениями здесь возможно впервые сделан акцент на изложении методов решения задач и соответствующей систематизации.

Предполагается, что основными читателями данной книги станут преподаватели и студенты физических специальностей университетов и институтов, а также учителя средних школ.

Более 40 лет автор имел возможность общаться с сотрудниками кафедры общей физики МФТИ и благодарен им за все полезное, что смог от них почерпнуть, и особенно заведующему кафедрой — профессору А.В. Максимычуеву за поддержку моей работы, А.В. Гуденко за полезные замечания, сделанные им после детального ознакомления с рукописью книги. За помощь в издании книги выражаю большую благодарность Д.П. Корякову.

Введение

Методы решений новых задач создаются на основе общих сведений о рассматриваемых явлениях и известных методах решения аналогичных задач.

Затруднения при решении задач следует преодолевать дополнительными усилиями, чтением учебников, беседой с однокурсниками, обсуждением на семинарских занятиях с преподавателями. Данная книга может быть полезна, если самостоятельные упорные предварительные попытки найти решение задачи не дают результата. Автор старался, чтобы книга не была «решебником», а помогала освоить методы решения задач, проясняла трудные вопросы. Если человек не хочет научиться решать задачи, а стремится лишь к сдаче тетради с заданием, то он найдет, откуда переписать решения, может быть и неправильные, и сделает это без настоящей пользы для себя. Автор надеется, что, воспользовавшись этой книгой, даже ленивый чему-нибудь научится.

В общем курсе физики оптика существенно отличается от школьной программы.

Решение задач полезно проводить по следующему плану:

- 1) хорошо понять условие задачи, используя рисунки и дополняя их затем по ходу решения;
- 2) обдумать условие задачи и возможные пути и варианты решений;
- 3) используя необходимые физические законы, выписать уравнения и, если они в векторном виде, то выбрать удобную систему координат, и записать уравнения в проекциях;
- 4) выписать дополнительные условия, которые необходимы для решения задачи, и написать решение уравнений;
- 5) провести анализ результатов решения: по единицам измерения, правильности предельных значений полученных зависимостей (с учётом области применимости решения), разумности порядков вычисленных величин (по грубым оценкам и здравому смыслу).

В данной книге автор не стремился доводить решения конкретных задач до численных результатов (за некоторым исключением). Важно было проследить цепочки задач, попытаться их систематизировать и провести анализ различных вариантов.

Цель данной книги — показать, как общие физические законы, которые будут кратко изложены, позволяют решить большое количество задач.

1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии

Оптика — греч. *optiké* — наука о зрительных восприятиях. Слово «*оптика*» образовано от *optos* — видимый, зримый. В широком понимании в оптику кроме видимого излучения (света) включают также рентгеновское, ультрафиолетовое, инфракрасное и радиоизлучение. По традиции оптику подразделяют на геометрическую оптику, не занимающуюся изучением природы света, и физическую, включающую все остальное.

Геометрическая, или лучевая, оптика основывается на четырех законах, установленных опытным путем.

1. Прямолинейное распространение света (луча) в однородной среде. Одним из основных фактов, подтверждающих это, является наличие теней предметов.

2. Независимость световых пучков. Эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от наличия других пучков.

3. При отражении от поверхности падающий на поверхность луч, нормаль к поверхности и отраженный луч лежат в одной плоскости. Причем угол отражения (между нормалью и отраженным лучом) равен углу падения (между нормалью и падающим лучом).

4. При прохождении луча через границу двух сред падающий луч, нормаль к границе и прошедший луч лежат в одной плоскости. Причем угол падения α (между нормалью к границе и падающим лучом) и угол преломления β (между нормалью к границе и прошедшим лучом) связаны законом Снеллиуса

$$\sin\alpha/\sin\beta = n_{21} = n_2/n_1. \quad (1.1)$$

Здесь введены величины, не зависящие от углов, а определяемые свойствами сред: n_{21} — относительный показатель преломления; n_2 и n_1 — абсолютные показатели преломления среды 2 и 1 соответственно (луч идет из среды 1 в среду, обозначенную 2).

Принцип взаимности в оптике заключается в том, что при изменении направления лучей на обратное их взаимное расположение не меняется.

Приведенные законы согласуются с принципом (аксиомой) Ферма, в соответствии с которым свет распространяется по кратчайшему оптическому пути, равному пути, умноженному на показатель преломления среды.

Докажем, пользуясь законом отражения, что если луч света, исходящий из точки *A*, попадает в точку *B* после отражения от плос-

кого зеркала (рис. 1.1), то длина пути этого луча меньше, чем длина любого другого пути, проходящего от A к зеркалу, а затем к B (№ 1.2)¹. Точка A' является мнимым изображением точки A . Она лежит на пересечении продолжения BC и нормали к зеркалу из точки A . Из равенства треугольников ACO и $A'CO$ следует равенство $A'C = AC$. Значит $A'B$ равно пути из A в B . Любой другой путь, например, $AC'B = A'C'B$ представляет ломанную линию между A' и B , т. е. более длинный путь.

Покажем, что если луч света, исходящий из точки A , попадает в точку B после преломления на плоской границе раздела двух сред (рис. 1.2), то оптическая длина этого луча меньше, чем оптическая длина любого пути, соединяющего A и B (принцип Ферма) при выполнении закона преломления (1.1) (№ 1.3). Для оптической длины L ломаной, соединяющей точки A и B , имеем $L = n_1 a / \cos \alpha + n_2 b / \cos \beta$. При этом должно выполняться дополнительное соотношение $a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = \text{const}$ (постоянство длины проекции ломаной на плоскость раздела сред). Для минимума оптической длины необходимо

$$dL / d\alpha = n_1 a \sin \alpha / \cos^2 \alpha + n_2 b (\sin \beta / \cos^2 \beta) (d\beta / d\alpha) = 0.$$

Из дополнительного условия следует $a \cos^2 \alpha + b / \cos^2 \beta \times (d\beta / d\alpha) = 0$. Сопоставив последнее выражение с предыдущим, видим, что экстремум будет при выполнении (1.1). Убедиться, что это минимум, а не максимум, можно вычислив вторую производную, либо из геометрических соображений.

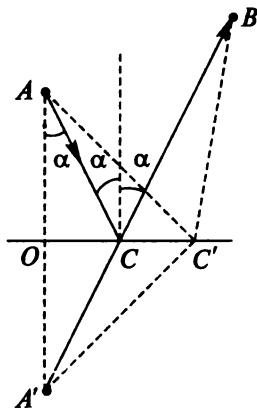


Рис. 1.1

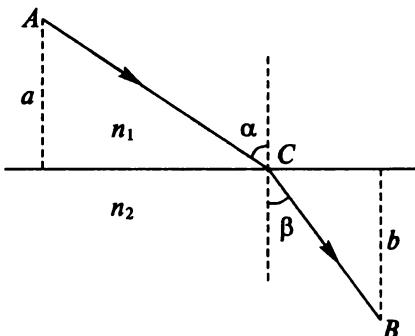


Рис. 1.2

¹ В скобках указаны номера задач см.: Сборник задач по общему курсу физики: В 3 ч. — Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / Под ред. В.А. Овчинкина. — М.: Физматкнига, 2004.

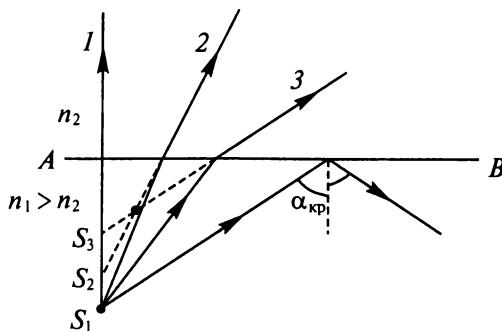


Рис. 1.3

Рассмотрим ход световых лучей при прохождении через одну или несколько преломляющих плоскостей. Гомоцентрическим называют пучок лучей, пересекающихся в одной точке. На рис. 1.3 показаны лучи, идущие из точки S_1 и проходящие через границу (AB) сред с разными показателями преломления n_1 и $n_2 < n_1$. Во-первых, отметим, что после прохождения границы гомоцентричность лучей не сохраняется (продолжение показанных на рисунке лучей в первую среду попадает в точки S_2 и S_3). Во-вторых, при некотором угле падения α_{kp} преломленного луча нет, остается только отраженный луч (для других лучей отраженные не показаны). Это явление называется **полным внутренним отражением**. Из (1.1) для угла **полного внутреннего отражения** получаем

$$\sin \alpha_{kp} = n_2/n_1. \quad (1.2)$$

Параксиальными (приосевыми) называются мало расходящиеся пучки. Для них сохраняется гомоцентричность и можно говорить о **мнимом источнике**.

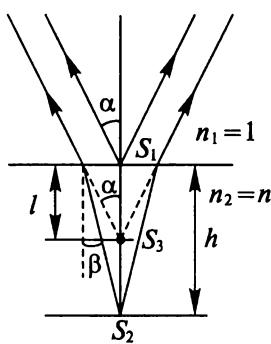


Рис. 1.4

На рис. 1.4 показана стеклянная пластинка толщиной h , на которой рассматриваются точки S_1 и S_2 . Чтобы после S_1 увидеть S_2 , надо было опустить тубус микроскопа на расстояние l . Из рисунка видно, что **мнимое изображение** точки S_2 , обозначенное S_3 , находится от верхней границы пластиинки на расстоянии l . Из подобия треугольников следует: $h \operatorname{tg} \beta = l \operatorname{tg} \alpha$. Используя (1.1), где считаем $n_1 = 1$, $n_2 = n$ и параксимальность лучей, получаем для показателя преломления пластиинки $n = \sin \alpha / \sin \beta \approx \approx \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = h/l$ (№ 1.7).

При рассматривании через плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной h с показателем преломления n предмета S_1 , находящегося за пластинкой на расстоянии l (рис. 1.5), в нормальном к поверхности пластиинки направлении, получаем **мнимое изображение** S_2 на расстоянии x . Используя (1.1), находим: $l \operatorname{tg}\alpha + h \operatorname{tg}\beta = x \operatorname{tg}\alpha$. Откуда, как и в предыдущей задаче, $x = l + h/n$ (№ 1.8).

Если на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает узкий пучок света шириной a (рис. 1.6), содержащий две спектральные компоненты с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_2 > n_1$), при некоторой толщине пластиинки h после ее прохождения будут два пучка, из которых каждый содержит только одну компоненту. Найдем необходимую для этого минимальную толщину (№ 1.12). Используя (1.1), получаем: $\sin\alpha/\sin\beta = n$ и $\operatorname{tg}\beta = \sin\beta/(1 - \sin^2\beta)^{1/2} = \sin\alpha/(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}$. Условие разделения пучков (ширина пучка по поверхности пластиинки меньше разности смещений лучей разной длины волны)

$$a/\cos\alpha = h [\sin\alpha/(n_1^2 - \sin^2\alpha)^{1/2} - \sin\alpha/(n_2^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}]$$

Отсюда находим h .

Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на дне. Глубина пруда $h = 1$ м. Найдем, на каком расстоянии h' от поверхности воды получится изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол $\alpha = 60^\circ$. Показатель преломления воды $n = 1,33$ (№ 1.18). На рис. 1.7 показаны лучи, идущие от камня. Выражая расстояние AB , получаем $hd\beta / \cos^2\beta = h'd\alpha / \cos^2\alpha$. Из (1.1) находим $\sin\alpha / \sin\beta = n$ и соответствующие

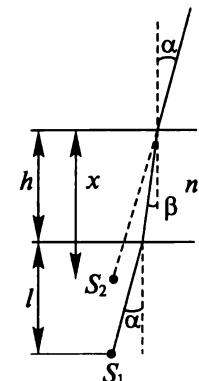


Рис. 1.5

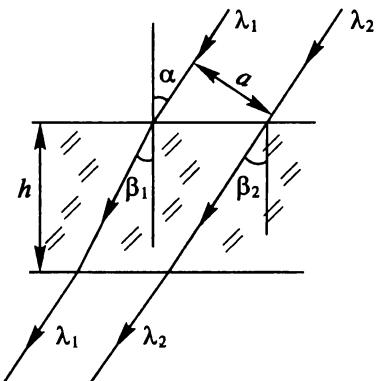


Рис. 1.6

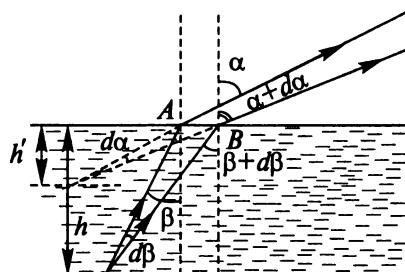


Рис. 1.7

дифференциалы $\cos \alpha d\alpha = \cos \beta d\beta$. Подставляя в предыдущее уравнение, получаем $h' = (\cos^2 \alpha / \cos^2 \beta)(d\beta / d\alpha) = (\cos^3 \alpha / \cos^3 \beta)/n = 0,215$ м.

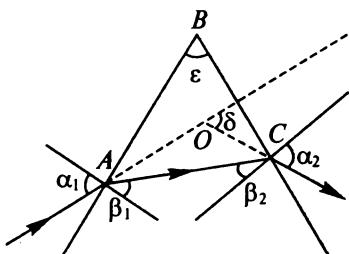


Рис. 1.8

Многогранник — это тело, ограниченное плоскостями. **Призма** — это многогранник, у которого основания являются равными многоугольниками, а боковые грани — параллелограммами. Со времен Ньютона призмы в оптике играют важную роль. На рис. 1.8 показано сечение, перпендикулярное боковым граням призмы, которое называют **главным сечением**. Угол ABC (ϵ) называется **преломляющим** для луча света, показанного на рисунке. Из геометрии и (1.1) получаем для угла отклонения луча

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon. \quad (1.3)$$

Для нахождения **минимального угла отклонения** (№ 1.9) приравняем нулю производную $d\delta / d\alpha_1 = 1 + d\alpha_2 / d\alpha_1 = 0$. Откуда следует $|\alpha_1| = |\alpha_2|$. Таким образом, минимальное отклонение луча происходит, когда входящий и выходящий лучи симметричны. При этом из (1.3) следует: $2\alpha = \delta + \epsilon$ и $\alpha - \beta = \delta/2$. Из (1.1) находим $n = \sin[(\epsilon + \delta)/2] / \sin(\epsilon/2)$. При заданном n и ϵ отсюда можно найти δ (№ 1.11). Если преломляющий угол ϵ и угол падения α малы, то мал и δ . В этом случае

$$\delta = (n - 1)\epsilon. \quad (1.4)$$

При многократном отражении луча внутри призмы из-за увеличения угла отражения наступает **полное внутреннее отражение**. Найдем количество световых пятен на экране за стеклянным клином ($n = 1,41$, $\epsilon = 10^\circ$), если на него, как показано на рис. 1.9, падает тонкий луч света (№ 1.14). Из (1.2) получаем $\alpha_{kp} = 45^\circ 10'$. При первом падении угол $\alpha_1 = 10^\circ$, при втором $\alpha_2 = 30^\circ$, при третьем $\alpha_3 = 50^\circ$. Это больше критического $\alpha_c > \alpha_{kp}$, и поэтому луч не выходит из клина.

Исходящий из точки световой поток, падающий на некоторую систему, может быть ограничен **входным зрачком** (входным отвер-

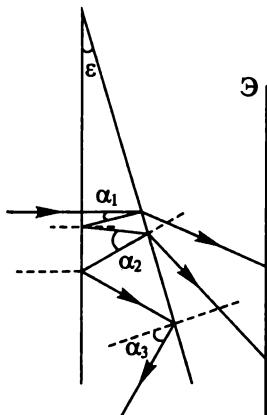


Рис. 1.9

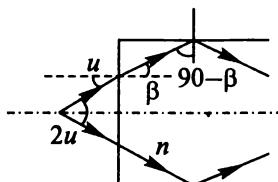


Рис. 1.10

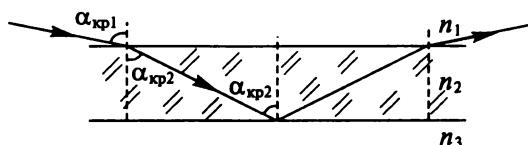


Рис. 1.11

стием). Угол $2u$ (u — угол от оси пучка), под которым виден входной зрачок, называется апертурным углом, или апертурой системы.

Перед торцом стеклянного цилиндрического световода, показатель преломления которого равен n , на его оси расположен точечный источник света (рис. 1.10). Найдем угловую апертуру ($2u$) пучка света, проходящего через световод (№ 1.15). По световоду пойдут лучи, ограниченные лучом, испытывающим на его стенке полное внутреннее отражение. На торце световода $\sin u = ns \sin \beta$. Из (1.2) условие полного внутреннего отражения $\sin(90^\circ - \beta) = 1/n$. Отсюда $2u = 2\arcsin(n^2 - 1)^{1/2}$. Так будет, пока $n^2 < 2$, т. е. $\sin u < 1$. Для больших значений n угловая апертура $2u = \pi$.

Найдем наименьшую возможную величину показателя преломления n жидкости, при котором монета, помещенная под дно стакана с этой жидкостью, не будет видна через боковую стенку стакана (№ 1.16). Во-первых, покажем, что плоскую пластинку при вычислении угла полного внутреннего отражения можно не учитывать. На рис. 1.11 между двумя средами находится плоский слой. Из (1.2) следует, что полное отражение на нижней границе будет при $\sin \alpha_{kp2} = n_2/n_3$. Используя (1.1), получаем $\sin \alpha_{kp1} = n_1/n_3$. Поэтому в случае жидкости в стакане (рис. 1.12) $90^\circ - \alpha_{kp} > \alpha_{kp}$, т. е. $\alpha_{kp} < 45^\circ$. Откуда $\sin \alpha_{kp} = 1/n < \sin 45^\circ$, следовательно, не видна монета при $n > 2^{1/2}$.

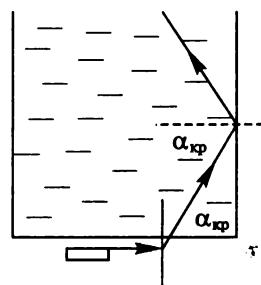


Рис. 1.12

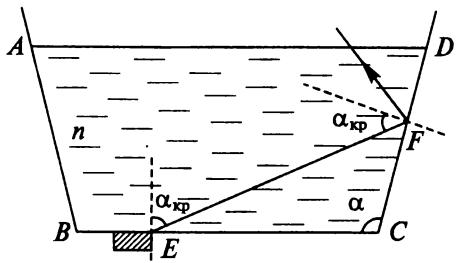


Рис. 1.13

Аналогичным образом решается задача о том, с каким углом α нужно взять трапецидальный сосуд с водой $ABCD$ (рис. 1.13), чтобы сквозь его боковую стенку не было видно предмета, положенного под сосуд. Показатель преломления воды $n = 1,33$. Дно сосуда имеет форму прямоугольника

(№ 1.17). Из треугольника EFC : $\alpha + 2(90^\circ - \alpha_{kp}) = 180^\circ$. Откуда $\alpha = 2\alpha_{kp}$. Следовательно, предмет, положенный под сосуд не будет виден в случае $\sin(\alpha/2) > 1/n$. Соответственно, $\alpha > 97,5^\circ$.

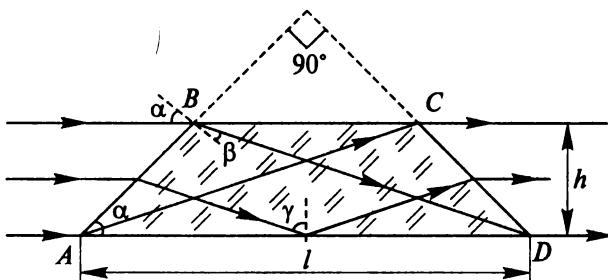


Рис. 1.14

Для обращения (переворачивания) изображения часто используют так называемую призму Дове (рис. 1.14), представляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Найдем длину l основания призмы, которая должна обращать пучок света максимального сечения, если ее высота $h = 2,11$ см, а показатель преломления стекла $n = 1,41$ (№ 1.13). Сечение пучка будет максимальным, если один крайний луч, идущий из верхней точки B , попадает в нижнюю точку D , а второй уже после отражения от нижней грани из точки A идет в точку C . На нижней грани, чтобы свет не выходил из призмы, угол падения γ должен быть больше угла полного внутреннего отражения (1.2) $\sin\alpha_{kp} = 1/n = 0,7092$. Имея тригонометрические таблицы, можно провести расчеты с большой точностью. Можно использовать, что заданная величина n близка к $\sqrt{2}$. Из (1.1) в таком случае $\beta = 30^\circ$, $(\alpha - \beta) = 15^\circ$. Считая этот угол малым, находим $\tan 15^\circ = 15/57,3 = 0,26$. Отсюда $l = h(1 + 1/\tan 15^\circ) \approx 10$ см.

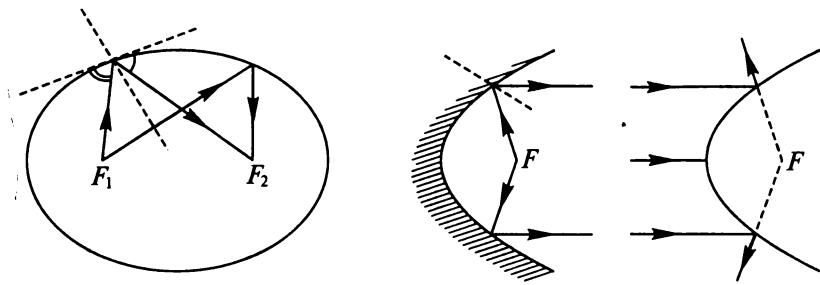


Рис. 1.15

Используя свойства эллипсоида и параболоида (И.Н. Бронштейн, К.А. Семендаев «Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов»), можно получить их замечательные отражающие свойства (рис. 1.15). Для эллипсоида лучи, исходящие из одного фокуса, собираются в другом фокусе. При удалении одного из фокусов в бесконечность получаем параболоид и, соответственно, параллельный пучок. При отражении от выпуклой поверхности параболоида лучи расходятся по направлениям, исходящим из фокуса.

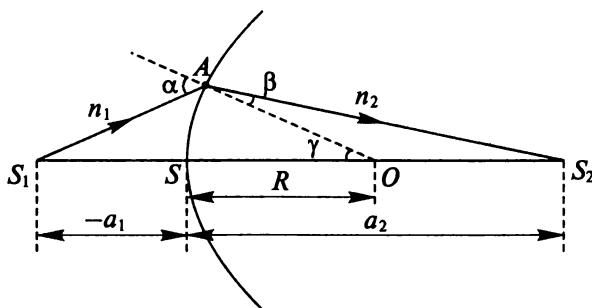


Рис. 1.16

Рассмотрим преломление (и отражение) на сферической границе (радиуса R с центром в точке O), разделяющей среды с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 1.16). В точке A луч, исходящий из S_1 , преломляется в соответствии с (1.1) и попадает в точку S_2 . В случае параксимальных пучков (относительно оси S_1S_2) можно считать $S_1S \approx S_1A$ и $S_2S \approx S_2A$. Используя теорему синусов, из треугольника S_1AO получаем $S_1O/S_1A = \sin\alpha/\sin\gamma$, а из треугольника AS_2O соответственно $AS_2/OS_2 = \sin\gamma/\sin\beta$. Отсюда следует

$$(S_1O/S_1A)(AS_2/OS_2) = \sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1.$$

Принято отрезки вправо от S (по направлению распространения света) считать положительными, а влево — отрицательными. Обозначим $|S_1 A| \approx |S_1 S| = -a_1$ ($a_1 < 0$), $|A S_2| \approx |S S_2| = a_2$ (начало координат по оптической оси в точке S). Подставляя это в предыдущую формулу, получаем

$$n_1(1/a_1 - 1/R) = n_2(1/a_2 - 1/R) = Q. \quad (1.5)$$

Введенная здесь величина Q называется **нулевым инвариантом Аббе**. При преломлении в случае параксиальных пучков она сохраняет свою величину. Все лучи гомоцентрического пучка из S_1 пересекают ось в одной точке S_2 , которая называется **стигматическим изображением S_1** . Соответственно система называется **стигматической**, если изображение в виде пятна или пространственной фигуры. Отметим, что для выпуклой поверхности (как на рисунке) R берется положительным, а для вогнутой отрицательным. Иногда (1.5) удобнее представить в виде

$$n_1/a_1 - n_2/a_2 = (n_1 - n_2)/R = \Phi. \quad (1.6)$$

Это соотношение используется при расчете всех оптических систем, содержащих много последовательных сферических поверхностей раздела.

Величина Φ называется **оптической силой** и измеряется в диоптриях (1 дптр = m^{-1}).

Из (1.6) следует, что при $a_1 = -\infty$ имеем

$$a_2 = n_2 R / (n_2 - n_1) = f_2; \quad (1.7)$$

при $a_2 = \infty$

$$a_1 = -n_1 R / (n_2 - n_1) = f_1. \quad (1.8)$$

Величины f_1 и f_2 зависят только от радиуса кривизны поверхности R и показателей преломления n_1 и n_2 обеих сред. Они называются **фокальными расстояниями**: f_1 — переднее фокальное расстояние (точка F_1 — передний фокус); f_2 — заднее фокальное расстояние (F_2 — задний фокус). Из (1.7) и (1.8) получаем

$$f_2/f_1 = -n_2/n_1. \quad (1.9)$$

Приведенными формулами можно воспользоваться и в случае отражения света от **сферических зеркал**. Формула (1.1) дает закон отражения, если положить $n_2 = -n_1$. Знак «минус» необходим, так как угол отраженного луча отсчитывается в другую сторону от

нормали: $\sin\beta = -\sin\alpha$ и $\beta = -\alpha$. Из (1.6) находим формулу для сферического зеркала

$$1/a_1 + 1/a_2 = 2/R. \quad (1.10)$$

Эту формулу для параксиального пучка можно получить и непосредственно из закона отражения.

Из (1.7) или (1.8), подставляя $n_2 = -n_1$, определяем фокусное расстояние

$$f = f_1 = f_2 = R/2. \quad (1.11)$$

Из (1.10) следует

$$1/a_1 + 1/a_2 = 1/f. \quad (1.12)$$

В случае зеркала изображение действительное, если оно находится по одну сторону с источником, и мнимое, если расположено за зеркалом. Для вогнутого зеркала получаем действительный фокус ($R > 0$), для выпуклого — мнимый ($R < 0$). Для плоского зеркала $R = \infty$, поэтому $a_1 = -a_2$. Изображение мнимое и симметрично расположено.

Поверхность ртути хорошо отражает свет. В равномерно вращающемся сосуде (угловая скорость ω противоположна напряженности поля тяготения g) поверхность ртути является параболоидом (1, с. 359) $z = \omega^2 r^2 / (2g)$, где z — расстояние по оси вращения, а r — расстояние поверхности от оси. Для радиуса кривизны поверхности вблизи оси вращения имеем (1, с. 17) $R = g/\omega^2$. Из (1.11) фокусное расстояние $f = g/(2\omega^2)$ (№ 1.1).

С помощью описанного в предыдущей задаче зеркала можно получить, например, фотографию Луны (№ 1.20). Фокусное расстояние $f = g/(2\omega^2)$ мало по сравнению с расстоянием до Луны (L). Поэтому, как следует из (1.12), изображение будет фактически в фокальной плоскости. Отношение размеров изображения (h) к диаметру Луны (H) равно $h/H = f/L = g/(2L\omega^2)$. Отсюда находим нужную угловую скорость вращения сосуда с ртутью.

Рассмотрим, как смещается изображение в вогнутом зеркале, когда между зеркалом и его фокусом помещают плоскопараллельную пластинку, если предмет находится на оси зеркала дальше его фокуса (рис. 1.17) (№ 1.21). Используя (1.1), параксиальность лучей и обозначения на рисунке, где показан ход луча к изображению AB получаем $b = x_1 \operatorname{tg}\alpha + h \operatorname{tg}\beta + x_2 \operatorname{tg}\alpha = (a_2 - h + h/n) \operatorname{tg}\alpha$. Откуда $a_{22} = b/\operatorname{tg}\alpha = a_2 - h(n-1)/n$. Таким образом, но-

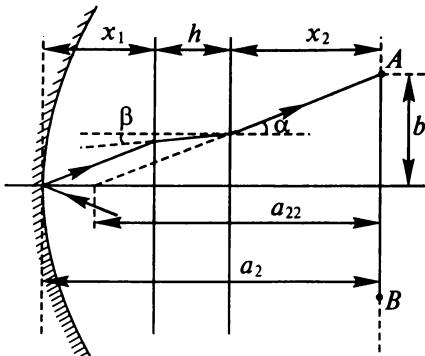


Рис. 1.17

вое положение зеркала должно быть сдвинуто в сторону предмета на $h(n - 1)/n$.

С помощью сферических вогнутых зеркал можно создать систему для задержки во времени короткого светового импульса. Разрез такой системы показан на рис. 1.18. Радиус кривизны зеркала 3_1 равен $r_1 = 10$ м, радиус кривизны зеркала 3_2 равен $r_2 = 1$ м. Расстояние между зеркалами $L = 5,5$ м, т. е., как следует из (1.10), равно

сумме фокусных расстояний. В таком случае луч, идущий параллельно оси зеркал (на расстоянии $h = 15$ см), пройдет через фокус, а отразившись пойдет параллельно оси на расстоянии $h/10$ (что следует из подобия треугольников). Пройдя шесть раз между зеркалами ($6L$), луч выйдет через отверстие диаметром $d = 2$ мм в большом зеркале (на оси). Для определения времени задержки t светового импульса необходимо $6L = 3,3 \cdot 10^3$ см разделить на скорость света $3 \cdot 10^{10}$ см/с. Получим $t = 1,1 \cdot 10^{-7}$ с (№ 1.19).

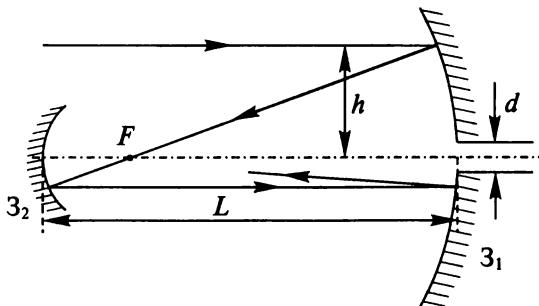


Рис. 1.18

Центрированными оптическими системами являются системы оптически однородных преломляющих или отражающих сред, отделенных одна от другой сферическими поверхностями, центры кривизны которых расположены на одной прямой, называемой **главной оптической осью** системы. Простейший и важный случай центрированной системы представляют две сферические поверхности, ограничивающие какой-либо прозрачный материал (на-

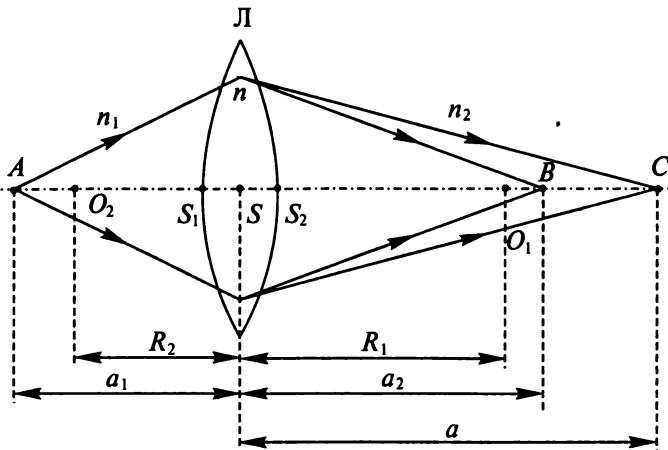


Рис. 1.19

пример, стекло) от окружающего воздуха. Такая система называется **линзой** (рис. 1.19). Линза тонкая, если ее толщина S_1S_2 мала по сравнению с R_1 и R_2 . Далее будем считать, что S_1 и S_2 сливаются в точку S , которая называется **оптическим центром линзы**. Любой параксиальный луч, проходящий через S , практически не испытывает преломления. Для преломления пучка из точки A в точку C на первой сферической поверхности из (1.6) получаем $n_1/a_1 - n/a = (n - n_1)/R_1$. Для второй поверхности C является мнимым источником света. Его изображение после преломления на второй поверхности будет в точке B . Из (1.6) получаем $n/a - n_2/a_2 = (n - n_2)/R_2$. Для одинаковых сред по обе стороны линзы (например, воздуха) имеем $n_1 = n_2$ и из двух предыдущих формул

$$n_1(1/a_2 - 1/a_1) = (n - n_1)(1/R_1 - 1/R_2). \quad (1.13)$$

Сравнив с (1.6), видим, что в системе происходит **сложение оптических сил Φ** .

Вводя относительный показатель преломления $N = n/n_1$, получаем

$$(1/a_2 - 1/a_1) = (N - 1)(1/R_1 - 1/R_2). \quad (1.14)$$

При применении этой формулы нужно учитывать знаки величин, считая их положительными, если они отложены вправо от линзы (в направлении распространения света), и отрицательными, если они отложены влево от линзы. Для определения фокусных расстояний имеем при $a_1 = \infty$ и $a_2 = \infty$ соответственно

$$\begin{aligned} a_2 &= f_2 = 1/[(N - 1)(1/R_1 - 1/R_2)], \\ a_1 &= f_1 = -1/[(N - 1)(1/R_1 - 1/R_2)]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, фокусные расстояния (для одинаковых сред с двух сторон линзы) равны по величине и противоположны по знаку

$$f_1 = -f_2. \quad (1.16)$$

В соответствии с (1.6) оптическая сила линзы

$$\Phi_L = 1/f. \quad (1.17)$$

В зависимости от знака и величины R_1 и R_2 (радиусы кривизны сферических поверхностей отсчитываются в направлении от сферической поверхности к центру кривизны, а фокусные расстояния в направлении от линзы к фокусу) и знака $(N - 1)$ величина f может быть положительной или отрицательной, т. е. фокус может быть мнимым или действительным. Причем, если первый фокус — мнимый, то и второй мнимый, если первый действительный, то и второй действительный. Если параллельные лучи после преломления в линзе сходятся (т. е. фокусы действительны), то линза называется **собирательной**, или **положительной** (на рисунках изображается \oplus). При мнимых фокусах параллельные лучи после преломления расходятся. Такие линзы называются **рассеивающими**, или **отрицательными** (на рисунках изображаются \ominus). Вводя фокусное расстояние $f = f_2 = -f_1$ из (1.14) получаем

$$1/a_2 - 1/a_1 = 1/f.$$

Это формула тонкой линзы. При расположении источника слева от линзы a_1 отрицательно, и получаем формулу, которой часто пользуются для абсолютных значений $|a_1|$ и $|a_2|$

$$1/|a_1| + 1/|a_2| = 1/f. \quad (1.18)$$

Луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется. Линии, по которым идут эти лучи, называются **побочными осями**, в отличие от главной оси, проходящей через центры кривизны сферических поверхностей. Лучи, параллельные главной оси, собираются в фокусе, а параллельные побочной оси — в точке пересечении ее с **фокальной плоскостью**, проходящей через фокус перпендикулярно главной оси. Лучи, проходящие через фокус, после преломления в линзе идут параллельно соответствующим осям.

Если, например, заданы радиусы сферических поверхностей $R_1 = 25$ мм и $R_2 = 40$ мм и показатель преломления стекла линзы

$n = 1,5$, то для вычисления фокуса этой линзы (№ 1.4) воспользуемся (1.15), учитывая, что R_2 надо взять со знаком «минус» (см. рис. 1.19), $f = f_2 = 1/[0,5(1/25 + 1/40)] = 30,77$ мм.

С помощью тонкой собирающей стеклянной линзы с показателем преломления $n = 3/2$ получено действительное изображение предмета на расстоянии $a_{21} = 10$ см от линзы. После того как предмет и линзу погрузили в воду, не изменяя расстояния между ними, изображение получилось на расстоянии $a_{22} = 60$ см от линзы. Найдем фокусное расстояние f линзы, если показатель преломления воды $n_1 = 4/3$ (№ 1.5). Из (1.14) и (1.15) получаем $1/a_{21} - 1/a_1 = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2) = 1/f$, $1/a_{22} - 1/a_1 = (n/n_1 - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$. Отсюда $f = n(n - 1/n_1)/[(n - 1)(1/a_{21} - 1/a_{22})] = 9$ см.

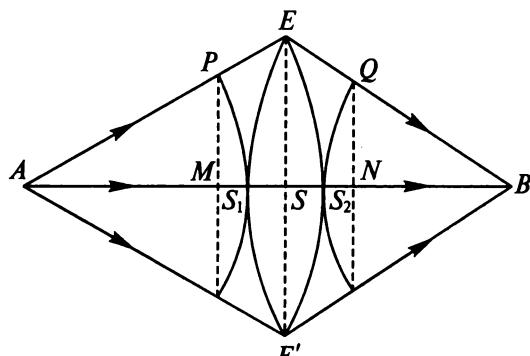


Рис. 1.20

Принцип тautoхронизма (прохождения пути за одно и то же время) заключается в том, что оптические длины всех лучей, вышедших из точки A (рис. 1.20) и собравшихся в точке B , одинаковы. Воспользуемся этим принципом для вывода формулы тонкой линзы (1.14) (№ 1.6). Проведя окружности из точек A и B через точки P и Q и считая, что для параксиальных лучей длина ломаной линии PEQ приближенно равна ее проекции на ось MN , получаем из принципа тautoхронизма для оптических длин $MN = nS_1S_2$ или $MS_1 + S_2N = (n - 1)(S_1S + SS_2)$. Для тонкой линзы $S_1S = (ES)^2/(2R_1)$ и $SS_2 = -(ES)^2/(2R_2)$. Аналогично, для параксиальных лучей $MS_1 = (ES)^2/(2a_1)$ и $S_2N = (ES)^2/(2a_2)$. Подставляя эти формулы в предыдущую, находим (1.14) $(1/a_2 - 1/a_1) = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$.

На рис. 1.21 показан ход лучей через линзу, который осуществляется, например, в фотоаппарате. Источник обозначен буквой A , а его изображение, которое получается на экране (\mathcal{E}) или на матовом стекле фотоаппарата, точкой B . Другие источники, например,

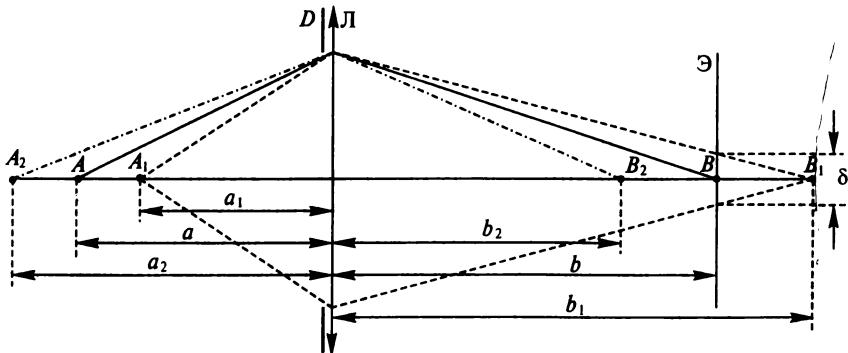


Рис. 1.21

A_1 и A_2 на экране дают размытое изображение диаметра δ , которое зависит от диаметра диафрагмы D . Диафрагма на объективе фотоаппарата позволяет увеличить глубину резкости, т. е. при допустимой размытости δ получить четкое изображение также точек A_1 и A_2 . Найдем, до какого диаметра D нужно задиафрагмировать объектив с фокусным расстоянием $f = 20$ см, чтобы не было заметной нерезкости в изображении предметов, находящихся на расстоянии 0,5 м ближе снимаемого, если нерезкость считается незаметной при размытости деталей, не превышающей $\delta = 0,1$ мм (№ 1.22). Используя абсолютные значения показанных на рис. 1.21 расстояний, имеем (1.18)

$$1/a + 1/b = 1/f, \quad (1.19)$$

откуда $b = af/(a-f)$ и аналогично $b_1 = a_1 f/(a_1-f)$. Поэтому $b_1 - b = f^2(a-a_1)/[(a_1-f)(a-f)]$ и $D = \delta b_1/(b_1 - b) = \delta(a_1/f)(a-f)/(a-a_1) = 2 \cdot 10^{-2}$ м.

Если оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предмет, находящийся (см. рис. 1.21) на расстоянии $a = 10$ м, ближняя граница глубины резкости расположена на расстоянии $a = 7,8$ м, то можно найти дальнюю границу a_2 (№ 1.23). Используя (1.19), получаем $1/a + 1/b = 1/a_1 + 1/b_1$ и $1/b_1 - 1/b = 1/a - 1/a_1$. Из подобия треугольников, как и в предыдущей задаче, получаем $\delta/D = 1 - b/b_1 = b/b_2 - 1$ или $1/b - 1/b_2 = 1/b_1 - 1/b$. Снова пользуясь (1.19) и полученными соотношениями, находим $1/a_2 = 1/a + 1/b - 1/b_2 = 1/a + 1/b_1 - 1/b = 2/a - 1/a_1$. Откуда $a_2 = a_1 a / (2a_1 - a) = 14$ м.

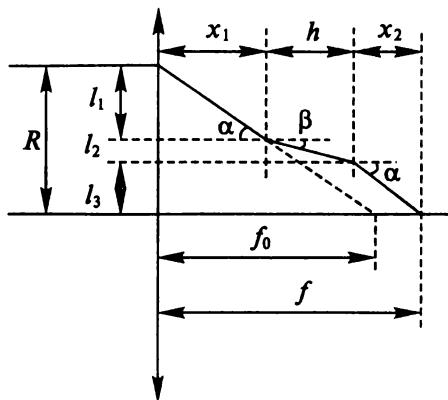


Рис. 1.22

Найдем, как сместится фокус фотоаппарата, если внутрь аппарата на пути лучей (перпендикулярно оптической оси) (рис. 1.22) поместить плоскопараллельную пластинку толщиной $h = 6$ мм с показателем преломления $n = 1,5$ (объектив сильно задиафрагмирован) (№ 1.24). В таком случае синусы и тангенсы можно заменить углами. Используя обозначения на рис. 1.22, получаем

$$R = l_1 + l_2 + l_3 = l_1 + l_3 + ha/n \text{ и } f - f_0 = \\ = h + l_1/\alpha + l_3/\alpha - R/\alpha = h(n - 1)/n.$$

В оптике источник (объект) и его изображение оптической системой называют оптически сопряженными точками. В соответствии с теоремой обратимости объект и его изображение могут меняться местами. Понятие оптически сопряженные точки строго применимо лишь к безабберрационным (не искажающим) оптическим системам в параксиальных пучках. Для реальных систем оно часто используется как приближение. Покажем, что наименьшее расстояние между двумя оптически сопряженными относительно собирающей линзы точками равно $4f$, где f — фокусное расстояние линзы (№ 1.26). Используя (1.19), находим экстремум $l = a + b$, приравнивая нулю производную

$$dl/da = d[a + af/(a - f)]/da = 1 + f/(a - f) - af/(a - f)^2 = 0.$$

Точка экстремума $a = 2f$. Можно вычислить вторую производную l и убедиться, что она положительна, т. е. имеем минимум. Используя (1.19), находим $l = 4f$, так как для b получаем аналогичное условие.

Из формулы (1.6) для источника и изображения, получаемого в результате преломления на сферической границе (см. рис. 1.16), имеем

$$a_2 = n_2 R a_1 / [(n_2 - n_1)a_1 + n_1 R]. \quad (1.20)$$

Введем систему координат, в которой ось x идет вдоль главной оптической оси (начало в точке S), а ось y ей перпендикулярна. Координату источника обозначим x (вместо a_1), координату изображения x' и введем коэффициенты (A, B, C, D), зависящие только от радиуса кривизны и показателей преломления

$$x' = n_2 R x / [(n_2 - n_1)x + n_1 R] = (Ax + B) / (Cx + D). \quad (1.21)$$

Здесь B написано для общности, на случай сдвига системы координат вдоль оси x .

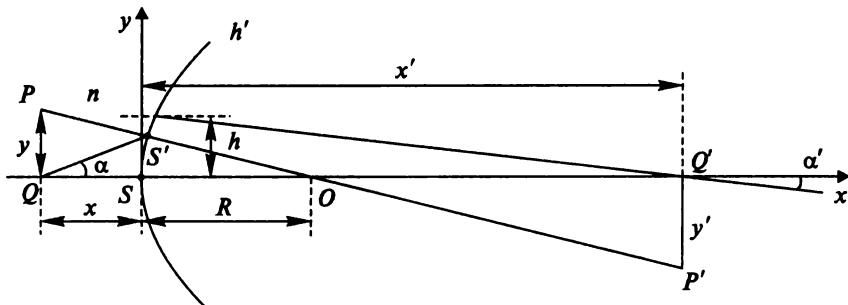


Рис. 1.23

Если источник находится на расстоянии y от оси x (рис. 1.23) в точке P , то проведя прямую PO через O , можно рассматривать ее как оптическую ось и воспользоваться предыдущим результатом. Для параксиальных лучей, обозначая проекции P и P' на ось x как Q и Q' , получаем $S'P \approx SQ$ и $S'P' \approx SQ'$. Отсюда из подобия треугольников

$$y'/y = -|OQ'|/|OQ| = (x' - R)/(x - R).$$

Используя (1.21), находим

$$y' = n_1 R y / [(n_2 - n_1)x + n_1 R] = E y / (C x + D). \quad (1.22)$$

В случае осевой симметрии для третьей декартовой координаты (z) получаем такое же соотношение.

Выражение типа (1.21) и (1.22) называется **коллинеарным соответствием**. Из (1.21) и (1.22) можно написать и обратные соотношения

$$x = (Ax' + B')/(Cx' + D'), \quad y = Ey'/(Cx' + D'), \quad (1.23)$$

где

$$B' = B, \quad C' = C, \quad A' = -D, \quad D' = -A, \quad E' = (BC - AD)/E. \quad (1.24)$$

При коллинеарном соответствии каждая плоскость, прямая линия и точка пространства предметов переходят соответственно в плоскость, прямую линию и точку в пространстве изображений. Обращение знаменателя коллинеарных преобразований в нуль приводит к тому, что точки плоскости

$$Cx + D = 0 \quad (1.25)$$

изображаются бесконечно удаленными точками. Таким образом, все лучи, выходящие из одной и той же точки плоскости (1.25), после прохождения оптической системы, идут параллельно. Плоскость (1.25) называется **фокальной плоскостью** пространства предметов, или **передней фокальной плоскостью**. Аналогично, для фокальной плоскости изображений или задней фокальной плоскости имеем уравнение

$$Cx' + D' = 0. \quad (1.26)$$

Приведенные формулы годятся для центрированной системы, состоящей из любого количества сферических поверхностей, так как изображения, полученные после одной поверхности, можно рассматривать как предметы для следующей поверхности и т. д. Отсчет абсцисс в пространстве предметов идет от положения первой преломляющей поверхности, в пространстве изображений — от положения последней преломляющей поверхности.

Точки пересечения фокальных плоскостей с главной оптической осью называют **главными фокусами** соответственно пространства предметов (F) и изображений (F') (передний и задний). Из (1.24) — (1.26) координаты фокусов

$$x_F = -D/C, \quad x'_F = -D'/C' = A/C. \quad (1.27)$$

Система может не иметь фокальных плоскостей, если $C = C' = 0$. Такая система называется **телескопической**, или **афокальной**. При прохождении через такую систему параллельный пучок лучей остается параллельным.

Отношение y'/y называют **поперечным увеличением** или просто **увеличением**. Увеличение положительно, если изображение прямое, и отрицательно, если изображение перевернутое. Две сопряженные плоскости, отображающиеся друг в друга с поперечным

увеличением $y'/y = +1$ называют **главными плоскостями**. Уравнения этих плоскостей можно получить, полагая $y' = y$ в (1.22) и (1.23)

$$Cx + D - E = 0, \quad Cx' + D' - E' = 0. \quad (1.28)$$

Первая плоскость называется главной плоскостью пространства предметов (передней главной плоскостью), а вторая — главной плоскостью пространства изображений (задней главной плоскостью). Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью называют **главными точками центрированной системы**. Абсциссы главных точек (в пространстве предметов H , в пространстве изображений H') находим из (1.21) — (1.23), полагая $y = y'$

$$\begin{aligned} x_H &= (E - D)/C, \quad x'_{H'} = (E' - D')/C' = \\ &= [BC + A(E - D)]/(EC). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Для сферической поверхности на рис. 1.16 из (1.21) — (1.23) получаем $x_H = x'_{H'} = 0$.

Главные и фокальные точки центрированной системы называют ее **кардиальными точками**. Так как коллинеарное соответствие определяется четырьмя параметрами (берется отношение четырех коэффициентов к пятому), то положение четырех кардиальных точек полностью определяется коллинеарным соответствием.

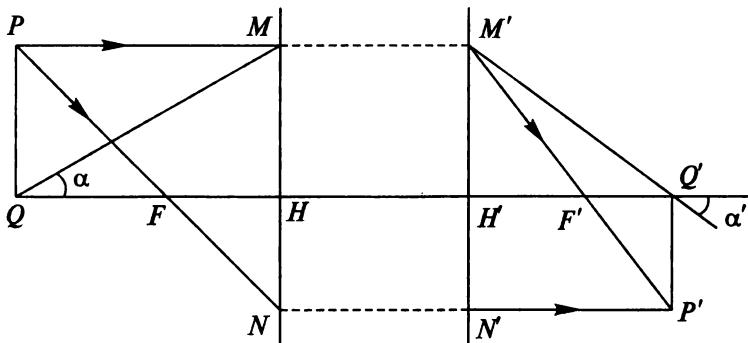


Рис. 1.24

На рис. 1.24 показан ход лучей из точки P , не лежащей на главной оптической оси. Луч PM , параллельный главной оптической оси и его продолжение в пространство изображений встретит главные плоскости в сопряженных точках M и M' . Кроме того, он должен пройти через задний фокус F' . Положение этого луча полностью определяется точками M' и F' . Луч из P , проходящий через фокус, встретит переднюю главную плоскость в точке N и, прохо-

дя затем параллельно главной оптической оси, попадет в сопряженную ей точку N' , а затем пересекает первый луч в точке P' , которая и является изображением точки P . Проекция точки P на главную оптическую ось (точка Q) изобразится проекцией точки P' на главную оптическую ось (точка Q').

Расстояния фокальных точек от соответствующих главных точек называют **главными фокусными расстояниями** системы (так в «Оптике» Г.С. Ландсберга и справочниках, а в «Оптике» Д.В. Сивухина наоборот). Так как в дальнейшем удобнее помещать начало координат в фокальные точки, воспользуемся представлением Д.В. Сивухина. Фокусные расстояния в пространстве предметов (f) и пространстве изображений (f') определяются формулами

$$f = x_H - x_F = E/C, f' = x'_{H'} - x'_{F'} = E'/C' = (BC - AD)/(CE). \quad (1.30)$$

Формулы (1.21) — (1.23) можно упростить соответствующим выбором систем координат. Поместим **начала координатных систем** для пространства предметов в **передний фокус F** , а для пространства изображений — в **задний фокус F'** . Абсциссы в этих системах будем обозначать X и X' , а ординаты Y и Y' . Очевидно, что $Y = y$ и $Y' = y'$. По выбору систем $x_F = x'_{F'} = 0$. Тогда из (1.27) и (1.30) должно быть $A = D = 0$, $E/C = f$ и $B/C = f'$. Поэтому (1.21) и (1.22) переходят в

$$XX' = ff'; \quad (1.31)$$

$$Y/Y' = f/X = X'/f'. \quad (1.32)$$

Отношение α'/α (см. рис. 1.24) называют **угловым увеличением**. Сопряженные точки K и K' , лежащие на главной оптической оси, которые отображаются друг в друга с угловым увеличением $\alpha'/\alpha = +1$, называют **узловыми точками**. Они, так же как главные и фокальные, относятся к кардинальным точкам (на рис. 1.24 они не изображены, чтобы его не загромождать).

Отношение длины $\delta X'$ изображения бесконечно малого отрезка, параллельного главной оптической оси, к длине δX самого отрезка называют **осевым, или продольным, увеличением**. Используя (1.31) и учитывая направление отрезков, получаем

$$\delta X'/\delta X = -X'/X = -ff'/X^2 = -(X')^2/(ff'). \quad (1.33)$$

Сравнение этих формул с (1.32) показывает, что осевое увеличение в общем случае не равно поперечному увеличению.

Рассмотрим соединение двух центрированных систем, когда их оптические оси совпадают, а расстояние от заднего фокуса пер-

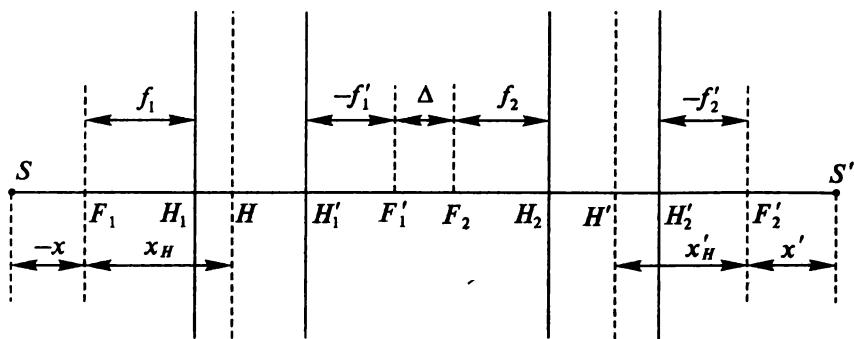


Рис. 1.25

вой до переднего фокуса второй равно Δ (это оптический интервал, который считается положительным, если свет идет от F'_1 к F_2) (рис. 1.25). Начало координат каждой из складываемых систем поместим в ее фокальные точки. Для всей системы возьмем начало координат в пространстве предметов всей системы в фокусе F_1 , а в пространстве изображений — в фокусе F'_2 .

Если X, Y — координаты предмета, а X_1, Y_1 — его изображения, даваемые первой из складываемых систем, то в соответствии с (1.31) и (1.32)

$$XX_1 = f_1 f'_1, \quad Y_1/Y = f'_1/X.$$

Принимаем полученное изображение за предмет для второй системы. Координаты этого предмета в координатной системе с началом в точке F_2 будут $X_2 = X_1 - \Delta$, $Y_2 = Y_1$. Если X', Y' — координаты изображения, даваемые второй системой (а, следовательно, и всей сложной системой) относительно начала F'_2 , то из (1.31) и (1.32)

$$X_2 X' = f_2 f'_2, \quad Y'/Y_2 = X'/f'_2.$$

Исключая промежуточные координаты X_1, Y_1, X_2, Y_2 , получаем

$$X' = f_2 f'_2 X / (f_1 f'_1 - \Delta \cdot X), \quad Y' = f_1 f'_1 Y / (f_1 f'_1 - \Delta \cdot X). \quad (1.34)$$

Это формулы коллинеарного соответствия, в которых

$$A = f_2 f'_2, \quad B = 0, \quad C = -\Delta, \quad D = f_1 f'_1, \quad E = f_1 f'_1. \quad (1.35)$$

Из (1.27) и (1.30) находим координаты фокальных точек и фокусные расстояния сложной системы

$$X_F = f_1 f'_1 / \Delta, \quad X'_F = -f_2 f'_2 / \Delta, \quad f = -f_1 f'_1 / \Delta, \quad f' = f_1 f'_2 / \Delta. \quad (1.36)$$

Координаты главных точек

$$X_H = X_F + f = f_1 (f_1' - f_2) / \Delta, \quad X_{H'} = X_F' + f' = f_2 (f_1' - f_2) / \Delta. \quad (1.37)$$

Следовательно,

$$X_H/X_{H'} = f_1/f_2. \quad (1.38)$$

Если оптический интервал Δ обращается в нуль, то фокусные расстояния f и f' обращаются в бесконечность, т. е. система будет телескопической.

Найдем фокусное расстояние f и положение главных плоскостей центрированной системы, состоящей из двух тонких линз с фокусными расстояниями f_1 и f_2 , расположенных на расстоянии l друг от друга (№ 1.32). Из (1.36) находим фокусное расстояние (абсолютное значение) системы

$$f = f_1 f_2 / (f_1 + f_2 - l). \quad (1.39)$$

Используя (1.37), (1.39) и рис. 1.25, находим расстояние до передней главной плоскости $H_1 H = X_H - f = f_1 l / (f_1 + f_2 - l)$ и задней главной плоскости $H_2 H' = X_{H'} - f_2' = -f_2 l / (f_1 + f_2 - l)$. Заметим, что положение главных плоскостей H_1 и H_2' — это положение линз.

Систему двух тонких линз можно заменить одной «эквивалентной» тонкой линзой, которая при любом положении объекта дает такое же по величине его изображение. «Эквивалентную» линзу следует поместить в передней главной плоскости системы двух линз. Фокусное расстояние определяется (1.39) (№ 1.33).

Для параксиального луча (см. рис. 1.23), выходящего из Q под углом α и приходящего в Q' под углом α' (первый угол положительный, а второй — отрицательный), имеем $h = -x\alpha = -x'\alpha'$. Следовательно, $x\alpha = x'\alpha'$. Используя (1.21) и (1.22), получаем

$$n u a = n' u' \alpha'. \quad (1.40)$$

Величину $n u a$ называют **инвариантом** Лагранжа—Гельмгольца, она не изменяется при преломлении параксиального луча на сферической поверхности. Соотношение (1.40) можно применять для сложной системы из сферических поверхностей.

Рассмотрим, как меняется **высота изображения** предмета, полученная с помощью линзы на экране, если расстояние от предмета до экрана остается постоянным. Высота первого изображения h_1 . После передвижения линзы к экрану высота изображения h_2 (рис. 1.26). Найдем высоту предмета h (№ 1.27). Используя (1.19) и условие задачи $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = L$ (постоянная), получаем $a_1 b_1 = a_2 b_2 = K$ (постоянная). Неизвестные величины удовлетворяют

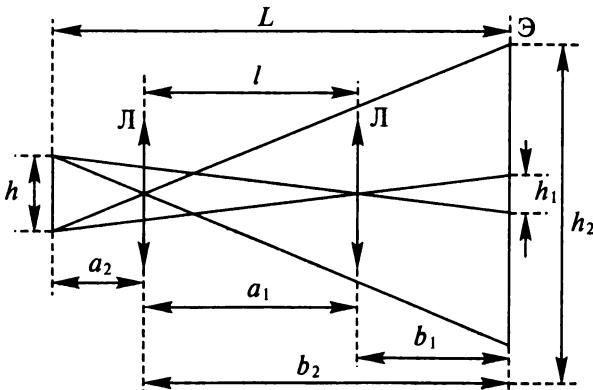


Рис. 1.26

одному и тому же уравнению, которое напишем для a_1 : $a_1^2 - La_1 + K = 0$. Отсюда $a_1 = b_2$ и $a_2 = b_1$. Используя это и соотношения из подобия треугольников: $a_1/b_1 = h/h_1$ и $a_2/b_2 = h/h_2$, получаем $h = (h_1 h_2)^{1/2}$.

Если бы в предыдущей задаче были заданы: расстояние между экраном и предметом $L = 50$ см и $l = 10$ см (см. рис. 1.26), то можно было бы вычислить фокусное расстояние f (№ 1.28). Из (1.19) получаем $1/a + 1/(L - a) = 1/(a + l) + 1/(L - a - l) = 1/f$. Отсюда $a = (L - l)/2$. Из (1.19) $f = a(L - a)/L = (L^2 - l^2)/(4L) = 12$ см.

Изображение предметов, получаемое с помощью тонкой линзы, всегда можно получить геометрическим построением, зная, что луч через центр линзы идет не преломляясь, а проходящий через фокус выходит параллельно главной оптической оси (или луч, идущий параллельно главной оптической оси, после преломления идет через фокус). Луч 1, падающий на линзу под углом, после преломления пройдет через точку в фокальной плоскости (ФП), в которую приходит луч 2, идущий параллельно первому через оптический центр линзы (рис. 1.27).

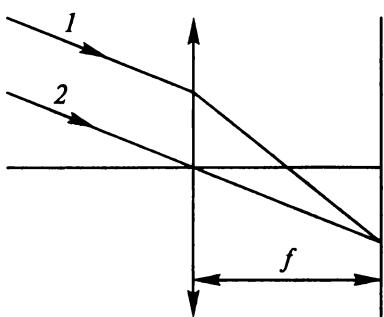
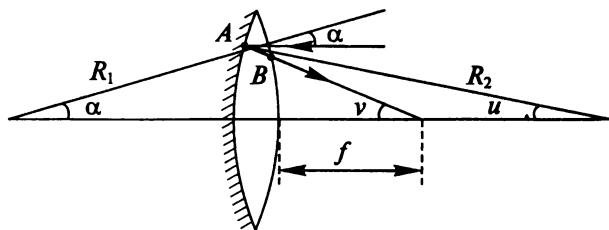
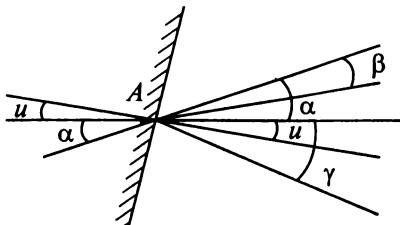


Рис. 1.27

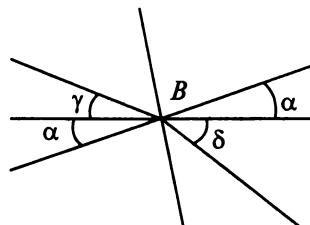
Рассмотрим ход лучей через двояковыпуклую тонкую линзу с одной посеребренной, т. е. отражающей, поверхностью (рис. 1.28, а). Найдем фо-



a



b



c

Рис. 1.28

кусное расстояние f полученного таким образом зеркала. Радиус кривизны чистой поверхности R_1 , радиус кривизны посеребренной поверхности R_2 , показатель преломления материала линзы n (№ 1.29). Луч идет справа параллельно главной оптической оси, на которой лежат центры окружностей, описывающих сечение поверхностей. Угол падения α и угол преломления β связаны соотношением $\alpha/\beta = n$. Удаления точек преломления и отражения от главной оптической оси в силу параксиальности примерно одинаковы, и поэтому $R_2u = R_1\alpha$ и $f = R_2u/\delta$. На рис. 1.28 *б* и *в* показаны углы при отражении в точке *A* и преломлении в точке *B*. Используя обозначения на рисунке, получаем

$$\begin{aligned}\gamma &= 2(u + \alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 2u + \alpha - \beta, \\ \delta + \alpha &= n(2u + 2\alpha - \beta) + n\alpha = \\ 2nu + 2n\alpha - \alpha &= 2n\alpha R_2/R_1 + 2n\alpha - \alpha, \\ \delta &= 2\alpha[n(R_1/R_2 + 1) - 1], \\ f &= (1/2)R_1R_2/[nR_1 + (n - 1)R_2].\end{aligned}\quad (1.41)$$

При решении этой задачи можно воспользоваться сложением оптических сил, учитывая (1.11), (1.15) и то, что свет через линзу проходит дважды. Из (1.15) и (1.6) для линзы имеем

$$1/f_1 = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2) = \Phi_n, \quad (1.42)$$

где Φ_1 — оптическая сила тонкой линзы.

Для зеркала из (1.11) имеем:

$$1/f_2 = 2/R_2 = \Phi_3. \quad (1.43)$$

Для системы имеем:

$$1/f = 2/f_1 + 1/f_2 = 2(n - 1)(1/R_1 + 1/R_2) + 2/R_2 = 2[(n - 1)/R_1 + n/R_2].$$

Видно, что последнее выражение совпадает с (1.20).

Из (1.20) для плосковыпуклых тонких линз находим в случае плоского зеркала ($R_2 = \infty$) $f_1 = (1/2)R_1/(n - 1)$, в случае плоской преломляющей поверхности ($R_1 = \infty$) $f_2 = (1/2)R_2/n$. При одинаковых R_1 и R_2 (№ 1.30)

$$f_1/f_2 = n/(n - 1).$$

Для рассматривания предметов (получения увеличенного изображения) используется одна собирательная линза (лупа) или система линз (микроскоп, зрительная труба). В астрономических зрительных трубах (телескопах) и биноклях (представляющих совмещение двух зрительных труб) используется также отражение от зеркал. Зрительная труба Кеплера в простейшем случае имеет две собирательные линзы (объектив и окуляр) и дает перевернутое изображение. В зрительной трубе Галилея (объектив — собирающая линза, а окуляр — рассеивающая) получается прямое изображение.

Фокусное расстояние объектива зрительной трубы (Кеплера) равно $f_1 = 60$ см, а окуляра — $f_2 = 4$ см. Показатель преломления стекла объектива и окуляра $n = 3/2$. Найдем, каким объективом из стекла того же сорта следует заменить объектив трубы, чтобы в нее можно было рассматривать удаленные предметы в воде (вода заполняет и внутреннюю часть трубы), если показатель преломления воды $n_1 = 4/3$. Найдем также увеличение трубы (№ 1.35). Используя (1.15), в случае погружения объектива в воду получаем

$$f_{11}/f_1 = (n - 1)/(n/n_1 - 1) = 4, \quad (1.44)$$

откуда фокусное расстояние $f_{11} = 240$ см. Оптическая сила в воде должна быть равна сумме оптической силы в воздухе и силы, теряемой за счет преломления $1/f_{\text{вод}} = 1/f_1 + 1/f_{11}$. В воде $f_{\text{вод}} = 48$ см. Для вычисления фокусного расстояния окуляра в воде воспользуемся (1.44) $f_{22} = 16$ см. Угловое увеличение для телескопической системы, которой является зрительная труба, $\alpha'/\alpha = f_{\text{вод}}/f_{22} = 48/16 = 3$.

Человек с нормальным зрением (глаз может аккомодироваться от 10 см до бесконечности) рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Галилея (в качестве объектива — собирающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = 40$ см, в качестве окуляра — рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_2 = -2$ см).

Найдем, при каких расстояниях L между объективом и окуляром человек увидит четкое изображение предмета (№ 1.36). Если глаз аккомодирован на бесконечность, то система телескопическая, и расстояние между объективом и окуляром $L = f_1 + f_2 = 38$ см. При смещении окуляра в сторону объектива на x расстояние изображения, даваемого объективом, от окуляра $a = -(|f_2| + x)$, а расстояние до изображения (при аккомодации на 10 см) $b = -10$ см. Учитывая, что для окуляра (рассевающей линзы) фокусное расстояние отрицательное, получаем из (1.19): $-1/10 - 1/(2 + x) = -1/2$. Откуда $x = 0,5$ см, $L = 37,5$ см.

Труба Галилея 9-кратного увеличения имеет длину 40 см. После того как объектив и окуляр трубы заменили собирающими линзами, труба стала давать то же увеличение. Найдем фокусные расстояния f_1' и f_2' этих линз, а также фокусные расстояния f_1 и f_2 объектива и окуляра трубы Галилея (№ 1.37). Для трубы Галилея в данном случае $|f_1| - |f_2| = 40$ см, угловое увеличение $\alpha_2/\alpha_1 = |f_1|/|f_2| = 9$. После замены на собирающие линзы имеем трубу Кеплера и, соответственно, $|f_1'| + |f_2'| = 40$ см, угловое увеличение $\alpha_2'/\alpha_1' = |f_1'|/|f_2'| = 9$. Решая эти уравнения, находим $f_1' = 36$ см, $f_2' = 4$ см, $f_1 = 45$ см, $f_2 = -5$ см.

Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $f = 50$ см установлена на бесконечность. Найдем, на какое расстояние Δl надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии 50 м (№ 1.38). Используя (1.19), получаем: при $a_1 = \infty$, $b_1 = f = 50$ см, при $a_2 = 50$ м, $b_2 = fa_2/(a_2 - f) = 50,5$ см. Чтобы рассмотреть изображение, надо окуляр отодвинуть на $\Delta l = b_2 - b_1 = 0,5$ см.

На систему линз, изображенную на рис. 1.29, падает слева параллельный пучок света. Найдем положение точки схождения этого пучка после прохождения системы (№ 1.39). После первой линзы пучок собирается в ее фокусе (точка O_1) на расстоянии $a_1 = 5$ см от

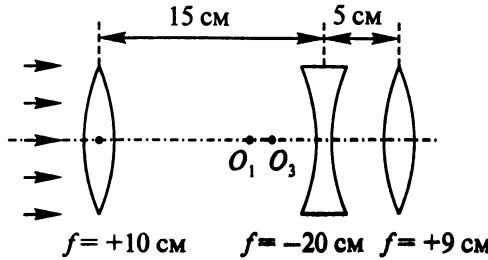


Рис. 1.29

второй линзы. Используя (1.19), получаем изображение от второй линзы на расстоянии $b_1 = -4$ см, так как $1/a_1 + 1/b_1 = -1/20$. Изображение находится в точке O_3 , которая является фокусом третьей линзы. Поэтому после прохождения третьей линзы получаем параллельный пучок. Точка схождения находится на бесконечности. Система телескопическая.

Найдем изображение точки, которая находится на расстоянии 10 см слева от крайней левой линзы **системы**, изображенной на

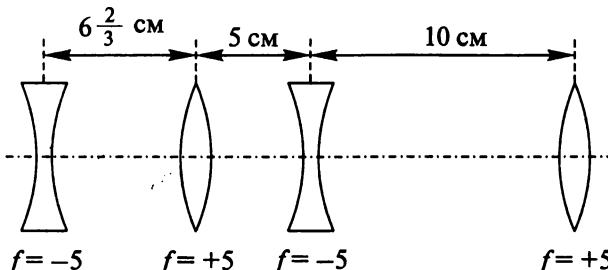


Рис. 1.30

рис. 1.30 (№ 1.40). Используя (1.19), для первой линзы имеем $1/10 + 1/b_1 = -1/5$. Отсюда $b_1 = -10/3$ см. Для следующей линзы $a_2 = 10$ см. Поэтому $b_2 = 10$ см. Это изображение находится в правом фокусе третьей линзы. За ней идет параллельный пучок, который четвертой линзой собирается в ее фокусе, т. е. на расстоянии 5 см справа от четвертой линзы.

Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $f_1 = 1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $f_2 = 3$ см, расстояние между ними $h = 20$ см. Найдем, на каком расстоянии l_1 должен находиться объект, чтобы окончательное изображение получилось на расстоянии $l_2 = 25$ см от глаза (что является оптимальным расстоянием ясного зрения), и какое при этом получится линейное увеличение α (№ 1.41). Используя (1.19) и обозначения на рис. 1.31, имеем $1/l_1 + 1/b = 1/f_1$, $1/(h - b) - 1/l_2 = 1/f_2$.

Исключив b , находим

$$l_1 = f_1 + f_1^2 (f_2 + l_2)/[(h - f_1)(f_2 + l_2) - f_2 l_2] = 1,0613 \text{ см.}$$

Линейное увеличение

$$\alpha = [l_2/(h - b)](b/l_1) = [h(f_1 + f_2) - f_2 l_2]/(f_2 l_1) = 150.$$

Рассмотрим **толстые линзы** как центрированные системы, состоящие из двух сферических границ раздела между средами с разными показателями преломления.

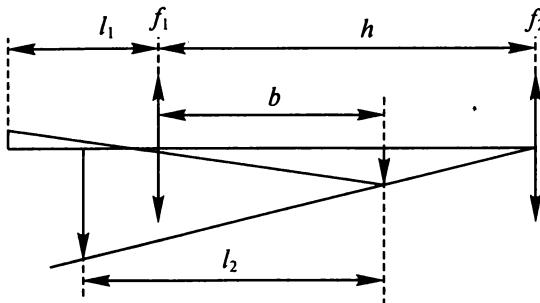


Рис. 1.31

Для сферической границы раздела коллинеарное соответствие выражается формулами (1.21) — (1.23). Из этих формул, а также из (1.29) находим, что координата главной плоскости для сферической поверхности раздела $x_H = (E - D)/C = 0$, т. е. совпадает с ее пересечением с оптической осью.

Для фокусных расстояний, отсчитываемых от главной плоскости, из (1.21) — (1.23) и (1.30) получаем

$$f = x_F - x_H = -E/C = -Rn/(n' - n); \\ f' = x_{F'} - x_{H'} = -E'/C' = R'n'/(n' - n). \quad (1.45)$$

Используя эти формулы, а также (1.36), можно рассчитать параметры любой центрированной системы. Сделаем это для толстой линзы с радиусами сферических поверхностей R_1 и R_2 и показателями преломления первой среды, линзы и второй среды соответственно n_1 , n_2 и n_3 . Из (1.45) получаем

$$f_1 = -R_1 n_1 / (n_2 - n_1), f_1' = R_1 n_2 / (n_2 - n_1); \quad (1.46)$$

$$f_2 = -R_2 n_2 / (n_3 - n_2), f_2' = R_2 n_3 / (n_3 - n_2). \quad (1.47)$$

Если толщина линзы l , то расстояние до передней фокальной точки F_2 второй поверхности от задней фокальной точки F_1' первой поверхности

$$\Delta = f_2 + l - f_1' = G / [(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)]; \quad (1.48)$$

$$G = l(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) + n_2 [R_2(n_1 - n_2) + R_1(n_2 - n_3)]. \quad (1.49)$$

Из (1.36) находим координаты фокальных точек (в пространстве предметов начало координат в F_1 , а в пространстве изображений — в F_2') (рис. 1.32)

$$x_F = -n_1 n_2 (n_2 - n_3) R_1^2 / [(n_1 - n_2) G];$$

$$x_F' = n_2 n_3 (n_1 - n_2) R_2^2 / [(n_2 - n_3) G]. \quad (1.50)$$

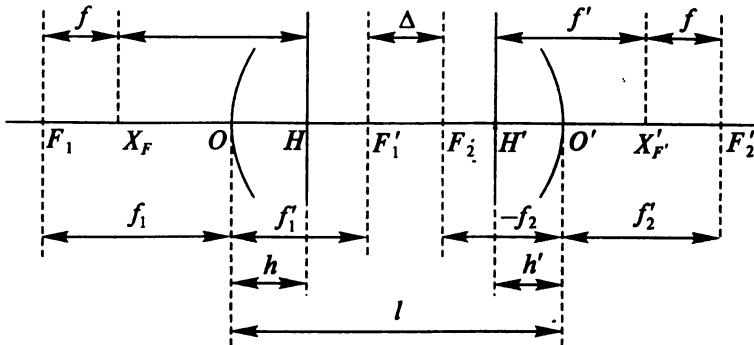


Рис. 1.32

Начало отсчета определяется из (1.46) и (1.47).

Из (1.36) фокусные расстояния толстой линзы

$$f = -n_1 n_2 R_1 R_2 / G, f' = n_2 n_3 R_1 R_2 / G. \quad (1.51)$$

Перепишем полученные формулы для случая линз из материала с показателем преломления $n_2 = n$, находящихся в воздухе $n_1 = n_3 = 1$.

Из (1.49) и (1.51) имеем

$$G = (n - 1)[(R_1 - R_2)n - l(n - 1)]; \quad (1.52)$$

$$f = -f' = -n R_1 R_2 / G. \quad (1.53)$$

Из (1.36), (1.37) и (1.51) получаем

$$x_F = n R_1^2 / G, x_F' = -n R_2^2 / G; \quad (1.54)$$

$$x_H = x_F + f, x_H' = x_F' + f'. \quad (1.55)$$

Расстояние главных плоскостей от поверхностей линзы

$$h = (n - 1) R_1 l / G, h' = (n - 1) R_2 l / G. \quad (1.56)$$

Применим полученные формулы для толстой линзы в виде **шара** с показателем преломления $n_2 = n$ в воздухе $n_1 = n_3 = 1$ (№ 1.42). Радиусы преломляющих поверхностей $R_1 = R$, $R_2 = -R$.

Из (1.46) положение F_1 определяем из переднего фокуса первой преломляющей поверхности (расстояние $f_1 = -R/(n - 1)$ от преломляющей поверхности) (рис. 1.33), а положение F_2' опреде-

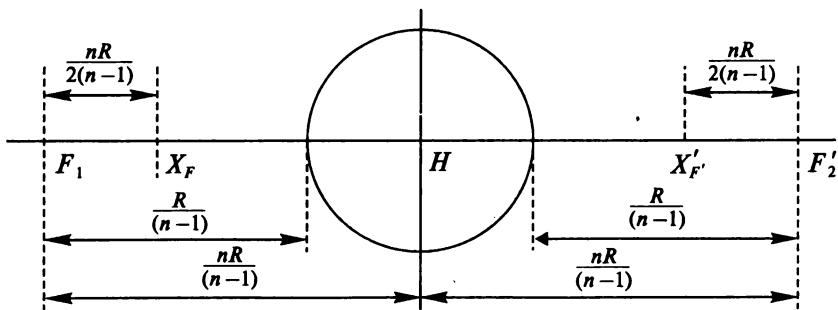


Рис. 1.33

ляем из заднего фокуса второй преломляющей поверхности (расстояние $f_2' = R/(n - 1)$ от преломляющей поверхности).

Из (1.50) координаты фокусов системы (толстой линзы в виде шара)

$$x_F = nR/[2(n - 1)], \quad x_F' = -nR/[2(n - 1)]. \quad (1.57)$$

Из (1.51) для фокуса системы

$$f = -f' = Rn/[2(n - 1)]. \quad (1.58)$$

Из (1.37) и (1.51) находим положение главных плоскостей

$$x_H = x_F + f = nR/(n - 1), \quad x_{H'} = x_F' + f' = -nR/(n - 1). \quad (1.59)$$

Вычисляя положение главной плоскости от преломляющей поверхности, получаем $nR/(n - 1) - R/(n - 1) = R$.

Таким образом, главная плоскость проходит через центр шара. Подставляя $n = 4/3$, находим $f = 2R$ для $n = 1,5$ имеем $f = 1,5R$.

Расстояние до фокуса от преломляющей поверхности $R/(n - 1) - Rn/[2(n - 1)] = R(2 - n)/[2(n - 1)]$. Видно, что фокальные точки находятся внутри шара при $n \geq 2$.

Найдем для стеклянного ($n = 1,5$) шара радиуса $R = 4$ см расстояние x' от центра шара до изображения предмета, который расположен в 6 см от поверхности шара, и увеличение изображения (№ 1.43). Ранее получено, что главная плоскость проходит через центр шара. Поэтому (рис. 1.34) расстояние от предмета до главной плоскости $x = 10$ см. Из предыдущего $f = 1,5R = 6$ см. Так как $1/x + 1/x' = 1/f$, то $x' = 15$ см, а $y'/y = x'/x = 1,5$.

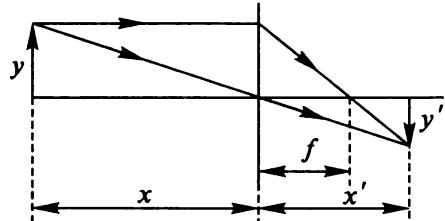


Рис. 1.34

Найдем фокусное расстояние f стеклянной ($n = 1,52$) **плоско-выпуклой линзы** (радиус $R = 26$ см, толщина $l = 3,04$ см) и положение объекта (S), находящегося на расстоянии 75 см от ближайшей поверхности линзы и расположенного со стороны: 1) выпуклой поверхности; 2) плоской поверхности (№ 1.44). В первом случае $R_1 = R = 26$ см, $R_2 = \infty$ (рис. 1.35), во втором $R_2 = -R = -26$ см, $R_1 = \infty$ (рис. 1.36). Из (1.52) и (1.53) в обоих случаях $f = R/(n - 1) = 50$ см. Расстояние главных плоскостей от поверхностей линзы из (1.56) в первом случае $h = 0$, $h' = -l/n = -3,04/1,52 = -2$ см. Обозначив расстояние от предмета до передней главной поверхности (поверхности линзы) x , которое по условию равно 75 см, а до задней главной поверхности x' , и используя $1/x + 1/x' = 1/f$, получаем $x' = 150$ см. От плоской поверхности линзы это расстояние равно 148 см. Во втором случае $h = 2$ см, и $h' = 0$. Расстояние от

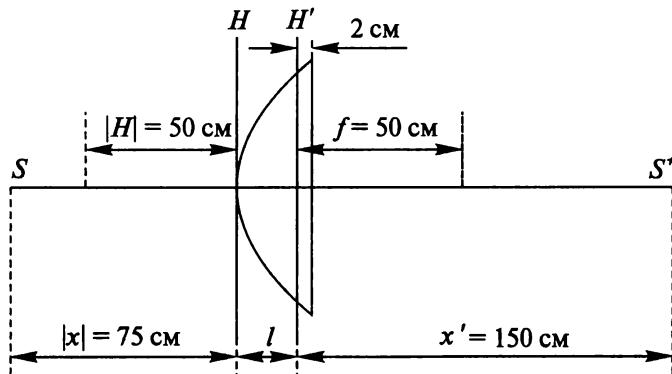


Рис. 1.35

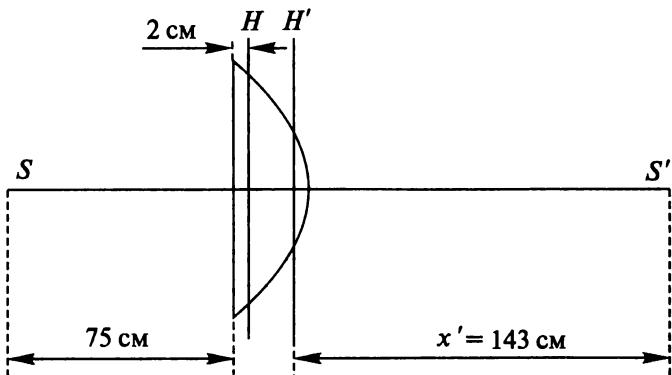


Рис. 1.36

предмета до передней главной поверхности равно теперь 77 см. Получаемое расстояние изображения равно 143 см.

Найдем фокусное расстояние f и положение главных плоскостей двояковыпуклой толстой линзы, для которой $n = 1,5$; $R_1 = 10 \text{ см}$; $R_2 = 4 \text{ см}$; $l = 2 \text{ см}$ (№ 1.45). Из (1.52) и (1.53) $f = 6 \text{ см}$. Из (1.56) главные плоскости лежат внутри линзы на расстояниях $h = 1 \text{ см}$ и $h' = 0,4 \text{ см}$ от передней и задней поверхностей линзы.

Определим положение главных плоскостей, фокальных точек и фокусное расстояние системы двух тонких линз, изображенной на рис. 1.37 (№ 1.46). Из (1.36) $f = 2,5 \text{ см}$. Из (1.37) $|x_H| = 7,5 \text{ см}$. На рис. 1.37 изображены для системы положения главных плоскостей H и H' и фокусов F и F' .

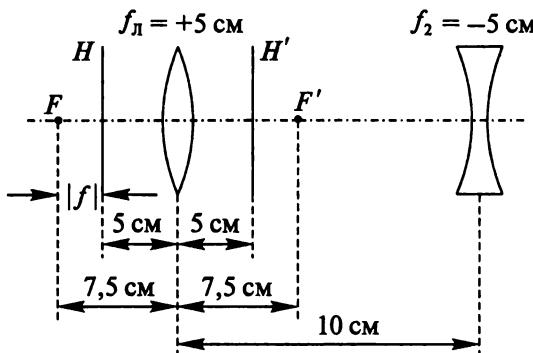


Рис. 1.37

Излучение света — это излучение энергии. Поток лучистой энергии Φ — это энергия, проходящая через площадку за единицу времени. Источники излучения, расположенные на расстояниях, больших по сравнению с их размером можно рассматривать как **точечные**. Такие источники характеризуются **силой света** (потоком лучистой энергии на единицу телесного угла)

$$J = d\Phi/d\Omega, \quad (1.60)$$

где телесный угол $d\Omega$ определяется расстоянием от источника R , площадкой dS , через которую идет поток энергии, и углом наклона θ ее нормали к направлению вектора потока

$$d\Omega = dS \cos\theta / R^2. \quad (1.61)$$

В случае точечного источника

$$d\Phi = J dS \cos\theta / R^2. \quad (1.62)$$

Величина J зависит от направления и называется **интенсивностью лучистого потока**, или **лучистостью излучения**. Если интенсивность не зависит от направления, то из (1.60)

$$\Phi = 4\pi J. \quad (1.63)$$

Для характеристики протяженных источников вводится величина, называемая **яркостью** (или поверхностной яркостью) (B). Для потока энергии с площадки dS в направлении, которое составляет угол θ с нормалью к площадке, в телесный угол $d\Omega$ получаем

$$d\Phi = B \cos \theta dS d\Omega. \quad (1.64)$$

Для источников, у которых яркость подчиняется **закону Ламберта** (B не зависит от направления — идеально рассеивающие), в результате интегрирования по углам в полупространстве получаем величину, которая называется **светимостью** (K) и представляет суммарный поток лучистой энергии с единицы площади источника в телесный угол 2π (при энергетическом рассмотрении употребляется термин **энергетическая светимость**, или **излучательность**)

$$K = B \int \cos \theta d\Omega = 2\pi B \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi B. \quad (1.65)$$

Так как $d\Omega = d\theta \sin \theta d\phi$, где θ изменяется от 0 до $\pi/2$, а ϕ , от которого в силу симметрии относительно нормали к поверхности нет зависимости, — от 0 до 2π .

Для характеристики светового поля используется также понятие **интенсивность светового (лучистого) потока** (I) — световой поток, протекающий через **видимую величину площадки** ($dS \cos \theta$, где θ — угол между направлением потока и нормалью к площадке) внутрь единичного телесного угла

$$I = d\Phi / (dS \cos \theta d\Omega). \quad (1.66)$$

Интенсивность светового потока играет для характеристики светового поля ту же роль, что яркость для характеристики светящейся поверхности (1.64). Поэтому ее иногда называют **яркостью светового потока**.

Падающий на поверхность (площадью dS) некоторого тела световой поток создает ее **освещенность**

$$E = d\Phi / dS. \quad (1.67)$$

В случае точечного источника (1.62)

$$E = J \cos\theta / R^2. \quad (1.68)$$

В случае протяженного источника надо интегрировать поток по площадкам источника света.

Для измерения введенных фотометрических понятий введены специальные эталоны и единицы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Величина	Обозначение	Единица световая	Символ	Единица энергетическая
Световой поток	Φ	люмен	лм	Ватт
Сила света	J	кандела	кд	Ватт/стериан
Яркость	B	кандела/м ²	кд/м ²	Ватт/(стериан·м ²)
Светимость	K	люмен/м ²	лм/м ²	Ватт/м ²
Освещенность	E	люкс	лк	Ватт/м ²

Переходной множитель, определяющий в ваттах мощность, необходимую для получения светового ощущения, вызываемого потоком 1 люмен, измеренный для определенного интервала длин волн, соответствующего максимуму чувствительности глаза, а именно $\lambda = 555$ нм, называется **механическим эквивалентом света** (A):

$$A = 0,00160 \text{ Вт/лм}. \quad (1.69)$$

Найдем освещенность E площадки, если **источником** света служит **бесконечная плоскость**, параллельная этой площадке, причем **поверхностная яркость** источника B всюду одинакова и не зависит от направления (№ 1.47). Освещенность находим интегрированием по всей площади источника. Этот интеграл в точности равен интегралу (1.65) для излучения с площадки в полупространство (светимости). Таким образом, $E = \pi B$. То же получаем для горизонтальной площадки, освещаемой небесной полусферой, если считать яркость неба повсюду равномерной и равной B (№ 1.48). Для ламбертовых источников, представляющих круг и полусферу с одинаковой яркостью, светимость одна и та же (сияющийся диск неотличим от светящейся полусфера).

Считая, что лист бумаги рассеивает свет по закону Ламберта, найдем, какую освещенность E следует создать на **белом листе бумаги** с коэффициентом отражения k , чтобы его яркость была B (№ 1.49). Поток света с единицы площади поверхности должен быть равен светимости (1.65) $kE = \pi B$. Отсюда находим необходимую освещенность.

Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, составляет приблизительно $E_0 = 10^5$ лк. Найдем, какова освещенность E изображения Солнца, даваемого свободной от аберраций (искажений) линзой диаметром $D = 5$ см и фокусным расстоянием $f = 10$ см, если угловой диаметр Солнца $\alpha = 30'$ (№ 1.50). Линза собирает весь идущий через нее поток на площади изображения. Изображение далекого предмета получается в фокальной плоскости линзы. Его диаметр αf . Поэтому $E = E_0 D^2 / (\alpha f)^2 = 3,28 \cdot 10^8$ лк.

Отметим, что освещенность определяется величиной S , которая называется **светосилой линзы** (объектива)

$$S = (D/f)^2. \quad (1.70)$$

Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, $E \approx 10^5$ лк. Считая, что излучение Солнца подчиняется закону Ламберта, и пренебрегая поглощением света в атмосфере, найдем **яркость Солнца**, если известно, что радиус земной орбиты $R = 1,5 \cdot 10^8$ км, а диаметр Солнца $D = 1,4 \cdot 10^6$ км (№ 1.51). С единицы поверхности Солнца излучается (1.65) поток, равный πB . Со всей поверхности Солнца $4\pi (D/2)^2$ поток создает на поверхности (на радиусе Земли R) освещенность

$$E = \pi B 4\pi (D/2)^2 / (4\pi R^2). \quad (1.71)$$

$$\text{Отсюда } B = (4/\pi)(R/D)^2 E = 1,5 \cdot 10^9 \text{ кд/м}^2.$$

Найдем освещенность поверхности Земли у экватора светом, отраженным Луной в полночь в полнолуние, считая, что Солнце является ламбертовым источником света, а Луна — ламбертовым отражателем. Яркость Солнца $B_C = 1,5 \cdot 10^9$ кд/м², радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^8$ м, расстояние от Солнца до Земли (и Луны) $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, расстояние от Луны до Земли $R_1 = 3,8 \cdot 10^8$ м, видимый радиус $R_L = 1,7 \cdot 10^6$ м, коэффициент отражения лунной поверхности $k = 7\%$ (№ 1.52). На рис. 1.38 схематично изображены Солнце, Земля и Луна. Освещенность от Солнца на расстояниях до Земли и Луны определяется (1.70) $E = \pi B_C R_C^2 / R_0^2$. Для сферической поверхности Луны эта величина будет меняться как косинус угла (θ) от направления на Солнце. Отраженный свет идет к Земле в телесном угле $\Omega = \pi R_3^2 / R_0^2$. Здесь R_3 — радиус Земли. Учитывая зависимость отраженного потока от угла θ , для потока Φ в телесный угол Ω можно написать

$$\Phi = k\pi B_C R_C^2 R_L^2 2\pi \Omega \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta / R_0^2.$$

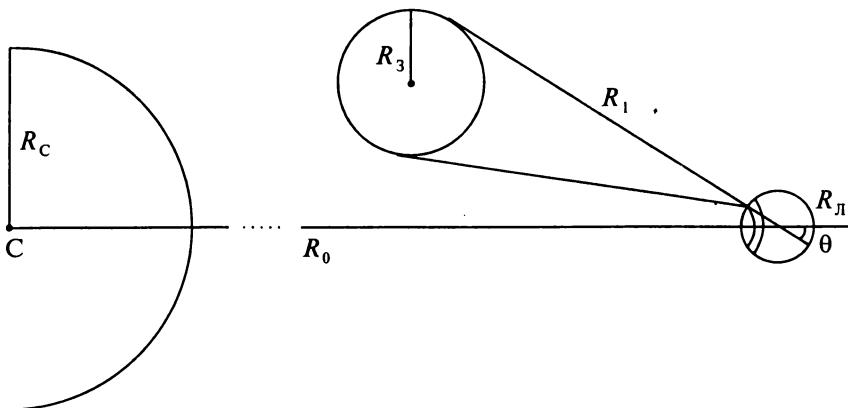


Рис. 1.38

Чтобы получить освещенность на экваторе Земли этот поток надо разделить на πR_3^2 . В результате имеем:

$$E = (2/3)k\pi B_C R_C^2 R_L^2 / (R_0^2 R_1^2).$$

Тепловой фотоприемник (рис. 1.39) представляет собой полую камеру площадью внутренней поверхности $S = 2 \text{ см}^2$, имеющую небольшое отверстие площадью $S_1 = 1 \text{ мм}^2$. Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает (коэффициент поглощения $k = 0,01$), а остальную часть рассеивает. В этих условиях внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям излучение. Найдем, какая часть светового потока Φ/Φ_0 (где Φ_0 — световой поток, попадающий на входное отверстие камеры) выходит через отверстие обратно (№ 1.54). При равновесии должен быть энергетический баланс. Входящая в единицу времени энергия $\Phi_0 S_1$ должна равняться сумме выходящей ΦS_1 и поглощенной $k\Phi(S - S_1)/S_1$. Откуда $\Phi/\Phi_0 = 1/[1 + k(S - S_1)/S_1] = 1/3$.

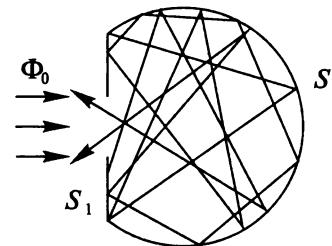


Рис. 1.39

Действительное изображение, сформированное собирающей линзой, рассматривается сначала непосредственно, а затем на **белом экране**. Найдем, как зависит в обоих случаях яркость изображения от диаметра линзы (№ 1.56). В первом случае изображение — это просто источник. В соответствии с (1.64) яркость опре-

деляется потоком излучения в единицу телесного угла. При увеличении диаметра линзы увеличивается и поток, и телесный угол, а поток в единицу телесного угла (яркость) не меняется. Во втором случае источником является изображение на экране, размер которого при увеличении диаметра линзы не меняется, а освещенность и, соответственно, яркость увеличивается пропорционально квадрату диаметра линзы.

Найдем яркость изображения Луны, наблюдаемой в телескоп с объективом диаметром 75 мм, при увеличениях: 1) 20-кратном; 2) 25-кратном; 3) 50-кратном. Яркость Луны, видимой невооруженным глазом, принимаем за единицу. Диаметр зрачка глаза считаем равным 3 мм (№ 1.57). Яркость изображения в данном случае — это освещенность получаемого изображения. На рис. 1.40 показан ход лучей без телескопа (а) и с телескопом (б). Обозначая освещенность от Луны на поверхности Земли E_0 , для освещенности изображения в глазу (без телескопа) получаем $E_0 \pi d_3^2 / (4S_0)$, где S_0 — площадь изображения в глазу. Для увеличения в телескопе (см. рис. 1.40, б) имеем

$$\Gamma = \alpha/\beta = f_2/f_1 = D/d. \quad (1.72)$$

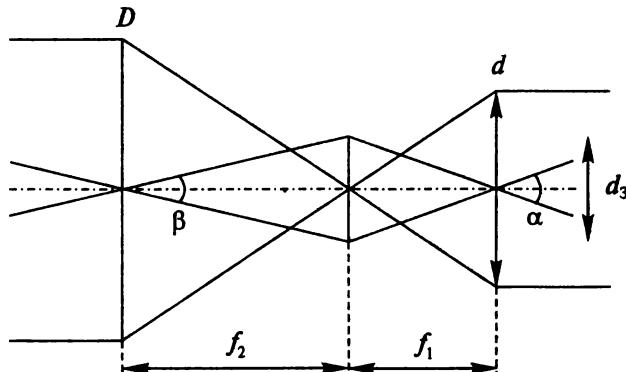
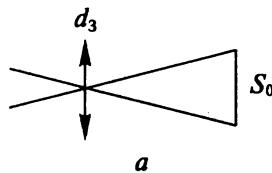


Рис. 1.40

Отношение площадей изображения в глазу после телескопа S и без телескопа S_0 равно $S/S_0 = (\alpha/\beta)^2$.

Диаметр потока, выходящего из телескопа, $d = D/\Gamma$ оказывается меньше диаметра зрачка $d_3 = 3$ мм только в том случае, когда $\Gamma = 50$ ($d = 1,5$ мм).

Пока $d > d_3$, в глаз попадает поток, проходящий через $D_3 < D$. Освещенность изображения при этом $E_0\pi D_3^2/(4S) = E_0\pi d_3^2/(4S_0)$ (в соответствии с (1.72)), т. е. не меняется. При $d = d_3/2$ поток уменьшается в 4 раза. Во столько же раз уменьшается яркость изображения.

Зная, что диаметр объектива астрономического телескопа $D = 18$ см, коэффициент пропускания всей оптической системы телескопа равен 0,5, и что невооруженный глаз различает звезды шестой величины, а возрастанию звездной величины на единицу соответствует уменьшение ее видимой яркости приблизительно в 2,5 раза, найдем: 1) величину наиболее слабых звезд, которые могут быть видимы с помощью этого телескопа; 2) наивыгоднейшее увеличение для наблюдения звезд; 3) величину звезд, которые будут видимы при увеличении в 10 раз, если диаметр зрачка глаза равен $d_3 = 3$ мм (№ 1.59). Предполагаем, что размер изображений для звезд, которые можно считать точечными источниками, определяется дифракцией и не меняется. Освещенность изображений будет определяться только приходящим потоком света. Диаметр окуляра d должен быть не меньше диаметра зрачка d_3 , чтобы в зрачок попадал весь поток, входящий в объектив (в действительности из-за потерь — только половина). Для максимального (наивыгоднейшего) увеличения диаметр окуляра должен равняться диаметру зрачка. Такое увеличение называется **нормальным**. В данном случае оно 60-кратное. Обозначая поток без телескопа, непосредственно в глаз, Φ_0 , с учетом потерь получаем для потока в глаз после телескопа

$$\Phi/\Phi_0 = 0,5\Gamma^2 = 0,5(D/d_3)^2.$$

Изменение звездной величины яркости звезд

$$\Delta N = \lg(0,5\Gamma^2)/\lg 2,5.$$

Для максимального увеличения $\Delta N_{\max} \approx 8$, для 10-кратного $\Delta N_{10} \approx 4$. Таким образом, если невооруженным глазом можно увидеть звезды шестой величины, то при 10-кратном увеличении звезды — 10-й величины, а при нормальном — звезды 14-й величины.

Для широких пучков света можно устраниТЬ аберрацию. Однако резкое изображение небольших участков поверхности σ , расположенных на оптической оси перпендикулярно к ней, будет при одинаковом увеличении всех участков σ . Это удовлетворяется при выполнении **условия синусов Аббе**

$$n_1 \sin u_1 / (n_2 \sin u_2) = y_2 / y_1 = V, \quad (1.73)$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления среды со стороны объекта и изображения; $V = y_2 / y_1$ — увеличение, которое должно, следовательно, оставаться постоянным для любой пары сопряженных лучей, исходящих из точки, лежащей на оси, и ограниченных углами u_1 и u_2 с осью системы (рис. 1.41).

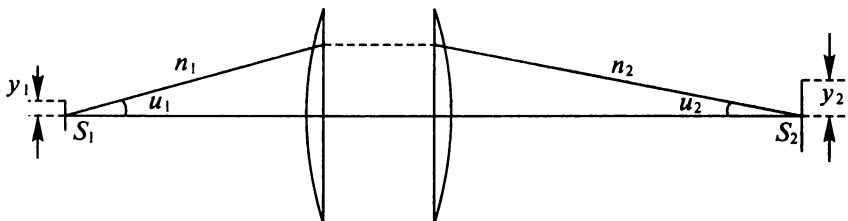


Рис. 1.41

Точки S_1 и S_2 при выполнении (1.73) называют **апланатическими**. Угол u_i может принимать большие значения, т. е. апертура пучка не ограничена, но величина y_i предполагается малой. При малой апертуре (1.73) переходит в (1.40). Условие синусов Аббе — это следствие физического требования равенства оптических длин по разным направлениям от каждой точки предмета до соответствующей точки изображения (одинаковость фаз волн, о которых будет сказано далее).

2. Формулы Френеля. Световое давление

История физики складывалась так, что в силу практических потребностей больших успехов в первую очередь добилась механика. Полученные на основе наблюдений и опытов законы позволили создать хорошее теоретическое представление о механических процессах и методы их расчета. Оптика по практическим потребностям и количеству наблюдений шла вслед за механикой. Естественно, что при описании света использовались представления о частицах и волнах. Было установлено, что свет является поперечной волной, может распространяться в вакууме и имеет конечную скорость. Развитие науки об электричестве и магнетизме, приведшее к созданию стройной теории, в том числе и для электромагнитных волн, подтверждавшейся хорошим совпадением с наблюдениями и опытами, дало возможность применить ее к световым волнам. Оказалось, что скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью света, что волны поперечные, что соотношение между показателем преломления и диэлектрической постоянной соответствует наблюданной величине. При использовании представления о свете, как об электромагнитной волне, хорошо описываются интенсивности волн при отражении и преломлении, а также расщепление спектральных линий (эффект Зеемана) и вращение плоскости поляризации света в магнитном поле.

Рассмотрим прохождение света сквозь границу двух сред, считая, что свет представляет собой электромагнитную волну, удовлетворяющую уравнениям Максвелла (3, с. 465). Если на границу двух изотропных однородных диэлектриков падает плоская электромагнитная волна, то, как показывает опыт, от границы раздела диэлектриков будут распространяться две плоские волны — отраженная и преломленная. В электромагнитной волне вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} перпендикулярен вектору напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Распространение электромагнитной волны описывается вектором Пойнтинга (3, с. 482), указывающим направление вектора плотности потока энергии \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = c [\mathbf{E}, \mathbf{H}] / (4\pi). \quad (2.1)$$

Векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{S} взаимно перпендикулярны и составляют правовинтовую систему (вектор \mathbf{S} направлен в сторону движения правого винта при повороте от \mathbf{E} к \mathbf{H}).

Для плоской волны связь между абсолютными значениями E и H , меняющимися в одинаковой фазе, определяется диэлектриче-

ской проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ среды (3, с. 481)

$$(\epsilon)^{1/2} E = (\mu)^{1/2} H. \quad (2.2)$$

В оптической части спектра для прозрачных диэлектриков $\mu \approx 1$ и в этом случае $(\epsilon)^{1/2} E = H$.

Отмечая касательные к границе сред (обозначены цифрами 1 и 2) компоненты векторов E и H индексом t , а нормальные — индексом n , из уравнений Максвелла (3, с. 465) в любой момент времени для любой точки границы раздела получаем

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad H_{t1} = H_{t2}, \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}, \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}. \quad (2.3)$$

В первой среде результатирующее значение напряженности поля определяется суммой полей падающей и отраженной волн, а во второй — полем проходящей волны.

Отмечая падающую волну индексом e , отраженную — индексом r и преломленную — индексом d , обозначая соответствующие радиусы-векторы r (от некоторого произвольного начала координат), частоты ω , фазовые скорости v , показатели преломления граничащих сред n_1 и n_2 , значения волновых векторов k и амплитуды напряженности электрического поля E , получаем выражения для волн

$$\begin{aligned} E_e \exp[i(\omega_e t - k_e r)], \quad k_e = \omega_e/v_e = \omega_e n_1/c; \\ E_r \exp[i(\omega_r t - k_r r)], \quad k_r = \omega_r/v_r = \omega_r n_1/c; \\ E_d \exp[i(\omega_d t - k_d r)], \quad k_d = \omega_d/v_d = \omega_d n_2/c. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что постоянство скалярного произведения r на каждый k определяет плоскость, перпендикулярную вектору k .

Из граничного условия (2.3) следует:

$$E_e \exp[i(\omega_e t - k_e r)] + E_r \exp[i(\omega_r t - k_r r)] = E_d \exp[i(\omega_d t - k_d r)].$$

Для выполнения этого соотношения в любой момент времени t в любой точке границы раздела при неподвижных средах необходимо, чтобы во всех трех показателях экспонент были одинаковы коэффициенты при t . Поэтому

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d = \omega. \quad (2.5)$$

Направим ось z перпендикулярно границе раздела. Углы, которые волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн составляют с осью z , которые называются *углами падения, отражения и преломления*, обозначим соответственно ϕ , ϕ' и ψ . Границные условия должны выполняться сразу во всех точках границы

цы раздела (плоскости $x0y$). Это возможно только тогда, когда зависимость E , от координат точки в плоскости $x0y$ у всех трех волн одинакова, т. е. равны составляющие волновых векторов вдоль x и y

$$k_{rx} = k_{dx} = k_{ex} = \omega n_1 \sin\varphi / c, \quad k_{ry} = k_{dy} = k_{ey} = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, волновые векторы лежат в одной плоскости, проходящей через нормаль к границе и \mathbf{k}_e , которая называется **плоскостью падения**. Используя (2.4), можно записать

$$k_r^2 = k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = \omega^2 n_1^2 / c^2, \quad k_d^2 = k_{dx}^2 + k_{dy}^2 = \omega^2 n_2^2 / c^2.$$

Для составляющих волнового вектора нормальных к границе раздела, учитывая направление относительно z и (2.6), получаем

$$k_{rz} = -k_{ez} = -\omega n_1 \cos\varphi / c, \quad k_{dz} = (\omega / c)(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\varphi)^{1/2}. \quad (2.7)$$

На рис. 2.1 показано расположение волновых векторов и векторов напряженности электрического и магнитного полей в падающей, отраженной и преломленной волнах. Плоскость $x0y$ — плоская граница между средами. Плоскость $z0x$ — плоскость падения. Ось $0z$ направлена вниз из первой среды во вторую. Ось $0y$ направлена к читателю. Волновые векторы \mathbf{k} лежат в плоскости падения. Их греческие компоненты равны нулю. Для иксовых компонент можно написать $k_{ex} = k_s \sin\varphi$, $k_{rx} = k_s \sin\varphi'$, $k_{dx} = k_s \sin\psi$. Из (2.4) — (2.6), вводя обозначения $v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$, находим

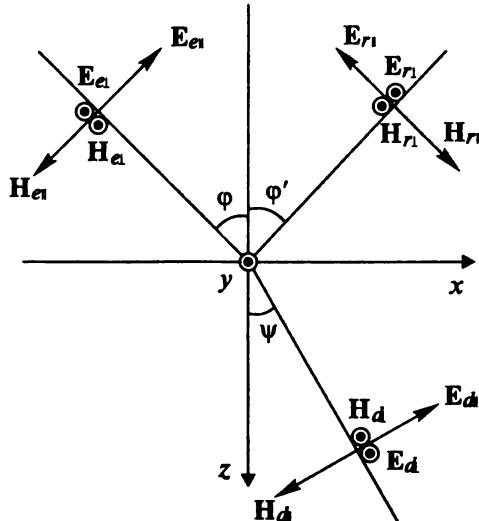


Рис. 2.1

$$\sin\phi/v_1 = \sin\phi'/v_1 = \sin\psi/v_2.$$

Из первой части равенства следует $\phi = \phi'$. Это — закон отражения.

Для преломленной волны имеем (закон преломления)

$$\sin\psi/\sin\phi = n_1/n_2 = (\epsilon_1/\epsilon_2)^{1/2} (\mu_1/\mu_2)^{1/2} = 1/n = v_2/v_1, \quad (2.8)$$

где n — относительный показатель преломления; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, связанная с показателем преломления.

Получилось, что геометрические законы отражения и преломления следуют из электромагнитной теории света и выполняются независимо от векторных амплитуд и фаз, с которыми связано направление колебаний в поперечной волне (поляризации). Амплитуды отраженной и преломленной волн зависят от поляризации падающей волны. Векторные амплитуды всегда можно представить в виде суммы составляющих, лежащих в плоскости падения и перпендикулярных к ней. На рис. 2.1 приведены компоненты вектора напряженности электрического поля и вектора магнитного поля, лежащие в плоскости падения (отмечены индексом \parallel) и перпендикулярные к ней (отмеченные индексом \perp). Направления векторов выбраны так, чтобы в соответствии с (2.1) они составляли правую тройку с вектором плотности потока энергии. Уточняя (2.2), можно написать

$$(\epsilon)^{1/2} E_{\parallel} = (\mu)^{1/2} H_{\perp}, \quad (\epsilon)^{1/2} E_{\perp} = (\mu)^{1/2} H_{\parallel}. \quad (2.9)$$

Пользуясь рис. 2.1 и (2.9), запишем выражения для проекций компонент

$$\begin{aligned} E_{ex} &= E_{e\parallel} \cos\phi, \quad E_{ey} = E_{e\perp}, \quad E_{ez} = -E_{e\parallel} \sin\phi, \\ H_{ex} &= -H_{e\parallel} \cos\phi = -(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{e\perp} \cos\phi, \\ H_{ey} &= H_{e\perp} = (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{e\parallel}, \\ H_{ez} &= H_{e\parallel} \sin\phi = (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{e\perp} \sin\phi; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_{rx} &= -E_{r\parallel} \cos\phi, \quad E_{ry} = E_{r\perp}, \quad E_{rz} = -E_{r\parallel} \sin\phi, \\ H_{rx} &= H_{r\parallel} \cos\phi = (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{r\perp} \cos\phi, \\ H_{ry} &= H_{r\perp} = (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{r\parallel}, \\ H_{rz} &= H_{r\parallel} \sin\phi = (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{r\perp} \sin\phi; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} E_{dx} &= E_{d\parallel} \cos\psi, \quad E_{dy} = E_{d\perp}, \quad E_{dz} = -E_{d\parallel} \sin\psi, \\ H_{dx} &= -H_{d\parallel} \cos\psi = -(\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_{d\perp} \cos\psi, \\ H_{dy} &= H_{d\perp} = (\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_{d\parallel}, \\ H_{dz} &= H_{d\parallel} \sin\psi = (\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_{d\perp} \sin\psi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В соответствии с (2.3) граничные условия

$$\begin{aligned} E_{ex} + E_{rx} &= E_{dx}, \quad E_{ey} + E_{ry} = E_{dy}, \\ H_{ex} + H_{rx} &= H_{dx}, \quad H_{ey} + H_{ry} = H_{dy}, \\ \epsilon_1 E_{ez} + \epsilon_1 E_{rz} &= \epsilon_2 E_{dz}, \quad \mu_1 H_{ez} + \mu_1 H_{rz} = \mu_2 H_{dz}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} E_d \cos\varphi - E_d \cos\varphi &= E_d \cos\psi, \\ (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_d + (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_d &= (\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_d, \\ E_{e\perp} + E_{r\perp} &= E_{d\perp}, \\ -(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{er\perp} \cos\varphi + (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_{r\perp} \cos\varphi &= -(\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_{d\perp} \cos\psi, \\ \epsilon_1 E_d \sin\varphi + \epsilon_1 E_d \sin\varphi &= \epsilon_2 E_d \sin\psi, \\ \mu_1 H_d \sin\varphi - \mu_1 H_d \sin\varphi &= \mu_2 H_d \sin\psi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В последнее соотношение подставляем (2.9):

$$(\epsilon_1 \mu_1)^{1/2} E_{e\perp} \sin\varphi - (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2} E_{r\perp} \sin\varphi = (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2} E_{d\perp} \sin\psi. \quad (2.15)$$

Используя геометрические законы отражения и вводя обозначение $n_{21} = (\epsilon_2/\epsilon_1)^{1/2}(\mu_1/\mu_2)^{1/2}$, находим амплитудные коэффициенты отражения R_{\parallel} и пропускания T_{\parallel} (№ 2.5):

$$R_{\parallel} = E_d/E_d = (n_{21} \cos\varphi - \cos\psi)/(\cos\psi + n_{21} \cos\varphi); \quad (2.16)$$

$$T_{\parallel} = E_d/E_d = 2\cos\varphi/(\cos\psi + n_{21} \cos\varphi); \quad (2.17)$$

$$R_{\perp} = E_{r\perp}/E_{e\perp} = (\cos\varphi - n_{21} \cos\psi)/(\cos\varphi + n_{21} \cos\psi); \quad (2.18)$$

$$T_{\perp} = E_{d\perp}/E_{e\perp} = 2\cos\varphi/(\cos\varphi + n_{21} \cos\psi). \quad (2.19)$$

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ имеем:

$$R_{\parallel} = (\sin 2\varphi - \sin 2\psi)/(\sin 2\varphi + \sin 2\psi) = \operatorname{tg}(\varphi - \psi)/\operatorname{tg}(\varphi + \psi); \quad (2.16a)$$

$$T_{\parallel} = 2\sin\psi\cos\varphi/[\sin(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \psi)]; \quad (2.17a)$$

$$R_{\perp} = -\sin(\varphi - \psi)/\sin(\varphi + \psi); \quad (2.18a)$$

$$T_{\perp} = 2\sin\psi\cos\varphi/\sin(\varphi + \psi). \quad (2.19a)$$

Соотношения (2.16a) – (2.19a) называются формулами Френеля. Аналогичным образом можно получить соотношения для магнитных векторов.

Фазы волн совпадают, если амплитуды имеют одинаковый знак, и отличаются на π , если амплитуды имеют противоположные знаки. Из (2.11) и (2.14) видно, что фаза преломленной волны совпадает с фазой падающей при любых углах. Зависимость фаз

отраженных волн от углов и показателей преломления приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Фазы отраженных волн

Углы и показатели преломления	$(\varphi + \psi) < \pi/2$	$(\varphi + \psi) > \pi/2$
$\varphi > \psi$, т. е. $n_2 > n_1$, или $n > 1$	фаза $E_{r\perp}$ противоположна фазе $E_{e\perp}$; фаза $E_{r\parallel}$ противоположна фазе $E_{e\parallel}$	фаза $E_{r\perp}$ противоположна фазе $E_{e\perp}$; фаза $E_{r\parallel}$ совпадает с фазой $E_{e\parallel}$
$\varphi < \psi$, т. е. $n_2 < n_1$, или $n < 1$	фаза $E_{r\perp}$ совпадает с фазой $E_{e\perp}$; фаза $E_{r\parallel}$ совпадает с фазой $E_{e\parallel}$	фаза $E_{r\perp}$ совпадает с фазой $E_{e\perp}$; фаза $E_{r\parallel}$ противоположна фазе $E_{e\parallel}$

Энергия волны, падающей на единицу площади поверхности границы раздела в единицу времени, есть проекция вектора Пойнгтинга (2.1) на нормаль к границе раздела. Усредняя энергию за период $2\pi/\omega$, находим

$$W_e = cn_1(E_{e\perp}^2 + E_{e\parallel}^2)\cos\varphi / (8\pi). \quad (2.20)$$

Соответственно для отраженной и преломленной волн

$$W_r = cn_1(E_{r\perp}^2 + E_{r\parallel}^2)\cos\varphi / (8\pi); \quad (2.21)$$

$$W_d = cn_2(E_{d\perp}^2 + E_{d\parallel}^2)\cos\psi / (8\pi). \quad (2.22)$$

Отношение отраженного потока к падающему для случаев, представленных на рис. 2.1, определяется квадратами амплитудных коэффициентов отражения и называется **коэффициентом отражения**

$$R_\perp^2 = [\sin(\varphi - \psi) / \sin(\varphi + \psi)]^2; \quad (2.23)$$

$$R_\parallel^2 = [\operatorname{tg}(\varphi - \psi) / \operatorname{tg}(\varphi + \psi)]^2. \quad (2.24)$$

Проверим с помощью формул Френеля, что поток энергии падающей волны через границу раздела сред равен сумме потоков энергии преломленной и отраженной волн через ту же границу (№ 2.1). Сделаем это для случая, когда \mathbf{E} лежит в плоскости падения. Из первого и второго уравнений (2.14) и (2.16а) имеем

$$1 - R_\parallel = T_\parallel \cos\psi / \cos\varphi, \quad 1 + R_\parallel = nT_\parallel. \quad (2.25)$$

Из третьего и четвертого уравнений (2.14) и (2.18а) получаем

$$1 + R_\perp = T_\perp, \quad 1 - R_\perp = T_\perp n \cos\psi / \cos\varphi. \quad (2.26)$$

Из (2.25)

$$1 - R_{\parallel}^2 = T_{\parallel}^2 n \cos \psi / \cos \varphi. \quad (2.27)$$

Из (2.26)

$$1 - R_{\perp}^2 = T_{\perp}^2 n \cos \psi / \cos \varphi. \quad (2.28)$$

Для потоков энергии из (2.1) и (2.2), используя относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, в случае равенства потока энергии падающей волны потокам энергии отраженной и преломленной волн имеем

$$\cos \varphi E_{e\parallel}^2 = \cos \varphi E_{r\parallel}^2 + n \cos \psi E_{d\parallel}^2. \quad (2.29)$$

Вводя амплитудные коэффициенты отражения и преломления, находим

$$1 = R_{\parallel}^2 + T_{\parallel}^2 n \cos \psi / \cos \varphi. \quad (2.30)$$

Видно, что правая часть равна 1 при использовании равенства (2.27), которое получено из формул Френеля.

В случае **нормального падения** волны ($\varphi = \psi = 0$) из (2.25) и (2.26), находим

$$1 - R_{\parallel} = T_{\parallel}, \quad 1 + R_{\parallel} = nT_{\parallel}, \quad 1 + R_{\perp} = T_{\perp}, \quad 1 - R_{\perp} = nT_{\perp}. \quad (2.31)$$

Отсюда получаем

$$R_{\perp} = -R_{\parallel} = -(n - 1)/(n + 1) = -(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1); \quad (2.32)$$

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = 2/(n + 1). \quad (2.33)$$

Результат подчеркивает, что нет смысла говорить о плоскости падения.

Из (2.30), вводя **коэффициенты отражения** ρ и **преломления** (пропускания) τ (по энергии), получаем (№ 2.2, № 2.3)

$$1 = \rho + \tau, \quad (2.34)$$

где

$$\rho = R_{\parallel}^2 = (n - 1)^2 / (n + 1)^2; \quad (2.35)$$

$$\tau = nT_{\parallel}^2 = 4n / (n + 1)^2. \quad (2.36)$$

Коэффициент отражения при нормальном падении (ρ) называется **отражательной способностью**. Для воды ($n = 1,33$) он равен 0,02, для стекла ($n = 1,5$) равен 0,04. Таким образом, ни вода, ни

стекло не являются хорошими зеркалами. Для зеркал используются металлические покрытия. Коэффициент пропускания при нормальном падении (τ) называется **поверхностной прозрачностью**.

Найдем, сколько процентов светового потока теряется на **отражение в призматическом бинокле**, схема которого дана на рис. 2.2, если показатель преломления стекла линз и призм равен $n = 1,5$ (№ 2.4). На рисунке цифрами отмечены места, где имеются потери на отражение (внутри призм потеря нет). Из (2.36) находим долю прошедшего света $\tau = 4 \cdot 1,5 / 2,5 = 0,96$. Поэтому потери в процентах равны $100 (1 - 0,96^8) = 28\%$.

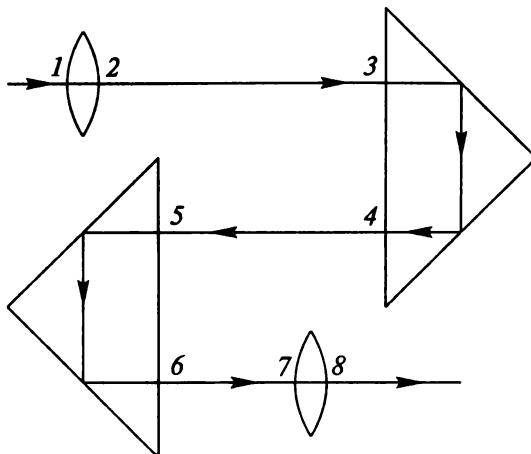


Рис. 2.2

При **скользящем падении** ($\varphi = \pi/2$), как следует из соотношений (2.23) и (2.24) $R_{\parallel}^2 = R_{\perp}^2 = 1$, происходит полное отражение света.

Плоскость, в которой лежит напряженность электрического поля (E), называется **плоскостью колебаний** и по новой терминологии **плоскостью поляризации** (раньше так называлась плоскость, перпендикулярная к этой, в которой лежит вектор напряженности магнитного поля). Если направление плоскости поляризации при распространении света не меняется, то свет называется **линейно поляризованным**. В общем случае направление плоскости поляризации падающего света составляет некоторый угол с плоскостью падения, который называется **азимутом колебания (поляризации)** падающей волны. При этом имеются компоненты E в плоскости падения и перпендикулярной к ней. Ранее (см. табл. 2.1) было получено, что на границе фаза волн не меняется или меняется на π .

В результате поляризация остается линейной (№ 2.6). Исключением является только случай полного внутреннего отражения (1.2). При этом из (2.7) следует, что $k_{d\omega}$ — мнимая величина. В таком случае вместо преломленной волны в (2.4) получаем колебания, затухающие с увеличением расстояния (z) от границы. Характерным параметром является глубина проникновения во вторую среду, которая из (2.7) равна

$$h = (c / \omega) \cdot 1 / (n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Найдем азимут колебаний преломленной волны β и азимут колебаний отраженной волны γ , если азимут падающей волны α , а угол падения φ (№ 2.7). Обозначая $\operatorname{tg}\alpha = E_{e\perp}/E_{e\parallel}$, $\operatorname{tg}\beta = E_{d\perp}/E_{d\parallel}$, $\operatorname{tg}\gamma = E_{r\perp}/E_{r\parallel}$, из (2.16а) — (2.19а) получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \cos(\varphi - \psi)\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\gamma = -\cos(\varphi - \psi)\operatorname{tg}\alpha/\cos(\varphi + \psi).$$

Из (2.16а) для отраженной волны получаем, что составляющая E в плоскости падения равна нулю при $\varphi + \psi = \pi/2$, т. е. отраженный свет линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Используя (1.1), находим связь угла падения в этом случае φ_B с показателем преломления

$$\operatorname{tg}\varphi_B = n = n_2/n_1. \quad (2.38)$$

Угол φ_B называется углом Брюстера. Заметим, что угол между преломленной и отраженной волнами равен $\pi/2$. Отсюда также следует, что в отраженной волне, которая возникает в результате колебаний в отражающей среде, а они лежат в плоскости, перпендикулярной преломленной волне, могут быть поперечные колебания, перпендикулярные плоскости падения.

Формулы Френеля хорошо описывают отражение и преломление света на чистой границе раздела двух прозрачных диэлектриков. Небольшие отступления от формул Френеля наблюдаются лишь при отражении под углом Брюстера и вблизи от него. Коэффициент отражения (2.16а) не обращается в нуль ни для какого угла падения, хотя при угле Брюстера он очень мал. Это связано с тем, что изменение диэлектрической постоянной, а, следовательно, и показателя преломления, на границе диэлектриков происходит плавно, а не скачком. В результате возникает вращение плоскости поляризации — эллиптическая поляризация отраженного света. Выполняется и обратное заключение — при наличии эллиптической поляризации существует компонента вектора поляризации, лежащая в плоскости падения. Это получается при

разложении эллиптической поляризации на компоненты (№ 2.21).

Интенсивностью света, или интенсивностью колебаний, называют среднюю величину (например, по периоду колебаний) квадрата вектора напряженности электрического поля

$$I = \langle E^2 \rangle. \quad (2.39)$$

Можно ввести интенсивности, соответствующие компонентам E_{\perp} и E_{\parallel} ,

$$I_{\perp} = \langle E_{\perp}^2 \rangle, \quad I_{\parallel} = \langle E_{\parallel}^2 \rangle. \quad (2.40)$$

В естественном (неполяризованном) свете $I_{\perp} = I_{\parallel}$. Для поляризованного света введена характеристика — **степень поляризации**

$$\Delta = (I_{\perp} - I_{\parallel}) / (I_{\perp} + I_{\parallel}). \quad (2.41)$$

Найдем угол полной поляризации для света, отраженного от стекла с показателем преломления $n = 1,5$ (угол Брюстера), и степень поляризации преломленного света Δ (№ 2.8). Из (2.35) находим $\varphi = 56^{\circ}19'$. Используя, что при отсутствии продольной составляющей в отраженной волне из (2.16а) следует: $\varphi + \psi = \pi/2$, из (2.17а) и (2.19а) находим $T_{\parallel} = 1/n$, $T_{\perp} = 2/(n^2 + 1)$. Предполагая, что на стекло падает естественный свет, в котором $I_{\text{eff}} = I_{e\perp}$, для степени поляризации в преломленной волне получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= (T_{\perp}^2 - T_{\parallel}^2) / (T_{\perp}^2 + T_{\parallel}^2) = \\ &= [4/(n^2 + 1)^2 - 1/n^2] / [4/(n^2 + 1)^2 + 1/n^2] = -0,08. \end{aligned}$$

Из соотношения (2.38) получаем для **максимальной поляризации** отраженного луча, падающего на поверхность кристалла каменной соли ($n = 1,544$) естественного света (№ 2.9) угол Брюстера $\varphi_b = 57^{\circ}05'$.

Для нахождения **степени поляризации** отраженного от поверхности стекла ($n = 1,53$) естественного света ($I_{\text{eff}} = I_{e\perp}$) (№ 2.10), из (2.41), (2.23) и (2.24) имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= (R_{\perp}^2 - R_{\parallel}^2) / (R_{\perp}^2 + R_{\parallel}^2) = \\ &= [\cos^2(\varphi - \psi) - \cos^2(\varphi + \psi)] / [\cos^2(\varphi - \psi) + \cos^2(\varphi + \psi)]. \end{aligned}$$

Для углов φ , равных 0° , 45° , $56^{\circ}51'$ и 90° , получаем Δ соответственно равными 0 ; $0,82$; $1,0$; 0 .

Найдем **интенсивность** I , отраженного света, приняв за единицу интенсивность I_e падающего под углом Брюстера на поверхность

стекла ($n = 1,5$) естественного света (№ 2.11). Учитывая, что падающий свет естественный $E_{e\perp}^2 = E_{e\parallel}^2$, и при угле Брюстера $E_4 = 0$, получаем

$$I_r / I_e = (E_{r\perp}^2 + E_{r\parallel}^2) / (E_{e\perp}^2 + E_{e\parallel}^2) = (1/2)E_{r\perp}^2 / E_{e\perp}^2 = (1/2)R_1^2.$$

Используя (2.23) и (2.38), определяем

$$I_r / I_e = (1/2) [(n^2 - 1)/(n^2 + 1)]^2 = 0,074.$$

Найдем, при каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы (рис. 2.3) с преломляющим углом $\alpha = 60^\circ$, проходит через нее без потерь, т. е. не претерпевает отражений на поверхностях призмы (№ 2.12). Отраженного света не будет, если электрический вектор лежит в плоскости падения, а угол падения (также и для обратного хода) равен углу Брюстера. Ход лучей симметричен. Из равностороннего треугольника, (2.38) и $\phi + \psi = \pi/2$ получаем $\psi_1 = \psi_2 = \alpha/2 = 30^\circ$ и $n = 1/\tan 30^\circ = 1,732$.

Если задан показатель преломления, а требуется найти преломляющий угол призмы (№ 2.13), то можно воспользоваться теми же формулами.

Из (2.23) и (2.24) следует, что коэффициент отражения не меняется, если ход луча меняется на противоположный (№ 2.14).

Рассмотрим отражение от плоской поверхности среды, на которую нанесен слой прозрачного диэлектрика толщиной l с показателем преломления n . Найдем связь между комплексными амплитудами E_e и E_r , падающей и отраженной волн при падении, близком к нормальному (прямому), когда теряется смысл плоскости падения, и можно для любой поляризации пользоваться, например, формулами для волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения. Считаем заданными коэффициенты Френеля (2.18а) и (2.19а) на верхней и нижней границах слоя R_1 и R_2 , T_1 и T_2 (№ 2.15). Из (2.4) следует, что разность фаз волны после отражения от нижней границы слоя изменяется на

$$\delta = k_2 l n = (2\pi/\lambda_0) 2 l n. \quad (2.42)$$

На рис. 2.4 показана картина отражения для удобства под небольшим углом и написаны результирующие коэффициенты. Коэффициенты для обратного движения отмечены штрихом. Из

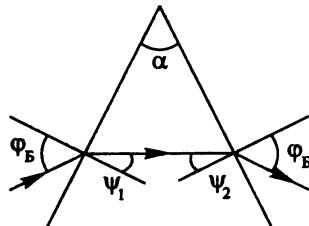


Рис. 2.3

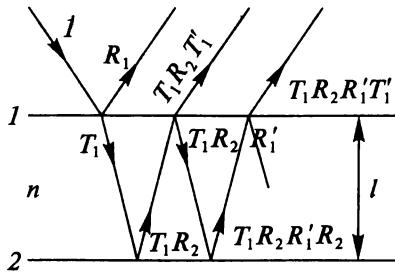


Рис. 2.4

(2.18а) следует, что при замене ψ на φ меняется знак коэффициента, т. е.

$$R = -R'. \quad (2.43)$$

Из (2.19а) и (2.18а)

$$TT' + R^2 = 1. \quad (2.44)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} E_r / E_e &= R_1 + T_1 T_1' R_2 e^{-i\delta} + \\ &+ T_1 T_1' R_1' R_2^2 e^{-2i\delta} + T_1 T_1' R_1'^2 R_2^3 e^{-3i\delta} + \dots \end{aligned}$$

Откуда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$E_r / E_e = R_1 + T_1 T_1' R_2 e^{-i\delta} / (1 - R_1' R_2 e^{-i\delta}).$$

Используя (2.36) и (2.37), получаем

$$E_r / E_e = (R_1 + R_2 e^{-i\delta}) / (1 + R_1 R_2 e^{-i\delta}). \quad (2.45)$$

Это выражение обращается в нуль, если действительная и мнимая части числителя обращаются в нуль: $R_1 + R_2 \cos(2nk_z l) = 0$, $\sin(2nk_z l) = 0$. Из последнего следует: $2nk_z l = m\pi$ или

$$l = m\lambda_0/(4n) = m\lambda/4, \quad .46$$

где m — целое число; λ — длина волны в пленке.

Тогда из первого соотношения получаем $R_1 + (-1)^m R_2 = 0$. Если m — нечетное, то $R_1 = R_2$, если m — четное, то $R_1 = -R_2$. Обозначая показатель преломления над пленкой n_1 , а под пленкой — n_2 , получаем из (2.32)

$$R_1 = (n - n_1)/(n + n_1), \quad R_2 = (n_2 - n)/(n_1 - n).$$

Если $R_1 = -R_2$, то $n(n_2 - n_1) = 0$. Откуда имеем, либо $n = 0$, либо $n_1 = n_2$. И то, и другое не представляет интереса. Поэтому m должно быть нечетным, а следовательно, $R_1 = R_2$. Откуда

$$n = (n_1 n_2)^{1/2}. \quad (2.47)$$

Таким образом, отражение отсутствует (**просветленная оптика**), если толщина пленки $l = m\lambda/4$, где m — нечетное, и выполняется (2.47) (№ 3.15).

При отражении от **идеального зеркала** может меняться только фаза, но не амплитуда волны. Поэтому для идеального зеркала, покрытого сверху слоем прозрачного диэлектрика, $R_2 = e^{ia}$. Вводя

обозначение (2.42), получим из (2.45) $E_r/E_e = (R_1 + e^{-i(\delta - \alpha)})/(1 + R_1e^{-i(\delta - \alpha)})$. Отсюда $|E_r| = |E_e|$ (№ 2.16).

Найдем коэффициенты отражения ρ и пропускания τ для совокупности двух параллельных полупрозрачных **плоскостей** (первая имеет ρ_1 и τ_1 , а вторая: ρ_2 и τ_2), предполагая, что степень монохроматичности падающего света невелика, так что интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивностей света (№ 2.17). Учитывая многократные отражения и пропускания на границе, можно записать

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1 + \rho_2 \tau_1^2 + \rho_2 \tau_1^2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \rho_1 + \rho_2 \tau_1^2 / (1 - \rho_1 \rho_2); \\ \tau &= \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_2 \rho_1 \rho_2 + \tau_1 \tau_2 (\rho_1 \rho_2)^2 + \dots = \tau_1 \tau_2 / (1 - \rho_1 \rho_2).\end{aligned}$$

Из (2.27) имеем $\rho_1 + \tau_1 = 1$, $\rho_2 + \tau_2 = 1$. Поэтому получаем $\rho = (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_1 \rho_2)/(1 - \rho_1 \rho_2)$, $\tau = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)/(1 - \rho_1 \rho_2)$. (2.48)

Рассмотрим теперь совокупность из **нескольких** параллельных полупрозрачных **плоскостей** с одинаковыми значениями ρ и τ (№ 2.18). Индексом будем обозначать число таких плоскостей. Тогда для двух плоскостей из (2.48) находим: $\rho_2 = 2\rho/(1 + \rho)$, $\tau_2 = (1 - \rho)/(1 + \rho)$. Для трех плоскостей, подставляя это в (2.48), получаем: $\rho_3 = 3\rho/(1 + 2\rho)$, $\tau_3 = (1 - \rho)/(1 + 2\rho)$. Для четырех плоскостей, соответственно имеем: $\rho_4 = 4\rho/(1 + 3\rho)$, $\tau_4 = (1 - \rho)/(1 + 3\rho)$. Предполагаем зависимость

$$\rho_m = m\rho/[1 + (m - 1)\rho]. \quad (2.49)$$

Подставляя это в (2.48), получаем

$$\rho_{m+1} = (\rho_m + \rho - 2\rho_m \rho)/(1 - \rho_m \rho) = (m + 1)\rho/(1 + m\rho).$$

Это доказывает (2.49). Аналогичным образом предполагаем и доказываем следующее:

$$\tau_m = (1 - \rho)/[1 + (m - 1)\rho]. \quad (2.50)$$

Заметим, что на каждой поверхности показатель преломления меняется. За 1 следует n , затем 1, потом n и т. д.

Найдем коэффициенты отражения и пропускания для **стопы Столетова**, состоящей из N плоскопараллельных стеклянных пластинок, при падении на нее под углом Брюстера света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения, и построим график их зависимости от N для показателя преломления $n = 1,5$ (№ 2.19). Из (2.23) $\rho = R_\perp^2 = [\sin(\phi - \psi)/\sin(\phi + \psi)]^2 = 0,148$. Пояснение связи

<i>m</i>	<i>N</i>
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1

Рис. 2.5

Что $m = 2N$. Подставляя это в (2.49) и (2.50), получаем

2 $\rho_N = 2N/(2N + 5,76)$, $\tau_N = 5,76/(2N + 5,76)$.

Найдем степень поляризации преломленного луча по выходе его из стеклянной пластиинки с показателем преломления n для заданного угла падения (ϕ) естественного света (№ 2.20). Используем (2.17а) и (2.19а) на верхней границе; на нижней границе — те же формулы с переставленными ϕ и ψ . Из (2.40) и (2.41), учитывая, что падающий свет естественный, получаем

$$\Delta = [\cos^4(\psi - \phi) - 1]/[\cos^4(\psi - \phi) + 1].$$

По заданным ϕ и n с помощью (1.1) находим ψ и затем Δ .

Выясним, будет ли существовать угол полной поляризации при отражении линейно поляризованного света от границы, если магнитные проницаемости μ_1 и μ_2 граничащих сред отличны от единицы (№ 2.22). Из уравнений (2.14) и (2.15)

$$1 - R_{\parallel} = T_{\parallel} \cos\psi/\cos\phi, \quad 1 + R_{\parallel} = n_{21} T_{\parallel}; \quad (2.51)$$

$$1 + R_{\perp} = T_{\perp}, \quad 1 - R_{\perp} = T_{\perp} n_{21} \cos\psi/\cos\phi;$$

$$1 + R_{\parallel} = T_{\parallel} (\epsilon_2/\epsilon_1) (\sin\psi/\sin\phi), \quad 1 - R_{\perp} = T_{\perp} n_{21} \sin\psi/\sin\phi.$$

Напомним, что

$$n = (\epsilon_2/\epsilon_1)^{1/2} (\mu_1/\mu_2)^{1/2}. \quad (2.52)$$

Для полной поляризации в направлении, перпендикулярном плоскости падения, должно быть $R_{\parallel} = 0$. Для нахождения угла имеем

$$1 = (\epsilon_2/\epsilon_1) (\sin\psi/\sin\phi)/n_{21}, \quad \cos\psi/\cos\phi = n_{21},$$

Исключая ψ , получаем: $\operatorname{tg}^2\phi = (n_{21} - 1)/(1 - n_{21})$. Окончательно для угла Брюстера имеем

$$\operatorname{tg}\phi_B = (\epsilon_2/\epsilon_1)^{1/2} (\epsilon_2\mu_1 - \epsilon_1\mu_2)^{1/2}/(\epsilon_2\mu_2 - \epsilon_1\mu_1)^{1/2}$$

Возможна полная поляризация в плоскости падения. Считая в уравнениях (2.51) $R_{\perp} = 0$, получаем другой угол Брюстера

$$\operatorname{tg}\phi'_B = (\mu_2/\mu_1)^{1/2} (\epsilon_2\mu_1 - \epsilon_1\mu_2)^{1/2}/(\epsilon_1\mu_1 - \epsilon_2\mu_2)^{1/2}.$$

Оба случая взаимно исключают друг друга, так как знаки подкоренных выражений противоположны.

Найдем отражательную способность среды, для которой $\epsilon = \mu$ (№ 2.23). В уравнениях (2.51) считаем $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, $\epsilon_2 = \mu_2$. Из (2.52) $n_{21} = 1$. Решая уравнения, полученные из (2.51), находим $R_{\parallel} = R_{\perp} = 0$.

Для получения эллиптической или круговой поляризации можно использовать полное внутреннее отражение. При полном внутреннем отражении волновой вектор в (2.7) становится минимальным, что приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды во второй среде. Заметим, что при комплексном волновом векторе в (2.4) получаем особый тип волн, у которых плоскости одинаковых амплитуд и плоскости одинаковых фаз взаимно перпендикулярны. Волны называют однородными, если волновые векторы вещественные, и неоднородными в случае комплексных волновых векторов. При полном внутреннем отражении из (2.7) и соотношения $k_d = k_d \cos \psi$ получаем

$$\cos \psi = i(n_1/n_2)(\sin^2 \phi - n_2^2/n_1^2)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Из (2.16а) — (2.19а) записываем формулы Френеля в удобном виде

$$R_{\parallel} = E_{r\parallel}/E_{e\parallel} = [n^2 \cos \phi + i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}]/[n^2 \cos \phi - i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}]; \quad (2.54)$$

$$T_{\parallel} = E_{d\parallel}/E_{e\parallel} = 2n \cos \phi / [n^2 \cos \phi - i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}]; \quad (2.55)$$

$$R_{\perp} = E_{r\perp}/E_{e\perp} = [\cos \phi + i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}] / [\cos \phi - i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}]; \quad (2.56)$$

$$T_{\perp} = E_{d\perp}/E_{e\perp} = 2 \cos \phi / [\cos \phi - i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}]. \quad (2.57)$$

Из этих формул следует, что $|E_{r\parallel}| = |E_{e\parallel}|$ и $|E_{d\parallel}| = |E_{e\parallel}|$, т. е. отражение полное. Во второй среде неоднородная волна не исчезает, а присутствует в виде некоторого неизменного среднего потока энергии параллельно границе.

При полном отражении фаза волны испытывает скачок. Для волн, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, используя (2.56) можно записать

$$\cos \phi + i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2} = A \exp(i\delta_{\perp}/2), \quad (2.58)$$

где A и δ_{\perp} — величины вещественные, $n = n_2/n_1$.

Тогда из (2.56)

$$\cos \phi - i(\sin^2 \phi - n^2)^{1/2} = A \exp(-i\delta_{\perp}/2), \quad R_{\perp} = \exp(i\delta_{\perp}).$$

Таким образом, δ_{\perp} — скачок фазы при полном отражении из (2.58)

$$A \cos \delta_{\perp}/2 = \cos \phi, \quad A \sin \delta_{\perp}/2 = (\sin^2 \phi - n^2)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}(\delta_{\perp}/2) = (\sin^2\phi - n^2)^{1/2}/\cos\phi. \quad (2.59)$$

Используя (2.54), аналогичным образом получаем скачок фазы для волны, поляризованной в плоскости падения,

$$\operatorname{tg}(\delta_{\parallel}/2) = (\sin^2\phi - n^2)^{1/2}/(n^2\cos\phi). \quad (2.60)$$

Если в падающей волне нет разности фаз между компонентами в плоскости поляризации и перпендикулярной, то после отражения возникает разность

$$\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}. \quad (2.61)$$

Из (2.59) и (2.60) находим

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \cos\phi(\sin^2\phi - n^2)^{1/2}/\sin^2\phi. \quad (2.62)$$

Это выражение обращается в нуль при угле полного внутреннего отражения, который определяется из (2.7): $\sin\phi_{no} = n$, и при $\phi = \pi/2$. Видно, что $\operatorname{tg}\delta/2 > 0$, и δ меняется от 0 до π . В соответствии с (2.61) колебания в плоскости падения опережают колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Вращение плоскости поляризации происходит влево. Поляризация называется левой эллиптической (или круговой при равенстве амплитуд) (№ 2.25). Если в падающей волне разность фаз между компонентами равна π (колебания в противофазе), то в отраженной волне поляризация будет правой эллиптической (или круговой). Для падающего линейно поляризованного света с азимутом $+45^\circ$ этого не будет (№ 2.28).

Найдем максимальный сдвиг при изменении ϕ между ϕ_{no} и $\pi/2$ (№ 2.26). Для нахождения максимума (2.62) введем обозначение $\sin^2\phi = x$, $\operatorname{tg}\delta/2 = y(x)$. Тогда $y = [(1/x - 1)(1 - n^2/x)]^{1/2}$,

$$\begin{aligned} dy/dx &= (1/2)[-(1 - n^2/x)/x^2 + \\ &+ (1/x - 1)n^2/x^2]/[(1/x - 1)(1 - n^2/x)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Приравнивая это нулю, находим

$$x = 2n^2/(1 + n^2), \quad \cos^2\phi_m = (1 - n^2)/(1 + n^2).$$

Для того чтобы получить $\delta_m = \pi/2$, нужно $n = n_2/n_1 = \sqrt{2} - 1 = 0,414$ или при $n_2 = 1$ должно быть $n_1 = 2,41$ (№ 2.27). Только для алмаза $n_1 = 2,42$, а для других сред меньше. В таком случае можно использовать два последовательных отражения, как это происходит в параллелепипеде Френеля (рис. 2.6) для получения эллиптической и круговой поляризации.

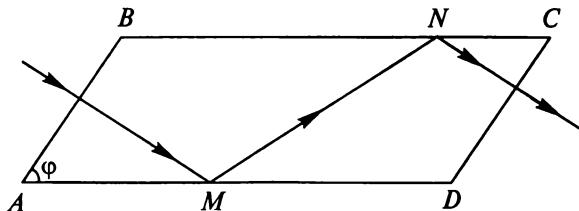


Рис. 2.6

Найдем преломляющий угол φ параллелепипеда Френеля, выполненного из стекла с показателем преломления $n_1 = 1,7$ (№ 2.24). При каждом отражении (см. рис. 2.6) $\delta = \pi/4$. Используя (2.62), $n = 1/n_1$ и связь тангенса с косинусом, получаем для нахождения φ

$$\sin^4\varphi - (1 + 1/n_1^2) \cos^2(\pi/8) \sin^2\varphi + (1/n_1^2) \cos^2(\pi/8) = 0.$$

Откуда $\varphi_1 = 60^\circ 32'$, $\varphi_2 = 38^\circ 42'$.

Падающий на тела свет оказывает на них механическое давление. Это предполагалось в корпускулярной теории Ньютона. Давлением света Кеплер объяснял направление кометных хвостов (от Солнца). Экспериментально это впервые измерил П.Н. Лебедев. Электромагнитная теория света в соответствии с наличием потока энергии и соответствующего импульса позволила провести расчеты. Представление света в виде фотонов, обладающих энергией и импульсом, дает возможность вычислить давление света на тела.

Исходя из представления о том, что свет состоит из фотонов, каждый из которых обладает импульсом

$$p_\phi = h\nu/c, \quad (2.63)$$

где h — постоянная Планка; ν — частота света; $h\nu$ — энергия фотона; c — скорость света в вакууме, определим давление p_{cp} световой волны на плоское зеркало, предполагая, что коэффициент отражения зеркала равен r , а угол падения φ . Определим также тангенциальную силу τ , действующую на единицу поверхности зеркала со стороны падающего излучения (№ 2.31). Обозначая число фотонов в единице объема N , получаем, что число фотонов, падающих на площадку зеркала S в единицу времени, равно $NcSc\cos\varphi$. Вводя единичный вектор в направлении движения фотонов i и плотность энергии в падающей волне $u = Nh\nu$, для суммарного импульса света, падающего в единицу времени на площадку S , находим

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{i}_1 u S \cos\phi. \quad (2.64)$$

Для отраженного импульса

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{i}_2 r u S \cos\phi. \quad (2.65)$$

Имея в виду, что

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt, \quad (2.66)$$

для силы, действующей на площадку зеркала, получаем

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2) u S \cos\phi. \quad (2.67)$$

Эта сила создает давление на площадку

$$p_{cp} = u(1 + r) \cos^2\phi \text{ и } \tau = (1/2)u(1 - r) \sin 2\phi. \quad (2.68)$$

При нормальном падении ($\phi = 0$) для идеального зеркала ($r = 1$) давление излучения равно $2u$, для полностью поглощающей поверхности ($r = 0$) соответственно u (№ 2.35).

Если отражающая поверхность не зеркало, а идеально матовая (удовлетворяет закону Ламберта), то она отражает весь падающий на нее свет и равновероятно по всем направлениям. Найдем давление и касательное напряжение, действующие на поверхность зеркала в этом случае (№ 2.32). Найдем вероятность того, что направление отраженного фотона составляет с нормалью к поверхности угол между θ и $\theta + d\theta$. Для этого вычислим соответствующий этому телесный угол

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta. \quad (2.69)$$

Так как в полупространство с телесным углом 2π фотоны распределяются равномерно, то их число, а следовательно, и вероятность пойти в телесный угол $d\Omega$ равна $d\Omega/(2\pi) = \sin\theta d\theta$. Результирующий импульс всех отразившихся фотонов благодаря симметрии относительно нормали к поверхности будет складываться из составляющих импульса вдоль нормали к поверхности. Таким образом, среднее значение проекции импульса одного фотона на нормаль к поверхности равна

$$\int_0^{\pi/2} (hv/c) \cos\theta \sin\theta d\theta = (1/2)hv/c.$$

Для результирующего импульса всех отразившихся фотонов получаем

$$\mathbf{p}_2 = n N c S \cos\phi (1/2)hv/c = (1/2)n u S \cos\phi. \quad (2.70)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к отражающей поверхности.

Сила, действующая на площадку S , равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = uS(\mathbf{i} - \mathbf{n}/2)\cos\varphi. \quad (2.71)$$

Проецируя на нормаль и поверхность, получаем давление и касательное напряжение

$$p_{cp} = u[\cos^2\varphi + (1/2)\cos\varphi] \quad \text{и} \quad \tau = (1/2)u\sin 2\varphi. \quad (2.72)$$

Найдем световое давление солнечного излучения на единицу площади земной поверхности, перпендикулярной направлению излучения (№ 2.37). Считаем, что **солнечная постоянная**, т. е. энергия, которую приносят солнечные лучи за единицу времени на единичную площадку, поставленную перпендикулярно к направлению излучения на среднем расстоянии Земли от Солнца, равна $1,35 \cdot 10^6$ эрг/(с·см²). В соответствии с (1.67) — это плотность потока, или освещенность, $E = u c$. Используя (2.68), при полном поглощении излучения (абсолютно черное тело, $r = 0$)

$$p = u = E/c = 0,45 \text{ дин/м}^2. \quad (2.73)$$

Это приблизительно $0,5 \text{ мг/м}^2$, при полном отражении (абсолютно зеркальное тело, $r = 1$) $p = 2E/c$, при матовой поверхности (тело, удовлетворяющее закону Ламберта) из (2.72) $p = (3/2)E/c$.

Выразим силу давления плоской световой волны, падающей на поверхность шара, размеры которого велики по сравнению с длиной световой волны (№ 2.38). В этом случае можно не учитывать дифракцию, а ограничиться приближением геометрической оптики. На рис. 2.7 показан световой поток, падающий на шар. В силу симметрии результирующая сила направлена по оси x . Площадь малого кольцевого элемента поверхности шара $dS = 2\pi a^2 \sin\varphi d\varphi$. Используя (2.67), находим силу на единицу площади, когда коэффициент отражения поверхности равен r и не зависит от угла падения

$$f_x = u\cos\varphi + rucos\varphi\cos 2\varphi = (1 - r)u\cos\varphi + 2rucos^3\varphi.$$

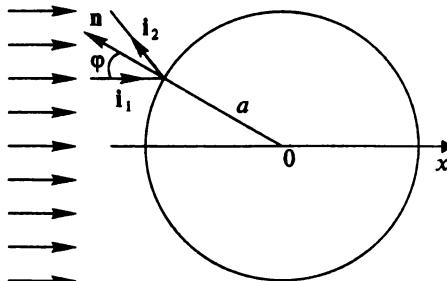


Рис. 2.7

Интегрируя по освещенной поверхности шара (ϕ изменяется от 0 до $\pi/2$), получаем

$$F_x = \int_0^{\pi/2} [(1-r)u \cos \phi + 2ru \cos^3 \phi] 2\pi a^2 \sin \phi d\phi = \pi a^2 u. \quad (2.74)$$

Оказывается, что сила в этих случаях не зависит от коэффициента отражения.

При идеально матовой поверхности шара, используя (2.71), имеем

$$f_x = u \cos \phi + u \cos \phi (1/2) \sin \phi.$$

Соответственно

$$F_x = \int_0^{\pi/2} [u \cos \phi + u \cos \phi (1/2) \sin \phi] 2\pi a^2 \sin \phi d\phi = (4/3)\pi a^2 u.$$

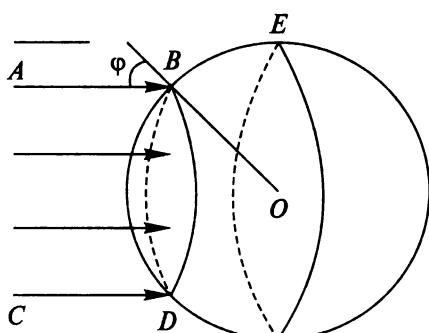


Рис. 2.8

Реально коэффициент отражения зависит от угла падения. Это можно получить из (2.16), (2.18). Усреднение зависимостей для неполяризованного света дает увеличение коэффициента отражения с увеличением угла падения. На рис. 2.8 угол падения луча AB 45° . Фотоны, попадающие на окружность BD , будут отражаться под прямым углом к направлению падающего луча,

таким образом, каждый фотон передает импульс $h\nu/c$. Фотоны, попадающие внутрь окружности, передают импульс, больший $h\nu/c$, а вне окружности — меньший $h\nu/c$. Как получено ранее, при коэффициенте отражения, не зависящем от угла, увеличение компенсирует уменьшение, и в результате давление не зависит от коэффициента отражения. Если коэффициент отражения возрастает с увеличением угла падения, то уменьшение импульса за счет фотонов, падающих вне окружности, будет больше. Следовательно, давление на идеально, т. е. полностью, отражающий шар будет больше (№ 2.39).

Определим отношение силы светового давления F_1 солнечного излучения на поверхность земного шара, считая ее абсолютно чер-

ной, к силе гравитационного притяжения Земли к Солнцу F_2 , если известны средняя плотность Земли ρ , ее радиус a , расстояние до Солнца R , период обращения вокруг Солнца T и плотность энергии солнечного излучения вблизи Земли u (№ 2.40). Используя (2.73) и (2.74), получаем $F_1 = u\pi a^2$. Для силы гравитационного притяжения имеем (1, с. 144) $F_2 = (4/3)\pi a^3 \rho 4\pi^2 R/T^2$. Поэтому отношение сил $F_1/F_2 = 3uT^2/(16\pi^2 a R \rho)$. При подстановке числовых значений получаем очень малую величину (порядка 10^{-14}).

Найдем величину и направление силы F , действующей на единицу площади поверхности раздела вакуум — стекло (показатель преломления $n = 1,5$), если из вакуума падает перпендикулярно к поверхности световой пучок интенсивности $I = 10$ Вт/см² (№ 2.33). Исходим из представлений, аналогичных (2.63)

$$\mathbf{p}_\phi = \hbar \mathbf{k}, \quad \hbar = h/(2\pi), \quad k = \omega n/c, \quad E_\phi = \hbar\omega, \quad \omega = v/(2\pi), \quad (2.75)$$

где \mathbf{p}_ϕ и E_ϕ — импульс и энергия фотона; \mathbf{k} — волновой вектор; v и ω — частота и круговая частота.

Интенсивности отраженного и прошедшего пучков находим с помощью (2.35) и (2.36): $I_{\text{отр}} = I(n - 1)^2/(n + 1)^2$, $I_{\text{пр}} = I \cdot 4n/(n + 1)^2$. Подсчитывая число фотонов, приходящихся на единицу площади за единицу времени, как $I/(\hbar\omega)$, получаем

$$\mathbf{p}_{\text{пад}} = I \mathbf{k}_{\text{пад}}/\omega, \quad \mathbf{p}_{\text{отр}} = I_{\text{отр}} \mathbf{k}_{\text{отр}}/\omega, \quad \mathbf{p}_{\text{пр}} = I_{\text{пр}} \mathbf{k}_{\text{пр}}/\omega.$$

Используя (2.66) и то, что $\mathbf{k}_{\text{отр}} = -\mathbf{k}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{k}_{\text{пр}} = \mathbf{k}_{\text{пад}}n$, из изменения импульса за единицу времени получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_{\text{пр}} + \mathbf{p}_{\text{отр}} - \mathbf{p}_{\text{пад}} = (I/c)2(n - 1)/(n + 1) = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ дин}/\text{см}^2.$$

Такая сила действует со стороны поверхности на пучок фотонов. Противоположная направленная сила давит на поверхность стекла.

Линейно поляризованная световая волна с направлением электрического вектора в плоскости падения и интенсивностью $I = 1$ Вт/см² падает из вакуума под углом Брюстера на круглую плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 3$ мм и диаметром $D = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найдем момент силы M , действующей на пластинку, а также направление поворота пластиинки (№ 2.34). В данном случае нет отраженного света. Свет преломляется и выходит из пластиинки, как показано на рис. 2.9. В соответствии с (2.75) фотон обладает импульсом $p_\phi = \hbar k = \hbar\omega/c$. Относительно точки O фотон обладает моментом импульса $\Delta M = p_\phi l$, который он передает пластиинке. Для угла Брю-

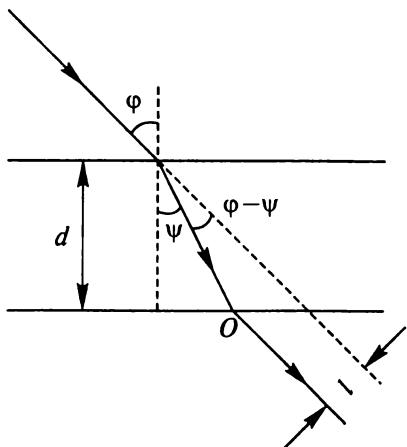


Рис. 2.9

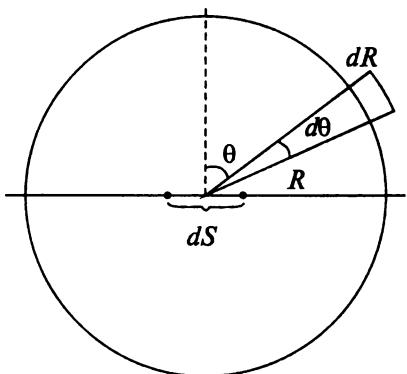


Рис. 2.10

тельно нормали к площадке этот объем равен

$$dV = Rd\theta dR2\pi R\sin\theta = 2\pi R^2 dR\sin\theta d\theta.$$

Обозначая число фотонов в единице объема N , получаем, что в объеме dV их будет NdV . Используя изотропность, находим, что в направлении площадки dS летит их доля $dS\cos\theta/(4\pi R^2)$. Таким образом, для числа ударяющих в площадку фотонов имеем

$$d^2z_{\text{вн}} = N2\pi R^2 dR\sin\theta d\theta dS\cos\theta/(4\pi R^2) = (1/2)NdS\sin\theta\cos\theta d\theta dR.$$

Учитывая (2.63), $u = Nh\nu$, идеальность зеркала (упругое отражение) и что $dR = cdt$ (c — скорость света), для нормального к поверхности зеркала давления получаем

стера из (2.38) имеем: $\operatorname{tg}\phi = n$. Угол преломления $\psi = \pi/2 - \phi$. Из геометрии $l = ds\sin(\phi - \psi)/\cos\psi$. Так как $\sin\phi = \operatorname{tg}\phi/(1 + \operatorname{tg}^2\phi) = n/(1 + n^2)$, $\cos\phi = 1/(1 + n^2)$, $l = (d/n)(n^2 - 1)/(1 + n^2)$. Число фотонов, падающих на пластинку в единицу времени, $N = [I/(\hbar\omega)](\pi D^2/4)\cos\phi$. В результате полный момент, действующий на пластинку,

$$M = N\Delta M = (I/c)(\pi D^2/4)(d/n) \times (n^2 - 1)/(n^2 + 1) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ дин}\cdot\text{см}.$$

Найдем давление света на идеальное зеркало, если излучение изотропно (№ 2.36). Воспользуемся методом, аналогичным примененным ранее (2, с. 171) для молекул идеального газа. Найдем число фотонов, ударяющихся в единицу поверхности зеркала за 1 с. Фотоны падают под разными углами θ к нормали к площадке поверхности зеркала dS . На рис. 2.10 показана площадка и элемент излучающего объема, из которого фотоны попадают на площадку под углом θ . Благодаря симметрии относи-

$$\begin{aligned}
 p = dF / dS &= \int_0^{\pi/2} 2(hv/c) \cos \theta (1/2) N \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot c = \\
 &= u \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d(-\cos \theta) = u / 3.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Найдем закон изменения плотности световой энергии при отражении от медленно движущегося идеального зеркала (№ 2.41). Используя (2.4), в случае нормального падения на границу (плоскость, перпендикулярную оси z) плоской волны $E_e = E_{0e} \exp[i(\omega_e t - k_e z)]$ получаем отраженную волну $E_r = E_{0r} \exp[i(\omega_e t + k_e z)]$. Для движущейся со скоростью v в направлении z границы имеем $z = vt$. Для идеального зеркала амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны, а проходящей волны нет. Для того чтобы выполнялось условие непрерывности E на границе показатели экспонент должны быть одинаковыми, т. е.

$$\omega_e - k_e v = \omega_r + k_r v.$$

Подставляя $k_e = \omega_e/c$ и $k_r = \omega_r/c$, получаем

$$\omega_r = \omega_e (1 - 2v/c).$$

Таким образом, при неподвижной границе ($v = 0$) энергия фотонов $\hbar\omega_e$, а на подвижной границе $\hbar\omega_r = \hbar\omega_e (1 - 2v/c)$. Соответствующим будет и отношение плотностей энергий $u_r = u_e (1 - 2v/c)$. Для встречного движения зеркала $z = -vt$ и, соответственно, $\omega_e + k_e v = \omega_r - k_r v$ и $u_r = u_e (1 + 2v/c)$.

Оценим напряженность электрического поля E и давление света p в фокусе идеальной линзы (фокусное расстояние $f = 5$ см), на которую падает световой пучок площадью $S = 1$ см² лазера мощностью $N = 500$ МВт с длиной волны $\lambda = 6943\text{\AA}$ (№ 2.42). Используя (2.1) и (2.2) для пучка света, падающего на линзу, получаем $N = \langle EH \rangle Sc/(4\pi) = \langle E^2 \rangle Sc/(4\pi)$, а давление $p_0 = N/(Sc)$. Считаем, что

$$\begin{aligned}
 E_0 \approx (\langle E^2 \rangle)^{1/2} &= [4\pi N/(Sc)]^{1/2} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ ед. СГСЭ} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ В/см}, \\
 p_0 \approx 1,67 \cdot 10^5 \text{ дин/см}^2 &\approx 0,16 \text{ атм}.
 \end{aligned}$$

Идеальная линза концентрирует эти параметры на площадь дифракционного пятна. В разделе о дифракции будет показано, что его площадь $S_n = \pi(0,61\lambda/r)^2 = (0,61\pi\lambda)^2/S$, где r — радиус по-перечного сечения падающего пучка. Полученную площадь надо подставить в предыдущие формулы вместо S . В результате находим

$$E \approx (\langle E^2 \rangle)^{1/2} \approx SE_0/(0,61\pi f\lambda) = 1,5 \cdot 10^3 E_0 = 6,4 \cdot 10^8 \text{ В/см},$$
$$p = [S/(0,61\pi f\lambda)]^2 p_0 = 2,25 \cdot 10^6 p_0 \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5$ мс энергию $W = 1$ Дж в виде почти параллельного пучка сечением $S = 1 \text{ см}^2$. Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943\text{\AA}$, излучение во время импульса можно считать равномерным. Определим следующие величины: 1) давление несфокусированного пучка света на площадку, перпендикулярную пучку; 2) давление света на площадку, перпендикулярную к пучку, при максимальной возможной концентрации светового пучка (при фокусировке в область с площадью поперечного сечения порядка λ^2); 3) напряженность электрического поля E в области максимально возможной концентрации светового пучка (№ 2.43). Используя (2.68), получаем

- 1) $p = W(1 + r)/(ctS) = (2/3)(1 + r) \text{ дин/см}^2$, где r — коэффициент отражения поверхности;
- 2) $p \approx W(1 + r)/(ct\lambda) \approx 150(1 + r) \text{ атм};$
- 3) $E \approx [8\pi W/(ct)]^{1/2}/\lambda \approx 6 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ} \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ В/см.}$

3. Интерференция монохроматического света

Для многих типов волн характерно, что при пересечении их путей они не меняются. Освещенность прожектором предмета не изменится, если луч прожектора где-то пересечет луч другого прожектора. Если нет влияния, то действие таких волн, например освещенность одного предмета двумя прожекторами, просто суммируется (складываются линейно интенсивности). Говорят, что существует **суперпозиция**.

При определенных условиях сложение волн может происходить по-другому. В случае волн одинаковой частоты с неизменным сдвигом фаз, которые называют **когерентными**, происходит сложение амплитуд. В результате при одинаковых амплитудах и противоположных фазах двух складывающихся волн получаем гашение одной волны другой. Такие сложения называют **интерференцией**. На экране, освещаемом когерентными волнами, из-за изменения разности фаз, определяемой разностью хода, возникает **интерференционная картина**.

В случае света источниками электромагнитных волн являются возбужденные атомы, которые излучают в течение около 10^{-8} с на частотах порядка 10^{15} Гц ($\lambda \sim 10^{-5}$ см). При несогласованности различных излучателей (некогерентности) интерференционная картина, т. е. наличие максимумов и минимумов, не наблюдается. Для получения интерференции проще всего волну, идущую от **одного источника** разделить, например с помощью зеркала или двух щелей, на две и пустить по разным путям. При не очень большой разнице путей когерентность двух волн сохраняется, и они дают интерференционную картину. В общем случае локальные источники создают сферические волны. Удобно вначале рассмотреть сложение плоских волн.

Плоские монохроматические волны описываются формулами (2.4), где вектор \mathbf{E} — напряженность электрического поля, среднее значения квадрата которого в соответствии с (2.39) равно интенсивности волны. На рис. 3.1 представлены две **одинаковые** плоские ($k_x = 0$) волны, приходящие в начало координат под углами α и $(-\alpha)$ с одинаковой фазой и одинаковой ампли-

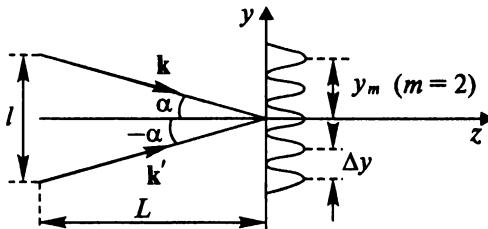


Рис. 3.1

тудой A (вектор \mathbf{E} направлен по оси x и от x не зависит). Для каждой волны можно написать

$$E(y, z, t) = A \exp[i(\omega t - kr)] = S(y, z) \exp(i\omega t), \quad (3.1)$$

где S — комплексная амплитуда, $k_x = 0$, $k_y = ks \sin \alpha$, $k_z = k \cos \alpha$, интенсивность $I = A^2$.

Для суммарной комплексной амплитуды в плоскости $z = 0$ имеем

$$S = A \exp(ik \sin \alpha y) + A \exp(-ik \sin \alpha y) = 2A \cos(k \sin \alpha y). \quad (3.2)$$

В данном случае получилось действительное значение для S .

Для распределения суммарной интенсивности волн в плоскости $z = 0$, учитывая, что $e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t} = 1$, находим

$$I = SS^* = S^2 = 4A^2 \cos^2(k \sin \alpha y) = 2A^2[1 + \cos(2k \sin \alpha y)]. \quad (3.3)$$

В случае разных амплитуд волн вместо (3.2) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} I &= SS^* = (A_1 e^{ik \sin \alpha y} + A_2 e^{-ik \sin \alpha y})(A_1 e^{-ik \sin \alpha y} + A_2 e^{ik \sin \alpha y}) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(2k \sin \alpha y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

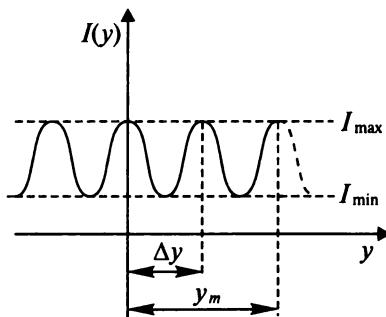


Рис. 3.2

Если в плоскости $z = 0$ поместить экран, то на экране будут наблюдаваться интерференционные полосы, интенсивность которых меняется в соответствии с (3.3) или (3.4). На рис. 3.2 показана соответствующая (3.4). Это периодическая функция. Положение максимумов определяем из условия $2k \sin \alpha y = 2\pi$. Откуда

$$y_m = m\pi/(ks \sin \alpha), \quad (3.5)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Расстояние между максимумами (ширина полосы)

$$\Delta y = \pi/(ks \sin \alpha). \quad (3.6)$$

Вводя длину волны

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega \quad (3.7)$$

и предполагая угол α малым ($\sin \alpha \approx \alpha$), из (3.5) и (3.6) получаем

$$y_m = m\lambda/(2\alpha), \quad \Delta y = \lambda/(2\alpha). \quad (3.8)$$

Из (3.4) максимальное значение суммарной интенсивности $I_{\max} = (A_1 + A_2)^2$, минимальное $I_{\min} = (A_1 - A_2)^2$ (№ 3.1). Различимость интерференционной картины тем лучше, чем больше Δy и, в соответствии с (3.8), чем меньше α . Для $\Delta y \sim 1$ мм при $\lambda \approx 0,5$ мкм необходимо $\alpha \sim 0,25 \cdot 10^{-3}$.

Если волны приходят под **разными углами** (α_1 и $-\alpha_2$), то вместо (3.4) имеем

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[k(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)y]. \quad (3.9)$$

При малых углах в формулах (3.8) вместо 2α нужно принимать $\alpha_1 + \alpha_2$ (№ 3.2).

На рис. 3.3 показана схема опыта, которая была использована Юнгом для получения картины интерференционных полос. Свет от яркого источника, например от Солнца, падает на отверстие S , от которого доходит до отверстий S_1 и S_2 . Расстояние l между источниками S_1 и S_2 выбирается таким, что они являются согласованными (когерентными) и дают интерференционную картину на экране, находящемся на расстоянии L . Вместо отверстий могут быть использованы щели. Для монохроматичности волн можно воспользоваться фильтром. При использовании лазеров вследствие их высокой пространственной когерентности необходимость в отверстии S Поток направляют сразу на S_1 и S_2 . При малых углах α и достаточно больших расстояниях L волны у экрана можно считать **плоскими** и пользоваться приведенными выше формулами.

Из (3.8) следует

$$\Delta y = \lambda/(2\alpha) = \lambda L/l. \quad (3.10)$$

Вводим расстояния r_1 и r_2 , для которых

$$r_1^2 = L^2 + (y - l/2)^2 \text{ и } r_2^2 = L^2 + (y + l/2)^2.$$

После вычитания первого равенства из второго и разложения на множители, получаем для **разности хода**

$$\Delta r = r_2 - r_1 = yl/L = y \cdot 2\alpha. \quad (3.11)$$

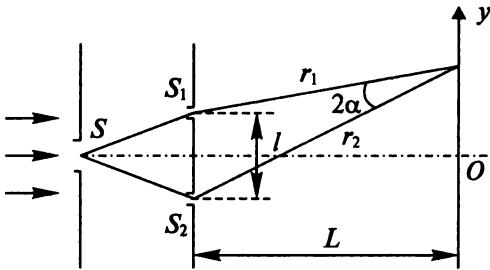


Рис. 3.3

Из (3.3) получаем

$$I = 2I_0[1 + \cos(kyl/L)] = 2I_0[1 + \cos(k\Delta r)]. \quad (3.12)$$

Максимумам соответствует разность хода

$$\Delta r = m\lambda. \quad (3.13)$$

Откуда координаты максимумов

$$y_m = m\lambda L/l. \quad (3.14)$$

Зная положение первого максимума и данные опытной установки, например в опыте Юнга с двумя щелями, из (3.14) можно найти длину волны $\lambda = y_1 l / L$ (№ 3.3).

В соответствии с (2.4) при распространении волны в веществе с показателем преломления n разность хода определяется **оптической длиной**, т. е. расстоянием, умноженным на показатель преломления.

Рассмотрим интерференционную установку Юнга (см. рис. 3.3), в которой на пути одного луча (обозначенного r_1) стоит трубка длиной h с плоскопараллельными стеклянными основаниями. Вначале трубка наполнена воздухом, для которого показатель преломления n_1 , затем ее наполняют хлором. При этом наблюдается смещение интерференционной картины на N полос. Считая температуру постоянной и длину волны света λ известной, найдем показатель преломления хлора n_2 (№ 3.4). В соответствии с (3.13) разность хода изменилась на

$$h(n_2 - n_1) = N\lambda. \quad (3.15)$$

Отсюда находим n_2 . Полосы смещаются в сторону трубки.

На рис. 3.4 показана схема опыта, в котором интерференционная картина получается с помощью **бипризмы Френеля**. Бипризма состоит из двух призм с малым преломляющим углом α и показателем преломления n , сложенных основаниями. Источник света (длиной волны λ) — узкая щель S , параллельная ребру бипризмы. Как следует из (1.4), преломленные лучи поворачивают на угол $\beta = (n - 1)\alpha$. Штриховые линии показывают положение мнимых когерентных источников S_1 и S_2 . При малых β они находятся практически на расстоянии a от бипризмы. Расстояние между ними $S_1S_2 = l = 2a(n - 1)\alpha$. Расстояние до экрана $L = a + b$. Используя (3.14), находим положение m -го максимума (светлой полосы) (№ 3.5):

$$y_m = m\lambda(a + b)/[2a(n - 1)\alpha]. \quad (3.16)$$

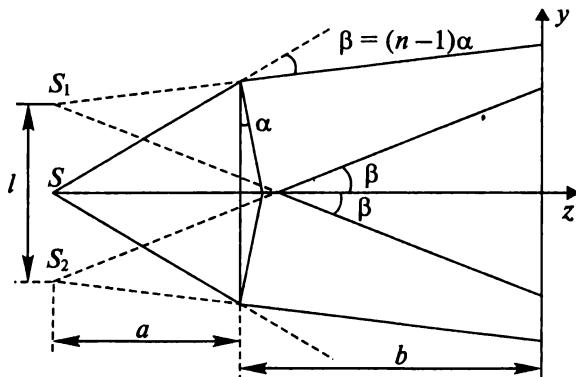


Рис. 3.4

Отсюда расстояние между максимумами

$$\Delta y = \lambda(a + b)/[2a(n - 1)\alpha]. \quad (3.17)$$

Ширина области перекрытия пучков на экране $2b\beta$. Откуда число полос на экране $N = 2b\beta/(\Delta y)$ (№ 3.8).

Найдем, в какую сторону и на какую величину сместится нулевая интерференционная полоса, которая находится на оси (точнее в плоскости симметрии) установки, если щелевой источник света немного сместить в направлении, перпендикулярном оси оптической системы на величину h (№ 3.9). На рис. 3.5 на-

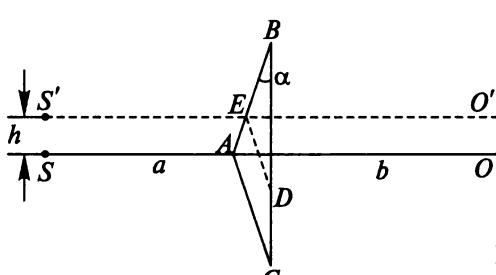


Рис. 3.5

чальное положение источника на оси системы S , а центр интерференционной картины в точке O . После перемещения источника на расстояние h в S' можно считать, что интерференционную картину создает бипризма EBD , а на пути пучка, идущего через ее нижнюю часть стоит плоскопараллельная пластина $AEDC$ толщиной $l = 2ha$, которая увеличивает оптическую длину пути и смещает картину вниз на число полос $N = l(n - 1)/\lambda$. Ширина полос определяется (3.17). При этом центр интерференционной картины O' сместится вниз на расстояние

$$y' = N\Delta y = N\lambda(a + b)/[2a(n - 1)\alpha] = l(a + b)/(2a\alpha) = l + lb/a.$$

Смещение от начального центра O равно $y = y' - l = lb/a$.

На рис. 3.6 показана схема опыта с бипризмой (преломляющей малый угол α , показатель преломления n) и линзой, помещенной между бипризмой и точечным монохроматическим источником (с длиной волны λ) таким образом, что ширина интерференционных полос оказалась не зависящей от расстояния от экрана до бипризмы. Найдем расстояние между интерференционными полосами и максимальное число полос N , которое можно наблюдать в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на расстояние L (№ 3.6). Ширина полос не меняется при сложении параллельных пучков волн. Это значит, что источник находится в фокусе линзы и на бипризму падает параллельный пучок света. Используя (3.8), имеем $\Delta y = \lambda/[2(n - 1)\alpha]$. Для получения максимального числа полос надо максимальный размер области перекрытия пучков разделить на ширину полосы $N = L \cdot 2(n - 1)\alpha / (\Delta y) = 4L(n - 1)^2\alpha^2/\lambda$.

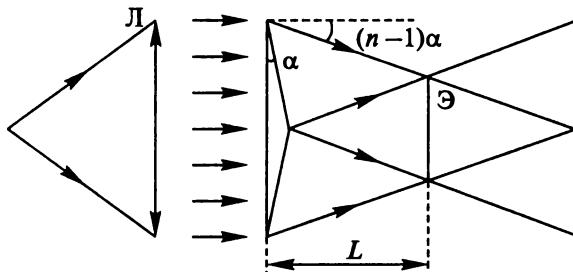


Рис. 3.6

Если в предыдущей задаче заданы преломляющий угол α , показатель преломления бипризмы n и расстояние между вершинами преломляющих углов h , то, используя рис. 3.6, можно найти расстояние от экрана до бипризмы $L = h/[4(n - 1)\alpha]$, при котором получается наибольшее число полос $N = h(n - 1)\alpha/\lambda$. Полосы исчезнут, если экран отодвинуть от бипризмы на расстояние больше $2L$, при котором уже отсутствует перекрытие интерферирующих пучков (№ 3.7).

На рис. 3.7 показаны два когерентных источника S_1 и S_2 и экран, на котором получена интерференционная картина. Экран находится на расстоянии $a = 2$ м от источников. Обозначив расстояние между источниками l и длину волны света λ , из (3.10) получаем ширину полосы $\Delta y = \lambda/(2\alpha) = \lambda a/l$. Если собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 25$ см поставить на расстоянии $2f$ от источников (рис. 3.8), то это соответствует переносу источников

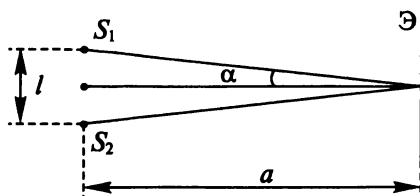


Рис. 3.7

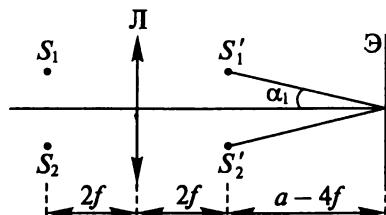


Рис. 3.8

ближе к экрану на $4f$. При этом $\Delta y_1/\Delta y = (a - 4f)/a = 1/2$. Если источники находятся в фокальной плоскости линзы (рис. 3.9), то интерферируют два пучка, для которых $2\alpha_3 = l/f$. Тогда $\Delta y_1/\Delta y = f/a = 1/8$. Отметим, что в этом случае для получения интерференционной картины необходимо перекрытие пучков, ограниченных размером линзы. Предельное расстояние L , на котором перекрываются пучки, должно быть больше $a - f$. Из подобия треугольников, обозначая диаметр линзы D , получаем $D/L = l/f$. Поэтому должно выполняться условие $D/l > a/f - 1 = 7$ (№ 3.10).

Один из способов разделения света от одного источника на два пучка связан с тем, что отделенная от линзы часть создает такую же картину, как вся линза. При этом вследствие уменьшения площади уменьшается лишь поток света. На рис. 3.10, а показана линза (фокусное расстояние $f = 50$ см) и вырезаемая вдоль диаметра часть (заштрихованная) шириной a . Для построения картины хода

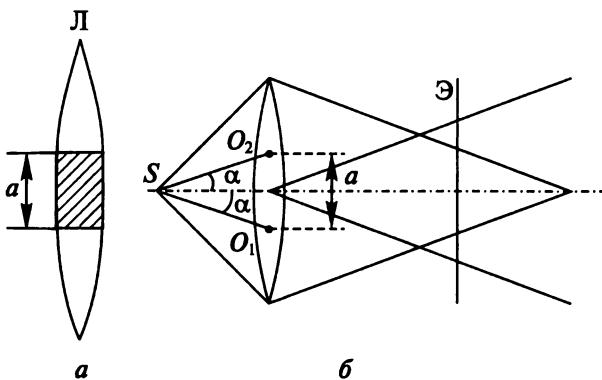


Рис. 3.10

лучей от плотно **соединенных** частей линзы отметим для верхней части линзы центр линзы O_1 , для нижней части центр линзы O_2 (рис. 3.10, б). Если задано, что расстояние между полосами в интерференционной картине от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$) равно $\Delta y = 0,5 \text{ мм}$ и не меняется при перемещении экрана, то, следовательно, интерферируют два пучка из параллельных лучей, т. е. источник S лежит в фокальной плоскости линзы. Направление пучков за линзой определяется лучами SO_1 и SO_2 , угол между которыми $2\alpha = a/f$. Используя (3.8), находим $a = \lambda f / (\Delta y) = 0,6 \text{ мм}$ (№ 3.11). Интерференционную картину можно получить и раздвигая части разрезанной по диаметру линзы и прикрывая прохождение прямого света (**билинза Бийе**).

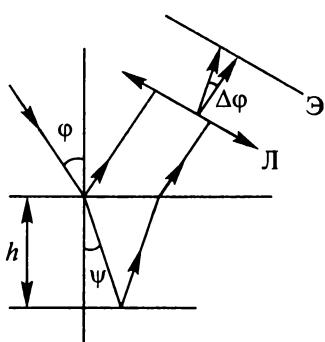


Рис. 3.11

При падении света на пластинку из прозрачного диэлектрика происходит отражение от верхней и нижней поверхностей пластиинки и сложение отраженных волн. Найдем разность хода для пластиинки постоянной толщины h с показателем преломления n при падении света от точечного бесконечно удаленного источника под углом падения ϕ . На рис. 3.11 показан ход лучей. Предполагается, что коэффициент отражения настолько мал, что можно не учитывать многократное отражение. Угол преломления ψ определяется формулой Снеллиуса (1.1)

$$n = \sin\phi / \sin\psi.$$

Обозначая разность хода (оптическую длину) Δ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= 2nh/\cos\psi - 2hs\sin\psi\sin\phi/\cos\psi = (2h/\cos\psi)(n - \sin^2\phi/n) = \\ &= 2h(n^2 - \sin^2\phi)/(n\cos\psi) = 2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2} = 2h\cos\psi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В соответствии с табл. 2.1 при отражении от верхней границы фаза волны меняется на противоположную, а разность хода — на $\lambda/2$, при отражении от нижней поверхности и преломлении на верхней фаза не меняется. С учетом этого разность хода при сложении волн равна

$$\Delta_\phi = \Delta + \lambda/2. \quad (3.19)$$

Так как складываются параллельные пучки, интерференционная картина локализована на бесконечности. Для ее наблюдения

экран надо поставить на большом расстоянии. Получаемые при этом полосы называют **полосами равного наклона**. При использовании линзы на экране в фокальной плоскости линзы параллельным лучам одинакового наклона соответствует точка. Так как картина не зависит от положения источника, она будет отчетливой и при использовании **протяженного** источника.

Условие для максимумов

$$m\lambda = \Delta_\phi = \Delta + \lambda/2 = 2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2} + \lambda/2. \quad (3.20)$$

Интерференционной картины не получается, если

$$2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2} + \lambda/2 < \lambda.$$

Следовательно, картина исчезает при $h < \lambda/(4n)$ (№ 3.14). При $n = 1,5$ и $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см имеем $h < 10^{-5}$ см.

Напомним, что ранее было получено решение для **просветленной оптики** (2.47). В оптических приборах потери света через прибор происходят главным образом вследствие отражения света от поверхностей оптических деталей. Для увеличения прозрачности стекла его поверхность покрывают тонкой пленкой, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Найдем, каковы должны быть толщина пленки и ее показатель преломления, чтобы отражательная способность стекла обратилась в нуль (№ 3.15). Воспользуемся (2.46) и (2.47). Оптическая толщина пленки должна быть равна четверти длины световой волны в вакууме. Показатель преломления пленки $n = (n_1 n_2)^{1/2}$, где n_2 — показатель преломления стекла, а $n_1 = 1$ — показатель преломления воздуха. Отражения не будет также в том случае, когда оптическая толщина пленки $ln = l(n_2)^{1/2} = \lambda/4 + N\lambda/2$, где N — целое число. Однако при пользовании белым светом, где присутствуют разные длины волн, применять толстые пленки невыгодно.

В случае пластинок **переменной толщины** луч, отраженный от верхней поверхности, и луч, отраженный от нижней поверхности (рис. 3.12), дают интерференционную картину только на поверхности пластиинки, где взаимодействуют два луча. Локализацию картины на поверхности можно рассматривать как некий рисунок полос. Во все другие точки, находящиеся над поверхностью, попадает много лучей (следствие **протяженного источника**), и интерференционная картина отсутствует (в среднем получаем одну и ту

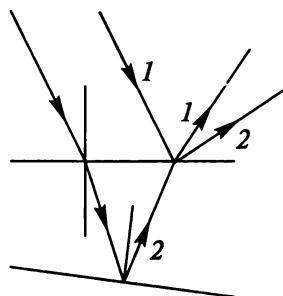


Рис. 3.12

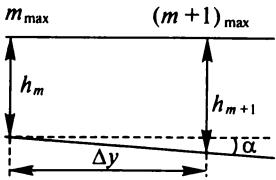


Рис. 3.13

же интенсивность во всех точках). Получаемые при этом полосы называют **полосами равной толщины**. Если угол между поверхностями пластинки мал, то можно воспользоваться соотношением (3.20) и рис. 3.13 для определения расстояния между максимумами. Получаем

$$2h_m(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2} + \lambda/2 = m\lambda, \quad 2h_{m+1}(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2} + \lambda/2 = (m+1)\lambda.$$

Отсюда для угла между поверхностями пластинки α получаем (№ 3.13)

$$\alpha = (h_{m+1} - h_m)/\Delta y = \lambda/[2\Delta y(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2}]. \quad (3.21)$$

Найдем угол α между гранями очень тонкой **клиновидной пластиинки**, показатель преломления которой $n = 1,5$, если на ней в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы шириной $\Delta y = 5$ мм, зная, что длина волны света $\lambda = 5800 \text{ \AA}$ (№ 3.16). Из (3.21) следует

$$\alpha = \lambda/(2n\Delta y) \approx 8''.$$

Для расстояния между максимумами полос на поверхности стеклянного клина с углом α (№ 3.12) имеем: $\Delta y = \lambda/[2\alpha(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2}]$.

Найдем распределение освещенности (интенсивности суммарной волны) в интерференционной картине на **воздушном клине** (две плоские пластинки под углом α) в отраженном монохроматическом свете с длиной волны λ при нормальном падении, если можно считать, что интенсивность световых пучков, отраженных от обеих поверхностей клина, одинакова и равна I_0 (№ 3.17). Используя (3.3) и учитывая, что при $y = 0$, где y — расстояние от ребра клина, интенсивность равна нулю (вместо косинуса надо взять синус), имеем

$$I = 4I_0 \sin^2(2\pi y\alpha/\lambda).$$

Полосы равной толщины можно наблюдать в воздушной проложке между плоской поверхностью стеклянной пластинки (постоянной толщины) и плоско-выпуклой линзой, прижатой к пластинке выпуклой стороной. Получаемая картина называется **кольцами Ньютона**. Кольца обычно наблюдают в длиннофокусный микроскоп, сфокусированный на соответствующую поверхность. На рис. 3.14 приведена схема, показывающая ход лучей при на-

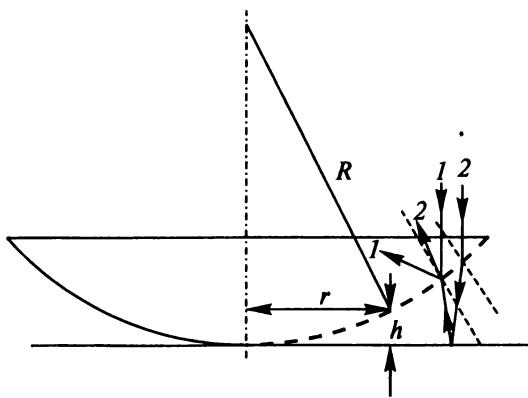


Рис. 3.14

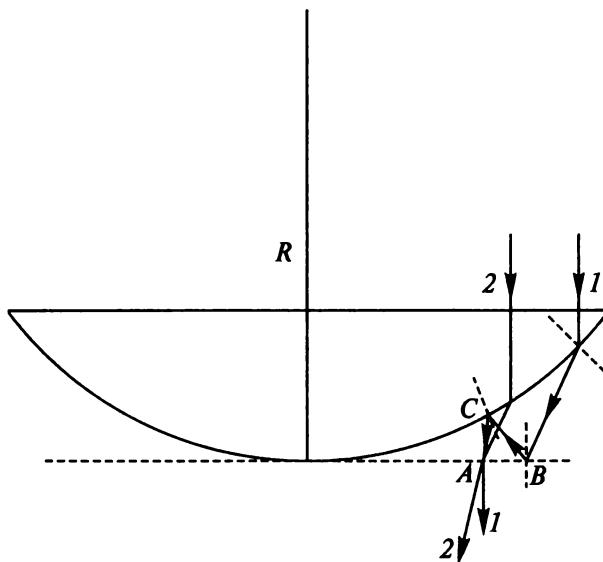


Рис. 3.15

бледении интерференции в отраженном свете. Интерференционная картина образуется лучами 1 и 2 на поверхности, отмеченной жирной штриховой линией. На рис. 3.15 показан ход лучей при наблюдении интерференционной картины в проходящем свете на поверхности, отмеченной штриховой линией. Толщина воздушного клина h меняется в зависимости от расстояния от оси симметрии r (см. рис. 3.14)

$$h = R(1 - \cos\alpha) \approx R\alpha^2/2 \approx Rr^2/(2R^2) = r^2/(2R). \quad (3.22)$$

В соответствии с потерей половины длины волны при отражении от нижней поверхности воздушного клина разность хода $\Delta = 2h + \lambda/2$ для темного кольца в отраженном свете должна быть равна нечетному числу длин волн

$$\Delta = 2h + \lambda/2 = (m + 1/2)\lambda. \quad (3.23)$$

Отсюда радиус m -го темного кольца в отраженном свете

$$r = (mR\lambda)^{1/2} = (\lambda R/2)^{1/2}(2m)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Радиусы пропорциональны четным числам 0, 2, 4, ...

Центр колец в отраженном свете **темный**.

Для светлых колец

$$\Delta = 2h + \lambda/2 = m\lambda. \quad (3.25)$$

Отсюда радиус m -го светлого кольца

$$r = [(m - 1/2)R\lambda]^{1/2} = (\lambda R/2)^{1/2}(2m - 1)^{1/2}. \quad (3.26)$$

Радиусы пропорциональны нечетным числам 1, 3, 5, ...

Если линзу отодвигают от пластиинки на расстояние x , то, например, вместо (3.23) надо написать $\Delta = 2(h + x) + \lambda/2 = (m + 1/2)\lambda$. Используя (3.22), получаем для радиуса темного кольца в отраженном свете $r = [(m\lambda - 2x)R]^{1/2}$. При увеличении x радиусы колец уменьшаются. Кольца сдвигаются к центру картины. Тот же результат и для светлых колец. Центр картины попеременно будет темным и светлым. При уменьшении x движение колец идет от центра картины (№ 3.34).

В проходящем свете (см. рис. 3.15) фаза дважды сдвигается на $\lambda/2$, т. е. $\Delta_{\text{пр}} = 2h$. Соответственно меняются формулы для радиусов колец.

Найдем расстояние Δl между двадцатым и первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим равно 1 мм, а кольца наблюдаются в отраженном свете (№ 3.24). Из (3.26) следует

$$\Delta l = 1(\text{мм})(\sqrt{41} - \sqrt{39})/(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 0,31 \text{ мм.}$$

Найдем фокусное расстояние f плосковыпуклой линзы, примененной для получения колец Ньютона, если радиус третьего светлого кольца в отраженном свете равен 1,1 мм, $n = 1,6$, $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ (№ 3.25). Из (3.26) и (1.15) получаем $f = (2/5)r^2/[(n - 1)\lambda] = 137 \text{ см.}$

При наблюдении колец Ньютона в отраженном синем свете ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$) с помощью плосковыпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным 1,06 мм. После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого кольца, оказавшийся равным 1,77 мм. Найдем радиус кривизны R линзы и длину волны λ_{kp} красного света (№ 3.26). Из (3.26) $(r_5/r_3)^2 = (9/5)\lambda_{kp}/\lambda$. Отсюда $\lambda_{kp} = 0,7 \text{ мкм}$ и $R = 1 \text{ м}$.

Плоскопараллельная стеклянная пластиинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете натриевой горелки ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) найдено, что радиус темного кольца порядка $m = 20$ (центральному темному кольцу соответствует $m = 0$) равен $r = 2 \text{ мм}$. Когда пластиинка была положена на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка сделался равным $r = 4 \text{ мм}$. Найдем фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена, $n = 1,5$ (№ 3.27). Из (3.24) $1/R = m\lambda/r^2$. Из (1.42) $1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2) = (n - 1)m\lambda(1/r_1^2 + 1/r_2^2)$, откуда

$$f = r_1^2 r_2^2 / [(n - 1)m\lambda(r_1^2 + r_2^2)] = 54 \text{ см.}$$

Найдем радиус r центрального темного пятна колец Ньютона, если между линзой и пластиинкой налит бензол ($n = 1,5$). Радиус кривизны линзы $R = 1 \text{ м}$. Показатели преломления линзы и пластиинки одинаковы. Наблюдение ведется в отраженном натриевом свете ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) (№ 3.28). Так как в (3.23) входит оптическая длина, то $2hn + \lambda/2 = (m + \lambda/2)$. Поэтому из (3.24) для $m = 1$ находим $r = (R\lambda/n)^{1/2} = 0,63 \text{ мм}$.

На поверхности жидкости с показателем преломления n_1 плавает очень тонкая линза с показателем преломления $n < n_1$, геометрические размеры которой показаны на рис. 3.16. Рассчитаем, какая картина будет видна в отраженном монохроматическом свете с длиной волны λ , если смотреть на линзу сверху (№ 3.23). Используя (3.22), для толщины линзы получаем

$$h = (1/2)(a^2 - r^2)(1/R_1 + 1/R_2).$$

Учитывая, что на границах линзы фаза меняется на $\lambda/2$, для

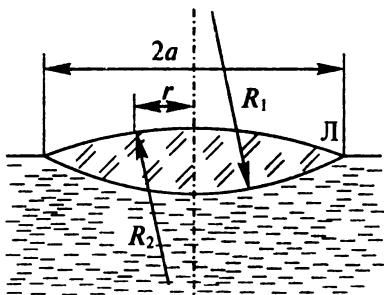


Рис. 3.16

светлых колец в соответствии с (3.25) имеем: $2hn = n(a^2 - r_m^2) \times (1/R_1 + 1/R_2) = m\lambda$, откуда $r_m^2 = a^2 - m\lambda/[n(1/R_1 + 1/R_2)]$.

Кольца Ньютона получаются с помощью плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны R_1 , положенной на вогнутую сферическую поверхность с радиусом кривизны $R_2 > R_1$. Кольца наблюдаются в отраженном свете. Найдем радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ (№ 3.29). Используя (3.22) и (3.23), получаем

$$h = (1/2)r^2(1/R_1 - 1/R_2), \quad 2h = m\lambda. \quad (3.27)$$

Отсюда $r_m = [m\lambda/(1/R_1 - 1/R_2)]^{1/2}$.

Если вместо вогнутой поверхности взять выпуклую (№ 3.30), то действуя аналогичным образом получаем $r_m = [m\lambda/(1/R_1 + 1/R_2)]^{1/2}$.

Тонкая симметричная двояковыпуклая линза сложена с тонкой симметричной двояковогнутой линзой так, что в некоторой точке они соприкасаются. Показатель преломления обеих линз $n = 1,6$. Наблюдается интерференционная картина в отраженном свете на длине волны $\lambda = 0,6$ мкм. Найдем фокусное расстояние f системы линз, если радиус 5-го ($m = 5$) светлого кольца $r = 2$ мм (№ 3.31). Из (3.28) по известным m и r находим $(1/R_1 - 1/R_2)$. Используя (1.6) и (1.15), где для симметричных линз $R_1 = -R_2$ (эти индексы относятся к одной линзе, а ранее записанные — к разным линзам), находим фокусное расстояние системы F

$$1/F = 2(n - 1)(1/R_1 - 1/R_2),$$

откуда $F = r^2/[2m\lambda(n - 1)] = 1,1$ м.

Для оптической силы системы на рис. 3.17 (№ 3.33) в соответствии с (1.6) получаем $\Phi = 2(n - 1)m\lambda/r^2$.

Интерференционная картина (кольца Ньютона) наблюдаются в проходящем свете (см. рис. 3.15). Показатель преломления линзы и пластиинки равен $n = 1,5$. Найдем отношение интенсивностей I_{\max}/I_{\min}

света в максимуме и минимуме интерференционной картины и выясним, можно ли увидеть картину невооруженным глазом, если контрастная чувствительность глаза равна 0,05 (№ 3.32). Интерференционная картина локализована на поверхности, отмеченной жирной штриховой линией. Если в точку A приходит волна с амплитудой E_0 , то амплитуда волны I после отражения

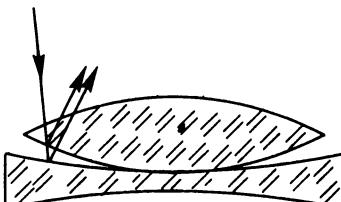


Рис. 3.17

в точке B в соответствии с (2.32) $E_1 = E_0(n - 1)/(n + 1)$. После отражения в точке C имеем $E_2 = E_1(n - 1)/(n + 1) = E_0(n - 1)^2/(n + 1)^2$. Сложение происходит в точке A и дает $I_{\max}/I_{\min} = (E_0 + E_2)^2/(E_0 - E_2)^2 = [(n^2 + 1)/(2n)]^2 = 1,17$. Интерференционная картина достаточно контрастна, чтобы ее можно было увидеть невооруженным глазом.

Полученные для интерференции света результаты можно применить и для радиоволн. Спутник Земли, поднимаясь над горизонтом, излучает радиоволны длиной $\lambda = 10$ см. Микроволновый детектор расположен на берегу озера на высоте $h = 1$ м над уровнем воды (рис. 3.18). Найдем, при каком угле α спутника над горизонтом детектор зарегистрирует 1-й и 2-й максимумы интенсивности сигнала, считая поверхность воды гладкой (№ 3.18). Обозначая видимую высоту спутника над горизонтом $l/2$, получаем, что $\alpha = l/(2L)$. Минимальный источник находится на расстоянии $l/2$ ниже горизонта. В результате $r_1^2 = L^2 + (l/2 - h)^2$ и $r_2^2 = L^2 + (l/2 + h)^2$, откуда

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2hl/L = 2h\alpha.$$

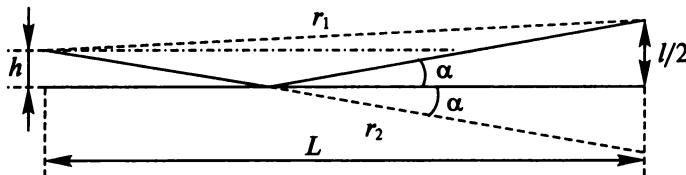


Рис. 3.18

В соответствии с табл. 2.1 для вертикальной поляризации при отражении нет потери половины длины волны, а для горизонтальной при таком отражении теряется половина длины волны. Для вертикальной поляризации 1-й максимум $r_2 - r_1 = 0$, $\alpha_{1v} = 0$, 2-й максимум $r_2 - r_1 = \lambda$, $\alpha_{2v} = \lambda/(2h) = 2^\circ 50'$. Для горизонтальной поляризации 1-й максимум $r_2 - r_1 = \lambda/2$, $\alpha_{1r} = \lambda/(4h) = 1^\circ 20'$, 2-й максимум $r_2 - r_1 = 3\lambda/2$, $\alpha_{2r} = 3\lambda/(4h) = 4^\circ$.

Радиоизлучение от точечного космического источника с длиной волны $\lambda = 1$ м, находящегося в плоскости экватора, принимается с помощью двух одинаковых антенн, расположенных по направлению восток-запад на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. На входной контур приемника подается сумма сигналов, приходящих от обеих антенн по кабелям одинаковой длины. Найдем, как меняется в результате вращения Земли амплитуда напряжения U_0 на входном контуре приемника (№ 3.20). На рис. 3.19 показано положение

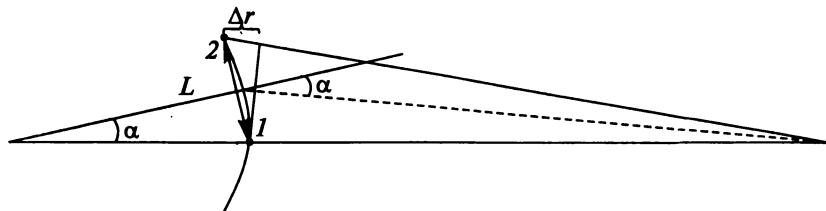


Рис. 3.19

жение антенн (1 и 2) при повороте Земли на угол α . Разность хода сигнала до антенн при малом угле α равна $\Delta r = L \sin \alpha$. Так как напряжение на контуре пропорционально корню квадратному из интенсивности сигнала, то из (3.12) получаем

$$U = U_0 [\cos(k\Delta r/2)] = U_0 [\cos(\pi L \sin \alpha / \lambda)] = U_0 \cos \omega t. \quad (3.28)$$

При малых α имеем $\sin \alpha \approx \alpha = \omega_3 t$, где $\omega_3 = 2\pi/T_3$ — угловая скорость вращения Земли; T_3 — период вращения Земли.

Период изменения амплитуды напряжения

$$T = 2\pi/\omega = \lambda T_3 / (\pi L) = 2,3 \text{ мин.}$$

Источником освещения в интерферометре Майкельсона является лазер, частота которого перестраивается во времени по линейному закону $\omega = \omega_0(1 + at)$. Разность хода в плечах интерферометра $L = 1$ м. Длина волны $\lambda_0 = 1$ мкм, $a = 0,1 \text{ с}^{-1}$. Найдем частоту изменения тока фотоприемника, регистрирующего интерференционную картину (№ 3.35). Заменив частоту на длину волны ($\omega = 2\pi c/\lambda$), получаем $1/\lambda - 1/\lambda_0 = at/\lambda_0$. Умножая это на L и учитывая, что L/λ за период $t = T = 1/\nu$ меняется на единицу, находим $\nu = La/\lambda_0 = 100 \text{ кГц}$.

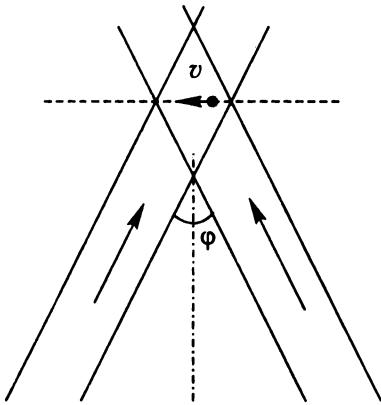


Рис. 3.20

Для измерения скорости частиц жидкости бесконтактным методом используется лазерный анемометр. Два когерентных лазерных пучка с длиной волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм и углом сходимости $\varphi = 2^\circ$ пересекаются в некоторой области жидкости, в которой небольшие взвешенные частички движутся со скоростью v (рис. 3.20). Определим скорость этих частиц, если известно, что

при регистрации отраженного от них света частота колебаний тока фотоприемника Φ равна $v = 5,54$ кГц (№ 7.2). В соответствии с (3.8) ширина интерференционных полос в области пересечения пучков на траектории частицы $\Delta y = \lambda/\phi$. Время пролета частицей расстояния Δy равно периоду T модуляционной составляющей интенсивности отраженного от частиц света $T = \Delta y/v = \lambda/(\phi v)$, откуда $v = \lambda\phi/\lambda = 10$ см/с.

На рис. 3.21 показан ход лучей в пластинке Луммера—Герке, с помощью которой осуществляется многолучевая интерференция. Для получения большого количества отражений угол ψ должен быть близок к предельному (1.2), чем достигается уменьшение потерь света при отражении. С помощью линзы L на экране Θ получаем интерференционную картину. Условие интерференционного максимума m -го порядка: $2h\cos\psi = m\lambda$ (здесь не учтено изменение фазы при отражении, так как оно производит только несущественное смещение всей интерференционной картины). Подставляя (1.2), для порядка интерференции имеем

$$m = 2h(n^2 - 1)^{1/2}/\lambda. \quad (3.29)$$

Найдем относительное смещение $\Delta l/l$ интерференционных полос, полученных с помощью пластинки Луммера—Герке (толщина $h = 2$ см, показатель преломления $n = 1,5$, температурный коэффициент линейного расширения стекла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, длина волны света $\lambda = 500$ нм), при изменении температуры на 1 °С, пренебрегая зависимостью показателя преломления от температуры (№ 3.22). Относительное смещение полос $\Delta l/l = \Delta m/m = \Delta m/1$. Из (3.29) $\Delta m = 2\Delta h (n^2 - 1)^{1/2}/\lambda$. При нагревании на 1 °С в результате теплового расширения $\Delta h = \hat{h}at = \alpha h$. Поэтому

$$\Delta l/l = 2h\alpha(n^2 - 1)^{1/2}/\lambda.$$

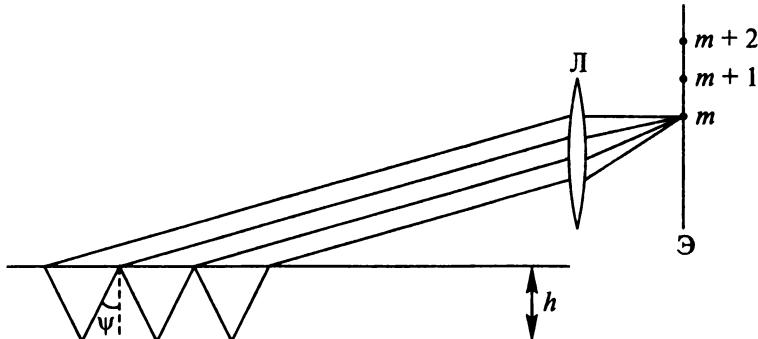


Рис. 3.21

4. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность

Реальные источники света излучают несколько спектральных линий или даже сплошные спектры. При этом излучение на каждой из частот не представляет бесконечную синусоидальную волну, и поэтому даже в случае двух частот результирующая волна не является волной со средней частотой и периодически меняющейся амплитудой, как это получается при сложении двух гармоник. Интерференционная картина не мгновенна, а усредняется по времени от хаотической последовательности цугов, колебания в которых не связаны по фазе.

Воспользуемся интерференционной системой, изображенной на рис. 3.3 и формулой (3.12) для случая, когда в точке S находятся два независимых некогерентных источника с частотами ω_1 и ω_2 . Считая интенсивности одинаковыми и заменяя $k = \omega/c$ и $\Delta r = (l/L)y$, как в (3.11), получаем изменение интенсивности по y (например, на поставленном экране)

$$I = 2I_0[1 + \cos(k_1\Delta r)] + 2I_0[1 + \cos(k_2\Delta r)] = \\ = 4I_0\{1 + \cos[(\omega_1 + \omega_2)ly/(2cL)]\cos[\Delta\omega ly/(2cL)]\}. \quad (4.1)$$

где $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$.

Изменение интенсивности в зависимости от y показано на рис. 4.1. Если $\Delta\omega$ много меньше ω_1 и ω_2 , то второй сомножитель меняется медленно на протяжении многих интерференционных полос, а первый сомножитель меняется быстро, определяя рас-

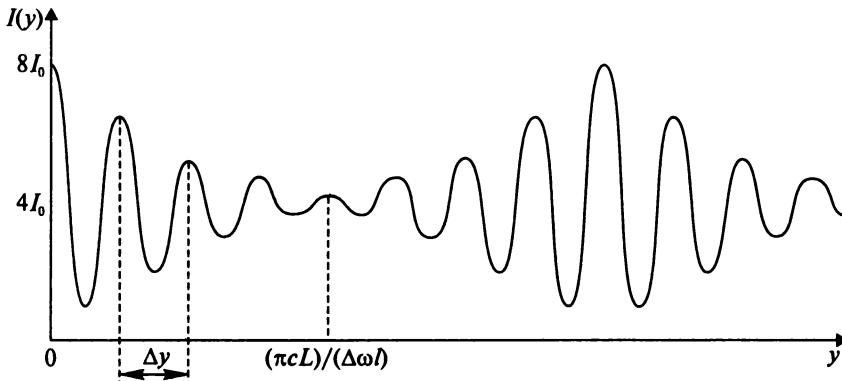


Рис. 4.1

стояние между соседними полосами Δy , которое можно выразить через среднюю длину волны $\lambda = 2\pi/k$, где $k = (k_1 + k_2)/2$.

$$\Delta y = \lambda L/l. \quad (4.2)$$

Четкость интерференционных полос принято характеризовать **видностью**

$$V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = |\cos[(\Delta\omega ly)/(2cL)]|. \quad (4.3)$$

На рис. 4.2, а показано изменение видности (4.3). Если интенсивности волн разные, то получается зависимость, представленная на рис. 4.2, б.

Рассмотрим случай, когда источники имеют интенсивность I_0 , равномерно распределенную в спектральном интервале $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$. Для получения зависимости интенсивности на экране от y проинтегрируем (3.12), учитывая (3.11)

$$I(y) = 2I_0 / (\Delta\omega) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[1 + \cos\left(\frac{\omega ly}{cL}\right) \right] d\omega = \\ = 2I_0 \{1 + 2cL/(\Delta\omega ly) \cos[(\omega_1 + \omega_2)ly/(2cL)] \sin[\Delta\omega ly/(2cL)]\}. \quad (4.4)$$

Эта зависимость показана на рис. 4.3.

Для максимумов интенсивности имеем: $(\omega_1 + \omega_2)ly/(2cL) = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), откуда

$$y_m = 2\pi cLm / (\Delta\omega l) = \\ = \lambda(L/l) m. \quad (4.5)$$

Расстояние между максимумами

$$\Delta y = \lambda L/l = \lambda/(2\alpha). \quad (4.6)$$

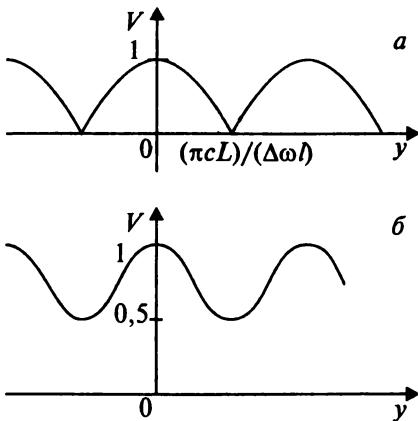


Рис. 4.2

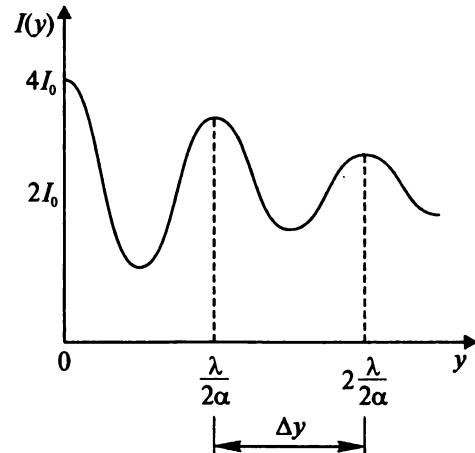


Рис. 4.3

Полосы исчезают при $\Delta\omega ly/(2cL) = \pi$, т. е., вводя $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ и $\lambda = 2\pi c/\omega$, при

$$y = \lambda\omega L/(\Delta\omega l). \quad (4.7)$$

Для максимального m получаем

$$m_{\max} = y/\Delta y = \omega/\Delta\omega = \lambda/\Delta\lambda. \quad (4.8)$$

Рассмотрим, как будет меняться резкость колец Ньютона при перемещении плосковыпуклой линзы в направлении, перпендикулярном пластинке, если кольца наблюдаются в отраженном свете D-линии Na, которая не монохроматична, а представляет собой две близкие спектральные линии с $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ (№ 4.1). Двум линиям соответствуют две системы колец. Если линза соприкасается с пластинкой, то вблизи центра картины полосы имеют небольшой относительный сдвиг, т. е. практически совпадают, обеспечивая достаточную резкость картины. На некотором расстоянии от центра светлое кольцо одной системы совпадает с темным кольцом другой, и картина полос исчезает. Вблизи от этого радиуса картина становится нерезкой. В соответствии с (3.23) и (3.25)

$$(m + 1/2)\lambda_1 = m\lambda_2, \quad (4.9)$$

откуда $m = (\lambda_1/2)/(\lambda_2 - \lambda_1) = 5890/12 \approx 490$. Из (4.1) и рис. 4.1 следует, что кольца снова будут резкими, когда $m = 2 \cdot 490 = 980$. При перемещении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру картины (см. решение задачи № 3.34 на с. 80). Если линзу переместить на $490 \lambda_1$, то через поле зрения пройдет 490 колец, и в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы на $2 \cdot 490 \lambda_1 = 980 \lambda_1$, кольца в центре снова будут резкими. При перемещении на $3 \cdot 490 \lambda_1 = 1470 \lambda_1$ кольца опять пропадут.

Если задано положение минимальной резкости колец, то из (4.9) можно найти разность длин волн при известной средней длине волны (№ 4.2).

На рис. 4.4 показана система для получения интерференционных полос равноградного наклона на экране (\mathcal{E}) в фокальной плоскости линзы (L) при отражении от плоскопараллельной пластинки (P), освещаемой монохроматическим источником света S , от которого прямой свет на линзу не попадает. Длина световой волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, толщина пластинки $h = 1,6 \text{ мм}$, показатель преломления $n = 1,5$, фокусное расстояние линзы $f = 40 \text{ см}$. Найдем радиус r первого видимого на экране \mathcal{E} темного интерференционного кольца, если центр кольца темный. Вычислим минимально допустимую ширину

линии $\Delta\lambda$, освещаящей пластинку, чтобы при указанных параметрах схемы можно было наблюдать интерференционные кольца (№ 4.3). В соответствии с (3.18) и (3.19) разность хода между отразившимися лучами равна $2hn\cos\psi + \lambda/2$ (см. задачу № 3.13 на с. 78). Так как центр колец темный, то для темных колец должно быть нечетное число полуволн. Первому темному кольцу соответствует такое приращение угла преломления ψ , что разность хода уменьшается на λ . Это дает $2hn(1 - \cos\psi) = \lambda$ или $4hn\sin^2(\psi/2) = \lambda$. Для малых углов $\psi^2 nh = \lambda$. Учитывая $\phi = n\psi$, находим

$$\phi^2 = n\lambda/h. \quad (4.10)$$

Это первое темное кольцо (после центра). Для радиуса первого темного кольца

$$r = f\phi = f(n\lambda/h)^{1/2} = 0,95 \text{ см.}$$

Для существования интерференционной картины m должно быть меньше m_{\max} , при котором картина исчезает. Из (4.8) следует $m < \lambda/\Delta\lambda$. Учитывая, что при малых углах (ϕ и ψ) $m\lambda = 2hn$, получаем

$$\Delta\lambda < \lambda/m = \lambda^2/(2hn) = 0,75 \text{ \AA.}$$

Найдем, сколько темных колец m можно наблюдать, если диаметр линзы $D = 8$ см, а источник S помещен посередине между линзой и пластинкой на расстоянии f от линзы (№ 4.4). Пренебрегая толщиной пластиинки по сравнению с фокусным расстоянием линзы, находим максимальный угол $\phi_{\max} = D/(6f)$. Соотношение (4.10) написано для первого кольца. Для m -го кольца $\phi^2 = nm\lambda/h$, откуда

$$m = hD^2/(36nf^2\lambda) = 2. \quad (4.11)$$

При очень тонкой пластиинке картины не получается (не набирается нужная разность хода). Минимальной будет такая толщина, при

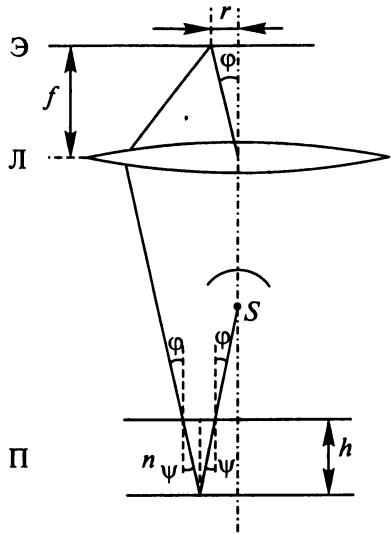


Рис. 4.4

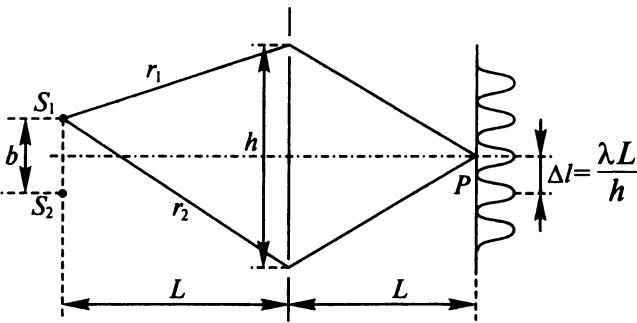


Рис. 4.5

которой получается по крайней мере одно кольцо ($m = 1$) (№ 4.5). Подставляя в (4.11) $m = 1$, находим $h_\Phi = 36\pi f^2 \lambda / D^2 = 0,81$ мм.

Свет от двух одинаковых некогерентных точечных источников (рис. 4.5) S_1 и S_2 ($\lambda = 500$ нм, $\Delta\lambda = 50$ нм) падает на непрозрачный экран с двумя отверстиями, расстояние между которыми $h = 1$ см. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается вблизи точки P , лежащей на оси системы. Источники и точка наблюдения находятся на одинаковом расстоянии $L = 2$ м от экрана. При симметричном удалении источников от оси (т. е. при увеличении расстояния b между источниками) интерференционная картина в окрестности точки P периодически возникает и исчезает. Оценим число периодов восстановления интерференционной картины при увеличении расстояния b от нуля до h ($0 \leq b \leq h$) (№ 4.6). Используя (3.11) и рис. 4.5, получаем для разности хода из источника S_1 до P : $r_2 - r_1 = bh/(2L)$. Максимальное число периодов при изменении b от нуля до h определяется из условия $h^2/(2L) = m\lambda$, откуда $m_{\max} = h^2/(2L\lambda) = 50$. Совпадающую с этой картину получим и для второго источника, если будет монохроматичность. Если источники неменохроматичные, то из (4.8) находим $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda = 10$.

Свет далекого точечного источника S падает на фотоприемник ФП непосредственно и отразившись от горизонтальной плоскости (рис. 4.6). При вертикальном перемещении источника фотоприемник регистрирует изменения интенсивности падающего на него света. Оценим максимальный угол α возвышения источника над горизонтом, при котором еще заметны изменения фототока, если перед фотоприемником установлен светофильтр СФ с полосой пропускания $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{11}$ Гц. Входное отверстие фотоприемника находится на высоте $h = 1$ см над отражающей плоскостью (№ 4.7). Используя (3.11), для разности хода получаем $\Delta r = h \cdot 2\alpha$. Из (4.8) находим максимальный порядок интерференции $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda =$

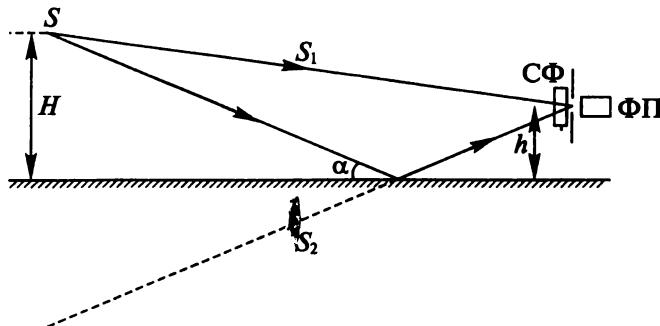


Рис. 4.6

$= v/\Delta\nu$. Изменения фототока будут наблюдаться, пока $\Delta r = 2ha \ll m_{\max}\lambda = \lambda v \Delta\nu = c/\Delta\nu$. Отсюда $\alpha < c/(2h\Delta\nu) = 0,05$.

В интерферометре Рэлея плоская волна испытывает дифракцию на двух щелях. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ см (рис. 4.7). Одну из щелей закрывают плоскопараллельной пластинкой диспергирующего вещества толщиной $h = 0,01$ мм с законом дисперсии $n(\lambda) = A - B\lambda$, где A и B — некоторые постоянные. При этом белая (ахроматическая) полоса смещается на расстояние $l = 4$ мм. Найдем постоянную A , если известно, что расстояние между щелями равно $H = 1$ см (№ 4.8). Изложенное про дифракцию на щелях подразумевает, что щели являются точечными источниками света. Дифракционная картина — это интерференционная картина. При вычислении разности фаз кроме разности хода надо учесть влияние пластины из диспергирующего вещества, которая дает разность хода $(n - 1)h$. Учитывая (3.11), для разности фаз получаем

$\Phi = (2\pi/\lambda) \{lH/f - [n(\lambda) - 1]h\}$. Условие ахроматичности состоит в том, что Φ не зависит от λ , т. е. $d\Phi/d\lambda = 0$. Поэтому

$$-(2\pi/\lambda)\{lH/f - [n(\lambda) - 1]h\} - (2\pi h/\lambda)dn/d\lambda = 0,$$

откуда $A = 1 + lH/(fh) = 5$.

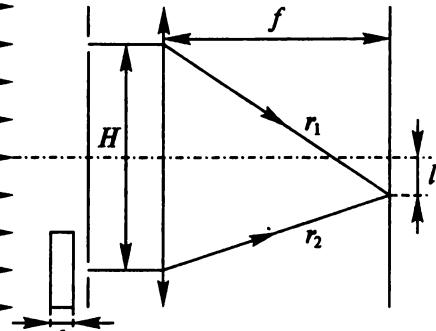


Рис. 4.7

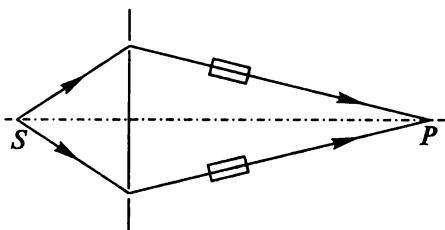


Рис. 4.8

вет изменение интенсивности света в точке P имеет осциллирующий характер. Определим разность давлений Δp газа в кюветах, при которой амплитуда осцилляций становится равной нулю, если 1-й минимум интенсивности наступает при разности давлений $\Delta p_1 = 10^{-3}$ мм рт. ст. Спектр излучения точечного источника S равномерен в полосе $\Delta\omega$ и имеет относительную ширину $\Delta\omega/\omega = 10^{-5}$ (№ 4.9). Показатель преломления воздуха n растет с увеличением плотности, которая пропорциональна давлению. При малых изменениях можно считать в данном случае для кювет длиной l , что $(n - 1)l = a\Delta p$, где a — постоянная величина. Используя (3.12), получаем

$$I = 2I_0[1 + \cos(k\Delta r)] = 2I_0[1 + \cos[k(n - 1)l]].$$

Подставляя $k = \omega/c$ и интегрируя это по спектру, находим

$$\begin{aligned} I &= 2(I_0/\Delta\omega) \int_{\omega_1}^{\omega_2} [1 + \cos(\omega a\Delta p/c)] d\omega = \\ &= 2I_0 \{1 + [2c/(\Delta\omega a\Delta p)] \cos[(\omega_1 + \omega_2)a\Delta p/(2c)] \sin[\Delta\omega a\Delta p/(2c)]\}. \end{aligned}$$

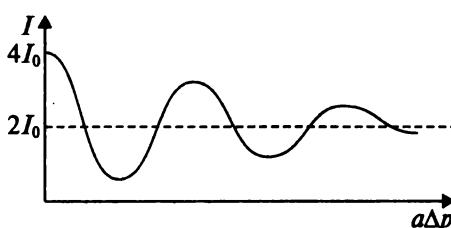


Рис. 4.9

$= \Delta\omega a\Delta p_2/(2c)$. Исключая a , находим

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 2\omega/\Delta\omega = 200 \text{ мм рт. ст.}$$

Интерференция света от двух малых отверстий в непрозрачном экране наблюдается в точке P (рис. 4.8). Позади отверстий на пути лучей поставлены две одинаковые кюветы, наполненные воздухом при одинаковом начальном давлении. При изменении давления в одной из кювет

изменение интенсивности в точке P в зависимости от $a\Delta p$ показано на рис. 4.9, который можно сравнить с рис. 4.3. Обозначив $(\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega$, получаем условие первого минимума $\omega a\Delta p_1/c = \pi$. Картина исчезает, когда аргумент синуса становится равным $\pi =$

Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на воздушном клине между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\alpha = 1'$. Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ и шириной $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$. Определим: 1) расстояние Δx между двумя соседними полосами; 2) максимальное количество полос N , которые можно было бы видеть на клине, если бы его размеры не были ограничены; 3) расстояние x последней наблюдаемой полосы от вершины клина и толщину h клина в этом месте; 4) максимально допустимое угловое расхождение лучей $\delta\phi$, при котором возможно наблюдение всех полос (№ 4.10). Обозначая расстояние до m -й светлой полосы x_m и толщину клина в этом месте h , имеем: $\alpha = h/x_m = m\lambda/(2x_m)$. Отсюда $x_m = m\lambda/(2\alpha)$ и $\Delta x = \lambda/(2\alpha) = 0,94 \text{ мм}$. Из (4.8) $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda \approx 54\,600$. Отсюда $x_m = m_{\max}\Delta x \approx 51,3 \text{ м}$, $h_m = \lambda^2/(2\Delta\lambda) \approx 14,9 \text{ см}$. При максимальном h_m разность хода между нормально падающим лучом и отличающимся на $\delta\phi$ должна быть меньше $\lambda/2$. Отсюда

$$2h(1 - \cos\delta\phi) = h(\delta\phi)^2 < \lambda/2.$$

Поэтому $\delta\phi < (\Delta\lambda/\lambda)^{1/2} \approx 0,25'$.

Найдем видность V интерференционной картины в некотором интерферометре, использующем квазимонохроматический источник света, и ее зависимость от ширины спектра $\Delta\nu$, который изображен на рис. 4.10, (№ 4.11). Используя (4.4), получаем

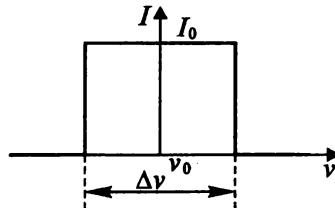


Рис. 4.10

$$\begin{aligned} I(y) &= 2I_0/(\Delta\omega) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[1 + \cos\left(\frac{\omega ly}{cL}\right) \right] d\omega = \\ &= 2I_0 \left\{ 1 + 2cL/(\Delta\omega ly) \cos[(\omega_1 + \omega_2)ly/(2cL)] \sin[\Delta\omega ly/(2cL)] \right\}. \end{aligned}$$

Эта зависимость изображена на рис. 4.3. Используя (3.11) для разности хода Δr , можем ввести обозначение

$$\beta = \Delta\omega ly/(2Lc) = \Delta\omega\Delta r/(2c).$$

Максимальная и минимальная интенсивности: $I_{\max} = 2I_0(1 + \sin\beta/\beta)$, $I_{\min} = 2I_0(1 - \sin\beta/\beta)$.

Для видности, используя (4.3), получаем

$$V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = \sin\beta/\beta.$$

Два пучка белого света, полученные от одного точечного источника, сходятся на входной щели оптического **спектрального прибора**. Разность хода $\Delta = 300$ м. Оценим разрешающую способность R спектрального прибора, который может обнаружить интерференцию этих пучков (№ 4.12). Разность хода отбирает длины волн из сплошного спектра. Для максимумов имеем: $\Delta = m\lambda_m$. Здесь m — целое число. Только эти длины волн дадут усиление в спектре. Все остальные создают фон. Для соседних максимумов получаем $\Delta = (m + 1)\lambda_{m+1} = m\lambda_m + \lambda_{m+1}$. Откуда $\Delta\lambda = \lambda_{m+1} - \lambda_m = \lambda_m/m = \lambda_m^2/\Delta$. Разрешающая способность спектрального прибора $R = \lambda/\Delta\lambda$. Взяв среднее значение длины волны белого света $\lambda = 600$ нм, находим $R \geq \lambda/\Delta\lambda = m = \Delta/\lambda \approx 5 \cdot 10^8$.

Для минимумов $\Delta = (m + 1/2)\lambda_m$.

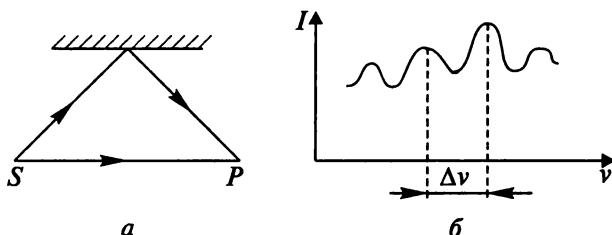


Рис. 4.11

Два пучка белого света от одного источника приходят в точку наблюдения P (рис. 4.11, *a*) с разностью хода Δ . С помощью спектроскопа высокой разрешающей способности исследуется распределение энергии в спектре колебаний, возникающих в точке P при наложении обоих пучков. Оказалось, что наблюдаются чередующиеся максимумы и минимумы спектральной интенсивности $I(\nu)$, причем частотный интервал между соседними максимумами $\Delta\nu = 10$ МГц (рис. 4.11, *б*). Определим разность хода Δ (№ 4.13). Для максимума m -го порядка $\Delta = m\lambda = mc/v_m$. Для соседних максимумов $v_{m+1}\Delta/c - v_m\Delta/c = 1$. Отсюда $\Delta = c/(v_{m+1} - v_m) = c/\Delta\nu = 30$ м.

Монохроматическое излучение проходит через интерферометр Маха—Цандера, в одном из плеч которого расположена кювета с газом длиной l . В кювете создается избыточное давление. При этом показатель преломления газа в нем изменяется по закону $n(t) = 1 + at$. Определим спектр колебаний тока фотоприемника, расположенного в области нулевой полосы интерферометра (№ 4.14). Используя формулу для сложения монохроматических

волн (3.12), получаем $I \sim I_0[1 + \cos(k\Delta r)] = I_0[1 + \cos(\omega/\alpha t/c)]$. Отсюда следует, что ток меняется во времени с частотой $\Omega = \omega/\alpha/c$.

В фурье-спектрометре, служащем для исследования спектрального излучения, одно из зеркал интерферометра Майкельсона перемещается со скоростью $v = 0,1$ см/с (рис. 4.12). Найдем, какова зависимость тока фотоприемника от времени $I(t)$, если излучение содержит две спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$, где $\delta\lambda = 0,02$ нм, с отношением интенсивностей $I_2/I_1 = 0,5$. Оценим минимальное время измерения, необходимое для разрешения этих линий. Изобразим график зависимости тока от времени (№ 4.17). Разность хода $k\Delta = 2\omega vt/c$. Используя (3.12) и складывая две гармоники, получаем

$$\begin{aligned} I(t) &= I_1[1 + \cos(2\omega_1 vt/c)] + I_2[1 + \cos(2\omega_2 vt/c)] = \\ &= I_1 + I_2 + I_1 \cos \Omega_1 t + I_2 \cos \Omega_2 t = 1,5I_1 + I_c(t) \cos \Omega t. \end{aligned}$$

На рис. 4.13 показано сложение амплитуд с учетом фаз. Здесь $I(t)$ определяется по теореме косинусов: $I_c^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\Delta\Omega t)$; частота биений $\Delta\Omega = 2\Delta\Omega v/c = 4\pi\delta\lambda v/\lambda^2 = 2\pi \cdot 0,16$ рад/с; период биений $\tau = 2\pi/\Delta\Omega = 6,25$ с; несущая частота $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2 \approx 2\omega v/c = 4\pi v/\lambda = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3$ рад/с; период несущей частоты $T = 2\pi/\Omega = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с. На рис. 4.14 показан график зависимости тока от времени. Время измерения должно быть больше периода биений.

Такой же интерферометр (см. рис. 4.12) можно использовать для источника, излучающего на длине волны $\lambda = 500$ нм, с шириной спектральной линии $\Delta\lambda = 0,01$ нм. Спектральная интенсивность внутри спектральной линии $I(\omega) = I_0 = \text{const}$. Найдем зависимость тока фотоприемника от времени $I(t)$ и оценим минимальное время, необходимое для изучения спектрального состава излучения, при $v = 0,01$ см/с. Нарисуем график зависимости тока от времени (№ 4.18). Используя (4.4) и подставляя туда $t = vt$, находим

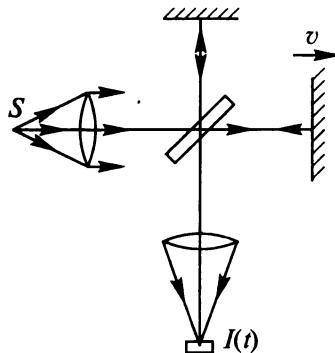


Рис. 4.12

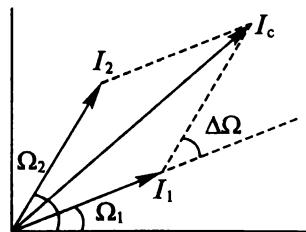


Рис. 4.13

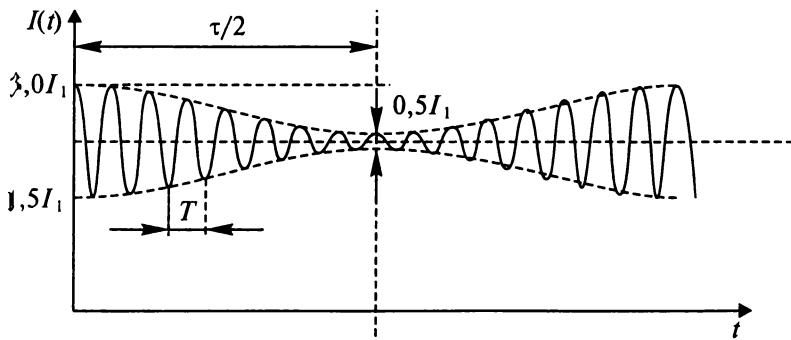


Рис. 4.14

$$I(t) \sim \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} I_0 d\omega [1 + \cos(\omega vt/c)] \sim \\ \sim I_0 \Delta\omega [1 + \sin(2\omega vt/c) \sin(\Delta\omega vt/c) / (\Delta\omega vt/c)].$$

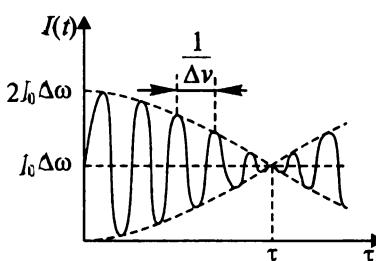


Рис. 4.15

Эта зависимость изображена на рис. 4.15.

Учитывая, что $\omega/c = 2\pi/\lambda$, получаем для несущей частоты $v = 2\omega v/(2\pi c) = 2v/\lambda = 400$ Гц, для частоты модуляции $f = \Delta\omega v/(2\pi c) = \Delta\lambda v/\lambda = 1/250$ Гц. Время измерения $\tau = 1/(2f) = 125$ с.

В интерференционном эксперименте в микроволновом радиодиапазоне ($\lambda = 3$ см) два точечных

некогерентных источника излучения S_1 и S_2 располагались на высотах h_1 и h_2 над гладкой поверхностью озера. Точечный приемник (Пр) излучения находился на расстоянии $L = 100$ м и мог перемещаться вдоль вертикальной оси y (рис. 4.16). Считая поверхность воды идеальным зеркалом, оценим с помощью приведенной на рис. 4.17 интерферограммы $I(y)$ (т. е. зависимости интенсивности

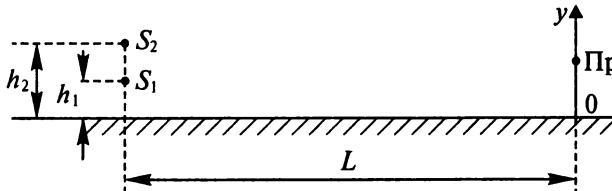


Рис. 4.16

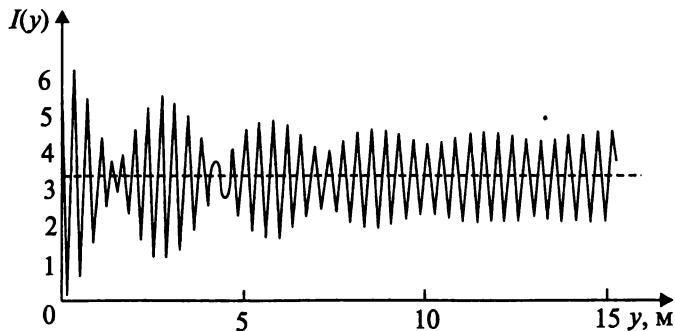


Рис. 4.17

I волн в точке приема от положения y приемника): 1) отношение интенсивностей I_{02}/I_{01} источников; 2) относительные ширины $\Delta\lambda/\lambda$ спектров обоих источников; 3) высоты h_1 и h_2 , на которых располагались источники. Углы наклона интерферирующих пучков к горизонтальной поверхности считаем малыми (№ 4.19). Для сложения монохроматических источников из (3.12) имеем

$$I_1(y) = I_{01}[1 + \cos(kyl_1/L)]. \quad (4.12)$$

На рис. 4.18 эта зависимость показана штриховой линией. Подставляя $k = 2\pi/\lambda$, получаем положения m -го максимума и расстояние между максимумами

$$y_m = m\lambda L/l_1, \quad \Delta y_1 = \lambda L/l_1. \quad (4.13)$$

Для немонохроматических источников из (4.4) имеем

$$I_2(y) = 2I_{02}\{1 + 2cL/(\Delta\omega l_2 y)\cos[\omega l_2 y/(cL)]\sin[\Delta\omega l_2 y/(2cL)]\}. \quad (4.14)$$

Эта зависимость показана на рис. 4.18 сплошной линией. Для максимумов выполняется (4.13).

Полученная в эксперименте и приведенная в условии зависимость (см. рис. 4.17) при больших значениях y соответствует монохроматической зависимости (4.12). Это возможно в том случае, если один из источников, например обозначенный 1, является монохроматическим, а второй — квазимонохроматическим. Из (4.13), учитывая, что $l_1 = 2h_1$, и подсчитывая по зависимости, пред-

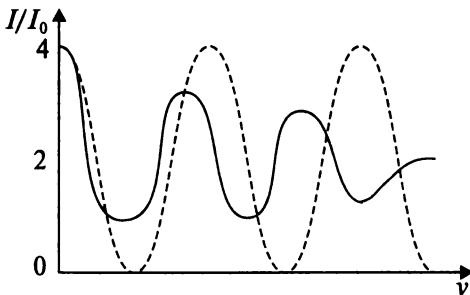


Рис. 4.18

ставленной на рис. 4.17, расстояние между максимумами $\Delta y_1 = 15/40 = 0,375$ м, получаем $h_1 \approx 4$ м. Для немонохроматического источника из (4.14) получаем расстояние между максимумами $\Delta y_2 = \lambda L/I_2$. Так как это отличается от Δy_1 , то возникают биения. Из рис. 4.17 видно, что биения происходят через $n = 8$ полос, т. е. для совпадения фаз имеем: $n\Delta y_2 = (n \pm 1)\Delta y_1$. Получаем два возможных значения $\Delta y_2 = 7\Delta y_1/8 \approx 0,328$ м и $9\Delta y_1/8 \approx 0,422$ м) и две возможные высоты $h = \lambda L/(2\Delta y_2)$ (4,57 и 3,55 м). Из рис. 4.17 следует, что биения прекращаются примерно через 30 полос (т. е. $m_{\max} = 30$). Из (4.14) это должно произойти, когда синус равен нулю. В результате имеем

$$m_{\max} = y/\Delta y_2 = \omega/\Delta\omega = \lambda/\Delta\lambda. \quad (4.15)$$

Отсюда находим $\Delta\lambda/\lambda = 1/m_{\max} = 1/30 \approx 3\%$.

Используя рис. 4.17 и рис. 4.18, получаем: $2I_{01} \approx 4,7 - 3,5 = 1,2$ усл. ед.; $2I_{01} + 2I_{02} \approx 3,5$, откуда $I_{02}/I_{01} \approx 1,9$.

С помощью интерферометра Майкельсона получена интерферограмма $I(\Delta)$, т. е. зависимость интенсивности I в интерференционной картине от разности хода Δ (рис. 4.19). В эксперименте использовался точечный источник света, в спектре которого имелись две спектральные линии. Используя интерферограмму, оценим: 1) отношение интенсивностей I_{02}/I_{01} спектральных линий; 2) длины волн λ_1 и λ_2 спектральных линий; 3) ширины $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$ спектральных линий. Интенсивности интерферирующих пучков света в обоих плечах интерферометра Майкельсона будем считать одинаковыми (№ 4.20). Как и в предыдущей задаче из интерферограммы видно, что одна из спектральных линий достаточно монохроматична. Из рис. 4.19 для ее длины получаем $\lambda_1 = 15 \text{ мкм}/27 = 0,55 \text{ мкм}$. Для нахождения λ_2 используем рис. 4.19. По рисунку

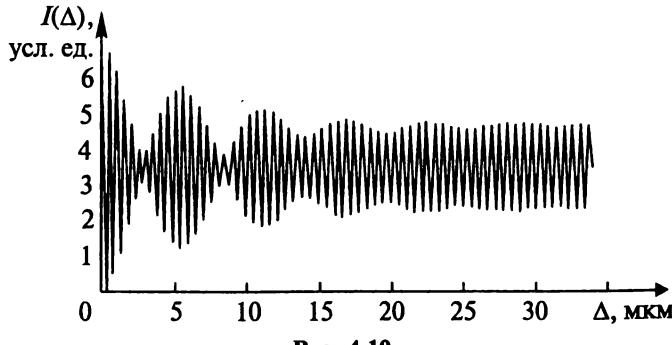


Рис. 4.19

на биение приходится $n = 10$ волн. Поэтому $n\lambda_2 = (n \pm 1)\lambda_1$. Отсюда получаем два возможных значения λ_2 (500 и 600 нм). Так как биения заканчиваются примерно при $\Delta_{\max} = m_{\max}\lambda_2 = 20$ мкм, то используя (4.16), находим $\Delta\lambda_2 = \lambda_2/m_{\max} = \lambda_2^2/\Delta_{\max}$. Получаем два возможных значения $\Delta\lambda_2$ (18 и 12,5 нм). Как и в предыдущей задаче из рис. 4.19 и 4.18 получаем $2I_{01} \approx 4,7 - 3,5 = 1,2$ усл. ед.; $2I_{01} + 2I_{02} \approx 3,5$ усл. ед., откуда $I_{02}/I_{01} \approx 1,9$.

Для измерения углового расстояния между двумя удаленными некогерентными источниками их излучение пропускают через фильтр с полосой $\Delta\lambda$ вблизи линии $\lambda_0 = 500$ нм, а затем — через интерферометр Майкельсона, одно из зеркал которого перемещается со скоростью $v = 0,1$ см/с (на рис. 4.20: Z_1 и Z_2 — зеркала; Π — полупрозрачная пластина; Φ — фотоприемник; AC — анализатор спектра). Анализ спектра сигнала фотоприемника, пропорционального интенсивности света, показал наличие спектральных компонент с разностью частот $\Delta\nu = 5$ Гц. Определим угловое расстояние α между источниками, а также оценим требуемое время измерения и полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$ (№ 4.21). В соответствии с (3.1) для прямых лучей в интерферометре складывающиеся волны дают

$$E_1 \sim e^{ikL} + e^{ik(L-2vt)}.$$

Здесь L — длина плеча интерферометра. Одно из плеч уменьшается за счет перемещения зеркала со скоростью v . Из (3.12) получаем, что интенсивность имеет гармонику $\cos(2kv t) = \cos\Omega_1 t$. Для источника под углом α аналогичным образом получаем

$$E_2 \sim e^{ik\cos\alpha L} + e^{ik\cos\alpha(L-2vt)}.$$

Соответственно интенсивность имеет гармонику $\cos(2k\cos\alpha vt) = \cos\Omega_2 t$.

Обнаруженная разность частот этих спектральных компонент с учетом малости α и равенства $k = 2\pi/\lambda_0$:

$$\Delta\nu = \Omega_1 - \Omega_2 = 2kv(1 - \cos\alpha)/(2\pi) \approx v\alpha^2/\lambda_0.$$

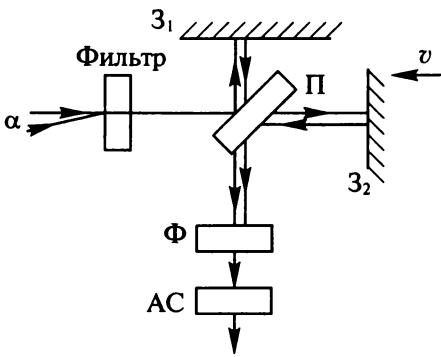


Рис. 4.20

Отсюда находим $\alpha = (\lambda_0 \Delta v / v)^{1/2} \approx 0,05$ рад.

Для немонохроматического излучения с шириной спектра $\Delta k = 2\pi\Delta\lambda/\lambda^2$ каждая из гармоник уширяется в полосу $\Delta f = \Delta\Omega/(2\pi) = 2v\Delta k/(2\pi) = (v/\lambda)(\Delta\lambda/\lambda)$. Для возможности наблюдения, которое есть в данном эксперименте, должно быть $\Delta f < \Delta v$. Поэтому $\Delta\lambda < \alpha^2\lambda = 25$ нм. Ограничение времени наблюдения τ (обрезание гармоники) приводит к уширению спектра гармоники $\delta v \sim 1/\tau$ (подробнее см. разд. 5, формула (5.7)). Это уширение также должно удовлетворять требованию: $\delta v < \Delta v$. В результате $\tau > 1/\Delta v = 0,2$ с.

5. Протяженные источники света. Пространственная когерентность

В разделе 3 источники считались точечными, монохроматическими и когерентными (так как они получались разделением одного на два). Реально любой источник имеет некоторый размер. Рассмотрим протяженные монохроматические источники, которые можно представить как бы состоящими из точечных некогерентных источников. В таком случае на экране происходит наложение интерференционных картин. Складываются квадраты амплитуд, т. е. интенсивности отдельных источников и важно, насколько сдвинута одна интерференционная картина относительно другой. Считается, что картина исчезает, если она сдвигается больше чем на четверть расстояния между максимумами (разность хода меняется на четверть длины волны). На рис. 5.1 показана обычная схема Юнга. Разность фаз лучей, идущих из O в P ,

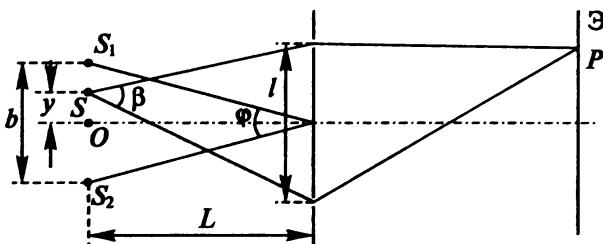


Рис. 5.1

обозначим $\psi = k\Delta r$. Она определяется, например, с помощью (3.11) и описывает распределение максимумов и минимумов на экране. Для разности фаз лучей, идущих в P из точки S , отстоящей от O на расстояние y , получаем $\psi + (2\pi/\lambda)ly/L$. В соответствии с (3.12) находим интенсивность суммы волн в P из S

$$I = 2I_0\{1 + \cos[\psi + (2\pi/\lambda)ly/L]\}, \quad (5.1)$$

где I_0 — интенсивность источника.

Для двух некогерентных источников света одинаковой интенсивности I_0 (один в S_1 , другой в S_2 на расстоянии b от первого) из (5.1) получаем

$$I = 2I_0\{1 + \cos\psi\cos[\pi ly/(\lambda L)]\}. \quad (5.2)$$

В случае протяженного источника интенсивности I_0 и ширины b надо (5.1) проинтегрировать от $-b/2$ до $b/2$

$$I = 2(I_0 / b) \int_{-b/2}^{b/2} \{1 + \cos[\psi + (2\pi / \lambda)ly / L]\} dy = \\ = 2I_0 \{1 + \cos\psi \sin[\pi bl/(\lambda L)]/[\pi bl/(\lambda L)]\}. \quad (5.3)$$

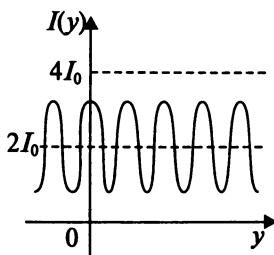


Рис. 5.2

Интерференционная картина на экране, следующая из (5.3), определяется изменением $\psi(y)$. Эта картина показана на рис. 5.2. Максимальная интенсивность при $\cos\psi = +1$, минимальная при $\cos\psi = -1$. Отличие максимума и минимума от $4I_0$ и 0 определяется вторым множителем, зависящим от размера источника. Из (4.3) для видности картины получаем (№ 5.1)

$$V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = |\sin[\pi bl/(\lambda L)]/[\pi bl/(\lambda L)]|. \quad (5.4)$$

Эта зависимость от b показана на рис. 5.3.

Из (5.4) видно, что интерференционная картина исчезает ($V = 0$) при

$$l = \lambda L/b = \lambda/\phi. \quad (5.5)$$

Эта величина называется **поперечным размером (шириной) пространственной когерентности**, а $\phi = b/L$ — угловой шириной источника. Таким образом, изменение фазы накапливается и приводит к отсутствию когерентности не только при смещении вдоль направления распространения волны (длина когерентности), но и в плоскости, перпендикулярной этому направлению (ширина когерентности). Для получения интерференционной картины оптическая разность хода $l_{\text{ход}}$ и расстояние между щелями $l_{\text{щел}}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$l_{\text{ход}} < c\tau = \lambda^2/\Delta\lambda, \quad l_{\text{щел}} < \lambda L/b = \lambda/\phi. \quad (5.6)$$

Здесь учтено, что длительность цуга (из соотношения неопределенностей)

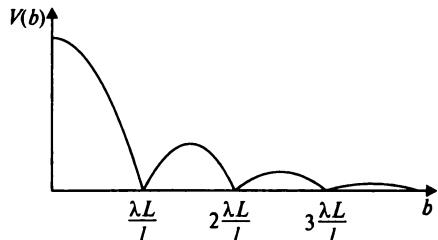


Рис. 5.3

$$\tau \sim 1 / \Delta v. \quad (5.7)$$

а также, что

$$\lambda = c/v \text{ и } \Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda. \quad (5.8)$$

Под Δ здесь подразумевается абсолютное значение разности. Апертурой интерференции называется угол

$$\beta = l/L = \lambda/b. \quad (5.9)$$

На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. Найдем, при каком расстоянии l между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном, если угловой диаметр Солнца $\varphi \approx 0,01$ рад (№ 5.2). Из (5.6) $l < \lambda/\varphi = 5000 \text{ \AA}/0,01 \approx 0,05 \text{ мм}$. Отметим, что это очень маленькое расстояние.

С помощью линзы L ($f = 50 \text{ мм}$) можно получить изображение Солнца на отверстии в экране \mathcal{E} , за которым помещены две узкие параллельные щели на расстоянии $l = 1 \text{ мм}$ друг от друга. Найдем, при каком расстоянии L между экраном и щелями могут наблюдать-ся интерференционные по-лосы за щелями, если угло-вой диаметр Солнца $\alpha \approx \approx 0,01$ рад (№ 5.3). Система изображена на рис. 5.4. В данном случае размер ис-точника $b = \alpha f$. Из (5.6) следует $L > \alpha f / \lambda \approx 100 \text{ см}$.

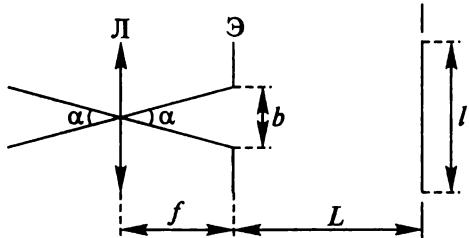


Рис. 5.4

Интерференционная картина наблюдается с помощью бипризмы Френеля (преломляющий угол $\alpha = 20'$, показатель пре-ломления $n = 1,5$). Экран \mathcal{E} и источник света S ($\lambda = 600 \text{ нм}$, $\Delta\lambda = 20 \text{ нм}$) находятся на одинаковом расстоянии от бипризмы. Оце-ним число интерференционных полос, которые будут видны на экране. Найдем, на каком расстоянии от центра интерференцион-ной картины интерференционные полосы размываются. Опреде-лим допустимый размер источника, при котором можно наблю-дать все интерференционные полосы (№ 5.5). Схема опыта пока-зана на рис. 5.5. Воспользуемся результатами решения для бипризмы при точечном источнике (см. № 3.8). Ширина полос $\Delta y = \lambda/\beta = \lambda/[\alpha(n - 1)] = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$. Размытие полос связано с не-монохроматичностью источника и определяется (4.8). Число по-

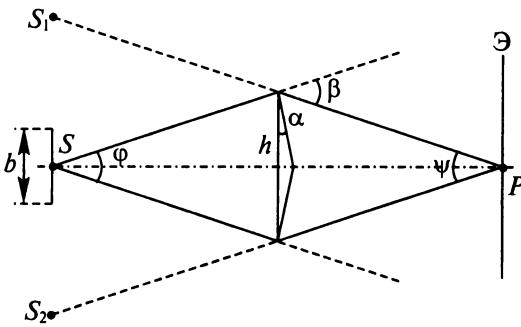


Рис. 5.5

лос вверх по экрану $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda = 600/20 = 30$. Столько же вниз. Таким образом, число интерференционных полос, которые будут видны на экране, $N = 60$. Размытие полос происходит на расстоянии от центра интерференционной картины $y = \Delta u m_{\max} = 0,6$ см. Допустимый размер источника, когда экран и источник находятся на одинаковом расстоянии от бипризмы, в соответствии с (5.9), $b = \lambda/\phi = \lambda/\psi = \lambda/\beta = \Delta u = 2 \cdot 10^{-2}$ см.

Перед линзой Л (рис. 5.6) установлена плоскопараллельная стеклянная пластинка П, перпендикулярная главной оптической оси и освещаемая монохроматическим светом от протяженного источника. Опишем интерференционную картину в фокальной плоскости линзы. Найдем, как изменится эта картина при наклоне пластиинки на угол $\alpha = 10^\circ$ (по отношению к исходному положению). Фокусное расстояние линзы $f = 30$ см (№ 5.6).

Воспользуемся результатами, полученными ранее, (см. рис. 3.11). Интерференционная картина получается для каждого точечного источника благодаря сложению проходящей волны с волной, отразившейся от нижней, а потом и от верхней, поверхностей пластиинки. Это полосы равного наклона. Предполагаем, что дальнейшее (многократное) отражение можно не учитывать

из-за малости коэффициента отражения. С помощью линзы интерференционная картина благодаря осевой симметрии получается в фокальной плоскости линзы в виде колец. Так как картина не зависит от положения источника, она будет отчетливой и при использовании протяженного источника. Благодаря линзе на экране в фокальной плоскости линзы параллельным лучам одинакового на-

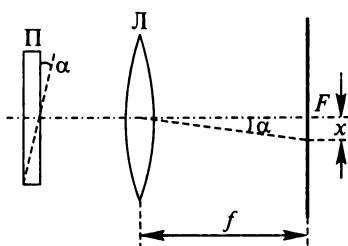


Рис. 5.6

клона соответствует точка. При наклоне пластиинки кольца становятся эллипсами. Центр картины в данном случае находится в точке схождения тех параллельных лучей, которые падают на пластиинку по нормали. Поэтому центр картины при наклоне пластиинки на угол α смещается на $x = f t g \alpha \approx f \alpha = 0,58$ мм.

Радиоизлучение космического источника длиной волны λ , имеющего угловой размер φ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу на высоте h над уровнем моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определим, как будет меняться интенсивность принимаемого сигнала в зависимости от угла α возвышения источника над горизонтом. Найдем, при каких значениях углового размера источника интенсивность принимаемого сигнала не будет зависеть от α . Считаем значения α и φ малыми (№ 3.19). На рис. 5.7 приведены все обозначения и ход лучей. Для разности

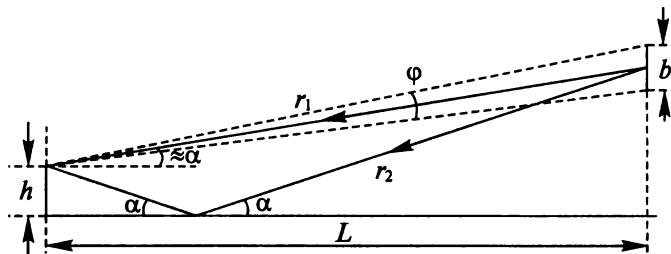


Рис. 5.7

хода имеем $r_2 - r_1 = 2h\alpha$, для размера источника — $b = \varphi L$. Используем (5.3), учитывая, что

$$\psi = (2\pi/\lambda)2h\alpha = 4\pi h\alpha/\lambda.$$

В результате получаем зависимость $I(\alpha)$:

$$I = 2I_0\{1 + \cos(4\pi h\alpha/\lambda) [\sin(2\pi h\varphi/\lambda)]/(2\pi h\varphi/\lambda)\}. \quad (5.10)$$

Зависимость интенсивности от α исчезает, когда синус равен нулю, т. е. $\varphi = \lambda m/(2h)$, где $m = 1, 2, \dots$

Свет от протяженного монохроматического источника S падает на непрозрачный экран \mathcal{E} , в котором имеются два малых отверстия. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается в точке P (рис. 5.8). Источник света S и точка P находятся на одинаковом расстоянии L от экрана. При увеличении расстояния l между отверстиями изменение интенсивности в точке P имеет осциллирующий характер. Определим линейный размер b ис-

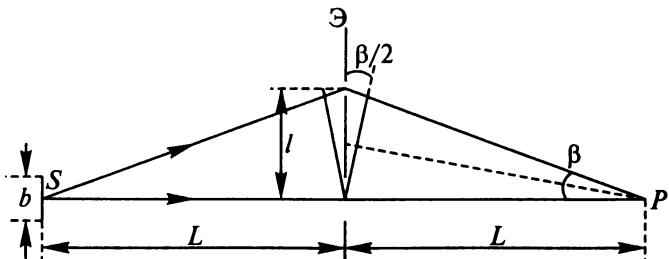


Рис. 5.8

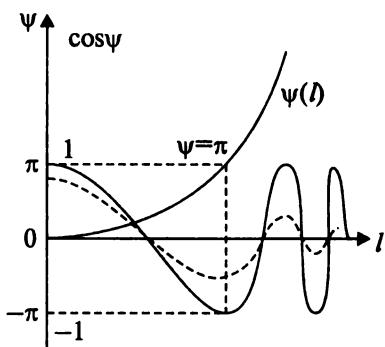


Рис. 5.9

точника света, если 1-й минимум интенсивности в точке P наблюдается при $l = l_1 = 1$ см, а амплитуда осцилляций становится равной нулю при $l = l_2 = 20$ см (условие $l \ll L$ выполняется всегда) (№ 5.8). Чтобы воспользоваться (5.3), вычислим разность хода $\Delta r = 2l\beta/2 = l^2/L$ и $\psi = (2\pi/\lambda)l^2/L$. На рис. 5.9 показано изменение ψ и $\cos\psi$ в зависимости от l (парабола и осцилляции с уменьшающимся периодом). Штриховой линией показан результат умножения косинуса на синус и деления на величину, в которую входит l . Минимум косинуса достигается при $\psi = \pi$, откуда $2l_1^2 = \lambda L$. Для обращения амплитуды осцилляций в нуль аргумент синуса должен быть равен π , отсюда находим линейный размер источника $b = \lambda L/l_2 = 2l_1^2/l_2 = 0,1$ см.

Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения $L = 25$ см в направлении, перпендикулярном поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно ребру клина. Оценим максимальное число интерференционных полос N , которое можно увидеть в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза $d = 5$ мм. Оценим также степень монохроматичности света, необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаться (№ 5.9). Интерферируют лучи, отраженные от верхней и нижней пластинок. В точки пространства, расположенные

Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения $L = 25$ см в направлении, перпендикулярном поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно ребру клина. Оценим максимальное число интерференционных полос N , которое можно увидеть в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза $d = 5$ мм. Оценим также степень монохроматичности света, необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаваться (№ 5.9). Интерферируют лучи, отраженные от верхней и нижней пластинок. В точки пространства, расположенные

ные над верхней пластинкой, при рассеянном освещении приходят лучи со всевозможными сдвигами, и это не приводит к интерференционной картине. Но в каждой точке на поверхности верхней пластины при малой толщине клина и падении лучей почти нормально лучи из разных точек будут складываться и разность хода зависит только от толщины клина. Таким образом, интерференционная картина локализуется на поверхности верхней пластины, она как бы нарисована на этой поверхности. Изображение данной точки попадает в глаз (рис. 5.10). В точку A на сетчатку глаза благодаря линзе попадают луч, идущий нормально к поверхности, и луч, идущий к поверхности под углом α . Для нормально идущего луча разность хода в точке максимума $\Delta_h = 2h$ (h — толщина клина в данной точке). Заметим, что изменение фазы при отражении от среды с большим показателем преломления на $\lambda/2$ имеет место и на верхней и на нижней пластинке и не учитывается. Для луча, идущего через клин под углом α , разность хода $\Delta_\alpha = 2h(1 - \alpha^2/2) \approx 2h - h\alpha^2$. Интерференционная картина перестанет наблюдаться, если лучи приходят в точку A в противофазе, т. е. разность хода равна $\lambda/2$. Получая отсюда $h\alpha^2 = \lambda/2$ и подставляя в условие максимума ($2h = m\lambda$), находим максимальный порядок $m_{\max} = 2h/\lambda = 1/\alpha^2 = 4L^2/d^2$. Отсюда $N = m_{\max} \approx 10^4$. Для оценки допустимой неменохроматичности для наблюдения такого числа максимумов воспользуемся тем, что интерференционная картина исчезает, если

$$(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda), \quad (5.11)$$

откуда $\Delta\lambda/\lambda = 1/(m_{\max} + 1) \approx 1/m_{\max} = 10^{-4}$.

Полосы равной толщины, получающиеся в тонком стеклянном клине с показателем преломления $n = 1,5$ при освещении рассеянным монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, проецируются линзой L на экран \mathcal{E} . Перед линзой помещена квадратная диафрагма со стороной $d = 1 \text{ см}$ и отстоящая от клина на расстояние $L = 50 \text{ см}$. Найдем, какой максимальный порядок интерференции N может при этом наблюдаться на экране. Главная оптическая ось системы приблизительно перпендикулярна поверхности клина (№ 5.10). Система изображена на рис. 5.11. Оп-

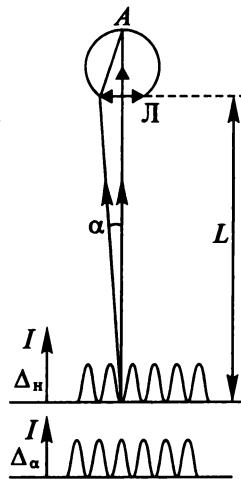


Рис. 5.10

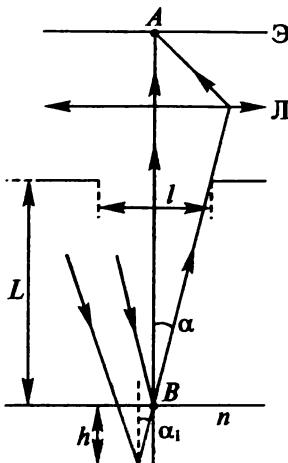


Рис. 5.11

тический путь по нормали к поверхности пластиинки $\Delta = 2hn$. Оптический путь под углом α в соответствии с (3.18): $\Delta_\alpha = 2h(n^2 - \alpha^2)^{1/2}$. То, что получается в точке B на поверхности пластиинки посредством линзы собирается без изменения фазы в точке A на экране. Картина на экране исчезнет, если по нормали при $2hn = m\lambda$ идет минимум, а под углом α при $2hn(1 - \alpha^2/n^2)^{1/2} = m\lambda - \lambda/2$ максимум. Используя эти соотношения, получаем максимальный порядок интерференции $N = m = (n/\alpha)^2 = (2nL/l)^2 = 22\,500$.

Источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдянной пластиинки толщиной $h = 0,1$ мм с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 5.12). На

таком же расстоянии от пластиинки расположена небольшой экран \mathcal{E} , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $\phi = 60^\circ$. Найдем порядок m интерференционной полосы в центре экрана и ширину Δl интерференционных полос. Оценим допустимый размер b и допустимую монохроматичность $\Delta\lambda$ источника. Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм (№ 5.12). Обозначая угол преломления ψ , имеем $\sin\phi/\sin\psi = n$, $AO = htg\psi$, $AB = htg\psi\cos\phi$. В результате для разности хода получаем

$$\Delta = n \cdot 2h/\cos\psi - 2htg\psi\sin\phi = 2hncos\psi = 2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2}. \quad (5.12)$$

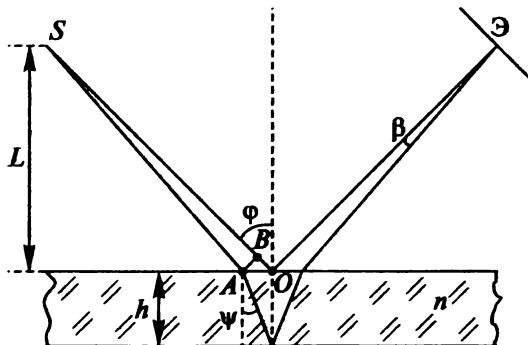


Рис. 5.12

Подставляя значения, находим $\Delta = 2,2 \cdot 10^{-2}$ см.

Заметим, что для получения разности фаз в (5.12) нужно добавить (или отнять) $\lambda/2$, так как один луч отражается от среды с большим показателем преломления.

Порядок интерференции $m = (\Delta \pm \lambda/2)/\lambda \approx 393$. Угол схождения лучей β в силу симметрии примерно равен апертурному углу интерференции

$$\beta = AB/(L/\cos\varphi) = h \operatorname{tg}\psi \cos^2\varphi / L \approx 0,2 \cdot 10^{-4}.$$

Из (3.7) для ширины интерференционной полосы имеем: $\Delta l = \lambda/\beta \approx 2,84$ см. Предельный размер источника из (5.9): $b = \lambda/\beta = 2,84$ см. Допустимая немонохроматичность, как и в (5.11), $\Delta\lambda = \lambda/m \approx 1,42$ нм.

С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы в тонкой плоско-параллельной стеклянной пластинке толщиной $h = 0,2$ мм с показателем преломления $n = 1,41$; при этом угол наблюдения φ может изменяться от 0 до 90° (рис. 5.13). Найдем

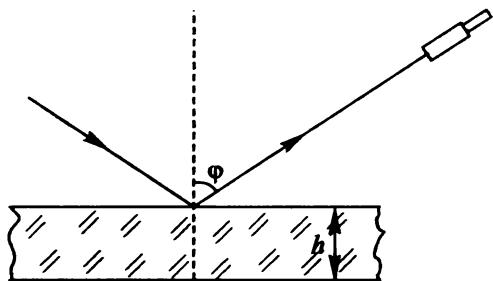


Рис. 5.13

максимальный и минимальный порядок интерференционных полос. Оценим допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника, при которой будут достаточно четко наблюдаться все интерференционные полосы. Определим допустимый размер источника света в этом интерференционном эксперименте. Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм (№ 5.13). Как и в предыдущей задаче здесь наблюдаются полосы равного наклона. Для максимального порядка интерференционных полос из (5.12) при $\varphi = 0$ получаем: $m_{\max} = (2hn - \lambda/2)/\lambda = 1000$. Для минимального порядка при $\varphi = 90^\circ$ находим $m_{\min} = [2h(n^2 - 1)^{1/2} - \lambda/2]/\lambda = 714$. Допустимую немонохроматичность оцениваем как и в (5.11) $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} \approx 0,56$ нм. Так как зрительная труба установлена на бесконечность, картина наблюдается как бы на бесконечности (угол β в предыдущей задаче равен нулю), поэтому источник может быть любого размера. Картина не зависит от положения источника.

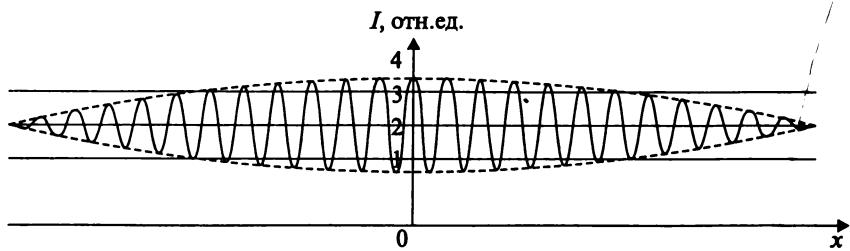


Рис. 5.14

В двулучевой интерференционной схеме с равными интенсивностями интерферирующих лучей используется источник белого света, размер которого $b = 0,025$ см. Интерференционная картина, наблюдаемая через светофильтр, изображена на рис. 5.14. Оценим полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$ и апертуру $\Omega = (1/2)b/L$. (В тексте задачи № 5.14 эта апертура названа апертурой интерференции, которая в действительности определяется (5.9)). Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм (№ 5.14). Немонохроматичность (пропускание фильтра) приводит к тому, что интерференционная картина портится, как это видно из рис. 5.14, примерно через 12 полос. Используя (5.11), получаем $\Delta\lambda = \lambda/m = 500/12 \approx 41,7$ нм. Из рис. 5.14 можно найти видность, определяемую (5.4), $V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = (3,3 - 0,7)/(3,3 + 0,7) \approx 0,65$. Из (5.4) и (5.9) получаем

$$V = |\sin[\pi b l / (\lambda L)] / [\pi b l / (\lambda L)]| = |\sin[\pi \Omega / \beta] / [\pi \Omega / \beta]| = |\sin x / x| = 0,65.$$

Отсюда $x \approx \pi/2$ и $\Omega = \beta/2 = 10^{-3}$.

Можно задать Ω и находить b (№ 5.15).

В одно из плеч интерферометра Майкельсона вместо отражающего зеркала помещена непоглощающая пластина с полупрозрачной передней и зеркальной задней стенкой (рис. 5.15). Толщина пластины $h = 2$ мм, показатель преломления $n = 5$, спектр падающего излучения изменяется от 0 до 110 ГГц. При перемещении зеркала во втором плече детектор регистрирует ряд пиков интенсивности излучения. Найдем, каково расстояние между пиками в единицах длины перемещения зеркала (№ 4.16). В соответствии с (5.6) и заданным спектром излучения для длины когерентности получаем $l_{\text{кор}} = c/\Delta\nu \approx 0,3$ см. Для интерференции необходимо, чтобы оптическая разность хода лучей была меньше этой величины. Поэтому луч, отразившийся от поверхности пластины, не будет когерентен с лучом, отразившимся от задней стенки пластины.

Оптическая разность хода $2hn = 2$ см $> l_{\text{кор}}$. Напомним, что для интерферометра Майкельсона, изображенного на рис. 5.15, подвижное зеркало, перемещаясь с постоянной скоростью v , приводит в соответствии с (3.12) к изменению интенсивности $I \sim 1 + \cos(2kv t) = 1 + \cos(2\omega vt/c) = 1 + \cos(\Omega t)$. Измеряя частоту модуляции Ω , можно найти Ω . Обозначая перемещение зеркала $x = vt$ и положение интерференционного пика при отражении от поверхности пластины $x = 0$, для положения интерференционного пика при отражении от задней стенки пластины имеем: $x = 2hn = 2$ см.

На рис. 5.16 изображена схема установки Майкельсона, предназначенной для измерения угловых диаметров звезд. Зеркала 3_1 — 3_4 направляют в объектив телескопа два пучка света, интерферирующие друг с другом в фокальной плоскости объектива. При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезли, когда расстояние между внешними зеркалами 3_1 и 3_2 , $D = 306,5$ см. Считая, что эффективная длина волны света от Бетельгейзе равна 5750 \AA , вычислим угловой диаметр этой звезды α (№ 5.18). На рис. 5.17 показан источник света, простирающийся от 1 до 2 и отверстия, соответствующие зеркалам 3_1 и 3_2 , на расстоянии D друг от друга. От каждой точки источника благодаря двум отверстиям образуется интерференционная картина. Источники на звезде можно разбить на пары (например, $1'$ и $2'$) так, чтобы интерференционные картины от них были сдвинуты на половину полосы, т. е. разность хода через два отверстия равнялась $\lambda/2$. Таким образом, пути от краев звезды ($1-2$)

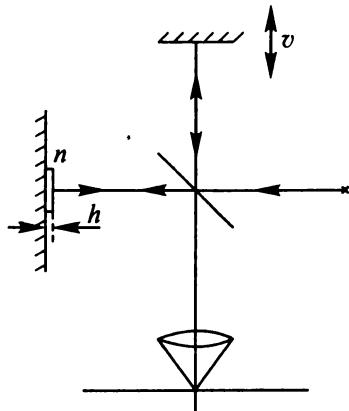


Рис. 5.15

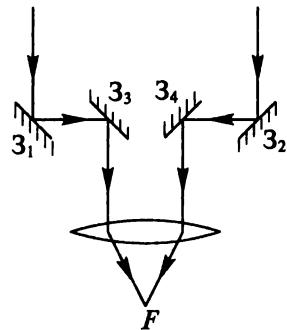


Рис. 5.16

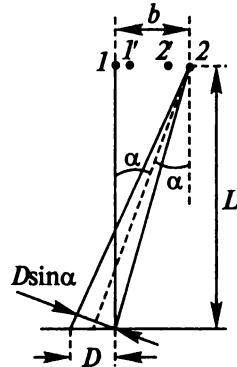


Рис. 5.17

должны различаться на λ . Получаем: $D \sin \alpha \approx D\alpha = \lambda$. Для углового размера звезды находим $\alpha \approx \lambda/D = 1,87 \cdot 10^{-7}$. Можно применить другой способ с использованием (5.3). Обозначая расстояние до звезды L и линейный размер звезды b , получаем, что интерференционная картина исчезает при $bD/(\lambda L) = 1$, откуда $\alpha = b/L = \lambda/D$.

Параллельный пучок света от удаленного источника с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает на бипризму с преломляющим углом $\alpha = 10^{-2}$ рад и шириной $D = 2$ см, выполненную из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ (рис. 5.18). 1) Найдем, на каком расстоянии L от бипризмы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос. 2) Оценим допустимую неменохроматичность $\Delta\lambda$ света, необходимую для наблюдения всех полос. 3) Оценим также допустимый угловой размер ψ источника в этом интерференционном опыте (№ 5.19). Угол отклонения лучей в призме с малым преломляющим углом (см. рис. 3.6) $\varphi = \alpha(n - 1)$. За бипризмой образуются два пучка из параллельных лучей. В соответствии с (3.7) расстояние между интерференционными полосами $\Delta y = \lambda/(2\varphi) = 0,005$ см. Оно не зависит от расстояния до экрана, лишь бы он находился в зоне перекрытия пучков. Максимальное перекрытие пучков и, следовательно, максимальное число полос, как следует из подобия треугольников на рис. 5.18, $L = D/(4\varphi) = 1$ м. Максимальное число полос $N_{\max} = (D/2)/\Delta y = 200$. Максимальный порядок интерференции $m_{\max} = N_{\max}/2 = 100$. Допустимая неменохроматичность в соответствии с (5.11) $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 5$ нм. Допустимый угловой размер удаленного источника должен быть меньше углового расстояния между полосами $\psi < \Delta y/L = \lambda/(D/2) = 5 \cdot 10^{-5}$ рад = $0,17'$. Можно также воспользоваться условием для ширины когерентности (5.6) $D/2 < \lambda/\psi$.

Билинза Бийе изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 10$ см. На расстоянии $x = 3f/2$ от нее помещен источник света в виде щели, освещаемой широкоугольным источником света с длиной волны $\lambda = 5790$ Å. Экран для наблюдения интерференционных полос установлен

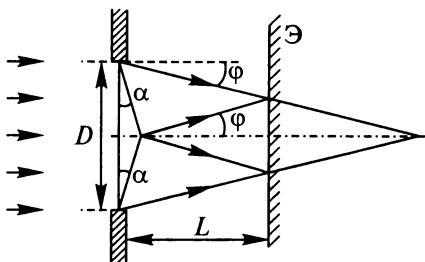


Рис. 5.18

возможное число интерференционных полос. 2) Оценим допустимую неменохроматичность $\Delta\lambda$ света, необходимую для наблюдения всех полос. 3) Оценим также допустимый угловой размер ψ источника в этом интерференционном опыте (№ 5.19). Угол отклонения лучей в призме с малым преломляющим углом (см. рис. 3.6) $\varphi = \alpha(n - 1)$. За бипризмой образуются два пучка из параллельных лучей. В соответствии с (3.7) расстояние между интерференционными полосами $\Delta y = \lambda/(2\varphi) = 0,005$ см. Оно не зависит от расстояния до экрана, лишь бы он находился в зоне перекрытия пучков. Максимальное перекрытие пучков и, следовательно, максимальное число полос, как следует из подобия треугольников на рис. 5.18, $L = D/(4\varphi) = 1$ м. Максимальное число полос $N_{\max} = (D/2)/\Delta y = 200$. Максимальный порядок интерференции $m_{\max} = N_{\max}/2 = 100$. Допустимая неменохроматичность в соответствии с (5.11) $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 5$ нм. Допустимый угловой размер удаленного источника должен быть меньше углового расстояния между полосами $\psi < \Delta y/L = \lambda/(D/2) = 5 \cdot 10^{-5}$ рад = $0,17'$. Можно также воспользоваться условием для ширины когерентности (5.6) $D/2 < \lambda/\psi$.

Билинза Бийе изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 10$ см. На расстоянии $x = 3f/2$ от нее помещен источник света в виде щели, освещаемой широкоугольным источником света с длиной волны $\lambda = 5790$ Å. Экран для наблюдения интерференционных полос установлен

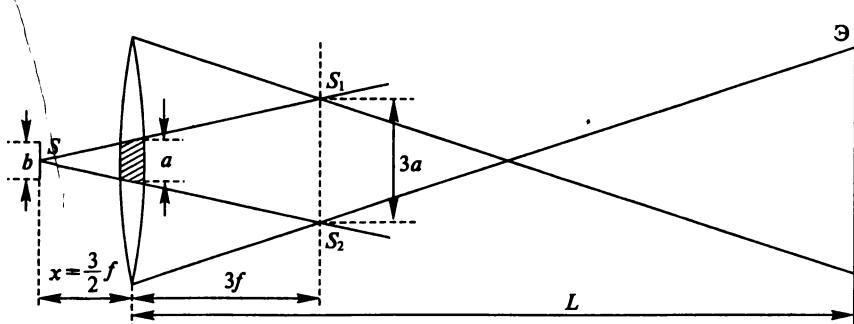


Рис. 5.19

с противоположной стороны билинзы на расстоянии $L = 330$ см от нее. Найдем, при какой минимальной ширине щели b интерференционные полосы на экране пропадут. Считаем, что различные точки щели излучают световые волны некогерентно. Расстояние между половинками билинзы $a = 0,5$ мм (№ 5.7). Система изображена на рис. 5.19. Две половинки линзы образуют два источника S_1 и S_2 , излучение которых, перекрываясь, создает на экране интерференционную картину. Из подобия треугольников находим, что расстояние между источниками равно $3a$, а их расстояние от линзы $3f$. Используя (5.2), получаем, что исчезновение полос происходит при ширине щели $b = \lambda(L - 3f)/(3a) = 1,15$ мм.

Из тонкой линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана центральная полоска шириной $a = 0,5$ см, после чего обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения (билинза). Источник света S с длиной волны $\lambda = 500$ нм располагается на оси системы в фокальной плоскости линзы (рис. 5.20). 1) Найдем, на каком расстоянии L от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос, и определим ширину D у интерференционных полос и их число. 2) Оценим допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника света в этом интерференционном эксперименте, необходимую для наблюдения всех полос. 3) Оценим допустимый размер b источника света (№ 5.20). За билинзой, как и за бипризмой, образуются два пучка из параллельных лучей (см.

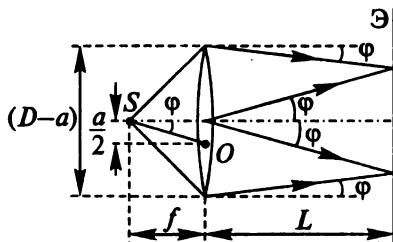


Рис. 5.20

рис. 5.20). Точка O является центром для верхней части линзы. Она отстоит от оси на $a/2$ и через нее луч из S идет не преломляясь. Все лучи, проходящие через верхнюю часть линзы параллельны этому лучу. Угол $\varphi = (a/2)/f$. В соответствии с (3.7) расстояние между интерференционными полосами $\Delta y = \lambda/(2\varphi) = 0,005$ см. Оно не зависит от расстояния до экрана, лишь бы он находился в зоне перекрытия пучков. Максимальное перекрытие пучков и, следовательно, максимальное число полос, как следует из подобия треугольников на рис. 5.20, $L = (D - a)/(4\varphi) = 1$ м. Максимальное число полос $N_{\max} = (D/2)/\Delta y = 200$. Максимальный порядок интерференции $m_{\max} = N_{\max}/2 = 100$. Допустимая немонохроматичность в соответствии с (5.11) $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 5$ нм. Допустимый угловой размер удаленного источника должен быть меньше углового расстояния между полосами $\psi < \Delta y/L = 2\lambda/(D - a) = 5 \cdot 10^{-5}$ рад = 0,17'. Поэтому $b < \psi f = 0,0025$. Можно также воспользоваться условием для ширины когерентности (5.6) $(D - a)/2 < \lambda/\psi$.

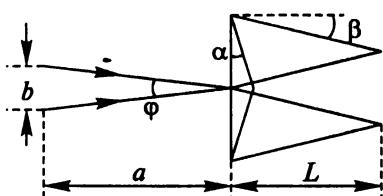


Рис. 5.21

Бипризма освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм от удаленного протяженного источника с угловым размером $\psi = 10^{-3}$ рад. Преломляющий угол бипризмы $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ рад, показатель преломления $n = 1,5$. Определим видность интерференционных полос, наблюдаемых на экране в зависимости от расстояния L между экраном и бипризмой (рис. 5.21). Найдем, при каких значениях L интерференционные полосы размываются. Размер бипризмы считаем достаточно большим. Источник можно считать равномерно светящейся полоской, параллельной ребру бипризмы (№ 5.21).

Так как источник расположен на большом расстоянии от призмы (обозначим a), то на экране сходятся два пучка параллельных лучей под углом (см. рис. 3.6) $2\beta = 2(n - 1)\alpha$. Размер источника $b = a\psi$. Используя (5.3) и (5.4) и подставляя $l = \beta L$, получаем $V = \sin x/x$, где $x = \pi bl/(\lambda a) = \pi\psi 2\beta L/\lambda \approx 0,1L$. В результате

$$V(L) = |\sin(0,1\pi L) / (0,1\pi L)|.$$

Полосы размываются, когда синус равен нулю. Для этого $L = 10m$, где $m = 1, 2, 3, \dots$

В интерференционной схеме (рис. 5.22) используется квазимонохроматический источник света S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и экрана Θ , на котором наблюдается интерференция. Найдем: 1) ширину интерференционной полосы Δy на экране; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный и минимальный порядок интерференции и число наблюдаемых полос N ; 4) степень монохроматичности $\Delta\lambda$, при которой число наблюдаемых полос максимально; 5) допустимый размер источника b . Параметры схемы: $L = 1$ м; $l = 2,5$ см; $D = 10$ см (№ 5.16). Угол схождения лучей на экране $2\alpha = 2l/L$. В соответствии с (3.8) находим $\Delta y = \lambda/(2\alpha) = \lambda L/(2l) = 10^{-3}$ см. Область локализации полос ограничивается размером зеркала D . Из подобия треугольников следует, что область перекрытия пучков, отраженных от верхнего и нижнего зеркал, ограничивается отражением от ближнего к экрану конца зеркала и равна $|y_{\max}| = 2,5/11 \approx 0,25$ см. Отсюда для максимального порядка интерференции имеем $m_{\max} \approx 250$. Минимальный порядок (в центре экрана) равен нулю. Так как полосы идут вверх и вниз от центра экрана, $N \approx 500$. Необходимую монохроматичность находим с помощью (5.11): $\Delta\lambda = \lambda/m_{\max} = 20 \text{ \AA}$. В соответствии с (5.5) допустимый размер источника $b = \lambda L/(2l) = 10^{-3}$ см.

В интерференционной схеме, изображенной на рис. 5.23, используется квазимонохроматический протяженный источник света S ($\lambda = 5,0 \cdot 10^{-5}$ см, $\Delta\lambda = 28 \text{ \AA}$). Полагая, что спектральная интенсивность излучения постоянна в интервале $\Delta\lambda$, найдем: 1) ширину

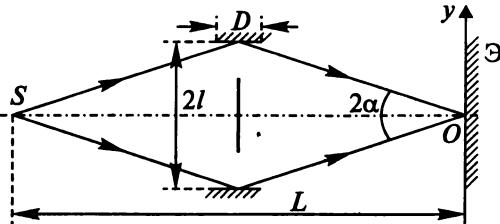


Рис. 5.22

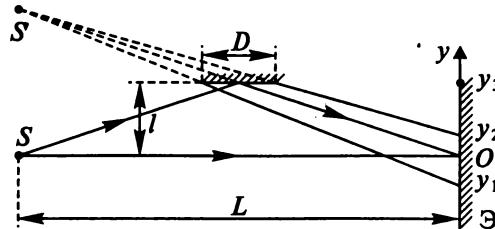


Рис. 5.23

интерференционных полос Δu на экране Э; 2) количество наблюдаемых полос; 3) область локализации полос на экране; 4) максимальный и минимальный порядок наблюдаемых полос; 5) допустимый размер источника b . Параметры схемы $L = 1$ м; $D = 10$ см; $l = 0,5$ см. Отражающее зеркало расположено симметрично относительно источника S и точки O экрана Э (№ 5.17). Угол суждения лучей на экране $2\alpha = 2l/L$. В соответствии с (3.8) находим $\Delta u = \lambda/(2\alpha) = \lambda L/(2l) = 5 \cdot 10^{-3}$ см. Область локализации полос ограничивается размером D зеркала. Из подобия треугольников следует, что область перекрытия пучков, отраженных от зеркала, ограничивается отражением от его краев. Получаем: $y_1 = -1/9 \approx -0,1$ см, $y_2 = 1/11 \approx 0,1$ см. Число полос $N = (y_2 - y_1)/\Delta u \approx 40$. Координата нулевого максимума (из симметрии) $y_3 = 0,5$ см. Поэтому точке y_2 соответствует $m_{\min} \approx 0,4/(5 \cdot 10^{-3}) \approx 80$, точке y_1 соответствует $m_{\max} \approx 0,6/(5 \cdot 10^{-3}) \approx 120$. В соответствии с (5.5) допустимый размер источника $b = \lambda L/(2l) = 5 \cdot 10^{-3}$ см.

В интерференционной схеме с двумя параллельными зеркалами (рис. 5.24) используется протяженный источник монохроматического света в виде однородно светящейся полоски шириной $b = 5 \cdot 10^{-3}$ см. Длина волны излучения $\lambda = 600$ нм, расстояние между зеркалами $h = 0,2$ см. Найдем, какова видность V интерференционных полос на экране, расположенном на расстоянии $z_0 = 0,5$ м от источника. Выясним, в каком направлении и на какое расстояние следует переместить экран, чтобы: 1) видность увеличилась в два раза; 2) интерференционная картина исчезла (размылась). Размеры зеркал считать достаточно большими. Прямые лучи от источника на экран не попадают (№ 5.22). Используя формулы (5.3) и (5.4) и подставляя в них $l = h$ и $L = z_0/2$, находим $V = \sin x/x$, где $x = 2\pi b l / (\lambda z_0) = 2\pi/3$. Для начальной видности имеем $V_0 \approx 0,4$. При увеличении z_0 в два раза $V_1 \approx 0,85$ (также примерно в два раза). Таким образом, экран надо отодвинуть на $\Delta z = 2z_0 - z_0 = z_0 = 0,5$ м.

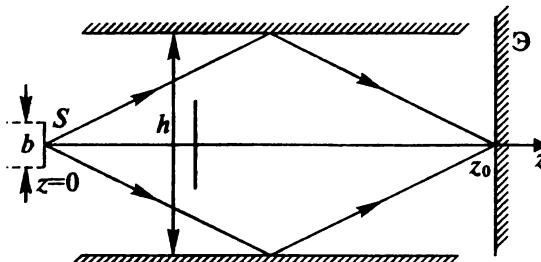


Рис. 5.24

Картина будет размыта при $x = \pi$, что соответствует $z = 2z_0/3 \approx 33$ см, т. е. $\Delta z \approx 17$ см.

В интерференционной схеме Юнга, используемой для определения угловых размеров источника, картина интерференции «зашумлена» некогерентной фоновой засветкой (рассеянным светом посторонних источников). Интенсивность фона вдвое превышает интенсивность каждого из интерферирующих пучков. Оценим угловой размер источника, если видность наблюдаемой интерференционной картины в окрестности нулевой полосы $V = 1/3$ ($\lambda = 500$ нм, расстояние между щелями $l = 5$ мм (№ 5.24)). Из (5.3) получаем

$$I(y) = 2I_0(1 + V_0 \cos \psi) + I_\phi,$$

где I_ϕ — интенсивность «шумовой» засветки; I_0 — интенсивность каждого из интерферирующих пучков; $V_0 = |\sin(\pi\varphi l/\lambda)/(\pi\varphi l/\lambda)|$; φ — угловой размер источника; $\psi = 2\pi ly/\lambda$; L — расстояние от щелей до экрана.

Используя (5.4), находим $V = V_0/[1 + I_\phi/(2I_0)] = (1/2)V_0$ и $V_0 = 2/3$, откуда $\varphi/(\lambda/l) \approx 1/2$ и $\varphi \approx (1/2)(\lambda/l) = 5 \cdot 10^{-5}$.

6. Дифракция Френеля. Зонные пластиинки

Общим свойством волн является способность при распространении огибать встречающиеся на их пути препятствия. Это называется **дифракцией**. Для построения фронтов световых волн Гюйгенс ввел представление о том, что фронт создает вторичные источники волн, и следующее его положение представляет огибающую линию фронтов вторичных волн. Дальнейшее усовершенствование представлений о распространении волн, названное **принципом Гюйгена—Френеля**, было сделано Френелем. При расчете амплитуды волны Френель предложил учитывать амплитуды и фазы вторичных волн. Считая все источники на фронте волны в одинаковой фазе, для получения амплитуды в произвольной точке P складываем амплитуды вторичных волн от всех элементов фронта (источников на фронте)

$$E = \int_S K(\theta) (Ar) e^{i(\omega t - kr)} dS, \quad (6.1)$$

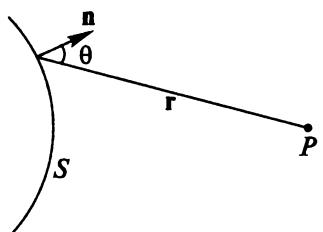


Рис. 6.1

где A — амплитуда сферических волн, выходящих с поверхности фронта (S); θ — угол между нормалью n к поверхности фронта и вектором r , направленным в точку P (рис. 6.1). От угла θ зависит коэффициент K . В случае малых изменений коэффициента K и расстояния r можно не учитывать изменения амплитуд, а принимать во внимание только изменение фазы, которая зависит от разности хода (разности расстояний).

Таким образом, опуская также общую зависимость от времени, получаем от каждого элемента поверхности вклад в амплитуду волны

$$dE = A e^{-i\phi} dS. \quad (6.2)$$

Длина вектора dE на фазовой плоскости пропорциональна площади поверхности dS , а ϕ — его фаза.

Удобно вводить **зоны Френеля**. На рис. 6.2 показано введение зон Френеля на примере точечного источника S . Фронт волны представляет сферическую поверхность, на которой зоны Френеля определяются относительно точки наблюдения P , в которой вычисляется суммарная амплитуда. Границы зон устанавливаются из условия, что фаза волн, приходящих в точку P от границ зоны

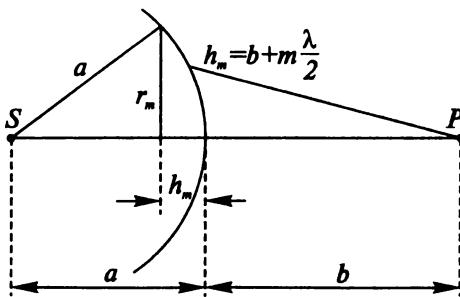


Рис. 6.2

изменяется на π , а оптический путь, соответственно, — на $\lambda/2$. Используя обозначения, приведенные на рис. 6.2, получаем уравнение для определения радиусов зон Френеля

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2. \quad (6.3)$$

Вначале из второй части этого равенства находим

$$h_m = [bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2]/[2(a + b)]. \quad (6.4)$$

Здесь учтено, что $h_m \ll a$ и $h_m \ll b$. При не очень больших m и $\lambda \ll b$ имеем

$$h_m \approx bm\lambda/[2(a + b)]. \quad (6.5)$$

Поэтому для радиуса m -й зоны Френеля получаем

$$r_m^2 \approx 2ah_m \approx abm\lambda/(a + b). \quad (6.6)$$

На рис. 6.3, называемом векторной (фазовой) диаграммой, показано, как векторы (6.2) суммируются в первой зоне Френеля. Поворот последнего в сумме вектора относительно первого, т. е. изменение фазы равно π , что соответствует разности хода $\lambda/2$. Первая зона Френеля описывается вектором A_1 . Продолжая сложение, получаем вектор второй зоны Френеля A_2 , направленный противоположно A_1 . Обычно зоны, суммарный вектор которых направлен противоположно A_1 , называют отрицательными. Влияние угла и расстояния, которыми пренебрегли в (6.1) приводит к уменьшению абсолютной величины A_2 по сравнению с A_1 . В результате получаем спираль Френеля (рис. 6.4). Для суммы всех зон можно написать $A_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_{\infty}$.

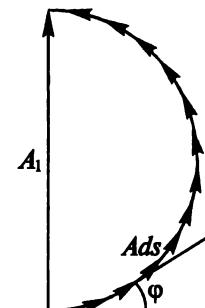


Рис. 6.3

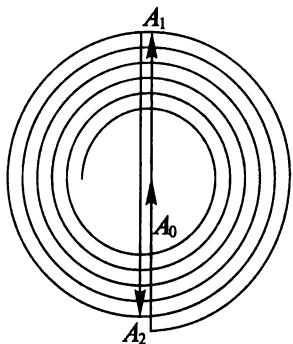


Рис. 6.4

$+ A_3 + \dots = A_1/2 + A_1/2 + A_2 + A_3/2 + \dots \approx A_1/2$, так как члены типа $A_1/2 + A_2 + A_3/2 \approx 0$. Полученные результаты можно применить к прохождению волн через препятствия, открывающие или закрывающие несколько зон Френеля. При прохождении отверстия, открывающего m зон Френеля, амплитуда в точке наблюдения (P)

$$A = A_1/2 \pm A_m/2. \quad (6.7)$$

В случае нечетного m в P получаем светлое пятно, в случае четного m — практически темное.

Для точечного источника радиусы зон определяются из (6.6) и рис. 6.2. Освещенность в центре дифракционных колец на экране зависит от радиуса отверстия, через которое проходит свет. Минимум освещенности достигается, если отверстие содержит четное число зон Френеля, максимум — если нечетное (№ 6.7).

В непрозрачной пластинке имеется отверстие диаметром $d = 1$ мм. Оно освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм от удаленного источника. Найдем расстояние L_{\max} от отверстия, на котором будет наблюдаваться наибольшая освещенность (№ 6.11). Из (6.6) для бесконечно удаленного источника ($a = \infty$, $b = L_{\max}$) имеем $L_{\max} = d^2/(4\lambda m)$, где число открытых зон для максимума освещенности должно быть нечетным $m = (2N + 1)$ при $N = 0, 1, 2, \dots$ Для максимальной освещенности $N = 0$. Поэтому $L_{\max} = d^2/(4\lambda) = 0,5$ м.

Интенсивность света в некоторой точке P на оси за отверстием в непрозрачном экране, на который нормально падает параллельный пучок монохроматического света, равна I_1 , если в отверстии укладывается одна зона Френеля. С помощью векторной диаграммы найдем интенсивность света в той же точке, если радиус отверстия уменьшить на $\alpha = 1/3$ первоначальной величины (№ 6.21). Параллельный пучок имеет плоский фронт. На рис. 6.5 показан фронт (штриховой линией), проходящий через отверстие радиуса r . Разность хода между лучами от края и центра отверстия (l и L) находим, используя теорему Пифагора: $l^2 - L^2 = (l - L)(l + L) = r^2$,

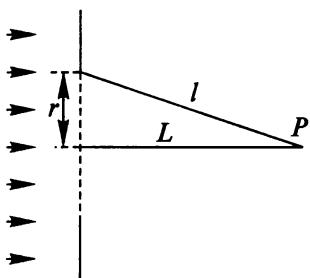


Рис. 6.5

откуда $\Delta L = l - L = r^2/(l + L) \approx \approx r^2/(2L)$. Разность фаз $\Delta\phi = = (2\pi/\lambda)\Delta L$. Для первой зоны Френеля (при $\Delta L = \lambda/2$) $\Delta\phi = \pi$. В случае отверстия радиуса $r = r_1(1 - \alpha)$ меньшего радиуса первой зоны r_1 , получаем: $\Delta\phi = \pi(1 - \alpha)^2$. На векторной диаграмме (рис. 6.6) показаны амплитуды, соответствующие первой зоне и отверстию радиуса r (A_1 и A). Для получения A суммируются элементарные векторы до фазы $\Delta\phi$. При этом, как видно из равнобедренного треугольника, угол наклона вектора A равен $\Delta\phi/2$. Поэтому $A = A_1 \sin(\Delta\phi/2)$, а интенсивность

$$I = I_1 \sin^2(\Delta\phi/2). \quad (6.8)$$

При $\alpha = 1/3$ и, соответственно $\Delta\phi = \pi(1 - \alpha)^2 = 4\pi/9$, получаем

$$I = I_1 \sin^2(2\pi/9) \approx I_1 \sin^2(40^\circ) \approx 0,41 I_1.$$

Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) интенсивностью I_0 падает на непрозрачный экран с **круглым отверстием** радиусом $r = 1 \text{ мм}$. 1) Найдем расстояния b_1, b_2, \dots, b_m от экрана до точек P_1, P_2, \dots, P_m на оси отверстия, для которых в пределах отверстия укладывается $1, 2, \dots, m$ зон Френеля. 2) Построим приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния от точки наблюдения до экрана. 3) Найдем, насколько надо сместиться из точки P_1 , удаляясь от экрана, чтобы интенсивность света в новой точке наблюдения стала в два раза меньше, чем в точке P_1 (№ 6.22). 1) Используя (6.6), находим $b_m = r^2/(m\lambda) = 200/m$. 2) Для нахождения интенсивности воспользуемся (6.8). Вводя интенсивность при отверстии, соответствующем первой зоне Френеля, $I_1 = 4I_0$ и учитывая, что $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)r^2/(2b)$, получаем

$$I/I_1 = \sin^2(\Delta\phi/2) = \sin^2[(\pi/2)r^2/(\lambda b)] = \sin^2[(\pi/2)(b_1/b)]. \quad (6.9)$$

Эта зависимость изображена на рис. 6.7. 3) Чтобы интенсивность стала в два раза меньше, аргумент синуса должен быть равен $\pi/4$. Из (6.9) следует: $b = 2b_1$, $\Delta b = b_1 = 200 \text{ см}$.

Плоская монохроматическая световая волна интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран в виде **полуплоскости**

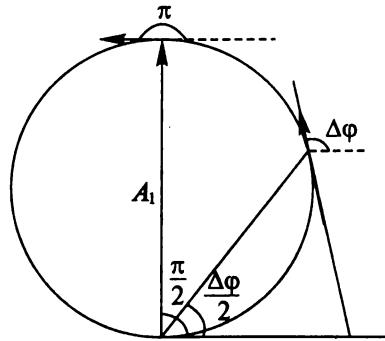


Рис. 6.6

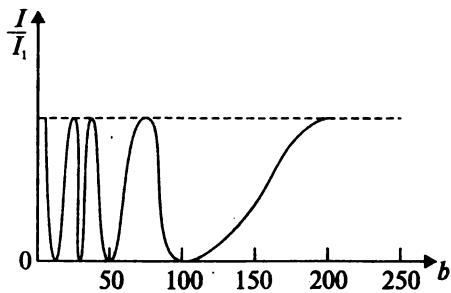


Рис. 6.7

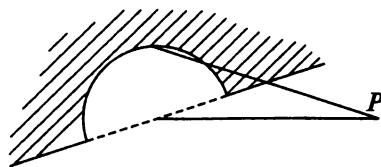


Рис. 6.8

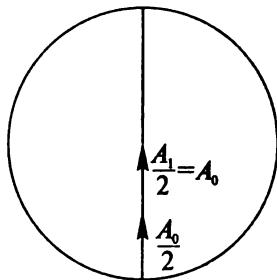


Рис. 6.9

с вырезом на краю, имеющем форму полукруга (рис. 6.8). Найдем интенсивность света в точке P , для которой граница выреза совпадает с границей 1-й зоны Френеля (№ 6.23). На рис. 6.9 на векторной диаграмме, в соответствии с (6.7), показаны амплитуды векторов от половины 1-й зоны Френеля $A_1/2 = A_0$ и от открытой половины $A_0/2$. Их сумма равна $(3/2)A_0$. Соответственно интенсивность $I = (9/4)I_0$.

На белой стене наблюдается тень от прямолинейного края AB непрозрачного экрана, освещаемого параллельными монохроматическими лучами, падающими на экран перпендикулярно ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Плоскости стены и экрана параллельны, расстояние между ними $b = 4 \text{ м}$. На краю экрана выточено углубление, имеющее форму полукруга радиусом $r = 1 \text{ мм}$ (рис. 6.10). Найдем, как изменится интенсивность света в точке стены, являющейся геометрической тенью центра O соответствующего круга по сравнению с интенсивностью в той же точке, когда углубления не было (№ 6.24). Обозначая интенсивность света в точке наблюдения в отсутствие экрана I_0 , в соответствии с (6.7) и рис. 6.4, при экране без углубления имеем: $A_{1/2} = A_0/2$ и $I_{1/2} = I_0/4$. К этому добавляется интенсивность от половины круга, для которой из (6.8) и (6.9) получаем: $I_{1/2k} = 2I_0\sin^2[\pi r^2/(2\lambda b)]$. Суммарная интенсивность $I/I_0 = 1/4 + 2\sin^2[\pi r^2/(2\lambda b)] = 5/4$. По сравнению с $I_{1/2}$ интенсивность увеличится в 5 раз.

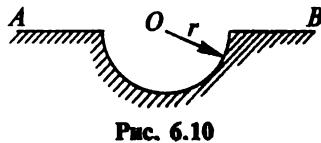


Рис. 6.10

Два точечных некогерентных источника монохроматического света S и S' освещают экран (рис. 6.11). Для точки C выполняется условие $SC = S'C = 1 \text{ м}$.

Найдем, во сколько раз изменится освещенность в точке C , если на пути лучей в точках A и A' расположить непрозрачные экраны с **круглым отверстием диаметром 0,6 мм**. Центры отверстий совпадают с SC и $S'C$; $AC = 9 \text{ см}$, $A'C = 20 \text{ см}$. Длина волны света $\lambda = 5600 \text{ \AA}$. Выясним также, как изменится ответ, если источники когерентны (№ 6.12). Из (6.6) следует, что экран A открывает приблизительно две зоны Френеля и в точке C от этого источника освещенность практически равна нулю. Экран A' открывает приблизительно одну зону Френеля. От этого источника имеем амплитуду $2A_0$ и интенсивность $4A_0^2$. Без экранов в случае некогерентных источников складываются интенсивности и в результате общая интенсивность равна $2A_0^2$, т. е. с экранами оказывается в два раза больше. В случае когерентных источников при отсутствии экранов в точке C складываются амплитуды и интенсивность равна $4A_0^2$. Таким образом, при использовании экранов в этом случае интенсивность не изменится.

Точечный источник света с **двумя монохроматическими линиями** $\lambda_1 = 6600 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 4400 \text{ \AA}$ одинаковой интенсивности расположен на расстоянии $l = 1 \text{ м}$ от экрана. Перед экраном на расстоянии $a = 0,2 \text{ м}$ располагается непрозрачный лист с **отверстием диаметром** $D = 0,92 \text{ мм}$ так, что источник света, центры отверстия и экрана расположены на общей оси системы. Найдем, как отличаются освещенности в центре экрана при наличии и в отсутствие листа (№ 6.26). Используя (6.6) и рис. 6.4, находим, что для первой длины волны отверстие равно примерно двум зонам Френеля (интенсивность близка к нулю), а для второй длины волны отверстие равно примерно трем зонам Френеля ($A_3 \approx 2A_0$). Если интенсивность от каждой волны I_0 , то без листа интенсивность $2I_0$, а с листом $4I_0$. Таким образом, интенсивность увеличится в два раза.

Между точечным источником и приемником излучения установлен непрозрачный экран с **круглым отверстием**, размер которого соответствует внешнему краю второй зоны Френеля. Всю систему заполняют водой, показатель преломления которой $n = 1,33$. Определим интенсивность излучения I , которую зарегистрирует приемник, если известно, что в отсутствие экрана интенсивность была равна I_0 (№ 6.27). Так как фаза волны в (6.1) определяется оптической длиной, то длина волны в среде с показателем преломления n уменьшается в n раз. Используя (6.6), найдем, какое число зон соответствует отверстию при погружении системы в воду, из условия $2\lambda ab/(a + b) = m (\lambda/n) ab/(a + b)$. Получаем

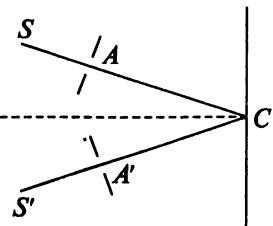


Рис. 6.11

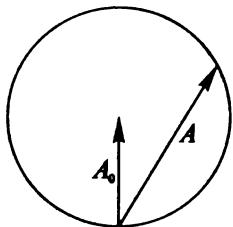


Рис. 6.12

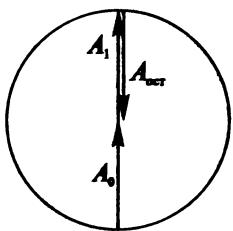


Рис. 6.13

$m = 2n = 2,66 = 2 + 2/3$. На рис. 6.12 приведена соответствующая векторная диаграмма, из которой следует $A = 2A_0 \sin 60^\circ = A_0\sqrt{3}$ и $I = 3I_0$.

В плоскопараллельной стеклянной пластинке с показателем преломления n , на которую нормально падает плоская волна (длины λ), вырезано **круглое отверстие** размером в одну зону Френеля для некоторой точки P , лежащей на оси системы. Определим, при какой толщине пластинки h интенсивность I колебаний в точке P будет максимальна. Найдем также I_{\max} , если в отсутствие пластинки интенсивность равна I_0 (№ 6.20).

На рис. 6.13 (векторной диаграмме) показаны амплитуды волн: от первой зоны Френеля A_1 , от остальных зон в отсутствие стеклянной пластинки $A_{\text{ост}}$, их сумма A_0 . Для максимальной интенсивности надо фазу вектора $A_{\text{ост}}$ изменить на $\pi + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ Таким образом, $(2\pi/\lambda)(n - 1)h = \pi + 2\pi m$, откуда $h = (2m + 1)(\lambda/2)/(n - 1)$.

Так как $I_0 = A_0^2$ и $A_1 = 2A_0$, суммарная амплитуда $3A_0$, а $I_{\max} = 9I_0$.

Параллельный пучок монохроматического света нормально падает из воздуха на плоскую поверхность **диэлектрика**. Определим максимальную напряженность электрического поля в диэлектрике E_{\max} . Оценим расстояние l от поверхности диэлектрика до точки, в которой поле максимально. Диаметр светового пучка $D = 0,1$ см, длина световой волны $\lambda = 0,5$ мкм, плотность потока мощности в падающем пучке $S = 1$ кВт/см², показатель преломления диэлектрика $n = 2$ (№ 6.28). Напомним, что плотность энергии w связана с напряженностью E электрического поля соотношением $w = E^2/(8\pi)$, а с плотностью потока мощности выражением $S = wc$, где c — скорость света в вакууме (см. 3, с. 482). Поэтому в падающей волне

$$E = (8\pi S/c)^{1/2}. \quad (6.10)$$

В соответствии с (2.33) в диэлектрике поле изменяется в $2/(n + 1) = 2/3$ раз. Напряженность поля увеличится в два раза и будет максимальной, если диаметр светового пучка окажется равным диаметру 1-й зоны Френеля для точки наблюдения в диэлектрике. Учитывая, что фаза волны в (6.1) определяется оптической длиной, т. е. длина волны в среде с показателем преломления n умень-

шается в n раз, и используя (6.6), получаем $I = (D/2)^2 n / \lambda$. В результате $I = 100$ см, $E_{\max} = (4/3)(8\pi S/c)^{1/2} = 1200$ В/см.

Найдем также, на каком расстоянии L от поверхности диэлектрика (в воздухе) электрическое поле максимально и чему оно равно (№ 6.29). В соответствии с (2.34) в отраженной волне напряженность электрического поля меняется в $(n - 1)/(n + 1)$ раз. Напряженность поля увеличится в два раза и будет максимальной, если диаметр светового пучка окажется равным диаметру 1-й зоны Френеля для точки наблюдения в воздухе. Используя (6.6), получаем $L = (D/2)^2 / \lambda = 50$ см. Складывая отраженное поле с имеющимся в пучке, в соответствии с (6.10), получаем $E = (5/3)(8\pi S/c)^{1/2} = 1500$ В/см.

Направленность излучения ультразвукового дальномера обеспечивается рупором конической формы длиной $a = 15$ см и диаметром выходного отверстия $D = 10$ см. Оценим, в каких пределах можно перестраивать излучаемую частоту, чтобы интенсивность волны, излучаемой в направлении оси рупора, изменялась бы не более, чем в 2 раза. Средняя рабочая частота $v = 100$ кГц. Считаем волну, распространяющуюся в рупоре, сферической. Скорость звука $v = 330$ м/с (№ 6.49). Для длины волны при средней рабочей частоте получаем $\lambda = v/v = 0,33$ см. С помощью (6.6) число зон Френеля на выходном отверстии рупора для объекта (точки наблюдения), находящегося на большом расстоянии, $m = (D/2)^2 / (\lambda a) = 5$. Для замирания сигнала число зон должно быть четное: 4 или 6. Условие ослабления интенсивности сигнала в 2 раза — полуцелое число зон Френеля (4,5 и 5,5). Соответствующие длины волн из (6.6) $\lambda = (D/2)/ma$. Для диапазона частот находим пределы: от 89,1 до 108,9 кГц.

При закрывании m зон непрозрачным экраном некоторого радиуса светлое пятно всегда находится в центре тени, полагающейся из геометрической оптики (**пятно Пуассона**, продемонстрированное Араго)

$$A = A_{m+1}/2. \quad (6.11)$$

Край пятна определяется тем, что при сдвиге непрозрачного экрана от линии, соединяющей источник с центром пятна, примерно на ширину зоны Френеля происходит уменьшение части открытой зоны и открывается часть ранее закрытой зоны с амплитудой противоположного знака. Для оценки диаметра пятна (d) и его углового размера $\phi \sim d/b$ при диаметре экрана D используем (6.6) для плоской волны

$$\phi \sim d/b \sim \lambda/D. \quad (6.12)$$

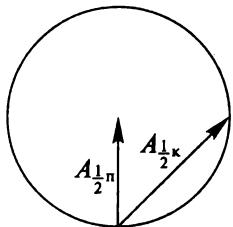


Рис. 6.14

Отметим, что если открыта только одна 1-я зона Френеля, то амплитуда в два раза больше, чем при открытии всех зон. Эффект можно усилить еще более, закрыв все отрицательные зоны. Такая конструкция называется **зонной пластинкой** (подробнее см. далее). Если открыть только половину площади первой зоны, то возможны два варианта: для части в виде круга $A_{1/2k} = (A_1/2)\sqrt{2}$, а для части в виде полукруга $A_{1/2n} = A_1/2$ (рис. 6.14). Еще раз подчеркнем, что рассматриваются препятствия и расстояния, которые значительно больше длины волны света. Учитывается волновая природа, но отклонения от геометрической оптики довольно малы.

Может показаться странным, что при увеличении отверстия в экране, через которое проходит поток света, от размера 1-й зоны Френеля до размера 2-й зоны освещенность в точке наблюдения, относительно которой рассчитываются эти зоны, падает почти до нуля (№ 6.6). Дело здесь в том, что хотя поток света увеличивается в два раза, но он распределяется по экрану другим образом.

Найдем интенсивность света I в центре дифракционной картины от круглого экрана, когда он **закрывает первую зону** Френеля, если в отсутствие экрана интенсивность равна I_0 (№ 6.1). Из спирали Френеля (см. рис. 6.4) следует, что при всех открытых зонах (в отсутствие экрана) амплитуда волны $A_1/2$, а интенсивность, следовательно, $I_0 = A_1^2/4$. При **закрытой первой зоне** из (6.11) следует, что амплитуда волны равна $A_2/2$, а интенсивность $I = A_2^2/4 \approx A_1^2/4 = I_0$.

Яркий источник света можно сфотографировать, поместив между ним и фотопластинкой гладкий **непрозрачный шар**. Это связано с тем, что в центре геометрической тени существует светлое пятно Пуассона. Край пятна определяется смещением шара на ширину 1-й открытой зоны Френеля, а размер — (6.9). Из (6.6) для шара диаметром $D = 40$ мм при длине волны света $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и расстояниях $a = 12$ м и $b = 18$ м (размеры в классическом опыте Поля) (рис. 6.15) получаем ширину 1-й открытой зоны Френеля $\Delta r = ab\lambda/[(a+b)D] = 180 \lambda \approx 0,1$ мм. Найдем размер изображения y' , если размер источника $y = 7$ мм, и определим, будет ли изображение испорчено, если поверхность шара испещрена множеством неправильных царапин, глубина которых h порядка 0,1 мм, а также, если шар заменить диском (№ 6.15). Размер изображения находим из геометрии $y' = y b/a = 10,5$ мм. Чтобы опыт удался, не-

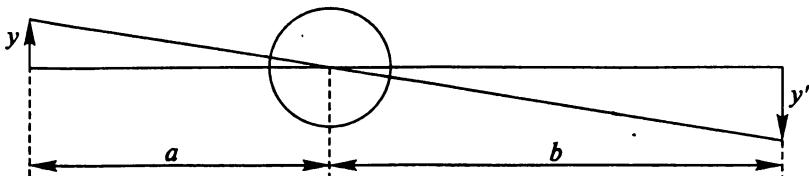


Рис. 6.15

ровности не должны открывать соседнюю (противоположного знака) зону Френеля, т. е. должно быть $h < \Delta r$. В случае диска из крайней точки источника, находящейся на расстоянии u от оси, диск виден в виде эллипса диаметрами D и $D(1 - a^2/2)$, где $a = u/a$. Разность соответствующих радиусов должна быть меньше ширины зоны Френеля $D\alpha^2/4 < \Delta r$. Откуда получаем условие применения диска $u < 2(a/D)[ab\lambda/(a + b)] \approx 1$ м.

Между точечным монохроматическим источником света и точкой наблюдения перпендикулярно соединяющей их линии помещен экран, состоящий из секторов двух кругов (рис. 6.16). Радиус одного из них равен радиусу 1-й зоны Френеля, другого — радиусу 2-й зоны Френеля. Найдем интенсивность света в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна I_0 .

Рассмотрим экраны, изображенные на рис. 6.16, а, б (№ 6.8). Используя (6.7) и (6.11), получаем, что все зоны кроме 1-й и 2-й дают амплитуду $A_1/2$. Считаем, что $A_3 \approx A_1$. В случае, изображенном на рис. 6.16, а, половина 2-й зоны дает $A_2/2 \approx -A_1/2$. В результате сумма амплитуд $A_1/2 - A_2/2 = 0$. Интенсивность равна нулю. В случае, изображенном на рис. 6.16, б, четверть 2-й зоны дает $A_2/4 \approx -A_1/4$. В результате сумма амплитуд $A_1/2 - A_2/4 = A_1/4$. Так как интенсивность в отсутствие экрана $I_0 = (A_1/2)^2$, то интенсивность в данном случае $I = I_0/4$.

Непрозрачный экран, имеющий форму полудиска, помещен между точечным источником S и точкой наблюдения P таким образом, что точка O располагается на одной прямой с точками S и P (рис. 6.17). Экран закрывает не большое нечетное число полузон Фре-

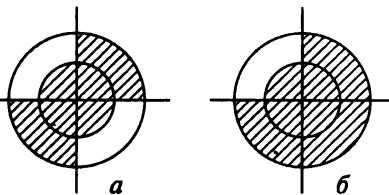


Рис. 6.16

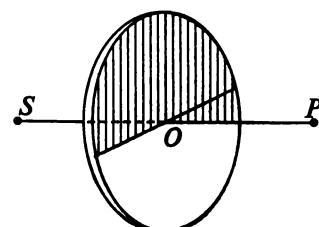


Рис. 6.17

неля. Найдем освещенность в точке P (№ 6.2). Воспользовавшись (6.7), для амплитуды волны в точке P можем написать

$$A = (1/2)(A_1 + A_2 + \dots + A_{N-1}) + (1/2)(A_N + (A_{N+1} + A_{N+2} + \dots)).$$

Для N нечетного при небольшом N выражение в первой скобке равно нулю, а в последней — $(A_{N+1}/2)$. Поэтому $A \approx (1/2)(A_N + A_{N+1} + 1) \approx 0$. Таким образом, в точке P будет минимальная освещенность.

Между точечным источником и точкой наблюдения P помещен диск, центр которого расположен на одной прямой с точками S и P (см. рис. 6.17). Одна половина диска прозрачна, другая непрозрачна. Диск закрывает первые три зоны Френеля. Толщина прозрачной части диска $l = N(\lambda/2)/(n - 1)$, где n — показатель преломления прозрачной части диска; N — целое число. Найдем освещенность в точке P при четном и нечетном N (№ 6.3). Амплитуда от трех половинок зон Френеля приблизительно равна $A_1/2$, амплитуда от всех открытых зон — $(-A_1/2)$, так как начинается с 4-й открытой зоны. Сумма зависит от фазы волны, прошедшей через диск. При четном N сдвиг фаз нет. В результате имеем минимум освещенности. При нечетном N волны оказываются в фазе и дают амплитуду приблизительно A_1 , как при открытой 1-й зоне.

Диск из стекла с показателем преломления n (для длины волны λ) закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P . Найдем, при какой толщине h диска освещенность в точке P будет наибольшей (№ 6.16). На рис. 6.18, *a* (векторной диаграмме) показаны амплитуды волн: в отсутствие диска A_0 , от полутора зон Френеля $A_{3/2}$, от зон вне диска $A_{\text{очт}}$. Показатель преломления увеличивает фазу волны на $(2\pi/\lambda)(n - 1)h$. Максимум амплитуды в точке наблюдения будет, когда угол поворота $A_{3/2} = (5/4)\pi + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, откуда $h = (2m + 5/4)(\lambda/2)/(n - 1)$.

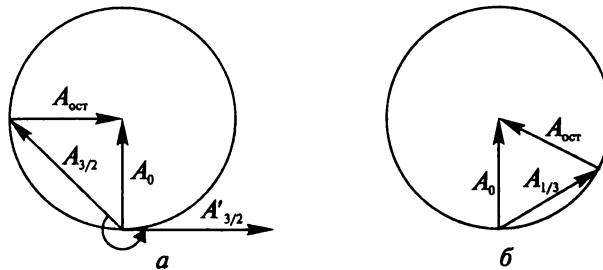


Рис. 6.18

На прозрачный экран с круглым отверстием площадью в одну треть зоны Френеля (для данной точки наблюдения) нормально падает плоская монохроматическая волна. Зависимость коэффициента преломления материала экрана от длины волны λ имеет вид $n(\lambda) = 1 - \alpha\lambda$, где $\alpha = 1 \text{ мм}^{-1}$. Определим минимальную толщину экрана (h), при которой интенсивность в выбранной точке наблюдения обращается в нуль (№ 6.54). На рис. 6.18, б приведена векторная диаграмма, где показаны вектор $A_{1/3}$ от отверстия в треть зоны Френеля и вектор A_{oct} от остальных зон, которые вместе составляют вектор A_0 от всех зон. Прохождение волны через экран приводит к изменению фазы в отрицательном направлении (по часовой стрелке), так как показатель преломления $n < 1$. Чтобы в сумме с $A_{1/3}$ составить нуль, вектор A_{oct} должен повернуться по часовой стрелке на $300^\circ = 2\pi(5/6)$. Поэтому $(2\pi/\lambda)h(n - 1) = -2\pi(5/6)$, откуда $h = 5/(6\alpha) = 0,83 \text{ мм}$.

Точечный источник света с двумя монохроматическими линиями $\lambda_1 = 660 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 440 \text{ нм}$ одинаковой интенсивности расположен на расстоянии $L = 1 \text{ м}$ от экрана. Перед экраном на расстоянии $a = 0,2 \text{ м}$ расположен прозрачный диск диаметром $D = 0,92 \text{ мм}$, вносящий фазовую задержку в π для обеих компонент, причем источник света, центры диска и экрана лежат на общей оси. Найдем, как отличаются интенсивности света в центре экрана при наличии и отсутствии диска (№ 6.25). Из (6.6) находим число зон, которым соответствует диск для разных длин волн. Для $\lambda_1 = 660 \text{ нм}$ имеем

$$m = L(D^2/4)/[a(L - a)\lambda] = (9,2)^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1/(0,2 \cdot 0,8 \cdot 660 \cdot 10^{-9} \cdot 4) = 2.$$

Для $\lambda_2 = 440 \text{ нм}$ соответственно $m' = 3$.

В первом случае (для λ_1) интенсивность только от зон, начиная с третьей (первые две дают нуль). Эта интенсивность соответствует интенсивности в отсутствие диска, т. е. I_0 . Для другой длины волны к амплитуде от трех зон добавляется (с учетом знака из-за сдвига фаз) амплитуда от зон, начиная с четвертой, примерно равная амплитуде в случае отсутствия диска (A_0). Таким образом, получаем амплитуду $3A_0$ и интенсивность $9I_0$. В сумме с первой имеем $10I_0$.

В параллельном пучке радиоизлучения, длина волны которого $\lambda = 3 \text{ см}$, поставлен диск из диэлектрика с показателем преломления $n = 1,5$. Диск перпендикулярен направлению пучка. Диаметр диска $D = 20 \text{ см}$. Пренебрегая отражением излучения от диска, определим, при какой толщине диска h и на каком расстоянии b от диска вдоль его оси будет наблюдаваться максимальная интенсив-

ность излучения (№ 6.17). Расстояния, для которых диск является m -й зоной Френеля из (6.6) для плоской волны ($a = \infty$),

$$b_m = D^2/(4 m\lambda).$$

Амплитуда от волны вне диска определяется (6.8) со знаком, противоположным знаку амплитуды от волны, проходящей через диск. Чтобы волны имели при сложении одинаковый знак, разность хода при прохождении через диск должна быть равна нечетному числу половин длин волн $(n - 1) h = (k + 1/2)\lambda$, а диск соответствовать нечетному числу зон Френеля. Поэтому $h = (k + 1/2)\lambda/(n - 1) = (\lambda/2)/(n - 1) + \lambda k/(n - 1) = 3 + 6k$ см, $k = 0, 1, 2, \dots$. Расстояния b_m , на которых будут наблюдаться максимальные интенсивности, получаем при $m = 1, 3, 5, \dots$: $b_m = 33,3, 11,1, 6,65, \dots$, см.

Непрозрачный диск диаметром $D = 1$ см освещается плоской нормально падающей волной ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Найдем, при каком минимальном диаметре отверстия, проделанного в центре диска, интенсивность света в точке, находящейся за диском на оси симметрии на расстоянии $L = 1,5$ м, равна нулю (№ 6.19). Используя (6.6), определяем число зон, перекрываемых диском, $m = D^2/(4\lambda L) = 33,33$. На рис. 6.19 приведена векторная диаграмма. Вектор A_0 соответствует амплитуде в точке P в отсутствие диска; вектор A_1 — от зон, закрытых диском. Соответственно от всех остальных A_{oct} . Чтобы погасить этот вектор, нужно иметь вектор A_2 , соответствующий 1,66 зоне Френеля. Из (6.6) находим диаметр нужного отверстия $d = 2(1,66\lambda L)^{1/2} = 0,2236$ см.

Вдали от точечного источника S электромагнитной волны поставлен бесконечный идеально отражающий экран AB (рис. 6.20). Пользуясь векторной диаграммой, найдем, как изменится интенсивность отраженной волны в точке S , если из экрана вырезать диск CD с центром в основании перпендикуляра, опущенного из

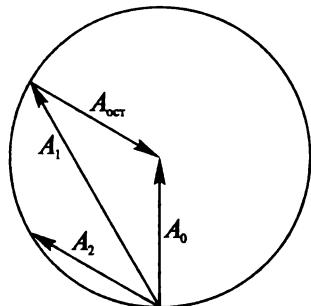


Рис. 6.19

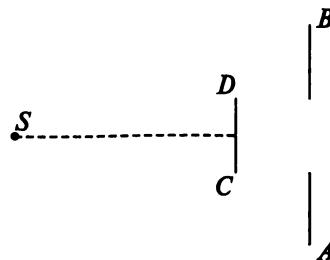


Рис. 6.20

S на плоскость экрана, и сместить этот диск по направлению к источнику на $1/\lambda/12$ длины волны. Площадь диска составляет $1/3$ от площади первой зоны Френеля. Определим, как изменится результат, если смещение произвести в противоположную сторону на ту же величину (№ 6.4). Воспользуемся спиралью Френеля (см. рис. 6.4). В данном случае (рис. 6.21) амплитуда волны, вызываемой всеми зонами Френеля, изобразится вектором A_0 , амплитуда волны от $1/3$ 1-й зоны Френеля — вектором $A_{1/3}$, амплитуда волны от всех остальных зон — вектором $A_{\text{ост}}$. Длины всех трех векторов одинаковые, так как вектор $A_{1/3}$ является хордой дуги, представляющей $1/3$ от полуокружности. Векторы образуют равносторонний треугольник. При увеличении расстояния до точки наблюдения вектор, описывающий приходящую волну, на фазовой диаграмме поворачивается против часовой стрелки. Смещение центрального круга к источнику на $\lambda/12$ приводит к повороту вектора $A_{1/3}$ по часовой стрелке на величину соответствующего изменения фазы $2(2\pi/\lambda)\lambda/12 = \pi/3$. Вектор $A'_{1/3}$ становится противоположно направленным вектору $A_{\text{ост}}$. Так как их абсолютные величины одинаковы, они в сумме дают нуль, т. е. отраженная волна ничего не приносит в точку S . При смещении центрального круга от точки S вращение вектора $A_{1/3}$ будет происходить в другую сторону на тот же угол. Вектор $A''_{1/3}$ совпадет с A_0 . Сумма амплитуд отраженных волн в данном случае будет равна $\sqrt{3}A_0$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз больше, чем при ровном экране. Интенсивность волны возрастет в три раза.

Рассмотрим задачу, которая отличается от предыдущей тем, что площадь диска составляет половину первой зоны Френеля. Найдем, на какое минимальное расстояние h следует сместить диск в направлении от источника, чтобы интенсивность отраженной волны в точке S осталась неизменной (№ 6.5). На рис. 6.22 показана спираль Френеля для данного случая. Чтобы сумма амплитуд отраженных волн была равна A_0 , необходимо повернуть вектор $A_{1/2}$ на угол $\varphi = 3\pi/2$. Так как разности фаз 2π соответствует разность хода λ , то $2h = 3\lambda/4$, откуда $h = 3\lambda/8$.

Вдали от точечного источника S стоит бесконечный идеально отражающий экран. Из

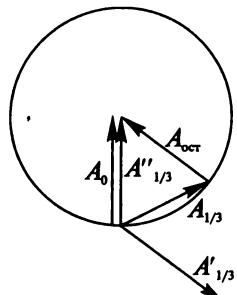


Рис. 6.21

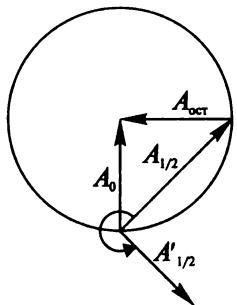


Рис. 6.22

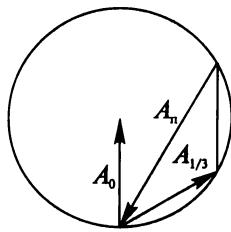


Рис. 6.23

экрана удален диск диаметром $d_1 = 2r_1\sqrt{\frac{2}{3}}$, где r_1 — радиус первой зоны Френеля, и поставлен другой диаметром $d_2 = d_1\sqrt{2}$. Найдем интенсивность I отраженной волны в точке S , если диск диаметром d_2 стоит в плоскости экрана (№ 6.14). Используя (6.6) и одинаковое расстояние от экрана источника и точки наблюдения, получаем, что отверстие соответствует $\frac{2}{3}$ площади первой зоны Френеля, а вставленный диск — $\frac{1}{3}$. На рис. 6.23 (векторной диаграмме) показаны амплитуды волн: отраженных от всего экрана A_0 , пропавшая от $\frac{2}{3}$ первой зоны Френеля A_n и отраженная от $\frac{1}{3}$ первой зоны Френеля, благодаря вставленному диску $A_{1/3}$. В сумме эти три амплитуды дают нуль. Следовательно, $I = 0$.

Симметрично между источником $S(\lambda = 4900 \text{ \AA})$ и точкой наблюдения (P) расположен непрозрачный экран с круглым отверстием ($r = 0,35 \text{ мм}$). Расстояние от источника до экрана $a = 1 \text{ м}$. Найдем, во сколько раз изменится интенсивность в точке наблюдения, если источник сместить

вдоль оси к отверстию на расстояние $\Delta a = 0,8 \text{ м}$ (№ 6.9). На рис. 6.24 показана схема расположения источника, экрана и точки наблюдения. Используя (6.6), находим, что при симметричном расположении число открытых зон Френеля $m = r^2/(\lambda a) = 0,5$, а при смещении источника к экрану $m = (2a - \Delta a)^2/[\lambda a(a - \Delta a)] = 1,5$. Как можно видеть из рис. 6.4, половина первой зоны и полторы зоны создают амплитуды, одинаковые по абсолютной величине и равные $A_0\sqrt{2}$. Но в данном случае разными будут амплитуды волн в отсутствие экрана (A_0), так как источник смещается. Поскольку в случае сферической волны ее энергия (интенсивность) уменьшается пропорционально увеличению площади, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния от источника (I), то $I_2/I_1 = (A_{02}/A_{01})^2 = (I_1/I_2)^2 = a^2/(a - \Delta a)^2 = 25/9$.

Между источником $S(\lambda = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ см})$ и точкой наблюдения P расположен непрозрачный экран с круглым отверстием ($r = 0,7 \text{ мм}$) на оси SP . Расстояние от источника до экрана $a = 3 \text{ м}$, между экраном и точкой наблюдения $b = 1 \text{ м}$. Найдем, во сколько раз изменится интенсивность сигнала, если точку наблюдения удалить

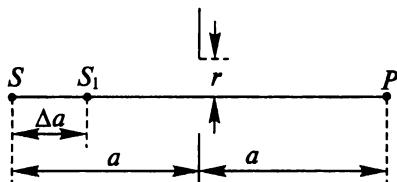


Рис. 6.24

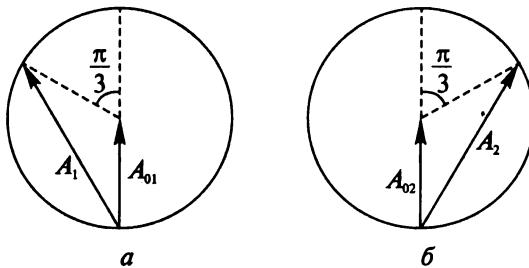


Рис. 6.25

вдоль оси на расстояние $b' = 3$ м от экрана (№ 6.10). Для определения числа зон Френеля в обоих случаях воспользуемся (6.6). Вначале $m = r(a+b)/(\lambda ab) = 4/3$. Во втором случае $m = 2/3$. На рис. 6.25 (векторной диаграмме) показаны векторы амплитуд в первом (рис. 6.25, а) $\sqrt{3}A_{01}$ и во втором (рис. 6.25, б) $\sqrt{3}A_{02}$ случаях. Как и в предыдущей задаче значения векторов амплитуд в отсутствие экрана различаются из-за разных расстояний $A_{02}/A_{01} = (a+b)/(a+b') = 2/3$. В результате для интенсивностей получаем $I_2/I_1 = 4/9$.

Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ нормально падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $D = 1,2 \text{ мм}$. На расстоянии $b = 18 \text{ см}$ за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. Найдем, на какое минимальное расстояние Δb нужно сместиться от этой точки вдоль оси отверстия, удаляясь от него, чтобы в центре дифракционной картины наблюдалось темное пятно (№ 6.13). Из (6.6) следует: $D^2/4 = m\lambda b$. Для темных пятен число зон должно быть четным $m = 2N$, где $N = 1, 2, 3, \dots$, поэтому, обозначив $D^2/4 = 2Nb_1$, расстояние между соседними темными пятнами

$$\Delta b = [D^2/(8\lambda)][1/(N-1) - 1/N] = 8\lambda b_1^2 / (D^2 - 8\lambda b_1) = 27 \text{ см.}$$

Точечный монохроматический источник S и точка наблюдения P расположены симметрично на расстояниях L по обе стороны от экрана с круглым отверстием. Отверстие имеет наименьший диаметр, при котором интенсивность света в точке P равна нулю. В отсутствие экрана интенсивность света в точке P равна I_0 . Источник света и точку наблюдения отодвинули от экрана в положения S' и P' (рис. 6.26). Найдем, какой будет интенсивность колебаний в точке P' (№ 6.53). В первом случае открыты две зоны Френеля. Из (6.6) получаем радиус отверстия $r_2 = (L\lambda)^{1/2}$. Опять же из (6.6) найдем число зон во втором случае: $m = 1$. Амплитуда волны в отсутствие экрана во вторых положениях $A_{02} = A_{01}/2$. Так как $A_{01} = (I_0)^{1/2}$, то в точке P' интенсивность $I = (2A_{02})^2 = I_0$.

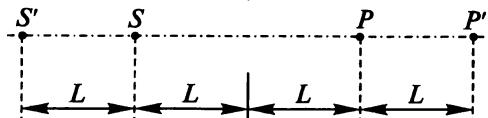


Рис. 6.26

Источник света S и точка наблюдения P расположены на одинаковых расстояниях от круглого отверстия в непрозрачном экране. Радиус отверстия равен первой зоне Френеля. Интенсивность колебаний в точке наблюдения равна I_0 . Найдем интенсивность I колебаний в точке наблюдения, если посередине между источником и экраном расположить без нарушения осевой симметрии тонкую собирающую линзу, такую, что источник при этом оказывается в ее фокусе (№ 6.32). Обозначив расстояние от источника до экрана, равного по условию расстоянию от экрана до точки наблюдения, a , получаем из (6.6) для радиуса первой зоны Френеля $r_1 = (\lambda a/2)^{1/2}$. После установки линзы на отверстие падает плоская волна, для которой из (6.6) радиус первой зоны Френеля $r_{1\text{п}} = = (\lambda a)^{1/2}$, т. е. в этом случае отверстие открывает только половину 1-й зоны Френеля. На рис. 6.27 показано расположение источника, экрана и точки наблюдения. Энергия, попадающая в отверстие, определяется телесным углом, который при установке линзы увеличивается в 4 раза (площадка та же, а расстояние в 2 раза меньше). Амплитуда соответственно увеличивается в 2 раза. Если бы во втором случае отверстие соответствовало первой зоне, то амплитуда A_{12} была бы больше A_1 в 4 раза (рис. 6.28). От половины первой зоны попадает $A = A_{12}/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}A_{11}$. Для интенсивности получаем $I = A^2 = 8A_{11}^2 = 8I_0$.

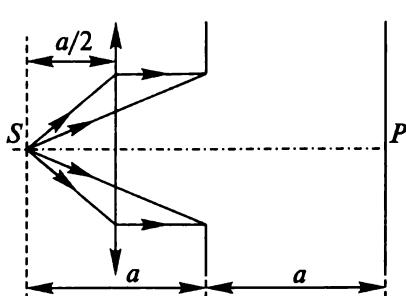


Рис. 6.27

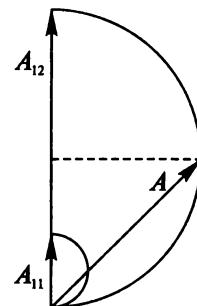


Рис. 6.28

Точечный источник S монохроматического света с длиной волны λ , помещенный в фокусе линзы L с диаметром D и фокусным расстоянием f , создает на экране, отстоящем от линзы на расстоянии $2f$, светлое пятно интенсивностью I_0 (рис. 6.29). Найдем интенсивность света I в центре дифракционного пятна на экране, если источник отнести на расстояние $2f$ от линзы. Рассчитаем отношение I/I_0 для случая $D = 5$ см, $f = 50$ см, $\lambda = 500$ нм (№ 6.52). В первом случае, так как за линзой плоская волна, интенсивность света на экране и в плоскости линзы одинакова и равна I_0 . Так как амплитуда волны от источника уменьшается обратно пропорционально расстоянию и на расстоянии f в первом случае равна $A_0 = (I_0)^{1/2}$, то при смещении в отсутствие линзы на экране (на расстоянии $4f$) она будет равна $A_0/4$. Соответственно интенсивность $I_0/16$. Для второго случая положения источника число зон Френеля на линзе из (6.6) $m = D^2/(4\lambda f)$. Так как в данном случае в центре экрана находится изображение источника, линза распределяет спираль Френеля, т. е. амплитуда здесь $A = m\pi A_0/4 = \pi D^2 A_0/(16\lambda f)$. Интенсивность $I = A^2$, $I/I_0 \approx 4 \cdot 10^6$.

Точечный источник света и точка наблюдения P расположены симметрично на расстоянии $2L$ на оси круглого **отверстия** в непрозрачном экране. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля для точки P . Найдем, во сколько раз изменится интенсивность света в точке P , если к отверстию без нарушения осевой симметрии приложить тонкую линзу с фокусным расстоянием $f = L$ (№ 6.33). Для радиуса первой зоны Френеля из (6.6) при $a = b = L$ получаем $r_1 = (L\lambda/2)^{1/2}$. При использовании линзы с $f = L$ на отверстие падает параллельный пучок света. Из (6.6) при $a = \infty$ и $b = L$ имеем $r_m = (am\lambda)^{1/2}$. В таком случае отверстие соответствует половине первой зоны Френеля, но с другой $A_{0,n}$. В обоих случаях на отверстие приходит один и тот же поток энергии. Элементы амплитуд одни и те же, но в точке P они складываются различно из-за разных фаз (рис. 6.30). Суммы длин векторов должны быть одинаковы $\pi A_0 = \pi A_{0,n}/2$. Соответственно $A_{1/2,n} = A_1 \sqrt{2}$. Таким образом, интенсивность увеличится в два раза.

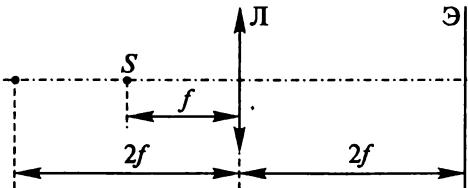


Рис. 6.29

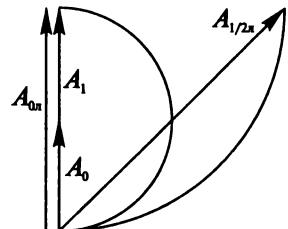


Рис. 6.30

Линза с фокусным расстоянием $f = 50$ см и диаметром $D = 5$ см освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Найдем, во сколько раз интенсивность волны I в фокусе линзы превышает интенсивность волны I_0 , падающей на линзу. Оценим также размер d пятна в фокальной плоскости (№ 6.43). Найдем вначале, скольким зонам Френеля соответствует отверстие, диаметр которого равен диаметру линзы D . В (6.6) подставляем $a = \infty$, $b = f$, откуда $m = D^2/(4\lambda f)$. Обозначив амплитуду падающего на линзу света A_0 , находим амплитуду в фокусе линзы. Учитывая, что свет, падающий на линзу, от всех элементов поверхности линзы приходит в фокус в одной и той же фазе, получаем, что полуокружность (см. рис. 6.3), соответствующая одной зоне Френеля, распрямляется в прямую линию длины πA_0 . Для m зон амплитуда $A_m = \pi A_0 m = \pi A_0 D^2/(4\lambda f)$. Отношение интенсивностей $I/I_0 = A^2/A_0^2 = (\pi D^2)^2/(4\lambda f)^2$. Приравнивая поток энергии, падающий на линзу (диаметр D), потоку, приходящему в фокус (диаметр пятна d), получаем $I_0 D^2 = I d^2$, откуда

$$d = D(I_0/I)^{1/2} = 4\lambda f/(\pi D) = 1,27\lambda/D.$$

На пути плоской световой волны ($\lambda = 0,54$ мкм) поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней — диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы — экран. Найдем, при каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность (№ 6.30). На рис. 6.31 показана схема задачи. Замечательным свойством линзы является то, что в фокусе все элементы волны имеют одинаковую фазу. Поэтому на окружности, проведенной из фокуса, все элементы в одной фазе, как

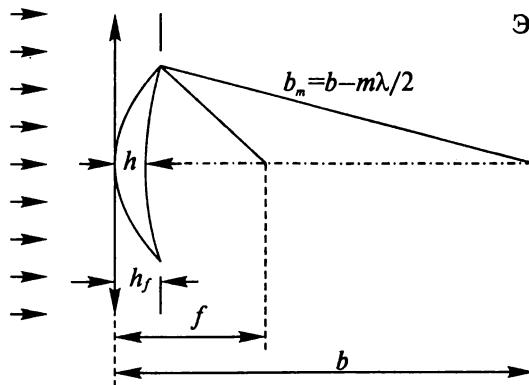


Рис. 6.31

на фронте. С этого фронта волны идут в центр экрана. Величину h_f , на рис. 6.31 находим из соотношения $(f - h_f)^2 + r^2 = f^2$. Пренебрегая h_f^2 , получаем $h_f = r^2/(2f)$. Считая $h \approx h_f$, из соотношения $b_m^2 = (b - m\lambda/2)^2 = r^2 + (b - h)^2$ находим $r = [m\lambda fb/(b - f)]^{1/2} = 0,9m^{1/2}$ мм, где m для максимумов соответствует нечетным зонам ($m = 1, 3, 5, \dots$). Соответственно, центр дифракционной картины будет темным при четных $m = 2, 4, 6, \dots$ (№ 6.34).

Перед тонкой линзой с оптической силой $D = 2,5$ дптр расположена непрозрачный экран с круглым отверстием $r = 1,1$ мм. На экран параллельно оптической оси падает пучок света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Измеряется интенсивность света I_1 в фокусе линзы, после чего линзу убирают и вновь измеряют интенсивность света I_2 в той же точке. Найдем отношение I_1/I_2 (№ 6.31). По условию фокусное расстояние $f = 1/D = 1/(2,5)$ м.

Из (6.6) при $a = \infty$ получаем число зон Френеля $m = r^2/(\lambda f) = 5,5$. На рис. 6.32 показано, какую амплитуду получаем в точке наблюдения без линзы для 5,5 зон Френеля: $A_0\sqrt{2}$. Соответственно интенсивность $I_2 = 2A_0^2$. Так как в фокус линзы от всех элементов фронта, пришедшего к отверстию, волны приходят в одинаковой фазе, все составляющие вытягиваются в прямую линию. Длина этой линии равна 5,5 полуоборотов окружности радиусом A_0 , т. е. $A = m\pi A_0$. Интенсивность $I_1 = (m\pi)^2 A_0^2$. Отношение интенсивностей $I_1/I_2 = (m\pi)^2/2 = 150$.

Отношение размеров пятен можно найти из условия, что в обоих случаях в пятнах сосредоточена одна и та же энергия (проходящая через отверстие в экране) $I_1 d_1^2 = I_2 d_2^2$. Отсюда $d_1/d_2 = \sqrt{150} \approx 12$.

На пути сферической монохроматической волны, сходящейся в точке O , на расстоянии $z = R_0$ от точки O устанавливается экран с круглым отверстием (рис. 6.33). Размер отверстия таков, что при освещении экрана плоской волной с той же длиной волны на нем укладывается три зоны Френеля для точки O . Найдем интенсивность в точке O , принимая интенсивность в плоскости экрана равной I_0 . Определим также, при каких значениях z будут наблюдаться локальные минимумы интенсивности, если точку наблюдения удалять от точки O в область $z > R_0$ (№ 6.50). В сфериче-

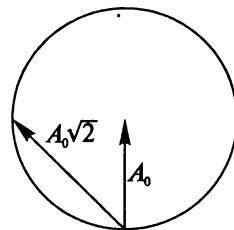


Рис. 6.32

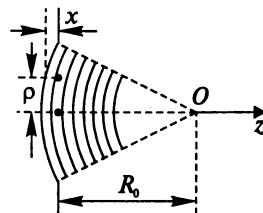


Рис. 6.33

ской сходящейся волне наблюдается такой же эффект, как при использовании собирающей линзы: волны от всех элементов отверстия приходят в одной и той же фазе — спираль разворачивается в прямую линию. Суммарная амплитуда соответствует длине линии. В данном случае (трех зон) она равна $3\pi A_0$. Соответственно интенсивность $I = 9\pi^2 I_0$. Сферическая сходящаяся волна создает в плоскости экрана поле практически с одной амплитудой, но со сдвигом по фазе, который можно вычислить по расстоянию от фронта сферической волны до плоскости экрана. Для малых углов схождения это равно приблизительно расстоянию от точки фронта до плоскости экрана по нормали (x). Обозначив расстояние от оси экрана ρ и считая радиус волны $\approx R_0$, получим $R_0^2 = (R_0 - x)^2 + \rho^2$, откуда $x = \rho^2/(2R_0)$. Отсчитывая фазу волн от фазы волны в центре отверстия, получаем в зависимости от ρ фазы волн $\varphi_1 = (2\pi/\lambda)\rho^2/(2R_0)$. Аналогичным образом для точки z на оси экрана находим $\varphi_2 = (2\pi/\lambda)\rho^2/(2z)$. Относительный сдвиг фаз

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\pi/\lambda)\rho^2(1/z - 1/R_0). \quad (6.13)$$

Граница зон Френеля (при $z \geq R_0$) определяется из условия $\varphi = -m\pi$. Поэтому

$$\rho_m^2 = m\lambda z R_0 / (z - R_0). \quad (6.14)$$

Используя условие, что при плоской волне для R отверстие открывает три зоны Френеля, получаем: $D^2/4 = m\lambda z R_0 / (z - R_0) = 3\lambda R_0$, откуда

$$m = 3(z - R_0)/z. \quad (6.15)$$

При $z = R_0$ имеем $m = 0$. При $z = 3R_0$ получаем $m = 2$. Две зоны Френеля дают минимум. Других минимумов нет, так как для четных m получаются отрицательные значения z .

Рассмотрим вариант подобной задачи, когда вместо экрана с круглым отверстием используется экран с кольцевым вырезом

(рис. 6.34). При освещении экрана плоской волной он оставлял бы открытыми вторую, третью и четвертую зоны Френеля для точки O (№ 6.51). Как и в предыдущей задаче три выпрямленных участка спирали дают амплитуду $3\pi A_0$ и, соответственно, интенсивность $I = 9\pi^2 I_0$. Локальные минимумы интенсивности будем искать при смещении точки наблюдения от O в область $z \leq R_0$

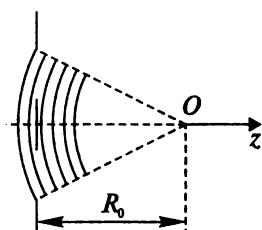


Рис. 6.34

(№ 6.51). Для сдвига фаз в точке наблюдения воспользуемся (6.13). Граница зон Френеля (при $z \leq R_0$) определяется из условия $\phi = m\pi$, поэтому

$$\rho_m^2 = m \lambda z R_0 / (R_0 - z).$$

Для внешней границы кольца получаем: $m_4 = 4(R_0 - z)/z$, для внутренней: $m_1 = (R_0 - z)/z$. При $z = R$ имеем $m_4 = m_1 = 0$. Локальные минимумы образуются, когда на кольцевой вырез будет укладываются четное число зон Френеля $m_4 - m_1 = 3(R_0 - z)/z = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, откуда

$$z_n = 3R_0/(2n + 3).$$

При $n = 1$ имеем $z_1 = (3/5)R_0$, при $n = 2$ получаем $z = (3/7)R_0$ и т. д.

При рассмотрении плоских щелей используются плоские зоны (зоны Шустера). На рис. 6.35 показана плоская щель (перпендикулярная плоскости рисунка) ширины dS , через которую идет плоская волна. Амплитуда волны, попадающей в точку P (это любая точка на линии, перпендикулярной рисунку), пропорциональна площади щели и уменьшается из-за угла. Фаза, т. е. поворот вектора на векторной диаграмме увеличивается с расстоянием. Результат сложения векторов от щелей (спираль Корню) показан на рис. 6.36. Полностью открытая плоскость фронта дает в сумме вектор A_0 , наполовину открытая — $A_0/2$. Для преграды, изображенной на рис. 6.37, в точке P амплитуда описывается вектором A_m на рис. 6.36. Распределение интенсивности света (квадрата амплитуды) I на экране, перед которым находится непрозрачная полуплоскость, параллельная экрану и перпендикулярная направлению распространения плоской световой волны, рассчитанное с использованием спирали Корню, показано на рис. 6.38. Под краем непрозрачной полуплоскости интенсивность равна $1/4$ части интенсивности при ее отсутствии.

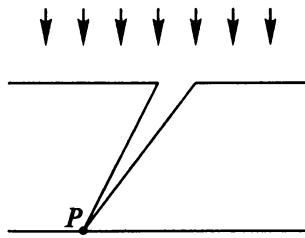


Рис. 6.35

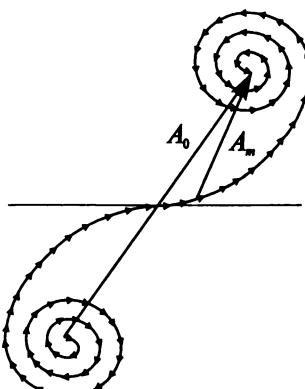


Рис. 6.36

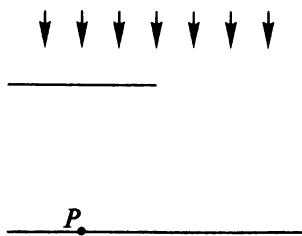


Рис. 6.37

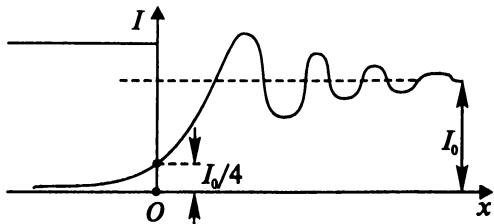


Рис. 6.38

Зная радиусы зон Френеля (6.6), можно изготовить специальное устройство, называемое **зонной пластинкой**, которая прикрывает зоны через одну, обеспечивая таким образом сложение амплитуд одного знака, приводящее к значительному увеличению интенсивности волны в точке наблюдения. Зонная пластина действует подобно собирательной линзе. Используя (6.6), можно написать для расстояний от источника до пластиинки (*a*) и от пластиинки до точки наблюдения (*b*):

$$1/a + 1/b = m\lambda/r_m^2 = 1/f. \quad (6.16)$$

Эта формула аналогична формуле для линзы. Величину *f* называют **основным фокусом**, или **максимальным фокусным расстоянием**,

$$f_0 = r_i^2/\lambda. \quad (6.17)$$

В отличие от линзы, зонная пластина дает не одно, а много изображений источника. Если сместить точку наблюдения так, чтобы в пределах первого прозрачного кольца укладывалась не одна, а три зоны Френеля, то в итоге получаем усиление интенсивности в точке на расстоянии *b*₁, для которой

$$1/a + 1/b_1 = 3/f_0.$$

Положение всех точек усиления интенсивности определяется соотношением

$$1/a + 1/b_n = (2n + 1)/f_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда

$$f_n = f_0/(2n + 1). \quad (6.18)$$

Фокусные расстояния меньше основного (максимального) фокуса.

При отрицательных значениях n получаем мнимые фокусы и, соответственно, расходящиеся волны, как для мнимых источников (№ 6.40).

Освещенный предмет расположен на оси зонной пластинки на расстоянии a от нее. Самое дальнее от зонной пластинки изображение предмета получается на расстоянии b от нее. Найдем, на каких расстояниях b_n от пластинки получаются остальные изображения предмета (№ 6.41). Используя (6.16) и (6.18), получаем: $f_n = ab/[a + b](2n + 1)$.

Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 3 м, на расстоянии 2 м от своей поверхности. Найдем, где получится изображение источника, если его отодвинуть на бесконечность (№ 6.35). Из (6.16) имеем $1/a + 1/b = 1/b_1$, откуда $b_1 = 1,2$ м.

Определим фокусное расстояние f зонной пластинки для света с длиной волны 5000 Å, если радиус 5-го кольца этой пластинки равен 1,5 мм; определим также радиус r_1 1-го кольца этой пластинки. Выясним, что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления n ($n > 1$) (№ 6.36). Используя (6.16), получаем $f = r_5^2/(5\lambda) = 90$ см, $r_1 = (\lambda f)^{1/2} = 0,672$ мм. При заполнении пространства между зонной пластинкой и экраном средой длина волны уменьшится в n раз. Фокусное расстояние увеличится, и максимумы, расположенные на оси пластинки отодвинутся от нее.

Если у зонной пластинки закрыты все зоны, кроме первой, то интенсивность в фокусе (точки наблюдения), в соответствии с (6.7), равна $I_1 = A_1^2 = (2A_0)^2 = 4I_0$ (№ 6.37).

Если у зонной пластинки закрыты все зоны, кроме верхней половины первой, то интенсивность в фокусе (точки наблюдения), в соответствии с (6.7), равна $I_{1/2} = A_0^2 = I_0$ (№ 6.38).

Зонная пластинка с радиусом первой зоны Френеля $r_1 = 0,5$ мм помещена перед отверстием в экране диаметром $D = 1$ см. Пластинка освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью I_0 . Определим интенсивность I волны в фокусе пластинки. Оценим также размер пятна d в фокальной плоскости (№ 6.44). Используя (6.6), найдем число зон, укладывающихся в отверстии $m = (r_m/r_1)^2 = D^2/(2r_1)^2 = D^2/(4\lambda b) = 100$, где $b = r_1^2/\lambda = 50$ см — фокусное расстояние зонной пластинки. Амплитуда от $m/2$ открытых зон равна $A = A_1 m/2 = A_0 m$. Соответственно для интенсивности имеем: $I = I_0 m^2 = I_0 \cdot 10^4$. Размер пятна оцениваем из условия сохранения потока энергии: $I\pi d^2/4 = I_0 \pi r_1^2 m/2$, откуда $d \approx 2,8 r_1^2/D = 7 \cdot 10^{-3}$ см. При вычислении по (6.9) $d \sim 5 \cdot 10^{-3}$ см.

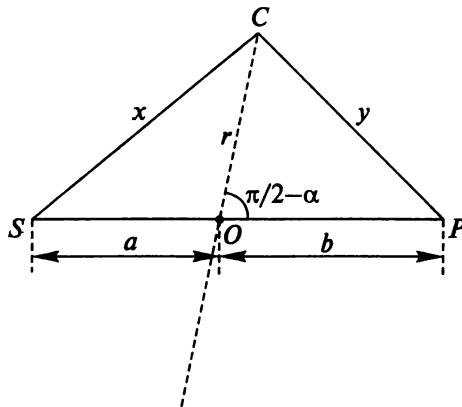


Рис. 6.39

С помощью зонной пластинки надо сфотографировать освещенный предмет с угловым размером $2\alpha = 0,1$ рад. Оценим число зон пластинки, при котором будет достигнута наибольшая четкость в изображении всех частей предмета (№ 6.42). Рассмотрим, как скаживается на четкости изображения (уменьшение интенсивности в точке наблюдения) точечного источника наклон зонной пластинки относительно прямой линии, проходящей через источник, центр зонной пластинки и изображение на угол $\pi/2 - \alpha$, где $\alpha << \pi/2$. На рис. 6.39 показаны источник (S), зонная пластинка (точка O — центр пластинки, точка C находится на внешнем радиусе r некоторой зоны) и изображение (P). По теореме косинусов $x^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\alpha$. Извлекая корень и разлагая в ряд Тейлора, получаем с точностью до квадрата малой по сравнению с 1 величины r/a :

$$x = a + rs\sin\alpha + r^2\cos^2\alpha/(2a).$$

Аналогично,

$$y = b - rs\sin\alpha + r^2\cos^2\alpha/(2b).$$

Для разности хода имеем

$$\Delta = (x + y) - (a + b) = r^2\cos^2\alpha (1/a + 1/b)/2.$$

При $\alpha = 0$ получаем $\Delta_0 = r^2(1/a + 1/b)/2$. Приращение разности хода, связанное с наклоном зонной пластинки, определим по формуле

$$\delta\Delta = \Delta_0 (1 - \cos^2\alpha) = \Delta_0 \sin^2\alpha \approx \Delta_0 \alpha^2.$$

Если $\delta\Delta > \lambda/2$, то возникает перекрытие положительных и отрицательных зон и интенсивность волны в точке наблюдения (четкость изображения) уменьшается. Таким образом, предельное значение определяется соотношением $\Delta_0 \approx \lambda/(2\alpha^2)$. Откуда для числа зон Френеля получаем $N \approx \Delta_0/(\lambda/2) \approx 1/\alpha^2$. Для неточечного предмета нечеткость проявляется именно для крайних точек, для которых зонная пластинка имеет наклон. Поэтому предельное число зон Френеля, при котором должно получиться наиболее четкое изображение, будет $N \sim 1/\alpha^2 \sim 400$.

Зонная пластинка Френеля с радиусом первой зоны Френеля $r_1 = 0,6$ мм создает изображение удаленного протяженного объекта с угловым размером $\alpha = 5,7^\circ$. Оценим максимальный размер пластинки, а также допустимую при этом размере относительную немонохроматичность света $\Delta\lambda/\lambda$, при которых изображение краев объекта остается достаточно резким (№ 6.55). Зоны Френеля для крайних точек протяженного объекта имеют вид эллипсов с разностью (рис. 6.40) $\Delta r = r_m - r_{mm} = r_m[1 - \cos(\alpha/2)] \approx \approx r_m \alpha^2/8$. Эта величина должна быть меньше ширины крайних зон Френеля, чтобы перекрывающиеся положительные и отрицательные зоны не гасили друг друга. Используя (6.6) для удаленного объекта, получаем $r_{m+1} - r_m = f\lambda/(2r_m)$. Из (6.6) для первой зоны Френеля $f = r_1^2/\lambda$. Обозначив диаметр пластинки D , имеем: $D\alpha^2/16 < r_1^2/D$. Поэтому $D = 4r_1/\alpha = 2,4$ см. Максимальное значение $m = D^2/(4r_1^2)$. Относительную немонохроматичность находим, как и в (4.8), из условия $(\lambda + \Delta\lambda)m = \lambda(m + 1)$. Поэтому $\Delta\lambda/\lambda = \alpha^2/4 = 2,5 \cdot 10^{-3}$.

Еще больший эффект можно получить от **фазовых зонных пластинок**, в которых вместо задержки волны непрозрачностью создавать изменение фазы волны на противоположную.

Зонная пластинка, вырезанная из стекла с показателем преломления n , представляет собой **тело вращения**, сечение которого показано на рис. 6.41. Пластинка помещена в непрозрачную оправу.

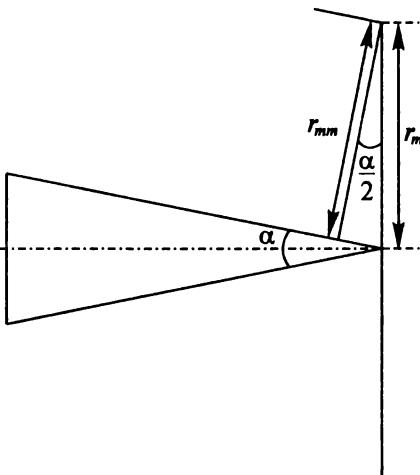


Рис. 6.40

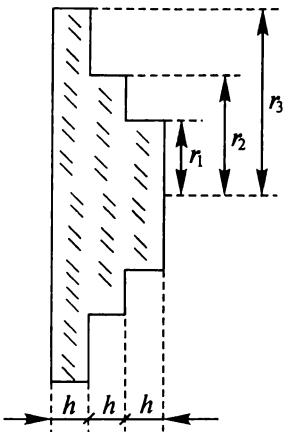


Рис. 6.41

Радиусы ступенек $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 4$ мм, $r_3 = 6$ мм. Толщина ступенек h одинакова. Определим максимальное фокусное расстояние f_{\max} пластиинки для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Найдем, при какой толщине h интенсивность в фокусе будет наибольшей, и какой максимальный выигрыш в интенсивности будет давать эта система (№ 6.39). Рассмотрим вариант, когда центральный диск равен первой зоне Френеля. Из (6.16) $f = r_1^2/\lambda = 8$ м. При этом r_2 соответствует внешнему краю четвертой зоны Френеля, а r_3 — девятой зоны Френеля. Между r_1 и r_2 расположены вторая, третья и четвертая зоны, дающие отрицательную амплитуду. Чтобы изменить фазу

должно быть $h = (2m + 1)(\lambda/2)/(n - 1)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ Между r_2 и r_3 расположены пятая, шестая, седьмая, восьмая и девятая зоны, дающие положительную амплитуду. Изменения фазы по сравнению с первым диском за счет показателя преломления при этом не происходит. В результате общая амплитуда равна трем амплитудам первой зоны, а интенсивность $I = 36I_0$.

На вогнутом сферическом зеркале можно создать устройство, работающее подобно зонной пластиинке, если устраниТЬ, например, закраской зоны Френеля через одну. Найдем радиус m -й зоны на таком зеркале, если источник света и точка наблюдения расположены на оси зеркала на расстояниях a и b соответственно от его вершины, причем $a \leq R \leq b$, $r \ll a$, где R — радиус кривизны поверхности зеркала (№ 6.45). На рис. 6.42 показано зеркало с радиусом кривизны $OM = R$, точечный источник S ($AS = a$), точка наблюдения P ($AP = b$). Обозначив радиус m -й зоны Френеля r_m , получим $(SM)^2 = (a - x)^2 + r_m^2 = (a - x)^2 + r_m^2/(2a)$. Отсюда, пре-небрегая квадратом малого отрезка x , имеем $SM \approx a + r_m^2/(2a)$. Аналогично, $MP \approx b + r_m^2/(2b)$. Так как $(OM)^2 = R^2 = (R - x)^2 + r_m^2$, то $x \approx r_m^2/(2R)$. Радиус m -й зоны определится из условия

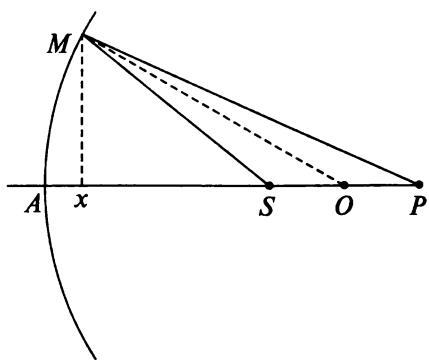


Рис. 6.42

$$|(SM + MP) - (SA + AP)| = m\lambda/2.$$

Подставляя сюда вычисленные значения, находим

$$r_m^2 = m\lambda/|1/a + 1/b - 2/R|.$$

Для измерения размеров малых светящихся частиц предложенна схема, изображенная на рис. 6.43. Частица S и плоскость наблюдения Π расположены на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы L с фокусным расстоянием $f = 25$ см. Перед линзой на некотором расстоянии L , которое можно изменять в процессе эксперимента, расположен экран Θ с двойной щелью. Расстояние между щелями $d = 1$ см, ширина каждой щели $l = 2$ мм. Длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Определим ширину интерференционных полос, наблюдаемых на плоскости Π , если экран расположен точно посередине между частицей S и линзой ($L = f$). Оценим также, при каком значении L интерференционные полосы исчезнут, если размер источника $b = 10^{-3}$ см (№ 6.48). В случае применимости геометрической оптики изображение частицы, как это следует из (1.19), будет на плоскости наблюдения Π . Применимость геометрической оптики следует из того, что в теневом изображении щели в плоскости линзы укладывается большое число зон Френеля, вычисленных относительно точки наблюдения на плоскости Π . Из (6.6) при $L = f$ находим число зон:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = [(d_1/2 + l_1)^2 - (d_1/2)^2]8f/(4\beta\lambda) \approx 700 \gg 1.$$

Волны, идущие из S через щели, пройдя линзу в случае $L = f$ расходятся в P под углом $\alpha = d/f$. Как следует из (4.6) ширина интерференционных полос $\Delta y = \lambda f/d \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$ см. Полосы исчезнут, если при изменении L расстояние между щелями окажется больше ширины когерентности. В соответствии с (5.5) $d \geq \lambda/\varphi = \lambda(2f - L)/b$, откуда $L \approx 2f - bd/\lambda = 30$ см.

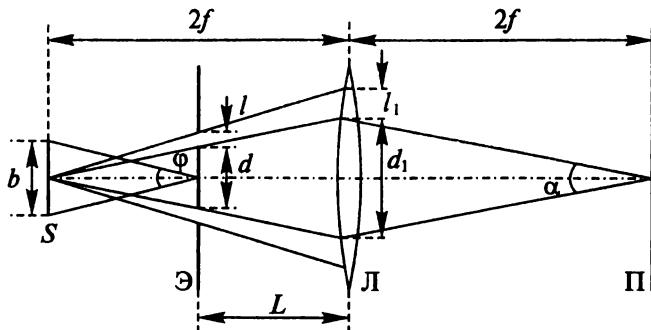


Рис. 6.43

7. Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов

Рассмотрим дифракцию параллельного пучка света, который получается либо от очень удаленного источника, либо за собирающей линзой, в фокусе которой находится точечный источник, либо от лазера. Радиусы зон Френеля для такого пучка определяются из (6.6)

$$r_m^2 = bm\lambda. \quad (7.1)$$

Используя это соотношение, можно ввести безразмерный **волновой параметр** (p) для характеристики типов дифракции в зависимости от размера препятствия (D) и расстояния от препятствия до экрана (b), на котором возникает дифракционная картина

$$p = (\lambda b)^{1/2}/D. \quad (7.2)$$

Геометрической оптике соответствует $p \ll 1$, когда длина волны света значительно меньше характерных размеров и волновые свойства не проявляются. При $p \sim 1$, когда, как следует из (7.1), картина определяется некоторым количеством зон Френеля, имеем дифракцию Френеля, рассмотренную в разделе 6. При $p \gg 1$, когда препятствие занимает малую часть первой зоны Френеля, получаем **дифракцию Фраунгофера**. Расстояние от препятствия до экрана не просто много больше размеров препятствия ($b \gg D$), а должно выполняться условие:

$$(b \lambda)^{1/2} \gg D. \quad (7.3)$$

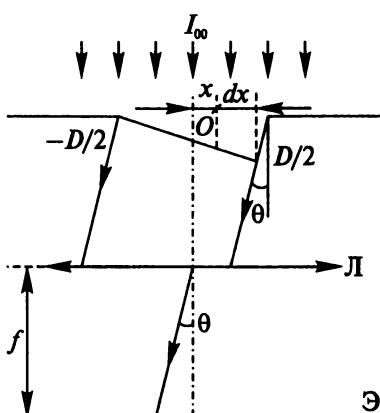


Рис. 7.1

Для наблюдения дифракции Фраунгофера используется линза, которая переводит дифракционную картину из бесконечности в фокальную плоскость линзы. Заметим, что картина на экране привязана к линзе и остается неподвижной при смещении щели.

На рис. 7.1 дана схема дифракции Фраунгофера на щели шириной D при падении на нее по нормали плоской волны интенсивностью I_{00} .

Интенсивность волны — это энергия, проходящая через единицу

ничную площадку. С каждого элемента фронта волны (dx), находящемся на щели, распространяются волны под различными углами θ . Модули амплитуд волн A_{00} связаны с интенсивностью: $I_{00} = A_{00}^2$. Линза собирает параллельные лучи в одну точку (суммирует амплитуды). Необходимо учесть сдвиг фаз для различных элементов на щели, зависящий от его положения (в данном случае от расстояния x от центра щели). Удобно воспользоваться комплексным представлением амплитуды волны

$$A = \int_{-D/2}^{D/2} A_{00} e^{ikx \sin \theta} dx = A_{00} D(\sin \alpha / \alpha), \quad (7.4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а

$$\alpha = k(D/2) \sin \theta = (\pi/\lambda) D \sin \theta. \quad (7.5)$$

Можно ввести максимальную амплитуду на экране, которая получается при $\theta = 0$

$$A_0 = A_{00} D. \quad (7.6)$$

Для интенсивности $I = |A|^2$ из (7.4) и (7.6) следует распределение по экрану

$$I(\theta) = A_{00}^2 D^2 (\sin \alpha / \alpha)^2 = A_0^2 (\sin \alpha / \alpha)^2 = I_0 (\sin \alpha / \alpha)^2. \quad (7.7)$$

Эта зависимость показана на рис. 7.2. Нули (минимумы) получаются при

$$D \sin \theta = m\lambda, \quad (7.8)$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Угол θ при $m = 1$ называют угловой полушириной главного максимума.

Второй максимум имеем при $\sin \theta \approx (3/2)\lambda/D$. Используя (7.7) и (7.5), получаем

$$I = I_0 / (3\pi/2) = I_0 / 22,2. \quad (7.9)$$

На рис. 7.2 это соотношение не соблюдено для удобства изображения.

Направление на первый минимум можно получить и другим простым способом. Каждому источнику на щели сопоставляем другой, который в данном направлении дает сдвиг по фазе на $\lambda/2$. В таком случае разница между источниками на краях щели равна λ , как и получается в (7.8).

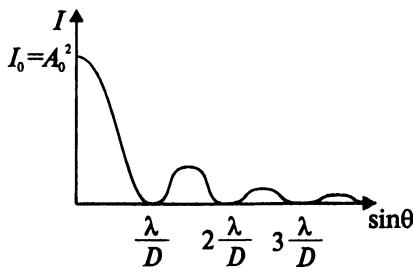


Рис. 7.2

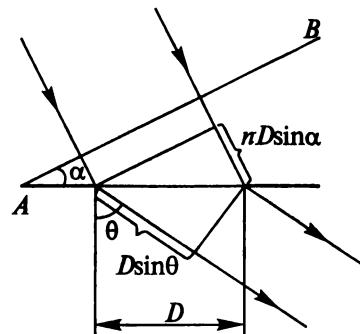


Рис. 7.3

Естественно, что тот же результат (7.4) получаем для гармонической волны

$$\begin{aligned} A &= \int_{-D/2}^{D/2} A_{00} \cos[\omega t - (2\pi/\lambda)x \sin \theta] dx = \\ &= A_0 D [\sin[(\pi/\lambda)D \sin \theta] / ((\pi/\lambda)D \sin \theta)] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.10)$$

На щель шириной D положена стеклянная призма с показателем преломления n и преломляющим углом α (рис. 7.3). На грань AB призмы нормально падает плоская монохроматическая волна. Найдем направления на нулевой максимум и минимум в дифракционной картине Фраунгофера (№ 7.11). Для разности хода лучей, проходящих через края щели, $\Delta = D(n \sin \alpha - \sin \theta)$. Для направления на нулевой максимум $\Delta = 0$ и $\sin \theta = n \sin \alpha$. Для направления на минимумы, как это следует из (7.8), $\Delta = m\lambda = D(n \sin \alpha - \sin \theta)$, откуда получаем

$$\sin \theta = n \sin \alpha \pm m\lambda / D, \quad (7.11)$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Дифракция Фраунгофера плоской волны на щели наблюдается в фокальной плоскости линзы. Найдем, во сколько раз изменится интенсивность в фокусе линзы, если щель накрыть плоскопараллельной пластинкой, амплитудный коэффициент пропускания которой имеет вид $\tau(x) = \sin(\pi x/a)$. Ось x направлена перпендикулярно щели, точки $x = 0$ и $x = a$ — координаты краев щели (№ 7.26). Обозначая амплитуду без пластиинки A_1 и с пластиинкой A_2 , можно записать $A_2 = \int_0^a (A_1/a) \tau(x) dx = 2A_1 / \pi$, откуда $I_1/I_2 = \pi^2/4$.

Точечный источник света находится на некотором расстоянии a от щели шириной D . За щелью на расстоянии b от нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости щели. Прямая, соединяющая источник света с серединой щели, перпендикулярна плоскости экрана. Найдем приближенное выражение для расстояния x между центральным максимумом и первым дифракционным минимумом на экране, считая, что углы дифракции малы. Найдем также условие применимости полученного приближенного выражения (№ 7.15). Используя рис. 7.4, получаем

$$r_1^2 = b^2 + (x - D/2)^2; \quad r_2^2 = b^2 + (x + D/2)^2; \quad r_2 - r_1 = 2xD/(r_1 + r_2).$$

Извлекая корни и разлагая в ряд, находим

$$r_1 + r_2 = b[2 + (x^2 + D^2/4)/b^2].$$

Подставляя в предыдущее, имеем

$$r_2 - r_1 = 2xD/(r_1 + r_2) = (xD/b) [1 - (x^2 + D^2/4)/(2b^2)].$$

Ограничиваясь первым членом, получаем

$$x = b\lambda/D.$$

Ошибка при вычислении $r_2 - r_1$ должна быть мала по сравнению с λ . Отсюда получаем применимость соответствующей формулы

$$(b^2\lambda^2/D^2 + D^2/4)/(2b^2) \ll 1.$$

На щель шириной a нормально падает плоская волна с длиной волны λ . Щель закрыта двумя стеклянными пластинками шириной $a/2$ и толщиной h с показателями преломления n_1 и n_2 и коэффициентами пропускания (по интенсивности) τ_1 и τ_2 . Найдем распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера. Определим, при каком условии в центре картины получается темная полоса (№ 7.28). Каждая половинка открытой щели описывается (7.4). Учитывая пропускание, для амплитуд получаем $A_{1/2}\tau_1^{1/2}$ и $A_{1/2}\tau_2^{1/2}$. Сдвиг фазы между этими векторами равен

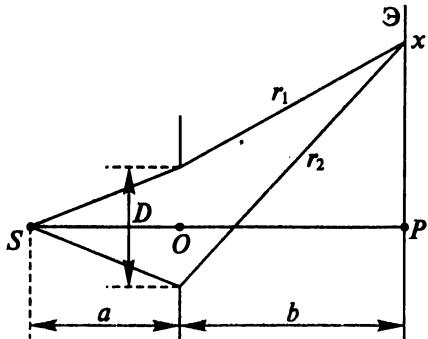


Рис. 7.4

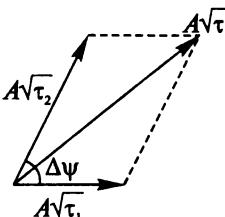


Рис. 7.5

$$\Delta\psi = k [(n_1 - n_2)h + (a/2)\sin\theta].$$

На рис. 7.5 показано сложение векторов амплитуд, соответствующих волнам через каждую пластиинку на векторной (фазовой) диаграмме. С помощью теоремы косинусов находим $\tau = \tau_1 + \tau_2 + 2(\tau_1\tau_2)^{1/2}\cos\Delta\psi$. Для интенсивности (квадрата вектора суммы) получаем

$$I = \{A_{00}(a/2)\sin[k(a/4)\sin\theta]/[k(a/4)\sin\theta]\}^2[\tau_1 + \tau_2 + 2(\tau_1\tau_2)^{1/2}\cos\Delta\psi].$$

В центре получится темная полоса, если за счет показателя преломления волны придут в противофазе, т. е. при $kh(n_1 - n_2) = (2m + 1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

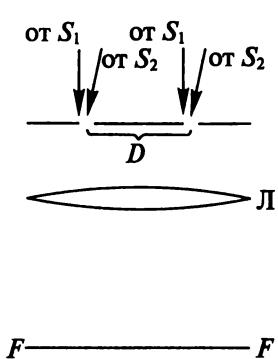


Рис. 7.6

Дифракционные полосы от двух одинаковых параллельных щелей наблюдаются в фокальной плоскости линзы L (рис. 7.6), S_1 и S_2 — бесконечно удаленные линейные источники монохроматического света, параллельные щелям. Определим, при каком угловом расстоянии ϕ между S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут, если расстояние между центрами щелей равно D и велико по сравнению с шириной щели и длиной световой волны λ (№ 7.21). Максимум от наклонного луча попадет на экране на минимум от луча, падающего нормально (7.8), если $D\sin\theta = \lambda/2 + m\lambda$, где

m — целое число. Отсюда находим $\theta \approx (\lambda/D)(m + 1/2)$.

Для той же установки, что и выше, найдем, при каком расстоянии x между источниками S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут, если источники поместить в фокальной плоскости коллиматорной линзы с фокусным расстоянием f (№ 7.22). Чтобы получить два параллельных пучка, как в предыдущей задаче, должно быть $x = f\theta = f(\lambda/D)(m + 1/2)$.

Интерференционная схема Юнга (расстояние между щелями в непрозрачном экране $l = 1$ см) используется для оценки степени монохроматичности источника, излучающего в окрестности линии длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оказалось, что при изменении ширины щелей от $b_1 = 0,5$ мм до $b_2 = 0,1$ мм число наблюдаемых полос возрастает вдвое (от $N_1 = 40$ до $N_2 = 80$). Оценим ширину спектра излучения $\Delta\lambda$, имея в виду, что плоскость наблюдения удалена

в зону Фраунгофера, и визуально наблюдаются лишь полосы, интенсивность которых составляет не менее 4 % интенсивности нулевой полосы (№ 5.23). Так как плоскость наблюдения находится в зоне Фраунгофера, полуширина первого максимума определяется (7.8), а интенсивность следующего составляет менее 4 % от первого, то наблюдения возможны только в пределах области на экране $2L\lambda/b$, где L – расстояние от щелей до экрана. Для монохроматического источника в схеме Юнга из (3.8) получаем ширину полос $\Delta y = \lambda L/l$ и число $N = 2l/b = 40$. Поскольку это число совпадает с наблюдаемым числом N_1 , немонохроматичность еще не уменьшает число полос, т. е. определяемое (4.8) $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda \geq 40/2$. При уменьшении b в 5 раз число полос в отсутствие влияния немонохроматичности должно возрасти в 5 раз. Этого не наблюдается. И, следовательно, ограничение связано с немонохроматичностью, т. е. $m_{\max} = \lambda/\Delta\lambda = N_2/2 = 80/2 = 40$. Откуда $\Delta\lambda = \lambda/40 = 12,5$ нм.

Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 3/2$, падая на ее поверхность нормально (рис. 7.7). Толщина пластинки испытывает скачкообразное изменение на величину $b = 2\lambda/3$ вдоль прямой, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка. Найдем интенсивность в точке O , лежащей в плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, если интенсивность света в этой точке в случае плоскопараллельной пластины (т. е. при $b = 0$) равна I_0 (№ 7.19). Из-за скачка толщины пластины волны от половинок будут иметь сдвиг фаз $\phi = (2\pi/\lambda) \times b(n - 1)$. Если в отсутствие пластины амплитуда в точке O равна a_0 и $I_0 = a_0^2$, то амплитуды от половинок $a = a_0/2$. Учитывая разность фаз при сложении векторов от двух половинок волны и используя теорему косинусов, получаем $I = a^2 + a^2 + 2a^2\cos\phi$. При заданных n и b имеем $\phi = 2\pi/3$ и $I = a^2 = a_0^2/4 = I_0/4$.

Найдем связь между n и b , при которой $I = I_0/2$ (№ 7.20). Из предыдущих формул следует, что это будет при $\cos\phi = 0$. Таким образом, должно быть $\phi = (2\pi/\lambda)b(n - 1) = \pi(m \pm 1/2)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда

$$b = (\lambda/2)(m \pm 1/2)/(n - 1).$$

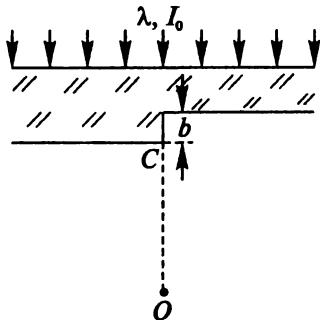


Рис. 7.7

На край плоского полубесконечного прозрачного экрана нормально падает плоская квазимонохроматическая волна. Зависимость коэффициента преломления материала экрана от частоты v имеет вид $n(v) = 1 - \beta/v$, где $\beta = 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Определим, при какой толщине h экрана интенсивность прошедшего света равна нулю в любой точке плоскости, перпендикулярной экрану и проходящей через его край (№ 7.68). При $n = 1$ вектор E_2 , соответствующий экрану, на векторной диаграмме совпадает с вектором E_1 , соответствующем волне через открытую часть. При заданной зависимости коэффициента преломления происходит изменение фазы вектора E_2 от фазы вектора E_1 на величину $kh(n - 1) = -(2\pi/\lambda) \times h\beta/v$. Векторы будут в противофазе, т. е. дадут в сумме нуль, если $(2\pi/\lambda)h\beta/v = \pi + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда наименьшая толщина равна $h = c/(2\beta) = 0,5 \text{ мм}$ (c — скорость света).

Оценим длительность τ светового импульса от одной грани восьмигранного вращающегося зеркала, расположенного на расстоянии $L = 200 \text{ м}$ от точечного источника света S . Световой импульс регистрируется фотоумножителем с малой шириной входной щели, расположеннымным вблизи источника (рис. 7.8). Ширина грани зеркала равна $a = 1 \text{ см}$. Длина волны света $\lambda = 500 \text{ нм}$. Зеркало вращается с частотой $v = 16 \text{ Гц}$ (№ 7.65). Нормаль к поверхности зеркала вращается с угловой скоростью $\omega = 2\pi v$. Конец луча мимо ФЭУ движется с в два раза большей скоростью. Относительная линейная скорость ФЭУ относительно луча $v = 2\omega L$. С учетом дифракции (7.5) ширина светового сигнала $l \approx a + 2(\lambda/a)L$, поэтому

$$\tau = l/V \approx [\lambda/a + a/(2L)]/(2\pi v) \approx 10^{-6} \text{ с.}$$

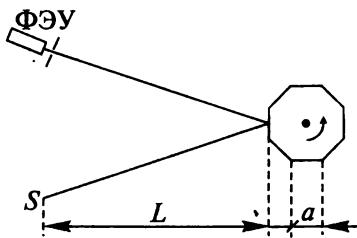


Рис. 7.8

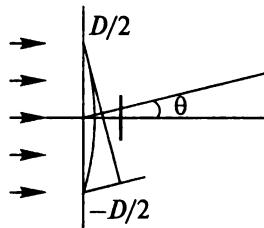


Рис. 7.9

Цилиндрическая линза освещается параллельным пучком монохроматического света (рис. 7.9). Найдем, во сколько раз изменится интенсивность в фокусе и ширина центрального максимума, если центр линзы перекрыть непрозрачной полоской, ширина которой вдвое меньше ширины линзы, а также как изменится све-

товой поток в центральном максимуме (№ 7.32). Из (7.4) и (7.5) для незакрытой линзы получаем

$$A = A_{00}\{\sin[k(D/2)\sin\theta]\}/[(k/2)\sin\theta]. \quad (7.12)$$

Для средней части линзы ширины b

$$A_b = A_{00}\sin[k(b/2)\sin\theta]/[(k/2)\sin\theta].$$

Если эта часть закрыта, то

$$\begin{aligned} A - A_b &= A_{00}\{\sin[k(D/2)\sin\theta] - \sin[k(b/2)\sin\theta]\}/[(k/2)\sin\theta] = \\ &= A_{00}\cos[(k/4)(D + b)\sin\theta]\sin[(k/4)(D - b)\sin\theta]/[(k/2)\sin\theta]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Для распределения интенсивности имеем

$$I = I_0\cos^2[(D + b)(k/4)\sin\theta]\sin^2[(D - b)(k/4)\sin\theta]/[(k/4)\sin\theta]^2. \quad (7.14)$$

Для центрального максимума (при $\theta = 0$) в отсутствие полоски из (7.12) получаем $I_1 = I_0D^2$, а при наличии полоски из (7.14) $I_2 = I_0(D - b)^2$. Их отношение для заданного условия равно $1/4$.

Ширина центрального максимума без полоски из (7.12) и (7.5) $\Delta\theta_1 \approx 2\lambda/D$, а с полоской из (7.14) $\Delta\theta_2 \approx 2\lambda(D + b)$, так как косинус раньше обращается в нуль. Их отношение для заданного условия равно $2/3$.

Для отношения потоков находим $\Phi_2/\Phi_1 = (I_2\Delta\theta_{12})/(I_1\Delta\theta_1) = 1/6$.

Цилиндрическая линза шириной

D освещается параллельным пучком монохроматического света. Центральная часть линзы (рис. 7.10) перекрывается прозрачной полоской, вносящей фазовую задержку в π . Найдем, какова ширина полоски b , если центральный дифракционный максимум сузился вдвое, и во сколько раз изменилась при этом интенсивность в фокусе (№ 7.31). Из-за полоски центральная часть не просто исключается, как в предыдущей задаче (7.13), а действует в противофазе

$$A - A_b = A_{00}\{\sin[k(D/2)\sin\theta] - 2\sin[k(b/2)\sin\theta]\}/[(k/2)\sin\theta]. \quad (7.15)$$

По условию ширина максимума, которая для линзы без полоски из (7.4) и (7.5) была равна $\theta_0 = \lambda/D$, теперь стала $\theta_1 = \lambda/(2D)$, т. е. при таком угле (7.15) должно выполняться: $\sin(\pi/2) - 2\sin[\pi b/(2D)] = 0$. Отсюда $b = D/3$. В фокусе (при $\theta = 0$) из (7.15) и (7.4) получаем $I/I_0 = (D - b)^2/D^2 = 1/9$.

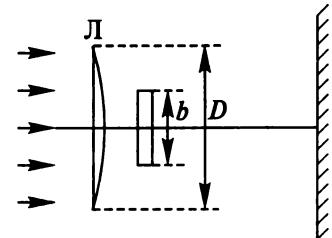


Рис. 7.10

Для круглого отверстия интегрирование громоздко. Поэтому приведем лишь результат для малых углов. Дифракционная картина представляет светлые и темные кольца. В случае отверстия радиуса R угловое направление на темные кольца (угловой радиус)

$$\theta_m = [0,61 + (m - 1)/2]\lambda/R. \quad (7.16)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

С Искусственного спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на расстоянии $h = 250$ км, проводится фотографирование земной поверхности. Разрешающая способность фотопленки $N = 500$ линий/мм. Найдем, какими параметрами должен обладать объектив фотоаппарата (диаметр D , фокусное расстояние f), чтобы при фотографировании разрешались детали с линейными размерами $l \approx 1$ м (№ 7.9). Разрешение деталей определяется размером дифракционного пятна, связанного с диаметром объектива фотоаппарата. Для углового размера пятна из (7.16) имеем

$$\theta \approx 1,22\lambda/D. \quad (7.17)$$

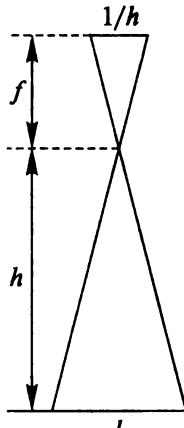


Рис. 7.11

Чтобы разрешать детали с размером l на расстоянии h (рис. 7.11), необходимо $\theta \leq l/h$. Для диаметра объектива получаем $D \geq 1,22\lambda h/l = 16,8$ см. Способность разрешения на пленке связана с расстоянием между зернами пленки, которое равно $1/N$. Детали изображения должны быть больше этого расстояния $(l/h)f \geq 1/N$, откуда $f \geq h/(Nl) = 50$ см. Поэтому $D/f \approx 1/3$.

На рис. 7.12 изображена схема интерференционного опыта Юнга, в котором используется явление дифракции света на двух щелях. В качестве источника света в схеме применен лазер, работающий на длине волны $\lambda = 6328$ Å. Пучок света на выходе лазера имеет плоский волновой фронт.

Диаметр пучка $d = 2$ мм.

Э Найдем, при каком расстоянии между щелями D возможно наблюдение интерференционной картины на экране, если расстояние от источника до двойной щели $L = 4$ м (№ 7.23). В соответствии с (7.17) диаметр пучка на

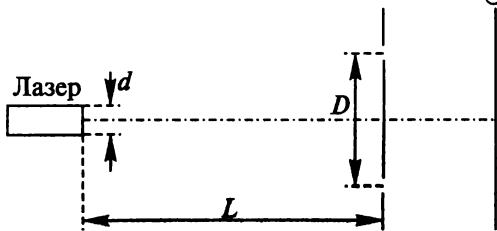


Рис. 7.12

расстоянии L будет равен $d_1 = d + 2 \cdot 1,22(\lambda/d)L = 0,45$ см. Расстояние между щелями должно быть меньше этого диаметра, чтобы свет попадал на две щели.

При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием $f = 10$ см и диаметром $D = 5$ см. Съемка производится на фотопленку, имеющую разрешающую способность $R = 100$ мм⁻¹. Определим, какие детали местности могут быть разрешены на фотографиях, если съемка производится с высоты $h = 10$ км (№ 7.36). Угол, разрешаемый по дифракции, из (7.17) $\theta_1 = 1,22\lambda/D = 1,22 \cdot 5,5 \cdot 10^{-5}/5 = 1,35 \cdot 10^{-5}$. Угол, разрешаемый на пленке, $\theta_2 = 1/(Rf) = 10^{-4}$. Так как $\theta_2 > \theta_1$, то он и определяет разрешаемые размеры. Поэтому $l_{\min} \approx h \theta_2 = 1$ м.

С самолета, летящего на высоте $h = 5$ км, производится аэрофотосъемка местности. Найдем, какими следует выбрать фокусное расстояние f и диаметр объектива D фотоаппарата, чтобы сфотографировать объекты размером $l \approx 2,5$ см на фотопленку с разрешающей способностью $N = 500$ штрих/мм. Определим также, на какое время τ следует открывать затвор фотоаппарата (экспозиция), чтобы движение самолета со скоростью $v = 360$ км/ч не приводило к размытию изображения (№ 7.10). Как и в предыдущей задаче, получаем

$$D \geq 1,22\lambda h/l = 12 \text{ см}, f \geq h/(Nl) = 40 \text{ см}.$$

Размывания картины не будет, если отношение смещения объекта в системе, связанной с самолетом, к высоте полета будет меньше отношения размера зерна пленки (расстояние между штрихами) к фокусному расстоянию фотоаппарата: $V\tau/h < (1/N)/f$. Откуда

$$\tau < h/(NfV) \approx 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Современные фотопленки способны разрешать до $z = 10^4$ линий/см. Найдем, какую светосилу (т. е. отношение квадратов диаметра D и фокусного расстояния f) должен иметь объектив фотоаппарата, чтобы полностью использовать разрешающую способность пленки (№ 7.38). В соответствии с (7.17) должно выполняться $\lambda/D \leq 1/(zf)$. Откуда $D^2/f^2 \geq z^2\lambda^2 \approx 0,25$.

Оценим, с какого расстояния L можно увидеть раздельно свет от двух фар автомобиля (№ 7.3). Из (7.17) $\theta \sim \lambda/D < l/L$, где $D = 0,5$ см — диаметр зрачка глаза, а $l = 100$ см расстояние между фарами. Отсюда $L < 10$ км.

О зоркости хищных птиц ходят легенды. Оценим на основе дифракционных соображений, может ли орел, летящий на высоте

1 км, разглядеть мышонка размером 2 см (№ 7.5). Диаметр D зрачка глаза орла не превышает нескольких миллиметров. Если предположить, что $D = 1$ см и $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см, то угол, под которым орел может различить две точки предмета раздельно, примерно в три раза больше углового размера мышонка $2 \cdot 10^{-5}$.

Камера-обскуру длиной $L = 10$ см с малым отверстием предназначена для фотографирования удаленных предметов. Оценим диаметр отверстия D камеры, при котором она имеет наибольшую разрешающую способность, если длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ (№ 7.16). В соответствии с геометрической оптикой изображение на экране далекого источника равно размеру отверстия. Чем меньше отверстие, тем резче изображение. Однако при уменьшении отверстия в соответствии с (7.16) пятно будет увеличиваться. Для диаметра пятна D_p имеем $D_p = D + 2 \cdot 1,22\lambda L/D$. Минимум этой величины при $dD_p/dD = 0$. Откуда $D = (2,44\lambda L)^{1/2} \approx 0,35$ мм. Близкая величина получается также, если приравнять отверстие первой зоне Френеля (6.6).

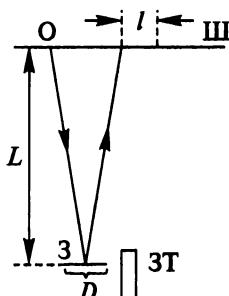


Рис. 7.13

Гальванометр имеет зеркальце диаметром $D = 5$ мм. Оценим (учитывая дифракционные эффекты), дальше какого расстояния L не следует отодвигать шкалу от **гальванометра**, если отсчеты с помощью зрительной трубы можно выполнять с точностью до $l = 0,5$ мм (№ 7.45). На рис. 7.13 дана схема измерений, в которую входят шкала (Ш), зрительная труба (ЗТ), зеркало (З) и осветитель (О). Дифракционное пятно от зеркала, определяемое (7.17) должно быть меньше точности отсчета $1,22(\lambda/D)L < l$. Откуда $L < Dl/(1,22\lambda) = 3,7$ м.

Плоская монохроматическая волна длиной λ падает на плоско-вогнутую **сферическую линзу** диаметром $2\rho_0$ с показателем преломления n и радиусом кривизны R . Пространство вне линзы закрыто экраном. Вычислим интенсивность в центре кривизны линзы, лежащей на оптической оси системы. Найдем, при каких радиусах линзы $\rho_{0\max}$ интенсивность в центре кривизны максимальна ($\rho_0 \ll R$) (№ 7.30). Интегрируем по кольцам на линзе. Разность фаз определяется оптической разностью хода. Для амплитуды в центре кривизны имеем

$$E = E_0 / (\pi \rho_0^2) \int_0^{\rho_0} \exp[i n k \rho^2 / (2R)] 2\pi \rho d\rho = \\ = E_0 2R \{ \exp[in k \rho_0^2 / (2R)] - 1 \} / (i \rho_0^2 n k).$$

Для получения интенсивности амплитуду умножаем на сопряженную величину. В результате получаем

$$I_A = 16E_0^2 R \sin^2 [kn\rho_0^2/(4R)] / (\rho_0^4 n^2 k^2).$$

Интенсивность максимальна при $kn\rho_0^2/(4R) = \pi (m + 1/2)$, где m — целое число. Отсюда $\rho_{0\max} = [(2m + 1)\lambda R/n]^{1/2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Пучок фтористо-водородного лазера, работающего в одномодовом режиме на длине волны $\lambda = 3$ мкм, формируется зеркалами диаметром $D = 3$ м. Оценим, на каком максимальном расстоянии L может находиться мишень, чтобы плотность потока энергии на ней была практически равна плотности потока на зеркале (№ 7.17). Для оценки возьмем расстояние, на котором из любой точки зеркала пучок света за счет дифракции, определяемой (7.17), будет иметь диаметр, равный диаметру зеркала, $D \approx 2L \times 1,22\lambda/D$. Откуда $L \approx D^2/(2,44\lambda) \approx 1200$ км.

Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой с отношением $f/D = 1$. Оценим мощность N лазера, при которой в электрическом поле в фокусе системы электроны смогут приобрести энергию порядка энергии покоя mc^2 . Найдем, как зависит N от длины волны λ , и какое магнитное поле B будет при этом в фокусе (№ 7.50). В соответствии с (7.16) диаметр дифракционного пятна в фокусе системы $d \approx f\lambda/D \approx \lambda$. Ускорение электрона обусловлено электрическим полем световой волны, действующим на его заряд e . Так как до ускорения покоящийся электрон обладал энергией mc^2 , то после ускорения его энергия (см. 1, с.179) $mc^2/(1 - \beta^2)^{1/2} = 2mc^2$. Откуда $\beta = v/c = (3)^{1/2}/2 \approx 0,87$. Поскольку ускорение происходит в течение четверти периода световой волны ($T/4$), то пройденный электроном путь будет $0,87 cT/4 \approx 0,2\lambda < d$ — диаметра пятна в фокусе системы. Ускорение электрона можно оценить как $c/(T/4) = 4c^2/\lambda \approx eE/m$. Откуда электрическое поле в волне $E \approx 4mc/(\lambda e)$. В соответствии с (2.1) поток энергии через площадь дифракционного пятна (равной примерно λ^2) и, следовательно, мощность лазера $N \approx \lambda^2 E^2 c / (4\pi) \approx m^2 c^5 / e^2 \approx 10^{10}$ Вт. Таким образом, мощность лазера от длины волны не зависит. Магнитное поле B в фокусе равно электрическому полю (в СГСЭ) $B \approx 4mc^2/(\lambda e) \approx 10^8$ Гс.

Комету с угловым размером $\psi = 10^{-5}$ рад фотографируют через телескоп с объективом $D = 100$ см. Оценим, во сколько раз изменится интенсивность света в центре изображения, если объектив закрыть экраном с отверстием $d = 1$ см. Длину волны света примем равной $\lambda = 0,5$ мкм (№ 7.70).

Используя (7.17), получаем, что при открытом объективе дифракционный угол $\lambda/D = 5 \cdot 10^{-7} < \psi$, а при закрытом экраном с отверстием $\lambda/d = 5 \cdot 10^{-5} > \psi$. Таким образом, в первом случае можем воспользоваться геометрической оптикой. Обозначая освещенность объектива E и фокусное расстояние f , получаем для интенсивности (освещенности) в центре изображения $I_1 = ED^2/(\psi f)^2$. Во втором случае $I_2 = Ed^2/[(\lambda/d)f]^2$. Отношение интенсивностей $I_2/I_1 = \lambda^2 D^2/(\psi d^2)^2 = 2,5 \cdot 10^5$. При такой оценке надо иметь в виду, что переход от геометрической оптики к дифракции происходит постепенно.

Первый зеркальный телескоп, созданный И. Ньютоном, имел диаметр зеркала (объектива) $D_1 = 5$ см и фокусное расстояние $f_1 = 15$ см. Канадский инженер Э. Борра пытается организовать создание телескопа, в котором зеркалом служила бы поверхность вращающейся в сосуде воды. Предполагаемые параметры зеркала (объектива): $D_2 = 30$ м и $f_2 = 100$ м. Оценим, во сколько раз должны отличаться средние освещенности изображений звезды Бетельгейзе, полученные в фокальных плоскостях объективов этих телескопов. Угловой диаметр звезды $\psi = 2,3 \cdot 10^{-7}$ рад. Коэффициент отражения зеркала телескопа Ньютона $k_1 \sim 1$, а для поверхности воды $k_2 = 0,02$. Длину волны принимаем равной $\lambda = 0,6$ мкм (№ 7.67). Используя (7.17), получаем для телескопа Ньютона дифракционный угол $\lambda/D_1 \approx 10^{-5} >> \psi$, и для телескопа Борра $\lambda/D_2 \approx 2 \cdot 10^{-8} << \psi$. Учитывая это, как и в предыдущей задаче, и коэффициент отражения, находим освещенности изображений: для телескопа Ньютона $E_H \approx (D_1/2)^2/(f_1 \lambda / D_1)^2$, для телескопа Борра $E_B \approx k (D_2/2)^2/(f_2 \psi / 2)^2$. Вторая оказывается в 176 раз больше первой.

Изображение микродеталей, лежащих на черной подложке, проецируют с большим увеличением на экран. Одна деталь (более темная) имеет диаметр $d_1 = 50$ мкм, другая (более светлая) рассеивает в $k = 5$ раз большую долю падающего света и имеет диаметр $d_2 = 2$ мкм. Оценим отношение средних освещенностей изображений этих двух деталей. Применяется объектив диаметром $D = 1$ мм с фокусным расстоянием $f = 20$ мм; длина волны используемого света $\lambda = 0,5$ мкм (№ 7.66). Из (7.17) получаем разрешение объектива $\Delta \approx f\lambda/D = 10$ мкм. Таким образом, для более мелких деталей изображение дифракционное, а для более крупных — геометрическое. Из формулы для линзы (1.19) $1/a + 1/b = 1/f$, где a — расстояние от линзы до предмета; b — расстояние от линзы до изображения, увеличение изображения $b/a = f/(a-f) = (b-f)/f \approx b/f$. Видно, что для большего увеличения предмет надо приближать

к фокусу. В геометрическом варианте площадь изображения $S_1 = \pi(d_1 b)^2/(2f)^2$, поток света $\Phi_1 \sim d_1^2$, а освещенность изображения $E_1 = \Phi_1/S_1 \sim (2f/b)^2$. В дифракционном случае площадь изображения $S_2 = \pi(b1,22\lambda/D)^2$, поток света $\Phi_2 \sim kd_2^2$, освещенность изображения $E_2 = \Phi_2/S_2 \sim k(d_2 D)/(1,22\lambda b)^2$. Отношение $E_2/E_1 = 0,034$.

Объектив телескопа имеет фокусное расстояние $f_1 = 3$ м и диаметр $D = 15$ см. Определим фокусное расстояние f_2 окуляра, при котором полностью используется разрешающая способность объектива, если диаметр зрачка глаза $d_3 = 3$ мм. Предполагая, что в системе телескоп-глаз отсутствует aberrация, оценим, на каком расстоянии L с помощью такого телескопа можно читать книгу с размером букв $b \approx 2$ мм (№ 7.37). Согласно (7.17), получаем размер дифракционного пятна $l \approx f_1 \cdot 1,22\lambda/D$. Для использования разрешающей способности объектива разрешающая способность окуляра, определяемая (7.17) должна быть меньше углового размера полученного пятна $1,22\lambda/d \leq l/f_2 \approx f_1 \cdot 1,22\lambda/(Df_2)$. Здесь d — диаметр окуляра. Таким образом, система должна быть телескопической: $D/f_1 = d/f_2$. Необходимо также, чтобы световой поток в зрачок глаза не обрезался телескопом, то есть, чтобы было $d = d_3$. Такое увеличение системы называется нормальным. Для фокусного расстояния окуляра получаем $f_2 = f_1 d_3 / D = 6$ см. Чтобы различать буквы, их угловой размер b/L должен быть больше λ/D . Откуда $L \leq bD/\lambda \approx 600$ м.

На рис. 7.14 показана схема телескопа (зрительной трубы), где α_1 — угловой размер объекта, наблюдаемого простым глазом, α_2 — угловой размер того же объекта в телескопе. Нормальное увеличение

$$N = \alpha_2/\alpha_1 = f_1/f_2 = D/d_3. \quad (7.18)$$

Отметим, что увеличение больше нормального нецелесообразно, так как при этом разрешающая способность системы не увеличивается (оно ограничивается размером зрачка), а яркость изображения

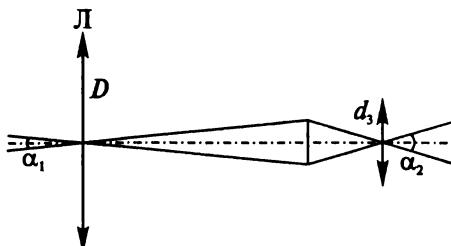


Рис. 7.14

жения (из-за того, что не весь поток, попадающий в объектив, доходит до глаза) уменьшается (№ 7.39).

Для зрительной трубы (№ 7.40) с диаметром объектива $D = 5$ см из (7.17) разрешаемый угловой размер $\theta \approx 1,22 \lambda/D \approx 2,76''$. При диаметре зрачка $d = 5$ мм нормальное увеличение, при котором будет использована полная разрешающая способность трубы (7.18), $N = D/d_3 = 10$.

Производится фотографирование удаленных предметов с помощью объектива телескопа диаметра D на фотопластинке, помещенной в его фокальной плоскости. Полученный снимок с помощью окуляра того же телескопа проецируется на удаленный экран. Найдем, каково должно быть угловое увеличение телескопа, чтобы при этом была использована полностью разрешающая способность объектива телескопа, если изображение на экране рассматривается с того же места, где расположен проекционный аппарат. Диаметр зрачка глаза равен d_3 (№ 7.44). Так как фотографируется удаленный предмет и снимок проецируется на удаленный экран, фактически имеем дело с телескопической системой. На рис. 7.15 показано объединение в систему. Для удобства экран рассматривается с другой стороны с того же расстояния L . Ранее рассматривалась подобная ситуация и было получено нужное увеличение (7.18) $N = D/d_3$.

Выясним, в чем выгода применения телескопов для рассматривания звезд, если они не дают увеличения по сравнению с невооруженным глазом (№ 7.42). Угловые размеры почти всех звезд много меньше разрешаемых угловых расстояний даже самых больших телескопов. При таких условиях величина изображения звезды на сетчатке глаза определяется только дифракцией и не зависит от увеличения телескопа. Яркость изображения зависит от потока света, входящего в систему. Для телескопа с нормальным увеличением он во столько же раз больше чем для невооруженно-

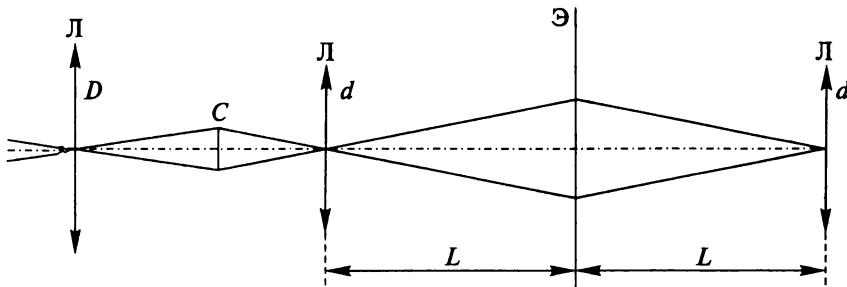


Рис. 7.15

го глаза, во сколько площадь объектива больше площади зрачка глаза. Это позволяет с помощью телескопа увидеть более слабые звезды. Увеличение выше нормального, как уже отмечалось, выгода не дает, так как поток ограничивается зрачком.

В принципе можно построить телескоп сколь угодно высокой разрешающей способности **без объектива**, заменив объектив круглым отверстием. Определим, какова должна быть длина L такого телескопа, чтобы он имел ту же разрешающую способность, что

и обычный телескоп с диаметром объектива $D = 1$ м, а также найдем светосилу S телескопа без объектива (№ 7.43). На рис. 7.16 показана схема такого телескопа (без окуляра). Лучи соответствуют направлениям, соответствующим разрешающей способности обычного телескопа. Длина L позволяет максимально развести изображения (дифракционные пятна), которые затем рассматриваются в окуляр. Используя (7.16), получаем $L \cdot 1,22\lambda/D \approx D/2$. Откуда $L \approx D^2/(2,44\lambda) \approx 1000$ км. В данном случае L играет роль фокусного расстояния. В соответствии с (1.70) получаем

$$S \approx (D/L)^2 \approx (2,44\lambda/D)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-12}.$$

Разрешаемое угловое расстояние для **телескопов**, в которых используются **зеркала**, рассчитывается также по (7.17). Самый большой зеркальный телескоп был сооружен в России. Найдем его угловое разрешение, если диаметр зеркала $D = 6$ м (№ 7.41). $\theta \approx 1,22\lambda/D \approx 0,023''$.

Какова должна быть минимальная длина отрезка на Луне (среднее расстояние от Земли $3,84 \cdot 10^5$ км) и Солнце (среднее расстояние от Земли $1,5 \cdot 10^8$ км), чтобы его изображение в рефлекторе с диаметром зеркала 6 м можно было отличить от изображения точки (№ 7.46). Используя (7.17), находим, что длина отрезка на Луне равна примерно 40 м, на Солнце — около 15 км.

Найдем, каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса (l_M), чтобы их изображение в телескопе (рефракторе) с диаметром объектива $D = 60$ см можно было отличить от изображения одной точки. Будем считать, что Марс наблюдается в момент великого противостояния, когда расстояние до него от Земли минимально и составляет $L = 56 \cdot 10^6$ км (№ 7.47). Считая $\lambda = 5000$ Å, из (7.17) получаем

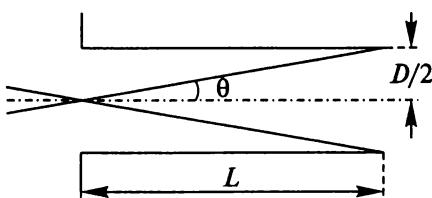


Рис. 7.16

$$l_m \geq 1,22(\lambda/D)L = 56 \text{ км.}$$

Оценим, во сколько раз отличаются напряженности электрического поля монохроматической волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ в фокусе **сферического зеркала** (E_ϕ) (диаметр $D = 10 \text{ см}$, радиус кривизны $R = 1 \text{ м}$) и на его входе (E) (№ 7.18). Используя (7.17) и то, что фокусное расстояние сферического зеркала приблизительно вдвое меньше радиуса кривизны, получаем из закона сохранения потоков энергии $E^2 D^2 = E_\phi^2 [(1,22\lambda/D)R/2]^2$, что $E_\phi/E \approx D^2/(\lambda R) = 10^4$.

Изображение точечного источника проецируется на экран с помощью тонкой линзы с малым апертурным числом двумя способами, реализуемыми при условии, что расстояние от источника до экрана в обоих случаях остается постоянным и равным $L = 4 \text{ м}$, фокусное расстояние линзы $f = 0,75 \text{ м}$. Найдем, как относятся **освещенности** в центре дифракционного изображения в этих двух случаях (№ 7.6). При малых апертурных углах пучки параксиальные и можно воспользоваться формулой для тонкой линзы (1.19). Из условия $1/a + 1/b = 1/f = 4/3$, $a + b = L = 4$. Откуда $a_1 = 3 \text{ м}$, $a_2 = 1 \text{ м}$, $b_1 = 1 \text{ м}$, $b_2 = 3 \text{ м}$. Используя (7.17), получаем площадь дифракционного пятна $S \sim b^2$. Поток энергии для параксиального пучка $\Phi \sim 1/a^2$. Освещенность дифракционного пятна $E \sim \Phi/S \sim 1/(a b)^2$. Отсюда следует, что освещенность пятен не меняется.

Рассмотрим аналогичную задачу. Снова изображение точечного источника проецируется на экран с помощью тонкой линзы с малым апертурным числом двумя способами. В первом расстояние от источника до линзы равно ее удвоенному фокусному расстоянию. Во втором это расстояние составляет $5/4$ фокусного расстояния линзы. Определим, во сколько раз изменится **освещенность** в центре дифракционного изображения (№ 7.7). В первом случае $a_1 = 2f$. Из формулы линзы $b_1 = 2f$. Размер дифракционного пятна получаем с помощью (7.17) $d_1 = \lambda b_1/D = 2\lambda f/D$. Во втором случае $a_2 = 5f/4$ и, следовательно, $b_2 = 5f$ и $d_2 = \lambda b_2/D = 5\lambda f/D$. Площадь пятна увеличилась в $m = 25/4$ раз. Поток увеличился в $n = (a_1/a_2)^2 = 64/25$ раз. Освещенность увеличилась в $n/m = 256/625 \approx 0,4$, т. е. уменьшилась примерно в 2,5 раза.

Оценим минимально необходимую для локации Луны энергию W световой вспышки рубинового лазера ($\lambda = 0,7 \text{ мкм}$), если отражение луча осуществлялось 14 призмами, установленными на Луноходе-1. Каждая из призм отражает луч на угол 180° . Отражение от призмы рассматриваем, как отражение от плоского зеркала диаметром $d = 6 \text{ см}$. Посылка и прием луčа осуществлялись телескопом Симеизской обсерватории. Диаметр зеркала телескопа $D = 2,5 \text{ м}$. При приеме мог быть обнаружен сигнал, состоящий из

двух фотонов (№ 7.13). Необходимое число фотонов, излучаемых лазером, обозначим $M = W/(h\nu)$. Из-за дифракции на зеркале телескопа, в соответствии с (7.16), эти фотоны распределяются по площади на поверхности Луны: $S_1 = (\pi/4)(1,22 \lambda L/D)^2$, где $L \approx 380$ тыс. км — расстояние от Земли до Луны. На единицу площади в среднем попадает фотонов M/S_1 . Число фотонов на одну отражающую призму (M/S_1) $\pi d^2/4$. Из-за дифракции на призме эти фотоны расходятся на площадь $S_2 = (\pi/4)(1,22 \lambda L/d)^2$ на поверхности Земли. В телескоп попадает $(M/S) (\pi d^2/4) (\pi D^2/4)/S_2$. Учитывая, что $W = Mh\nu = \hbar \cdot 2\pi c/\lambda$, и что отражателей N штук, получаем $W > 4(1,22)^4 \lambda^3 \pi L^4 \hbar / (N d^4 D^4)$.

О прибытии на Луну космонавты могут сообщить на Землю, растягивая на поверхности Луны черный круглый тент. Найдем, каким должен быть радиус r этого тента, чтобы его можно было заметить с Земли в телескоп с объективом $D = 5$ м, если контрастная чувствительность приемника 0,01 (№ 7.48). Считая $\lambda = 5000$ Å и расстояние до Луны $L = 384\,440$ км, из (7.7) получаем площадь на Луне, соответствующую дифракционному пятну в телескопе $S_0 \approx \pi(\lambda L/D)^2$. Это то, что мы видим как точку. Затемненная тентом поверхность уменьшает поток в дифракционное пятно. Точки становятся менее яркими. Им на поверхности Луны соответствуют области, показанные на рис. 7.17 штриховыми окружностями. В них попал тент, отмеченный зачерненным кругом. Яркой точке соответствует область в окружности S_0 . По условию о контрастной чувствительности влияние тента можно заметить, если $(S_0 - \pi r^2)/S_0 \leq 0,99$. Откуда

$$r \geq 0,1 \lambda L/D \approx 4 \text{ м.}$$

Блестящий металлический межпланетный корабль поперечного размера $d = 10$ м опустили на поверхность Луны в полнолуние. Оценим диаметр D зеркала телескопа, в который можно с Земли увидеть прибытие корабля, если контраст, надежно обнаруживаемый глазом, принять равным $k = 0,15$, считая коэффициент отражения лунной поверхности равным $\rho = 0,1$, а металла — $\rho = 1$, и длину волны света, в которой ведется наблюдение $\lambda = 0,6$ мкм (№ 7.49). В соответствии с (7.16) светящаяся точка на Луне наблюдается в телескоп в виде дифракционного пятна. Но в угол, определяемый этим пятном, попадает излучение и из других точек на поверхности Луны, находящихся на площади $S_0 = \pi(L\lambda/D)^2$. Часть



Рис. 7.17

этой поверхности может быть занята межпланетным кораблем, площадь которого $S = \pi d^2/4$. Если эта площадь попадает на пятно, то происходит изменение относительной яркости $[(S_0 - S)\rho_1 + + Sp_2 - S_0\rho_1]/(S_0\rho_1)$. Это отношение должно быть больше k , чтобы его можно было обнаружить глазом. Отсюда $(Sp_2 - S_0\rho_1)/(S_0\rho_1) \approx Sp_2/(S_0\rho_1) > k$. В результате должно быть $D > (k\rho_1/\rho_2)^{1/2}2\lambda L/d \approx 5,5$ м.

Ракета удаляется от Земли и перестает быть видимой **на фоне неба** в телескоп с объективом диаметра $D_1 = 80$ мм, когда она находится на расстоянии $L_1 = 2 \cdot 10^4$ км от Земли. Найдем, на каком расстоянии L_2 от Земли удается заметить эту ракету в телескоп с объективом диаметром $D_2 = 200$ мм при той же контрастной чувствительности глаза (№ 7.51). На таких расстояниях ракета представляет собой светящуюся точку. В фокусе объектива в соответствии с (7.17) получаем дифракционное пятно площадью (в первом случае) $S_1 = \pi(\lambda/D_1)^2 f_1^2$. Попадающая в объектив телескопа мощность излучения N пропорциональна квадрату диаметра объектива и обратно пропорциональна квадрату расстояния до ракеты. Вводя некоторую константу N_0 , в первом случае получаем $N_1 = N_0 (D_1/L_1)^2$. Средняя освещенность дифракционного пятна в таком случае $E_1 \approx N_0 D_1^4 / (L_1^2 \lambda^2 f_1^2)$. Вокруг дифракционного пятна — изображение неба. Освещенность этого изображения пропорциональна площади объектива, через которую входит поток света от неба, отнесеной к площади изображения некоторого участка неба, которая пропорциональна фокусному расстоянию объектива. Вводя некоторую постоянную величину a , получаем для освещенности изображения неба в первом случае $E_{1H} = a(D_1/f_1)^2$. Величина (D/f) , как известно, называется светосилой объектива. Контраст изображения ракеты на фоне неба в первом случае $\gamma = (E_{1H} + E_1)/E_{1H} = 1 + N_0 D_1^2 / (a L_1^2 \lambda^2)$. Так как это предельный контраст, то он такой же и во втором случае. Откуда следует, что должно выполняться равенство $L_1^2/D_1^2 = L_2^2/D_2^2$. Для этого $L_2 = L_1 D_2 / D_1 = 5 \cdot 10^4$ км.

Излучение лазера непрерывного действия на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм мощностью $N = 10$ мВт направляется **на спутник** с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30$ см. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью $N_{\text{пор}} = 10^{-14}$ Вт. Оценим максимальное расстояние L до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает падающий свет с коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. Диаметр спутника $d = 20$ см (№ 7.52). Из (7.17) угловая расходимость пучка света, иду-

щего на спутник, равна λ/D . Так как мощность, рассеиваемая спутником, N' равна мощности, попадающей на него, умноженной на ρ , то $N' = \rho N d^2/[4(\lambda L/D)^2] = (1/4)\rho N [dD/(\lambda L)]^2$. По условию спутник равномерно рассеивает оптическую мощность N' в телесный угол 2π . Поэтому, принимаемая телескопом мощность равна

$$N'\pi(D^2/4)/(2\pi L) = (1/8)N'(D/L)^2.$$

Эта величина должна быть больше пороговой

$$(1/8)N'(D/L)^2 = (1/32)\rho N(d/\lambda)^2(D/L)^4 \geq N_{\text{пор}}.$$

Откуда $L \leq L_{\text{пор}} = (1/2)D[\rho N d^2/(2N\lambda^2)]^{1/4} \approx 70$ км.

Оценим расстояние L , с которого можно увидеть невооруженным глазом **свет лазера**, генерирующего в непрерывном режиме мощность $N = 10$ Вт на частоте $v = 6 \cdot 10^{14}$ Гц, если для формирования луча используется параболическое зеркало диаметром $D = 50$ см. Глаз видит источник в зеленой части спектра, если в зрачок (диаметр зрачка $d = 5$ мм) попадает $n = 60$ квантов в секунду (№ 7.53). В соответствии с (7.16) находим площадь дифракционного пятна. Считая, что мощность равномерно распределяется по пятну, находим ее часть, которая попадает в зрачок. Она должна быть больше той, которую видит глаз, $N\pi(d/4)/[(\pi/4)(L \cdot 2,24\lambda/D)] \geq nhv$. Откуда

$$L \leq (dD/c)[Nv/(nh)]^{1/2} \approx 3,2 \cdot 10^8 \text{ км},$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; c — скорость света.

В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластинка. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в $\alpha = 10$ раз меньше освещенности дневного неба. Найдем, во сколько раз надо увеличить диаметр объектива (D), чтобы освещенность звезды на фотопластинке стала в $\beta = 10$ раз больше освещенности изображения неба (№ 7.54). Освещенность изображения звезды на фотопластинке $E_{\text{зв}} \sim S_{\text{объектив}}/S_{\text{изобр}}$. Так как звезды — это фактически светящиеся точки, то их изображением на пластинке является дифракционное пятно с угловым размером (7.17). Обозначая фокальное расстояние объектива f , получаем $E_{\text{зв}} \sim D^2/(\lambda^2 f^2/D^2) \sim D^2$. Части неба, имеющие угловой размер ψ_h , на пластинке занимают площадь $\sim \psi_h^2 f^2$, которая не зависит от размера объектива. Поэтому освещенность неба $E_h \sim D^2$, и отношение освещенности изображения звезды $E_{\text{зв}}$ к освещенности неба E_h равно $E_{\text{зв}}/E_h \sim D^2$. В первом случае $E_{\text{зв}}/E_h = 1/\alpha \sim D_1^2$, во втором $E_{\text{зв}}/E_h = \beta \sim D_2^2$. Откуда $D_2^2/D_1^2 = \alpha \beta$ и $D_2/D_1 = 10$.

При наблюдении в телескоп с нормальным увеличением освещенность изображения звезды на сетчатке глаза в $\alpha = 10$ раз меньше освещенности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Найдем, во сколько раз надо увеличить диаметр объектива для того, чтобы освещенность изображения звезды на сетчатке стала в $\beta = 10$ раз больше освещенности изображения неба, если вместе с объективом телескопа заменен и окуляр таким образом, что увеличение телескопа осталось нормальным (№ 7.55). Для нормального увеличения было получено (7.18) $N = D/d_3$. Обозначая освещенность от дневного неба на зрачке и телескопе E_H , получаем освещенность на сетчатке глаза без телескопа $E_r = E_H \pi (d_3/2)^2 / S_r$ и с телескопом $E_T = E_H \pi (D/2)^2 / S_r$. Так как площади изображений с телескопом и без телескопа при нормальном увеличении относятся: $S_r / S_T = D^2 / d_3^2$, то освещенности при нормальном увеличении не меняются: $E_T = E_r$. Освещенность изображения звезды зависит от диаметра дифракционного пятна и диаметра объектива. Угловой размер дифракционного пятна от объектива $\theta_1 \sim \lambda/D$. После нормального увеличения в зрачке угол дифракционного пятна $\theta_2 = \theta_1 D/d_3 \sim \lambda/d_3$, т. е. в такой системе угол дифракционного пятна определяется d_3 и поэтому не меняется, как бы не менялось D . Входящий же поток увеличивается с увеличением D . По условию освещенность звезды $E_{13} \sim D_1^2 \sim E_T/\alpha$, а необходимо получить $E_{23} \sim D_2^2 \sim E_T\beta$. Откуда $D_2^2/D_1^2 = \alpha\beta = 100$. Следовательно, $D_2 = 10D_1$.

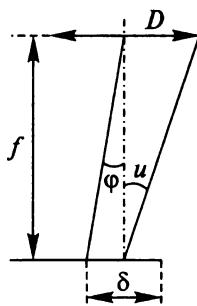


Рис. 7.18

Определим минимальное разрешаемое расстояние δ микроскопа при наилучших условиях освещения для 1) безыммерсионного объектива с числовой апертурой $a = 0,9$; 2) того же объектива, но с масляной иммерсией ($n = 1,6$). Длина волны при визуальных наблюдениях $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ (№ 7.59). На рис. 7.18 показана схема части микроскопа. Напомним, что числовая апертура $a = n \sin u$, где u — апертура или апертурный угол, под которым видна диафрагма (в данном случае объектив) из точки предмета, лежащей на оптической оси. Для повышения числовой апертуры применяют иммерсию, т. е. жидкость с возможно высоким показателем преломления, заполняющую пространство между покровным стеклом над рассматриваемым предметом и объективом. Из (7.17) получаем

$$\phi = \delta/f = 1,22\lambda/(nD) = 1,22\lambda/(2fn \sin u).$$

$$\delta = 0,61\lambda/(nsinu). \quad (7.19)$$

По условию числовая апертура при $n = 1$ равна 0,9, т. е. $sinu = 0,9$. Поэтому в первом случае $\delta = 0,3$ мкм, а во втором $\delta = 0,19$ мкм.

Найдем, каково должно быть увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность его объектива (№ 7.56). Наименьший разрешаемый объективом размер определяется (7.19). Невооруженным глазом с расстояния ясного зрения L этот объект виден под углом $\alpha = \delta/L$. В микроскоп он виден под углом $\beta = Na$, где N — увеличение микроскопа. Угол β должен быть не меньше минимального углового расстояния (7.17) $\theta = 1,22\lambda/d$, разрешаемого глазом (d — диаметр зрачка глаза). Условие $\beta \geq \theta$ дает $N \geq (2Lnsinu)/d$. Увеличение, называемое нормальным, равно

$$N_{\text{норм}} = (2Lnsinu)/d. \quad (7.20)$$

Применять увеличение больше нормального нецелесообразно, так как при этом разрешающая способность микроскопа не повышается, а яркость изображения предмета уменьшается.

С помощью объектива телескопа диаметром D и фокусным расстоянием f производится фотографирование удаленных объектов на мелозернистой пластинке, помещенной в фокальной плоскости объектива. Полученное изображение рассматривается в микроскоп с числовой апертурой $nsinu$ и увеличением N . Найдем, каким условиям должны удовлетворять числовая апертура и увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива телескопа (№ 7.63). Используя (7.17), получаем различаемый размер на пластинке $1,22\lambda f/D$. Чтобы сохранить это разрешение, разрешение микроскопа (7.19) должно быть лучше, т. е. $1,22\lambda f/D \geq 0,61\lambda/(nsinu)$. Откуда $nsinu \geq D/(2f)$. Используя (7.20), для увеличения получаем $N \geq (2Lnsinu)/d = LD/(fd)$.

Найдем, каково должно быть фокусное расстояние f_2 окуляра микроскопа, чтобы была полностью использована разрешающая способность объектива. Числовая апертура объектива равна $nsinu$, фокусное расстояние объектива f_1 , длина тубуса (трубы микроскопа) l . Длину тубуса можно считать равной расстоянию между объективом и плоскостью первого изображения (т. е. изображения, даваемого объективом) (№ 7.62). Микроскоп — это система двух линз, для которых, как следует из (1.36), фокусное расстояние

$f = f_1 f_2 / l$. Здесь l — фактически расстояние между фокусами, так как в микроскопе фокусное расстояние объектива много меньше фокусного расстояния окуляра, и окуляр располагается от изображения, создаваемого объективом, на расстоянии, близком к фокусному расстоянию окуляра, чтобы получить большее увеличение. Увеличение микроскопа (системы линз) должно быть таким, чтобы изображение находилось на расстоянии ясного зрения L (как в обычной линзе): $N = L/f = Ll/(f_1 f_2)$. Для полного использования разрешающей способности объектива необходимо, чтобы это увеличение было больше нормального для телескопа, определяемого (7.20):

$$Ll/(f_1 f_2) \geq (2L n \sin u)/d,$$

откуда $f_2 \leq ld/[f_1 n \sin u]$.

Угловая апертура **электронного микроскопа** $u = 10^{-4}$, а оптического — $u \approx 1$. Оценим напряжение U , ускоряющее электроны, при котором разрешающая способность этих приборов будет одинакова (№ 7.64). Длина волны электрона, обнаруживаемая при дифракции и в соответствии с теорией де Броиля, о которой речь пойдет в атомной физике, $\lambda = h/p$, где h — постоянная Планка; $p = mv$ — импульс электрона. Используя соотношение для энергии электрона $mv^2/2 = eU$ (где e — заряд электрона) и подставляя значения постоянных из соответствующих таблиц, получаем для длины волны $\lambda_s = 12,24/(U)^{1/2}$, где U — в вольтах (В), а λ — в ангстремах (\AA). Разрешаемый с помощью микроскопа размер объекта (7.19) $\delta = 0,61\lambda/(n \sin u)$. Условие равенства разрешающих способностей оптического и электронного микроскопов

$$0,61\lambda_{\text{опт}}/\sin u_{\text{опт}} = 0,61\lambda_s/\sin u_s = 0,61 \cdot 12,24/[(U)^{1/2} \sin u_s],$$

откуда $U = [12,24 \sin u_{\text{опт}} / (\lambda_{\text{опт}} \sin u_s)] \approx 600$ В.

Интерференционные кольца Ньютона получены при отражении рассеянного монохроматического света ($\lambda = 600$ нм) от поверхности линзы с радиусом кривизны $R = 60$ см и плоского зеркала. Наблюдение колец производится с помощью микроскопа u возможно наблюдение максимального числа колец, и каково при этом число колец (№ 7.60). Интерференционные картины в пластинках переменной толщины локализованы на поверхности (как бы нарисованы). В одной и той же точке (рис. 7.19) нарисованы картины разных углов наклона (так как рассеянный свет). Количество картин, которые сразу наблюдаем в точке B посредством того, что они передаются в точку A , зависит от апертуры u . Сдвиг

между этими картинами определяется разностью разностей хода (по нормали и под углом α) $\Delta_0 = 2h = m\lambda$, $\Delta_\alpha = 2h \cos \alpha$. Максимальное значение α равно u . Когда $\Delta_u = m\lambda + \lambda/2$, то эта картина портит картину при нормальном падении. Это условие существования интерференционной картины $\Delta u = 2h \cos u \approx 2h \times \times (1 - u^2/2) = m\lambda + \lambda/2$. Отсюда $hu = \lambda/2$ и $m_{\max} = 2h/\lambda = 1/u^2$. Так как $h = R u^2/2$, то $u^4 \approx \lambda/R$. Получаем $u \approx 2^\circ$ и $m_{\max} \approx 10^3$ колец.

Параболическое зеркало диаметром $D = 1$ м используется как антенна для волн длины $\lambda = 3$ см. Оценим наименьшее расстояние L_{\min} , на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности (№ 7.1). Для получения дифракционного пятна в параллельных лучах на бесконечно большом расстоянии источник должен быть в фокусе параболического зеркала и должно выполняться условие дифракции Фраунгофера (7.3). Используя (7.1), получаем $D/2 \ll r_1 = (\lambda L_{\min})^{1/2}$. Откуда $L_{\min} \gg D^2/(4\lambda) \approx 10$ м.

В интерферометре Майкельсона источником света служит круглая диафрагма S диаметром $D = 0,05$ мм, которая освещается параллельным пучком монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Длины плеч интерферометра $AB = 30$ см, $AC = 10$ см (рис. 7.20). Интерференционная картина в виде концентрических колец наблюдается на экране \mathcal{E} , помещенном в фокальной плоскости линзы. Оценим число m интерференционных колец, наблюдаемых в пределах главного дифракционного максимума источника (№ 7.8). Разность хода от зеркал определяет тот слой, в котором образуются интерференционные полосы равного наклона от источника S . Разность хода при нормальном падении $l = 2(AB - AC) = 40$ см, а при угле наклона

ϕ разность хода $l \cos \phi \approx l(1 - \phi^2/2)$. Интерференционная картина локализована на бесконечности. Условие максимумов $m\lambda = l\phi^2/2$. В фокальной плоскости линзы образуются интерференционные кольца. Диафрагма источника определяет угол, в который идет свет (дифракционное пятно). Из (7.17) имеем $\phi_n \approx 1,22 \lambda/D$. Подставляя это в условие для

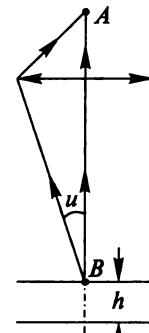


Рис. 7.19

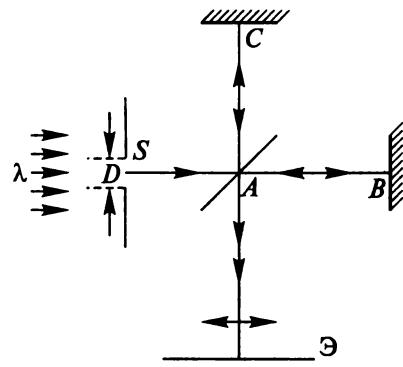


Рис. 7.20

максимумов интерференционной картины, получаем число колец $\approx (1,22)^2 \lambda/D^2 \approx 70$.

Квадратное отверстие со стороной $L_0 = 0,2$ см освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающих нормально к плоскости отверстия. Найдем форму и размер $L \times L$ изображения отверстия на экране, удаленном на $l = 50$ м от него, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия. Границей освещенности на экране считаем положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоняемых лучей (видимый спектр 400—4000 Å) (№ 7.24). При рассмотрении бесконечной щели h реальная амплитуда по некоторому направлению складывается из элементарных амплитуд от полосок. В результате вычисления интеграла (7.4) получаем (7.7) и (7.5). Если длина щели h сравнима с шириной D , то интегрировать надо по прямоугольникам. Результате получим

$$I = I_0 \{ \sin[(\pi/\lambda) D \sin \phi] / [(\pi/\lambda) D \sin \phi] \}^2 \{ \sin[(\pi/\lambda) h \sin \psi] / [(\pi/\lambda) h \sin \psi] \}^2. \quad (7.21)$$

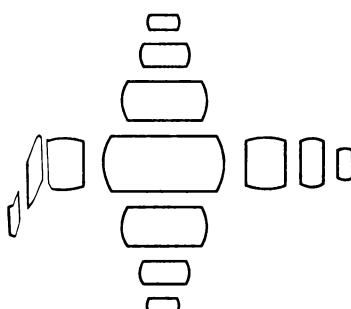


Рис. 7.21

На рис. 7.21 показан результат эксперимента с прямоугольной щелью. Дифракционная картина вытянута больше в направлении короткой стороны. Для квадратного отверстия все одинаково в обоих направлениях. Изображением является практически квадрат со стороной, определяемой (7.8). Для максимальной длины волны получаем $L = 2(\lambda/L_0)$ $l = 3,5$ см.

Диафрагма линзы имеет форму

квадрата с длиной стороны D . Точечный монохроматический источник света помещается на главной оптической оси линзы. Найдем распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции в плоскости изображения

(рис. № 7.25). На рис. 7.22 показано расположение источника S_0 , диафрагмы и экрана, на котором получено изображение источника. На рис. 7.23 воспроизведено рис. 7.22 в трех-

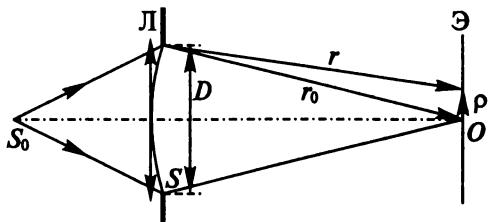


Рис. 7.22

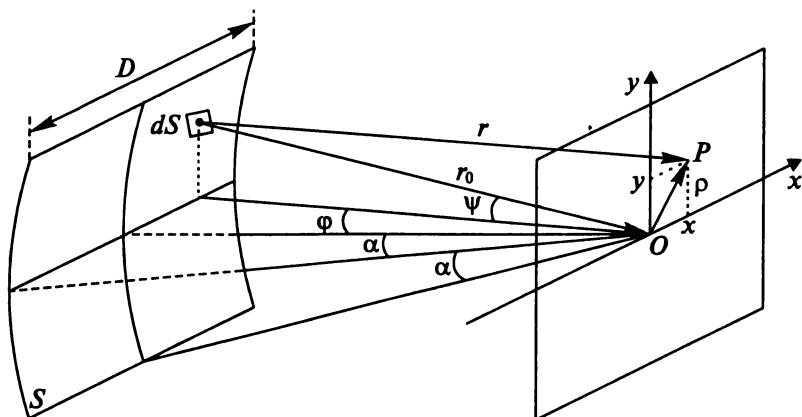


Рис. 7.23

мерном виде. В приближении геометрической оптики лучи, проходящие через линзу сходятся в точке O , положение которой на расстоянии r_0 от центра линзы определяется по формуле для линзы. Сферическая поверхность S , описанная радиусом r_0 из точки O , ограничена краями диафрагмы. Поле сходящейся волны на поверхности S можно найти в приближении геометрической оптики, учитывая обратимость лучей и взяв амплитуду в точке O равной единице

$$E_s = (1/r_0)\exp[i(\omega t + \mathbf{k}r_0)].$$

Здесь вычисляется амплитуда волны, идущей противоположно выбранному направлению вектора \mathbf{r}_0 , поэтому знак «+».

Поле в точке наблюдения P от всех элементов dS поверхности S вычисляем в соответствии с принципом Гюйгенса—Френеля (6.1)

$$E_p = \int_S \exp\{i[(\omega t - \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))]\} dS/(rr_0). \quad (7.22)$$

Вводя вектор $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и пользуясь теоремой косинусов, получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 [1 + (2\mathbf{r}_0\rho + \rho^2)/r_0^2]^{1/2}.$$

Разлагая в ряд Тейлора с точностью до величин, содержащих квадраты ρ , находим

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (\mathbf{r}_0/r_0)\rho + \rho^2/(2r_0) - (1/2)(\mathbf{r}_0\rho)^2/r_0^3 = \rho\mathbf{r}_1 + (1/2)\rho^2/r_0\sin^2(\rho\mathbf{r}_1).$$

а в линейном приближении

$$r - r_0 = \rho \mathbf{r}_1. \quad (7.23)$$

где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0/r_0$ — единичный вектор.

Ошибка, допустимая при вычислении $r - r_0$ должна быть много меньше длины волны. Поэтому линейным приближением можно пользоваться при условии

$$\rho^2/r_0 \ll \lambda. \quad (7.24)$$

Вычислим световое поле в окрестности O в предположении, что выполняется (7.24). Для прямоугольной системы координат в плоскости экрана используем единичные векторы: \mathbf{i} в направлении x , \mathbf{j} в направлении y и \mathbf{k} в направлении, перпендикулярном экрану. Получаем

$$\rho = i x + j y \text{ и } \mathbf{r}_1 = i \sin\phi + j \sin\psi + k r_{11}.$$

Последний член никакой роли не играет, так как в скалярном произведении отсутствует. Подставляя это в (7.23), находим

$$r - r_0 = x \sin\phi + y \sin\psi. \quad (7.25)$$

Если угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}[D/(2r_0)]. \quad (7.26)$$

под которым из O видна половина стороны квадратной диафрагмы, мал, то синусы в (7.25) можно заменить углами. В (7.22) $dS = r_0^2 d\phi d\psi$, а в знаменателе можно приближенно r заменить на r_0 . Окончательно

$$E_P = e^{i\omega t} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ik(x\phi + y\psi)} d\phi d\psi. \quad (7.27)$$

Интегрируя это, считая, как уже отмечалось, амплитуду в точке O равной 1, для произвольной точки P имеем амплитуду

$$A = [\sin(2\pi a x/\lambda)/(2\pi a x/\lambda)][\sin(2\pi a y/\lambda)/(2\pi a y/\lambda)], \quad (7.28)$$

а интенсивность

$$I = [\sin(2\pi a x/\lambda)/(2\pi a x/\lambda)]^2 [\sin(2\pi a y/\lambda)/(2\pi a y/\lambda)]^2. \quad (7.29)$$

Оптическая система (труба или микроскоп) дает в качестве изображения светящейся точки систему дифракционных колец. Согласно Рэлею, минимальное расстояние между двумя близкими точками, которые еще изображаются раздельно, определяется тем, что центральный светлый кружок от первой светящейся точки должен приходиться на первое темное кольцо дифракционной картины, даваемой второй светящейся точкой. Ориентировочно можно принять, что глаз способен различить две близкие точки,

если максимумы освещенности в местах их геометрических изображений превосходят интенсивность посередине между ними не менее чем на 15 %. Приняв это, проверим, действительно ли при выполнении критерия Рэлея получается раздельные изображения двух самосветящихся точек. Для простоты расчета примем, что диафрагма квадратная, так как

в случае круглой диафрагмы результаты мало отличаются от тех, которые получаются для квадратной диафрагмы, в частности в предыдущей задаче (№ 7.34). Самосветящиеся точки излучают некогерентные волны. Поэтому на экране складываются не амплитуды, а интенсивности. В соответствии с (7.29), на экране от двух симметричных относительно главной оптической оси светящихся точек получаем распределение интенсивностей, показанное на рис. 7.24, где $\xi = (2\pi/\lambda) \times D/(2r_0)$ (см. также рис. 7.23). Минимальное расстояние между центрами дифракционных кружков соответствует по Рэлею разности координат $\Delta\xi = \pi$. На рис. 7.24 штриховые кривые изображают распределение интенсивностей от каждой из рассматриваемых двух самосветящихся точек, а сплошная кривая дает суммарную интенсивность. Видно, что интенсивность в центре картины почти на 20 % меньше максимальной интенсивности, равной приблизительно наибольшей интенсивности от одной светящейся точки. Поэтому при выполнении критерия Рэлея получается раздельное изображение самосветящихся точек.

Найдем решение аналогичной задачи, отличающейся тем, что изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света. Например, можно использовать два круглых отверстия в экране, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Рассмотрим качественно три случая: 1) отверстия освещаются пучком лучей, параллельных главной оптической оси; 2) отверстия освещаются параллельными лучами, но наклонными к главной оптической оси; 3) отверстия освещаются диффузным светом (№ 7.35). В данной задаче имеем дело с когерентными источниками. Поэтому складывать надо не интенсивности, а амплитуды (7.28). Фаза колебаний меняется на 180° при переходе через минимум освещенности в соседнее светлое кольцо. В первом случае волны из отверстий выходят в одинако-

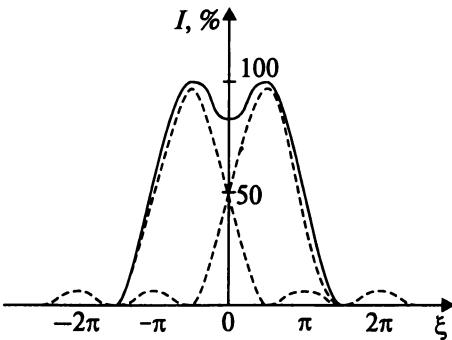


Рис. 7.24

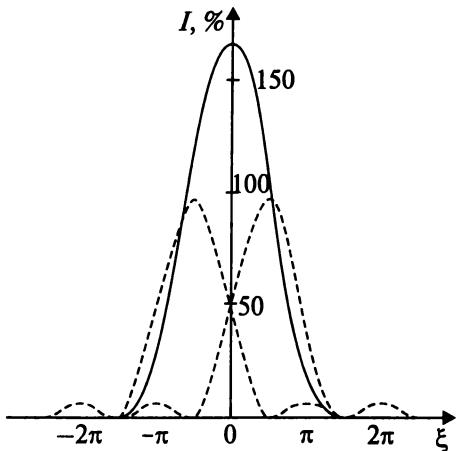


Рис. 7.25

Поэтому в этом случае раздельного изображения не получится, если расстояние между ними равно минимальному расстоянию, требуемому критерием Рэлея (как на рис. 7.24). Чтобы получилось раздельное изображение, надо это расстояние увеличить (как видно из рис. 7.25) примерно в 1,4 раза. В соответствии с этим в такое же число раз уменьшится и разрешающая способность по сравнению со случаем самосветящихся объектов. Во втором случае при освещении отверстий параллельными лучами, наклоненными под углом θ к главной оптической оси, волны из отверстий выходят с разностью фаз $\delta = (2\pi/\lambda)ds\sin\theta$, где d — расстояние между центрами отверстий. С такой же разностью фаз они придут и в точку O . Если $ds\sin\theta = \lambda/4$, то $\delta = \pi/2$, интенсивность в O будет в два раза больше соответствующей интенсивности при наличии одного из отверстий. Разрешающая способность при таком освещении будет такая же, как в случае самосветящихся объектов. Если $ds\sin\theta = \lambda/2$, то $\delta = \pi$. Тогда волны приходят в точку O в противоположных фазах и интенсивность там будет равна нулю. Разделение изображений будет выражено весьма резко. При таком освещении расстояние между отверстиями для их раздельного изображения может быть меньше предела Рэлея. При диффузном освещении (случай 3) отверстия освещаются лучами всевозможных направлений. В этом случае получается практически такая же разрешающая способность, как и для самосветящихся объектов.

Дополнительными называются экраны, у которых непрозрачные места одного по форме и положению совпадают с отверстиями другого. Докажем, что при дифракции Фраунгофера интенсив-

ных фазах. В точке O (см. рис. 7.23), проходя одинаковые расстояния, они имеют одинаковые фазы. Амплитуда результирующего колебания в точке O будет в два раза, а интенсивность в четыре раза, больше, чем в случае изображения одного из отверстий. Распределение результирующей интенсивности дает кривая, представленная на рис. 7.25. Она имеет лишь один максимум, а изображение в глазу будет такое же, как от одной точки.

изображения освещаемых точек не получится, если расстояние между ними равно минимальному расстоянию, требуемому критерием Рэлея (как на рис. 7.24).

Чтобы получилось раздельное изображение, надо это расстояние увеличить (как видно из рис. 7.25) примерно в 1,4 раза. В соответствии с этим в такое же число раз уменьшится и разрешающая способность по сравнению со случаем самосветящихся объектов. Во втором случае при освещении отверстий параллельными лучами, наклоненными под углом θ к главной оптической оси, волны из отверстий выходят с разностью фаз $\delta = (2\pi/\lambda)ds\sin\theta$, где d — расстояние между центрами отверстий. С такой же разностью фаз они придут и в точку O . Если $ds\sin\theta = \lambda/4$, то $\delta = \pi/2$, интенсивность в O будет в два раза больше соответствующей интенсивности при наличии одного из отверстий. Разрешающая способность при таком освещении будет такая же, как в случае самосветящихся объектов. Если $ds\sin\theta = \lambda/2$, то $\delta = \pi$. Тогда волны приходят в точку O в противоположных фазах и интенсивность там будет равна нулю. Разделение изображений будет выражено весьма резко. При таком освещении расстояние между отверстиями для их раздельного изображения может быть меньше предела Рэлея. При диффузном освещении (случай 3) отверстия освещаются лучами всевозможных направлений. В этом случае получается практически такая же разрешающая способность, как и для самосветящихся объектов.

Дополнительными называются экраны, у которых непрозрачные места одного по форме и положению совпадают с отверстиями другого. Докажем, что при дифракции Фраунгофера интенсив-

ности дифрагированного света от дополнительных экранов совпадают во всех направлениях, за исключением направления падающей волны (**принцип Бабине**) (№ 7.14). В соответствии с принципом Гюйгенса—Френеля (6.1) напряженность поля волны, дифрагировавшей на экране, представляется интегралом по отверстиям экрана. Если сложить напряженность от первого экрана E_1 с напряженностью от второго экрана E_2 , то получаем напряженность в отсутствие экрана $E = E_1 + E_2$. Так как в падающей волне свет распространяется только в одном направлении, для всех других направлений $E = 0$. Таким образом, $E_1 + E_2 = 0$. Откуда $E_1^2 = E_2^2$, или $I_1 = I_2$.

Плоская световая волна падает нормально на абсолютно черный экран, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Часть энергии поглощается черным экраном, а часть рассеивается из-за дифракции. Покажем, что **количество поглощенной энергии** равно количеству **рассеянной** (№ 7.12). Рассмотрим отверстие той же величины и формы, что и черный экран. Если на отверстие и экран падает одна и та же плоская волна, то количество энергии, поглощенной экраном, будет равно количеству энергии, падающей на отверстие. Согласно принципу Бабине, интенсивности света во всех направлениях, за исключением направления падающей волны, в обоих случаях одинаковые. Следовательно, одниаковы и энергии, рассеянные экраном и отверстием. Но в случае отверстия вся энергия рассеивается. Значит, энергия, поглощенная экраном, равна энергии, рассеянной им.

Пыль, взвешенная в воздухе, делает видимым узкий лазерный луч. Луч **виден** особенно хорошо, если смотреть почти навстречу ему в пределах угла приблизительно 10° ($\theta = 10/57,3 = 0,17$) (№ 7.4). Это объясняется тем, что при дифракции света лазера на пылинке ширина максимума в силу принципа Бабине определяется (7.17). Откуда при длине волны света $\lambda = 6300 \text{ \AA}$ для диаметра пылинки получаем $D \approx \lambda/\theta \approx 4 \text{ мкм}$.

8. Спектральные приборы

Одним из основных спектральных приборов, используемых для разложения света в спектр и измерения длин волн, является **дифракционная решетка**. Решетки изготавливают нанесением большого числа штрихов (может быть несколько тысяч на мм) на стеклянные или металлические пластиинки.

Рассчитаем дифракционную картину при сложении световых волн от N щелей для так называемой **щелевой решетки**. На рис. 8.1, а показаны: решетка (Р), у которой ширина щелей b и период их повторения d , линза (Л), с помощью которой дифракционная картина воспроизводится на экране (Э) в фокальной плоскости линзы. В решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света. Разность фаз между соответствующими пучками света с длиной волны λ от соседних щелей

$$\delta = (2\pi/\lambda)d \sin \theta. \quad (8.1)$$

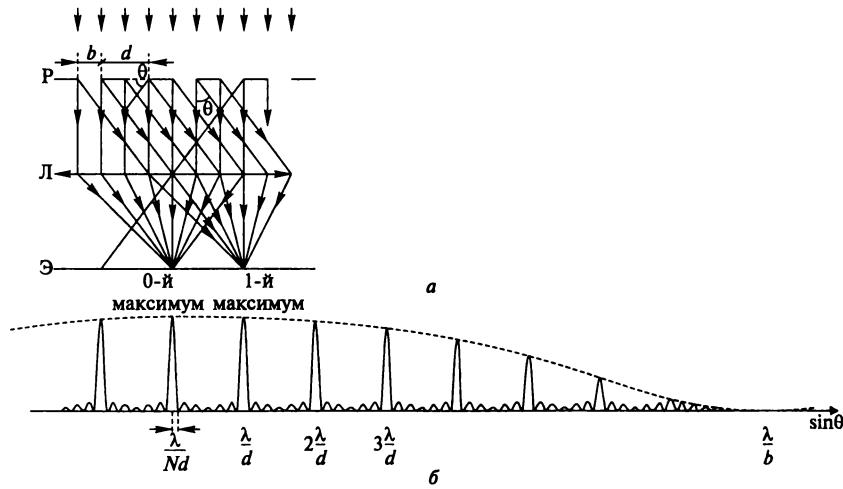


Рис. 8.1

Обозначая амплитуду от одной щели в направлении нормали буквой a , получаем от N щелей (как сумму геометрической прогрессии)

$$A = \sum_{n=1}^N a e^{i(n-1)\delta} = a(1 - e^{iN\delta})/(1 - e^{i\delta}) = \\ = a[\sin(N\delta/2)]/[\sin(\delta/2)]e^{i(N-1)\delta/2}. \quad (8.2)$$

Интенсивность света (№ 8.4)

$$I = |A|^2 = AA^* = |a|^2[\sin(N\delta/2)]^2/[\sin(\delta/2)]^2.$$

Используя (7.7) для щели и подставляя δ из (8.1), получаем

$$\begin{aligned} I = A_0^2 &\{\sin[(\pi/\lambda)b\sin\theta]/[(\pi/\lambda)b\sin\theta]\}^2 \times \\ &\times \{\sin[(\pi/\lambda)Nds\sin\theta]/\sin[(\pi/\lambda)ds\sin\theta]\}^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

В соответствии с (7.6) $A_0 = A_{00}b$ — это максимальная амплитуда на экране при $\theta = 0$, а A_{00} — это амплитуда падающей волны.

Зависимость интенсивности от $\sin\theta$ показана на рис. 8.1, б. Как и для одной щели для суммы всегда получаем минимум при условии (7.8) (так как каждая щель ничего не дает в этом направлении)

$$bs\in\theta = m\lambda, \text{ где } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

При $m = 1$ такой минимум показан на рис. 8.1, б в точке $\sin\theta = \lambda/b$.

Добавочные минимумы, как это следует из (8.3), имеем при $ds\in\theta = \lambda/N, ds\in\theta = 2\lambda/N, ds\in\theta = 3\lambda/N, \dots, ds\in\theta = (N - 1)\lambda/N$.

В общем виде для **добавочных минимумов** получаем

$$ds\in\theta = \pm p\lambda/N. \quad (8.4)$$

Здесь p — целые числа, кроме 0, $N, 2N, \dots$ Значениям 0, $N, 2N, \dots$, как это видно из (8.3) соответствуют максимумы. Чтобы найти **угловую ширину максимума** (№ 8.31), надо (8.4) продифференцировать по p :

$$dcos\theta\delta\theta/dp = (\lambda/N)$$

и положить $\delta p = 1$, откуда

$$\delta\theta = \lambda/(Nd\cos\theta). \quad (8.5)$$

Заметим, что ширина максимумов увеличивается с ростом θ .

Направление на максимумы, как следует из (8.3), а также из совпадения фаз пучков через щели, получаем при условии

$$ds\in\theta = \pm m\lambda (m = 0, 1, 2, \dots), \text{ причем } m < d/\lambda. \quad (8.6)$$

Эти максимумы называются **главными** соответствующего порядка m .

Интенсивность нулевого главного максимума (при $\theta = 0$) пре-восходит максимум для одной щели в N^2 раз. Для раскрытия неоп-

ределенности $\sin Na/\sin a$ при $a \rightarrow 0$ используем правило Лопиталя: это отношение равно отношению производных.

Между добавочными минимумами находятся максимумы, называемые **второстепенными**, или **добавочными**. Второстепенные максимумы находятся приблизительно посередине между минимумами. Их величину можно найти с помощью (8.3). Интенсивность главного максимума и ближайших к нему второстепенных максимумов находится в соотношении 1: 0,045: 0,016: 0,0083: ...

Полученные выше формулы применимы также и к **отражательным решеткам**, в которых световой поток отражается от поверхностей между штрихами.

Найдем число штрихов на 1 мм плоской отражательной решетки, если при нормальном падении на нее света *D*-линии натрия ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) максимум 2-го порядка наблюдается под углом 45° к нормали (№ 8.30). В данном случае из (8.6): $d\sin 45^\circ = 2\lambda$. Откуда $1/d \approx 600$ штрихов/мм.

Найдем, какова **ширина спектральной линии** водорода ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) на негативе спектрографа, если в нем использована решетка шириной $l = 3$ см и объектив с фокусным расстоянием $f = 15$ см (№ 8.36). Из (8.5) следует, что ширина главного максимума $\delta\theta \approx \lambda/(Nd) = \lambda/l$. На негативе спектрографа полуширина линии $\Delta x = f\lambda/l = 3,3$ мкм.

Для **углового распределения дифракционных минимумов** (№ 8.8) из (8.3), (8.4) и (8.6) получаем два условия: во-первых, при $d\sin\theta = p\lambda/N$ кроме тех случаев, когда $d\sin\theta = k\lambda$, и, во-вторых, при $b\sin\theta = m\lambda$. Здесь p , k и m — целые числа.

Из (8.3) видно, что максимум (8.6) не осуществляется, если он приходится на минимум $b\sin\theta = n\lambda$, т. е. для **отсутствия m -го максимума** (№ 8.11) должно быть $m = n d/b$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ (начинается с 1, так как 0 дает максимум). Из полученного результата следует (№ 8.12), что при $d = 2b$ исчезнут максимумы порядков 2, 4, 6, ...; при $d = 3b$, соответственно 3, 6, 9, ...; при $d = 4b$ порядков 4, 8, 12, ...

Из (8.6) видно, что **максимальный порядок спектра**, который может наблюдаться (№ 8.13) равен наибольшему из целых чисел, не превосходящих d/λ .

Чтобы **совпадали** направления разных спектральных линий для различных длин волн, как следует из (8.6), $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$. Длина волны линии, которая в третьем порядке совпадает с линией длины 4861 \AA в четвертом порядке $\lambda = (4/3) 4861 = 6481 \text{ \AA}$ (№ 8.14).

Максимальная длина волны, которая может получиться в спектре дифракционной решетки (№ 8.15), определяется (8.6). Для получения в спектре волн с длинноволновой границей $\lambda = 100 \text{ мкм} = 10^{-2} \text{ см}$ период решетки должен быть не менее 0,01 см.

Выясним, могут ли **перекрываться спектры** 1-го и 2-го порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом (№ 8.17). Из (8.6) для спектров первого порядка имеем диапазон изменения $d\sin\theta$ от 4000 до 7000 Å, а для спектров второго порядка от 8000 до 14 000 Å, т. е. спектры не перекрываются.

На дифракционную решетку с числом штрихов $n = 100$ штрих/см падает плоская монохроматическая волна ($\lambda_0 = 1 \text{ мкм}$), частота которой начинает медленно **изменяться со временем** по закону $\omega = \omega_0(1 + at)$. За решеткой расположена линза с фокусным расстоянием $f = 100 \text{ см}$. Оценим время, в течение которого положение 6-го максимума в фокальной плоскости достигнет положения 5-го в начальный момент времени. Известно, что максимум интенсивности перемещается вдоль фокальной плоскости со скоростью $v = 100 \text{ м/с}$ (№ 8.62). Из (8.6) начальное направление на 6-й максимум определяется углом $\theta_6 \approx 6\lambda_0/d$, начальное направление на 5-й максимум — $\theta_5 \approx 5\lambda_0/d$, где $d = 1/n$ — период решетки. Разность координат 6-го и 5-го максимумов в фокальной плоскости $\Delta x = f\lambda_0/d$. Откуда $t = \Delta x/v = 10^{-4} \text{ с}$.

Возможны решетки, у которых «непрозрачные» участки имеют некий **коэффициент пропускания** α . Распределение интенсивности по углам для таких решеток определяется (8.3). Величину интенсивности вычислять сложно. Очевидно только одно, что при $\alpha \rightarrow 1$ (полное пропускание) она должна стремиться к нулю (№ 8.20).

На дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Решетка имеет N щелей шириной b и периодом d . Найдем угловое распределение интенсивности света за решеткой, если **закрыть центральную ее часть** непрозрачным экраном так, что по краям решетки открытые остаются по n щелей. Нарисуем (качественно) график зависимости интенсивности I от $\sin\theta$ (№ 8.21). Используя (7.4) — (7.6), (8.1) и (8.2), получаем для амплитуды волны на экране

$$A = A_0(\sin\theta/\alpha)[\sin(N\delta/2)/\sin(\delta/2)]e^{i(N-1)\delta/2},$$

где $\alpha = (\pi/\lambda)b\sin\theta$; $\delta = (2\pi/\lambda)d\sin\theta$.

Для части решетки, кроме n щелей с каждой стороны

$$B = A_0(\sin\alpha/\alpha)[\sin((N - 2n)\delta/2)/\sin(\delta/2)]e^{i(N-1-2n)\delta/2}.$$

При закрытой центральной части остается разность этих двух векторов. Учитывая, что угол между векторами A и B равен $n\delta$, для вектора их разности в квадрате, который обозначим I (по теореме косинусов) получаем

$$I = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos(n\delta).$$

Подставляя модули векторов, находим

$$I = A_0^2(\sin\alpha/\alpha)^2/\sin^2(\delta/2)[\sin^2(N\delta/2) + \sin^2((N-2n)\delta/2) - 2\sin(N\delta/2)\sin((N-2n)\delta/2)\cos(n\delta)].$$

При малых углах косинус заменяем единицей. В результате

$$I = A_0^2(\sin\alpha/\alpha)^2/\sin^2(\delta/2)[\sin(N\delta/2) - \sin((N-2n)\delta/2)]^2 = 4A_0^2(\sin\alpha/\alpha)^2\sin^2(n\delta/2)\cos^2((N-n)\delta/2)/\sin^2(\delta/2).$$

Нулевой максимум равен $4A_0^2n^2$. Нули интенсивности имеем, когда аргумент косинуса равен $\pi(p + 1/2)$, где $p = 0, 1, 2, \dots$

Первый нуль (ширина нулевого максимума) получаем при $\sin\theta = \lambda/[2d(N-1)]$. Нули, определяемые синусами, будут при $\sin\theta = q\lambda/(nd)$, $q = 1, 2, \dots$, а также при $\sin\theta = m\lambda/b$, где $m = 1, 2, \dots$ Главные максимумы будут при $\sin\theta = k\lambda/d$, где $k = 1, 2, \dots$ График интенсивности схематично приведен на рис. 8.2.

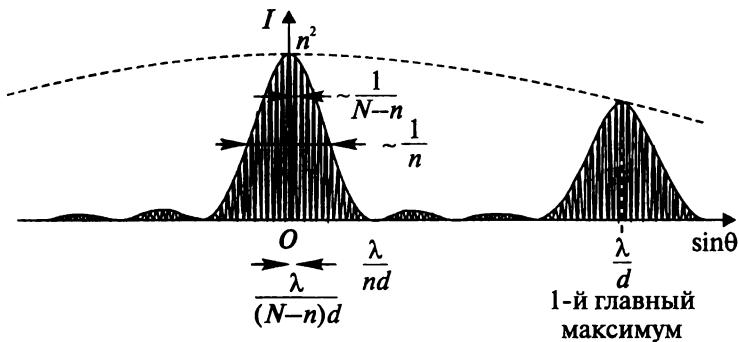


Рис. 8.2

Дополнительными, или взаимно дополнительными, дифракционными решетками называют такие шелевые решетки, у которых непрозрачные места одной решетки совпадают с прозрачными другой. Убедимся непосредственным расчетом, что при освещении таких решеток одним и тем же световым пучком положения и интенсивности главных дифракционных максимумов одного и того же порядка совпадают, за исключением главных максимум-

мов нулевых порядков. Если же число штрихов решетки очень велико, то совпадают также интенсивности дифрагированного света для всех направлений, за исключением направления падающего света (№ 8.5). Введем обозначения

$$\alpha = (\pi/\lambda)bs\sin\alpha \text{ и } \beta = (\pi/\lambda)ds\sin\alpha. \quad (8.7)$$

Выражение (8.3) с учетом (7.6) представим в виде

$$I(\theta) = A_{00}^2 b^2 (\sin\alpha/\alpha)^2 (\sin N\beta/\sin\beta)^2, \quad (8.8)$$

где A_{00} — амплитуда падающей волны (от параметров решетки не зависит).

Подставив значения α , получим

$$I(\theta) = A_{00}^2 \lambda^2 [\sin^2\alpha / (\pi^2 \sin^2\theta)] (\sin N\beta/\sin\beta)^2.$$

Для дополнительной решетки соответственно

$$I'(\theta) = A_{00}^2 \lambda^2 [\sin^2\alpha' / (\pi^2 \sin^2\theta)] (\sin N\beta/\sin\beta)^2,$$

где $\alpha' = (\pi/\lambda)(d - b)\sin\theta$, так что $\alpha + \alpha' = (\pi/\lambda)ds\sin\theta = \beta$.

Для главных максимумов $ds\sin\theta = m\lambda$, $\alpha + \alpha' = m\lambda$. Поэтому $\sin^2\alpha = \sin^2\alpha'$ и, следовательно, $I'_m = I_m$. При $m = 0$ рассуждение не применимо, так как в этом случае в знаменателе $\sin\theta = 0$.

При больших значениях N главные максимумы очень резкие. Практически весь свет концентрируется в главных максимумах, занимающих очень узкие интервалы углов $\Delta\theta$, стремящихся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Практическое значение имеют только углы, удовлетворяющие условию $ds\sin\theta = m\lambda$ (направление на максимумы), а также углы, отличающиеся от них ничтожно мало. Это и доказывает совпадение распределений интенсивностей для обеих решеток.

Параллельный пучок монохроматического света падает на дифракционную решетку с заданной полной шириной ее штрихованной поверхности. Найдем, при каком значении отношения b/d ширины щели b к периоду решетки d интенсивность главных дифракционных максимумов 2-го порядка максимальна (№ 8.6). Из (8.6) для максимумов 2-го порядка получаем $ds\sin\theta = \pm 2\lambda$. Подставив в (8.3), находим

$$I = A_0^2 N^2 [\sin(2\pi b/d)]^2 / (2\pi b/d)^2.$$

Отсюда получаем, что максимальная интенсивность будет при $b/d = 1/4$ или $b/d = 3/4$.

Покажем, что для обычной амплитудной щелевой дифракционной решетки справедливо неравенство $I_{\text{диф}} \leq I_{\text{пад}}/4$, где, в соответствии с (1.66), $I_{\text{пад}}$ — полный поток энергии, падающий на решетку; $I_{\text{диф}}$ — поток энергии дифрагированного света, приходящийся на все дифракционные максимумы, кроме максимума нулевого порядка. Максимальное значение дифрагированного потока энергии достигается в случае, когда ширина щелей решетки равна половине ее периода (№ 8.7). Введем обозначения

$$q = b/d, \quad q(d - b)/d = 1 - q.$$

Суммарный поток энергии прошедшего света, распространяющийся по всем максимумам, пропорционален входной площади решетки, в данном случае q , а интенсивность нулевого максимума, в соответствии с (7.7), пропорциональна q^2 . Отмечая результаты для дополнительной решетки штрихом, получаем

$$I_{\text{прош}}/q = I'_{\text{прош}}/q', \quad I_0/q^2 = I'_0/(q')^2.$$

В соответствии с принципом Бабине (см. задачу № 7.14, с. 175) для дополнительных решеток $I_{\text{диф}} = I'_{\text{диф}}$. Кроме того, $I_{\text{прош}} = I_0 + I_{\text{диф}}$. Исключив из написанных соотношений $I'_{\text{диф}}$ и I'_0 , найдем $I_{\text{диф}} = (1 - q) I_{\text{прош}}$. Учитывая также, что $I_{\text{прош}} = q I_{\text{пад}}$, получим $I_{\text{диф}} = q(1 - q) I_{\text{пад}}$. Максимум для $I_{\text{диф}}$ получается при $q = 1/2$. При этом $I_{\text{диф}} = I_{\text{пад}}/4$.

На дифракционную решетку с шириной щелей b , равной половине периода d ($d = 2b$), нормально падает плоская монохроматическая волна. Найдем долю энергии падающей волны, рассеянную в нулевой и в каждый из вторых и первых порядков ($d = 10\lambda$) (№ 8.22). Из (8.6) для первых максимумов $d\sin\theta = \pm\lambda$, для вторых $d\sin\theta = \pm 2\lambda$. Из (8.6) и (8.7) получаем: $I(0) = A_{00}^2 b^2 N^2$, $I_{\pm 1} = A_{00}^2 b^2 N^2 \times \times 4/\pi^2$, $I_{\pm 2} = 0$. Для падающего потока $I = A_{00}^2 d^2 N^2$. Отсюда получаем, что для этой решетки в нулевом максимуме отношение интенсивностей равно $1/4$, в первых $\approx 0,1$, во вторых — нуль.

При наклонном падении света на дифракционную решетку (под углом θ_0 к нормали, рис. 8.3) вместо (8.6) для положения главных максимумов (совпадение фаз пучков) получаем (№ 8.9)

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda. \quad (8.9)$$

Для дифракционных минимумов вместо (8.4)

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = (m + p/N)\lambda \quad \text{где } p = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (8.10)$$

Из (8.9) находим

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = d \cdot 2\cos[(\theta + \theta_0)/2]\sin[(\theta - \theta_0)/2] = m\lambda.$$

При $d \gg \lambda$ это соотношение может выполняться только при $\theta \rightarrow \theta_0$. Полагая $\theta \approx \theta_0$, получаем (при условии $d \gg \lambda$)

$$d(\theta - \theta_0) \cos\theta_0 \approx m\lambda. \quad (8.11)$$

Постоянная решетки как бы уменьшилась по сравнению со случаем нормального падения и стала равной $d\cos\theta_0$ (вместо d). При этом углы $\theta - \theta_0$, определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающего света (или отраженного в отражающей решетке).

Найдем длину волны рентгеновских лучей, падающих на решетку с периодом 1 мкм под углом $89^{\circ}30'$, если угол дифракции для спектра второго порядка равен 89° (№ 8.10). С помощью (8.11) находим $\lambda = 0,379 \text{ \AA}$.

Над центром старой граммофонной пластинки помещен точечный источник света на высоте $h = 1 \text{ см}$. Глаз наблюдателя, расположенный на расстоянии $a = 110 \text{ см}$ от оси пластинки на высоте $h = 10 \text{ см}$, видит, помимо геометрического изображения источника, систему полос на поверхности пластинки. Определим расстояние Δx между ними, если расстояние между бороздками $d = 0,5 \text{ мм}$, а длина волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ (№ 8.26). В соответствии с (8.9) условие максимума m -го порядка (рис. 8.4)

$$d(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = m\lambda,$$

а максимума $(m + 1)$ -го порядка

$$d(\sin\theta_1' - \sin\theta_2') = (m + 1)\lambda.$$

При переходе от одного максимума к другому углы θ_1 и θ_2 получают приращения $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$, связанные соотношением

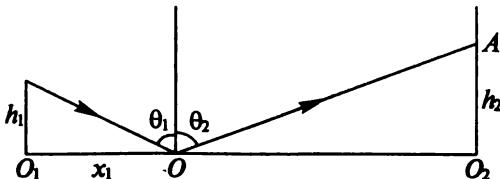


Рис. 8.4

$d(\cos\theta_1\Delta\theta_1 - \cos\theta_2\Delta\theta_2) = \lambda$. Кроме того, $x_1 = h_1\tg\theta_1$, $x_2 = h_2\tg\theta_2$, при чем $x_1 + x_2 = a = \text{const}$. Из этого условия получается второе соотношение $h_1\Delta\theta_1/\cos^2\theta_1 + h_2\Delta\theta_2/\cos^2\theta_2 = 0$. Из этих двух соотношений находим $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$, а после этого — расстояние между максимумами $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = h_1\Delta\theta_1/\cos^2\theta_1 = -h_2\Delta\theta_2/\cos^2\theta_2$. Вычисления можно упростить, заметив, что углы θ_1 и θ_2 мало отличаются от угла падения θ_0 , соответствующего правильному отражению света от пластиинки. Заменив эти углы углом θ_0 , находим

$$\Delta x = [h_1h_2/(h_1 + h_2)][\lambda/(d\cos^2\theta_0)].$$

При этом $\cos\theta_0 \approx h_1/x_1 \approx h_2/x_2$, или $\cos\theta_0 = (h_1 + h_2)/(x_1 + x_2) = (h_1 + h_2)/a = 1/10$, откуда $\Delta x = 1 \text{ см}$.

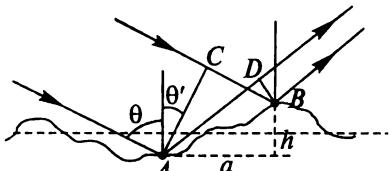


Рис. 8.5

Найдем, при каком условии можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения (№ 8.16). На рис. 8.5 показана шероховатая поверхность (средняя линия отмечена штриховой линией) и падающие под углом θ относительно нормали к средней линии лучи. Рассмотрим интерференцию вторичных волн, исходящих от поверхности тела под углом θ' к нормали к средней линии поверхности. Разность хода каких-либо двух лучей, идущих в рассматриваемом направлении, определяется выражением

$$\Delta = AD - BC = a (\sin\theta' - \sin\theta) + h (\cos\theta' + \cos\theta).$$

Здесь a может принимать какие угодно значения. Поэтому если $\theta' \neq \theta$, то разность хода Δ может принимать также какие угодно значения, и притом для неправильной поверхности тела эти значения будут встречаться одинаково часто. Это показывает, что правильное отражение, если такое возможно, может происходить лишь под углом $\theta' = \theta$. В таком случае $\Delta = 2h\cos\theta$. Отсюда видно, что, каков бы ни был размер h , можно подобрать достаточно большой угол θ , для которого $\Delta \ll \lambda$ (складываемые лучи почти в фазе). При этом условии отражение правильное. При нормальном падении $\Delta = 2h$ и правильное отражение возможно лишь при соблюдении условия $h \ll \lambda$.

Найдем период d отражательной решетки σ , если входная A и выходная B щели спектрального прибора (рис. 8.6) расположены

на окружности радиуса $R = 1$ м, центр которой совпадает с центром решетки M . На щель A последовательно направляют пучок СО-лазера (длина волны излучения $\lambda_1 = 5$ мкм) и пучок СО₂-лазера ($\lambda_2 = 10$ мкм). При этом 2-й порядок дифрагировавшего пучка СО-лазера возвращается во входную щель, а 1-й порядок дифрагировавшего пучка от СО₂-лазера падает на выходную щель. Расстояние от выходной щели до нормали MD к решетке a равно 0,5 м (№ 8.51). Обозначив угол падения на решетку θ_0 и учитывая, что для λ_1 угол дифракции $\theta_1 = -\theta_0$, в соответствии с (8.9) при $m = -2$ получаем: $d \sin \theta_0 = \lambda_1$. Для λ_2 имеем: $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = d(a/R - \sin \theta_0) = \lambda_2$ (при $m = 1$), откуда

$$d = (R/a)(\lambda_1 + \lambda_2) = 30 \text{ мкм.}$$

Рассмотрим фазовые решетки.

Прозрачная периодическая структура, профиль которой изображен на рис. 8.7, освещается сверху плоской монохроматической волной, падающей нормалью на верхнюю границу. Ширина уступов и впадин структуры одинакова. При заданном показателе преломления n подберем глубину h таким образом, чтобы главные фраунгоферовы дифракционные максимумы 1-го порядка имели наибольшую интенсивность. Найдем, какова при этом интенсивность нулевого главного максимума (№ 8.19). Для каждого уступа или впадины можно воспользоваться (7.4) и (7.5)

$$A = A_{00} b \sin \alpha / \alpha, \text{ где } \alpha = k(b/2) \sin \theta.$$

Вектор для уступа отстает по фазе на $h(n - 1) + b \sin \theta$. Складывая их, от одного периода получаем

$$\begin{aligned} A &= A_{00} b (\sin \alpha / \alpha) (1 + e^{ik[h(n-1) + b \sin \theta]}) = \\ &= 2A_{00} b (\sin \alpha / \alpha) \cos \{k[h(n-1) + b \sin \theta]/2\} e^{ik[h(n-1) + b \sin \theta]/2}. \end{aligned}$$

Умножая, как обычно, на сопряженный вектор, находим интенсивность от одного периода решетки, а используя (8.2) и (8.1), для всей решетки

$$I(\theta) = I_0 (\sin \alpha / \alpha)^2 [\sin(2\alpha N) / \sin 2\alpha]^2 \{1 + \cos[kh(n-1) + kbs \sin \theta]\}, \quad (8.12)$$

где $I_0 = 2A_{00}^2 b^2$.

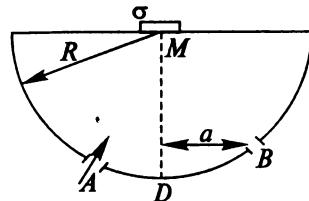


Рис. 8.6

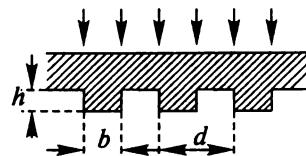


Рис. 8.7

Направление на максимумы 1-го порядка из (8.6) $\sin\theta = \lambda/(2b)$. Чтобы (8.12) давало максимум, косинус должен быть равен 1. Следовательно,

$$kh(n - 1) + kbs\in\theta = 2\pi m, \text{ где } m = 1, 2, \dots$$

Откуда $h = (m - 1/2)\lambda/(n - 1)$.

Нулевой максимум соответствует $\theta = 0$. При этом $\cos[kh(n - 1)] = \cos[\pi(2m - 1)] = -1$. Таким образом, нулевой максимум исчезает.

При уменьшении разности оптических длин (№ 8.18), как видно из (8.6) и (8.12), направления на главные максимумы не меняются, а интенсивности стремятся к нулю.

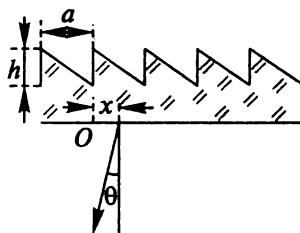


Рис. 8.8

Рассчитаем и проанализируем дифракционную картину при нормальном падении света на пилообразную решетку, выполненную из стекла с показателем преломления n (рис. 8.8). Число зубьев решетки равно N , $a \gg h$. Длина волны падающего света равна λ (№ 7.29). Такие решетки называют **фазовыми**, так как чередуется сдвиг фаз, а не пропускание (открытый участок — закрытый участок).

Используя рис. 8.8, можно записать сдвиг фазы в пределах одного зуба в зависимости от x

$$\phi(x) = k[\sin\theta - (n - 1)h/a]x, \quad (8.13)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число падающей волны.

Обозначив амплитуду падающего на зуб света A_{00} , для суммарной волны в направлении угла θ получаем

$$A = A_{00} \int_0^a e^{ik\phi(x)} dx = A_{00} a(\sin\alpha)/\alpha, \quad (8.14)$$

где

$$\alpha = \phi(a) = k[a\sin\alpha - (n - 1)h]. \quad (8.15)$$

Суммирование от всех зубьев решетки производим, используя (8.2) и (8.1) и учитывая несколько другие обозначения. В итоге для распределения интенсивности имеем

$$I = I_0 \{ [\sin(0.5akNs\in\theta)] / [\sin(0.5aks\in\alpha)] \}^2 (\sin\alpha)^2 / \alpha^2.$$

Положение максимумов (кроме главного) зависит от длины волны света. **Угловое разведение максимумов разных длин волн** яв-

ляется спектральной характеристикой D , называемой угловой дисперсией. Из (8.6) дифференцированием получаем:

$$d\cos\theta d\theta = m\delta\lambda; \quad (8.16)$$

для дифракционной решетки

$$D_\theta = \delta\theta/\delta\lambda = m/(d\cos\theta). \quad (8.17)$$

При наблюдении положения линий на экране или фотопластинке удобно заменить угловое расстояние $\delta\theta$ на линейное $\delta s = f\delta\theta$, где f — фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран. Это вводит линейную дисперсию

$$D_s = \delta s/\delta\lambda = fD_\theta. \quad (8.18)$$

На практике нередко указывают и обратную величину.

Подсчитаем: 1) угловую дисперсию в угл.с/Å в спектре 1-го порядка для решетки, имеющей 3937 штрихов/см; 2) линейную дисперсию спектрографа с такой решеткой при объективе с фокусным расстоянием 50 см; 3) величину, обратную линейной дисперсии [Å/мм]. Считаем, что углы дифракции малы ($\cos\theta \approx 1$) (№ 8.27). Согласно (8.17) $D_\theta = 1/(d\cos\theta) \approx 1/d \approx 8,1$ угл.с/Å. В соответствии с (8.18) $D_s = 0,0197$ мм/Å и обратная линейная дисперсия 50,7 Å/мм.

Найдем, какое расстояние между компонентами желтой линии дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å) получится на фотографическом негативе в спектрографе, описанном в предыдущей задаче (№ 8.28). Как следует из (8.6), для нулевых максимумов ($m = 0$) нет зависимости от λ . Для первых максимумов $\sin\theta_1 = \lambda_1/d = \lambda \cdot 3937 = 0,23$, $\sin\theta_2 = \lambda_2/d$. Получаем $\theta_2 - \theta_1 \approx (\lambda_2 - \lambda_1)/d$. Расстояние на негативе $\Delta = (\lambda_2 - \lambda_1)f/d \approx 0,12$ мм.

Найдем угловую дисперсию решетки с постоянной $d = 5$ мкм, если $\lambda = 5000$ Å, порядок спектра $m = 3$ (№ 8.29). Используя (8.6) и (8.16), получаем $D_\theta = \delta\theta/\delta\lambda = m/(d\cos\theta) = (m/d)/[1 - (m\lambda/d)^2]^{1/2} = 0,63 \cdot 10^4$ рад/см = 13 угл.с/Å.

Для дифракционной решетки с числом штрихов $n = 500$ штрих/мм предел разрешения в спектре 1-го порядка равен $\delta\lambda = 0,1$ нм при средней длине волны $\lambda = 600$ нм. Изображение спектра получается с помощью линзы на экране. Определим минимальный допустимый диаметр D_{min} линзы, при котором изображение спектра может быть разрешено (№ 8.44). Из (8.17) имеем: $\delta\theta = m\delta\lambda/(d\cos\theta) \approx n\delta\lambda$. Дифракция на линзе (7.17) не должна ис-

портировать это разрешение $1,22\lambda/D < \delta\theta$, откуда $D > 1,22\lambda/(n\delta\lambda)$; $D_{\min} \approx 1,5$ см.

Ультрафиолетовое излучение состоит из двух близких спектральных линий ($\lambda \approx 300$ нм, $\delta\lambda = 0,1$ нм). Излучение падает под углом $\theta = 86^\circ$ к нормали на **отражательную дифракционную решетку** с периодом $d = 4$ мкм. Оценим диаметр падающего пучка лучей, при котором возможно разрешение спектральных линий во втором дифракционном порядке (№ 8.48). Дифракционный угол, определяемый (7.17), должен быть меньше углового разрешения решетки (8.17): $\lambda/D < m\delta\lambda/(d\cos\theta)$. Отсюда $D > \lambda d \cos\theta / (m\delta\lambda) \approx 0,042$ см.

Дифракционная решетка шириной $a = 3$ см с числом штрихов $N = 10^4$ освещается параллельным пучком света от натриевой лампы \otimes . Пучок формируется с помощью щели S шириной $l = 0,05$ мм, помещенной в фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f = 10$ см (рис. 8.9). Далее следует стандартное фраунгофово расположение. Найдем, в каком порядке спектра на экране может быть разрешен желтый дублет натрия ($588,996$ и $589,593$ нм) (№ 8.23). Угол, связанный с размером щели, должен быть меньше угловой дисперсии (8.16): $l/f < m\delta\lambda/(d\cos\theta) = m\delta\lambda N/(a\cos\theta)$. Отсюда $m > la/(fN\delta\lambda) = 2,5$. Таким образом, m должно быть больше или равно 3.

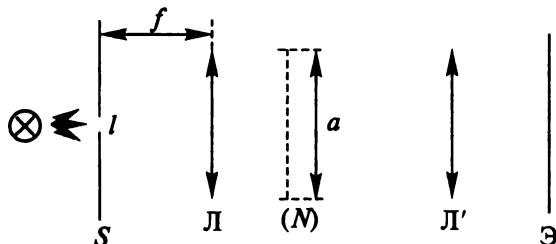


Рис. 8.9

Дифракционная решетка шириной a освещается параллельным пучком света от натриевой лампы, при этом $a\delta\lambda \gg \lambda^2$, где

λ — средняя длина волны, а $\delta\lambda$ — расстояние между линиями дублета. Далее на расстоянии l помещена линза L диаметром D , а в ее фокальной плоскости — экран наблюдения (рис. 8.10). Найдем, какому условию должно удовлетворять расстояние l , чтобы желтый дублет натрия (588,996

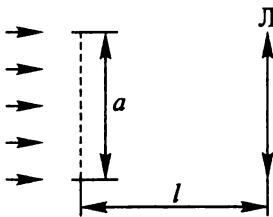


Рис. 8.10

и 589,593 нм) разрешался на экране (№ 8.24). Угол дифракции на линзе (7.17) должен быть меньше угловой дисперсии (8.16): $\lambda/D < m\delta\lambda/(d\cos\theta)$. Подставляя (8.6) и учитывая, что $\theta_{\max} = (a/2)/l$, получаем $l < Da\delta\lambda/(2\lambda^2)$. С учетом условия малости углов необходимо, чтобы $l_{\min} \gg D$.

Удаленный протяженный источник испускает две узкие спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 500,2$ нм равной интенсивности. Свет от источника непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценим угловой размер ψ источника, при котором можно разрешить эти две линии (№ 8.41). Из (8.6) и (8.17) для угловой дисперсии имеем при подходящем угле ϕ

$$D = d\phi/d\lambda = m/(d\cos\phi) = (1/\lambda)\sin\phi/\cos\phi < 1/\lambda.$$

Угол $d\phi$ должен быть больше углового размера источника ψ , чтобы развести разные длины волн. Таким образом, $\psi < (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ рад.

Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 2,8$ Å дифрагирует на кристалле каменной соли, испытывая отражение от ряда кристаллических плоскостей под углом $\phi = 30^\circ$ к нормали. Толщина кристалла $L = 0,56$ мм. Определим угловую расходимость дифракционного максимума (№ 8.61). На рис. 8.11 показана схема отражений от плоскостей. Напомним, что условие максимума по Брегу—Вульфу, т. е. прихода всех отраженных лучей в фазе,

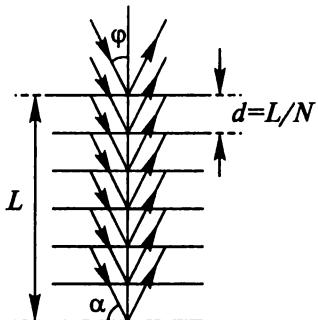


Рис. 8.11

$$2ds\sin\alpha = m\lambda. \quad (8.19)$$

Минимум, ограничивающий ширину максимума, создается тем, что на векторной диаграмме вектор каждого отраженного луча слегка изменяет фазу. Это можно интерпретировать как изменение m на $\delta m = 1/N$. Из условия Брега—Вульфа имеем: $2dc\cos\alpha = \delta m\lambda$. Если фаза изменится на 2π , соответственно разность хода λ , то суммарный вектор равен нулю. Это и есть условие минимума. Таким образом, угловая полуширина максимума равна

$$\delta\theta = \lambda/(N2dc\cos\alpha) = \lambda/(2L\sin\phi) = \lambda/L = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

Возможность разрешения близких длин волн характеризуется **разрешающей способностью**. Для любых спектральных приборов,

где складываются N лучей (многолучевых систем), предел разрешения определяется, как всегда, совпадением направления на минимум для λ с направлением на максимум в том же порядке m для $\lambda + d\lambda$ (**критерий Релея**)

$$m\lambda + \lambda/N = m(\lambda + d\lambda),$$

Откуда разрешающая способность, или сила

$$R = \lambda/d\lambda = mN. \quad (8.20)$$

Например, для разрешения дублета D -линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$) (№ 8.1), разрешающая сила должна быть $R = \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) = 5896/6 \approx 1000$.

Из (8.6) для максимума порядка интерференции имеем

$$m_{\max} = d/\lambda. \quad (8.21)$$

Из (8.18) максимальное разрешение

$$R_{\max} = Nd/\lambda = l/\lambda, \quad (8.22)$$

где l — длина решетки.

Получается, что для разрешения не нужно много штрихов на мм. Но оказывается, что много штрихов необходимо, чтобы работать с немонохроматическими источниками. Эта способность характеризуется **дисперсионной областью** — шириной спектра источника $\Delta\lambda$, при которой еще существует интерференционная картина. Картина исчезает, если

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda, \quad (8.23)$$

откуда дисперсионная область

$$G = \Delta\lambda = \lambda/m. \quad (8.24)$$

Чтобы работать с источниками с большим $\Delta\lambda$ нужно малое m и соответственно малый период d (так как $d \sim m\lambda$) и большое N .

Подсчитаем **минимальное** число штрихов решетки, которая может разрешить натриевый дублет ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$) в спектре 1-го порядка (№ 8.32). Используя (8.20), находим: $N = 5896/6 \approx 1000$.

Найдем разрешающую способность решетки с периодом $d = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ и шириной $l = 3 \text{ см}$ в спектрах 1-го и 4-го порядков (№ 8.33). В соответствии с (8.20) $R = ml/d$. Поэтому $R_1 = 12\,000$ и $R_4 = 48\,000$.

На плоскую отражательную решетку, содержащую $N = 50\ 000$ штрихов, нормально падает свет от двойной линии натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$). Плотность штрихов $n = .5000$ штрих/мм. Найдем, какой максимальный порядок спектра m можно получить от такой решетки, и каково минимальное расстояние $\delta\lambda$ между спектральными линиями, которое способна разрешить решетка в указанной области спектра. Спектр максимального порядка фотографируется на фотопластинке с помощью объектива с фокусным расстоянием $f = 50 \text{ см}$. Вычислим, какое расстояние Δx между спектральными линиями λ_1 и λ_2 получится на фотопластинке (№ 8.65). Учитывая, что период решетки $d = 1/n$, из (8.20) находим $m_{\max} = d/\lambda$. Подставляя данные, имеем: $20\ 000/5896$. Максимальный порядок равен целому числу, содержащемуся в этом выражении, т. е. $m_{\max} = 3$. Согласно (8.20) $\delta\lambda = \lambda/(Nm) = 0,04 \text{ \AA}$. Угловое расхождение (8.17) $\delta\theta = (\lambda_2 - \lambda_1)/(d\cos\theta)$. Для вычисления Δx это выражение надо умножить на f и подставить косинус, используя (8.6),

$$\Delta x = fm(\lambda_2 - \lambda_1)/(d^2 - m^2\lambda^2)^{1/2} = 1 \text{ мм.}$$

При наклонном падении пучка света на решетку как бы изменяется период решетки, но и как бы изменяется ее длина, а число щелей остается неизменным. Поэтому разрешающая способность не меняется (№ 8.34).

Если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки, то разрешающая способность, которая определяется длиной решетки (8.22), не изменится, а дисперсионная область, в соответствии (8.24), где $m = Rd/l$, уменьшится в два раза, так как d и, следовательно, m увеличиваются в два раза (№ 8.35).

Спектр некоторого вещества в видимой области содержит ряд спектральных линий в диапазоне от 400 до 600 нм с минимальной разницей длин волн $\delta\lambda = 0,5 \text{ \AA}$. Спектр изучается с помощью достаточно большой дифракционной решетки с периодом $d = 0,01 \text{ мм}$. С помощью линзы спектр проецируется на экран, расположенный в ее фокальной плоскости, и рассматривается затем невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения ($L = 25 \text{ см}$). Определим минимальное значение диаметра линзы D и ее фокусного расстояния f , при которых наблюдатель может увидеть все линии спектра. Диаметр зрачка глаза принимаем равным $d_{\text{зр}} = 0,5 \text{ см}$ (№ 8.25). Рабочий диапазон источника (дисперсионная область) $\Delta\lambda = 200 \text{ нм}$. Используя (8.24) и то, что $\lambda_{\text{ср}} = (400 + 600)/2 = 500 \text{ нм}$, получаем: $m = 500/200 = 2,5$. Таким образом, надо принять $m = 2$.

Разрешающая способность должна быть $R = \lambda_{\text{ср}}/\delta\lambda = 500/0,05 = 10^4$. Из (8.20) $N = R/m = 5000$. Рабочая длина решетки $l = Nd = 5$ см. Диаметр линзы не должен быть меньше размера решетки, чтобы не ухудшать разрешение по дифракции $D = l = 5$ см. Используя (8.17), получаем, что должны быть разрешены углы $\delta\theta \approx \approx \delta\lambda/d = 10^{-5}$. Расстояния между линиями, для вычисления которого можно было сразу воспользоваться (8.18), будет равно $\delta s = \sqrt{\delta\theta}$. Это расстояние должно быть разрешимо по дифракции в зрачке глаза (7.17) $\delta s > L\lambda/d_{\text{ср}}$, откуда $f > \lambda L/(d_{\text{ср}}\delta\theta) = 2,5$ м.

Свет от газоразрядной трубы диаметром $D = 0,1$ см, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценим, на каком минимальном расстоянии L_{\min} от трубы нужно расположить решетку, чтобы при этом можно было разрешить две спектральные линии с расстоянием между ними $\delta\lambda = 5$ нм при $\lambda = 500$ нм (№ 8.39). Угловой размер источника должен быть меньше углового размера главного максимума (8.4), которым определяется разрешающая способность решетки,

$$D/L < \lambda/(Nd). \quad (8.25)$$

Используя (8.22), получаем $L > DR_{\max} = 10$ см. Другой подход к решению этой задачи связан с пространственной когерентностью: ширина когерентности (5.5) должна быть больше размера решетки.

Свет от удаленного источника, угловой размер которого $\psi = 10^{-3}$ рад, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценим, какую максимальную разрешающую способность R_{\max} можно получить в таких условиях (№ 8.40). Как и в (8.25), должно быть $\psi < \lambda/(Nd)$. Используя (8.22), получаем, что максимальное разрешение $R_{\max} \approx 1/\psi = 1000$.

Коллиматорная щель S , освещаемая источником света, помещается в главном фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f = 20$ см. Пройдя через линзу, свет падает на дифракционную решетку, плоскость которой перпендикулярна главной оптической оси линзы. Число штрихов решетки $N = 1000$, ее период $d = 0,001$ см. Найдем, какова должна быть ширина коллиматорной щели b , чтобы была полностью использована разрешающая способность решетки в окрестности длины волны $\lambda = 5000$ Å (№ 8.37). На рис. 8.12 показана схема расположения щели и решетки. За решеткой стоит линза L' , которая дает дифракционную картину на экране \mathcal{E} . Чтобы полностью использовать разрешающую способность решетки, надо не сильно испортить остроту максимумов, которыми определяется способность к разрешению, т. е. должно выполнять-

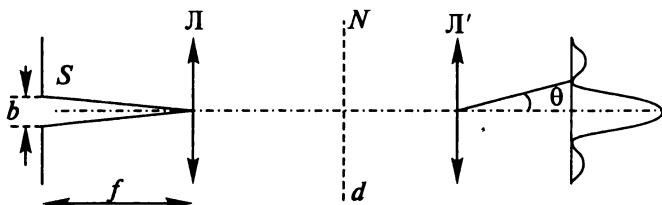


Рис. 8.12

ся условие: $b/f \ll \theta \approx \lambda/(Nd)$, отсюда $b < f\lambda/(Nd) \approx 0,001$ см. Можно также воспользоваться тем, что ширина когерентности (3.5) в плоскости решетки должна быть больше размера решетки: $\lambda f/b > Nd$, что приводит к тому же результату.

Свет от газоразрядной трубки диаметром $D = 1$ см непосредственно падает на дифракционную решетку, расположенную на расстоянии $L = 100$ см. Оценим, какой будет в этих условиях максимальная разрешающая способность $R_{\max} = \lambda/d\lambda$ (№ 8.38). Из (5.5) размер пространственной когерентности $l \approx \lambda L/D$. Число щелей, попадающих в этот размер (эффективных), $N_{\text{eff}} \approx l/d$, где d — период решетки. Учитывая (8.21), для разрешающей способности решетки (8.20) находим $R_{\max} \approx (d/\lambda)(l/d) \approx L/D = 100$.

Одним из условий стабильности дифракционной картины, полученной с помощью дифракционной решетки, является постоянство температуры. Оценим максимально допустимое изменение температуры ΔT решетки, при котором еще практически полностью используется ее разрешающая способность, если фотографирование спектров ведется в 1-м порядке. Температурный коэффициент линейного расширения материала решетки $\alpha = 10^{-5}$ К⁻¹, полное число штрихов $N = 10^5$ (№ 8.55). Для линейного теплового расширения имеем для относительного изменения периода решетки $\Delta d/d = \alpha \Delta T$. Из (8.6) следует: $\Delta d \sin \theta + d \cos \theta \cdot \Delta \theta = 0$, откуда

$$\Delta \theta = -\Delta d \sin \theta / (d \cos \theta) = -\alpha \Delta T m \lambda / (d \cos \theta).$$

Дифракционная решетка с числом штрихов $N = 10^5$ имеет заводской дефект: ее период на разных участках не одинаков и изменяется в пределах 0,1 %. Выясним, можно ли с помощью такой решетки обнаружить простой эффект Зеемана в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ Гс на длине волны $\lambda = 600$ нм. Найдем минимальное расстояние между линиями, которое может разрешить такая решетка (№ 8.43). При помещении источника света в магнитное поле наблюдается расщепление спектральных линий, называемое эффектом Зеемана. В случае простого эффекта Зеемана

расщепление по частоте $\Delta\omega = eB/(2m_e c)$, где e — заряд электрона; m_e — его масса; c — скорость света. Отсюда $\Delta\lambda = \lambda^2 eB/(4\pi m_e c^2) = = 0,16 \text{ \AA}$. Минимальное разрешение в 1-м порядке из (8.20): $\delta\lambda = = \lambda/(mN) = 0,06 \text{ \AA} < \Delta\lambda$, т. е. при отсутствии дефектов решетки расщепление можно обнаружить. Для решетки с дефектами максимум 1-го порядка размыт между углами θ_1 и θ_2 , где $d_1 \sin\theta_1 = \lambda$, $d_2 \sin\theta_2 = \lambda$, или $\theta_1 \approx \lambda/d_1$, $\theta_2 \approx \lambda/d_2$, откуда угловая полуширина максимума 1-го порядка $\Delta\theta/2 = (d_2 - d_1) \lambda/(2d_1 d_2) \approx \Delta\lambda/(2d^2)$, где $\Delta d/d = 10^{-2}$ — относительное изменение периода решетки. При малых углах θ угловая дисперсия в первом порядке $\delta\theta/\delta\lambda \approx m/d = = 1/d$, откуда $\delta\lambda_{\text{деф}} \approx d\Delta\theta/2 = \Delta\lambda/(2d) = 3 \text{ \AA} > \Delta\lambda$. Таким образом, разрешить зеемановское расщепление с помощью данной дефектной решетки нельзя.

Мягкое рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 10 \text{ nm}$ дифрагирует на компакт-диске при скользящем падении. Ширина дорожки на поверхности компакт-диска $d = 0,8 \text{ мкм}$. Ширина рабочей части компакт-диска $L = 3,2 \text{ см}$. Найдем направление на первый дифракционный максимум и разрешающую способность такого спектрального прибора в первом порядке (№ 8.105). На рис. 8.13 показан падающий луч и луч, идущий к первому максимуму. Из (8.9) следует: $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \lambda$. Считая θ близким к 90° и вводя угол $\alpha = 90^\circ - \theta$, получаем: $d(1 - \cos\alpha) \approx d\alpha^2/2 = \lambda$, откуда $\alpha = (2\lambda/d)^{1/2} \approx 9^\circ$. Из (8.20) имеем $R = N = L/d = 4 \cdot 10^4$.

Для рентгеновских лучей не существует линз и сферических зеркал. Для наблюдения дифракции рентгеновских лучей узкий пучок их попадает на кристалл или (при скользящем падении) на дифракционную решетку. Дифракционная картина фиксируется на фотопластинке без какой бы то ни было фокусировки. Найдем, на каком расстоянии l_f от кристалла необходимо установить фотопластинку, чтобы на ней наблюдалась дифракционная картина Фраунгофера, если ширина пучка падающих рентгеновских лучей $h = 1 \text{ mm}$, а длина волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$. На опыте пластинку устанавливают на расстоянии нескольких или десятков сантиметров, а для вычисления направлений на дифракционные максимумы пользуются формулами фраунгоферовой дифракции. Принимая во внимание вычисленное значение l_f , объясним, почему можно поступать таким образом (№ 8.59). В соответствии с условием для дифракции Фраунгофера: $l_f \gg h^2/\lambda \approx \approx 10 \text{ km}$. Как сказано в условии, на практике пластинки ставят намного ближе к кристаллу. По-

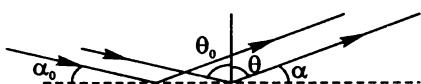


Рис. 8.13

лучающиеся дифракционные пятна не соответствуют дифракции Фраунгофера, но направления на них можно определять, проводя прямые линии от кристалла на расположенные на очень большом расстоянии фраунгоферовы максимумы.

Получим выражение для **разрешающей способности** (одномерной) дифракционной решетки в рентгеновской области спектра (№ 8.60). При падении параллельного пучка рентгеновских лучей с длиной волны λ под углом скольжения α_0 на решетку с периодом d направление дифрагированного пучка m -го порядка определяется условием (8.9)

$$d(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = m\lambda.$$

Для такого же пучка с близкой длиной волны λ' : $d(\cos\alpha - \cos\alpha') = m\lambda'$. Отсюда $d(\cos\alpha' - \cos\alpha) = m(\lambda - \lambda')$, или $ds\sin\alpha \cdot d\alpha = m\delta\lambda$, где введены обозначения $d\alpha = |\alpha' - \alpha|$, $\delta\lambda = |\lambda' - \lambda|$. Для спектрального разрешения необходимо, чтобы оба пучка пространственно разделились. Если l — расстояние до фотопластинки, измеренное вдоль направления дифрагированного луча, то боковое смещение одного пучка относительно другого $x = l\delta\alpha$. Условие разрешения состоит в том, чтобы это смещение было не меньше ширины дифрагированного пучка, т. е. $x \geq h$. Ширина h определяется выражением $h = D\sin\alpha$, где D — ширина дифракционной решетки. В результате условие разрешения принимает вид

$$lm\delta\lambda/(ds\sin\alpha) \geq D\sin\alpha.$$

Минимальному разрешаемому расстоянию $\delta\lambda$ соответствует знак равенства. Поэтому для разрешающей способности получаем

$$\lambda/\delta\lambda = lm\lambda/(Dds\sin^2\alpha) = Nml\lambda/h^2.$$

Так как $\Lambda/h^2 \ll 1$, то $\lambda/\delta\lambda \ll Nm$, т. е. разрешающая способность решетки в рентгеновской области спектра меньше, чем в оптической. Для повышения разрешающей способности надо применять узкие пучки, а фотопластинку располагать возможно дальше от решетки.

С помощью оптического затвора из параллельного пучка света, содержащего смесь двух монохроматических компонент $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 510$ нм выделен короткий импульс длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-13}$ с. Импульс последовательно дифрагирует на двух одинаковых отражательных решетках, после чего распространяется в направлении, параллельном исходному (рис. 8.14). Найдем, при каком расстоянии L между решетками длительность импульса на

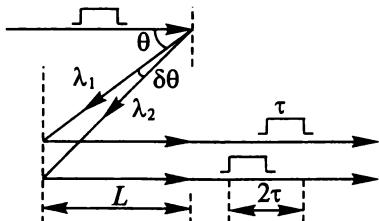


Рис. 8.14

выходе увеличится вдвое, (период решетки $d = 5 \cdot 10^{-4}$ см; выделяется 1-й порядок дифракции). (№ 8.49). В соответствии с (8.6) разные длины волн приводят к разным углам направлений максимумов 1-го порядка. Из (8.17) имеем: $\delta\theta = \delta\lambda/(d\cos\theta)$. Путь между решетками $\Delta = L/\cos\theta$. Для различных углов из-за разных длин волн

$$\delta\Delta = L\sin\theta\delta\theta/\cos^2\theta = L\sin\theta\delta\lambda/(d\cos^2\theta) = L\lambda\delta\lambda/(d^2\cos^3\theta).$$

По условию увеличение длительности импульса вдвое дает $\delta\Delta/c = \tau$ (где c — скорость света). Из (8.6) $\sin\theta \approx 0,1$; $\cos^3\theta \approx 1$. Окончательно получаем

$$L = c\tau d^2/(\lambda_{cp}\delta\lambda) \approx 75 \text{ см.}$$

Если задать расстояние между решетками (№ 8.50), то с помощью последней формулы можно вычислить τ .

Монохроматический плоский пучок света с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 5$ мкм. Определим относительное изменение частоты света, прорифрагировавшего во второй порядок, если решетка движется с постоянной скоростью $v = 500$ см/с параллельно своей плоскости (№ 8.63). Смещение решетки на $x = vt$ приводит для излучения под углом θ относительно нормали к плоскости решетки к изменению разности хода на $vtsin\theta$. Если взять $t = \lambda/c$, где c — скорость света, то получим изменение разности хода в $\delta\lambda = (v/c)\lambda\sin\theta$. Отсюда $\delta\lambda/\lambda = \Delta v/v = (v/c)\sin\theta$. Используя (8.3), находим $\Delta v/v = (v/c)m\lambda/d = 4 \cdot 10^9$.

Дифракционная решетка, имеющая 1000 штрихов/мм, освещается параллельным пучком монохроматического света. Решетка перемещается со скоростью $v = 0,5$ см/с в направлении, указанном на рис. 8.15. В фокальной плоскости линзы установлена фильтрующая маска, пропускающая лишь 1-й и (-1)-й порядки дифракции.

Найдем, какова частота изменения тока фотоприемника, установленного в точке P_1 плоскости изображения, и чем отличаются токи фотоприемников, установленных в точ-

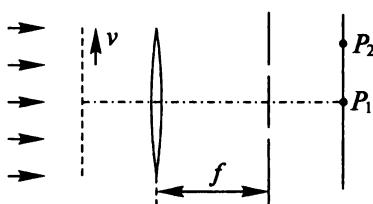


Рис. 8.15

как P_1 и P_2 (№ 8.64). При смещении решетки на расстояние $x = vt$ набег фазы для волн (± 1)-го порядка с учетом (8.6) изменяется на величину

$$\varphi = \pm k\Delta = \pm(2\pi/\lambda)vt\sin\theta = \pm(2\pi/\lambda)vt\lambda/d = \pm 2\pi vt/d.$$

Соответственно, разность между волнами первых порядков $\Delta\varphi = 4\pi vt/d$. Период колебаний тока определяется из условия $t = T$ и $\Delta\varphi = 2\pi$. Для частоты получаем $v = 1/T = 2v/d = 10$ кГц. Для (± 2)-х порядков $v = 4v/d = 20$ кГц. В точках P_1 и P_2 токи фотоприемников сдвинуты по фазе.

Двумерная решетка, плоскость которой перпендикулярна главной оптической оси линзы, освещается плоской, нормально падающей монохроматической волной. На рис. 8.16 точками показана картина дифракционных максимумов, которая возникает в фокальной плоскости линзы. Найдем отношение интенсивности максимума в точке с координатами $x = 2$, $y = 3$ (отмечена на рисунке крестиком) к интенсивности главного максимума ($x = 0$, $y = 0$). Отношение периода решетки к ширине щелей $d/b = 6$. Изобразим (по аналогии с рис. 8.16) картину дифракции, если двумерную решетку заменить двумя расположеными рядом одномерными решетками, как показано на рис. 8.17 (№ 8.108). Двумерная решетка эквивалентна двум одномерным решеткам со взаимно перпендикулярными щелями, расположенными непосредственно друг за другом. При дифракции на решетке с вертикальными щелями максимумы будут лежать на оси x , причем в соответствии с (8.6)

$$\sin\theta_m = m\lambda/d.$$

Из (8.3), имея в виду, что это квадрат амплитуды, и подставляя $\sin\theta_m$, получаем

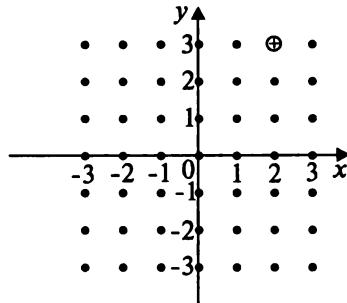


Рис. 8.16

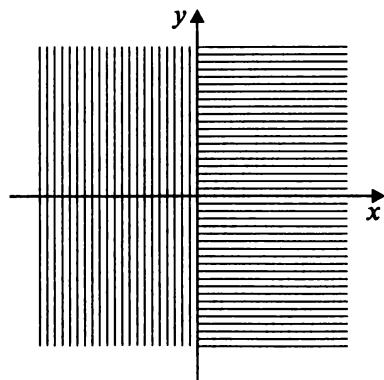


Рис. 8.17

$$A_m = A_0 \sin(\pi m b/d) / (\pi m b/d). \quad (8.26)$$

При дальнейшей дифракции на решетке с горизонтальными щелями каждый максимум расщепляется на серию максимумов, лежащих на прямой, параллельной оси y , углы между которыми вновь определяются (8.6)

$$\sin\theta_n = n\lambda/d.$$

Отношение амплитуд подобно (8.26)

$$\begin{aligned} A_{mn} &= A_m \sin(\pi nb/d) / (\pi nb/d) = \\ &= A_0 [\sin(\pi mb/d) / (\pi mb/d)] [\sin(\pi nb/d) / (\pi nb/d)]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

В фокальной плоскости максимумы имеют координаты

$$x_m = mf\lambda/d \text{ и } y_n = nf\lambda/d.$$

При $d/b = 6$, $m = 2$, $n = 3$ получаем $A_{23}/A_0 = [\sin(\pi/3)/(\pi/3)][\sin(\pi/2)/(\pi/2)] = 3\sqrt{3}/\pi^2 \approx 0,28$.

При дифракции на решетках, показанных на рис. 8.17, получаем только максимумы вдоль осей x и y . перекрестной дифракции нет: максимумы, кроме главного, не расщепляются.

Если потребуется найти, например, отношение максимумов интенсивности, находящихся в точках с координатами $x = 1$, $y = 2$ и $x = -1$, $y = 0$ соответственно (№ 8.109), то надо просто воспользоваться (8.27), учитывая, что интенсивность равна квадрату амплитуды

$$I_{(1,2)}/I_{(-1,0)} = \sin^2(\pi 2b/d)/(\pi 2b/d)^2 = \sin^2(2\pi/3)/(2\pi/3)^2 = 0,17.$$

Если двумерную решетку заменить двумя рядом расположеными одномерными решетками (рис. 8.18), то одна серия максимумов разместится вдоль оси x , а другая — также по прямой, проходящей через $(0, 0)$, и перпендикулярной наклонным штрихам.

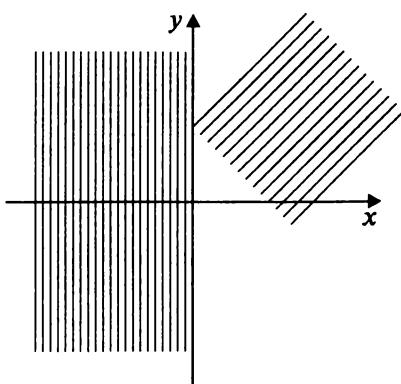


Рис. 8.18

Параллельный пучок импульсного лазера с длительностью импульса 1 пс (10^{-12} с) падает нормально на дифракционную решетку с высоким разрешением. Излучение, дифрагированное под углом $\theta = 45^\circ$ к оси падающего пучка, регистрируется быстро-

действующим фотоприемником, установленным в фокусе удаленного от решетки объектива диаметром $D = 3$ см. Оценим длительность импульсов, регистрируемых фотоприемником. Считаем, что оптическая плоскость объектива установлена перпендикулярно оси дифрагированного пучка, разрешение определяется дифракцией на объективе (№ 8.45). Число щелей решетки, от которых пучки попадают на объектив, можно определить из геометрии $N = D/(\cos\theta d)$. Учитывая условие максимума (8.6) и то, что импульсы в направлении угла θ отстают на каждом периоде решетки на

$$\tau = ds\sin\theta/c, \quad (8.28)$$

где c — скорость света, получаем длительность импульса в направлении угла θ

$$T = \tau N = D\sin\theta/(c\cos\theta). \quad (8.29)$$

Для угла $\theta = 45^\circ$ находим $T = D/c = 10^{-10}$ с.

Импульсное излучение с длительностью импульсов $\tau_0 = 1$ пс и длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм падает на дифракционную решетку с разрешающей способностью $R = 3400$. Оценим отношение длительности импульсов за решеткой и длительности падающих импульсов (№ 8.46). Используя (8.28), (8.29) и (8.20), получаем $T \approx R\lambda/c + \tau_0 \approx 6 \tau_0$.

Излучение неодимового лазера с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм представляет собой **последовательность ультракоротких импульсов**, следующих с интервалом $\tau = 1$ нс. Излучение падает нормально на решетку с числом штрихов $n = 1500$ штрих/см. Найдем, каков минимальный размер L решетки, с помощью которой можно разрешить структуру спектра излучения во 2-м порядке дифракции (№ 8.47). Используя (8.20), для разрешающей способности решетки получаем

$$R = \lambda/\delta\lambda = v/\delta v = c/(\lambda\delta v) = c\tau/\lambda = mN = mL/d = mLn$$

откуда $L = c\tau/(\lambda mn) = 100$ см.

Импульсное излучение лазера с длительностью импульсов $\tau = 10$ пс проходит через спектрометр с дифракционной решеткой с максимальной оптической разностью хода $\Delta = 10$ см. Найдем изменение **ширины полосы** излучения $\Delta\omega_2/\Delta\omega_1$ (№ 8.52). Учитывая запаздывание, аналогично (8.28), имеем для $\tau_2 \approx \Delta/c$, $\tau_1 = \tau$. Поэтому $\Delta\omega_2/\Delta\omega_1 = \tau_1/\tau_2 \approx c\tau/\Delta = 3 \cdot 10^3$.

Лазер испускает световые импульсы с центральной длиной волны 0,6 мкм с длительностью $\tau = 1$ пс и **скважностью** (отноше-

ние периода повторения импульсов к длительности каждого из них) 10^3 . Это излучение пропускается через монохроматор с разрешающей способностью $R = 5 \cdot 10^4$. Оценим скважность импульсов Q по выходе из монохроматора (№ 8.53). Как и в предыдущих задачах используем (8.6), (8.20), а также (8.28) и (8.29)

$$\tau_2 \approx mN\lambda/c \approx 10^{-10} \text{ с.}$$

Считая период повторения импульсов тем же самым и учитывая, что длительность импульса увеличилась в 100 раз, для новой скважности получаем $Q = 10$.

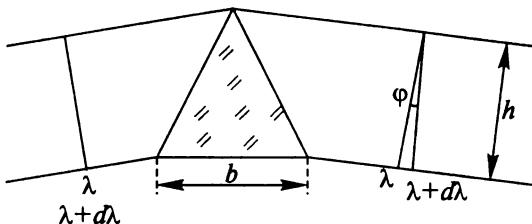


Рис. 8.19

Найдем величину наименьшего основания призмы b , изготовленной из стекла, дисперсия которого вблизи D -линии натрия $|dn/d\lambda| = 956 \text{ см}^{-1}$, чтобы призма смогла разрешить желтый дублет натрия ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$) (№ 8.2). На рис. 8.19 показан ход лучей через призму. Выбираем наклон таким образом, чтобы внутри призмы лучи шли приблизительно вдоль основания призмы. Так как длины волн несколько различаются, а показатель преломления зависит от длины волны, то в результате имеем сдвиг фаз для разных длин волн. Разность хода $b dn$. Угол расхождения лучей (поворот фронтов), отличающихся по длине волны на $d\lambda$, определяем из $\operatorname{tg}\phi = b dn/h$. Минимум получаем в направлении, для которого, как и в случае щели, разность оптических длин равна λ , поэтому $\lambda = b dn$. Откуда разрешающая способность

$$R = \lambda/d\lambda = b |dn/d\lambda|. \quad (8.30)$$

Учитывая условие, получаем $R = (1/2)(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_1)$.

В результате

$$b = (\lambda_1 + \lambda_2)/[2(\lambda_2 - \lambda_1)dn/d\lambda] = 1 \text{ см.}$$

Заметим, что стекло обладает так называемой **нормальной дисперсией** ($dn/d\lambda < 0$). Подтверждение этому следует из расположения цветов при разложении белого света призмой (рис. 8.20). Уве-

личение угла α , а, следовательно, и $n = \sin\alpha/\sin\beta$ происходит при уменьшении λ . Напомним, что при прохождении белого света через дифракционную решетку главные максимумы совпадают и дают белый свет, а первые максимумы начинают расходиться. При этом в соответствии с (8.6) угол отклонения тем больше, чем больше длина волны, т. е. при прохождении через призму осуществляется в обратном порядке.

На рис. 8.21 показано преломление параллельного пучка света в призме при симметричной ее установке, когда угол θ отклонения пучка от первоначального направления минимален и достигается наибольшая разрешающая сила. В этом случае $\theta = 2\alpha - A$, где α — угол падения; A — угол при вершине призмы. Для угловой дисперсии, обусловленной зависимостью показателя преломления материала призмы от длины волны, имеем

$$D_\theta = \delta\theta/\delta\lambda = (\delta\theta/\delta n)(\delta n/\delta\lambda) = 2(\delta\alpha/\delta n)(\delta n/\delta\lambda). \quad (8.31)$$

Так как оптическая длина пути луча, идущего вдоль основания призмы, равна сумме длин BA и AC , то $nb = 2l\sin\alpha$, где l — длина ребра призмы. Поэтому $b\delta n = 2l\cos\alpha\delta\alpha$ и $\delta\alpha/\delta n = b/(2l\cos\alpha)$. Для ширины пучка имеем $D = l\cos\alpha$. Подставляя это в (8.31), находим угловую дисперсию призмы

$$D_\theta = (b/D)\delta n/\delta\lambda. \quad (8.32)$$

Подставляя это в (8.30) получаем разрешающую силу

$$R = \lambda/\delta\lambda = b(\delta n/\delta\lambda) = D_\theta D. \quad (8.33)$$

Обратим внимание, что разрешающая сила призмы пропорциональна длине основания призмы и не зависит от преломляющего угла A . Однако с увеличением угла A уменьшается D , и, как видно из (8.32), возрастает угловая дисперсия. Максимальный угол A ограничивается полным внутренним отражением при выходе из призмы. Находится он из соотношения $\sin(A/2) = 1/n$.

Спектрограф имеет стеклянную призму с основанием $b = 10$ см и преломляющим углом $A = 60^\circ$, устанавливаемую при работе на

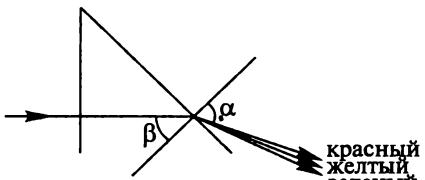


Рис. 8.20

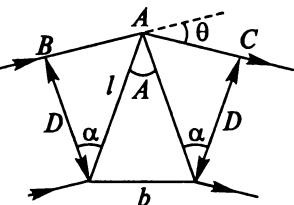


Рис. 8.21

угол наименьшего отклонения вблизи длины волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Показатель преломления стекла призмы $n = 1,73$; фокусное расстояние объектива коллиматора $f = 25 \text{ см}$. Найдем, какова должна быть ширина коллиматорной щели a , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы (№ 8.3). Для теоретической разрешающей способности призмы имеем (8.30)

$$R = \lambda/d\lambda = b|dn/d\lambda|.$$

Здесь $d\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, разрешаемых призмой при бесконечно узкой коллиматорной щели. Разность показателей преломления для этих спектральных линий $\delta n = \lambda/b$. Благодаря различию в показателях преломления первоначально параллельный пучок лучей на выходе из призмы становится расходящимся. Рассчитаем угловое расхождение вышедшего пучка в предположении, что на призму падал параллельный пучок.

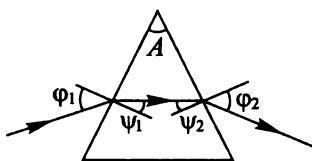


Рис. 8.22

На рис. 8.22 показан ход лучей в призме. Для углов падения и преломления имеем: $\sin\phi_1 = nsin\psi_1$. Отсюда при постоянном ϕ_1

$$\delta n sin\psi_1 + n cos\psi_1 \cdot \delta\psi_1 = 0.$$

Так как $\psi_1 + \psi_2 = A = \text{const}$ и, следовательно, $\delta\psi_1 + \delta\psi_2 = 0$, то

$$\delta n sin\psi_1 = n cos\psi_1 \cdot \delta\psi_2$$

Далее, из $\sin\phi_2 = nsin\psi_2$ находим угловое расхождение вышедшего пучка

$$\begin{aligned} \delta\phi_2 &= (\sin\psi_2/\cos\phi_2)\delta n + (n\cos\psi_2/\cos\phi_2)\delta\psi_2 = \\ &= [\sin\psi_2/\cos\phi_2 + (n\cos\psi_2/\cos\phi_2)\sin\psi_1/(n\cos\psi_1)]\delta n. \end{aligned}$$

При установке на угол наименьшего отклонения ($\phi_1 = \phi_2 = \phi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$)

$$\delta\phi_2 = 2(\sin\psi/\cos\phi)\delta n = 2(\sin\psi/\cos\phi)(\lambda/b). \quad (8.34)$$

Для полного использования теоретической разрешающей способности призмы необходимо, чтобы угловая ширина коллиматорной щели ($\theta = a/f$) была мала по сравнению с $\delta\phi$. Это дает

$$a \ll 2(\sin\psi/\cos\phi)f\lambda/b.$$

Для $A/2 = \varphi = 30^\circ$, $n = 1,73$ получаем

$$a \ll 2(4 - n^2)^{-1/2} f\lambda/b = 2f\lambda/b = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Для сужения спектра излучения лазера на красителе, имеющего широкий спектр в окрестности длины волны $\lambda = 600 \text{ нм}$, внутри резонатора устанавливается призма Π под углом минимального отклонения (рис. 8.23). Оценим спектральную ширину $\delta\lambda$ излучения такого лазера, если

призма изготовлена из стекла, имеющего дисперсию $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$ в окрестности длины волны генерации, а преломляющий угол $A = 10^\circ$. В резонаторе лазера установлена также диафрагма диаметром $D = 0,5 \text{ см}$ (№ 8.58). Используем результаты, полученные в предыдущей задаче. Угол $\psi = A/2 = 5^\circ$ мал, как и φ . Чтобы воспользоваться формулой (8.34), запишем $\delta n = (dn/d\lambda)\delta\lambda$. Подставляя в формулу (8.34) и учитывая, что луч проходит через призму, отражается от зеркала и опять проходит через призму, для его отклонения от оси получаем $\Delta\varphi = 2A(dn/d\lambda)\delta\lambda$. Этот интервал длин волн будет усиливаться при отражениях от зеркал, если он меньше дифракционной расходимости лучей, определяемой диафрагмой $\Delta\varphi \leq \lambda/D$. Используя это, находим спектральную ширину $\delta\lambda = \lambda/(2DAdn/d\lambda) = 35 \text{ \AA}$.

Другой способ сузить спектр излучения лазера на красителе связан с использованием дифракционной решетки. Одно из зеркал резонатора заменено дифракционной решеткой, нормаль к которой составляет угол $\theta_0 = 60^\circ$ к оси резонатора. Определим ширину спектра $\delta\lambda$ такого лазера, если диаметр кюветы с красителем $D = 0,5 \text{ см}$ (№ 8.57). В соответствии с (8.9) для решетки имеем $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$. Дифференцируя это, получим $d\cos\theta d\theta = m\delta\lambda$. Интервал длин волн $\delta\lambda$ будет усиливаться, если он меньше расходимости лучей, определяемой дифракцией на границах кюветы $\delta\theta \leq \lambda/D$. Отсюда, учитывая (8.9) и то, что $\theta = -\theta_0$, получаем $\delta\lambda \leq \lambda^2 \operatorname{ctg}\theta/(2D) = 0,2 \text{ \AA}$.

Стеклянная призма с основанием $b = 10 \text{ см}$ изготовлена из тяжелого флинта, дисперсия которого в окрестности $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ равна $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$. Найдем, какую максимальную разрешающую способность может иметь дифракционная решетка, ширина заштрихованной части которой равна длине основания этой приз-

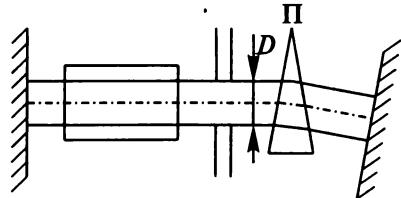


Рис. 8.23

мы. Сравним также разрешающую способность такой решетки с разрешающей способностью призмы (№ 8.66). Для максимального разрешения решетки надо использовать наклонное падение лучей на нее. Из (8.9), полагая $\theta = -\theta_0$, для абсолютного значения m получаем $m\lambda \leq 2d$ (так как синус не может быть больше единицы). Для решетки длиной b получаем число щелей $N = b/d$. Из (8.20) $R_{\text{реш}} = 2b/\lambda = 3,3 \cdot 10^5$. Используя (8.30), находим $R_{\text{реш}}/R_{\text{пр}} = (2/\lambda)/(dn/d\lambda) = 33$.

Ширина заштрихованной части дифракционной решетки равна длине основания призмы из **каменной соли**. Разрешающая способность решетки в 1-м порядке равна разрешающей способности призмы для длины волны $\lambda = 5150\text{\AA}$. Определим период решетки d , если показатель преломления каменной соли для длины волны $\lambda_1 = 4861\text{\AA}$ равен $n_1 = 1,5537$, а для длины волны $\lambda_2 = 5461\text{\AA}$ $n_2 = 1,5477$ (№ 8.67). Из (8.20) $R_{\text{реш}} = mN = mb/d$. Из (8.30) для призмы $R_{\text{пр}} = b dn/d\lambda = b |(n_2 - n_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)|$. Из равенства разрешающих способностей получаем $d = |\lambda_2 - \lambda_1|/m = 10^{-3}$ см.

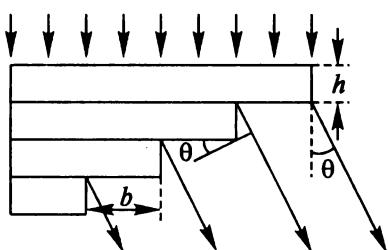


Рис. 8.24

Эшелон Майкельсона является разновидностью фазовой решетки. Он состоит из нескольких (30 – 40) пластин из однородного стекла (показатель преломления n). Толщина пластин ($h \approx 1–3$ см) строго одинакова с точностью до сотой доли длины волны света (λ). Пластины сложены подобно лестнице со сдвигом на b (рис. 8.24). Направление (угол θ) на главный интерференционный максимум определяется условием

$$nh + b\sin\theta - h\cos\theta = m\lambda. \quad (8.35)$$

При малых углах получаем (№ 8.101)

$$m = (n - 1)h/\lambda. \quad (8.36)$$

Дифференцируя это по λ , находим угловую дисперсию

$$\delta\theta/\delta\lambda = m/(b\cos\theta + h\sin\theta). \quad (8.37)$$

При малых углах дифракции

$$\delta\theta/\delta\lambda \approx m/b. \quad (8.38)$$

Используя (8.35), получаем

$$\delta\theta/\delta\lambda \approx (n - 1)h/(b\lambda). \quad (8.39)$$

Так как h и b — величины одного порядка, угловая дисперсия эшелона Майкельсона очень большая. Угловое расстояние между максимумами получаем дифференцированием (8.35) и равенством $\delta m = 1$ (№ 8.101):

$$\delta\theta = \lambda/b. \quad (8.40)$$

Для дисперсионной области эшелона Майкельсона из (8.24) и (8.35) имеем

$$G = \Delta\lambda = \lambda/m = \lambda^2/[(n - 1)h]. \quad (8.41)$$

Разрешающая способность эшелона Майкельсона без учета дисперсии показателя преломления стекла из (8.20) и (8.35)

$$\lambda/\delta\lambda = Nm = N(n - 1)h/\lambda. \quad (8.42)$$

Чтобы учесть дисперсию показателя преломления стекла, запишем (8.35) для длины волны $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ и соответственно $n' = n + (dn/d\lambda)\delta\lambda$

$$nh + b\sin\theta - h\cos\theta = m\lambda'.$$

В соответствии с критерием Релея разрешающая способность (8.20) определяется совпадением направления этого максимума с направлением на минимум для λ

$$nh + b\sin\theta - h\cos\theta = m\lambda + \lambda/N$$

откуда следует

$$\lambda/\delta\lambda = N(m - hd\lambda/d\lambda). \quad (8.43)$$

Эшелон Майкельсона состоит из $N = 30$ стеклянных пластинок с показателем преломления $n = 1,5$; толщина каждой из них $h = 1$ см. Найдем, какова должна быть длина b_{np} основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, что и рассматриваемый эшелон. Дисперсия показателя преломления призмы $dn_{np}/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$; длина волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ (№ 8.102). Используя (8.30) и (8.42), получаем $b_{np} = N(n - 1)h/\lambda = 2,6 \text{ м.}$

Десять тонких стеклянных плоскопараллельных пластинок толщиной $h = 1$ мм с показателем преломления $n = 1,5$ собраны в эшелон Майкельсона. Определим дисперсионную область G и разрешающую способность R эшелона в окрестности волны $\lambda = 500 \text{ нм}$. Оценим допустимый разброс толщины Δh плоскопарал-

лельных пластинок при их изготовлении (№ 8.104). Из (8.41) $G = \Delta\lambda = \lambda/m = \lambda^2/[(n - 1)h] = 0,5$ нм. Из (8.42) $\lambda/\delta\lambda = Nm = N(n - 1)h/\lambda = 10^4$. Допустимый разброс толщины пластинок определяется тем, что между волной после первой и волной после десятой пластины разность хода должна быть меньше $\lambda/2$ (чтобы не было противоположной фазы), т. е.

$$N(n - 1)\Delta h < \lambda/2,$$

откуда $\Delta h < \lambda/[2N(n - 1)] = \lambda/10 = 50$ нм.

Тонкие стеклянные плоскопараллельные пластины собраны в стопу, представляющую собой «лестницу» (эшелон Майкельсона) (см. рис. 8.24). Высоты ступенек одинаковы и равны b , показатель преломления n . На эшелон падает параллельный пучок света с длиной волны λ . Наблюдается дифракционная картина Фраунгофера в прошедшем свете. Известно, что два наиболее ярких дифракционных максимума имеют одинаковые интенсивности. Определим возможные значения толщины пластин h (№ 7.69). Распределение интенсивности в случае эшелона описывается (8.12). Откуда получаем $h = (m - 1/2)\lambda/(n - 1)$.

Интерферометр Фабри—Перо состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок P_1 и P_2 между которыми обычно находится воздух (рис. 8.25). Плоские поверхности пластинок, обращенные друг к другу, тщательно отшлифованы и имеют покрытие, обеспечивающее значительное отражение. Для достижения параллельности отражающих поверхностей используются специальные распорные кольца. Такие интерферометры называются эталонами Фабри—Перо. Наружные поверхности пластинок обычно образуют небольшие углы с внутренними, чтобы отраженный от них светлый блик не мешал наблюдению основной интерференционной картины. Интерференционная картина, получающаяся в фокальной плоскости линзы, состоит из концентрических колец равного наклона. При расстоянии между внутренними поверхностями

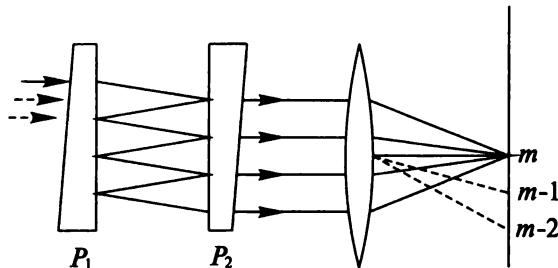


Рис. 8.25

ми пластин h , пользуясь (3.18), для определения направления на интерференционные максимумы (угол θ) получаем (№ 8.74)

$$2h\cos\theta = m\lambda. \quad (8.44)$$

Видно, что порядок интерференции m очень большая величина. При работе с эталоном Фабри—Перо в зеленой области спектра ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$), если расстояние между пластинками $h = 1 \text{ см}$, и углы малы (№ 8.76), порядок спектра из (8.44) равен $m \approx 36\ 300$.

Угловое расстояние между максимумами находим дифференцированием $-2h\sin\theta\delta\theta = \lambda \delta m$. При $\delta m = 1$ имеем

$$\Delta\theta = -\lambda/(2h\sin\theta). \quad (8.45)$$

Из (8.44) дифференцированием получаем угловую дисперсию

$$\delta\theta/\delta\lambda = -m/(2h\sin\theta). \quad (8.46)$$

Для малых углов θ имеем $h(2 - \theta^2) = m\lambda$. Отсюда определяем угловую дисперсию интерферометра Фабри—Перо

$$\delta\theta/\delta\lambda = -m/(2h\theta) = -1/(\lambda\theta). \quad (8.47)$$

Дисперсионная область в соответствии с (8.23), (8.24) и (8.44)

$$G = \Delta\lambda = \lambda/m = \lambda^2/(2h\cos\theta). \quad (8.48)$$

Большая угловая дисперсия является преимуществом интерферометра Фабри—Перо перед другими спектральными аппаратами, а малая дисперсионная область позволяет использовать его как фильтр.

При $h = 1 \text{ см}$, $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, считая угол θ малым (№ 8.75) получаем $\Delta\lambda = 0,125 \text{ \AA}$.

Разрешающую способность интерферометра Фабри—Перо можно определить, пользуясь следующим критерием. Для разрешения двух спектральных линий λ и λ' необходимо, чтобы в интерференционной картине, даваемой интерферометром, эти ли-

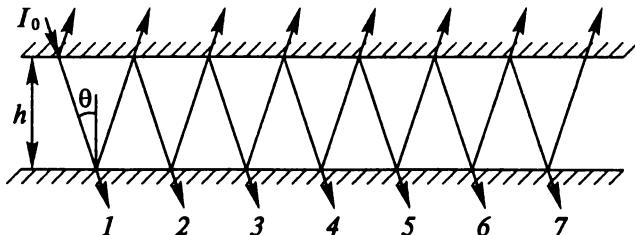


Рис. 8.26

нии были разведены на расстояние не меньше полуширины линии. Пользуясь этим критерием, найдем выражение для разрешающей способности интерферометра Фабри—Перо (№ 8.77). На рис. 8.26 схематически показан ход лучей в интерферометре Фабри—Перо. Пластиинки изображены прямыми линиями. Коеффициент отражения света по интенсивности от каждой отражающей поверхности обозначим ρ , а интенсивность падающего света I_0 . Учитывая, что коэффициент прохождения света $(1 - \rho)$ для интенсивностей прошедших пучков 1, 2, 3, ... получим

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - \rho)^2 I_0; \\ I_2 &= \rho^2(1 - \rho)^2 I_0; \\ I_3 &= \rho^4(1 - \rho)^2 I_0; \\ &\dots \end{aligned}$$

Так как интенсивность равна квадрату амплитуды, для амплитуд имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - \rho)A_0; \\ A_2 &= \rho(1 - \rho)A_0; \\ A_3 &= \rho^2(1 - \rho)A_0; \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь A_0 — амплитуда падающего света.

Каждый пучок запаздывает по фазе относительно предыдущего пучка на

$$\Delta = (2\pi/\lambda)2h\cos\theta, \quad (8.49)$$

где h — расстояние между отражающими плоскостями интерферометра; θ — угол падения.

С учетом запаздывания амплитуду результирующего колебания прошедшей волны можно представить в виде геометрической прогрессии:

$$A = A_0(1 - \rho)(1 + \rho e^{-i\Delta} + \rho^2 e^{-i2\Delta} + \dots) = A_0(1 - \rho)/(1 - \rho e^{-i\Delta}).$$

Интенсивность находим как произведение A на сопряженное A^*

$$\begin{aligned} I &= A_0^2(1 - \rho)^2/[(1 - \rho e^{-i\Delta})(1 - \rho i\Delta)] = \\ &= I_0(1 - \rho)^2/[(1 - \rho)^2 + 4\rho\sin^2(\Delta/2)]. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Относительную интенсивность прошедшего света называют функцией пропускания

$$I/I_0 = 1/[1 + (4\rho/\tau^2)\sin^2(kh\cos\theta)], \quad (8.51)$$

где $\tau = 1 - \rho$ коэффициент прохождения; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

При $\Delta = (2m + 1)\pi$ знаменатель в выражении (8.50) максимальен, и интенсивность минимальна: $I_{\min} = I_0(1 - \rho)^2/(1 + \rho)^2$, или $I_{\min} \approx (I_0/4)(1 - \rho)^2 \approx 0$, так как $\rho \approx 1$.

Интенсивность при $\Delta = 2m\pi$ достигает максимума $I_{\max} = I_0$. Максимальная интенсивность уменьшается вдвое, когда $(1 - \rho)^2 + 4\rho\sin^2(\Delta/2) = 2(1 - \rho)^2$, т. е.

$$4\rho\sin^2(\Delta/2) = (1 - \rho)^2. \quad (8.52)$$

Отличие входящего в формулу Δ от соответствующего максимуму обозначим $\delta\Delta$, тогда $\Delta = 2m\pi + \delta\Delta$ и $\sin(\Delta/2) = \cos(m\pi)\sin(\delta\Delta/2)$. Подставив это в (8.52) и учитывая малость синуса, получаем $\delta\Delta = (1 - \rho)/(1 - \rho)^{1/2}$.

Направление на половинную интенсивность линии с длиной волны λ определяется из условия

$$(2\pi/\lambda)2h\cos\theta = 2m\pi + \delta\Delta.$$

Для того же направления и половинной интенсивности большей длины волны λ' получаем

$$(2\pi/\lambda')2h\cos\theta = 2m\pi - \delta\Delta.$$

Расстояние между максимумами обеих линий равно полуширине линии, т. е. минимальному расстоянию, разрешаемому интерферометром.

Получаем $(\lambda + \lambda')/(\lambda' - \lambda) = 2m\pi/(\delta\Delta) = 2m\pi(\rho)^{1/2}/(1 - \rho)$. Ввиду близости линий λ и λ'

$$R = \lambda/\delta\Delta = m\pi(\rho)^{1/2}/(1 - \rho) \approx m\pi/(1 - \rho) \approx (\pi/\lambda)2h/(1 - \rho). \quad (8.53)$$

Это выражение можно записать в том же виде, что и для дифракционной решетки, т. е. $\lambda/\delta\Delta = N_{\text{зф}}m$. Роль эффективного числа штрихов играет величина

$$N_{\text{зф}} = \pi/(1 - \rho). \quad (8.54)$$

Полученные результаты справедливы и для случая, когда интерферометр работает в отраженном свете.

В эталоне Фабри—Перо для большого разрешения надо иметь много интерферирующих лучей (большое $N_{\text{зф}}$), т. е. большой коэффициент отражения ρ (доля отраженной энергии). Наибольшее m имеем при нулевом угле. Некоторые рассуждения приводят к следующему результату: для эталона Фабри—Перо

$$R = \lambda/d\lambda = 2\pi\rho^{1/2}m/(1 - \rho), \quad N_{\text{зф}} = 2\pi/(1 - \rho). \quad (8.55)$$

Зеркала интерферометра Фабри—Перо, имеющие коэффициент отражения $\rho = 99\%$ (по интенсивности), расположены на расстоянии $L = 1\text{ м}$ друг от друга. Эталон используется в качестве оптического резонатора на длине волны $\lambda = 0,63\text{ мкм}$. Пользуясь аналогией с колебательным контуром, определим добротность резонатора и ширину $\delta\nu$ резонансной кривой (в мегагерцах). Определим также частотный интервал $\Delta\nu$ между двумя соседними резонансами (№ 8.78). Резонанс возникнет, если волна, отразившись от одного, а потом от другого зеркала, будет в той же фазе. Для этого должно выполняться условие: $2L = m\lambda$. Ближайшая длина волны отличается на $\Delta\lambda$. И для нее $2L = (m - 1)(\lambda + \Delta\lambda)$, откуда $\Delta\lambda = \lambda/(m - 1) \approx \lambda/m$. Подставляя сюда предыдущее, получаем для частотного интервала $\Delta\nu = (\nu/\lambda)(\Delta\lambda/m) = c/(2L) = 150\text{ МГц}$ (здесь c — скорость света).

Относительные потери энергии после двух отражений за время $2L/c$ равны $2(1 - \rho)$. За период волны $T = 1/\nu = \lambda/c$ относительные потери энергии равны $\lambda(1 - \rho)/L$. Для добротности получаем (см. 3, с. 323, формула (9.29))

$$Q = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho)]. \quad (8.56)$$

Используя условия задачи, находим $Q = 10^9$. Для ширины резонансной кривой имеем (см. 3, с. 392, 393, формулы (10.42) и (10.44))

$$\delta\nu = \nu/Q = c/(\lambda Q). \quad (8.57)$$

Подставляя условия задачи, находим $\delta\nu = 0,5\text{ МГц}$.

Отсюда можно получить разрешающую способность интерферометра Фабри—Перо, наряду с (8.55)

$$R = \lambda/\delta\lambda = \nu/\delta\nu = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho)]. \quad (8.58)$$

Интерферометр Фабри—Перо состоит из двух одинаковых плоских зеркал с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,95$, расположенных на некотором расстоянии L друг от друга. На интерферометр нормально падает плоская волна, содержащая две спектральные компоненты $\lambda_1 = 546,740\text{ нм}$ и $\lambda_2 = 546,768\text{ нм}$. При изменении L интерферометр последовательно настраивается на пропускание одной из спектральных компонент (λ_1 или λ_2). Оценим минимальное L_{\min} и максимальное L_{\max} значения, при которых интерферометр способен отделить одну спектральную компоненту

от другой (№ 8.89). В соответствии с (8.58) разрешающая способность

$$R = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho)] \geq \lambda/(\lambda_2 - \lambda_1),$$

где $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Равенство дает значение минимального расстояния $L_{\min} \approx 0,0085$ см. Для того чтобы спектры не перекрывались, нужно чтобы дисперсионная область (8.24) с использованием (8.21) удовлетворяла условию $G = \lambda/m = \lambda^2/(2L) \geq \lambda_2 - \lambda_1$, откуда $L_{\max} = \lambda^2/[2(\lambda_2 - \lambda_1)] \approx 0,53$ см.

Излучение гелий-неонового лазера анализируется с помощью интерферометра Фабри–Перо. Спектральная линия излучения лазера совпадает с серединой линии поглощения неона на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. Оказалось, что пустой интерферометр Фабри–Перо в этих условиях имеет разрешающую способность $R_0 = 10^8$. Если пространство между зеркалами интерферометра заполнить разреженным неоном, то разрешающая способность падает до значения $R_1 = 0,8 \cdot 10^8$. Определим, какую часть энергии излучения поглощает неон на длине $l = 1$ м (№ 8.90). Обозначив энергетический коэффициент отражения ρ , расстояние между зеркалами интерферометра L и используя (8.58), получаем для разрешающей способности интерферометра $R_0 = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho)]$. Если кроме доли уходящей энергии $(1 - \rho)$ учесть долю поглощаемой на пути L (обозначим α_0), то для разрешающей способности имеем $R_1 = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho + \alpha_0)]$. Получаем

$$1/R_1 - 1/R_0 = \lambda\alpha_0/(2\pi L),$$

откуда $\alpha_0 = 2\pi L (1/R_1 - 1/R_0)/\lambda \approx 0,025 L$. Доля энергии, поглощаемой на длине l ,

$$\alpha_1 = \alpha_0 l/L = 0,025 = 2,5 \text{ \%}.$$

Определим время установления колебаний и добротность в оптическом резонаторе, используемом в лазерах (длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм) и состоящем из двух плоскопараллельных зеркал, расположенных на расстоянии $L = 100$ см друг от друга и имеющих коэффициент отражения по энергии $\rho_1 = 100 \%$ и $\rho_2 = 80 \%$. Явлением дифракции на краях зеркал пренебрежем (№ 8.81). Учитывая, что на одном из зеркал отражение без потерь, в формулу (8.56) надо добавить 2, т. е. $Q = 4\pi L/[\lambda(1 - \rho_2)]$. Подставив заданные параметры, получим $Q \approx 10^8$. Время установления

колебаний равно сумме задержек складываемых лучей. Используя (8.44), (8.20) и вводя скорость света c , находим

$$\tau = N \cdot 2L \cos\theta/c = mN\lambda/c = Q\lambda/c \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

Спектр лазерного импульса анализируется с помощью интерферометра Фабри—Перо, образованного зеркалами с коэффициентом отражения по энергии $\rho \sim 1$, находящимися на расстоянии L друг от друга. Оценим **длительность импульса** после прохождения через интерферометр (№ 8.93). Как и в предыдущей задаче, длительность импульса $\tau = N \cdot 2L \cos\theta/c$. Подставив (8.55), находим $\tau \sim 4\pi L/[(1 - \rho)c]$.

На резонатор Фабри—Перо с расстоянием между зеркалами (базой) $L = 0,5$ м и разрешающей способностью $R = 10^6$ падает **ультракороткий световой импульс** длительностью $\tau = 10^{-11}$ с и длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определим зависимость от времени сигнала, который зарегистрирует фотоприемник, установленный за резонатором Фабри—Перо (№ 8.91). Фотоприемник зарегистрирует серию импульсов длительностью τ , следующих друг за другом (в результате отражения от зеркал интерферометра) с задержкой $\Delta t = 2L/c$, где c — скорость света. Подставив параметры из условия, получим $\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-11}$ с. Уменьшение интенсивности импульсов связано с потерями энергии при отражениях и определяется добротностью (8.56), которая, как следует из (8.58), совпадает с разрешающей способностью $Q = R$. Изменение интенсивности $dI \sim \sim (I/R)d(t/T) \sim I(v/R)dt$. Отсюда следует, что интенсивность сигналов затухает с характерным временем $R/v = R\lambda/c \approx 1,6 \cdot 10^{-9}$ с. Можно просто воспользоваться (8.57).

Импульс видимого света длительностью τ падает на интерферометр Фабри—Перо параллельно его оси и затем фокусируется на чувствительную площадку фотоприемника. Расстояние между зеркалами интерферометра $L = 15$ см, коэффициент отражения зеркал по энергии $\rho = 0,99$. Оценим, при каком значении τ в фототоке возникнут **осцилляции**, имеющие затухающий характер. Оценим также частоту осцилляций v , характерное время T затухания и число N колебаний фототока за время T . Инерционность фотоприемника считаем достаточно малой (№ 8.98). Квазипериодические осцилляции фототока возникнут, если длительность импульса меньше задержки между складывающимися лучами вследствие отражения от зеркал, т. е. $\tau < 2L/c$, где c — скорость света. Получаем $\tau < 10^{-9}$ с. Соответственно, частота осцилляций $v = 10^9$ Гц. В соответствии с (8.56) и (8.57), как и в предыдущей задаче, для види-

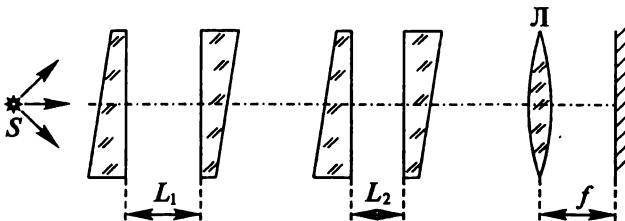


Рис. 8.27

мого света $Q \approx 1,5 \cdot 10^8$, характерное время затухания $T \approx \lambda Q/c \approx 3 \cdot 10^{-7}$ с, число колебаний за время затухания $N = T/\tau \approx 300$.

Излучение точечного монохроматического источника ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) проходит через резонатор Фабри—Перо (расстояние между зеркалами $L_1 = 25 \text{ см}$). Найдем, каково минимальное расстояние L_2 между зеркалами второго резонатора (рис. 8.27), если после его установки вслед за первым резонатором первые девять колец в фокальной плоскости линзы исчезают. Определим радиус первого оставшегося кольца. Фокусное расстояние линзы $f = 100 \text{ см}$ (№ 8.79). В соответствии с (8.44) при уменьшении h кольца сдвигаются к центру (θ уменьшается). Сдвигаясь к центру, кольца исчезают. Для первого резонатора $2L_1 = m\lambda$, $2L_1 \cos\theta_{10} = (m - 10)\lambda$, где θ_{10} — направление на 10-е кольцо, откуда

$$2L_1(1 - \cos\theta_{10}) = 10\lambda. \quad (8.59)$$

Условие того, что волна, образовавшая 10-е кольцо, пройдет через второй резонатор, $2L_2(1 - \cos\theta_{10}) = n\lambda$. Для малых углов $2L_2\theta_{10}/2 \approx n\lambda$. Первое кольцо и минимальное L_2 будет при $n = 1$. Используя (8.59), находим $L_2 = 0,1L_1 = 2,5 \text{ см}$. Так как $\theta_{10} = (\lambda/L_2)^{1/2} \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$, радиус кольца $R = f\theta = 0,45 \text{ см}$.

С помощью интерферометра Фабри—Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda = 0,2 \text{ нм}$. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий $\delta\lambda = 0,001 \text{ нм}$. Оценим максимальное значение коэффициента пропускания $\tau = 1 - \rho$ (где ρ — коэффициент отражения зеркал по энергии), при котором разрешаются соседние линии (№ 8.80). Из (8.24) дисперсионная область интерферометра Фабри—Перо $\Delta\lambda = \lambda/m = \lambda^2/(2L)$, где $m = 2L/\lambda$ — порядок интерференции; L — база интерферометра. В результате $L = L_{\max} = \lambda^2/(2\Delta\lambda)$. Из (8.57) разрешающая способность интерферометра $R = \lambda/\delta\lambda \approx 2\pi L[\lambda(1 - \rho)] = \pi\lambda[\Delta\lambda(1 - \rho)]$. Отсюда $\tau = 1 - \rho \approx \pi \delta\lambda/\Delta\lambda \approx 1,5 \%$.

Определим разрешающую способность спектрометра инфракрасного диапазона, работающего по следующему принципу. Излучение исследуемого ИК-источника в диапазоне $\lambda \approx 3$ мкм смешивается в нелинейном кристалле с излучением стабильного аргонового лазера. При этом возникает излучение на суммарной частоте, лежащей в оптическом диапазоне. Последнее анализируется с помощью интерферометра Фабри—Перо, зеркала которого отстоят друг от друга на расстояние $L = 1$ см и имеют коэффициент отражения по интенсивности $\rho = 0,9$ (№ 8.83). В интерферометре Фабри—Перо анализируется излучение с частотой $\omega = \omega_{\text{ик}} + \omega_n (\omega_n = \text{const})$. Для этой частоты разрешающая способность $R = \omega / \delta\omega = mN$. Из (8.44) $m_{\max} = L/\lambda = L\omega/(\pi c)$. Используя (8.54), получаем $R = \omega / \delta\omega = L\omega/[c(1 - \rho)]$. Откуда $\delta\omega = c(1 - \rho)/L$. Так как $\delta\omega = \delta(\omega_{\text{ик}} + \omega_n) = \delta\omega_{\text{ик}}$, то $R_{\text{ик}} = \omega_{\text{ик}} / \delta\omega_{\text{ик}} = \omega_{\text{ик}} L / [c(1 - \rho)] = 2L\pi / [\lambda_{\text{ик}}(1 - \rho)] \approx 2 \cdot 10^5$.

В интерферометре Фабри—Перо с открытым воздушным про-межутком между зеркалами при температуре $T_1 = 293$ К наблюдается одно из колец равного наклона, угловой размер которого $\theta_1 = 0,01$ рад. При повышении температуры кольцо стягивается к центру и исчезает. Найдем температуру T_2 , при которой это произойдет, если для воздуха при температуре T_1 разность $n - 1 = 0,00029$, где n — показатель преломления. (Для воздуха разность $n - 1$ пропорциональна его плотности) (№ 8.84). Уравнение (8.44) в случае, когда между зеркалами находится среда с показателем преломления n , приобретает вид

$$2Ln\cos\theta = m\lambda, \quad (8.60)$$

где θ — угол наклона лучей; L — база интерферометра.

Для выбранного кольца $m = \text{const}$, поэтому при изменении температуры будем иметь: $n_1\cos\theta_1 = n_2\cos\theta_2$, или

$$n_1(1 - \theta_1^2/2) = n_2(\theta_2 = 0). \quad (8.61)$$

Оптическая плотность определяется показателем преломления, умноженным на расстояние, т. е. количеством частиц, взаимодействующих со светом. Это количество останется тем же, если сжать среду, увеличив ее плотность (ρ). Отсюда можно сделать вывод, что $(n - 1) \sim \rho$. Предполагая, что воздух описывается уравнением состояния идеального газа (см. 2, с. 8), и давление его при изменении температуры не меняется, получаем $n - 1 = A/T$, где A — постоянная величина, которую находим из условия $A =$

$= (n_1 - 1)T_1 = 0,08497$. Используя (8.61), находим $n_1(1 - \theta_1^2/2) = n_2 = 1 + A/T_2 = 1,00024$. Откуда $T_2 = 354$ К.

Точно изготовленный интерферометр Фабри—Перо с расстоянием между зеркалами $L = 1$ см освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм (гелий-неоновый лазер). Найдем, сколько интерференционных колец «исчезнет», если откачать воздух между зеркалами. Показатель преломления воздуха $n = 1,00029$. Оценим минимальную немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника света, при которой интерференционные кольца в центре картины окажутся полностью размытыми (№ 8.107). Используя (8.60) при $\theta = 0$, находим порядок интерференции: $m = 2Ln/\lambda$. Число исчезающих колец $\Delta m = 2L\Delta n/\lambda \approx -9,2$, т. е. исчезнут 9 колец. Немонохроматичность источника определяется дисперсионной областью интерферометра (8.48): $\Delta\lambda = \lambda/m = \lambda/(2L) \approx 0,02$ нм.

Интерферометр Фабри—Перо образован двумя зеркалами с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,95$, разнесенным на расстояние $L = 10$ мм. Интерференционная картина фиксируется на фотопластинке. Оценим величину допустимых изменений атмосферного давления в лаборатории за время экспозиции. Показатель преломления воздуха связан с атмосферным давлением p (в паскалях) соотношением $n = 1 + 28 \cdot 10^{-10} p$. Длина волны $\lambda = 5000$ Å (№ 8.86). Из (8.55) для разрешающей способности имеем $R = \lambda/\delta\lambda = 2\pi m(\rho)^{1/2}/(1 - \rho)$. Учитывая, что n близко к 1, а угол θ мал, из (8.44) получаем $m \approx 2L/\lambda$ и $R \approx 4,8 \cdot 10^6$. Допустимые изменения длины волны определяются сохранением возможности разрешения и равны

$$\delta\lambda \approx \lambda/R. \quad (8.62)$$

Условие максимума определяется (8.60). Подставляя n и дифференцируя, получаем $2L \cdot 28 \cdot 10^{-10} \cos\theta \cdot \delta p = m\delta\lambda \leq m \lambda/R$. Отсюда, используя (8.44), находим $\delta p \leq (1 + 28 \cdot 10^{-10} p)/(28 \cdot 10^{-10} R) \approx 0,7 \cdot 102$ Па.

Интерферометр Фабри—Перо образован двумя зеркалами с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,9$, разделенными кольцом из инвара толщиной $h_0 = 100$ мм. Интерференционная картина фиксируется на фотопластинке. Оценим допустимое изменение температуры в лаборатории за время экспонирования, если коэффициент линейного расширения инвара $\alpha = 9 \cdot 10^{-7}$ К⁻¹; длина волны $\lambda = 5000$ Å (№ 8.85). Толщина кольца из инвара при изменении температуры $h = h_0(1 + \alpha T)$. Подставляя это в (8.44), имеем

$$2h_0(1 + \alpha T)\cos\theta = m\lambda. \quad (8.63)$$

Отсюда $m \approx 2h/\lambda$. Дифференцируя (8.63) и используя (8.62), получаем

$$2h\cos\theta\delta T = m\delta\lambda \leq m\lambda/R.$$

Используя (8.63), находим $\delta T \leq (1 + \alpha T)/(\alpha R) \approx 1/(\alpha R) \approx 0,05$ К.

На интерферометр Фабри—Перо, состоящий из двух одинаковых зеркал диаметром $D = 1$ см, падает свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Интерференционная картина наблюдается с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, и имеет вид концентрических колец. Первое кольцо имеет угловой радиус $\theta = 10^{-2}$ рад. Оценим максимальную разрешающую способность спектрального прибора в этих условиях (№ 8.87). Используя формулу (8.47) для угловой дисперсии, получаем для разрешающей способности $R = \lambda/\delta\lambda = 1/(0\delta\theta)$. Минимальный угол $\delta\theta$ должен выходить за пределы дифракционного пятна (7.17). В таком случае $R \leq D/(0\lambda) = 2 \cdot 10^6$. Существует и другой способ, основанный на (8.20). Обозначим расстояние между зеркалами h . Тогда из (8.44) $m_{\max} \approx 2h/\lambda$. Число интерферирующих лучей $N = D/(2\theta h)$, поэтому

$$R = m_{\max}N = D/(0\lambda). \quad (8.64)$$

На интерферометр Фабри—Перо, состоящий из двух одинаковых зеркал, падает пучок света с длиной волны $\lambda \approx 0,5$ мкм. Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 10$ см и имеет вид концентрических колец. Первое кольцо имеет диаметр $d = 1$ см. Оценим максимальную разрешающую способность спектрального прибора в этих условиях (№ 8.88). Угловой радиус первого кольца $\theta = d/(2f)$ подставим в (8.64): $R = D/(0\lambda) = 2fD/(d\lambda) = 10^6$.

Найдем максимальную и минимальную амплитуду колебаний поля внутри резонатора Фабри—Перо, настроенного в резонанс с нормально падающей монохроматической волной амплитуды A_0 . Коэффициент отражения зеркал по интенсивности $\rho = 0,95$. Поглощением света пренебрегаем (№ 8.94). При резонансе волны, идущие внутри зеркал слева направо, имеют одинаковую фазу. Так же и волны, идущие внутри зеркал справа налево, имеют одинаковую фазу, которая может совпадать с фазой волн, идущих слева направо, а может быть противоположной. Это зависит от расстояния между зеркалами. Подсчитаем отдельно сумму амплитуд волн, идущих слева направо (A_1), и сумму волн, идущих справа налево (A_2). Обозначим коэффициент отражения по амплитуде $R = (\rho)^{1/2}$, а коэффициент пропускания по амплитуде $T = (1 - \rho)^{1/2}$. Тогда

$$A_1 = A_0 T(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = A_0 T / (1 - \rho) = A_0 / (1 - \rho)^{1/2};$$

$$A_2 = A_0 T R (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = A_0 T R / (1 - \rho) = A_1 R.$$

Здесь суммируется геометрическая прогрессия.

В результате

$$A_{\max} = A_1 + A_2 = A_1 (1 + R) = A_0 [1 + (\rho)^{1/2}] / (1 - \rho)^{1/2} \approx 8,8 A_0;$$

$$A_{\min} = A_1 - A_2 = A_1 (1 - R) = A_0 [1 - (\rho)^{1/2}] / (1 - \rho)^{1/2} \approx 0,11 A_0.$$

Оценим разрешающую способность интерферометра Фабри—Перо, если отношение максимальной и минимальной амплитуд колебаний поля внутри интерферометра, освещаемого плоской нормально падающей волной ($\lambda = 600$ нм), $\alpha = A_{\max}/A_{\min} = 90$. Расстояние между зеркалами $L = 400$ см (№ 8.95). Используя результаты предыдущей задачи, получаем

$$\rho = (\alpha - 1)^2 / (\alpha + 1)^2 \approx 0,957.$$

Из (8.58) для разрешающей способности находим

$$\lambda/\delta\lambda = 2\pi L / [\lambda(1 - \rho)] \approx 10^7.$$

Видимый свет от квазимонохроматического источника с шириной спектральной линии $\Delta\nu = 10^9$ Гц падает на интерферометр Фабри—Перо параллельно его оси и затем фокусируется на чувствительную площадку фотоприемника (рис. 8.28). Оценим значение расстояния L между зеркалами интерферометра и их коэффициент отражения по энергии ρ , чтобы в фототоке можно было зарегистрировать **осцилляции** за время измерения $T \approx 10^{-7}$ с. Считаем, что время реакции фотоприемника на изменение интенсивности света не превышает 10^{-9} с (№ 8.99). Ширина спектральной линии источника определяет длительность светового цуга (5.7) $\tau \sim 1/\Delta\nu$. Если задержка луча из-за отражений от зеркал окажется больше τ , то будут зарегистрированы осцилляции в фототоке, т. е. для этого $2L/c \geq \tau \approx 1/\Delta\nu$, где c — скорость света. Откуда

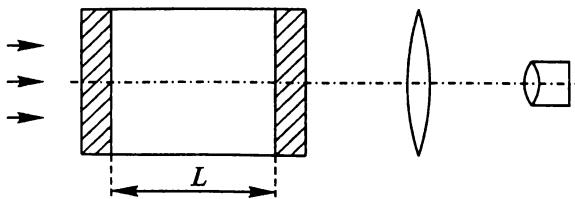


Рис. 8.28

$L \geq c/(2\Delta\nu)$. Имея в виду, что максимальный порядок интерференции из (8.44) $m = 2L/\lambda$, и используя (8.55), находим

$$\lambda/\delta\lambda = \omega/\delta\omega = [2\pi(\rho)^{1/2}/(1 - \rho)](2L/\lambda).$$

Подставив $\lambda = 2\pi c/\omega$, получим $\delta\omega = c(1 - \rho)/[(\rho)^{1/2}2L]$. Возможность регистрации таких изменений частоты определяется временем измерения, т. е. $\delta\omega \sim 2\pi/T$. Так как ρ близко к единице, то $1 - \rho \approx 2\pi 2L/(cT) \approx 0,03$ или $\rho = 0,97$.

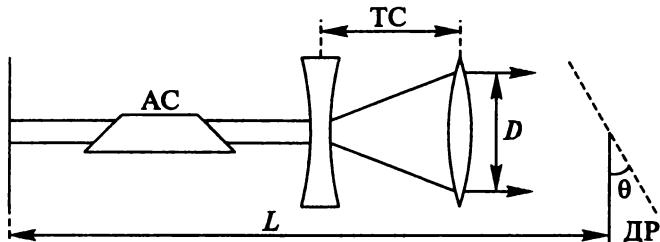


Рис. 8.29

Для выделения одной моды из большого числа мод, генерируемых газовым лазером, предлагается использовать модифицированный резонатор Фабри—Перо, одно из зеркал которого заменено наклонной отражательной дифракционной решеткой (ДР) (рис. 8.29). Внутри резонатора располагается наряду с активной средой (АС) телескопическая система (ТС), предназначенная для расширения светового пучка, падающего на решетку. Найдем минимальный размер D , до которого нужно расширить пучок, чтобы можно было выделить одну моду. Длина резонатора $L = 15$ см, длина волн генерации $\lambda = 1,2$ мкм, решетка имеет $N = 1600$ штрих/мм. Используется дифракция в 1-м порядке (№ 8.56). Условие автоколлимации (обратного отражения на дифракционной решетке) в 1-м порядке $2ds\sin\theta = \lambda$, где $d = 1/N$; θ — угол наклона решетки. Отсюда получаем $\sin\theta = \lambda N/2$, $\cos\theta = [1 - (\lambda N/2)^2]^{1/2}$. Используя (8.45), находим для интерферометра Фабри—Перо угловое расстояние между максимумами $\Delta\theta = -\lambda/(2L\sin\theta)$. Из (8.47) угловая дисперсия $\delta\theta/\delta\lambda = -1/(\lambda \operatorname{tg}\theta)$. Поэтому интервал между максимумами $\Delta\lambda = (\delta\lambda/\delta\theta) \Delta\theta = \lambda^2/(2L\cos\theta)$. Имеем $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\nu/\nu \approx \lambda/(2L)$. Используя (8.17) и (7.17) для дифракционной решетки, получаем $\Delta\theta = m\Delta\lambda/(d\cos\theta) \geq \lambda/D$. При $m = 1$ и $d = 1/N$ находим

$$D \geq 2L\cos\theta/(N\lambda) = L[1 - (\lambda N/2)^2]^{1/2}/(\lambda N/2) \approx 4,4 \text{ см.}$$

При нормальном падении на плоскопараллельную пластинку из непоглощающего материала параллельного пучка монохроматического излучения, длина волны которого перестраивается непрерывно, коэффициент пропускания пластиинки «осциллирует» так, что его соседние максимумы приходятся на длины волн 720, 840 мкм и т. д. Найдем показатель преломления материала пластиинки, если ее толщина $L = 1,2$ мм (№ 8.73). Для прохождения через пластиинку должно выполняться условие как для интерферометра Фабри—Перо, заполненного веществом (8.60). Получаем

$$2L\cos\theta = m\lambda_1, \quad 2L\cos\theta = (m + 1)\lambda_2.$$

Исключая m , находим $n = 1/[2L\cos\theta(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)] \approx \lambda_1\lambda_2/[2L(\lambda_2 - \lambda_1)] = 2,1$.

В интерферометре Фабри—Перо среда между зеркалами обладает дисперсией (зависимостью показателя преломления от длины волны света). При изменении длины волны света λ на величину $\Delta\lambda$ наблюдаемые интерференционные кольца сдвигаются так, что каждое кольцо перемещается на место соседнего кольца. Предполагая, что база интерферометра $L \gg \lambda$, вычислим дисперсию показателя преломления среды $\delta n/\delta\lambda$ (№ 8.82). Из (8.44) направления на максимумы $2L\cos\theta = m\lambda$. Дифференцируя по λ , получаем: $(\delta n/\delta\lambda)\cos\theta - n\sin\theta \delta\theta/\delta\lambda = m/(2L)$. Разрешаем относительно угловой дисперсии $\delta\theta/\delta\lambda = (\delta n/\delta\lambda - n/\lambda)\cos\theta/(n\sin\theta)$. Используя выражение для углового расстояния $\Delta\theta$ между максимумами (8.45), получим

$$\Delta\lambda = (\delta\lambda/\delta\theta)\Delta\theta = -[\lambda/(2L\sin\theta)]/[(\delta n/\delta\lambda - n/\lambda)\cos\theta/(n\sin\theta)].$$

Используя малость угла θ , находим $\delta n/\delta\lambda = n/\lambda - \lambda/(2L\Delta\lambda)$.

Плоский пучок монохроматического света шириной D падает нормально на плоский резонатор Фабри—Перо. Оценим добротность резонатора Q , при которой диаметр пучка на выходе резонатора возрастает приблизительно в 3 раза. Длина волны падающего света отвечает максимуму пропускания резонатора (№ 8.92). Используя (8.51), получаем, что для малых углов θ , максимум пропускания имеет место при $kh = \pi t$. Из (8.53) и (8.56) добротность резонатора $Q = 2\pi(p)^{1/2}/\tau$. Соответственно для малых углов θ

$$I/I_0 = 1/(1 + Q^2\theta^4/4).$$

Из-за дифракции на зеркалах угол θ лежит в интервале $-\lambda/D \leq \theta \leq \lambda/D$.

Диаметр выходного пучка возрастет в 3 раза, если резонатор будет пропускать волны в угловом диапазоне — $\lambda/(3D) \leq \theta \leq \lambda/(3D)$. Полагая $Q^2\theta^4/4 \approx 1$, имеем $Q \approx 2/\theta^2 \approx 18D^2/\lambda$.

На испаряющуюся прозрачную пленку нормально падает излучение лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Контроль толщины пленки осуществляется путем измерения интенсивности прошедшего излучения, которая периодически изменяется в процессе испарения, так что $I_{\min}/I_{\max} = 0,84$. Пренебрегая поглощением света, определим, при какой минимальной толщине интенсивность прошедшего света достигнет максимального значения (№ 8.96). Для прозрачной пленки предполагаем, что коэффициент отражения по амплитуде $r \ll 1$. В таком случае можно ограничиться так называемым двулучевым приближением, т. е. учитывать только сразу прошедший луч и луч, испытавший отражение от задней и передней границ пленки. Введем коэффициент прохождения по амплитуде s . Пренебрегая поглощением света в пленке, из закона сохранения энергии имеем: $s^2 = 1 - r^2$. Для отношения амплитуд прошедшего и падающего света получаем

$$E_{\text{прош}}/E_{\text{пад}} = s^2 + s^2 r^2 e^{\delta},$$

где $\delta = kln$ (k — волновое число; l — толщина пленки; n — показатель преломления пленки).

Для отношения интенсивностей находим

$$\begin{aligned} I_{\text{прош}}/I_{\text{пад}} &= |E_{\text{прош}}/E_{\text{пад}}|^2 = s^4 (1 + r^2 e^{\delta})(1 + r^2 e^{-\delta}) = (1 - r^2)^2 \times \\ &\quad \times (1 + r^4 + 2r^2 \cos \delta) \approx 1 + 2r^2 \cos \delta - 2r^2. \end{aligned}$$

Отсюда $I_{\max} = 1$, $I_{\min} = 1 - 4r^2$. Используя условие задачи и (2.35), имеем: $r^2 = 0,04 = (n - 1)^2/(n + 1)^2$ и $n = 1,5$. Чтобы лучи были в одной фазе, должно быть $\delta = 4\pi n l_{\min}/\lambda = 2\pi$. Откуда $l_{\min} = \lambda/(2n) = 210$ нм.

На подложке осаждается прозрачная пленка, контроль толщины которой производится путем измерения доли (по энергии) отраженного назад излучения лазера с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. По мере увеличения толщины пленки эта доля осциллирует, принимая минимальное значение, равное $2 \cdot 10^{-2}$. Найдем, какова толщина пленки в эти моменты. Излучение падает нормально к поверхности пленки. Коэффициент отражения на границе пленка-подложка (по амплитуде) $r_n = -1/7$. Рассмотрим двулучевое приближение (№ 8.97). Обозначим коэффициент отражения на границе воздух-пленка r , коэффициент прохождения на границе воздух-пленка s . Складываем отразившийся луч с лучом, прошедшим в пленку, отразившимся от подложки и прошедшим через

границу. Учитывая, как и в предыдущей задаче, что $s^2 = 1 - r^2$, получаем

$$E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}} = r + r_n(1 - r^2) e^\delta, \quad .$$

где, как и в предыдущей задаче, $\delta = 4\pi nl/\lambda$.

Отношение интенсивностей

$$I_{\text{отр}}/I_{\text{пад}} = |E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}|^2 = [r + r_n(1 - r^2)e^\delta][r + r_n(1 - r^2)e^{-\delta}] = \\ = r^2 + r_n^2(1 - r^2)^2 + 2rr_n(1 - r^2)\cos\delta \approx r^2 + r_n^2 + 2rr_n\cos\delta.$$

Так как r и r_n отрицательны, для минимума интенсивности отраженной волны должно выполняться: $\cos\delta = -1$. Используя (2.32), находим $n = 1,8$. Из соотношения $\delta = 4\pi nl/\lambda = \pi(2m + 1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ Откуда

$$l_m = (2m + 1)\lambda/(4n) = 8,7 \cdot 10^{-2} (2m + 1).$$

Пластинка Луммера—Герке представляет собой плоскопараллельную пластинку из однородного стекла или плавленого кварца (показатель преломления n) толщиной (h) от 3 до 10 мм и длиной (L) до 30 см. Один конец пластиинки скошен или снабжен специальной призмой, чтобы свет входил в пластиинку нормально к поверхности, и не было потерь на отражение (рис. 8.30). Направление падающих лучей подбирается таким образом, чтобы угол падения на границе стекло-воздух (ψ) был близок к углу полного внутреннего отражения. В таком случае коэффициент отражения близок к единице. Лучи испытывают многократные отражения и выходят из пластиинки с почти одинаковыми интенсивностями. В пластиинке Луммера—Герке наблюдаются полосы равного наклона. Условие интерференционного максимума m -го порядка для длины волны λ имеет вид

$$2h n \cos\psi = m\lambda. \quad (8.65)$$

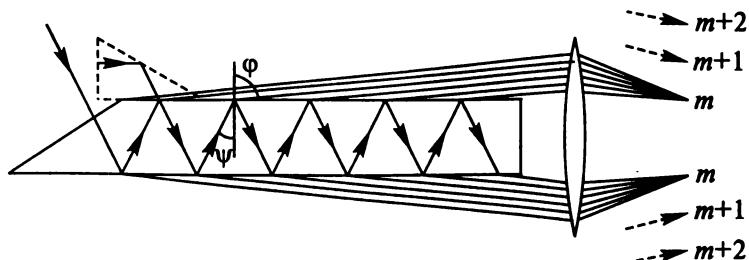


Рис. 8.30

Здесь не учтено изменение фазы при отражении, так как оно производит только несущественное смещение всей интерференционной картины. С каждой стороны пластины число интерферирующих пучков

$$N = L/(2htg\psi). \quad (8.66)$$

Учитывая закон преломления (1.1): $\sin\phi/\sin\psi = n$, из (8.65) получаем

$$2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2} = m\lambda. \quad (8.67)$$

Так как угол ϕ близок к предельному (90°), из (8.66) находим (№ 8.70)

$$N = L(n^2 - 1)^{1/2}/(2h). \quad (8.68)$$

При вычислении угловой дисперсии и дисперсионной области (№ 8.69) необходимо учитывать дисперсию показателя преломления (зависимость его от длины волны света). Дифференцируя (8.67) по λ , получим

$$n(dn/d\lambda) - \sin\phi\cos\phi(d\phi/d\lambda) = (n^2 - \sin^2\phi)^{1/2}m/(2h).$$

Вводя малый угол $\varepsilon = 90^\circ - \phi$, находим

$$\begin{aligned} d\phi/d\lambda &= [n(dn/d\lambda) - m(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2}/(2h)]/(\sin\phi\cos\phi) \approx \\ &\approx [n(dn/d\lambda) - (n^2 - \sin^2\phi)/\lambda]/\varepsilon. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Для угловой дисперсии удобно вводить $D = d\varepsilon/d\lambda$.

Дисперсионную область определяем из двух соотношений

$$\begin{aligned} 2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2} &= (m + 1)\lambda; \\ 2h[(n + dn/d\lambda\Delta\lambda)^2 - \sin^2\phi]^{1/2} &= m(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

Преобразуя второе соотношение и разлагая соответствующие величины по малому параметру, получим

$$2h(n^2 - \sin^2\phi)^{1/2}[1 + 2n(dn/d\lambda)\Delta\lambda/(n^2 - \sin^2\phi)] = m(\lambda + \Delta\lambda),$$

откуда

$$\Delta\lambda = \lambda^2(n^2 - 1)^{1/2}/\{2h[(n^2 - 1) - \lambda n(dn/d\lambda)]\}. \quad (8.70)$$

Для разрешающей способности пластиинки Луммера—Герке из (8.20), (8.67) и (8.68) получаем

$$R = \lambda/d\lambda = mN = L(n^2 - 1)/\lambda. \quad (8.71)$$

Чтобы разрешить дублетную структуру линии H_α ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) при разности длин волн дублета $0,14 \text{ \AA}$, пренебрегая $dn/d\lambda$, пластиинка Луммера—Герке ($n = 1,5$) должна иметь (№ 8.71) в соответствии с (8.71) $L = 2,5 \text{ см}$.

Найдем, какой должна быть длина b основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и пластиинка Луммера—Герке длиной $L = 20 \text{ см}$ с показателем преломления $n = 1,5$. Дисперсия показателя преломления призмы $dn_{np}/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$. Длина волны света $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ (№ 8.72). Используя (8.30) и (8.71), находим

$$b = L(n^2 - 1)/(\lambda dn_{np}/d\lambda) = 4,36 \text{ м.}$$

При учете дисперсии показателя преломления пластиинки Луммера—Герке

$$\lambda/d\lambda = L[(n^2 - 1)/\lambda - n(dn/d\lambda)]. \quad (8.72)$$

Электрон движется в вакууме со скоростью v вблизи поверхности дифракционной решетки с периодом d . Скорость электрона параллельна поверхности решетки и перпендикулярна ее штрихам. Определим длины волн, которые могут излучаться под углом θ к нормали решетки из-за взаимодействия электрона с решеткой (эффект Смита—Парселла) (№ 8.54). Электрон, проходя мимо элементов решетки, периодически возбуждает в них возмущения, следующие друг за другом через время $\tau = d/v$. Запаздывание возмущений по нормали к решетке равно τ , а разность хода tc , где c — скорость света. Если наблюдения ведутся под углом θ к нормали решетки, то разность хода уменьшается на $dsin\theta$, т. е. равна $\Delta = d(c/v - sin\theta)$. Усиление, сложение в фазе, происходит при $\Delta = m\lambda$, где λ — длина волны света. Так как $c/v > 1$, то $m \leq 0$ исключаются. Следовательно, $|sin\theta| = |c/v - m\lambda/d| \leq 1$.

Наблюдается дифракция параллельного пучка монохроматического излучения с частотой $v = 10^{15} \text{ Гц}$, падающего нормально на дифракционную решетку с числом штрихов $N = 1,5 \cdot 10^4$. Найдем, во сколько раз изменится угловая расходимость в 1-м порядке, если падающее на решетку излучение промодулировать так, чтобы были сформированы короткие импульсы длительностью $\tau = 10^{-12} \text{ с}$ (№ 8.42). Используя (8.6) для положения максимума ($sin\phi = \lambda/d$) и (8.4) для его ширины, для угловой расходимости максимума в 1-м порядке $\delta\phi_1$ получаем уравнение $sin(\phi + \delta\phi_1) = \lambda/d + \lambda/(Nd)$. Учитывая (8.6) и малость $\delta\phi_1$, имеем $\delta\phi_1 = (1/N)tg\phi$.

Монохроматический свет получает спектральное расширение (размазку) при ограничении длительности импульса. Из (5.7) имеем: $\Delta v \sim 1/\tau$. Обозначив угловое расширение $\delta\varphi_2$ и дифференцируя (8.6), получаем

$$\cos\varphi\delta\varphi_2 = \Delta\lambda/d = (\Delta\lambda/\lambda)\sin\varphi,$$

откуда

$$\delta\varphi_2 = (\Delta\lambda/\lambda)\operatorname{tg}\varphi = (\Delta v/v)\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi/(\tau v).$$

В результате $\delta\varphi_2/\delta\varphi_1 = [\operatorname{tg}\varphi/(\tau v)]/[\operatorname{tg}\varphi/N] = N/(\tau v) = 15$.

9. Элементы фурье-оптики и голографии

В методе Гойгенса—Френеля волновое поле получалось суммированием вторичных сферических волн от элементов фронта волны. В методе Релея волновое поле представляется в виде суммы плоских волн. Это называют также разложением по пространственным гармоникам. Для плоской волны ($S = ae^{i(kr - \omega t)}$) полагаем $k_y = 0$. Поэтому

$$kr = k_x x + k_z z = ksina \cdot x + kcosa \cdot z = ux + (k^2 - u^2)^{1/2}z, \quad (9.1)$$

где введено обозначение $u = k_x = ksina$, а α — угол наклона волнового вектора \mathbf{k} к оси z .

Для комплексной амплитуды имеем

$$A(x, z) = a \exp\{i[ux + (k^2 - u^2)^{1/2}z]\}. \quad (9.2)$$

При постоянном z , например при $z = 0$, получаем распределение комплексной амплитуды в зависимости от x

$$A(x, 0) = A_0 = ae^{-iux}, \quad (9.3)$$

где u — так называемая **пространственная частота**. Соответственно можно ввести **пространственный период**

$$\Lambda = 2\pi/u. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.3) в (9.2), получаем

$$A(x, z) = A_0 \exp[i(k^2 - u^2)^{1/2}z]. \quad (9.5)$$

Множитель $\exp[i(k^2 - u^2)^{1/2}z]$ называется **функцией передачи** свободного пространства.

Рассмотрим сложение трех плоских волн с амплитудами 1, a и $-a$ ($a \ll 1$), идущих под углами 0 , α и $-\alpha$ к оси z (рис. 9.1) и имеющих одинаковую фазу в точке $x = 0, z = 0$.

Для суммы трех волн имеем

$$A_c(x, z) = \exp(ikz) + a \exp\{i[ux + (k^2 - u^2)^{1/2}z]\} + a \exp\{i[-ux + (k^2 - u^2)^{1/2}z]\} = e^{ikz} + ae^{i(ux + kz \cos \alpha)} + ae^{i(-ux + kz \cos \alpha)}. \quad (9.6)$$

При $z = 0$

$$A_c(x, 0) = 1 + ae^{iux} + ae^{-iux} = 1 + 2 a \cos ux. \quad (9.7)$$

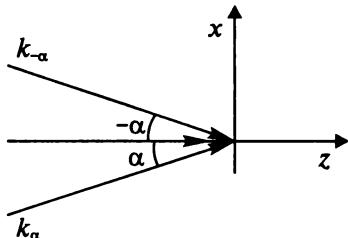


Рис. 9.1

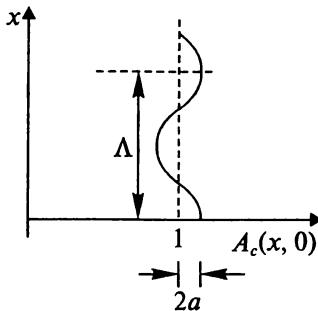


Рис. 9.2

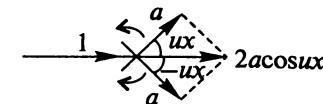


Рис. 9.3

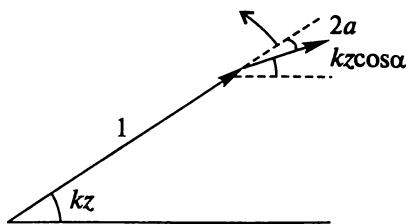


Рис. 9.4

На рис. 9.2 приведена эта зависимость. Пространственный период Λ определяется (9.4). На рис. 9.3 приведена векторная диаграмма сложения волн в плоскости $z = 0$.

При смещении плоскости наблюдения в область $z > 0$ происходят периодические изменения контраста интерференционной картины. Найдем положения плоскостей наблюдения, в которых контраст картины максимальный и минимальный и вычислим видность V , определяемую (4.3) (№ 9.1).

Для произвольного z из (9.6) получаем

$$A(x, z) = e^{ikz} + e^{ikz\cos\alpha} 2\cos\alpha u_x. \quad (9.8)$$

На рис. 9.4 приведена векторная диаграмма сложения этих векторов. Вектор, соответствующий сумме волн под углами α и $-\alpha$, взят при $x = 0$. При изменении z он будет поворачиваться. Разность фаз векторов

$$\Delta\phi = kz(1 - \cos\alpha). \quad (9.9)$$

Сложение векторов дает экстремумы в плоскостях z_n , где фаза $\Delta\phi = \pi n$. При $x = 0$ для четного n имеем максимумы, для нечетного — минимумы. Из (9.9) находим

$$z_n = \pi n / [k(1 - \cos\alpha)]. \quad (9.10)$$

Такое сложение называется **амплитудной модуляцией**. На экране, расположенном в такой плоскости z , получаем чередование максимумов и минимумов при изменении x , которое называется **синусоидальной решеткой**. Для видности (4.3) имеем

$$V = (A_{\max}^2 - A_{\min}^2) / (A_{\max}^2 + A_{\min}^2) = \\ = [(1 + 2a)^2 - (1 - 2a)^2] / [(1 + 2a)^2 + (1 - 2a)^2] \approx 4a.$$

В плоскостях, где второй вектор в (9.8) перпендикулярен первому, амплитуда суммы практически не меняется (видность $V = 0$), но меняется фаза (наклон суммарного вектора на векторной диаграмме) (рис. 9.5). Для положения таких плоскостей имеем

$$z_n = (\pi/2)(2n + 1)/[k(1 - \cos\alpha)]. \quad (9.11)$$

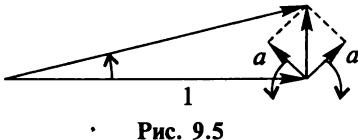


Рис. 9.5

Получающееся распределение называется **фазовой решеткой**.

Световое поле, которое создается сложением волн, и затем повторяется на некоторых расстояниях z , можно создать и с помощью одной волны и некоторой решетки или **транспаранта** с заданным коэффициентом пропускания.

Дифракционная решетка размером L и периодом d освещается нормально падающей плоской волной (длина волны $\lambda \ll d$). За ней воспроизводится ее изображения в плоскостях **саморепродукции**. Оценим число изображений, наблюдаемых за решеткой, в которых еще различима ее структура (№ 9.26). Используя (8.6) и малость угла, получаем в первом порядке $\theta \approx \lambda/d$. Положение повторных изображений решетки определяется (9.10) $z_n = \pi n/[k(1 - \cos\theta)] \approx (\lambda/\theta^2) n \approx (d^2/\lambda)n$. Число изображений ограничивается длиной участка, на котором перекрываются пучки, проходящие через решетку и идущие под углами θ и $-\theta$, т. е. $z_n = L/(2\theta)$. В результате $n_{\max} = L/(2d)$.

Найдем спектр плоских волн $F(u)$ за **синусоидальной решеткой**, освещенной нормально падающей плоской волной, если амплитудный коэффициент пропускания решетки $\tau(x) = 1 + a \cos \Omega x$ ($a < 1$) (№ 9.2). Действие синусоидальной решетки создает за ней поле, описываемое коэффициентом пропускания. Сравнивая это с (9.7), видим, что поле за синусоидальной решеткой совпадает с полем от трех волн — одна по нормали и две под углами α и $-\alpha$. Для пространственной частоты имеем

$$u = \Omega = ks \sin \alpha. \quad (9.12)$$

Спектр по пространственной частоте ($u = \Omega$) показан на рис. 9.6. Воспользуемся представлением о δ -функции: $\delta(x) = 1$ при $x = x_0$ и $\delta(x) = 0$ во всех других точках. Поэтому

$$F(u) = \delta(u) + (a/2) \delta(u - \Omega) + (a/2) \delta(u + \Omega).$$

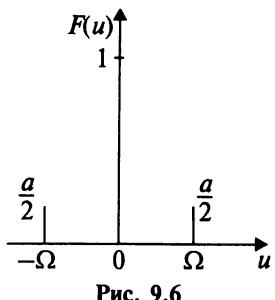


Рис. 9.6

Спектр соответствует трем плоским волнам, распространяющимся в направлениях $k \sin \alpha = 0, \pm \Omega$ с амплитудами 1, $a/2$, $a/2$.

Дифракция света на синусоидальной решетке является пространственным аналогом амплитудной модуляции сигнала в виде $(1 + a \cos \Omega t) \cos \omega t$.

Вместо одной гармоники по времени получаем три: ω , $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$.

Для разделения пространственных гармоник (волн разных направлений) используется линза, собирающая каждую волну в точку в фокальной плоскости. Положение точки определяется направлением волны. Интенсивность в этой точке определяется амплитудой волны. Линза осуществляет фурье-преобразование волнового поля и дает его спектр в фокальной плоскости, которую в этом случае называют фурье-плоскостью. Появляется возможность действиями в этой плоскости влиять на амплитуды и фазы составляющих волн.

Если функцию пропускания (транспарант) можно представить в виде ряда (или интеграла) Фурье, $f(x) = \sum_n C_n \exp(iu_n x)$, то волновое поле на выходе из решетки будет состоять из плоских волн, амплитуды которых пропорциональны коэффициентам C_n перед соответствующими гармоническими составляющими функции пропускания, а направления распространения α_n определяются величинами их пространственных частот $u_n = k \sin \alpha_n$.

Найдем спектр плоских волн за щелью шириной D , освещаемой нормально падающей плоской волной, а также за щелью, перекрытой решеткой с периодом d и размером прозрачных участков b ($D = Nd$, где N — число штрихов решетки) (№ 9.3). Используя (7.4), обозначая волновое число $k = 2\pi/\lambda$ и пространственную частоту $u = k \sin \phi$, для спектра за щелью получаем $F_1(u) \sim [\sin(Du/2)]/(Du/2)$. Спектр показан на рис. 9.7. В случае решетки, используя (8.3), находим

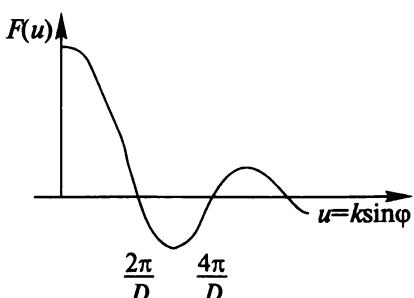


Рис. 9.7

$F_2(u) \sim [\sin(bu/2)]/(bu/2) \times \{[\sin((\pi/\lambda)Ndu/2)]/[\sin(du/2)]\}$.

Два плоских монохроматических когерентных пучка света с длиной волны $\lambda = 600$ нм равными амплитудами A_0 падают под углом $\alpha = \pm 0,06$ рад на синусоидальную решетку с амплитудными коэффициентами пропускания $\tau(x) = (1 + \sin\Omega x)/2$ (рис. 9.8). В точке $x = 0$ эти волны создают синфазные колебания. Период решетки $d = 10^{-3}$ см. Найдем пространственный спектр волн за решеткой (№ 9.11).

В данном случае параметры волн и решетки выбраны специальным образом. Для волн получаем $k_x = ks \approx (2\pi/\lambda)\alpha = 2\pi \cdot 10^3$ см $^{-1}$. Для решетки $\Omega = 2\pi/d = 2\pi \cdot 10^3$ см $^{-1}$. Отсюда $\Omega = ks \approx \alpha$. В таком случае $\tau(x) = [1 + (e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x})/(2i)]/2$. Результирующее поле от двух падающих на решетку волн $A_0 e^{i\Omega x}$ и $A_0 e^{-i\Omega x}$ получаем умножением их суммы на $\tau(x)$, учитывая, что $i = e^{i\pi/2}$,

$$(A_0 e^{i\Omega x} + A_0 e^{-i\Omega x})\tau(x) = (A_0 e^{i\Omega x} + A_0 e^{-i\Omega x})[1 + (e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x})/(2i)]/2 = A_0[(1/2)e^{i\Omega x} + (1/4)e^{i(2\Omega x - \pi/2)} + (1/2)e^{-i\Omega x} + (1/4)e^{-i(2\Omega x - \pi/2)}].$$

За решеткой распространяются четыре плоские волны в направлениях

$$ks \sin\theta = \pm\Omega \text{ и } \pm 2\Omega.$$

Аналогичным образом рассмотрим два плоских монохроматических когерентных пучка света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и амплитудами A_0 и $2A_0$, падающих под углами $\alpha = \pm 0,05$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = (1 + \cos\Omega x)/2$. В точке $x = 0$ эти волны создают противофазные колебания (см. рис. 9.8). Период решетки $d = 10^{-3}$ см. Найдем пространственный спектр волны за решеткой (№ 9.4). Здесь, так же как в предыдущей задаче, параметры волн и решетки выбраны специальным образом. Для волн получаем $k_x = ks \approx (2\pi/\lambda)\alpha = 2\pi \cdot 10^3$ см $^{-1}$. Для решетки $\Omega = 2\pi/d = 2\pi \cdot 10^3$ см $^{-1}$. Отсюда $\Omega = ks \approx \alpha$. В таком случае

$$\tau(x) = [1 + (e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})/2]/2. \quad (9.13)$$

Результирующее поле от суммы падающих на решетку волн

$$A_0 e^{i\Omega x} - 2A_0 e^{-i\Omega x}$$

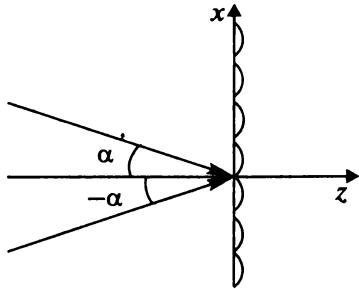


Рис. 9.8

(знак « $-$ », так как в противофазе) получаем умножением их суммы на $\tau(x)$

$$(A_0 e^{i\Omega x} - 2A_0 e^{-i\Omega x})\tau(x) = (A_0/2)(e^{i\Omega x} - 2e^{-i\Omega x})[1 + (e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})/2] = A_0[(1/2)e^{i\Omega x} + (1/4)e^{2i\Omega x} - e^{-i\Omega x} - (1/2)e^{-i\Omega x} - 1/4].$$

За решеткой распространяются пять плоских волн в направлениях

$$k \sin \theta = 0; \pm \Omega; \pm 2\Omega.$$

Спектр амплитуд показан на рис. 9.9.

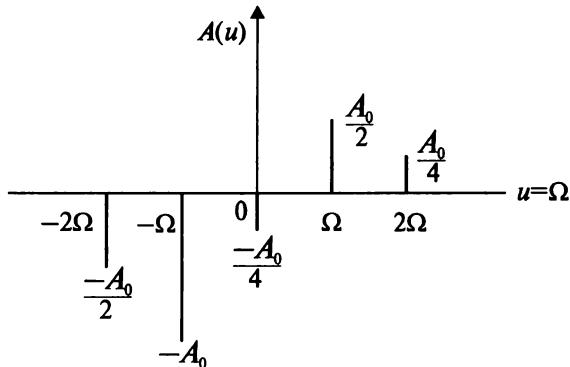


Рис. 9.9

Плоский монохроматический пучок света интенсивностью I_0 и длиной волны λ дифрагирует на двух последовательно расположенных синусоидальных решетках с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$ (рис. 9.10, a). Определим, при каких расстояниях Δz между решетками интенсивность дифракционных максимумов 1-го порядка максимальна и минимальна, и найдем эти значения (№ 9.12). В соответствии с (9.8) за первой решеткой имеем три волны

$$(1/2)e^{ikz} + (1/4)e^{i(\Omega x + kz \cos \alpha)} + (1/4)e^{i(-\Omega x + kz \cos \alpha)}, \quad (9.14)$$

где пространственная частота $u = k \sin \alpha = \Omega$.

Если в точке O фазы волн (нормальной и наклонной) одинаковы, то в точку O_1 (на расстоянии Δz от O) наклонная волна, соответствующая 1-му максимуму, придет раньше. Разность хода $\Delta z(1 - \cos \alpha) \approx \Delta z \alpha^2/2$. Значения Δz для максимума при сложении волн определяются из условия: $\Delta z \alpha^2/2 = m\lambda$, откуда

$$\Delta z_{\max} = 4\pi km/\Omega^2. \quad (9.15)$$

Условие для минимумов: $\Delta z \alpha^2 / 2 = (m + 1/2)\lambda$. Соответственно

$$\Delta z_{\min} = 4\pi k(m + 1/2)/\Omega^2. \quad (9.16)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Используя (9.14), получаем амплитуды волн, проходящих через решетки. Схематично они изображены на рис. 9.10, б. В направлении 1-го максимума после второй решетки направляемую идет волна от первого максимума после первой решетки и дифрагированная прямая волна от первой решетки. В сумме амплитуда, отнесенная к амплитуде волны, падающей на первую решетку, при условии максимума (9.15), равна 1/4. Следовательно, $I_{\max}/I_0 = 1/16$. При расстояниях между решетками, соответствующих минимуму (9.16), складываются волны в противофазе. Таким образом, суммарная амплитуда равна нулю и относительная интенсивность $I_{\min}/I_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда вторая решетка смещается вдоль оси z со скоростью v (рис. 9.11, а), и, соответственно, интенсивность нулевого дифракционного максимума периодически изменяется. Определим частоту ω этих изменений, а также отношение максимальной и минимальной интенсивностей (№ 9.13). Максимумы перед второй решеткой, а, следовательно, и за ней получаем при расстояниях, определяемых (9.15). Обозначая период появления максимумов $T = 2\pi/\omega$, получаем: $vT = v \cdot 2\pi/\omega = 4\pi k/\Omega^2$, откуда

$$\omega = v\Omega^2/(2k), \quad (9.17)$$

где $k = 2\pi/\lambda$.

На рис. 9.11, б схематично показано, как складываются амплитуды. На расстояниях, соответствующих максимуму (9.15), получаем $1/4 + 1/8 = 3/8$. На расстояниях, соответствующих минимуму (9.16), наклонные волны в противофазе к нормальной, и поэтому

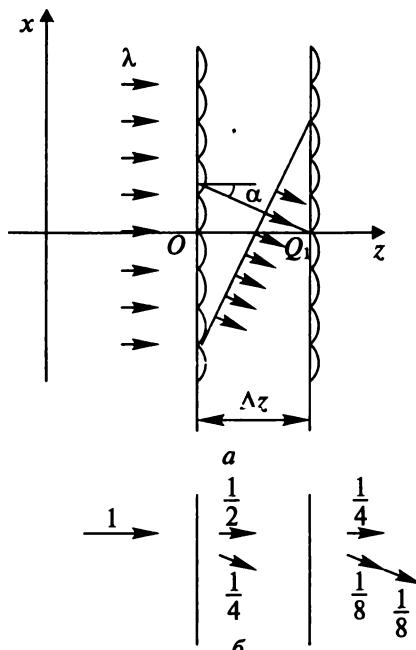


Рис. 9.10

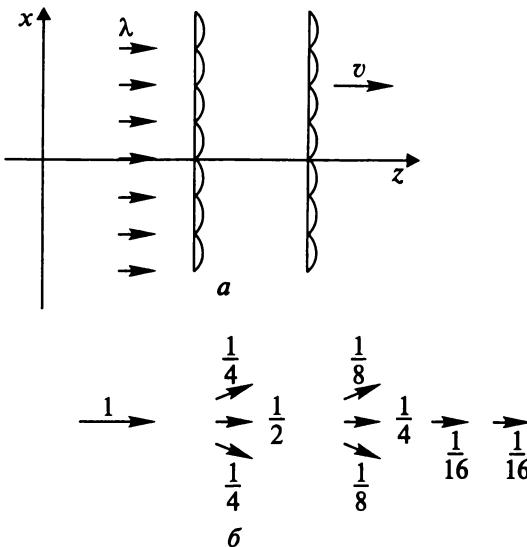


Рис. 9.11

$1/4 - 1/8 = 1/8$. Отношение максимальной амплитуды к минимальной равно 3. Для интенсивностей имеем $I_{\max}/I_{\min} = 9$.

Предлагается следующая схема спектрометра — устройства для исследования спектрального состава излучения источника света (*B*), содержащего две спектральные компоненты. Сколлинированный пучок света дифрагирует на двух последовательно расположенных одинаковых синусоидальных решетках (с периодом *d*), одна из которых перемещается с постоянной скоростью *v* (рис. 9.12, *a*). В фокальной плоскости линзы L_2 исследуется зависимость $I(t)$ интенсивности первого спектрального максимума от времени. Оказалось, что эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 9.12, *б*. Определим относительное расстояние $\Delta\lambda/\lambda$ между двумя спектральными компонентами λ и $\lambda + \Delta\lambda$ в излучении источника (№ 9.14). Из (9.17), где $\Omega = 2\pi/d$, получаем для частот изменения интенсивности

$$\omega_1 = \pi(v/d)\lambda_1 \text{ и } \omega_2 = \pi(v/d)\lambda_2.$$

Суммарная интенсивность изменяется по закону, изображенному на рис. 9.12, *б*. Как видим, имеют место «биения». «Медленная» частота (огибающая) равна $(\omega_2 - \omega_1)/2$. «Быстрая» частота равна $(\omega_1 + \omega_2)/2$. В одном периоде «медленной» частоты содержится $n = 30$ «быстрых» колебаний. Поскольку $\lambda \sim \omega$, то $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\omega/\omega = n = 30$.

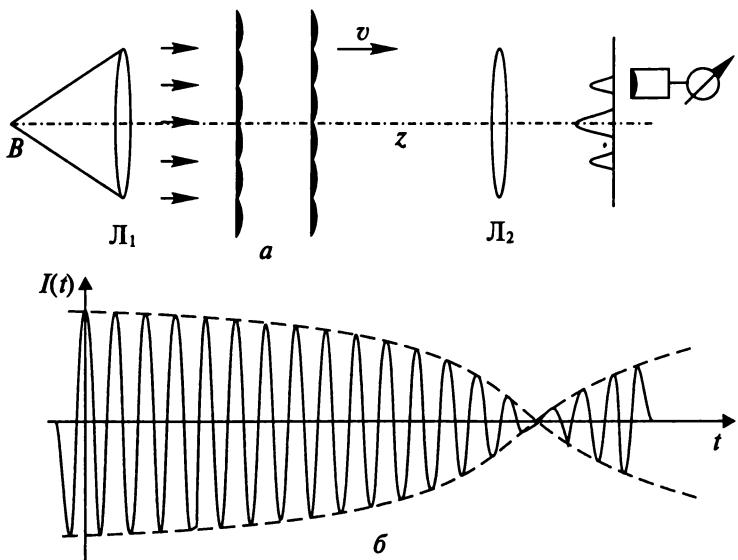


Рис. 9.12

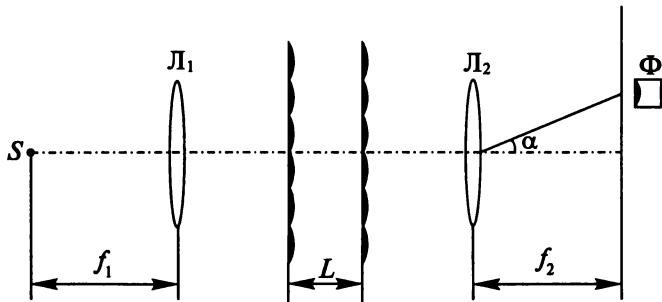


Рис. 9.13

Свет точечного квазимохроматического источника \$S\$ коллимируется объективом \$L_1\$ и попадает на систему из двух последовательно расположенных одинаковых синусоидальных дифракционных решеток (рис. 9.13). При продольном смещении одной из решеток фотоприемник \$\Phi\$ регистрирует осцилляции интенсивности в первом дифракционном максимуме. Считая углы дифракции малыми, определим длину волны источника \$\lambda\$ и оценим ширину спектра излучения \$\Delta\lambda\$, если известно, что первый минимум интенсивности наблюдается при расстоянии между решетками \$L = L_1 = 2\$ см, а амплитуда осцилляций становится равной нулю при \$L \geq L_2 = 20\$ см. Период решетки \$d = 10^{-2}\$ см (№ 9.31). Первый мини-

мум интенсивности в 1-м дифракционном максимуме, направление на который из (8.6) $\sin\alpha \approx \alpha = \lambda/d$, появляется в результате сложения двух волн, идущих в этом направлении. Одна волна представляет дифракцию на второй решетке нормально на нее падающей волны после первой решетки; вторая волна — результат дифракции в 1-й порядок на первой решетке и проходящей через вторую решетку без дифракции. Минимум интенсивности будет, если эти волны окажутся в противофазе (разность фаз равна π). Получаем условие

$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(1 - L_1 \cos\alpha) = \pi.$$

При малых углах $(2\pi/\lambda)L_1(\lambda/d)^2/2 = \pi$, поэтому $\lambda = d^2/L_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ см.

Осцилляции исчезают, когда складываемые волны перестают быть когерентными. В соответствии с (5.6) $L_2 \cos\alpha \geq c\tau = \lambda^2/\Delta\lambda$, откуда $\Delta\lambda \approx 2d^2/L \approx 10^{-5}$ см. Здесь τ — длительность цуга волны.

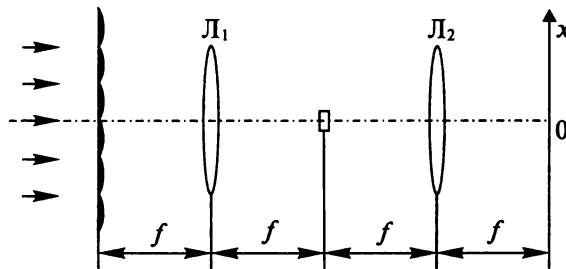


Рис. 9.14

Амплитудная синусоидальная решетка с коэффициентом пропускания по амплитуде $\tau(x) = (1 + \cos\Omega x)/2$ установлена во входной плоскости оптической системы (рис. 9.14) и освещается нормально падающей плоской волной (длина волны λ). Найдем контрастность изображения в выходной плоскости, если в общей фокальной плоскости двух линз на оптической оси разместить прозрачную пластинку, вносящую фазовую задержку в $\pi/2$ (удовлетворяющую условию: $(n - 1)h = m\lambda + \lambda/4$, где n и h — показатель преломления и толщина пластинки) (№ 9.20). Используя (9.14) и обозначая амплитуду падающей волны A , получаем, что амплитуды трех волн, создающих изображение, равны $A/2$, $A/4$ и $A/4$. На рис. 9.15, *a* — в показаны векторные диаграммы сложения волн. В точке *O* на оптической оси без пластинки имеем результат, представленный на рис. 9.15, *a*), с пластинкой — на рис. 9.15, *b*). При изменении x в присутствии пластинки получаем результат, пред-

ставленный на рис. 9.15, в). Видно, что максимальная амплитуда и, следовательно, максимальная интенсивность $I_{\max} = A^2/2$ будет на оптической оси. Минимальная интенсивность $I_{\min} = A^2/4$. Контрастность картины определяется видностью (4.3) и равна $V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = 1/3$.

В оптической схеме предметом является дифракционная решетка с большим числом штрихов и шагом d (рис. 9.16). Решетка освещается плоской нормально падающей монохроматической волной. Если в общую фокальную плоскость линз поместить такую же решетку, то наблюдаемое изображение входной решетки практически не изменится. Определим минимальный интервал времени τ между моментами возникновения изображения решетки, если угол падения волны затем изменять по закону $\alpha(t) = 2(\lambda/d)\sin(2\pi\nu t)$, где частота $\nu = 1$ Гц, $\lambda/d \ll 1$. Считаем, что для заданного шага решетки фокусное расстояние линз минимально (№ 9.23). В общей фокальной плоскости находятся источники для формирования дальнейшей дифракционной картины. При изменении α источники сдвигаются. Периодически решетка пропускает волны от источников. Из (8.6) направление на ближний максимум $\alpha = \theta = \lambda/d$. Подставляя это в закон изменения α , получаем: $\lambda/d = 2(\lambda/d)\sin(2\pi\nu t)$, т. е. $\sin(2\pi\nu t) = \sin(\pi/6)$, откуда $t = 1/(12\nu) = 1/12$ с.

Если в фокальную плоскость поставить решетку с периодом, в два раза большим решетки-предмета (№ 9.24), то изменится только интенсивность максимумов изображения решетки, а интервал не изменится.

При нормальном освещении амплитудной синусоидальной решетки монохроматическим параллельным пучком света в плоско-

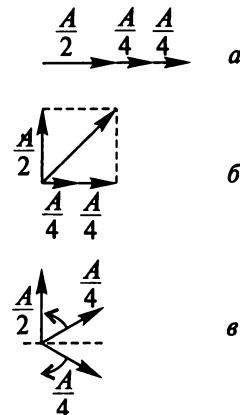


Рис. 9.15

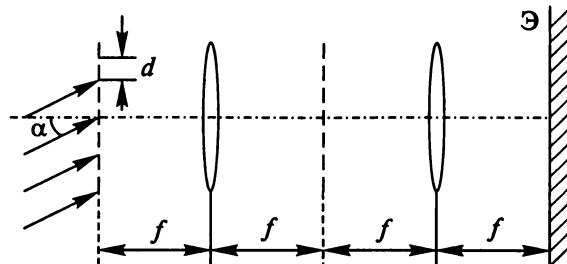


Рис. 9.16

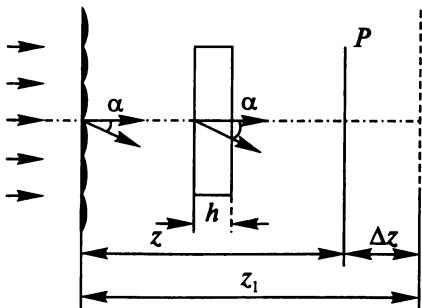


Рис. 9.17

сях саморепродукции P воспроизводится ее изображение (рис. 9.17). Если за дифракционной решеткой поместить однородную плоскопараллельную пластинку толщиной $h = 30$ мм с показателем преломления n , то все плоскости изображения смещаются по оси z на $\Delta z = 10$ мм. Определим n , если отношение длины волны λ к периоду решетки d достаточно мало ($\lambda/d \ll 1$) (№ 9.25). Волна, падающая на пластинку под углом α , в пластинке идет под углом β (по закону Снелиуса, учитывая малость углов, так как по условию $\lambda/d \ll 1$, имеем: $\sin\alpha/\sin\beta \approx \alpha/\beta = n$). Без пластинки положение плоскости P определяется (9.9): $kz - kz\cos\alpha = m\pi$. В присутствии пластинки получаем условие: $kz_1 - kh + knh - kz\cos\alpha + kh\cos\beta - knh\cos\beta = m\pi$. Для сдвига плоскости саморедукции имеем

$$\begin{aligned}\Delta z = z_1 - z &= h[1 - n(1 - \cos\beta)/(1 - \cos\alpha)] \approx \\ &\approx h(1 - n\beta^2/\alpha^2) = h(1 - 1/n),\end{aligned}$$

откуда $n = h/(h - \Delta z) = 1,5$.

Во входной плоскости Π_0 оптической системы (рис. 9.18) расположена решетка с периодом d и шириной $b = 5d/12$, освещаемая нормально падающей монохроматической волной. Определим амплитудную прозрачность маски, установленной в Фурье-плоскости Φ (общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 , если в выходной плоскости Π_1 необходимо получить световое поле, комплексная амплитуда которого представляет синусоидальную амплитудную структуру с глубиной модуляции, равной единице, и периодом $d_1 = d/2$ (№ 9.42). Линза L_1 создает в Фурье-плоскости источники, которые за линзой L_2 дают пучки различного наклона, образующие в плоскости Π_1 интерференционную картину. При отсутствии

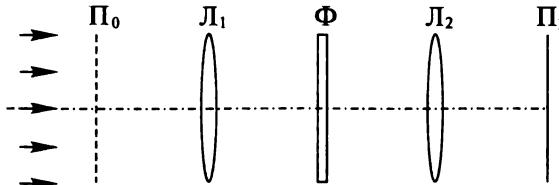


Рис. 9.18

в Фурье-плоскости маски наклоны пучков за Λ_2 различаются на угол θ , определяемый (8.6). В соответствии с (3.8) для увеличения периода интерференционной картины нужно иметь пучки, наклон которых отличается на $\theta_2 = 2\theta$. Этого можно достичь, например, оставив в Фурье-плоскости источники, соответствующие (± 1) -м максимумам. Другой способ — оставить нулевой максимум и (± 2) -е максимумы. Первый способ дает структуру $e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x} = 2\cos\Omega x$, где $\Omega = 2\pi/d$. Эта структура является амплитудно-фазовой (косинус меняет знак) и не удовлетворяет поставленному в задаче условию. Второй вариант дает структуру

$$1 + ae^{i\Omega x} + ae^{-i\Omega x} = 1 + 2a\cos(2\Omega x). \quad (9.18)$$

Здесь амплитуда боковых гармоник a определяется из (8.3)

$$a = \sin[(\pi/\lambda)b\theta_2]/[(\pi/\lambda)b\theta_2],$$

где, в соответствии с (8.6), $\theta_2 \approx \pm 2\lambda/d$.

Используя условие, получаем

$$a = \sin(5\pi/6)/(5\pi/6) = \sin(\pi/6)/(5\pi/6) = 3/(5\pi).$$

Чтобы удовлетворить условию о глубине модуляции необходимо в (9.18) ослабить нулевой максимум с помощью пластинки с коэффициентом пропускания $\tau = 2a = 6/(5\pi)$. При этом перекрываются (± 1) -е порядки и все остальные, кроме (± 2) .

Плоская монохроматическая волна (длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$) дифрагирует на амплитудной синусоидальной решетке, а затем проходит через интерферометр Фабри—Перо с расстоянием между зеркалами $L = 2 \text{ см}$. Найдем, при каком максимальном периоде решетки d контраст интерференционной картины, возникающей в плоскости наблюдения, максимальен (№ 9.29). За синусоидальной решеткой имеем три волны: по оси, перпендикулярной плоскости решетки, и под углами α и $-\alpha$ к этой оси. Контраст в плоскости наблюдения будет максимальным, если через интерферометр Фабри—Перо пройдут все три волны. В соответствии с (8.44) должны выполняться соотношения $2L = m_1\lambda$ и $2L\cos\alpha = m_2\lambda$. Вычитая второе из первого, получаем: $2L(1 - \cos\alpha) = m\lambda$. Здесь $m = m_1 - m_2$ равно 1, 2, 3, ... Используя (9.4), (9.12) и связь волнового числа с длиной волны $k = 2\pi/\lambda$, для периода решетки имеем: $d = \lambda/\sin\alpha \approx \lambda/\alpha$. Так как $1 - \cos\alpha \approx \alpha^2/2 \approx (\lambda/d)^2/2$, то $d = (\lambda L/m)^{1/2}$ и $d_{\max} = (\lambda L)^{1/2} = 0,1 \text{ мм}$.

Оптическая система состоит из двух одинаковых линз с общей фокальной плоскостью; f — фокусное расстояние линз. Амплитуд-

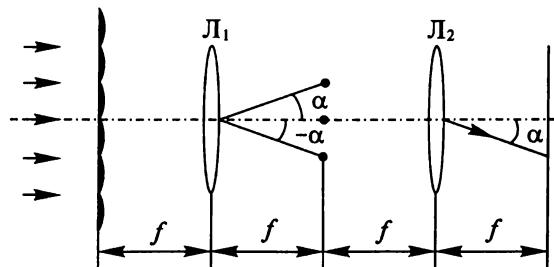


Рис. 9.19

ная синусоидальная решетка находится в передней фокальной плоскости линзы L_1 , а изображение рассматривается в задней фокальной плоскости линзы L_2 . Найдем, как зависит характер изображения от соотношения между частотой решетки Ω и диаметром линзы D (№ 9.30). Система показана на рис. 9.19. В фокальной плоскости линзы L_1 три точечных изображения от трех плоских волн, для которых из (9.2) и (9.12) имеем $\sin\alpha = \pm\lambda/\Lambda$, где период решетки $\Lambda = 2\pi/\Omega$. В соответствии с (7.17) для дифракционного пятна линзы получаем: $\theta \approx \lambda/D$. Для разрешения волн должно быть $\alpha > \theta$. Для малых α получаем $D > \Lambda$. Угловое расстояние между максимумами на экране за второй линзой, определяемое (3.10), также должно быть больше дифракционного пятна второй линзы $\Lambda/(2f) > \lambda/D$. В результате должно выполняться:

$$D > \Lambda > 2\lambda f/D \text{ или } \pi D/(\lambda f) > \Omega > 2\pi/D.$$

На рис. 9.20 показана оптическая схема **мультиликации изображения**. Объект-транспортант с общим размером $L = 1$ см и размером мельчайших деталей $\delta = 0,01$ мм расположен во входной плоскости Π_0 оптической системы и освещается монохроматическим пучком света ($\lambda = 500$ нм). Мультилицированное (размноженное) изображение возникает в выходной плоскости Π_1 . В общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (Фурье-плоскости оптической системы) располагается амплитудная решетка. Определим

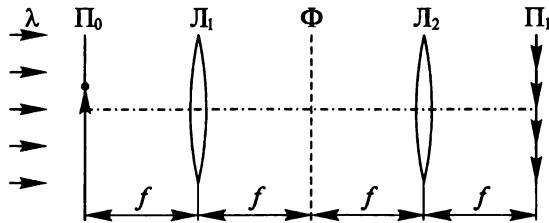


Рис. 9.20

период решетки d и ее общий размер D , необходимые для качественного воспроизведения мультилинированного изображения. Оценим ширину щелей решетки b , если необходимо получить не менее десяти периодически повторяющихся изображений объекта. Фокусное расстояние объективов $f = 20$ см (№ 9.44, № 9.45). Любая точка объекта с помощью решетки дает изображение в каждом максимуме в выходной плоскости. Направления на максимумы в соответствии с (8.6): $\sin\theta_m = m\lambda/d$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Отсюда в плоскости Π_1 расстояние между максимумами $(\lambda/d)f$. В данной системе размеры изображений равны размеру объекта. Чтобы изображения не накладывались друг на друга должно выполняться: $(\lambda/d)f \geq L$, откуда для периода решетки получаем $d \leq \lambda f/L = 10^{-3}$ см. Для качественного воспроизведения изображения угловой размер дифракционного пятна точки должен быть меньше углового размера детали $\lambda/D < \delta/f$. Отсюда $D > \lambda f/\delta = 1$ см. Для оценки ширины щелей решетки b надо воспользоваться тем, что требуемое число повторяющихся изображений $N = 10$ должно быть равно числу главных дифракционных максимумов. Используя рис. 8.1, б, получаем $N \approx 2(\lambda/b)/(\lambda/d)$. Отсюда $b \approx 2d/N = 2 \cdot 10^{-4}$ см.

Ультразвуковые волны (называемые также ультраакустическими), проходящие через вещество, создают в нем переменную плотность. При изменении плотности меняется показатель преломления вещества. Это приводит к колебаниям фазы световых волн, идущих через вещество. В таком случае получаем пространственную **фазовую решетку**. Если складываются две слабо затухающие одинаковые по амплитуде (A) и частоте (ω) плоские ультразвуковые волны (для них имеет место принцип суперпозиции, т. е. простое сложение амплитуд с учетом знаков), идущие в разные стороны вдоль оси z , то получается стоячая волна (см. 1, с. 274), в которой плотность изменяется по закону:

$$\rho(z, t) = 2Asinkz\cos\omega t,$$

где волновое число $k = 2\pi/\lambda$.

На рис. 9.21 показано изменение плотности в бегущей (рис. 9.21, а) и стоячей (рис. 9.21, б) волне (точками обозначены частицы среды). На рис. 9.21, в точками обозначены узлы, в которых частицы неподвижны, а стрелками — направление движения к узлам в некоторый момент времени, которое меняется через половину периода колебаний на противоположное. Расстояние между узлами с одинаковым направлением движения равно длине волны λ .

Для возбуждения ультразвуковых волн используются кристаллы кварца, обладающие пьезоэлектрическими свойствами (изме-

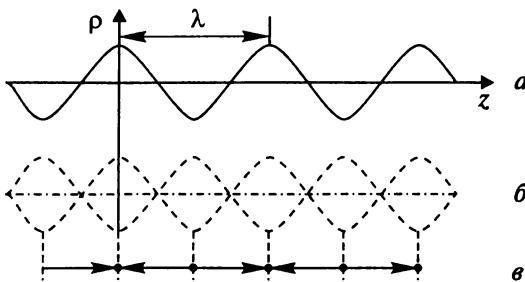


Рис. 9.21

няют размер под действием электрического поля). При работе со стоячими волнами важно, чтобы они слабо поглощались в среде. Из жидкостей лучше других для этого подходят ксилол, толуол и вода.

Как видно из рис. 9.21, пространственный период изменения показателя преломления в фазовой решетке, образованной ультразвуковой стоячей волной, равен длине волны, связанной с изменением плотности среды (№ 9.5).

На рис. 9.22 изображена схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуке. Стоячие ультразвуковые волны образуются в кювете К. Пластиинка кварца Р установлена параллельно стенке АС, так что волны, излучаемые ею, распространяются в направлении, параллельном АВ. Дифракционные максимумы и минимумы наблюдаются в трубе Т, установленную на бесконечность. Покажем, что угол дифракции θ для максимума m -го порядка определяется из условия

$$Asin\theta = m\lambda, \quad (9.19)$$

где A — длина стоячей ультразвуковой волны; λ — длина волны света (№ 9.6).

Так как частота ультразвуковых колебаний значительно меньше частоты световых колебаний, можно считать, что жидкость,

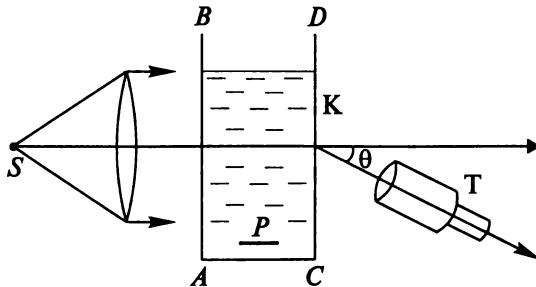


Рис. 9.22

в которой распространяется свет, неподвижна. Световое поле в плоскости CD при выходе из кюветы будет периодически меняться в направлении CD с периодом Λ . Таким образом, задача сводится к дифракции света на двумерной плоской фазовой решетке с периодом Λ . В этом случае направление на максимумы определяется (9.19).

Дифракция света на ультразвуковой волне в толуоле наблюдается на установке, описанной в предыдущей задаче. В качестве источника света использована зеленая линия ртути ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$). Вместо трубы T за кюветой поставлена собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30 \text{ см}$. Дифракционные полосы получаются в фокальной плоскости линзы и рассматриваются в микроскоп, снабженный шкалой. Определим скорость звука v в толуоле, если расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 0,546 \text{ мм}$, а частота ультразвука $v = 4 \text{ МГц}$ (№ 9.7). Для длины ультразвуковой волны в толуоле имеем

$$\Lambda = v/\nu. \quad (9.20)$$

Эта величина является периодом фазовой решетки. При малых θ угловое расстояние между максимумами из (9.19) равно $\theta = \lambda/\Lambda$. Расстояние между максимумами в фокальной плоскости $\Delta x = f\theta = f\lambda/\Lambda = f\lambda/v$, откуда $v = f\lambda/\Delta x = 1200 \text{ м/с}$.

Из рис. 9.21 видно, что в бегущей и стоячей волнах при отсутствии затухания (поглощения) в фиксированный момент времени изменение плотности, а, следовательно, и показателя преломления, по координате одинаково, т. е. это одинаковые пространственные фазовые решетки. Поэтому при отсутствии затухания невозможно решить, на какой волне происходит дифракция (№ 9.8).

Необходимо иметь в виду, что в фазовой решетке, создаваемой стоячей ультразвуковой волной, показатель преломления имеет периодичность не только по пространству, но и по времени, т. е. меняется периодически во времени с периодом ультразвуковой волны. Это приводит к тому, что интенсивность дифрагированного света испытывает периодическое изменение с той же частотой $v_{\text{зв}}$, т. е. модуляцию. В результате при падении на решетку света частоты v дифрагировавший свет имеет измененные частоты

$$v_{1,2} = v \pm v_{\text{зв}}. \quad (9.21)$$

Если жидкость, в которой установилась стоячая ультразвуковая волна, рассматривать в микроскоп, то благодаря неоднородности жидкости будут видны светлые и темные полосы (№ 9.9). Если бы глаз мгновенно реагировал на световое раздражение и не обладал

способностью сохранять зрительные впечатления, то были бы видны светлые и темные полосы, расстояние между которыми равнялось бы расстоянию между соседними сгущениями, т. е. Λ . Через $1/2$ периода звуковых колебаний на месте каждой светлой полосы образовалась бы темная, и наоборот. В действительности глаз сохраняет зрительные впечатления в течение примерно 0,1 с, т. е. времени, которое значительно больше периода ультразвуковых колебаний. Поэтому глаз не в состоянии видеть смену полос, а фиксирует некоторую среднюю освещенность сетчатки. При таком усреднении интенсивность света во всех узлах скоростей сделается одинаковой. Во всех пучностях скоростей интенсивность будет также одинаковой, но отличающейся от интенсивности в узлах. Поэтому период видимой картины должен равняться расстоянию между соседними узлами, т. е. $\Lambda/2$.

Рассмотрим случай, когда горизонтальный луч гелий-неонового (He-Ne) лазера с $\lambda = 0,63$ мкм падает нормально на тонкую стеклянную кювету с водой. В воде возбуждена **стоячая ультразвуковая волна**. Направление распространения ультразвука перпендикулярно направлению падающего луча. В результате дифракции света на ультразвуке первые дифрагированные волны отклонились на угол $\theta = 5,7^\circ$. Дифрагированный свет анализируется интерферометром Фабри—Перо толщиной $L = 1$ см. Определим спектральный состав дифрагированного света и оценим коэффициент отражения зеркал интерферометра, при котором можно наблюдать исследуемую структуру спектра. Скорость звука в воде $v = 1,5$ км/с (№ 9.10). Спектральный состав дифрагированного света определяется (9.21). Используя (9.20) и (9.19) для первых дифрагированных волн получаем добавку $v_{\text{зв}} = vsin\theta/\lambda$. Из (9.21) следует, что $\Delta v = 2v_{\text{зв}} \approx v\theta/\lambda = 480$ МГц. Вводя скорость света c , получаем $v = c/\lambda = 4,8 \cdot 10^{14}$. Необходимая разрешающая способность $R = \lambda/\Delta\lambda = v/\Delta v = 10^6$. Используя для интерферометра Фабри—Перо (8.58), находим: $\rho = 1 - 2\pi L/(\lambda R) \approx 0,9$.

При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (фокусное расстояние f) на оптической оси устанавливается проволока П (рис. 9.23). Фазовая решетка создается в жидкости стоячей ультразвуковой волной частоты $v = 20$ МГц. Найдем расстояние Δl между интерференционными полосами на экране Э, а также максимально допустимое удаление L_{max} экрана от линзы L_2 , при котором еще возможно наблюдение интерференционной картины. Диаметр линзы L_2 $D = 4$ см, скорость звука в жидкости $v = 1,5$ км/с.

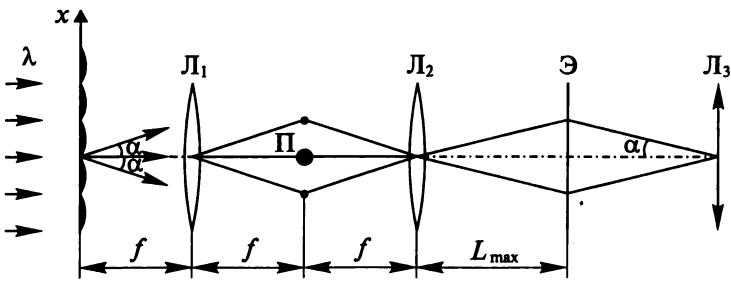


Рис. 9.23

Решетка освещается нормально падающей плоской волной ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$) (№ 9.15). Пространственный период фазовой решетки

$$\Lambda = v/v = 2\pi/u = \lambda/\sin\alpha. \quad (9.22)$$

Синусоидальная фазовая решетка дает три волны: нормальную и две под углами α и $-\alpha$ в противофазе к первой. Углы определяются (9.22). Каждая из этих волн в фокальной плоскости L_1 дает три точечных источника. Закрывая источник волны, идущей вдоль оптической оси, имеем сумму двух волн с одинаковой фазой. После второй линзы L_2 получаем два пучка, составляющие с оптической осью линзы углы α и $-\alpha$. Для распределения амплитуд по экрану получаем $A(x) = ae^{ikx\sin\alpha} + ae^{-ikx\sin\alpha} = 2\cos(kx\sin\alpha)$.

Интенсивность на экране

$$I = AA^* = 4\cos^2(kx\sin\alpha) = 2[1 + \cos(2kx\sin\alpha)].$$

Отсюда расстояние между максимумами $\Delta l = 2\pi/(2k\sin\alpha) = \Lambda/2 \approx 37,5 \text{ мкм}$. Можно было воспользоваться (3.10).

Так как пучки ограничены диаметром линзы L_2 , для максимального расстояния, на котором пучки еще перекрываются $L_{\max} \approx D/(2\alpha) \approx D\Lambda/(2\lambda) \approx 3 \text{ м}$. На рис. 9.23 для решения этого вопроса линза диаметром D поставлена справа от экрана.

Для такой же системы, как в предыдущей задаче, оценим допустимый диаметр (d_{\max} и d_{\min}) для наблюдения на экране Э интерференционной картины от фазовой синусоидальной решетки с периодом $\Lambda = 2 \text{ мм}$, освещаемой нормально падающей плоской волной длины $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. Диаметр линзы L_1 равен $D = 2 \text{ см}$, фокусное расстояние $f = 20 \text{ см}$ (№ 9.16). Положение источников в общей фокальной плоскости определяется (9.22). Расстояние между источниками $f\alpha$ ограничивает максимальный размер проволоки $d_{\max} = 2f\alpha = 2\lambda/\Lambda = 0,1 \text{ мм}$. Минимальный размер проволоки определяется размером фокального пятна $d_{\min} = 2\lambda/D \approx 0,01 \text{ мм}$.

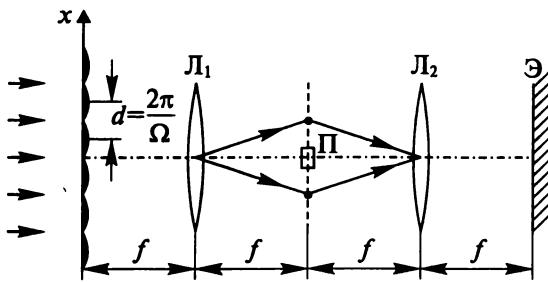


Рис. 9.24

Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в следующем: в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливается прозрачная пластина Π , вносящая фазовую задержку в $\pi/2$ (рис. 9.24). Найдем распределение интенсивности $I(x)$ в плоскости изображения (в задней фокальной плоскости линзы L_2), если предмет — фазовая синусоидальная решетка с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) =$

$= \exp(i a \cos \Omega x)$, $a \ll 1$, — расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 . Выясним, как изменится картина интенсивности, если использовать пластинку с задержкой в $3\pi/2$, и как изменится контраст, если пластинка обладает коэффициентом поглощения k_p (№ 9.17). Учитывая малость a , имеем: $\tau(x) = = \exp(i a \cos \Omega x) \approx 1 + i a \cos \Omega x = 1 + + i(a/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})$. Фазовая решетка дает три волны. Волна, идущая вдоль оптической оси, отличается по фазе от наклонных волн на $\pi/2$. Добавление пластинки приводит к тому, что в фазовой плоскости вектор 1 поворачивается на $\pi/2$ (рис. 9.25), и все волны оказываются в одинаковой фазе, таким образом, как для амплитудной решетки $1 + (a/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}) = = 1 + a \cos \Omega x$. Поворот вектора 1 на угол $3\pi/2$ дает $1 - a \cos \Omega x$. При $\pi/2$ для интенсивности $I \sim (1 + a \cos \Omega x)^2 \approx \approx 1 + 2a \cos \Omega x$, при $3\pi/2$ $I \sim (1 -$

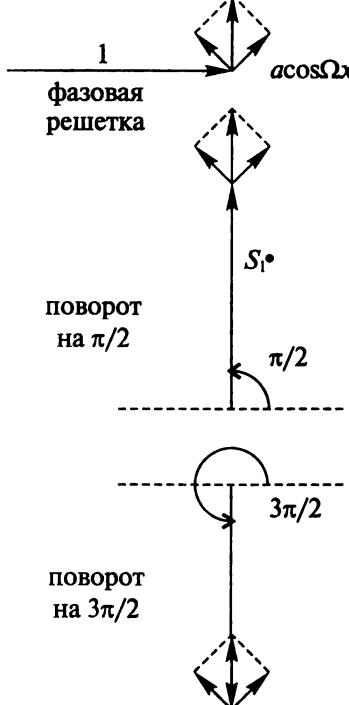


Рис. 9.25

$-a \cos \Omega x)^2 \approx 1 - 2a \cos \Omega x$. Для разности максимальной и минимальной интенсивностей в обоих случаях получаем: $I_{\max} - I_{\min} = (1 + a)^2 - (1 - a)^2 = 4a$. Контрастность определяется отношением этой разности к средней интенсивности. Если во втором случае средняя интенсивность уменьшается в k_n раз, то контрастность увеличится в k_n раз.

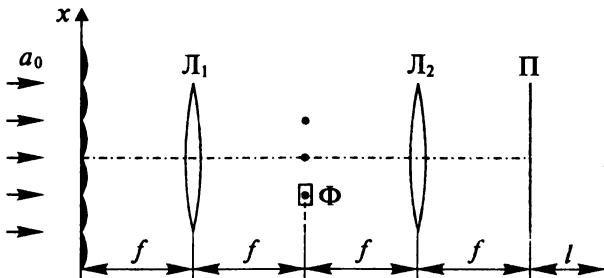


Рис. 9.26

При наблюдении методом фазового контраста физической решетки с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = e^{im \cos \Omega x}$, $m \ll 1$, по ошибке фазовую пластинку Φ расположили так, что она перекрыла в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 один из дифракционных максимумов 1-го порядка (рис. 9.26). Найдем распределение поля в плоскости Π изображения, а также, на какое минимальное расстояние l нужно переместить плоскость наблюдения, чтобы возникло изображение чисто амплитудной решетки. Поясним решение с помощью векторной диаграммы. Углы дифракции считаем малыми. Длина волны λ (№ 9.27). Благодаря малости m можно записать: $\tau(x) = 1 + im \cos \Omega x = 1 + (im/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})$. При падении на решетку вдоль оптической оси плоской волны амплитуды a_0 получаем за решеткой поле $f(x) = a_0[1 + (im/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})]$. На векторной диаграмме (рис. 9.27) показано это поле. После введения фазовой пластины фаза одного из максимумов 1-го порядка меняется на $\pi/2$ (рис. 9.28). Поле имеет вид

$$g(x) = a_0[1 + (im/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i(\Omega x - \pi/2)})] = \\ = a_0[1 + (im/2)e^{i\pi/4}(e^{i(\Omega x - \pi/4)} + \\ + e^{-i(\Omega x - \pi/4)})] = a[1 + \\ + me^{3\pi/4} \cos(\Omega x - \pi/4)].$$

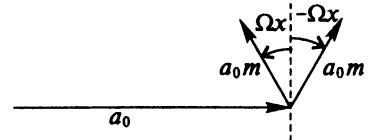


Рис. 9.27

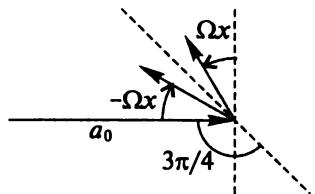


Рис. 9.28

Чтобы получить изображение чисто амплитудной решетки нужно вектор с амплитудой a_0 повернуть против часовой стрелки на угол $\Delta\phi = 3\pi/4$.

Две последовательно расположенные вплотную друг к другу решетки с функциями пропускания $\tau_1(x) = (1 + \cos\Omega x)/2$ и $\tau_2(x) = e^{im\cos\Omega x}$, $m \ll 1$, освещаются плоской нормально падающей монохроматической волной. Найдем, как изменится отношение интенсивностей волн, дифрагировавших в (± 1) -е порядки дифракции, если сдвинуть первую решетку вдоль оси x на $1/4$ периода. Определим разность фаз колебаний поля в (± 1) -х порядках дифракции (№ 9.28). Функция пропускания первой решетки $\tau_1(x) = (1 + \cos\Omega x)/2 = [1 + (1/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x})]/2$. При малых m получаем

$$\tau_2(x) = 1 + im\cos\Omega x = 1 + (im/2)(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}).$$

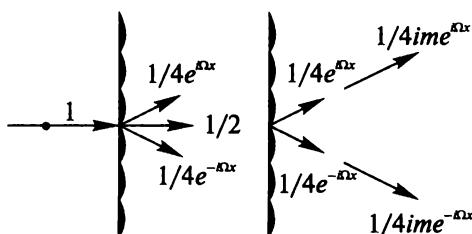


Рис. 9.29

Углы волн за решеткой определяются (9.12). На рис. 9.29, в соответствии с (9.8) и (9.14), показаны волны, проходящие через несдвинутые решетки. За второй решеткой идут соответствующие 1-м порядкам первой решетки и дифрагировавшие на второй решетке от нормальной составляющей за первой решеткой. Различие 1-х порядков дифракции только в фазе. Поэтому отношение интенсивностей равно 1. При сдвиге первой решетки на $x_0 = \pi/(2\Omega)$ получаем для максимума $(+1)$ -го порядка

$$A_{+1} = (1/4)ime^{i\Omega x} + (1/4)e^{i(\Omega x - \pi/2)} = \\ = (1/4)(me^{i(\Omega x + \pi/2)} + e^{i(\Omega x - \pi/2)}) = (1/4)(1 - m)e^{i(\Omega x - \pi/2)}. \quad (9.23)$$

Для максимума (-1) -го порядка имеем

$$A_{-1} = (1/4)ime^{-i\Omega x} + (1/4)e^{-i(\Omega x - \pi/2)} = \\ = (1/4)(me^{-i(\Omega x - \pi/2)} + e^{-i(\Omega x - \pi/2)}) = (1/4)(1 + m)e^{-i(\Omega x - \pi/2)}.$$

Отношение интенсивностей волн $I_+/I_- = (1 - m)^2/(1 + m)^2 \approx 1 - 4m$. Сравнив фазы при $x = 0$, получим $\Delta\phi = \pi$.

Предыдущую задачу можно усложнить, рассмотрев движение первой (амплитудной) решетки вдоль оси x со скоростью v (№ 9.43). Аналогично (9.23) имеем

$$A_{+1} = (1/4)(me^{i(\Omega x + \pi/2)} + e^{i\Omega(x - v)});$$

$$A_{-1} = (1/4)(me^{-i(\Omega x - \pi/2)} + e^{-i\Omega(x - v)}).$$

Для интенсивностей получаем

$$I_{+1} = A_{+1}A_{+1}^* = (1/16)[1 + m^2 + 2m\cos(\Omega vt + \pi/2)];$$

$$I_{-1} = A_{-1}A_{-1}^* = (1/16)[1 + m^2 + 2m\cos(\Omega vt - \pi/2)].$$

Можно пренебречь m^2 по сравнению с 1.

Сравнив фазы в момент $t = 0$, получим разность фаз $\Delta\phi = \pi$.

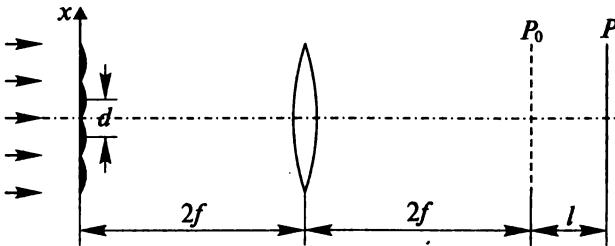


Рис. 9.30

Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в том, что плоскость наблюдения P смешается на некоторое расстояние l относительно плоскости P_0 , сопряженной с объектом (т. е. плоскости, в которой в соответствии с геометрической оптикой располагается его изображение) (рис. 9.30). При этом контрастность наблюданной картины периодически меняется при изменении l . Найдем период d фазовой синусоидальной решетки, если в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$, а также, при каких других значениях l изображение будет контрастным (№ 9.22). Из геометрической оптики следует, что в сопряженной плоскости (P_0) получаем перевернутое изображение предмета. В данном случае предметом является световое поле, создаваемое фазовой решеткой. При слабой фазовой модуляции это три плоские волны, распространяющиеся под углами $0, \pm\lambda/d$. Это следует из (9.4) и (9.22) $\Lambda = d = 2\pi/u = 2\pi/(ksina) = \lambda/sina \approx \lambda/a$. По условию ΔL равно разности положений фазовой решетки (9.10) и амплитудной решетки (9.9) $\Delta L = (\pi/2)/[k(1 - cosa)] \approx \pi/(ka^2)$. Отсюда определяем a и затем $d = \lambda/a = (2\Delta L\lambda)^{1/2}$. Последующие контрастные изображения будут восстанавливаться в соответствии с (9.9) через $2\Delta L$.

В фотографии изображения предметов на фотопластинках (а затем и на бумаге или в электронной записи) получают с помощью линзы. При этом регистрируется только интенсивность приходящих световых волн, и картина получается плоской.

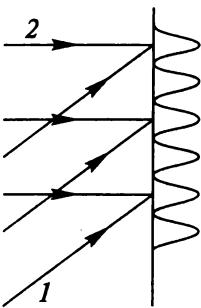


Рис. 9.31

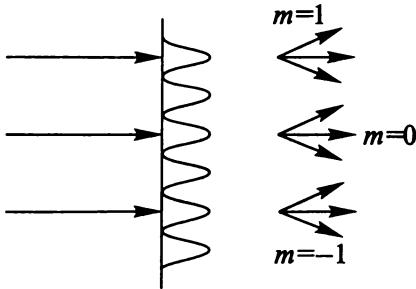


Рис. 9.32

Освещенный предмет создает световое поле, которое и дает возможность его видеть. Это поле можно представить, как уже отмечалось, в виде суммы плоских волн. Поэтому рассмотрим результаты для одной плоской волны от предмета, которую называют **предметной** (на рис. 9.31 обозначена цифрой 1). При отсутствии линзы на пластинке равномерная освещенность и постоянная интенсивность. Если одновременно на пластинку направить волну, когерентную с той, которой освещен предмет, называемую далее **опорной** (на рис. 9.31 обозначена цифрой 2), то на пластинке получится интерференционная картина от двух плоских волн. С помощью химических средств из этой интерференционной картины можно получить транспарант — синусоидальную решетку, в которой зарегистрирована также и разность фаз волн. Такой транспарант называется **гологр аммой** (от греч. «голог» — полный, «графо» — пишу). Если эту голограмму осветить опорной волной, то получаем три волны (рис. 9.32). Волна при $m = 1$ соответствует предметной волне (в отсутствие предмета), т. е. мнимому изображению предмета. Волна при $m = -1$ дает действительное изображение предмета.

Найдем амплитудный коэффициент пропускания $\tau(x)$ голограммы **точечного** источника света, если в качестве опорной волны используется нормально падающая на плоскость голограммы плоская волна. Расстояние от источника до голограммы равно L . Будем считать, что прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи. Найдем положение действительного и мнимого изображений при восстановлении изображения нормально падающей волной. Выясним, как изменится положение восстановленных изображений, если при записи использовать наклонный опорный пучок с углом наклона β . Оценим размер a_{\min} голограммы, при котором полностью используется разрешающая способность фотоэмульсии, равная n . Найдем размер b восстанов-

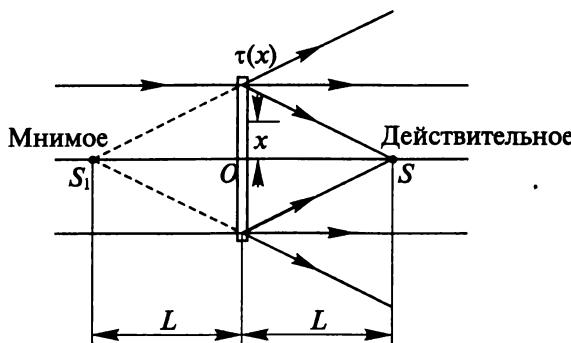


Рис. 9.33

ленного изображения (№ 9.33). На рис. 9.33 представлены голограмма и ход лучей. Если в точке O фазы совпадают, то на расстоянии x разность фаз

$$\Delta\phi = k[(L^2 + x^2)^{1/2} - L] \approx kx^2/(2L).$$

Отсчитывая фазу от источника, получаем

$$\phi = kL + kx^2/(2L).$$

Предметная волна, которая создает такое распределение фаз, $S_n = ae^{i\phi}$. Обозначая опорную волну $S_0 = a$, для суммы волн имеем: $S = S_0 + S_n = a(1 + e^{i\phi})$. Для интенсивности волны получаем

$$I = SS^* = 2a^2(1 + \cos\phi) \approx 2I_0\{1 + \cos[kL + kx^2/(2L)]\}. \quad (9.24)$$

Такую картину распределения интенсивности дает расходящаяся из точки или сходящаяся в точку волна.

Таким образом, прозрачность голограммы

$$\tau(x) \sim 1 + \cos[kL + kx^2/(2L)].$$

При падении на эту голограмму плоской волны, параллельной оси, за ней воспроизводятся три волны: 1) по нормали к голограмме, соответствующая опорной волне, 2) сходящаяся в точку S , являющаяся действительным изображением источника, и 3) расходящаяся подобно предметной волне из точки S_1 , являющейся мнимым изображением источника. Расстояние между соседними полосами на голограмме, в соответствии с (9.24), определяем из соотношения $kx_{m+1}^2/(2L) - kx_m^2/(2L) = 2\pi$, откуда

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m \approx 2\pi L/(kx_m) \approx \lambda L/x_m. \quad (9.25)$$

Это расстояние уменьшается с увеличением x_m . При разрешающей способности фотопластинки n для ее использования должно быть $\Delta x \approx 1/n$. Отсюда размер голограммы

$$a_{\min} = x_m \approx n\lambda L. \quad (9.26)$$

Изображение точечного источника является дифракционным пятном, и, в соответствии с (7.7), имеет диаметр $b \approx 2\lambda/(2a_{\min}) \approx 1/n$.

На рис. 9.34 показан ход лучей при использовании наклонного (под углом β) опорного пучка. Его комплексная амплитуда $S_0 = ae^{-iux}$, где $u = k \sin \beta$. Обозначая амплитуду предметной волны $S_n = ae^{i\phi}$, для суммарной волны, создающей голограмму, получаем: $S = S_n + S_0 = a(e^{i\phi} + e^{-iux})$. Для интенсивности имеем

$$I = SS^* = 2a^2[1 + \cos(\phi + ux)].$$

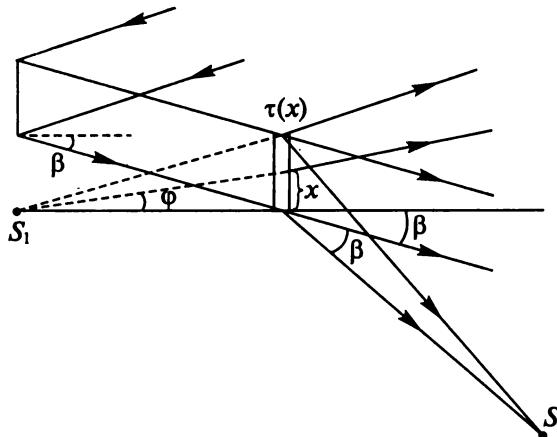


Рис. 9.34

При освещении голограммы $\tau(x) \sim I$ получаем три волны: 1) опорную, 2) сходящуюся в точку S (действительное изображение источника) и 3) расходящуюся из мнимого изображения источника S_i . Преимущество такой схемы в том, что опорная волна не мешает видеть мнимое изображение предмета.

Точечный объект движется параллельно фотопластинке, на которую записывается его голограмма. Оценим скорость v объекта, при которой голограмма будет иметь максимальное число колец. Объект и фотопластинка освещаются плоской волной с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$, нормальной к плоскости фотопластинки. Раз-

мер фотопластинки $D = 0,1$ м, расстояние между объектом и фотопластинкой $L = 1$ м, время экспозиции $\tau = 0,01$ с. Найдем также разрешающую способность голограммы Δl в направлении движения объекта (№ 9.38). Расстояние между кольцами определяется (9.25). Чтобы сохранилось максимальное число колец для данной голограммы, смещение объекта должно быть меньше расстояния между кольцами, которое минимально на краю голограммы: $v\tau \leq \lambda L/D$, откуда $v \leq \lambda L/(D\tau)$. Для разрешения расстояния Δl вдоль плоскости голограммы оно должно быть больше расстояния между кольцами на границе голограммы $\Delta l \approx \lambda L/D \approx 5$ мкм.

Оевая голограмма точечного источника, расположенного на расстоянии $L = 10$ см перед фотопластинкой, возникает при интерференции плоской опорной волны и предметной сферической волны, исходящей из этого источника. Найдем положения изображений источника, восстановленных с помощью той же опорной волны, если вплотную к фотопластинке приложить **положительную линзу** с фокусным расстоянием $f = 5$ см (№ 9.47). На рис. 9.33 показаны получающиеся без линзы изображения: мнимое S_1 и действительное S . Линза превращает мнимое изображение в действительное, так как $L > f$. Его положение определяем по формуле для линзы $1/z_1 + 1/L = 1/f$, откуда $z_1 = fL/(L - f) = 10$ см. Бывшее действительное изображение остается действительным. Для него формула линзы дает: $1/z_2 + 1/(-L) = 1/f$, откуда $z_2 = -fL/(L + f) = 3,3$ см. Кроме того на расстоянии $f = 5$ см (в фокусе линзы) появится действительное изображение восстанавливающей волны.

При использовании вместо положительной линзы **отрицательной** (№ 9.46) при $L = 20$ см и $f = -10$ см получаем, что линза оставляет мнимое изображение мнимым, но переводит его в положение z_1 , определяемое формулой линзы: $1/z_1 + 1/L = 1/(-f)$. Отсюда $z_1 = -fL/(L + |f|) = -6,7$ см. Бывшее действительное изображение становится мнимым и переходит в точку z_2 , определяемую формулой $1/z_2 + 1/(-L) = 1/(-f)$. Отсюда $z_2 = -|f|L/(L - |f|) = -20$ см. Кроме того, на расстоянии $z_3 = -f = -5$ см (в фокусе линзы) появится мнимое изображение восстанавливающей волны.

Голограмма точечного источника S , расположенного на расстоянии R_0 от фотопленки, получена по схеме Габора в когерентном свете с длиной волны λ_0 (рис. 9.35). Предполагая, что предметная и опорная волны имеют одинаковые амплитуды, равные A , найдем во френелевском приближении распределение интенсивности $I(\rho)$ на фотопленке при записи голограммы. Полученная таким образом голограмма была просвещена светом с **длиной волны** $\lambda > \lambda_0$. Найдем

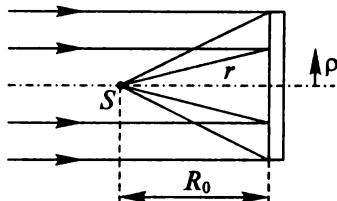


Рис. 9.35

положение действительного и мнимого изображений (№ 9.48—9.50). Так как $r = (R_0^2 + \rho^2)^{1/2} = R_0 (1 + \rho^2/R_0^2)^{1/2} \approx R_0 + \rho^2/(2R_0)$, во френелевском приближении предметную волну можно записать в виде

$$A \exp(ik_0 r) = A \exp(ik_0 R_0) \exp[ik_0 \rho / (2R_0)].$$

Опуская несущественный фазовый множитель $\exp(ik_0 R_0)$, получаем результат суммы плоской и сферической волн (на голограмме)

$$I = 2 A^2 \{1 + \cos[k_0 \rho^2 / (2R_0)]\}.$$

При просвечивании голограммы светом с длиной волны λ волновое поле непосредственно за голограммой будет равно

$$\begin{aligned} E \sim I \sim 1 + \cos[k_0 \rho^2 / (2R_0)] &= 1 + \cos[k(k_0/k)\rho^2 / (2R_0)] = \\ &= 1 + (1/2)\exp[ik(\lambda/\lambda_0)\rho^2 / (2R_0)] + (1/2)\exp[-ik(\lambda/\lambda_0)\rho^2 / (2R_0)] = \\ &= 1 + (1/2)\exp[ikp^2 / (2R)] + (1/2)\exp[-ikp^2 / (2R)]. \end{aligned}$$

Здесь $R = R_0 \lambda_0 / \lambda$.

Второй член описывает расходящуюся сферическую волну — мнимое изображение, а третий член — сходящуюся сферическую волну — действительное изображение. Таким образом, мнимое S_1 и действительное S_2 изображения располагаются на расстояниях $R = R_0 \lambda_0 / \lambda$ перед и за голограммой (продольное увеличение).

Заметим, что расстояние между кольцами (9.25) зависит от $R\lambda$ и поэтому минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения (№ 9.51) остается одинаковым.

На рис. 9.36 показано, как при голографировании в лазерном излучении **плоского предмета** A опорный пучок света создается с помощью призмы Пр, находящейся в плоскости предмета. Найдем расположение мнимого и действительного изображений предмета при просвечивании голограммы Г. Излучение лазера считаем плоской монохроматической волной. Угол отклонения луча призмой равен β . Расстояние от предмета до голограммы равно L (№ 9.32). Используя результаты предыдущей задачи и рис. 9.36, получаем изображения каждой точки предмета. Мнимое изображение находится в положении предмета (который при просвечивании голограммы отсутствует). Нижняя точка изображения S_1 . Действительное изображение имеет нижнюю точку S .

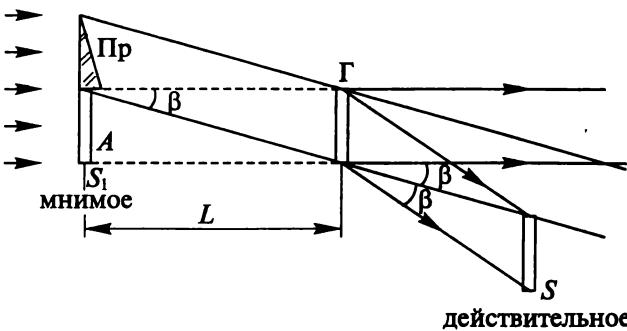


Рис. 9.36

Голограмма записана на пластинке радиусом $r = 5$ см. Она освещается монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, а изображение получается на расстоянии $L = 1$ м. Найдем допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda$, при которой еще полностью используется теоретическая разрешающая способность голограммы (№ 9.34). Разрешающая способность голограммы сохранится, т. е. вся голограмма будет работать, если разность хода волн с края голограммы и от центра не превышает длины излучаемого источником света цуга — длины когерентности (5.6)

$$(L^2 + r^2)^{1/2} - L \approx r^2/(2L) \leq c\tau = \lambda^2/\Delta\lambda. \quad (9.27)$$

$$\text{Отсюда } \Delta\lambda \leq 2L\lambda^2/r^2 = 0,2 \text{ нм.}$$

Получена голограмма небольшого предмета, расположенного на расстоянии $L = 50$ см от нее. Определим, каким должен быть размер a фотопластинки, чтобы записать на голограмме детали размером $b \approx 0,01$ мм, и какая немонохроматичность света $\Delta\lambda$ допустима при записи голограммы, если длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм (№ 9.35, 9.37). Размер детали должен быть больше размера дифракционного пятна

$$b \geq L\lambda/(2a).$$

Отсюда $2a \geq \lambda L/b = 2,5$ см. Допустимая немонохроматичность из (9.27)

$$\Delta\lambda \leq 8b^2/L. \quad (9.28)$$

Для приведенных в условии значений $\Delta\lambda = 1,6$ нм.

При записи голограммы предмета, находящегося на расстоянии $L = 1$ м, используется излучение Не-Не лазера ($\lambda \approx 6300$ Å). Восстанавливается изображение с помощью протяженного квази-

монохроматического источника с угловым размером $\alpha = 10^{-4}$ рад. Найдем, какой минимальный размер деталей в восстановленном изображении, и какая при этом требуется монохроматичность (№ 9.36). Восстановятся только те детали, угловой размер которых больше углового размера источника. Таким образом, минимальный размер деталей в восстановленном изображении $b \approx \alpha L = 10^{-2}$ см. Для определения требуемой монохроматичности из (9.28) находим $\Delta\lambda \leq 8\alpha^2 L \approx 8 \cdot 10^{-6}$ см.

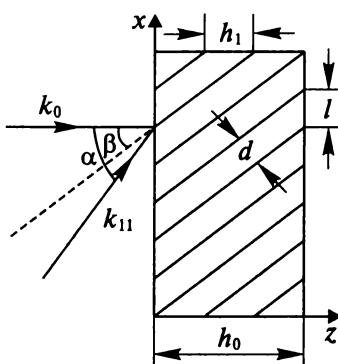


Рис. 9.37

При записи голограммы на фотопленку с толщиной слоя фотоэмульсии $h = 5$ мкм падают две плоские монохроматические волны ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) с равными амплитудами. Одна из волн (опорная) падает по нормали к фотопластинке, другая (предметная) — под углом $\alpha = 60^\circ$ к нормали. Предполагая, что показатель преломления фотоэмульсии $n = 1$, определим расстояние между слоями с максимальным почернением фотоэмульсии (интерференционные максимумы). Найдем, сколько таких слоев пройдет луч света, пронизывающий фотопластинку по нормали (№ 9.40). На рис. 9.37 показана пластина и падающие на нее волны. Так как амплитуды и длины волн одинаковы, для опорной волны имеем: $S_0 = ae^{ikz}$, а для предметной, соответственно, $S_n = ae^{i(kx\sin\alpha + kz\cos\alpha)}$. Их сумма $S = S_0 + S_n$.

Введем обозначение

$$\varphi = kx\sin\alpha - kz(1 - \cos\alpha). \quad (9.29)$$

Для интенсивности $I = SS^*$ получаем

$$I = 2a^2(1 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2(\varphi/2). \quad (9.30)$$

Максимумы находим из условия $\varphi/2 = \pi m$, где m — целое число. Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, получаем

$$x\sin\alpha - z\cos\alpha = \lambda m. \quad (9.31)$$

Обозначая угол наклона этих линий в плоскости (x, z) β , получаем

$$\operatorname{tg}\beta = dx/dz = (1 - \cos\alpha)/\sin\alpha = \operatorname{tg}(\alpha/2). \quad (9.32)$$

Расстояние между линиями (9.31) по оси x (при $z = 0$)

$$l = \lambda/\sin\alpha. \quad (9.33)$$

Расстояние между линиями (по нормали к ним)

$$d = l \cos\beta = (\lambda/2)/\sin(\alpha/2). \quad (9.34)$$

Расстояние между линиями по оси z из (9.31)

$$h_1 = \lambda/(1 - \cos\alpha) = (\lambda/2)/\sin^2(\alpha/2). \quad (9.35)$$

Число слоев, которое пройдет луч света, пронизывающий пластиночку по нормали, $N = h/h_1 = 5$.

В результате фотообработки линии максимумов становятся зеркальными поверхностями, т. е. получается полупрозрачная объемная отражательная решетка. Оценим относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ спектра отраженной волны при освещении этой решетки параллельным пучком белого света, распространяющимся вдоль оси z (№ 9.52). Используя (9.35) и (9.32), для числа зеркальных поверхностей получаем $N = (2h/\lambda)\sin^2\beta$. Столько же будет отраженных интерферирующих волн, длина волн которых λ_1 определяется условием Брэгга—Вульфа (волны должны быть в одной фазе) $d\sin\beta = \lambda_1$. Используя (9.34), находим $\lambda_1 = \lambda$. Как следует из (8.12) и (8.13), дисперсионная область (ширина спектра, при котором получаем интерференционную картину) определяется числом складываемых волн (порядком интерференции): $\Delta\lambda/\lambda = 1/m = 1/N$.

При создании объемной голографической решетки в среде толщиной $h = 50$ мкм регистрируется результат интерференции встречных пучков света с длиной волны $\lambda = 500$ нм (рис. 9.38). Оценим максимальную ширину спектра отраженной волны при освещении полученной объемной решетки параллельным пучком белого света (№ 9.53). При таком освещении в среде устанавливается стоячая волна. Число максимумов $N = h/(\lambda/2)$. Используя результат предыдущей задачи, получаем $\Delta\lambda = \lambda/N = 2,5$ нм. Для разрешающей способности такой решетки из (8.9) имеем: $R = \lambda/\delta\lambda = mN = 2h/\lambda = 200$.

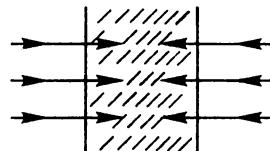


Рис. 9.38

Для записи голограммы без опорного пучка используется схема, изображенная на рис. 9.39. Предмет S , освещаемый параллельным пучком монохроматического света λ , расположен на расстоянии L от входной плоскости Π_0 , а фотопластинка (голограмма) -- в выходной плоскости Π_1 . В некоторой точке фурье-плоскости (общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2) установлен небольшой непро-

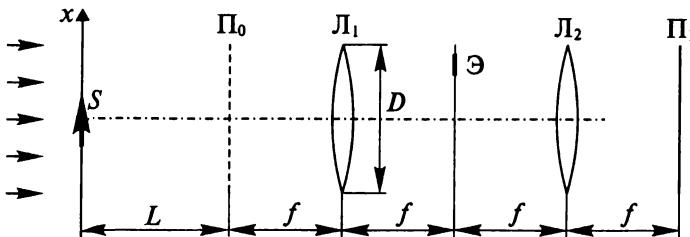


Рис. 9.39

зрачный экран Э. Полагая, что предмет — синусоидальная решетка с функцией пропускания $\tau(x) = (1 + \cos\Omega x)/2$, а непрозрачный экран перекрывает первый дифракционный максимум, найдем распределение интенсивности на голограмме, считая известным диаметр D линз. Найдем также положение восстановленных изображений. (Для восстановления используется плоская волна, нормально падающая на голограмму.) Оценим требуемый размер непрозрачного экрана (№ 9.39). За синусоидальной решеткой три волны: вдоль оптической оси и под углами, определяемые (9.19): $\lambda = \Lambda \sin\theta = (2\pi/\Omega)\sin\theta$. Вводя волновое число $k = 2\pi/\lambda$, получаем $ksin\theta = \Omega$, $kcos\theta = (k^2 - \Omega^2)^{1/2}$. Поле во входной плоскости

$$f(x) = (1/2)e^{ikL} + (1/4)e^{i(kx\sin\theta + kL\cos\theta)} + (1/4)e^{i(-kx\sin\theta + kL\cos\theta)}.$$

Экран перекрывает вторую волну, поэтому в выходной плоскости будет поле

$$g(x) = (1/2)e^{ikL} + (1/4)e^{i(-kx\sin\theta + kL\cos\theta)}.$$

Интенсивность в выходной плоскости

$$I(x) = gg^* = (1/4) + (1/16) + (1/8)\{e^{i[kx\sin\theta + L(1 - \cos\theta)]} + e^{-i[kx\sin\theta + L(1 - \cos\theta)]}\} = 5/16 + (1/4)\cos[kx\sin\theta + kL(1 - \cos\theta)].$$

Положение восстановленных с помощью нормально падающей на голограмму плоской волны изображений показано на рис. 9.40. Размер непрозрачного экрана (l) определяется размером дифракционного пятна в фокальной плоскости линзы $l \geq (\lambda/D)f$.

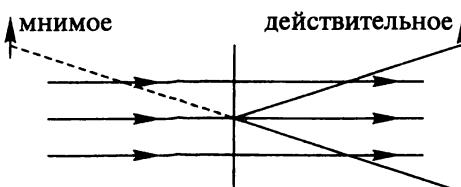


Рис. 9.40

Голографические дифракционные решетки получают путем фотографирования интерференционных полос, полученных в лазерном излучении, на фотопленке высокого разрешения. Пусть на плоскую

пленку под углом α и $-\alpha$ к нормали падают **два широких пучка** лазерного излучения с длиной волны λ (рис. 9.41). Интенсивность излучения в пучках $4I_0$ и I_0 соответственно. После проявления и обработки фотопленки ее просвечивают лазерным пучком интенсивностью $4I_0$ и той же длины волны λ . Этот пучок падает на поверхность полученной таким образом голограммической решетки под углом α к нормали. Предполагая, что амплитудная прозрачность решетки пропорциональна интенсивности света при записи, определим спектр плоских волн за решеткой (№ 9.41). Используя (3.9) и (3.6) и вводя пространственную частоту (9.12) $\Omega = ks \sin \alpha \approx ka$, имеем для суммарной интенсивности пучков

$$I = 4I_0 + I_0 + 4I_0 \cos(2\Omega x) = I_0[5 + 4\cos(2\Omega x)].$$

При освещении голограммы получаем за ней поле

$$f(x) \sim I_0[5 + 2(e^{i2\Omega x} + e^{-i2\Omega x})](4I_0)^{1/2}e^{i\Omega x} \sim 5e^{i\Omega x} + 2e^{-i\Omega x} + 2e^{3i\Omega x}.$$

Таким образом, за решеткой получаем три волны. Наибольшую амплитуду имеет волна, распространяющаяся под углом α , т. е. в направлении падающей волны.

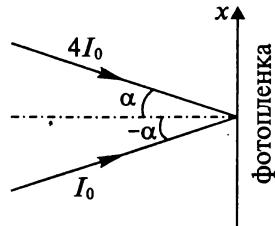


Рис. 9.41

10. Дисперсия света. Эффект Доплера в оптике

Распространение возмущения (изменение некоторого параметра) в виде волны по различным средам было рассмотрено в механике в струне и упругих средах (см. 1, с. 272), в термодинамике в газе (см. 2, с. 45), в электричестве в среде, определяемой диэлектрической и магнитной проницаемостями (см. 3, с. 480) и в оптике (2.4). Так как всякое возмущение можно представить в виде ряда Фурье — разложения по гармоникам, в первую очередь рассматривается гармоническое возмущение. Для электрического поля E в световой волне имеем волновое уравнение (для плоской волны в направлении x)

$$\partial^2 E / \partial t^2 = v^2 \partial^2 E / \partial x^2, \quad (10.1)$$

где $v^2 = 1/(\epsilon\mu)$.

Решение этого уравнения представляет сумму двух произвольных функций

$$E(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (10.2)$$

Для гармонического возмущения, вводя частоту ω и волновой вектор $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, получаем

$$E(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + B \sin(\omega t + kx). \quad (10.3)$$

Решение представляет собой две волны, бегущие в положительном и отрицательном направлениях оси x . **Фазой волны**, например, бегущей в положительном направлении оси x , называется аргумент функции

$$A \sin(\omega t - kx). \quad (10.4)$$

Скорость распространения фазы (**фазовая скорость**) определяется аргументом фазы. Скорость из условия $\omega t - kx = \text{const}$

$$v = dx/dt = \omega/k. \quad (10.5)$$

С такой скоростью волна распространяется без изменения своей формы. Фазовая скорость, являясь свойством среды, по которой распространяется волна, зависит от ω и k . Бегущая волна (10.4) не может переносить никакого сигнала. Для передачи сигнала ее надо прервать или изменить. В простейшем случае рассмотрим сумму близких по ω и k волн

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega, \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega, k_1 = k_0 + \delta k, k_2 = k_0 - \delta k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = A\sin(\omega_1 t - k_1 x) + A\sin(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2A\cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2 - (k_1 - k_2)x/2]\sin[(\omega_1 + \omega_2)t/2 - \\ &\quad - (k_1 + k_2)x/2] = 2A\cos(t\delta\omega - x\delta k)\sin(\omega_0 t - k_0 x). \end{aligned}$$

Обозначим переменную амплитуду

$$a = 2A\cos(t\delta\omega - x\delta k). \quad (10.6)$$

Происходит как бы модуляция амплитуды.

В распространяющейся волне

$$E = a\sin(\omega_0 t - k_0 x),$$

амплитуда волны (10.6) медленно меняется во времени и в пространстве. Скорость распространения изменения амплитуды по пространству называется **групповой скоростью**. Из условия $t\delta\omega - x\delta k = \text{const}$ она равна (№ 10.1)

$$u = \delta\omega/\delta k. \quad (10.7)$$

Это скорость перемещения амплитуды и, следовательно, энергии в волне. Найдем связь между групповой (10.7) и фазовой (10.5) скоростями

$$u = d\omega/dk = d(vk)/dk = v + kdv/dk. \quad (10.8)$$

Подставляя $k = 2\pi/\lambda$, получаем формулу Релея

$$u = v - \lambda dv/d\lambda. \quad (10.9)$$

Зависимость фазовой скорости от длины волны называется **дисперсией**.

Заметим, что понятие групповой скорости теряет смысл при быстрой деформации профиля волны, а годится только для случая не очень большой дисперсии.

Дисперсия называется **нормальной**, если

$$dv/d\lambda > 0 \text{ и } u < v \quad (10.10)$$

и **аномальной**, если

$$dv/d\lambda < 0 \text{ и } u > v. \quad (10.11)$$

Вводя скорость света в вакууме c , когда $\epsilon = \mu = 1$, для показателя преломления получаем

$$n = c/v. \quad (10.12)$$

Длина волны в среде

$$\lambda = 2\pi v/\omega = 2\pi c/(n\omega) = \lambda_0/n, \quad (10.13)$$

где λ_0 — длина волны в вакууме.

Для групповой скорости из (10.9) получаем (№ 10.2)

$$u = (c/n)[1 + (\lambda/n)dn/d\lambda] = v[1 + (\lambda/n)dn/d\lambda]. \quad (10.14)$$

Из (10.8) и (10.13) находим

$$u = 1/(dk/d\omega) = 1/[d(2\pi/\lambda)/d\omega] = 1/[d(\omega n/c)/d\omega] = \\ = c/(n + \omega dn/d\omega) = c/(n + vdn/dv). \quad (10.15)$$

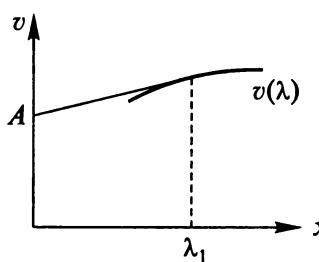


Рис. 10.1

Свойства среды определяют зависимость фазовой скорости света в ней от длины волны. На рис. 10.1 показана зависимость $v(\lambda)$ и касательная к ней в некоторой точке при $\lambda = \lambda_1$, которая пересекает ось ординат в точке A . Перепишем (10.9) в виде $v = u + (dv/d\lambda)\lambda$. Это уравнение **прямой линии** в координатах (v, λ) , которая пересекает ось ординат при значении, равном групповой скорости u (№ 10.3).

Покажем, что в среде с **линейным законом дисперсии** $v = a + b\lambda$ возмущение любой формы, непрерывно изменяясь, будет периодически восстанавливаться. Так как любое возмущение можно представить как сумму гармонических волн, можно ограничиться синусоидами. При этом достаточно показать, что это выполняется для трех гармонических волн. На рис. 10.2 изображены три волны в момент, когда их максимумы находятся в точке A (для удобства

рисунка амплитуды взяты одинаковой величины). В этот момент ближайшие к точке A максимумы находятся в точках E , D и C . Именно эти точки при дальнейшем их движении могут снова совпасть в некоторой точке. Проверим это. За время τ точка E пройдет путь $s_1 = v_1\tau$, а точка D , чтобы совпасть с точкой E , должна пройти

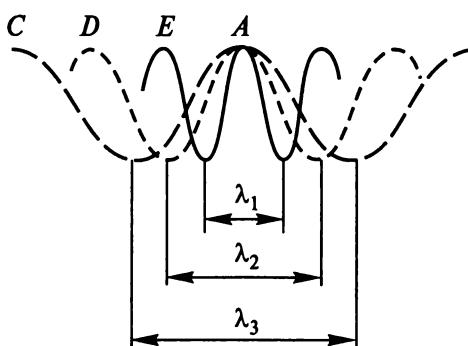


Рис. 10.2

пусть, на $\lambda_2 - \lambda_1$ больший: $s_2 = v_2\tau = s_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = v_1\tau + \lambda_2 - \lambda_1$. Откуда $\tau = (\lambda_2 - \lambda_1)/(v_2 - v_1) = 1/b$. До встречи C и E проходят $s_1' = v_1\tau'$ и $s_3 = v_3\tau' = s_1' + \lambda_3 - \lambda_1 = v_1\tau' + \lambda_3 - \lambda_1$. Откуда $\tau' = (\lambda_3 - \lambda_1)/(v_3 - v_1) = 1/b = \tau$. Таким образом, максимумы трех волн снова совпадут (№ 10.4).

Вычислим групповую скорость u для различных законов дисперсии (v — фазовая скорость):

- 1) $v = a$ ($a = \text{const}$) — недиспергирующая среда, например звуковые волны в воздухе;
- 2) $v = a(\lambda)$ — волны на поверхности воды, вызываемые силой тяжести (гравитационные волны);
- 3) $v = a/(\lambda)^{1/2}$ — капиллярные волны;
- 4) $v = a/\lambda$ — поперечные колебания стержня;
- 5) $v = (c^2 + b^2\lambda^2)^{1/2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света в вакууме; λ — длина волны в среде);
- 6) $v = c\omega/(\omega^2\epsilon\mu - c^2\alpha^2)^{1/2}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненным диспергирующей средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu(\omega)$ (c — скорость света в вакууме; α — постоянная, зависящая от размеров и формы поперечного сечения волновода) (№ 10.5). Используя (10.8) и (10.9), получаем:

- 1) $u = v = a$;
- 2) $u = v - (1/2)\lambda a/(\lambda)^{1/2} = a(\lambda)^{1/2}/2 = v/2$;
- 3) $u = a/(\lambda)^{1/2} + (1/2)\lambda a/(\lambda)^{3/2} = (3/2)a/(\lambda)^{1/2} = (3/2)v$;
- 4) $u = a/\lambda + \lambda a/\lambda^2 = 2a/\lambda = 2v$;
- 5) $u = v - b^2\lambda^2/v = c^2/v$;
- 6) из (10.5) следует: $v = c\omega/(\omega^2\epsilon\mu - c^2\alpha^2)^{1/2} = \omega/k$. Отсюда $ck = (\omega^2\epsilon\mu - c^2\alpha^2)^{1/2}$. Дифференцируя по ω и подставляя это выражение окончательно получаем: $cdk/d\omega = (v/c)[\epsilon\mu + (\omega/2)d(\epsilon\mu)/d\omega]$.

В результате

$$u = d\omega/dk = (c^2/v)/[\epsilon\mu + (\omega/2)d(\epsilon\mu)/d\omega]. \quad (10.16)$$

В случае немагнитной среды ($\mu = 1$) из (10.16) находим, что соотношение

$$uv = c^2. \quad (10.17)$$

выполняется при условии

$$\epsilon + (\omega/2)d\epsilon/d\omega = 1.$$

Отсюда получаем $d\varepsilon/(1 - \varepsilon) = 2d\omega/\omega$. Интегрируя это уравнение, находим $(\varepsilon - 1)\omega^2 = A = \text{const}$ и **закон дисперсии**: $\varepsilon = 1 + A/\omega^2$ (№ 10.6).

Так как групповая скорость, соответствующая передаче энергии или сигнала, по специальной теории относительности (см. 1, с. 165) не может превзойти скорость света, из (10.17) следует, что фазовая скорость может превосходить скорость света в вакууме (№ 10.7).

Найдем групповую скорость *и рентгеновского излучения* в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения при падении этих волн на среду из воздуха равен α . Показатель преломления рентгеновских волн определяется выражением $n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, где ω_0 — постоянная величина (№ 10.8). Из условия следует, что показатель преломления меньше 1. Таким образом, $n = \sin\alpha/\sin 90^\circ$. Для фазовой скорости имеем

$$v = c/n = c/(1 - \omega_0^2/\omega^2)^{1/2} = \omega/k.$$

Отсюда $ck = (\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. Дифференцируя, находим

$$cdk = \omega d\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}.$$

В результате $u = d\omega/dk = c(\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\omega = c^2k/\omega = c^2/v = cn = \sin\alpha$.

Майкельсон измерил скорость света в сероуглероде по **методу вращающегося зеркала**. Показатель преломления сероуглерода для средней длины волны видимого спектра $n = 1,64$, а величина $1 + (\lambda/n)dn/d\lambda = 0,93$. Определим, какое следует ожидать значение для отношения скорости света в вакууме к измеренной этим методом скорости света в сероуглероде (№ 10.9). Метод вращающегося зеркала связан с прерыванием гармонической волны, т. е. дает групповую скорость. Из (10.14) имеем

$$c/u = n/[1 + (\lambda/n)dn/d\lambda] = 1,64/0,93 = 1,76.$$

На вход **оптического световода** подается периодическая последовательность коротких импульсов длительностью $\tau = 0,1$ нс с частотой следования $v = 1$ ГГц. Источником света является натриевая лампа, в излучении которой выделяют две желтые линии с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. Определим, при какой минимальной длине световода частота следования импульсов на выходе станет равной 2 ГГц. Дисперсия показателя преломления стекла $dn/d\lambda = -1033$ см $^{-1}$. Затухание в стекле не учитываем (№ 10.57). Ширина спектра короткого импульса, который считаем

прямоугольным в соответствии с (5.7), $\Delta f = 1/\tau = 10^{10}$ Гц. Частотный интервал между желтыми линиями натриевой лампы из (5.8) $\Delta F = c\Delta\lambda/\lambda^2 = 5,2 \cdot 10^{11}$ Гц, т. е. этот частотный интервал значительно превосходит спектр импульса, и линии на таком интервале могут быть разрешены. Время распространения импульса по световому с учетом (10.14)

$$t = L/u = L(n/c)/[1 + (\lambda/n)dn/d\lambda] \approx L(n/c) [1 - (\lambda/n)dn/d\lambda].$$

Здесь использовано разложение по малой величине (λ/n) $dn/d\lambda \approx 0,034 \ll 1$.

Для изменения времени распространения в зависимости от длин волн имеем

$$\Delta t = t_2 - t_1 = -L(\Delta\lambda/c)dn/d\lambda = 1/v - 1/(2v) = 1/(2v).$$

Откуда $L = -c/(2v\Delta\lambda dn/d\lambda) = 2,42 \cdot 10^5$ см = 2,42 км.

Получим формулу для диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ **ионизованного газа** в монохроматическом электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$. Столкновениями электронов и ионов пренебрегаем (№ 10.10). Рассмотрим среду в виде атомов разреженного газа, в которых колебания электрона соответствуют гармоническому осциллятору. Вводя массу электрона m , заряд e и характеристику упругой связи в атоме f , получаем для вынужденных под действием электрического поля отклонений (r) электрона от положения равновесия (уравнение колебаний)

$$mr'' + fr = eE_0 \cos \omega t. \quad (10.18)$$

Здесь штрихи обозначают вторую производную по времени.

Вводя собственную частоту осциллятора $\omega_0 = (f/m)^{1/2}$, можно переписать уравнение колебаний

$$r'' + \omega_0^2 r = (e/m)E_0 \cos \omega t. \quad (10.19)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде решения однородного уравнения (правая часть равна нулю) плюс частное решение неоднородного. Решение однородного уравнения быстро затухает. Поэтому для теории дисперсии имеет значение только частное решение, которое ищем в виде

$$r = A \cos \omega t, A = (e/m)E_0/(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (10.20)$$

Атом в электрическом поле приобретает дипольный момент pr . Обозначив число атомов в единице объема N , для вектора поляризации имеем

$$P = Ner = N(e^2/m)E_0 \cos \omega t / (\omega_0^2 - \omega^2) = N(e^2/m)E / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (10.21)$$

Используя связь электрической индукции с диэлектрической проницаемостью и полем $D = \epsilon E = E + 4\pi P$, получаем для показателя преломления и диэлектрической проницаемости

$$n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi N (e^2/m) / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (10.22)$$

Заметим, что для атомов или молекул с большим собственным дипольным моментом (который проявляется в статике и определяет ϵ) $n^2 < \epsilon$, так как n определяется для электромагнитных волн, имеющих большую частоту. При высоких частотах собственный дипольный момент не успевает проявиться.

Формула (10.22) не применима при $\omega = \omega_0$. Качественно экспериментальная зависимость показана на рис. 10.3.

Для рентгеновских лучей ($\omega \gg \omega_0$) и плазмы ($\omega_0 = 0$) (№ 10.10) получаем из (10.22)

$$n^2 = \epsilon = 1 - 4\pi N (e^2/m) / \omega^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 = 1 - v_p^2 / v^2, \quad (10.23)$$

где плазменная частота

$$\omega_p = (4\pi Ne^2/m)^{1/2} = 2\pi v_p. \quad (10.24)$$

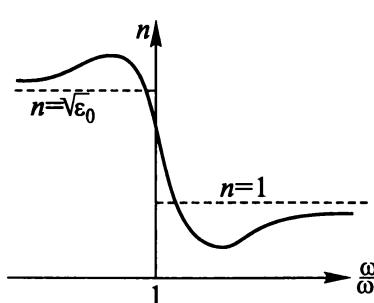


Рис. 10.3

При $\omega > \omega_p$ получаем $n < 1$ и $v = c/n > c$ (№ 10.11). При $\omega < \omega_p$

$$n = \pm i \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (10.25)$$

т. е. получаем стоячую волну, которая изменяется с высотой (но это не поглощение, которым пренебрегли), а затухание (№ 10.12)

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{\pm(2\pi/\lambda)z} e^{i\omega t}. \quad (10.26)$$

От такой стоячей волны происходит распространение волны в обратном направлении (отражение). Если слой плазмы имеет конечную толщину (h), то далее распространяется волна с амплитудой $E_0 e^{-(2\pi/\lambda)z} e^{i\omega t}$. Для интенсивности соответственно получаем

$$I = I_0 e^{-(4\pi/\lambda)zh} = e^{-(4\pi v/c)zh}. \quad (10.27)$$

При изучении прохождения плоской электромагнитной волны частоты $v = 8$ МГц через плоские однородные слои плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^6$ см⁻³ найдено, что энер-

гетические коэффициенты пропускания волн отличаются в 10 раз для слоев плазмы, толщины которых различаются в два раза. Пренебрегая интенсивностью волн, отраженных от задней границы каждого слоя, найдем толщины h_1 и h_2 (№ 10.19). Из (10.27) следует $I_2/I_1 = \exp[-(4\pi\nu/c)\chi(h_2 - h_1)]$. Так как по условию $h_2 = 2h_1$, то получаем $h_1 = c\ln 10/(4\pi\nu\chi)$. Используя (10.23) и (10.25), находим $h_1 \approx 13,5$ м, $h_2 \approx 27$ м.

В ионосфере Земли (на высоте ~ 100 км), где концентрация свободных электронов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$ и постоянное магнитное поле $B = 0,5$ Гс, вдоль силовых линий магнитного поля могут распространяться электромагнитные волны («свистящие атмосферики») с законом дисперсии вида: $k^2 = 4\pi Ne\omega/(cB)$, где k — волновое число; e — заряд электрона; ω — угловая частота; c — скорость света. Найдем фазовую и групповую скорости таких волн, если $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ (№ 10.44). Из условия с помощью (10.5) получаем фазовую скорость $v = \omega/k = [cB\omega/(4\pi Ne)]^{1/2} = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ см/с} = c/6$. Из условия $\omega = k^2 c B / (4\pi N e)$ после дифференцирования и подстановки k находим $u = 2v = 10^{10} \text{ см/с} = c/3$.

Ионосфера представляет плазму, и прохождение через нее радиоволн определяется (10.23) и (10.24). При частоте волны $\omega > \omega_p$, волна проходит через ионосферу, а при $\omega < \omega_p$, волна **полностью отражается** в соответствии с (10.26) (№ 10.13).

Если радиосигнал частоты $\nu = \omega/(2\pi)$ отражается на определенной высоте, то концентрация электронов в точке отражения определяется (10.24) (№ 10.14)

$$N = \pi m v^2/e^2 = 1,24 \cdot 10^{-8} \nu^2.$$

Показатель преломления ионосферы для радиоволн частотой $\nu = 10$ МГц равен $n = 0,90$. Найдем концентрацию N электронов в ионосфере, а также фазовую v и групповую u скорости для этих радиоволн (№ 10.18). Из (10.23) $N = (1 - n^2)m\omega^2/(4\pi e^2) \approx 0,24 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$. Фазовая скорость $v = c/n \approx 3,3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ (больше скорости света в вакууме). Из (10.17) получаем групповую скорость

$$u = c^2/v = cn. \quad (10.28)$$

В результате $u = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ (меньше скорости света в вакууме).

Плазма заполняет полупространство $x > 0$, причем **концентрация** электронов **растет** вглубь по закону $N(x) = \mu x$; $\mu = \text{const}$. Перпендикулярно границе $x = 0$ падает электромагнитный волновой пакет со средней частотой ω , уходит в плазму, отражается от зоны критической плотности и через некоторое время τ регистрируется

при $x = 0$. Определим время τ (№ 10.43). Глубину l , на которую уходит в плазму пакет, определяем из условия $\omega_p = \omega$. Используя (10.23), находим $l = \omega^2 m e / (4\pi e^2 \mu)$. Для скорости распространения пакета (групповая скорость) из (10.28) получаем $dx/dt = u = cn$. Откуда для времени

$$dt = (1/c) dx / (1 - x/l)^{1/2}.$$

Интегрируя до предельной глубины l , получаем время распространения в одну сторону $2l/c$. В результате $\tau = m\omega^2 / (\mu\pi c e^2)$.

Оценим диапазон длин волн, в котором можно обнаружить источник космического радиоизлучения, находящийся за Луной, если угловой размер лунного диска $\psi \approx 10^{-2}$ рад. При этом среднюю высоту неровностей лунной поверхности принимаем равной $h \approx 100$ м, а среднюю концентрацию электронов в ионосфере Земли $N \approx 10^6$ см⁻³ (№ 10.59). Для прохождения волн через ионосферу их частота, в соответствии с (10.23), должна быть больше плазменной $\omega_p = (4\pi Ne^2/m)^{1/2} \approx 5.6 \cdot 10^7$ с⁻¹. Значит максимальная длина волны $\lambda_{max} = 2\pi c / \omega_p \approx 35$ м. Со стороны малых длин волн ограничение связано с дифракцией на поверхности Луны. Если неровности поверхности Луны равны ширине зоны Френеля на радиусе Луны, то интенсивность волны в точке наблюдения будет близка к нулю. Из (6.6) для плоской волны, идущей из космоса, радиус зоны Френеля $r_m^2 \approx Lm\lambda$. Дифференцируя это, имеем: $2r_m dr_m = L\lambda dm$. При $dm = 1$ имеем $dr_m = h$. Соответственно $r_m = r_L$ — радиус Луны и $\psi = 2r_L/L$. Откуда $\lambda_{min} = h\psi \approx 1$ м.

На плоскую границу плазмы, занимающей полупространство, под углом ϕ падает плоская электромагнитная волна длиной λ . Концентрация электронов плазмы растет вглубь, при этом на поверхности она много меньше критической. Определим концентрацию электронов N_{kp} внутри плазмы, при которой наступает полное отражение волны (№ 10.56). Представим плазму в виде m слоев с показателями преломления: n_1, n_2, \dots, n_m . Последний слой «предкритический», далее — полное внутреннее отражение. Для каждого слоя запишем закон преломления:

$$\sin\phi / \sin\psi_1 = n_1 / 1, \quad \sin\psi_1 / \sin\psi_2 = n_2 / n_1, \quad \dots, \quad \sin\psi_m / \sin\psi_{kp} = n_{kp} / n_m.$$

Перемножая, получим

$$\sin\phi / \sin\psi_{kp} = n_{kp}, \text{ где } \sin\psi_{kp} = 1.$$

Все это справедливо и при $m \rightarrow \infty$. В результате, используя (10.23), находим

$$n_{kp}^2 = \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \omega_p^2/\omega^2; \\ \cos^2\varphi = \omega_p^2/\omega^2 = 4\pi N_{kp}e^2/(m_e\omega^2); \\ N_{kp} = m_e\omega^2\cos^2\varphi/(4\pi e^2) = m_e\pi c^2\cos\varphi/(\lambda^2 e^2).$$

Фотосфера Солнца представляет собой плазму, и прохождение радиоволн через нее с учетом (10.24) определяется условием для длины волны (№ 10.15)

$$\lambda < (c/e)(m\pi/N)^{1/2}.$$

Получим выражение для **фазовой скорости** радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны λ в ионосфере (№ 10.16). Подставляя $n = c/v$ и $\omega = 2\pi c/\lambda$ в (10.23), находим $v^2 = c^2 + Ne^2\lambda^2/(\pi m)$.

Лазер на CO₂ со средней длиной волны $\lambda = 10,6$ мкм излучает две **близкие частоты** v_1 и v_2 . Излучение такого лазера смешивается в нелинейном кристалле с излучением лазера на Nd ($\lambda_3 = 1,06$ мкм). Анализ излучения на комбинационных частотах ($v_1 + v_3$ и $v_2 + v_3$) показал, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 0,5$ нм. Определим разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ излучения лазера (№ 10.17). Разница длин волн

$$\delta\lambda = c/(v_3 + v_1) - c/(v_3 + v_2) = c(v_2 - v_1)/[(v_1 + v_3)(v_2 + v_3)] = 5 \text{ \AA}.$$

Используя это, для лазера получаем

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 &= c/v_1 - c/v_2 = c(v_2 - v_1)/(v_1 v_2) = 5 \text{ \AA}(v_1 + v_3) \times \\ &\times (v_2 + v_3)/(v_1 v_2) = 5 \text{ \AA}(1 + v_3/v_1)(1 + v_3/v_2) \approx 5 \text{ \AA}(11)^2 = \\ &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 60 \text{ нм}. \end{aligned}$$

Для оценки интегральных и средних характеристик межзвездной плазмы можно использовать экспериментальный факт, установленный сразу же после открытия пульсаров. Оказалось, что из-за дисперсии плазмы импульсы **радиоизлучения пульсаров** на более низких частотах всегда запаздывают по отношению к импульсам более высоких частот. Рассмотрим следующий идеализированный пример. Два монохроматических сигналов с длинами волн $\lambda_1 = 3$ см и $\lambda_2 = 5$ см распространяются в плазме. Определим полное число N_n свободных электронов на пути сигналов (т. е. их число в цилиндре площадью 1 см² и высотой, равной расстоянию от источника до приемника), если испущенные одновременно сигналы запаздывают друг относительно друга на время $\Delta t = 10^{-5}$ с. Концентрация электронов хотя и не постоянна вдоль пути сигналов, но показатель преломления везде весьма близок к единице.

Определим также среднюю концентрацию N свободных электронов на пути сигналов, если их относительное запаздывание $\Delta t/t_0 = 10^{-15}$ (t_0 — время распространения сигнала от источника до приемника) (№ 10.20). Используя (10.26) и (10.23) и, что n близко к 1, для времени распространения волны имеем

$$dt = dx/u = (1/c)dx/(1 - \omega_p^2/\omega^2) \approx (1/c)dx[1 + (1/2)\omega_p^2/\omega^2].$$

Используя (10.23), вводя полное число электронов на всем пути N_n и интегрируя время распространения, получаем

$$t = t_0 + 4\pi e^2/(2cm\omega^2) \int N(x)dx = t_0 + e^2\lambda^2 N_n/(2\pi mc^3).$$

Для разности времен распространения имеем

$$\Delta t = N_n e^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)/(2\pi mc^3); \\ N_n = 2\pi mc^3 \Delta t / [e^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)] \approx 4 \cdot 10^{17},$$

откуда $N = N_n/(ct_0) = 2\pi mc^2 \Delta t / [e^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)t_0] = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$.

Импульсное излучение пульсара CP 1919 + 21 на частоте $v = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ с позже, чем соответствующий импульс на частоте $v = 2000$ МГц. Оценим **расстояние L до пульсара**, если принять среднюю концентрацию электронов в межзвездном пространстве равной $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$ (№ 10.21). Из (10.28) и (10.23) получаем

$$u = c(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}. \quad (10.29)$$

Для показателя преломления, близкому к 1, находим

$$u \approx c[1 - Ne^2/(2\pi mv^2)]. \quad (10.30)$$

Для разницы времен прихода импульсов получаем

$$\Delta t = L(1/u_1 - 1/u_2) = L(u_2 - u_1)/(u_1 u_2) \approx \\ \approx LNe^2(1/v_1^2 - 1/v_2^2)/(2\pi mc) \approx LNe^2/(2\pi mv_1^2).$$

Отсюда $L = 2\pi cmv_1^2 \Delta t / (Ne^2) \approx 6,67 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ св. лет}$.

Измерение **скорости ракеты** при вертикальном взлете проводится импульсным радиолокатором, расположенным в точке старта. На экране локатора по оси времени фиксируются моменты послылок двух последовательных радиоимпульсов и их приема после отражения от ракеты. Поскольку скорость распространения радиоволн в ионосфере точно не известна, возникает погрешность в определении скорости ракеты. Найдем относительную погрешность в определении скорости ($\Delta v/v$) ракеты, принимая максимальную концентрацию электронов в ионосфере равной

$N = 10^6$ см⁻³, а рабочую частоту радиолокатора $v = 400$ МГц (№ 10.22). Используя (10.30) и обозначая время распространения сигнала t и разность между результатами двух измерений Δt , находим

$$\Delta v/v = \Delta t/t = (c - u)/c = Ne^2/(2\pi mv^2). \quad (10.31)$$

В результате эта величина равна $2,5 \cdot 10^{-4}$.

В целях проверки теории относительности предполагается с помощью радиоволн точно измерить **параметры орбиты** искусственного спутника Земли. Однако из-за преломления радиоволн в ионосфере, где средняя концентрация электронов $N = 10^5$ см⁻³, возникают ошибки измерений. Оценим минимальную частоту v_{min} , на которой следует проводить такие наблюдения (№ 10.23). В релятивистское определение импульса, энергии, изменения хода времени и сокращения размеров входит поправка к единице порядка $(v/c)^2$ (см. 1, с. 179). Для параметров орбиты с учетом (10.31)

$$\Delta R/R \sim (v/c)^2/1 \sim \Delta t/t \sim \Delta u/u \sim Ne^2/(2\pi mv^2).$$

Отсюда $v_{min} \approx e(c/v)(N)^{1/2}/(2\pi m)^{1/2} \approx 0,8 \cdot 10^{11}$ Гц.

Определим число свободных электронов на атом Ag, если пленка серебра прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии $E = 5$ эВ. Для серебра относительная атомная масса $A = 108$, плотность $\rho = 10,5$ г/см³ (№ 10.24). Используя постоянную Планка \hbar , получаем для частоты ультрафиолета $\omega = E/\hbar = 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}$ ($1,054 \cdot 10^{-27}$) $\approx 8 \cdot 10^{15}$ 1/с. Граница прозрачности определяется из (10.23) при $n = 0$, откуда

$$N = m\omega^2/(4\pi e^2) = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

Число атомов серебра в единице объема

$$N_{Ag} = \rho N_A/A, \quad (10.32)$$

где N_A — число Авогадро (см. 2, с. 9). Получаем $N_{Ag} = 6 \cdot 10^{22}$ см⁻³, т. е. один электрон на три атома серебра.

Параллельный пучок рентгеновского излучения длины волны $\lambda = 0,1$ нм падает на тонкую двояковыпуклую линзу из бериллия (плотность бериллия $\rho = 1,85$ г/см³, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$) с поверхностями одинаковых радиусов кривизны $R = 40$ см. Диаметр линзы считать равным $D = 9$ см. Найдем угол расхождения ϕ пучка после линзы (№ 10.25). В соответствии с (10.23) показатель преломления среды n меньше

единицы, и ее можно считать облаком электронов по Z на каждый атом. Используя (1.15), находим для фокусного расстояния линзы

$$1/F = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2) = (n - 1)2/R. \quad (10.33)$$

Для фокусного расстояния получаем отрицательную величину. Таким образом, линза является рассеивающей.

Угол расхождения пучка

$$\phi \approx D/F = 2D(n - 1)/R.$$

Используя (10.23) и (10.32), соответствующую бериллию, находим

$$\phi \approx DZ\rho N_A e^2 \lambda^2 / (R\pi A m_e c^2) \approx 10^{-6} \text{ рад.}$$

Дифракционная расходимость $\Delta\phi \approx \lambda/D \approx 10^{-9}$ рад $<< \phi$.

Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на плоско-вогнутую линзу из графита (плотность графита $\rho = 2,25 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 6$, относительная атомная масса $A = 12$). Предполагая, что для рентгеновского излучения все электроны вещества можно считать свободными, оценим попечерный размер дифракционного пятна в фокусе линзы r_f для излучения с длиной волны $\lambda = 2 \text{ нм}$. Радиус вогнутой поверхности линзы $R = 60 \text{ см}$, диаметр $D = 5 \text{ см}$ (№ 10.58). Для концентрации электронов, подобно (10.32), имеем $N = ZN_A\rho/A = 6,8 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. В соответствии с (10.23) показатель преломления графита для рентгеновского излучения

$$n = [1 - 4\pi Ne^2/(m\omega^2)]^{1/2}.$$

Подставив $\omega = 2\pi c/\lambda$, получим $n \approx 0,88$.

Используя (10.33), находим $F = R/(n - 1) = 500 \text{ см}$.

Из (7.17) размер дифракционного пятна $r_f \approx \lambda F/D \approx 200 \text{ нм}$.

На экран из ${}^9\text{Be}$ (плотность $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$) падает плоская волна $\lambda = 100 \text{ \AA}$ (от рентгеновского лазера). В экране имеется круглое **отверстие** диаметром $d = 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ см}$. Расстояние до точки P наблюдения $L = 1 \text{ м}$. Определим толщину экрана h , когда интенсивность в точке P максимальна (поглощением и отражением пре-небрегаем). Определим также величину максимальной интенсивности. (Для рентгеновского излучения электроны бериллия можно считать свободными). (№ 10.26). Для дифракции Френеля на отверстии для точки P число зон Френеля m_ϕ определяем с помо-щью (6.6)

$$m_\phi = d^2/(4\lambda L) = 3/2.$$

На рис. 10.4 приведена векторная диаграмма: $A_{3/2} = A_0\sqrt{2}$; $A_{\text{ост}}$ — амплитуда всех зон, находящихся в бериллии. Для получения максимальной интенсивности в точке наблюдения необходимо вектор, описывающий вклад волны, проходящей через бериллий, повернуть на угол $3\pi/4$. Для сдвига фаз, учитывая, что для рентгенона показатель преломления меньше единицы, получаем $(2\pi/\lambda)h = \omega(1 - n)h/c = 3\pi/4 + 2\pi p = -\Delta$, где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Откуда $h = (\lambda/2)(3/4 + 2p)/(1 - n)$.

Используя (10.23) и (10.32) для берилля, имеем

$$h \approx 2,5 \cdot 10^{-5}(3/4 + 2p) \text{ см.}$$

С помощью рис. 10.4 получаем максимальную интенсивность волны в точке наблюдения $I_{\max} = (1 + \sqrt{2})^2 A_0^2$. Здесь A_0^2 — интенсивность падающей волны.

На круглую пластинку из ${}^9\text{Be}$ (плотность $\rho = 1,85 \text{ г/см}^3$) падает плоская монохроматическая волна $\lambda = 100 \text{ \AA}$ (от рентгеновского лазера). Расстояние до точки P наблюдения $L = 1 \text{ м}$. Определим диаметр d и толщину h пластинки, при которых интенсивность в точке P максимальна, и эту максимальную величину. Для рентгеновского излучения считаем электроны берилля свободными и поглощением в пластинке пренебрежим (№ 10.27). Максимальную амплитуду получаем, если пластинка составляет первую зону Френеля. Из (6.6) определяем диаметр пластинки $d = 2(\lambda L)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$. На рис. 10.5 приведена векторная диаграмма. Для получения максимума интенсивности фаза вектора волны, проходящей через пластинку, должна измениться на π . Интенсивность будет $I_{\max} = (3A_0)^2 = 9I_0$. Из условия изменения фазы имеем: $(2\pi/\lambda)h = \omega(1 - n)h/c = (2p + 1)\pi$, где $p = 0, 1, 2, \dots$ Используя (10.23) и (10.32), находим $h = (\lambda/2)(2p + 1)/(1 - n) = \pi mc^2 (2p + 1)/(Ne^2 \lambda) = 0,24 \cdot 10^{-4} (2p + 1) \text{ см}$.

Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутреннему отражению при скользящих углах падения α на далекие от вершины части параболоида

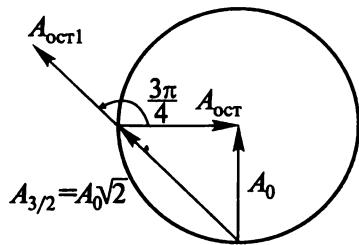


Рис. 10.4

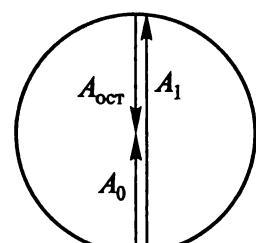


Рис. 10.5

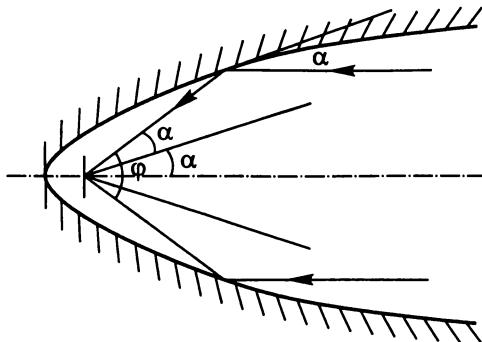


Рис. 10.6

(рис. 10.6). Оценим угол схождения лучей ϕ в фокусе параболоида для рентгеновского излучения с энергией 2 кэВ, если зеркало изготовлено из бериллия (плотность $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$) (№ 10.28). Так как энергия рентгеновского излучения ($E = 2\text{кэВ}$) превышает энергию связи электронов, то все (их четыре) электроны можно считать «свободными». Их концентрация $N = ZN_{\text{Ap}}/A \approx 4,9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Используя связь $E = hv = hc/\lambda = \hbar\omega$, по табличным значениям получаем: $\lambda = 6 \text{ \AA}$. Из (10.23) следует:

$$n \approx 1 - 2\pi Ne^2/(m\omega^2) = 1 - Nr_{\text{кл}}\lambda^2/(2\pi),$$

где так называемый классический радиус электрона

$$r_{\text{кл}} = e^2/(mc^2) = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Используя рис. 10.6, получаем $\phi \approx 4\alpha$. Из условия полного внутреннего отражения $n = \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha = \cos(\phi/4) \approx 1 - \phi^2/32$. Таким образом, $\phi^2/32 \approx N\lambda^2 r_{\text{кл}}/(2\pi)$, откуда $\phi = 4\lambda(Nr_{\text{кл}}/\pi)^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$

Рентгеновское излучение падает на поверхность **железной пластины** (плотность железа $\rho = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 26$, относительная атомная масса $A = 56$). Предполагая, что для достаточно жесткого излучения все электроны вещества можно считать свободными, определим, на сколько отличается от единицы показатель преломления железа для рентгеновского излучения с длиной волны в вакууме $\lambda = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ нм}$. Найдем угол скольжения β при полном «внешнем» отражении излучения от поверхности железной пластины (№ 10.29). Концентрация электронов $N = ZN_{\text{Ap}}/A \approx 2,2 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-3}$. Используя (10.23) и $\omega = 2\pi c/\lambda$, находим

$1 - n = 7,2 \cdot 10^{-6}$. Из условия полного отражения $n = \sin\alpha = \cos\beta \approx 1 - \beta^2/2$. Откуда $\beta \approx 3,8 \cdot 10^{-3}$ рад.

Оценим мощность N , при которой лазерный луч диаметром $d = 1$ мм вызывает электрический пробой газа. Свободный пробег электронов в газе при условиях опыта равен $l_{np} = 10^{-4}$ см, потенциал ионизации газа $U = 10$ В, длина волны излучения $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см (№ 10.30). В лазерном луче плотность потока энергии описывается модулем вектора Пойнтинга (2.1)

$$|S| = N/(\pi d^2/4) = c \langle E^2 \rangle / (4\pi) = c E_0^2 / (8\pi), \quad (10.34)$$

где E_0 — амплитуда гармонически меняющейся напряженности электрического поля. Под действием этого поля происходит движение электронов, которые можно считать свободными, и описывать их движение уравнением $mx'' = -eE_0 \cos\omega t$, где штрихами обозначена вторая производная смещения по времени. Интегрируя, находим скорость электрона $v = -(e/m)(E_0/\omega) \sin\omega t$. Максимальная кинетическая энергия электрона

$$mv^2/2 = (m/2)(e/m)^2(E_0/\omega)^2 = eU.$$

Отсюда $E_0^2 = 2Um\omega/e$. Используя (10.34) и связь $\omega = 2\pi c/\lambda$, находим

$$N = cd^2E_0^2/32 = cd^2Um\omega^2/(16e) \approx 1,7 \cdot 10^{19} \text{ эрг/с} \approx 1,7 \cdot 10^{12} \text{ Вт.}$$

Волоконный световод представляет собой стеклянный цилиндр (сердцевину) с показателем преломления n_1 , окруженный оболочкой с показателем преломления n_2 (рис. 10.7). В сердцевину с помощью короткофокусной линзы вводится импульс света от лазера длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-12}$ с. Оценим длину импульса света на выходе световода длиной $L = 100$ м. При оценке примем во внимание, что диаметр сердцевины d много больше длины волны света λ . Групповая скорость света в стекле $u = 2 \cdot 10^8$ м/с и $n_1 = 1,02n_2$ (№ 10.31). Так как $d \gg \lambda$, можно воспользоваться представлениями геометрической оптики. По волноводу будут распространяться лучи, которые не выходят за угол полного внутреннего отражения α , который определяется соотношением $\sin\alpha = n_2/n_1$. Путь максимально наклонной части пучка $s = L/\sin\alpha = L n_1/n_2$. Удлинение пути $\Delta s = L(n_1/n_2 - 1)$. Время этой добавки

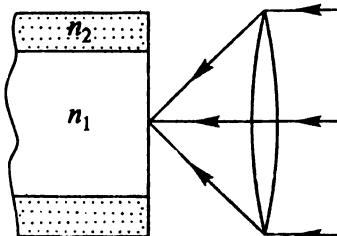


Рис. 10.7

в длительности импульса получаем, разделив удлинение на групповую скорость. Таким образом, максимальная длина импульса $\tau_{\max} = \tau + L(n_1/n_2 - 1)/u \approx 10^{-8}$ с.

«Рентгеновод» представляет собой полый капилляр, стенки которого выполнены из твердого вещества (SiO_2). Захват рентгеновского кванта в «рентгеновод» происходит за счет полного «внутреннего» отражения. Оценим, какими должны быть внутренний диаметр капилляра D и радиус изгиба «рентгеновода» R , чтобы он был пригоден для транспортировки рентгеновских лучей с энергией $E = 10$ кэВ (№ 10.33). Для рентгеновского излучения в соответствии с (10.23) показатель преломления в веществе меньше единицы. Как и в предыдущей задаче, угол полного внутреннего отражения α определяется соотношением $\sin\alpha = n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$. Вводя угол скольжения $\theta = \pi/2 - \alpha$, получаем $\sin\theta_{\max} \approx \theta_{\max} = \omega_p/\omega = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Используя (10.23), находим $N \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Чтобы отражению не мешали дифракционные эффекты, должно быть $\lambda/D \gg \theta_{\max}$, т. е. $D \gg \lambda/\theta_{\max} \approx 10^{-5}$ см. Для оценки радиуса изгиба «рентгеновода» воспользуемся тем, что угол изгиба β , на расстоянии s который равен $\beta = s/R$, должен быть много меньше угла скольжения $\theta = D/s$, т. е. $s/R \ll D/s$. Отсюда $R \gg s^2/D = D/\theta^2 \approx 7$ см.

Найдем показатель преломления n газа и его градиент по высоте на поверхности Венеры, атмосфера которой состоит из углекислого газа CO_2 с поляризостью молекул $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3$. Давление на Венере $p = 100$ атм, температура $t = 500$ °С. Найдем также радиус кривизны r светового луча, пущенного горизонтально. Выясним, к каким особенностям атмосферной оптики планеты приводит найденное значение. Ускорение свободного падения на Венере $g_v = 0,84g_3$. Учтем, что радиус r кривизны горизонтального луча определяется соотношением $1/r = (1/n)dn/dh$ (№ 10.34). В соответствии с (10.21), (10.22) и определением поляризости (см. 3, с. 64) на одну молекулу и на единицу объема получаем

$$n = (1 + 4\pi\alpha N)^{1/2}. \quad (10.35)$$

Распределение концентраций молекул по высоте описывается распределением Больцмана (2, с. 189)

$$N(h) = N_0 \exp[-mg_v h/(kT)], \quad (10.36)$$

где $N_0 = p_0/(kT)$ — концентрация молекул при $h = 0$; p — давление на поверхности; k — постоянная Больцмана; T — температура.

Подставляя (10.36) в (10.35) и разлагая по малому параметру, находим

$$n = \{1 + 4\pi\alpha[p_0/(kT)]\exp[g_B h/(kT)]\}^{1/2} \approx \\ \approx 1 + 2\pi\alpha[p_0/(kT)][1 - g_B h/(kT)]. \quad (10.37)$$

На рис. 10.8 показано распространение лучей на высотах, отличающихся на dh . Поворот на угол β выражаем следующим образом: $\beta = (c/n)/r = [c/(n - dn) - c/n]/dh$. Откуда, учитывая, что n близко к 1, следует:

$$r = n/(dn/dh) \approx -(kT)^2/(2\pi\alpha p_0 m g_B). \quad (10.38)$$

Подставляя заданные величины, получаем $r \approx -100$ км. Так как $r < 0$, центр кривизны располагается при $h < 0$, т. е. горизонтальные и близкие к ним лучи не могут выйти за пределы атмосферы Венеры ($|h| < r_B$). Таким образом, в атмосфере Венеры возможна круговая рефракция, при которой луч света огибает планету на некоторой высоте.

Обозначив показатель преломления на поверхности планеты n_0 , из (10.37) получаем

$$n - 1 = (n_0 - 1)\exp[-mgh/(kT)] \approx (n_0 - 1)[1 - mgh/(kT)]. \quad (10.39)$$

Это соотношение справедливо при $mgh/(kT) \ll 1$. Принимая во внимание, что $(n - 1) \ll 1$, находим с помощью (10.38)

$$r = -kT/[(n_0 - 1)mg].$$

Для Земли $n_0 = 1,0003$ (№ 10.35) и получаем для круговой рефракции $r \approx -2,9 \cdot 10^4$ км. Так как радиус Земли равен $6,4 \cdot 10^3$ км и $n_0 - 1 \sim p_0$, для круговой рефракции давление (и плотность) в атмосфере Земли должны быть увеличены в 4,5 раза.

Световой луч распространяется в поле тяжести параллельно поверхности Земли. Пренебрегая движением воздуха, определим величину отклонения луча на пути 1 км. Считаем давление $p = 1$ атм, температуру воздуха $T = 300$ К, коэффициент преломления воздуха при этих условиях $n = 1,0003$ (№ 10.36). Обозначая горизонтальную координату луча x , и опускание z , выразим их связь с радиусом кривизны траектории $r^2 = x^2 + (r - z)^2$. Учитывая малость z , находим $z \approx x^2/(2r)$. Используя (10.38) и (10.39), получаем

$$z \approx -(x^2/2)(1/n)(n - 1)mg/(kT) \approx (\Delta n/n)\mu gx^2/(2RT) = 1,8 \text{ см.}$$

Для одновременной передачи множества сигналов используется геостационарный спутник Земли в качестве ретранслятора. Оценим, сколько телефонных каналов с шириной полосы $\Delta f = 3$ кГц

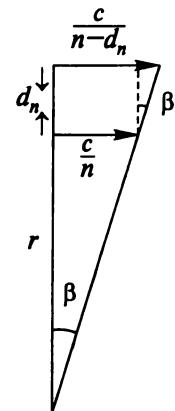


Рис. 10.8

можно одновременно передавать по такой линии связи на средней частоте 10 ГГц. Средняя концентрация свободных электронов на пути сигналов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$. Влияние ионов можно не учитывать (№ 10.32). Геостационарный спутник движется по окружности в плоскости экватора с периодом, равным периоду обращения Земли (см. 1, с. 145) $T = 2\pi/\omega$. Обозначив ускорение свободного падения на поверхности Земли g и радиус Земли R_3 , получим для радиуса орбиты R уравнение $\omega^2 R = g (R_3/R)^2$. Расстояние от поверхности Земли до спутника

$$L = R_3[g/(\omega^2 R_3)]^{1/3} - R_3 = 36\,000 \text{ км.}$$

Сигнал, двигаясь с групповой скоростью (10.15) $u = c/(n + vdn/dv)$, где n — показатель преломления среды (10.23), проходит расстояние $2L$ за время

$$\tau \approx 2L/c = (2L/c)(n + v dn/dv).$$

Возможный диапазон частот Δv приводит к диапазону

$$\Delta\tau \approx (2L/c)(dn/dv)\Delta v.$$

Этот диапазон связан с шириной спектра Δv соотношением неопределенностей $\Delta v\Delta\tau \approx 1$. Используя это, находим

$$(\Delta v)^2 = c/(2Ldn/dv) = cv^3/(2Lv_p^2),$$

$$\Delta v = [cv^3\pi me/(2LN_e^2)]^{1/2} \approx 6 \cdot 10^8 \text{ Гц.}$$

Разделив эту полосу на ширину полосы телефонного канала, получим

$$n \approx \Delta v/\Delta f \approx 2 \cdot 10^5 \text{ каналов.}$$

На плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R = 100$ см падает плоская монохроматическая волна, частота которой **возрастает** со временем по закону $\omega = \omega_0(1 + at)$, $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, $\lambda = 1 \text{ мкм}$. Определим константу a , если фокус перемещается со скоростью $v = 3 \text{ км/с}$. Показатель преломления линзы $n = 1,5$. Дисперсия линзы $dn/d\lambda = -10^3 \text{ см}^{-1}$ (№ 10.37). Из (1.15) получаем $F = R/(n - 1)$. Используя (10.13) $n\lambda = 2\pi c/\omega$, имеем

$$\lambda dn/d\lambda + n = -(2\pi c/\omega^2)d\omega/d\lambda.$$

По условию $\lambda dn/d\lambda = -10^{-4} \cdot 10^3 = -0,1 \ll 1,5$, поэтому

$$d\lambda/d\omega = -2\pi c/(n\omega^2).$$

Для скорости движения фокуса получаем

$$v = dF/dt = -[R/(n - 1)^2]dn/dt;$$

$$dn/dt = (dn/d\lambda)(d\lambda/d\omega)(d\omega/dt);$$

$$d\omega/dt = \omega_0 a.$$

Так как $at = (\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, то

$$\begin{aligned} a &= v(n - 1)^2 n \omega_0^2 (1 + at) / [R(dn/d\lambda) 2\pi c \omega_0] \approx \\ &\approx v(n - 1)^2 n / (R \lambda_0 dn/d\lambda) = -1,12 \cdot 10^4 \text{ 1/c}. \end{aligned}$$

Показатель преломления некоторой прозрачной среды вблизи частоты $\langle\omega\rangle$ изменяется по закону: $n(\omega) = n_0 - A/(\omega - \omega_0)$, где $n_0 = 1,5$, $\omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $A = \text{const}$, $\omega < \omega_0$. Через слой такого вещества толщиной $l = 3 \text{ см}$ проходит короткий световой импульс, средняя частота которого равна $\langle\omega\rangle$, а спектральная ширина $\Delta\omega \ll |\langle\omega\rangle - \omega_0|$. Известно, что $|\langle\omega\rangle - \omega_0| \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$, и $|n(\langle\omega\rangle) - n_0| = 0,01$. Оценим время прохождения импульса через слой и сравним это время со временем прохождения такого же расстояния в вакууме (№ 10.39). Используя (10.15), для групповой скорости импульса получаем

$$u = c/(n + \omega dn/d\omega) = c/[n_0 - A/(\omega - \omega_0) + A\omega/(\omega - \omega_0)^2].$$

Время прохождения импульса

$$\tau = (l/c)[n_0 - A/(\omega - \omega_0) + A\omega/(\omega - \omega_0)^2]_{\omega = \langle\omega\rangle}.$$

Из условия следует, что $\langle\omega\rangle \approx \omega_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ и $A = 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Используя это, получаем: $\tau = (l/c)[n_0 + A\omega_0/(\langle\omega\rangle - \omega_0)^2] = 5,5 \tau_0 \text{ с}$, где $\tau_0 = l/c = 10^{-10} \text{ с}$ — время прохождения расстояния l в вакууме.

Можно рассмотреть другую зависимость: $n(\omega) = n_0 - A(\omega - \omega_0)$ (№ 10.40). Действуя аналогичным способом, находим

$$\tau = (l/c)\{n_0 + [n(\omega) - n_0]\omega / (|\langle\omega\rangle - \omega_0|) = 1,2 \text{ нс}.$$

Для того чтобы короткий импульс-сигнал, описываемый функцией $f(t)$, передать через диспергирующую среду без искажений, предлагается на входе в среду сформировать плоское волновое возмущение, периодически (с периодом T) повторяя сигнал $f(t)$. Найдем, при каком минимальном расстоянии от входной плоскости повторяется неискаженная форма сигнала. Закон дисперсии среды в полосе частот, охватываемых сигналом, имеет вид $k(\omega) = B\omega^2$ (№ 10.41). Периодически повторяющийся сигнал на входе

в среду $f(t)$ можно записать в виде $\sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$. Любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье. Вводя $\omega_0 = 2\pi/T$, получаем представление

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(im\omega_0 t).$$

Соответственно волновое возмущение, распространяющееся в среде,

$$S(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp[i(m\omega_0 t - k(m\omega_0)z)].$$

Здесь $k(m\omega_0)$ обозначает зависимость k от $(m\omega_0)$.

Разность фаз гармоник с $m\omega_0$ и ω_0 равна

$$\Delta\phi_m = [k(m\omega_0) - k(\omega_0)]z = B(m^2 - 1)\omega_0^2 z. \quad (10.40)$$

Минимальная разность фаз между второй ($m = 2$) и основной ($m = 1$) гармониками $\Delta\phi = 3B\omega_0^2 z$ для совпадения волн должна быть кратна 2π , т. е. $3B\omega_0^2 z = 2\pi n$, откуда $z = 2\pi n/(3B\omega_0^2)$. Подставим это в (10.40)

$$\Delta\phi_m = (2/3)\pi(m^2 - 1)n.$$

Эта разность фаз будет кратна 2π для всех m при n , кратных 3. При минимальном $n = 3$ из (10.40) получаем $z_{\min} = 2\pi/(B\omega_0^2) = T/(2\pi B)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть среду с законом дисперсии $k(\omega) = B\omega^4$ (№ 10.42). Вместо (10.40) имеем $\Delta\phi_m = B(m^4 - 1)\omega_0^4 z$. Для совпадения второй и первой гармоник получаем $\Delta\phi_m = 15B\omega_0^4 z = 2\pi n$. Минимальное значение $n = 15$. При заданном $z = L$ находим $\omega_{0\min} = [2\pi/(BL)]^{1/4}$.

Специальная теория относительности была рассмотрена в механике (см. 1, с. 165). Эффект Доплера состоит в том, что частота ω сигнала, излучаемого источником в неподвижной системе, в приемнике, удаляющемся со скоростью v , равна

$$\omega_0 = \omega[(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{1/2}. \quad (10.41)$$

где c — скорость света.

Такая же формула получается для удаляющегося источника и неподвижного приемника. В этом случае в формуле (10.41) надо

у ω поменять индексы (ω_0 будет соответствовать частоте на удаляющемся источнике, а ω — частоте, принимаемой на неподвижном приемнике). Для вывода считаем, что приемник расположен в неподвижной системе отсчета K , а источник имеет частоту v_0 в движущейся со скоростью v системе отсчета K' . В системе K источник в момент t_1 находится в точке x_1 , а в момент t_2 — в точке x_2 . Полагаем длительность сигнала в системе K (по часам K) $\tau = t_2 - t_1$. Для координат имеем

$$x_2 = x_1 + v\tau/c. \quad (10.42)$$

Действие на приемник начинается в момент θ_1 и заканчивается в θ_2

$$\theta_1 = t_1 + a/c, \quad \theta_2 = t_2 + (a + v\tau)/c, \quad (10.43)$$

где a — расстояние от источника до приемника.

Длительность воздействия на приемник

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tau(1 + v/c). \quad (10.44)$$

Учитывая, что в движущейся системе $\tau_0 = \tau(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, и что число колебаний N в обеих системах одинаково, получаем

$$N = v_0\tau_0 = v\tau(1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (10.45)$$

Для частоты в приемнике находим

$$v = N/\theta = v_0[(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{1/2}. \quad (10.46)$$

В случае, если скорость источника направлена под углом ϕ к направлению на приемник в (10.43) и (10.44) добавляется $\cos\phi$:

$$\theta = \tau(1 + v\cos\phi/c).$$

Подставляя это и (10.45) в (10.46), получаем

$$v = N/\theta = v_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}/[(1 + (v/c)\cos\phi)]. \quad (10.47)$$

Если ψ — угол между направлением наблюдения и направлением скорости, измеренной в системе координат, связанной с источником, то угол ϕ измерен в системе координат, связанной с приемником. Углы связаны соотношением

$$\cos\phi = (\cos\psi - v/c)[1 - (v/c)\cos\psi]. \quad (10.48)$$

Подставляя в (10.47), находим

$$v = v_0 [(1 - (v/c)\cos\phi)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}]. \quad (10.49)$$

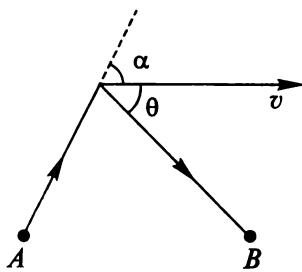


Рис. 10.9

необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты (№ 10.45). Перейдем в систему отсчета, связанную со спутником. В соответствии с (10.47) частота сигнала на спутнике будет

$$\nu_{\text{сп}} = \nu_0(1 - \beta^2)^{1/2}/(1 + \beta \cos\alpha),$$

где введено обозначение $\beta = v/c$.

Такую же частоту в системе, связанной со спутником, будет иметь отраженный сигнал. Используя (10.47) и учитывая, что спутник движется в направлении точки *B*, получаем

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_{\text{сп}}(1 - \beta^2)^{1/2}/(1 - \beta \cos\theta) = \\ &= \nu_0(1 - \beta^2)/[(1 + \beta \cos\alpha)(1 - \beta \cos\theta)]. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Считая, что угол падения равен углу отражения, получаем для релятивистской поправки

$$(\nu - \nu_0)/\nu_0 = (\Delta\nu/\nu_0)_{\text{рел}} \approx \beta^2 = v^2/c^2 \approx 10^{-9}.$$

Отсюда следует, что разрешающая способность *R* спектрального прибора должна быть $R \geq (\nu/\Delta\nu)_{\text{рел}} \approx 10^9$.

Излучение рубинового лазера рассеивается на звуковых колебаниях в воде. При рассеянии света происходит допплеровское смещение частоты. Оценим число штрихов *N* дифракционной решетки, с помощью которой в 1-м дифракционном порядке можно обнаружить смещение частоты в свете, рассеянном под прямым углом. Скорость звука в воде $v = 1400$ м/с, показатель преломления $n = 1,3$. Считаем, что в воде есть звуковые волны всевозможных направлений (№ 10.48). На рис. 10.10 показана система звуковых волн, от которых в случае выполнения условия Брега—Вульфа, заключающегося в том, что световые волны (длины λ_c), отраженные от разных звуковых волн (длины $\lambda_{\text{зв}}$), должны быть в фазе, что обеспечивает соответствующий угол $2\lambda_{\text{зв}}\cos(\gamma/2) = m\lambda_c$.

Если источник движется со скоростью v в среде с показателем преломления n (№ 10.47), то из (10.49) находим $\Delta\lambda/\lambda = (v/c)n\cos\phi$.

Из точки *A* (рис. 10.9) на спутник, летящий со скоростью v , падает лазерный луч с частотой ν_0 . Отраженный луч регистрируется в точке *B*. Найдем частоту ν принимаемого на Земле сигнала. Оценим разрешающую способность *R* регистрирующего спектрального прибора,

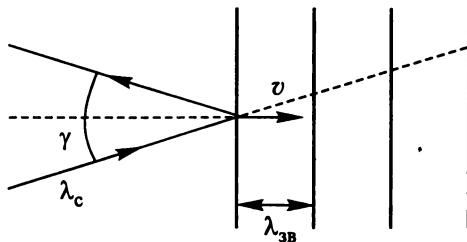


Рис. 10.10

Доплеровское изменение частоты определяется (с учетом направления отраженной волны) по формуле

$$(v_0 - v)/v_0 = \Delta v/v_0 = 2v/(c/n)\cos(\gamma/2).$$

В соответствии с (8.20) условие разрешения

$$R = mN \geq v/\Delta v.$$

Отсюда при $m = 1$ получаем $N \approx 1,2 \cdot 10^5$.

Спектральные линии, излучаемые нагретым газом, оказываются **уширенными** вследствие того, что атомы газа движутся с разными скоростями относительно наблюдателя (эффект Доплера). Считая распределение скоростей атомов газа максвелловским, оценим размеры L дифракционной решетки с периодом $d = 1$ мкм, которую надо использовать для изучения формы спектральных линий, излучаемых неоном ${}^{20}\text{Ne}$ при температуре $T = 1000$ К (№ 10.50, 10.46). В соответствии с (10.46) имеем:

$$\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda = (\lambda - \lambda_0)\lambda_0 = v/c. \quad (10.51)$$

Распределение Максвелла для компоненты скорости молекуларного движения представимо (см. 2, с. 158)

$$dn(v_x) = A\exp[-mv_x^2/(2kT)]dv_x. \quad (10.52)$$

Используя (10.51), связываем отклонения λ от λ_0 (λ_0 — длина волны, соответствующая неподвижному атому).

Спектральное распределение

$$\begin{aligned} I(\lambda - \lambda_0)d\lambda &= \alpha dn(v_x) = \alpha A\exp[-mc^2(\lambda - \lambda_0)^2/(2kT\lambda_0^2)](c/\lambda)d\lambda = \\ &= B\exp[1 - mc^2(\lambda - \lambda_0)^2/(2kT\lambda_0^2)]d\lambda. \end{aligned}$$

Полуширину этой спектральной линии определим из условия

$$I(\lambda_n - \lambda_0) = (1/2)I(0).$$

Отсюда для ширины линии $2(\lambda_n - \lambda_0)$ можно получить

$$2(\lambda_n - \lambda_0) = 2(\lambda_0/c)(2kT \ln 2/m)^{1/2}. \quad (10.53)$$

Спектральный прибор должен обладать разрешающей способностью

$$R \geq (\lambda/2)/(\lambda_n - \lambda_0) = (c/2)/(2kT \ln 2/m)^{1/2} \approx 10^5.$$

При работе в первом порядке

$$R = N = L/d.$$

где L — размер дифракционной решетки.

Таким образом,

$$L = Rd \geq 10 \text{ см.}$$

Оценим температуру водородной лампы, используемой в качестве источника света в интерферометре Майкельсона, если при смещении одного из зеркал число наблюдаемых интерференционных максимумов составляет $N = 7 \cdot 10^4$. Первоначально зеркала интерферометра были расположены на одинаковых расстояниях от делительной пластинки. Влиянием протяженности источника пренебрегаем (№ 10.55). Число полос связано с длиной когерентности (5.6): $L = \lambda^2/\Delta\lambda$. Для числа максимумов имеем: $N = L/\lambda = \lambda/\Delta\lambda$. Используя (10.53), получаем $\Delta\lambda/\lambda = (2/c)/(2kT \ln 2/m)^{1/2}$. Учитывая, что $k/m = R/\mu$ (см. 1, с. 8), находим $T = \mu c^2/(8RN^2 \ln 2) \approx 400 \text{ К}$.

Двойная звезда состоит из двух близких по массе звезд, вращающихся относительно общего центра с периодом $\tau = 10$ сут и отстоящих друг от друга на расстояние $L = 2 \cdot 10^7$ км. Определим, какое число штрихов N дифракционной решетки необходимо для того, чтобы при наблюдении видимого спектра водорода в излучениях этих звезд можно было во 2-м порядке заметить вращение системы. Выясним, можно ли таким образом заметить относительное вращение таких звезд, если период $\tau = 10$ лет. Температура поверхности звезд $T = 6000 \text{ К}$ (№ 10.51). Для среднеквадратичной скорости теплового движения молекул водорода (см. 2, с. 160) имеем: $v_t = (RT/\mu)^{1/2} = 5 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с}$, где $R = 8,3 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{К} \cdot \text{моль})$ — газовая постоянная; $\mu = 2 \text{ г}/\text{моль}$ — молекулярная масса водорода. Скорость молекул, связанная с вращением,

$$v_b = \pi L/\tau = 7,2 \cdot 10^6 \text{ см}/\text{с.}$$

В соответствии с (10.51) и (8.20)

$$R = mN \geq \lambda/\Delta\lambda \approx c/(2v). \quad (10.54)$$

Здесь число 2 указывает на то, что на краях вращение проходит в противоположные стороны. При наблюдении $m = 2$ получаем $N \geq 10^3$. При периоде вращения 10 лет скорость вращения уменьшается в 365 раз. В соответствии с (10.53) расщепление за счет вращения значительно меньше ширины линии. Установить вращение невозможно.

Наблюдаются **периодические изменения в спектре** излучения двойной звезды, которые обусловлены эффектом Доплера. Спектральные линии периодически с периодом $\tau = 10$ сут разделяются на две компоненты. Максимальная разница длин волн двух компонент линии водорода $\lambda = 4340 \text{ \AA}$ в излучении этой звезды равна $\Delta\lambda = 8,84 \text{ \AA}$. Предполагая, что двойная звезда состоит из двух одинаковых звезд, найдем их массы и расстояние между ними (№ 10.52). Используя результаты предыдущей задачи, из (10.54) находим линейную скорость вращения $v \approx (c/2)(\Delta\lambda/\lambda) = 3 \cdot 10^7 \text{ см/с}$. Расстояние между звездами $L = 2R = 2vT/\pi = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ см}$. Масса одной из звезд $M = 4v^2 R/\gamma = 4,3 \cdot 10^{32} \text{ кг}$, где γ — гравитационная постоянная.

Оценим порядок скорости v , с которой должен удаляться от Солнца **космический корабль**, чтобы находящийся в нем космонавт, имея в распоряжении спектрометр с дифракционной решеткой, мог заметить движение корабля относительно Солнца при наблюдении видимой части спектра солнечного водорода во 2-м порядке. Найдем, какое число штрихов N должна иметь при этом дифракционная решетка. Температура поверхности Солнца $T = 6000 \text{ К}$ (№ 10.53). Линии спектра имеют размазку за счет теплового движения атомов водорода — доплеровское уширение. Поэтому скорость движения корабля может быть зарегистрирована только, если она превосходит скорость движения атомов водорода на поверхности Солнца

$$v > (kT/m_b) = [3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 6 \cdot 10^3 / (1,67 \cdot 10^{-24})] = 1,2 \cdot 10^6 \text{ см/с.}$$

Из (10.51) $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda = (\lambda - \lambda_0)\lambda_0 = v/c$. Разрешающая способность $R = \lambda/\delta\lambda = mN$. Для наблюдения необходимо $\Delta\lambda > \delta\lambda$. Отсюда $N > c/(mv) = 1,5 \cdot 10^4$.

В **оптическом резонаторе**, состоящем из четырех плоских зеркал (рис. 10.11), световые волны могут распространяться во встречных направлениях по периметру квадрата, сторона которого равна l . Если такой резонатор привести во вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, то резонансные частоты v для встречных волн оказываются одинаковыми. Объясним явление и определим разность Δv этих частот (№ 10.54).

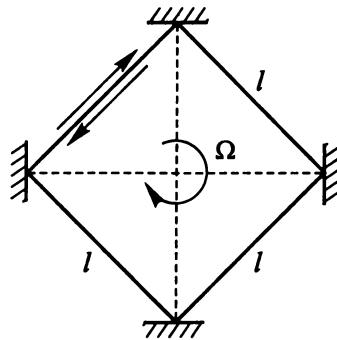


Рис. 10.11

Эффект обусловлен изменением оптических длин путей для встречных волн. При вращении линейная скорость зеркал $v_\perp = \Omega l / (2)^{1/2}$. По направлению распространения света скорость $v = v_\perp / (2)^{1/2} = \Omega l / 2$. Используя (10.51), получаем $\Delta v/v = 2v/c = \Omega l/c$. Можно также воспользоваться (10.49).

11. Поляризованный свет. Элементы кристаллооптики и нелинейной оптики

При наблюдении отражения или прохождения световых волн через вещества была обнаружена линейная, или плоская, поляризация. При такой поляризации колебания вектора напряженности электрического поля (E), который называют световым вектором, происходят в одной плоскости, называемой плоскостью поляризации. Существуют также волны, в которых вектор напряженности не только периодически меняется по модулю, но и вращается вокруг направления распространения волны. Поскольку конец вектора при этом в каждой точке пространства описывает эллипс, эта поляризация называется эллиптической. Если смотреть навстречу световой волне, то при вращении вектора по часовой стрелке поляризацию называют правой, а при вращении против часовой стрелки — левой. При неизменной длине вектора поляризация называется круговым. Подчеркнем, что это одна волна, хотя ее всегда можно представить в виде суммы двух компонент волны со взаимно перпендикулярными линейными поляризациями с постоянной разностью фаз (когерентных). Также и линейно поляризованный свет можно рассматривать как сумму двух противоположных круговых поляризаций.

Некогерентное излучение многих атомов, в котором интенсивности волн равномерно распределены по направлениям (углам) поляризации, называется естественным светом.

Поляроидом (или поляризатором) называют устройство, при прохождении через которое от произвольного света остается только свет, линейно поляризованный в плоскости, называемой плоскостью пропускания поляроида. Экспериментально установлена зависимость интенсивности за вторым поляроидом (I_2) от угла между их плоскостями пропускания α (закон Малюса):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha, \quad (11.1)$$

где I_1 — интенсивность за первым поляроидом.

Если за одним поляроидом поставить другой с плоскостью пропускания, повернутой на 90° относительно плоскости пропускания первого, то свет за вторым отсутствует.

Если на поляроид падает естественный свет интенсивности I_0 , то интегрируя все составляющие естественного света и используя закон Малюса, получаем

$$I = (1/\pi) \int_0^\pi I_0 \cos^2\alpha \, d\alpha = I_0/2. \quad (11.2)$$

Существует проект оснащения фар и ветрового стекла автомобилей пленками из поляроида. Найдем, как должны быть ориентированы эти поляроиды, чтобы водитель мог видеть дорогу, освещаемую светом его фар, и ему не мешал свет от фар встречных автомобилей (№ 11.7). Если плоскости пропускания поляроидов на фарах и ветровом стекле автомобилей повернуты на 45° от вертикали, то разрешенные плоскости на ветровом стекле встречного автомобиля будут составлять 90° и не будут пропускать свет от фар встречного автомобиля. Свет собственных фар, отражаемый встречными предметами, будет виден водителю.

В плоской монохроматической волне с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} для напряженности электрического поля \mathbf{E} , напряженности магнитного поля \mathbf{H} и индукции электрического поля \mathbf{D} в зависимости от времени t и расстояния r можно записать

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kr)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kr)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - kr)}. \quad (11.3)$$

Используя для плоской монохроматической световой волны уравнения из (см. 3, с. 480, 482) и вводя обозначение фазовой скорости волны v и единичного вектора волновой нормали (направление распространения фазы волны)

$$\mathbf{N} = (\omega/v)\mathbf{k}, \quad (11.4)$$

получаем

$$\mathbf{D} = -(c/v)[\mathbf{N}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = (c/v)[\mathbf{N}\mathbf{E}] \quad (11.5)$$

и для вектора Пойнтинга \mathbf{S} (плотности потока энергии), указывающего также направление распространения лучей света,

$$\mathbf{S} = c/(4\pi) [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (11.6)$$

где c — скорость света в вакууме.

В изотропных средах (см. 3, с. 66) векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} одинаково направлены и связаны соотношением

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость.

В анизотропных средах векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} в общем случае имеют разное направление, а их компоненты связаны соотношением

$$D_j = \sum_k \epsilon_{jk} E_k, \quad (11.7)$$

где j, k пробегают значения x, y и z .

Величина ϵ_{jk} называется **диэлектрическим тензором**, или тензором диэлектрической проницаемости второго ранга (при трех компонентах векторов). Свойства среды в общем случае различны по разным направлениям. Характеристики световых волн зависят от направления их распространения и поляризации. При выполнении закона сохранения энергии в волне следует симметрия тензора ($\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$). В таком случае существуют три **главных направления** и, соответственно три **главных значения** ϵ_x, ϵ_y и ϵ_z (для краткости используем один индекс, например, $\epsilon_x \equiv \epsilon_{xx}$) для которых

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z. \quad (11.8)$$

Это показано на рис. 11.1.

Геометрическим образом симметричного тензора является эллипсоид. Полуоси эллипсоида $a_j = (\epsilon_j)^{-1/2}$. Относительно главных осей уравнение эллипса (Френеля) имеет вид

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1. \quad (11.9)$$

Среда называется **одноосной**, если $\epsilon_x = \epsilon_y$. В таком случае эллипсоид представляет собой эллипсоид вращения относительно оси z , которая называется **оптической осью кристалла**. Подчеркнем, что это не линия в кристалле, а направление.

Из соотношений (11.5) и (11.6) следует, что D перпендикулярен N и H , E перпендикулярен H и S , который перпендикулярен E и H . Таким образом, векторы D, E, N и S лежат в плоскости, перпендикулярной H . Это показано на рис. 11.2.

Для электрических векторов E и D можно ввести составляющие E_{\parallel}

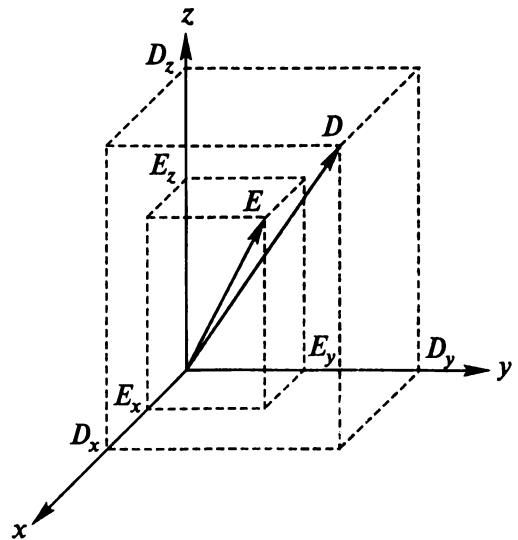


Рис. 11.1

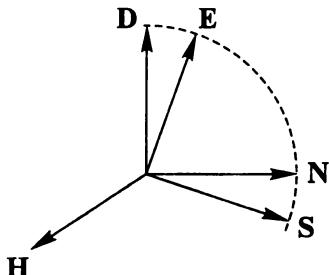


Рис. 11.2

и D_{\parallel} вдоль оптической оси и E_{\perp} и D_{\perp} , перпендикулярные оптической оси. Для связи напряженности поля и индуктивности в соответствии с (11.8) получаем

$$D_{\parallel} = \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}, \quad D_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp}, \quad (11.10)$$

где ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} — постоянные, называемые продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями кристалла.

Плоскость, в которой лежат оптическая ось кристалла и нормаль N к фронту волны, называется **главным сечением кристалла**. Это не одна плоскость, а семейство параллельных плоскостей.

Если вектор D перпендикулярен главному сечению кристалла, то $D \equiv D_{\perp}$, а потому $D = \epsilon_{\perp} E$, т. е. среда ведет себя как изотропная. В этом случае из (11.5) получаем, что скорость волны не зависит от направления ее распространения и равна

$$v = v_{\perp} \equiv v_0 = c/(\epsilon_{\perp})^{1/2} = c/n_{\perp}. \quad (11.11)$$

Такая волна называется **обыкновенной**. Положение фронта волны из точки O в некоторый момент времени показано на рис. 11.3. Кружочками обозначена поляризация (направление векторов E и D), перпендикулярная главной плоскости.

Если вектор D лежит в главной плоскости, то вектор E , который также лежит в главной плоскости, можно представить в виде суммы компонент по направлению N и по направлению D , т. е. $E = E_N + E_D$. Из второй формулы (11.5) находим

z — оптическая ось

$$H = (c/v)[N E_D]. \quad (11.12)$$

Компонента E_N выпадает.

В главной плоскости векторы E и D имеют составляющие вдоль оптической оси кристалла и перпендикулярны оси кристалла, поэтому

$$E_D = \mathbf{ED}/D = (E_{\parallel} D_{\parallel} + E_{\perp} D_{\perp})/D = (D_{\parallel}^2/\epsilon_{\parallel} + D_{\perp}^2/\epsilon_{\perp})/D. \quad (11.13)$$

Обозначив угол между N и оптической осью кристалла θ (рис. 11.4), имеем

$$E_D/D = 1/\epsilon_0 = (\sin^2\theta)/\epsilon_{||} + (\cos^2\theta)/\epsilon_{\perp} = N_{\perp}^2/\epsilon_{||} + N_{||}^2/\epsilon_{\perp}. \quad (11.14)$$

Вводя показатель преломления $n = c/v = (\epsilon)^{1/2}$, получаем

$$1/n_0^2 = (\sin^2\theta)/n_{||}^2 + (\cos^2\theta)/n_{\perp}^2 = (\sin^2\theta)/n_e^2 + (\cos^2\theta)/n_0^2. \quad (11.15)$$

Здесь n_0 определяет фазовую скорость по данному направлению (рис. 11.5), показатели для волны вдоль оптической оси кристалла n_0 (обыкновенный показатель преломления кристалла) и перпендикулярно оптической оси n_e (необыкновенный показатель преломления кристалла) являются характеристиками кристалла и обычно приведены в таблицах. На рис. 11.5 показано направление поляризации волн в главной плоскости (отмечено черточками).

Одноосные кристаллы иначе называют **двоекопреломляющими**, так как в них один луч может разделяться на два (обыкновенный и необыкновенный) со взаимно перпендикулярными поляризациями и разными фазовыми скоростями. Для получения сдвига фаз используются пластинки из двоекопреломляющих кристаллов, вырезанные параллельно оптической оси. Сдвиг фаз удобно измерять в длинах волн. Если толщина пластины равна целому числу длин волн падающего на нее по нормали монохроматического света, то пластина его не меняет (если нет поглощения и рассеивания). Такую пластины называют **пластиинкой в длину волны**. При увеличении (или уменьшении) толщины такой пластины на половину длины волны ее называют пластиинкой в **четверть длины волны**. Пластиинку называют пластиинкой в **четверть длины волны**, если толщину пластиинки в длину волны изменяют на четверть длины волны. На рис. 11.6 показано положение фронтов обыкновенной (o) и необыкновенной (e) волн при прохождении нормально падающей монохроматической волны через пластиинку (толщиной h), вырезанную параллельно оптической оси кристалла. Окружность и эллипс соответствуют волне из каждой точки, в которую приходит волна, прямые линии — фрон-

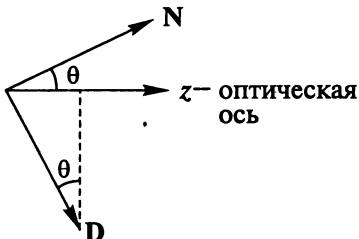


Рис. 11.4



Рис. 11.5

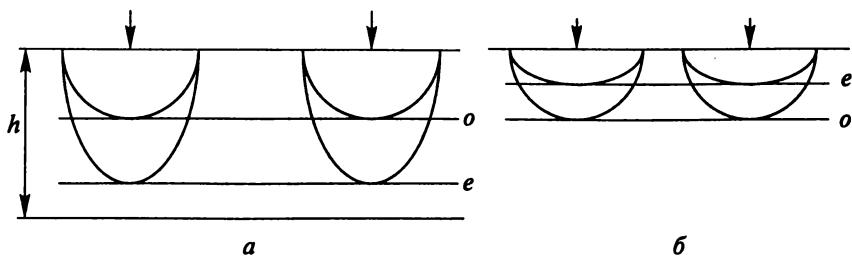


Рис. 11.6

ты волн, представляющие огибающие всех волн из точек. В случае отрицательного кристалла (фазовая скорость необыкновенной волны v_e , больше фазовой скорости обыкновенной волны v_o , соответственно, показатель преломления необыкновенной волны n_e , меньше показателя преломления обыкновенной волны) n_e (рис. 11.6, а). Случай положительного кристалла ($v_e < v_o$ и $n_e > n_o$) показан на рис. 11.6, б.

В частности при толщине пластиинки $h = 0,03$ мм и $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$ разность хода, $\Delta = (n_o - n_e)h = 5,16$ мкм (№ 11.3).

Толщина пластиинки в половину длины волны (в вакууме) определяется из соотношения

$$\lambda/2 = |n_o - n_e| h. \quad (11.16)$$

Разность фаз $\phi = (2\pi/\lambda) |n_o - n_e| h = \pi$. Толщина пластиинки в четверть длины волны определяется из соотношения

$$\lambda/4 = |n_o - n_e| h. \quad (11.17)$$

Разность фаз $\phi = (2\pi/\lambda) |n_o - n_e| h = \pi/2$.

Два когерентных пучка квазимохроматического неполяризованного света равной интенсивности дают на экране **интерференционные полосы**. Найдем, какой толщины кристаллическую пластиинку надо ввести на пути одного из этих пучков, чтобы интерференционные полосы исчезли и притом так, чтобы их нельзя было восстановить никакой стеклянной пластиинкой, вводимой в другой пучок. Выясним, как изменится картина, если за кристаллической пластиинкой поставить поляроид, а также при каком положении поляроида интерференционные полосы не будет (№ 11.74). Каждое направление колебаний в волне можно представить в виде двух составляющих, электрические векторы которых взаимно перпендикулярны и параллельны главным осям пластиинки. При введении пластиинки интерференционные полосы от каждой составляющей смеютсяся. Если пластиинка является пла-

стинкой в полволны, то разность смещений полос составит половину ширины полосы. При этом интерференционные полосы пропадут. При введении поляроида они появятся вновь. Исключение составляет случай, когда оси поляроида наклонены под углом 45° к осям пластиинки. В этом случае интерференционные полосы наблюдать не будут.

Световые волны с одинаковыми частотой и линейной поляризацией распространяются в плечах **двулучевого интерферометра**. На выходе из него фотоприемник регистрирует интенсивность света I . Оказалось, что при изменении оптического пути в одном из плеч она колеблется между I_{\max} и I_{\min} так, что видность $V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = 1$. Найдем, какой будет ее наименьшая величина, если в одно из плеч интерферометра поместить прозрачную кристаллическую пластинку $\lambda/4$. Считаем, что поток проходит через пластинку однократно (№ 11.51). Из условия для видности следует, что $I_{\min} = 0$ и волны имеют одинаковые амплитуды. Пластинка в $\lambda/4$ приводит к круговой поляризации. Если амплитуда волн равна 1, то амплитуды компонент после пластинки равны $1/\sqrt{2}$ и взаимно перпендикулярны. Наименьшей видность будет при максимальном уменьшении суммарной амплитуды волн. Это будет, если главное направление пластинки совпадает с направлением поляризации падающей волны. В таком случае

$$I_{\max} = (1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 2 + \sqrt{2},$$

$$I_{\min} = (1 - 1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 2 - \sqrt{2},$$

откуда $V = \sqrt{2}/2$.

Если падающая волна линейно поляризована в плоскости, перпендикулярной оптической оси кристалла, то через пластинку идет только обыкновенная волна. Если падающая волна линейно поляризована в плоскости, параллельной оптической оси кристалла, то через пластинку идет только необыкновенная волна. Если плоскость поляризации падающей волны составляет некоторый угол с оптической осью кристалла, то через пластинку проходят обыкновенная и необыкновенная волны. При этом разности фаз определяются (11.16) и (11.17). На рис. 11.7, *a* показано распределение компонент в такой волне в некоторый момент времени, и на рис. 11.7, *b* — соотношение между амплитудами компонент. При сдвиге компонент на $\lambda/2$ волна остается линейно поляризованной, как показано на рис. 11.7, *в*. При сдвиге компонент на $\lambda/4$ волна после пластинки оказывается эллиптически поляризованной. При равенстве амплитуд компонент ($\alpha = 45^\circ$) получает-

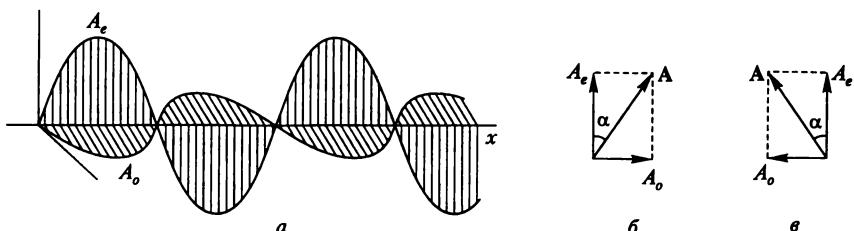


Рис. 11.7

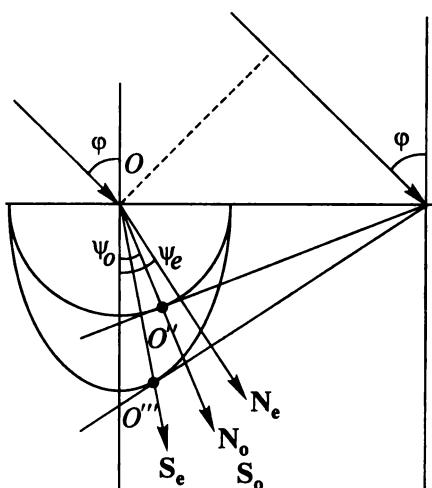


Рис. 11.8

ся круговая поляризация. На рис. 11.8 показано наклонное падение волны на пластинку. Из каждой точки на границе кристалла (например, из O и O') следовало бы нарисовать окружности и эллипсы с определенной задержкой. Фронты волн представляют собой огибающие окружностей и эллипсов. Возмущение из O приходит в O'' и O''' . Это лучи, т. е. распространение энергии. При этом луч, соответствующий необыкновенной волне OO''' не совпадает с нормалью к фронту. Закон преломления Снелиуса выполняется для нормалей к фронтам.

На рис. 11.9 показано прохождение света через пластинку, вырезанную под некоторым углом к оптической оси кристалла. В результате имеем два луча 1 и 2, т. е. два изображения. Отсюда и название **двойное лучепреломление**.

Замечено, что при рассматривании **удаленных предметов** глаз видит не два изображения, а одно. Это связано с тем, что лучи, исходящие из какой-либо точки удаленного предмета, падающие на пластинку, выходящие из нее и попадающие в глаз наблюдателя, практически параллельны. Хотя необыкновенные лучи испытывают поперечное смещение, они благодаря параллельности собираются в одной точке на сетчатке глаза (№ 11.5).

Это можно использовать в следующем случае. Наблюдатель смотрит на близкий предмет через плоскопараллельную двояко-преломляющую пластинку из исландского шпата и видит два пря-

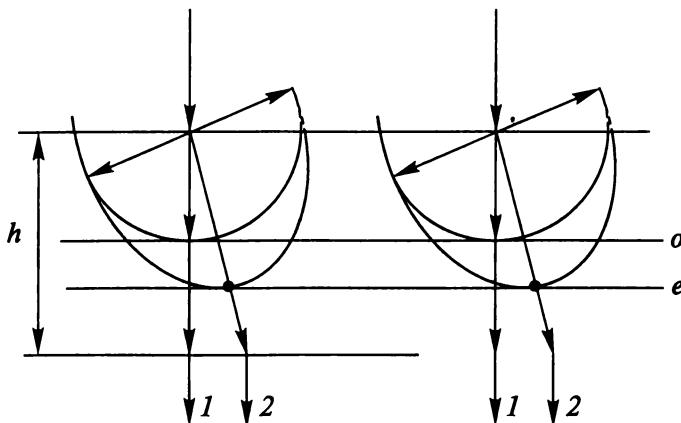


Рис. 11.9

мых увеличенных изображения предмета, когда между пластинкой и предметом помещена собирающая линза на расстоянии 4 см от предмета. После того как к линзе вплотную приложили собирающее очковое стекло с оптической силой 5 дптр, стало видно только одно изображение предмета. Определим фокусное расстояние f линзы (№ 11.6). В диоптриях (дптр) измеряется оптическая сила линз (1.17). Для 1 дптр фокусное расстояние равно 1 м. Для 5 дптр фокусное расстояние в 5 раз меньше, т. е. $f_{\text{очки}} = 20 \text{ см}$. Оптическая сила двух линз, поставленных одна за другой, равна сумме их оптических сил $\Phi = 1/f + 1/f_{\text{очки}} = 1/f_{\text{системы}}$. Так как одно изображение получается для параллельных лучей, предмет находится в фокальной плоскости системы, т. е. $f_{\text{системы}} = 4 \text{ см}$. Подставляя это в предыдущее соотношение, находим $f = 5 \text{ см}$.

Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку исландского шпата и затем нормально на вторую такую же пластинку, главная плоскость которой образует с главной плоскостью первой пластиинки угол 30° . Затем свет падает на экран. Пластинки вырезаны так, что оптическая ось составляет угол γ с плоскостью пластиинки. При этом $0 \leq \gamma < 90^\circ$. Опишем полученную картину и найдем относительную интенсивность наблюдаемых на экране пятен (№ 11.8). Кристаллы исландского шпата являются двоякопреломляющими отрицательными кристаллами. Так как пластиинки вырезаны под углом γ к оптической оси, картина лучей соответствует изображенной на рис. 11.9. После первой пластиинки получаются два, сдвинутых один относительного другого, луча со взаимно перпендикулярной поляризацией и одинаковыми амплитудами, так как падающий на пластиинку свет был неполяризо-

ванным (естественным). На вторую пластинку падает поляризованный свет под углом 30° к плоскостям поляризации второй пластиинки. Из двух падающих лучей имеем за второй пластиинкой четыре луча с относительными интенсивностями 1:3:1:3, так как напротив угла 30° амплитуда равна $1/2$ падающей, напротив угла 60° — $\sqrt{3}/2$.

Для нахождения наименьшей толщины h пластиинки из кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий плоско поляризованный свет выходил поляризованным по кругу ($n_e = 1,5533$, $n_o = 1,5442$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) (№ 11.1), воспользуемся (11.17) $h = (\lambda/4)/(n_e - n_o) = 0,014$ мм.

Одна и та же пластиинка может оказаться пластиинкой в четверть волны для света с длиной волны $\lambda_1 = 5880$ Å и пластиинкой, которая поворачивает плоскость поляризации на 90° для другой волны с длиной $\lambda_2 = 5740$ Å, что достигается с помощью пластиинки в полволны. Найдем толщину такой пластиинки, если разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей равна 0,2 (№ 11.2). Используя (11.17) и (11.16), получаем: $h_1 = 7350$ Å, $h_2 = 14350$ Å. Толщины пластиинок можно увеличивать, добавляя целое число длин волн:

$$H_1 = h_1 + m \lambda_1 = (7350 + m5880)\text{\AA}, \\ H_2 = h_2 + p\lambda_2 = (14350 + p5740)\text{\AA},$$

где m и p — целые числа.

Видно, что первая линейная зависимость начинается ниже, но идет круче. Поэтому они должны пересечься. Подбирая m и p , можно найти H , одинаковое для обеих зависимостей. Это будет при $m = 91$ и $p = 92$. При этом наименьшая толщина пластиинки $H = 0,0542$ мм.

В интерференционном опыте Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 11.10) введен поляроид P , главные оси которого параллельны или перпендикулярны щелям S_1 и S_2 . Найдем, как изменится интерференционная картина на экране, если щели S_1 и S_2 закрыть пластиинками в полволны, ориентированными во взаимо перпендикулярных плоскостях (параллельно и перпендикулярно щелям). Определим, что произойдет, если поляроид P повернуть на 90° , и какая картина будет наблюдаться, если убрать поляроид. Рассмотрим ту же задачу, если вместо пластиинки в полволны используется пластиинка в четверть волны. Щели S_1 и S_2 предполагаются узкими (порядка длины волны), а расстояние между ними большим по сравнению с их шириной (№ 11.9). В классическом опыте Юнга распределение интенсивности света на экране и рас-

стояния между максимами определяются (3.12) и (3.10). Установленный за щелью S поляроид приводит в соответствии с (11.2) к уменьшению интенсивности в два раза. При установлении перед щелями S_1 и S_2 пластинок в полволны так, что из света, поляризованного параллельно (перпендикулярно) щелям, одна пластина пропускает только обыкновенную волну, а другая — только необыкновенную, получаем изменение фазы на полволны, т. е. сдвиг полос на половину ширины между ними. Если поляроид повернуть на 90° , то сдвиг будет в другую сторону, но картина совпадет с первой, сдвинутой. Если убрать поляроид, то положение полос не изменится, но не будет уменьшения начальной интенсивности и интенсивность увеличится в два раза. При использовании поляроида и пластин в четверть волны картина сдвинется на $1/4$ расстояния между полосами от той, которая была без пластин. При повороте поляроида на 90° сдвиг будет в другую сторону. Если убрать поляроид, то картины складываются, т. е. полосы пропадут.

Частично линейно поляризованный свет (смесь естественного и линейно поляризованного) рассматривается через николь (поляроид). При повороте николя на 60° от положения, соответствующего максимальной яркости, яркость пучка уменьшилась в два раза. Найдем степень поляризации пучка $\Delta = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ и отношение интенсивностей естественного и линейно поляризованного света (I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности света, проходящего через николь) (№ 11.10). В соответствии с (11.1) и (11.2) $I_{\max} = I_n + I_e/2$. После поворота николя имеем: $I_n \cos^2 60^\circ + I_e/2 = I_n/4 + I_e/2$. По условию $I_n + I_e/2 = 2(I_n/4 + I_e/2)$, откуда $I_n = I_e$, $I_{\max} = (3/2)I_n$, $I_{\min} = (1/2)I_n$, $\Delta = 1/2$.

Если бы в этой задаче было задано $\Delta = 1/2$, а требовалось бы найти отношение интенсивностей после и до поворота (№ 11.11), то $I_{\max}/I_{\min} = (\Delta + 1)/(1 - \Delta) = 3 = (I_n + I_e/2)/(I_e/2)$. Откуда $I_n = I_e$. Поэтому $I_2/I_1 = (I_n/4 + I_e/2)/(I_n + I_e/2) = 1/2$.

Один поляроид пропускает 30 % света, если на него падает естественный свет. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9 %. Найдем угол φ между осями поляроидов (№ 11.12). Используя (11.2) можем найти долю потерь (p), не связанных с поляризацией, $0,3I_e = p \cdot 0,5I_e$. Отсюда $p = 0,6$.

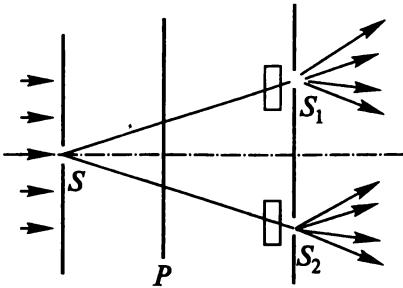


Рис. 11.10

Таким образом, после двух поляроидов $0,09I = 0,3I \cdot 0,6\cos^2\phi$. Поэтому $\cos^2\phi = 1/2$ и $\phi = 45^\circ$.

При падении на поляроид естественного света энергетический коэффициент пропускания составляет $t = 0,4$, при этом проходящий свет оказывается полностью линейно поляризованным. Найдем коэффициент пропускания T естественного света для **системы** из четырех таких **поляроидов**, повернутых относительно друг друга на углы $\phi = 60^\circ$ (№ 11.94). Обозначим коэффициент пропускания линейно поляризованного света при прохождении по разрешенному направлению поляроида τ . Без поглощения через поляроид проходит половина интенсивности. Поэтому из условия: $t = (1/2)\tau = 0,4$ получаем $\tau = 0,8$. Коэффициент пропускания через четыре поляроида

$$T = (1/2)\tau(\tau\cos^2\phi)^3 = (1/2)\tau^4\cos^6\phi = 0,0032.$$

Неполяризованный свет проходит через два одинаковых скрещенных под углом $\theta = 45^\circ$ **неидеальных поляроида**. Энергетические коэффициенты пропускания света, поляризованного по двум взаимно перпендикулярным осям поляроидов, равны a^2 и b^2 , при этом $a^2 > b^2$. Определим, какая часть светового потока пройдет через систему из двух поляроидов. Проведем численный расчет при $a^2 = 0,9$ и $b^2 = 0,1$ (№ 11.95). После прохождения первого поляроида амплитуды колебаний (некогерентных) по осям поляроида $A_{x_1} = E_0a/(2)^{1/2}$; $A_{y_1} = E_0b/(2)^{1/2}$. После прохождения второго поляроида по каждой оси возникнут некогерентные вклады:

по оси x_2 : $E_0a(a\cos\theta)/(2)^{1/2}$ и $E_0b(asin\theta)/(2)^{1/2}$;

по оси y_2 : $E_0a(b\sin\theta)/(2)^{1/2}$ и $E_0b(b\cos\theta)/(2)^{1/2}$.

Сложение происходит как для некогерентного света, т. е. складываются интенсивности:

$$I_{x_2} = E_0^2 (a^2/2)(1/2) + E_0^2 (a^2b^2/2) = (I_0/4)(a^4 + a^2b^2);$$

$$I_{y_2} = (I_0/4)(b^4 + a^2b^2).$$

Коэффициент пропускания системы из двух поляроидов

$$I/I_0 = (I_{x_2} + I_{y_2})/I_0 = (1/4)(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) = (1/4)(a^2 + b^2)^2 = 1/4.$$

Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через **поляроид**. Найдено положение поляроида, соответствующее максимальной интенсивности прошедшего света. При повороте поляроида из этого положения на угол $\alpha = 30^\circ$ интенсивность света уменьшилась на $p = 20\%$. Найдем отношение интенсивности света I_k , поляризо-

ванного по кругу, к интенсивности линейно поляризованного света I_n (№ 11.13). При круговой поляризации интенсивность и амплитуда связаны соотношением $I_k = 2A_k^2$. Для максимальной интенсивности $I_{max} = I_n + (1/2)I_k$. После поворота поляроида на угол 30° имеем $0,8I_{max} = I_n \cos^2 30^\circ + (1/2)I_k$. Отсюда $I_k/I_n = 1/2$.

Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через **николь** (поляроид). Найдено положение николя, при котором интенсивность проходящего света максимальна. При повороте николя от этого положения на некоторый угол вокруг оси пучка интенсивность проходящего света уменьшается в $m = 2$ раза по сравнению с максимальной и во столько же раз увеличивается по сравнению с минимальной. Найдем отношение интенсивности I_k света, поляризованного по кругу, к интенсивности света I_n , линейно поляризованного (№ 11.14). При круговой поляризации интенсивность и амплитуда связаны соотношением $I_k = 2A_k^2$. Для максимальной интенсивности $I_{max} = I_n + (1/2)I_k$, для минимальной $I_{min} = (1/2)I_k$. После поворота поляроида на некоторый угол имеем $I = I_{max}/m = mI_{min}$. Используя это, находим $I_k/I_n = 2/(m^2 - 1) = 2/3$.

Смесь света, поляризованного по кругу, и естественного рассматривается через кристаллическую **пластинку в четверть волн** и николь. При вращении николя вокруг оси светового пучка найдено, что максимальная интенсивность света, прошедшего через систему, в $m = 3$ раза превосходит минимальную интенсивность. Найдем отношение интенсивности света I_k , поляризованного по кругу, к интенсивности естественного света I_e (№ 11.16). Круговую поляризацию можно рассматривать как сумму двух независимых колебаний, сдвинутых на $\lambda/4$. При устранении этого сдвига путем использования пластинки в четверть волн получаем линейную поляризацию с интенсивностью круговой поляризации $I_k = A_{0x}^2 + A_{0y}^2 = 2A_{0x}^2$. При вращении николя (поляроида) будем максимально получать эту величину, минимально — нуль. Из естественного света через николь получаем половину интенсивности, поэтому $I_{max} = I_k + I_e/2 = mI_{min} = mI_e/2$. Отсюда $I_k/I_e = (m - 1)/2 = 1$.

Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ , поляризованный по правому кругу, падает нормально на **пластинку в полволны**. Найдем состояние поляризации света, прошедшего через эту пластинку (№ 11.17). На рис. 11.11 штриховой линией показана сдвинутая на $\lambda/2$ волна. При этом вместо правого круга вращения появляется левый.

Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ падает нормально на **поляроид**, а затем — на **пластинку в полволны**. Главная плоскость поляроида (в которой лежит электрическая

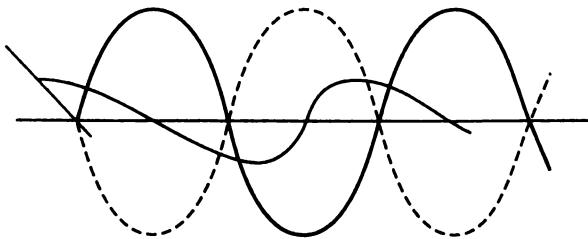


Рис. 11.11

ский вектор пропускаемой им волны) составляет угол α с осью этой пластинки. Найдем состояние поляризации прошедшего света на выходе из пластинки в полволны (№ 11.18). После прохождения поляризованной волны через пластинку в полволны компоненты по оси пластинки и перпендикулярно к оси сдвигаются на полволны. В результате плоскость поляризации выходящей волны повернется на угол 2α от направления поляризации падающей волны (на угол α от оси пластинки).

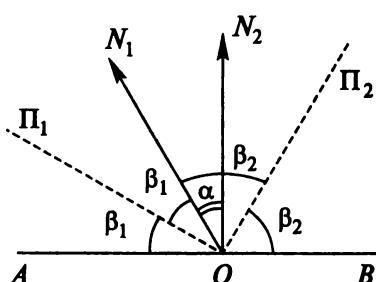


Рис. 11.12

Параллельный пучок монохроматического света проходит через два николя, главные плоскости которых повернуты друг относительно друга на угол $\alpha = 20^\circ$. Между николями ставится пластинка односного кристалла, вырезанная параллельно оптической оси и вносящая разность хода $\lambda/2$ между обычным и необыкновенным лучами. Найдем, какой угол β должна составлять оптическая ось пластиинки с направлением первого николя, чтобы свет через систему не прошел (№ 11.19). На рис. 11.12 разрешенное направление первого николя ON_1 , разрешенное направление второго николя ON_2 .

Чтобы свет не прошел через второй николь, направление поляризации света AB должно быть перпендикулярно ON_2 . Пользуясь результатом предыдущей задачи, получаем, что свет после первого николя будет поляризован по AB , если ось пластиинки направлена по биссектрисе угла AON_1 или BON_1 . Используя рис. 11.12, находим $\beta_1 = -\pi/4 + \alpha/2 = -35^\circ$, $\beta_2 = \pi/4 + \alpha/2 = +55^\circ$.

Два николя N_1 и N_2 повернуты относительно друг друга на угол α ; между ними помещен николь N_3 (рис. 11.13). На систему падает параллельный пучок неполяризованного света. Предполагая, что

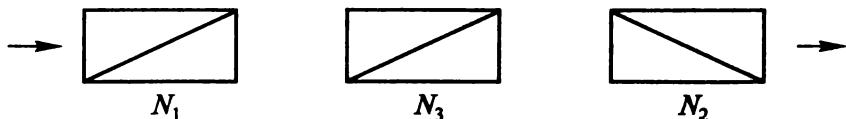


Рис. 11.13

необыкновенный луч проходит через каждый николь без потерь, найдем ориентацию николя N_3 относительно николя N_1 , при которой интенсивность проходящего света максимальна. Определим интенсивность проходящего света в этих положениях, если интенсивность падающего света равна I_0

(№ 11.67). На рис. 11.14 показано расположение плоскостей пропускания николей. Используя (11.1), получаем $I = (I_0/2)\cos^2\beta\cos^2(\alpha - \beta)$. Максимальное значение интенсивности определяется максимумом функции

$$f(\beta) = \cos\beta\cos(\alpha - \beta) = (1/2)[\cos\alpha + \cos(2\beta - \alpha)].$$

Приравнивая первую производную нулю, получаем, что максимум этой функции будет при $\sin(2\beta - \alpha) = 0$. Годятся $\beta = \alpha/2$ и $\beta = (\alpha - \pi)/2$. Для интенсивности имеем $I = (I_0/2)\cos^4(\alpha/2)$.

Между скрещенными николями помещена пластинка из кварца, вырезанная параллельно оптической оси. Оптическая ось пластиинки составляет угол 45° с главными направлениями николей. Рассчитаем минимальную толщину пластиинки h , при которой

одна линия водорода $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$ будет сильно ослаблена, а другая $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$ будет обладать максимальной интенсивностью. Величина анизотропии кварца $\Delta n = 0,009$ (№ 11.69). На рис. 11.15 показаны векторы проходящих волн. После первого николя N_1 в пластиине распространяются обыкновенная и необыкновенная волны с длинами λ_1 и λ_2 . При распространении волн через пластиинку разность хода обыкновенной и необык-

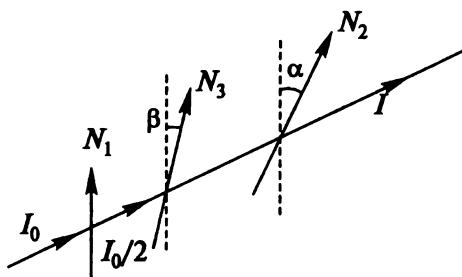


Рис. 11.14

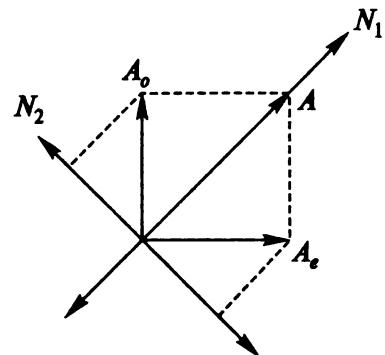


Рис. 11.15

новенной волн равна Δnh . Если эта величина равна λ_1 , то на выходе из пластиинки имеем для суммы волн поляризацию, как после первого николя, которая не проходит через второй николь N_2 . Отсюда $h_1 = \lambda_1/\Delta n = 0,0073$ см. Чтобы волна длиной λ_2 проходила через второй николь пластиинка должна давать разность хода $m\lambda_2/2$. В случае удовлетворения первого условия должно быть $m = 3$. Получаем $h_2 = (3/2)\lambda_2/\Delta n = 0,0068$ см. Таким образом, пластиинка толщиной 0,07 мм удовлетворяет поставленным условиям.

Между двумя скрещенными николями помещена кристаллическая пластиинка толщиной $d = 0,045$ мм с показателями преломления $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$. Пластиинка вырезана параллельно оптической оси кристалла и ориентирована так, что главное направление первого николя составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с ее оптической осью. На систему нормально падает естественный свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ и интенсивностью I_0 . Найдем интенсивность I света, прошедшего через описанную систему (№ 11.73). После прохождения пластиинки имеем две волны со взаимно перпендикулярными поляризациями и сдвинутыми по фазе на $\delta = (2\pi/\lambda)d(n_e - n_o) \approx (3/2)\pi$. Перед вторым николем одна волна $a \sin \alpha e^{i\omega t}$, другая $a \cos \alpha e^{i(\omega t + \delta)}$ (здесь a — амплитуда волны за первым николем). В соответствии с (11.2) $a^2 = I_0/2$. Через второй николь проходят проекции этих волн, которые в сумме дают

$$a \sin \alpha \cos \alpha - a \cos \alpha \sin \alpha e^\delta = a \cos \alpha \sin \alpha (1 - e^\delta).$$

Вынося за скобку $e^{\delta/2}$, для интенсивности за вторым николем получаем

$$I = (I_0/2) \sin^2 2\alpha \sin^2(\delta/2).$$

Для сравнения яркостей двух поверхностей, освещаемых неполяризованным светом, одну из них рассматривают непосредственно, а другую — через два николя. Найдем, каково отношение этих яркостей, если освещенность обеих поверхностей кажется одинаковой при угле между николями $\alpha = 60^\circ$. Считаем, что потери света в каждом николе на отражение и поглощение составляют $p = 10\%$ от падающего света (№ 11.20). Интенсивность света с поверхности, которую рассматриваем непосредственно, обозначим I_1 , а с поверхности, рассматриваемой через николи, — I_2 . После первого николя в соответствии с (11.2) интенсивность уменьшается наполовину, а с учетом отражения и поглощения равна $I_2(1/2)(1 - p/100)$. Из (11.1) за вторым николем интенсивность

$$I_2(1/2)(1 - p/100) \cos^2 \alpha (1 - p/100).$$

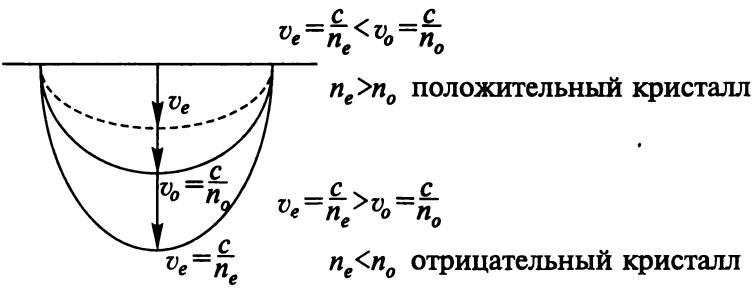


Рис. 11.16

Так как по условию эта интенсивность равна I_1 , то отношение яркостей

$$I_1/I_2 = (1/2)(1 - p/100)^2 \cos^2 \alpha = 0,1.$$

Найдем, как отличить свет, поляризованный по левому кругу, от света, поляризованного по правому кругу (№ 11.75). На рис. 11.16 показаны фронты обыкновенной и необыкновенной волн для положительного (пунктиром) и отрицательного одноосных кристаллов. На рис. 11.17, а показано изменение компонент электрического вектора в волне поляризованной по правому кругу в осях, соответствующих обыкновенной и необыкновенной осям в кристаллической пластинке. На рис. 11.17, б показано изменение компонент электрического вектора в волне после положительного кристалла в $\lambda/4$, а на рис. 11.17, в — для отрицательного кристалла в $\lambda/4$. По направлению линейной поляризации определяем направление круговой поляризации. Аналогичные рисунки можно сделать для левой круговой поляризации. На них направление линейной поляризации изменится на 90° .

Выясним, как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, и от смеси естественного света с поляризованным по кругу (№ 11.76). Пропускаем свет через пластинку в четверть длины волны николь. Если при вращении николя и при любом положении пластинки интенсивность не меняется, то

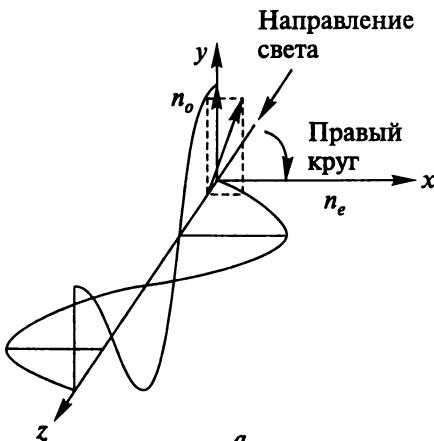


Рис. 11.17

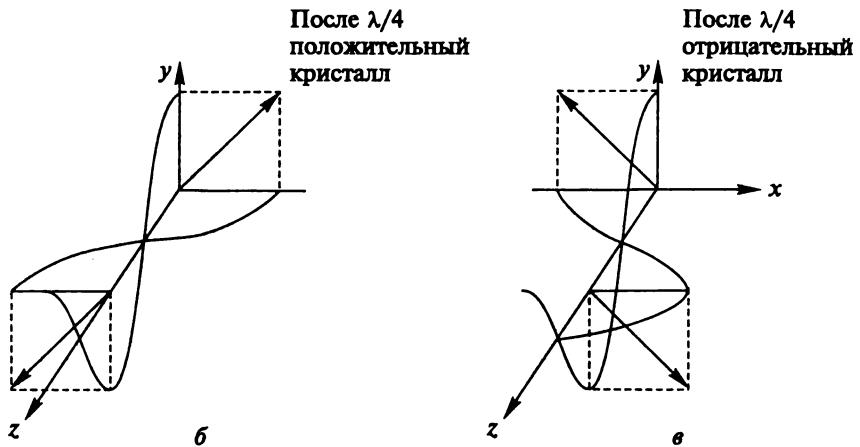


Рис. 11.17

это естественный свет. Если интенсивность меняется и падает до нуля, то это свет, поляризованный по кругу. Если интенсивность меняется, но не падает до нуля, то это свет, частично поляризованный по кругу (смесь естественного и поляризованного по кругу).

Рассмотрим, как отличить друг от друга 1) эллиптически поляризованный свет, 2) смесь естественного света с линейно поляризованным светом (отчасти линейно поляризованный свет), 3) смесь естественного света с эллиптически поляризованным светом (отчасти эллиптически поляризованный свет) (№ 11.77). Как и в предыдущей задаче пропускаем свет через пластинку в четверть длины волны и николь. Если вращением пластиинки и николя можно получить нулевую интенсивность света, то свет эллиптически поляризован. Если этого не получается, то свет представляет собой либо смесь естественного света с линейно поляризованным, либо смесь естественного с эллиптически поляризованным. Чтобы различить эти случаи, сначала на пути света ставят только один николь и устанавливают его на минимум проходящего света. Затем перед николем помещают пластинку в четверть длины волны. Вращением пластиинки и николя добиваются минимума интенсивности. Если этот минимум получается при прежнем положении николя (или при повороте его на 180°), то свет представляет смесь естественного и линейно поляризованного. Если же для получения минимума требуется повернуть николь на некоторый угол, то свет представляет смесь естественного с эллиптически поляризованным.

На кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, падает нормально свет, поляризованный по кругу.

Прошедший свет рассматривается через анализатор. 1) Определим интенсивность света, если главная плоскость анализатора составляет угол α с одним из главных направлений пластиинки. 2) Найдем, под каким углом надо поставить анализатор, чтобы получить максимальную и минимальную интенсивности (№ 11.81).

1) Напряженность электрического поля в волне представим в виде компонент по осям кристаллической пластиинки

$$E_x = a \cos \omega t, E_y = a \sin \omega t.$$

После прохождения через кристаллическую пластиинку, сообщающую разность хода δ , получаем

$$E_{x1} = a \cos \omega t, E_{y1} = a \sin(\omega t + \delta).$$

При угле α между разрешенной плоскостью анализатора и одним из главных направлений пластиинки результирующее колебание при выходе из анализатора будет

$$\begin{aligned} & a \cos \alpha \cos \omega t + a \sin \alpha \sin(\omega t + \delta) = \\ & = a(\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) \cos \omega t + a \sin \alpha \cos \delta \sin \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для интенсивности

$$I = a^2[(\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta)^2 + (\sin \alpha \cos \delta)^2] = a^2(1 + \sin 2\alpha \sin \delta). \quad (11.18)$$

2) При постоянном значении δ интенсивность достигает максимума или минимума, когда $\cos 2\alpha = 0$, т. е. при $\alpha = \pi/4, 3\pi/4$. Если $\sin \delta > 0$, то первому значению соответствует максимум, а второму — минимум; при $\sin \delta < 0$ — наоборот.

Клин из двоякопреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу. Оптическая ось параллельна ребру клина. Опишем наблюдаемую через николь картину, когда клин неподвижен и когда он поворачивается вокруг направления распространения света (№ 11.82). В предыдущей задаче получено (11.18). При постоянном угле α ($\sin 2\alpha > 0$) интенсивность будет минимальной, когда

$$\sin \delta = -1, \text{ т. е. при } \delta = 3\pi/2, 7\pi/2, \dots$$

и максимальной при

$$\sin \delta = 1, \text{ т. е. } \delta = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \dots$$

Если же $\sin 2\alpha < 0$, то в первом случае будет минимум, а во втором — максимум интенсивности. Следовательно, в поле зрения будут видны чередующиеся светлые и темные полосы. При враще-

нии клина будет меняться угол α и, следовательно, в каждой точке клина будет изменяться интенсивность.

При углах $\alpha = 90, 180$ и 270° весь клин будет освещен равномерно, а при углах $\alpha = 45, 135, 225, 315^\circ$ будет наблюдаться наиболее резкая разница в интенсивности темных и светлых полос, причем при переходе через углы $\alpha = 90, 180, 270^\circ$ темные полосы будут переходить в светлые, а светлые — в темные.

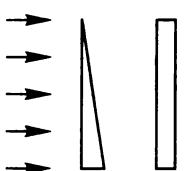


Рис. 11.18

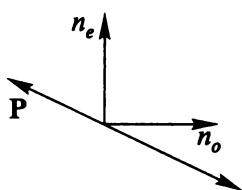


Рис. 11.19

Клин из двоякопреломляющего вещества, оптическая ось которого параллельна ребру клина, помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу (рис. 11.18). Свет, прошедший через клин, рассматривается через поляроид, главное направление которого составляет угол 45° с ребром клина. Найдем число темных полос m , наблюдаемых на поверхности клина. Максимальная толщина клина $d_{\max} = 0,05$ см, $n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$, $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ (№ 11.71). На рис. 11.19 показаны главные оси вещества клина и разрешенное направление поляроида. Темные полосы возникают, когда разность хода в клине $d (n_e - n_o) = m\lambda - \lambda/4$, откуда максимальное число полос $m \approx d_{\max} (n_e - n_o)/\lambda \approx 10$.

Имеется горизонтальный параллельный пучок эллиптически поляризованного света. Обнаружено, что при прохождении пучка через пластинку в $\lambda/4$ при определенной ее ориентации свет оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_1 = 23^\circ$ к вертикали. Если пластинку повернуть на угол 90° , то весь свет снова оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_2 = 83^\circ$ к вертикали. Найдем отношение a/b полуосей эллипса поляризации и угол ϕ наклона большой оси (№ 11.21). На рис. 11.20 штриховой линией показана вертикаль, от которой отсчитываются углы. Использование дополнительной пластинки в $\lambda/4$ соответствует в зависимости от ее поворота либо прохождению линейно поляризованного света через пластинку толщиной в $\lambda/2$, либо как в отсутствие пластинки. Эти два случая на рис. 11.20 отмечены как 1-я линейная поляризация и 2-я линейная поляризация. Главная оптическая ось (y) является биссектрисой между этими направлениями. Соответственно, $\beta = (\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 30^\circ$. Если 1-я или 2-я линейные поляризации проходят через пластинку в $\lambda/4$, то возникает эллиптическая поляризация. Эллипс, по которому идет конец электрического поля

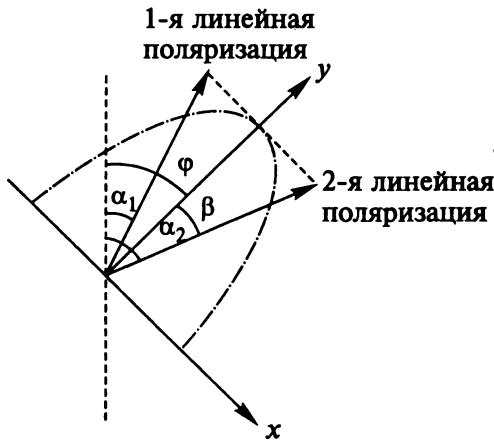


Рис. 11.20

ского вектора, показан штрих-пунктирной линией. Отношение полуосей эллипса $a/b = \operatorname{tg}\beta = (3)^{1/2}$. Наклон большой оси $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 = 53^\circ$.

Плоская монохроматическая эллиптически поляризованная волна падает на кристаллическую пластинку, после которой установлен анализатор. Оказалось, что существует такое положение кристаллической пластиинки, при котором интенсивность света, вышедшего из анализатора, не зависит от положения анализатора и равна I_1 . В отсутствие пластиинки максимальная интенсивность света, которая может быть получена после анализатора, составила I_2 . Определим отношение полуосей эллипса поляризации (№ 11.23). Полная интенсивность волны $I_0 = I_x + I_y$, где I_x и I_y — интенсивности по главным осям. Считаем максимальной интенсивность по x . Поэтому $I_x = I_2$. Если полуоси эллипса поляризации a и b , то $I_y/I_x = (a/b)^2$ ($a > b$). Соответственно, $I_y = (b/a)^2 I_2$. Первое условие задачи будет соблюдено, если из пластиинки выйдет волна, поляризованная по кругу,

$$I_1 = I_0/2 = (1/2)(I_x + I_y) = (1/2)I_x(1 + b^2/a^2),$$

откуда $b/a = (2 I_1/I_2 - 1)^{1/2}$.

Плоская световая волна эллиптически поляризована. Длины полуосей эллипса колебаний равны соответственно a и b . Найдем, какую кристаллическую пластиинку надо поставить на пути распространения волны и как ориентировать эту пластиинку, чтобы получить свет, поляризованный по кругу 1) с тем же направлением вращения; 2) с противоположным направлением вращения (№ 11.24).

Напомним формулу Эйлера (см. 1, с. 101). Комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ где } i = (-1)^{1/2}.$$

Дифференцируя z по φ , получаем: $dz/d\varphi = \rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi) = iz$. Отсюда показательная форма записи комплексного числа (формула Эйлера)

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}. \quad (11.19)$$

Гармонические колебания описываются формулой

$$u = A\cos(\omega t + \alpha). \quad (11.20)$$

Такие величины называются **синусоидальными**.

Удобно использовать комплексную форму, для которой действительная и мнимая части представляют гармонические функции

$$u = Ae^{i(\omega t + \alpha)}. \quad (11.21)$$

Векторные диаграммы таких величин строятся в плоскости, вращающейся с угловой скоростью ω . На рис. 11.21 показано, как складываются синусоидальные величины

$$A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega t + \alpha_2) = A\sin(\omega t + \alpha). \quad (11.22)$$

Используя теорему косинусов, имеем

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}; \quad (11.23)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)/(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2). \quad (11.24)$$

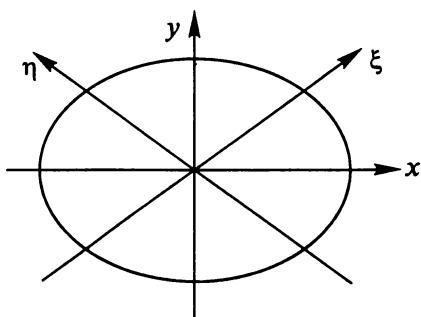


Рис. 11.21

На рис. 11.22 в системе главных осей x и y показан эллипс поляризации. Для компонент электрического вектора имеем $E_x = a\cos\omega t$, $E_y = b\sin\omega t$. Считая, что волна распространяется по оси z (в правой системе), которая направлена в сторону читателя, имеем левую эллиптическую поляризацию. Переходим к системе координат, оси кото-

рой являются биссектрисами главных осей. Используя (11.22) — (11.24), для того же колебания в этой системе координат получаем

$$E_{\xi} = \cos 45^\circ (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = [(a^2 + b^2)/2]^{1/2} \cos(\omega t - \alpha);$$

$$E_{\eta} = \cos 45^\circ (-a \cos \omega t + b \sin \omega t) = [(a^2 + b^2)/2]^{1/2} \cos[\omega t - (\pi - \alpha)];$$

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a.$$

Колебания вдоль осей ξ и η совершаются с одинаковыми амплитудами $[(a^2 + b^2)/2]^{1/2}$, причем колебание вдоль оси ξ опережает по фазе колебание вдоль оси η на угол $\delta = \pi - 2\alpha$. Кристаллическую пластинку надо внести так, чтобы ее оси были ориентированы вдоль ξ и η и чтобы она изменила разность фаз до $\pm\pi/2$. Для этого должно быть выполнено соотношение

$$(\omega t - \alpha - k_{\xi} l) - (\omega t - \pi + \alpha - k_{\eta} l) = \pm\pi/2,$$

откуда

$$l = (2\alpha - \pi \pm \pi/2)/(k_{\eta} - k_{\xi}) = \lambda(\alpha/\pi - 1/2 \pm 1/4)/(n_{\eta} - n_{\xi}).$$

В таком случае волна перейдет в волну, поляризованную по кругу. Знаку «+» соответствует то же направление вращения, что и в исходной эллиптически поляризованной волне, а знаку «—» — противоположное. Такой же результат получится, если толщину пластиинки изменить на целое число волн в среде $m\lambda/(n_{\eta} - n_{\xi})$, где m — целое число.

Некогерентная смесь неполяризованного, линейно поляризованного света и света с круговой поляризацией анализируется с помощью быстро вращающегося поляризатора и фотоприемника, ток которого зависит от интенсивности света. Оказалось, что глубина модуляции фототока равна $m_1 = 0,1$. После установки на пути лучей пластиинки $\lambda/4$ было выяснено, что свет по-прежнему представляет собой некогерентную смесь неполяризованного, линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, но теперь глубина модуляции фототока составила $m_2 = 0,2$. Определим степень поляризации света (№ 11.22). В первом опыте поляроид из интенсивности неполяризованного света $I_{\text{пп}}$ пропускает, согласно (11.2), $I_{\text{пп}}/2$, из круговой поляризации I_{κ} , соответственно, $I_{\kappa}/2$. Эти величины не зависят от вращения поляроида. В модуляции максимальное значение фототока получаем, когда разрешенное направление поляроида совпадает с линейной поляризацией (I_{η})

$$I_{\max} = I_{\eta} + I_{\kappa}/2 + I_{\text{пп}}/2. \quad (11.25)$$

Минимальная интенсивность получается, когда разрешенное направление поляроида перпендикулярно линейной поляризации

$$I_{\min} = I_k/2 + I_{\text{пп}}/2. \quad (11.26)$$

В соответствии с определением модуляции

$$m_1 = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = I_n / (I_{\text{пп}} + I_k + I_n) = 0,1. \quad (11.27)$$

При использовании пластинки в $\lambda/4$ линейная поляризация превращается в круговую, а круговая — в линейную, поэтому

$$m_2 = I_k / (I_{\text{пп}} + I_k + I_n) = 0,2.$$

Степенью поляризации смеси света называют величину

$$\Delta = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) \quad (11.28)$$

или

$$\Delta = (I_\perp - I_\parallel)/(I_\perp + I_\parallel). \quad (11.29)$$

Здесь интенсивности во взаимно перпендикулярных направлениях.

Используя (11.28), (11.25) и (11.26), находим $\Delta = 0,1$.

На плоский экран, состоящий из двух поляроидных полуплоскостей, граничащих друг с другом вдоль прямой, перпендикулярно падает пучок параллельных лучей, поляризованных по кругу (рис. 11.23). Оси поляроидов взаимно перпендикулярны. Интенсивность падающего света равна I_0 . Определим интенсивность I света в точке P , расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через границу раздела между поляроидами. Найдем, как будет поляризован свет в точке P (№ 11.25). В соответствии с вычислениями на основе спирали Корню интенсивность света под краем непрозрачной полуплоскости равна $I_0/4$. Поляроид, поставленный в открытую полуплоскость, из естественного или поляризованного по кругу света оставляет половину интенсивности

$(I_0/8)$ и дает линейную поляризацию, соответствующую данному поляроиду. При установлении второго поляроида во вторую полуплоскость получаем такую же интенсивность. В сумме в точке P имеем $I_0/4$. Так как складываются два линейно поляризованных когерентных со взаимно перпендикулярными направлениями поляризации, имеющие сдвиг фаз $\pi/4$, в точке P имеем круговую поляризацию.

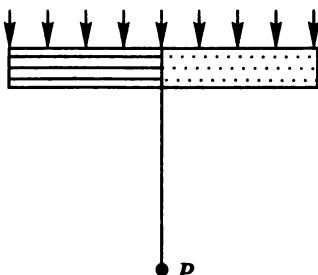


Рис. 11.23

Плоская волна монохроматического света, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность I_0 . На пути волны ставят две большие пластиинки в $\lambda/4$, как показано на рис. 11.24. Главные направления пластиинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Найдем интенсивность I в точке P (№ 11.27). Обозначив амплитуды волны по осям a_{0x} и a_{0y} , получим

$$I_0 = a_{0x}^2 + a_{0y}^2 = 2a_{0x}^2 = 2a_{0y}^2$$

После установки пластиин имеем линейно поляризованные волны во взаимно перпендикулярных направлениях (от верхней полуплоскости половина амплитуды и от нижней полуплоскости половина амплитуды). В результате

$$I = (a_{0x}/2)^2 + (a_{0y}/2)^2 + (a_{0x}/2)^2 + (a_{0y}/2)^2 = a_{0x}^2 = (1/2)I_0$$

На прозрачную пластиинку в **полволны**, ограниченную прямолинейным краем, нормально падает пучок параллельных линейно поляризованных лучей интенсивности I_0 (рис. 11.25). Плоскость поляризации падающего света наклонена под углом 45° к краю пластиинки. Определим интенсивность I прошедшего света в точке P , расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости пластиинки и проходящей через ее край. Найдем, какова будет в общем случае (при произвольной толщине пластиинки) поляризация прошедшего света в точке P (№ 11.30). Если прикрыть полуволновую пластиинку непрозрачным экраном, то используя спираль Корню, находим, что интенсивность на границе геометрической тени будет $I_0/4$. Если открыть полуволновую пластиинку, то добавится второй пучок той же интенсивности. Так как полуволновая пластиинка поворачивает плоскость поляризации на 90° , оба прошедших пучка будут поляризованы линейно во взаимно перпендикулярных плоскостях. При их наложении в точке P получаем $I = 2I_0/4 = I_0/2$. При специально подобранный толщине пластиинки, когда разность фаз между пучками равна $m\pi$ (m — целое число), свет в точке P будет поляризован линейно. В общем случае, в зависимости от толщины пластиинки, возни-

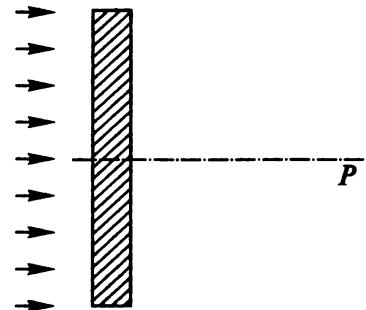


Рис. 11.24

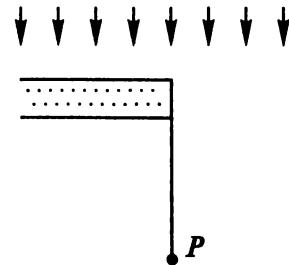


Рис. 11.25

кает дополнительная разность фаз, которая приводит к эллиптической поляризации.

Плоская волна монохроматического света (длина волны λ), поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность I_0 . На пути волны ставят большую пластинку из идеального **поляроида** (рис. 11.26). Показатель преломления вещества поляроида n . Найдем толщину d пластиинки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной, и чему равна I_{\max} (№ 11.26). При движении через среду с показателем преломления меняется фаза. Максимальная сумма синусоид достигается в случае, если на выходе разность фаз будет равна $2\pi m$ (m — целое число). Для расстояния d и длины волны в вакууме λ получаем $(2\pi/\lambda)(n - 1)d = 2\pi m$, откуда $d = m\lambda/(n - 1)$. Если компоненты круговой поляризации a_{0x} и a_{0y} , то $I_0 = a_{0x}^2 + a_{0y}^2 = 2a_{0x}^2 = 2a_{0y}^2$. Предполагая, что разрешенное направление поляроида по оси y , получаем, что y -я компонента приходит целиком в точку P , а от x -й компоненты остается половина. Поэтому $I_{\max} = (a_{0x}/2)^2 + a_{0y}^2 = (5/4)a_{0x}^2 = (5/8)I_0$.

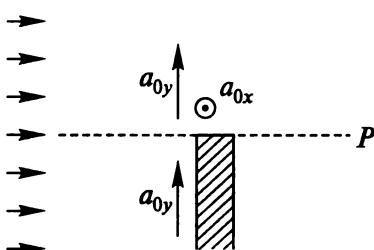


Рис. 11.26

Плоская волна **круговой** поляризации (длина волны λ) падает на **полубесконечный** экран (см. рис. 11.26), изготовленный из поляроида с показателем преломления для разрешенного направления n ($n - 1 \ll 1$) и толщиной $a = \lambda/[4(n - 1)]$. Найдем, какова степень поляризации света в точке наблюдения P (№ 11.28). Как и в предыдущей задаче для составляющей, которую не пропускает поляроид, имеем $I_0/8$. Проходящая через поляроид компонента получает отличие в фазе $(2\pi/\lambda)(n - 1)a = \pi/2$. В сумме это дает $I_0/4$. Используя (11.10), для степени поляризации получаем $\Delta = (1/4 - 1/8)/(1/4 + 1/8) = 1/3$.

Плоская поляризованная по кругу монохроматическая волна света с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает на **диск**, вырезанный из идеального **поляроида**, показатель преломления которого равен n . Диск закрывает для некоторой точки P одну зону Френеля. Найдем, какова должна быть толщина d диска, чтобы интенсивность света в точке P была максимальной, и определим эту интенсивность I_{\max} (№ 11.31). Разложим свет, поляризованный по кругу, на две линейно поляризованные компоненты с интенсивностями $I_0/2$ каждая. Одна из компонент пропускается поляроидом, а другая — нет. Для получения максимальной интенсивности диск

должен изменить фазу проходящей компоненты на $(2m + 1)\pi$ (где m — целое число), чтобы она совпала с составляющей от всех зон для этого же направления поляризации. Поэтому $(2\pi/\lambda)d(n - 1) = (2m + 1)\pi$, откуда

$$d = (2m + 1)(\lambda/2)/(n - 1).$$

Обозначив амплитуду компоненты круговой поляризации A_{0x} , получаем $A_{0x}^2 = I_0/2$. При изменении фазы складываем амплитуду первой зоны с амплитудой от всех остальных, равной A_{0x} . В результате $(3A_{0x})^2 = 9I_0/2$. От всех зон, кроме первой, для второй компоненты получаем $A_{0y}^2 = I_0/2$. В сумме имеем $I = 9I_0/2 + I_0/2 = 5I_0$.

Круглое отверстие в непрозрачном экране содержит для точки наблюдения P **одну зону Френеля**. Отверстие закрыто **поляроидом** так, что направления колебаний в первой и второй половинках зоны взаимно перпендикулярны. Отверстие освещается светом, поляризованным по кругу. Определим интенсивность света I в точке P , если в отсутствие экрана она равна I_0 . Найдем, как будет поляризован свет в точке наблюдения. Считаем, что в поляроидах нет поглощения света разрешенной поляризации (№ 11.32). На рис. 11.27 приведена векторная диаграмма для дифракции Френеля на отверстии. В отсутствие

экрана $I_0 = A_{0x}^2 + A_{0y}^2$. Первая зона увеличивает вектор в два раза, а поляроид уменьшает в два раза. Поэтому для половинок зоны получаем на рис. 11.27 векторы A_x и A_y . Для интенсивности в точке наблюдения получаем $I = A_x^2 + A_y^2 = 2I_0$. Векторы A_x и A_y взаимно перпендикулярны и имеют сдвиг фаз 0 или π ($\pi/2$ из-за круговой поляризации и $\pi/2$ из-за половины первой зоны Френеля). Следовательно, свет в точке P поляризован линейно.

В непрозрачном экране, на который нормально падает плоская линейно поляризованная волна интенсивностью I_0 , вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. В отверстие вставлены пластинки в $\lambda/4$ в форме полудисков, одноименные оси которых ориентированы взаимно перпендикулярно. Направление колебаний в падающей волне составляет 45° с главными направлениями пластинок. Найдем интенсивность колебаний в точке наблюдения (№ 11.39). Если амплитуду падающей волны обозначить $E_0 = (I_0)^{1/2}$, то за отверстием в непрозрачном экране, пред-

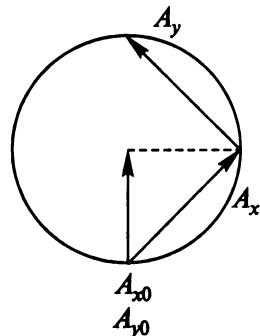


Рис. 11.27

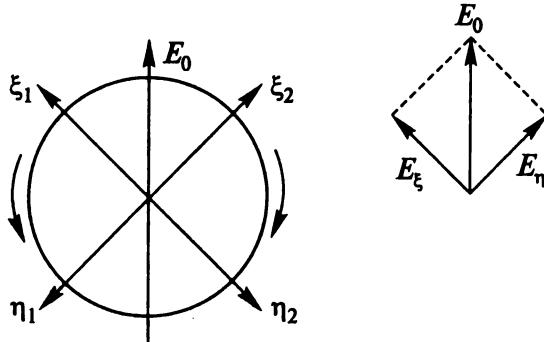


Рис. 11.28

ставляющем первую зону Френеля, получаем амплитуду $2E_0$. В каждой половинке E_0 . На векторной диаграмме (рис. 11.28) показаны амплитуды по главным осям за пластинками $E_\xi = E_\eta = E_0/(2)^{1/2}$. От каждой половинки получается волна круговой поляризации (с противоположными направлениями вращения). Представляя волны с круговой поляризацией в виде суммы волн по главным осям, имеем по оси ξ сумму $2E_0/(2)^{1/2}$, а по оси η разность, равную нулю. Для интенсивности находим $I = 2I_0$.

В непрозрачном экране, на который нормально падает плоская линейно поляризованная волна интенсивностью I_0 , вырезано круглое отверстие размером в две зоны Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. Первая зона перекрыта пластинкой $\lambda/4$ в форме диска, а вторая — пластинкой $\lambda/4$ в форме кольца. Одноименные оси пластинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Главные направления пластинок составляют угол 45° с направлением колебаний в падающей волне. Найдем интенсивность колебаний в точке наблюдения (№ 11.40). По аналогии с предыдущей задачей в первой зоне Френеля имеем $E_\xi = E_\eta = 2E_0/(2)^{1/2}$. Для двух зон получаем $(E_\xi)_{\text{сумм}} = 0$, $(E_\eta)_{\text{сумм}} = 4E_0/(2)^{1/2}$. Для интенсивности находим $I = 8I_0$.

Плоская монохроматическая световая волна, поляризованная по кругу, нормально падает на пластинку $\lambda/2$. В пластинке имеется круглое отверстие размером в одну зону Френеля для точки P , лежащей на оси системы. Интенсивность падающей волны равна I_0 . Определим интенсивность I и отношение полуосей эллипса колебаний электрического вектора световой волны в точке P (№ 11.92). Обозначив главные оси пластинки x и y , падающую волну представим в виде суммы компонент

$$E_x = E_0 \cos \omega t, \quad E_y = E_0 \sin \omega t.$$

Дифракция на отверстии в одну зону Френеля даст в точке P

$$E_{x1} = 2E_0 \cos \omega t, E_{y1} = 2E_0 \sin \omega t.$$

Дифракция на пластиине в $\lambda/2$ даст в точке P противоположную круговую поляризацию и сдвиг фаз φ , определяемый толщиной пластины и ее показателем преломления

$$E_{x2} = E_0 \cos(\omega t + \varphi), E_{y2} = -E_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Поле в точке P представляет суперпозицию двух противоположных круговых поляризаций с амплитудами $2E_0$ и E_0 . Максимальная напряженность будет в момент, когда E_1 и E_2 параллельны: $E_{\max} = 2E_0 + E_0 = 3E_0$. Минимальная напряженность будет в момент, когда E_1 и E_2 антипараллельны: $E_{\min} = 2E_0 - E_0 = E_0$. Поэтому отношение осей эллиптической поляризации равно трем. При расчете интенсивности волны в точке P можно рассуждать различными способами. Во-первых, волны с противоположными круговыми поляризациями не интерферируют, так как среднее значение скалярного произведения их напряженностей E_1 и E_2 будет равно нулю из-за быстро меняющегося угла между ними. Остаются только квадраты напряженностей, т. е. интенсивность в точке P равна сумме интенсивностей компонент $I = (2E_0)^2 + (E_0)^2 = 5E_0^2 = 5I_0$. Во-вторых, интенсивность можно найти, представляя результирующее поле, имеющее эллиптическую поляризацию, как суперпозицию двух плоско поляризованных волн с амплитудами $3E_0$ и E_0 , соответствующих главным осям эллипса поляризации. Они также не интерферируют между собой, так как поляризованы в перпендикулярных плоскостях. Интенсивность результирующего поля $I = (3E_0)^2 + (E_0)^2 = 10E_0^2 = 5I_0$, где $I_0 = E_0^2 + E_0^2 = 2E_0^2$ — подсчитанная аналогичным образом интенсивность падающей волны. Третий способ определить интенсивность состоит в непосредственном вычислении результирующего поля:

$$\begin{aligned} E^2 &= E_x^2 + E_y^2 = (E_{x1} + E_{x2})^2 + (E_{y1} + E_{y2})^2 = \\ &= E_0^2 \{[2\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi)]^2 + [2\sin \omega t - \sin(\omega t + \varphi)]^2\} = \\ &= E_0^2 [4\cos^2 \omega t + 4\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) + \\ &\quad + 4\sin^2 \omega t + 4\sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] = \\ &= E_0^2 [4 + 4 \cos(2\omega t + \varphi) + 1] = E_0^2 [5 + 4\cos(2\omega t + \varphi)]. \end{aligned}$$

Видно, что максимальное значение E^2 равно $9E_0^2$, минимальное — E_0^2 , а среднее значение E^2 (интенсивность) в пять раз больше среднего значения квадрата поля в исходной волне (E_0^2).

Если отверстие имеет размер в $1/3$ зоны Френеля (№ 11.93), то амплитуды от отверстия и остальных зон будут иметь одинаковое

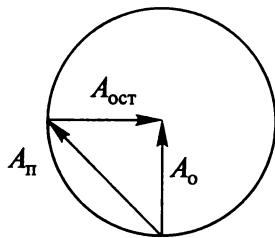


Рис. 11.29

значение E_0 . Соответственно, максимальное значение $2E_0$, а минимальное 0, т. е. отношение полуосей эллипса колебаний равно 0 (или ∞). Для интенсивности получаем: $I = E_0^2 + E_0^2 = 2E_0^2 = 2I_0$.

Определим интенсивность света I в точке P экрана, на который падает монохроматический свет интенсивностью I_0 , если на пути поставить диск из оптически активного вещества, закрывающего полторы зоны

Френеля и поворачивающего плоскость поляризации на 90° . Пренебрегаем отражением и поглощением света (№ 11.33). На рис. 11.29 приведена векторная диаграмма. В отсутствие экрана $I_0 = A_0^2$, от полтора зоны имеем амплитуду волны $A_0(2)^{1/2}$. От остальных зон $A_{\text{ост}} = A_0$. Так как диск поворачивает поляризации на 90° , складываются интенсивности $I = 2A_0^2 + A_0^2 = 3A_0^2 = 3I_0$.

Плоская монохроматическая волна, поляризованная по кругу, падает на диск, вырезанный из пластинки $\lambda/2$. Для точки наблюдения на оси диска закрывает три первые зоны Френеля. Толщина диска подобрана так, что он вносит дополнительный оптический путь в $3\lambda/2$ для необыкновенного луча. Найдем, во сколько раз изменится интенсивность в точке наблюдения, если диск убрать. Поглощением и отражением света пренебрегаем (№ 11.37). Обозначим амплитуду обыкновенного и необыкновенного лучей E_0 . В отсутствие диска интенсивность света $I_0 = 2E_0^2$. При наличии диска для необыкновенного луча, как следует из векторной диаграммы (рис. 11.30), получаем поворот, соответствующий $3\lambda/2$. Вектор изображен штриховой линией на рис. 11.30, а. В сумме

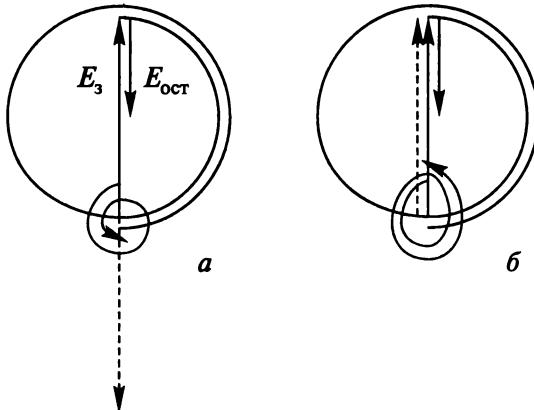


Рис. 11.30

с вектором от остальных зон ($E_{\text{ост}}$) получаем $E_e = 3E_0$. Отличие фазы обыкновенного луча состоит в том, что пластинка в $\lambda/2$. Вектор изображен штриховой линией на рис. 11.30, б. в сумме с вектором от остальных зон получаем $E_o = E_0$. Таким образом, $I = 9E_0^2 + E_0^2 = 10E_0^2 = 5I_0$.

Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластинку в $\lambda/4$. Интенсивность света в некоторой точке P за пластинкой равна I_0 . Из пластинки вырезают **диск**, закрывающий одну зону Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол 90° и поставили на место. Найдем, какой стала интенсивность I в точке P (№ 11.34). На рис. 11.31 приведена векторная диаграмма. Первоначально $I = A_0^2$. От первой зоны амплитуда $2A_0$, от остальных зон A_0 . После поворота диска, так как в пластинке $\lambda/4$ поляризации взаимно перпендикулярны, складываются не амплитуды, а интенсивности $I = (2A_0)^2 + A_0^2 = 5A_0^2 = 5I_0$.

Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластинку в $\lambda/2$. Интенсивность света в некоторой точке наблюдения P за пластинкой равна I_0 . Из пластинки вырезают диск, закрывающий полторы зоны Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол $\pi/2$ и поставили на место. Найдем, какой стала интенсивность I в точке P (№ 11.35). На рис. 11.29 приведена векторная диаграмма до поворота диска. Интенсивность $I_0 = A_0^2$. От полутора зон имеем амплитуду волны $A_0(2)^{1/2}$. От остальных зон $A_{\text{ост}} = A_0$. После поворота диска, так как в пластинке $\lambda/2$ поляризация только меняет знак, то складываются амплитуды, как показано на рис. 11.32. В результате $A = A_{\text{ост}} + A_n$, а интенсивность $I = (2A_0)^2 + A_0^2 = 5A_0^2 = 5I_0$.

Из кристаллической пластинки $\lambda/2$ вырезаны **диски** диаметром в **одну и две** зоны Френеля для точки P . Диски вносят в пучок света вплотную друг к другу, так что у них совпадают 1) разноименные главные направления, 2) одноименные главные направления. При этом для света, поляризованного по одному из главных направлений, ни амплитуда, ни фаза колебаний не изменились. Найдем, во сколько раз изменится интенсивность света той же поляризации в случаях 1 и 2, если малый диск повернуть на 90° (№ 11.36). На рис. 11.33 показаны диски. Обозначим сдвиг фазы, который создает пла-

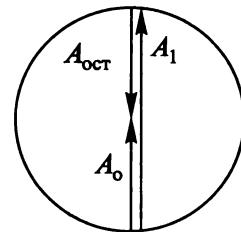


Рис. 11.31

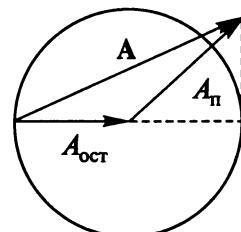


Рис. 11.32

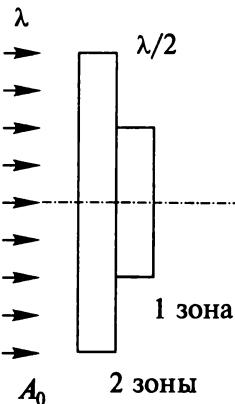


Рис. 11.33

стинка $\lambda/2$, через ϕ , а амплитуду волны A_0 . В случае совпадения одноименных осей до поворота первая зона в точке P дает $2A_0e^{2\phi}$, вторая $2A_0e^{i\phi}$, все зоны, начиная с третьей, A_0 . По условию задачи $A_0 + 2A_0e^{2\phi} - 2A_0e^{i\phi} = A_0$, откуда $e^{i\phi} = 1$, т. е. $\phi = 2\pi$. После поворота малого диска $A = A_0 - 2A_0 - 2A_0 = -3A_0$. Соответственно, $I = 9I_0$. В случае совпадения разноименных осей $A_0 + 2A_0e^{2\phi \pm i\pi} - 2A_0e^{i\phi} = A_0$, откуда $e^{i\phi} = -1$, т. е. $\phi = \pi$. После поворота малого диска $A = A_0 + 2A_0 e^{2\pi} - 2A_0 e^{\pi} = 5A_0$. Соответственно, $I = 25I_0$.

Зонная пластинка изготовлена из поляроида. Во всех четных зонах поляроид ориентирован вертикально, во всех нечетных — горизонтально. Найдем, какова будет интенсивность света в основном фокусе пластинки, если она освещается неполяризованным светом (№ 11.38). В разделе 6 (см. с. 140) приведены результаты для интенсивности за зонной пластинкой. Обозначив число зон в зонной пластинке N , а интенсивность падающего света I_0 , для интенсивности в фокусе зонной пластинки имеем $I = I_0N^2$. Учитывая, что поляроид уменьшает интенсивность в два раза (11.2), и в данном случае за поляроидами поляризации взаимно перпендикулярны, т. е. складываются интенсивности, получаем увеличение интенсивности в N^2 раз. Влияние от зон вне зонной пластинки порядка I_0 можно не учитывать.

Бесконечный экран состоит из двух **поляроидных полуплоскостей**, граничащих друг с другом вдоль прямой линии. Главное направление одной из полуплоскостей параллельно, а другой перпендикулярно этой прямой. На экран перпендикулярно его поверхности падает пучок параллельных лучей естественного света с длиной волны λ . Опишем качественно дифракционную картину, получающуюся за экраном (№ 11.29). Поскольку когерентность отсутствует, картина будет представлять наложение интенсивностей от двух дифракционных картин, возникающих на границе непрозрачной полуплоскости. Надо учесть, что поляроид уменьшает интенсивность наполовину и дает линейную поляризацию. Складываются интенсивности.

Параллельный пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и вектором E_0 , лежащим в плоскости рис. 11.34, нормально падает на три щели, закрытые одинаковыми двоякопреломляющими пластинками в $\lambda/4$. Причем крайние щели закрыты одинаково ориентированными пластинками так, что вектор E_0 совпадает с одним из главных направлений этих пластинок, а средняя пластина повернута относительно них на 90° . Интерференционная картина рассматривается на экране с помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 1 \text{ м}$. Найдем распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы, считая размер щелей пренебрежимо малым по сравнению с расстоянием d между ними ($d = 1 \text{ см}$). Определим видность V интерференционной картины, а также ее период Λ (№ 11.41). Так как линейная поляризация падающего света совпадает с главными направлениями пластин, то они вносят только сдвиг фаз. Фазовый сдвиг будем отсчитывать от волны через верхнюю щель (амплитуда E_0). Для направления под углом θ через среднюю щель изменение фазы за счет геометрии $\phi = (2\pi/\lambda)ds\sin\theta$ и за счет поворота пластины $\pi/2$. Для третьей щели изменение фазы 2ϕ . Складывая волны и вычисляя интенсивность умножением на сопряженное выражение, получаем

$$I(\theta) = E_0^2(1 + e^{-i(\phi + \pi/2)} + e^{-i2\phi})(1 + e^{i(\phi + \pi/2)} + e^{i2\phi}) = \\ = E_0^2(3 + 2\cos 2\phi).$$

Максимальное значение $I_{\max} = 5$, минимальное $I_{\min} = 1$. Откуда $V = 2/3$.

Обозначив угол, соответствующий периоду интерференционной картины, θ_n , имеем для периода $\Lambda = f\sin\theta_n$. Условие периодичности максимумов $2\phi = 2\pi$, поэтому $\Lambda = f\lambda/(2d)$.

Задачу можно несколько изменить. Возьмем **пластинки $\lambda/2$** . В верхнюю и следующую щели поставим пластины одинаковыми осиями параллельно поляризации света, а нижнюю пластинку повернем на 90° (№ 11.42). В таком случае для интенсивности получаем

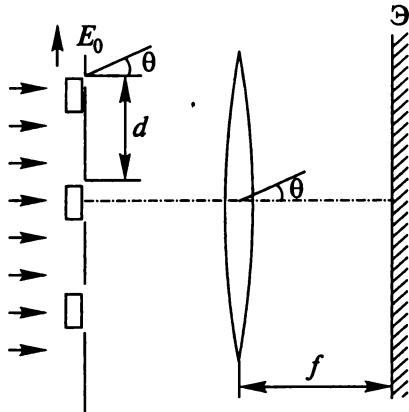


Рис. 11.34

$$I(\theta) = E_0^2(1 + e^{-i\phi} - e^{-i2\phi})(1 + e^{i\phi} - e^{i2\phi}) = E_0^2(3 - 2\cos 2\phi).$$

Для видности и периода получаем те же значения.

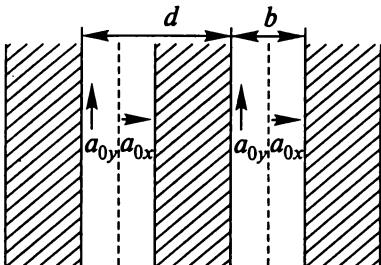


Рис. 11.35

Параллельный пучок поляризованного по кругу монохроматического света падает на решетку с периодом d и шириной щелей $b = d/2$. Каждая щель перекрыта двумя полосками поляроида одинаковой ширины $b/2$ с взаимно перпендикулярными разрешенными направлениями. Найдем, какова поляризация света в нулевом и боковых дифракционных максимумах ($\pm 1\text{-м}$, $\pm 2\text{-м}$, ...) (№ 11.43).

На рис. 11.35 показано, что решетки из поляроидов с одинаковыми направлениями сдвинуты друг относительно друга на $b/2$. Следовательно, разность хода в направлении на m -й максимум

$$\Delta_m = (b/2) \sin \theta_m = (b/2)m \lambda/d, \text{ так как } d \sin \theta_m = m\lambda$$

При этом разность фаз $\delta_m = k\Delta_m = (2\pi/\lambda) b m \lambda / (2d) = m\pi/2$. Так как в свете, поляризованном по кругу, сдвиг между компонентами $\pi/2$, то полная разность фаз $\varphi_m = m\pi/2 + \pi/2$. Таким образом, получаем:

- нулевой максимум ($m = 0$) $\varphi_0 = \pi/2$ — круговая поляризация с сохранением направления вращения падающего света;
- первый порядок ($m = \pm 1$) $\varphi_{+1} = \pi$, $\varphi_{-1} = 0$ — линейная поляризация;
- второй порядок ($m = \pm 2$) $\varphi_{+2} = 3\pi/2$, $\varphi_{-2} = -\pi/2$ — круговая поляризация с противоположным по отношению к падающему вращением;
- третий порядок ($m = \pm 3$) $\varphi_{+3} = 2\pi$, $\varphi_{-3} = -\pi$ — линейная поляризация;
- четвертый порядок совпадает по направлению на минимум для решеток с шириной щели $b/2$, т. е. этот максимум отсутствует.

Следующие максимумы можно получить из общей формулы аналогичным образом.

Найдем, как изменится разрешающая способность дифракционной решетки, если одну ее половину прикрыть поляроидом, ориентированным параллельно штрихам решетки, а другую — поляроидом, ориентированным перпендикулярно к штрихам. Выясним, будет ли зависеть разрешающая сила решетки от поляризации падающего света (№ 11.44). В данном случае имеем две решетки, имеющие вдвое меньшее число штрихов, дающие

одинаковые интерференционные картины, в которых поляризации взаимно перпендикулярны, т. е. складываются интенсивности. В соответствии с (8.22) разрешающая способность уменьшится в два раза. Так как поляроиды определяют поляризацию, разрешающая способность от поляризации не зависит.

Добавим к рассмотренной системе **два поляроида** — перед ней и за ней, главные направления которых параллельны друг другу и образуют угол 45° с направлением штрихов решетки. Определим, как изменится разрешающая способность такой решетки по сравнению с решеткой, ничем не прикрытой (№ 11.45). Добавление направленных таким образом поляроидов, приводит к сложению проекций амплитуд. Разрешающая способность не изменится.

Наблюдается дифракция Фраунгофера монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм на плоской решетке. Найдем, как изменится расстояние между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если каждую вторую щель закрыть полимерной пленкой толщиной $h = 13,5$ мкм, показатель преломления которой $n = 1,1$. Отражением света от пленки пренебрегаем (№ 11.47). Пленка создает разность фаз $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)h(n - 1) = 4,5\pi = 4\pi + \pi/2$. Сдвиг фаз между потоками через прикрытое и неприкрытое щели равен $\pi/2$. Имеем две решетки с вдвое большими периодами. В соответствии с (8.3) и (8.6) получаем, что расстояние между максимумами уменьшится в два раза. Для интенсивности максимумов вместо $I_{\text{реш}} = I_0 N^2$, получаем $I_{\text{реш} + \text{пл}} = I_0(N/2)^2 + I_0(N/2)^2 = I_{\text{реш}}/2$.

Наблюдается дифракция Фраунгофера монохроматического циркулярно поляризованного излучения на плоской решетке. Найдем, как изменится расстояние между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если щели закрыть пластинками в $\lambda/2$ так, что главные оси пластинок в соседних щелях будут взаимно перпендикулярны (№ 11.48). Сдвиг фазы компонент круговой поляризации на $\lambda/2$ вперед или назад приводит к изменению направления круговой поляризации и, следовательно, интерференционная картина не изменяется.

Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает нормально на периодическую структуру, состоящую из чередующихся полосок поляроида, главные плоскости которых взаимно перпендикулярны. Отношение ширины полосок разных типов равно трем. Направление колебания электрического вектора волны составляет угол α с главной плоскостью полоски с меньшей шириной. Определим направления на главные максимумы перво-

го порядка и их интенсивности, если интенсивность волны в нулевом максимуме равна I_0 (№ 11.49). Обозначив ширину меньшей полоски d , получаем, что периоды обеих решеток, из которых состоит система, равна $4d$. В соответствии с (8.6) направление на главные максимумы первого порядка $\sin\theta = \pm\lambda/(4d)$. Обозначив амплитуду волны, идущей через полоску меньшей ширины, a , получаем для более широкой полоски амплитуду $3a$. Используя (8.3) и то, что складываются взаимно перпендикулярные амплитуды, получаем

$$I = I_0 N^2 d^2 (\cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha) = I_0 N^2 d^2 (1 + 8 \sin^2 \alpha).$$

Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает нормально на систему из пластинки $\lambda/2$ и поляроида. Найдем, какова будет интенсивность прошедшей волны, если между ними разместить некоторое произвольное число пластинок $\lambda/4$. Главные оси всех пластинок и поляроида параллельны. Интенсивность падающей волны I_0 (№ 11.52). Пластинка $\lambda/2$ меняет лишь направление круговой поляризации. Если затем стоит поляроид, то интенсивность света $I = I_0/2$. Набор пластинок $\lambda/4$ эквивалентен какому-нибудь варианту $\lambda/4, \lambda/2, \lambda$. При λ ничего не меняется. При $\lambda/2$ меняется направление вращения. В обоих случаях остается $I = I_0/2$. При $\lambda/4$ круговая поляризация превращается в линейную под углом 45° к главным осям пластиинки. В этом случае, в соответствии с (11.1), за поляроидом имеем интенсивность $I = I_0 \cos^2 45^\circ = I_0/2$.

Можно взять систему из пластиинки $\lambda/4$ и поляроида, а вставлять пластиинки $\lambda/2$ (№ 11.53). Аналогичное рассмотрение приводит к такому же результату.

Параллельный пучок естественного света интенсивностью I_0 и длиной волны λ падает на систему из двух скрещенных поляроидов Π_1 и Π_2 и клина K из кварца с малым преломляющим углом α . Показатели преломления кварца равны n_e и n_o . Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с разрешенными

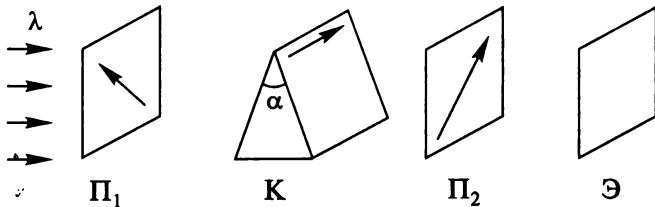


Рис. 11.36

ми направлениями поляроидов (рис. 11.36). Пройдя через систему, свет падает на белый экран \mathcal{E} . Найдем распределение интенсивности света $I(x)$ на экране. Определим, что увидит наблюдатель на экране \mathcal{E} , если между ним и поляроидом Π_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости (№ 11.54). На рис. 11.37 приведена векторная диаграмма для системы, на которой показаны интенсивности, соответствующие этим векторам. В каждой точке экрана интерферируют две линейно поляризованные компоненты (с одинаковой поляризацией) с интенсивностью $I_0/8$ и фазовым сдвигом $\Delta\phi = \pi + k\alpha x(n_e - n_o)$, где волновое число $k = 2\pi/\lambda$, αx — толщина клина на расстоянии x от верхней грани клина. В соответствии с (3.12) для интенсивности на экране получаем

$$I = 2(I_0/8)(1 + \cos\Delta\phi) = (I_0/4)\{1 - \cos[(2\pi/\lambda)\alpha x(n_e - n_o)]\}.$$

Отсюда ширина интерференционной полосы (аргумент косинуса меняется на 2π при изменении x на λ)

$$l = \lambda/[\alpha(n_e - n_o)].$$

В соответствии с (3.8), такую интерференционную картину создают две плоские волны с углом схождения $\alpha(n_e - n_o)$. Следовательно, при постановке в системе линзы (с фокусным расстоянием f) в ее фокальной плоскости на экране получим два светлых пятна на расстоянии $\alpha(n_e - n_o)f$.

На систему, состоящую из чередующихся $N + 1$ поляроидов и N пластинок кварца, вырезанных параллельно оптической оси, падает плоская монохроматическая волна длины λ (рис. 11.38). Главные направления всех поляроидов параллельны и составляют угол 45° с оптической осью пластинок. Волна поляризована вдоль главного направления поляроида. Толщины пластинок d , $2d$, ..., $2^{N-1}d$. Показатели преломления кварца равны n_o и n_e . Определим амплитуду A волны на выходе из системы, если на входе она равна A_0 . Отражением света на границах пластинок и поляроидов пренебрегаем. Найдем, какова спектральная разрешающая способность этой системы (№ 11.55). После первой пластинки имеем две

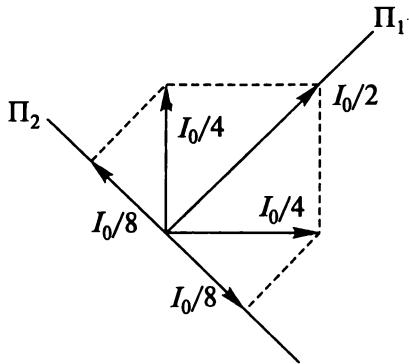


Рис. 11.37

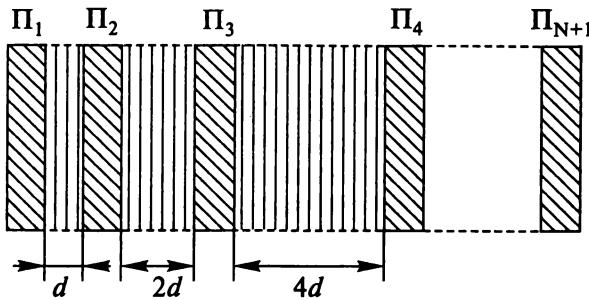


Рис. 11.38

волны с амплитудами $A_0/(2)^{1/2}$ и ортогональными поляризациями. После второго поляроида их амплитуды уменьшаются до $A_0/2$. Сдвиг фаз между этими волнами равен $\phi = kd(n_o - n_e)$. Каждая из этих волн, пройдя вторую пластинку и третий поляроид, разделится также на две волны с амплитудами $A/4$ и взаимными фазами 0, ϕ , 2ϕ , 3ϕ . После поляроида с номером $N + 1$ имеется сумма волн, которую можно подсчитать как сумму геометрической прогрессии:

$$E = (A_0/2^N) \sum_{m=0}^N \exp(im\phi) = (A_0/2^N)[1 - \exp(i2^N\phi)]/[1 - \exp(i\phi)].$$

Амплитуда волны на выходе из системы равна:

$$A = |E| = (A_0/2^N) \sin(2^N\phi/2)/\sin(\phi/2).$$

При $\phi \rightarrow 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) $A \rightarrow A_0$.

Такая система может работать как спектральный аппарат, выделяющий узкие спектральные полосы вблизи фиксированных частот (интерференционно-поляризационный фильтр Лио). Так как порядок интерференции $\phi/(2\pi)$, а число интерферирующих лучей 2^N , разрешающая сила в соответствии с (8.20) $R = [\phi/(2\pi)]2^N = d(n_o - n_e)2^N/\lambda$.

На периодическую структуру, состоящую из тонких параллельных диэлектрических пластин, падает плоская монохроматическая волна, волновой вектор (\mathbf{k}) которой перпендикулярен оси z (рис. 11.39). Толщины пластин равны d_0 , расстояние между ними d , диэлектрическая проницаемость пластин равна ϵ_1 , окружающей среды — ϵ . Длина волны значительно больше d_0 и d_1 . Покажем, что структура аналогична одноосному кристаллу, и определим показатели преломления обычновенного n_o и необыкновенного n_e лучей (№ 11.56). Для обычновенного луча колебания напряженности

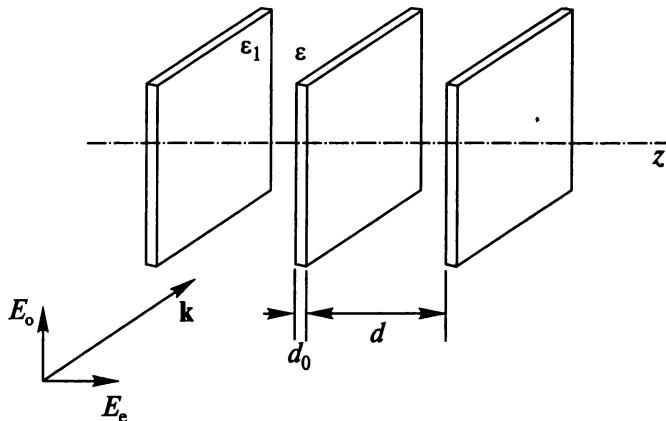


Рис. 11.39

электрического поля E_o в волне перпендикулярны оптической оси (z). На границе сред непрерывно E_o . Поэтому для электрической индукции имеем: в пластинке $D_1 = \epsilon_1 E_o$, вне пластиинки $D = \epsilon E_o$. Так как $\lambda \gg d_0$ и d , то D усредняется по площадям, которые пропорциональны d_0 и d . Таким образом, $D_{\text{ср}}(d + d_0) = D_1 d_0 + D d = E_o(\epsilon_1 d_0 + \epsilon d)$, откуда $\epsilon_{\text{ср},o} = D_{\text{ср}}/E_o = (\epsilon_1 d_0 + \epsilon d)/(d + d_0)$ и $n_{\text{ср}} = n_0 = (\epsilon_{\text{ср},o})^{1/2}$.

Для необыкновенного луча (направление колебаний в главной плоскости) на границах D непрерывна, поэтому

$$E_{\text{ср}}(d + d_0) = E_e d_0 + E d = D(d_0/\epsilon_1 + d/\epsilon).$$

Отсюда $\epsilon_{\text{ср},e} = D/E_{\text{ср}} = (d + d_0)/(d_0/\epsilon_1 + d/\epsilon) = \epsilon \epsilon_1 (d + d_0)/(\epsilon d_0 + \epsilon_1 d)$ и $n_{\text{ср}} = n_e = (\epsilon_{\text{ср},e})^{1/2}$.

Для модуляции линейно поляризованного света существует устройство, состоящее из трех параллельных двулучепреломляющих пластинок (рис. 11.40), две из которых в $\lambda/4$ неподвижны, а третья (в $\lambda/2$), расположенная между ними, совершает заданное во времени вращение на угол $\theta(t)$ вокруг оси системы. Определим зависимость от времени амплитуды, фазы и поляризации модулированного света, если нормально падающее на первую пластинку в $\lambda/4$ монохроматическое излучение линейно поляризовано в плоскости, составляющей с ее оптической осью угол, равный 45° (№ 11.57). После прохождения первой пластиинки возникает правая круговая поляризация: $E_x = A \sin \omega t$, $E_y = A \cos \omega t$. Перейдем в систему координат (ξ, η) , связанную с вращающейся пластинкой

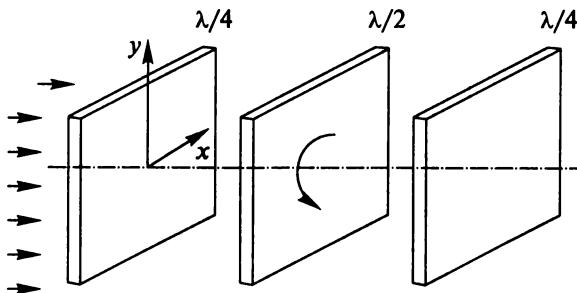


Рис. 11.40

$\lambda/2$. На рис. 11.41 показано, что система (x,y) повернута относительно (ξ,η) на угол θ . Пользуясь рис. 11.41, получаем

$$E_\xi = A(\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) = A \sin(\omega t + \theta);$$

$$E_\eta = A(-\sin \omega t \sin \theta + \cos \omega t \cos \theta) = A \cos(\omega t + \theta).$$

Пусть η — «медленная» ось. Тогда после прохода пластиинки $\lambda/2$

$$E_\xi = A \sin(\omega t + \theta);$$

$$E_\eta = A \cos(\omega t + \theta - \pi) = -A \cos(\omega t + \theta).$$

С помощью рис. 11.41 возвращаемся в систему (x,y) , считая θ отрицательным

$$E_x = A \sin(\omega t + \theta) \cos(-\theta) - A \cos(\omega t + \theta) \sin(-\theta) = A \sin(\omega t + 2\theta);$$

$$E_y = -A \sin(\omega t + \theta) \sin(-\theta) - A \cos(\omega t + \theta) \cos(-\theta) = -A \cos(\omega t + 2\theta).$$

Таким образом, получаем левую круговую поляризацию.

После прохода третьей пластиинки в $\lambda/4$ получаем линейно поляризованный свет с первоначальной амплитудой и фазой, модулированной по закону $\phi(t) = 2\theta(t)$, т. е. на выходе волна $E = A \sin[\omega t + 2\theta(t)]$.

Оптическое волокно можно представить в виде протяженной двулучепреломляющей пластиинки, главные оси которой поворачиваются на некоторый угол, зависящий от расстояния z от входного сечения. Пусть $\theta(z) = az$, где a — некоторая константа, и на вход волокна падает линейно поляризованный свет, плоскость поляризации которого совпадает с одной из главных осей. Найдем, при каких значениях величины a возможен переход этого состояния поляризации в круговое, если разность показателей преломления обычной и необыкновенной волн равна Δn , а длина

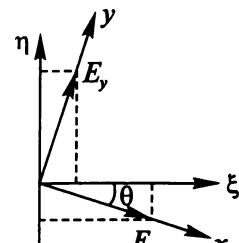


Рис. 11.41

волны λ (№ 11.58). Предполагаем, что на входе волокна световая волна линейно поляризована $E_x = \cos\omega t$, $E_{y0} = 0$. Будем рассматривать распространение света в системе координат главных осей волокна (ξ, η) . Считаем η «медленной» осью. В результате получаем

$$E_\xi = \cos\omega t \cos\theta(z), E_\eta = \cos[\omega t - \phi(z)] \sin\theta(z).$$

Круговая поляризация возникает, если

$$\phi(z) = (2\pi/\lambda)\Delta nz = \pi/2 + m\pi \text{ и } \theta(z) = az = \pi/4 + l\pi/2,$$

где m и l — целые числа.

Тогда $a = (2\pi/\lambda)\Delta n (1 + 2l)/(2 + 4m)$.

Линейно поляризованное лазерное излучение с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм падает нормально на тонкую **магнитно-оптическую** прозрачную пленку с чередующейся одномерной доменной структурой. Свет, проходящий через соседние домены, испытывает поворот плоскости поляризации в противоположные стороны на угол $\pi/2$. Ширина доменов одинакова и равна d . Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Определим интенсивность света в дифракционных максимумах нулевого, 1-го и 2-го порядков, если известно, что при освещении тем же излучением обычной амплитудной решетки, состоящей из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок шириной d , интенсивность в максимуме 1-го порядка оказывается равной I (№ 11.50). Доменная структура пленки представляет собой фазовую решетку с фазовым сдвигом π в соседних полосках шириной d . Период равен $2d$. Решетку можно представить как сумму двух амплитудных подрешеток периода $2d$, сдвинутых относительно друг друга на расстояние d и вносящих фазовый сдвиг π . Интенсивность четных максимумов равна нулю. Интенсивность первого максимума — $4I$.

Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны $\lambda = 589$ нм равен $n_o = 1,544$ для обыкновенного луча и $n_e = 1,553$ для необыкновенного луча. На пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda = 40$ нм. Найдем толщину пластиинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластиинки оказался неполяризованным (№ 11.60). Лучи должны иметь одинаковую интенсивность, т. е. амплитуды разных поляризаций должны быть одинаковыми. Поэтому поляризация по отношению к главным осям пластиинки должна составлять 45° . Разность хода через пластиинку обыкновенного и необыкновенного лучей $d(n_e - n_o)$

при отсутствии интерференции должна превышать длину когерентности (5.6), равную $\lambda^2/\Delta\lambda$. Отсюда $d > \lambda^2/[\Delta\lambda(n_e - n_o)] = 1$ мм.

Можно исходить из того, что

$$(2\pi/\lambda)d(n_e - n_o) - 2\pi d(n_e - n_o)/(\lambda + \Delta\lambda) > 2\pi.$$

Расположив пластинку, вырезанную из исландского шпата, параллельно его оптической оси, между скрещенными николями, можно осуществить монохроматор, позволяющий, например, задержать одну из линий дублета натрия и пропустить другую. Найдем, какой должна быть при этом минимальная толщина d_{\min} пластиинки и как ее нужно ориентировать. Показатели преломления исландского шпата для линии $\lambda_1 = 589,0$ нм равны $n_{e1} = 1,48654$ и $n_{o1} = 1,65846$, для линии $\lambda_2 = 589,6$ нм — $n_{e2} = 1,48652$ и $n_{o2} = 1,65843$ (№ 11.61). Для гашения интерферирующие лучи должны иметь одинаковые амплитуды, поэтому ось пластиинки надо расположить под углом 45° к разрешенным направлениям николей. Если для одной волны (λ_1) разность хода на выходе из пластиинки будет составлять целое число длин волн, то эта волна сохранит направление поляризации и не пройдет через второй николь. Если для этой же толщины пластиинки разность хода для второй волны (λ_2) будет равна нечетному числу половин длин волн, то вторая волна пройдет через второй николь без потерь. Порядки интерференции двух волн должны различаться на полуцелое число $m_1 - m_2 = d(n_{o1} - n_{e1})/\lambda_1 - d(n_{o2} - n_{e2})/\lambda_2 = d(\Delta n_1/\lambda_1 - \Delta n_2/\lambda_2) = p + 1/2$, где p — целое число. Минимальной толщине пластиинки соответствует $p = 0$: $d \approx (1/2)/(\Delta n_1/\lambda_1 - \Delta n_2/\lambda_2) = 1,59238$ мм. При этом $m_1 = d/\lambda_1 = 464,7936$ и $m_2 = d/\lambda_2 = 464,2936$. Разность порядков $m_1 - m_2$ с изменением d меняется медленно, так как $\Delta n \ll n$. Если d увеличить в отношении $465/464,7936$, то m_1 станет целым числом 465, а $m_2 = 464,4998$, т. е. очень близким к полуцелому. Следовательно, $d_{\min} = 1,5931$ мм.

Кварцевая пластиинка $\lambda/2$ используется как анализатор степени поляризации лазерных импульсов. Оценим минимальную длительность лазерных импульсов, для которых еще можно пользоваться таким анализатором, если длина волны света $\lambda = 0,63$ мкм, а коэффициенты преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце $n_o = 1,5442$ и $n_e = 1,5533$ соответственно. Дисперсией показателей преломления пренебрегаем (№ 11.62). Длительность импульса (τ) должна обеспечивать когерентность при разведении обыкновенного и необыкновенного лучей, т. е.

$ct > nd$. Для толщины пластиинки можно написать $\lambda/2 = (n_e - n_o)d$. Таким образом, $\tau > n\lambda/[2(n_o - n_e)c]$.

Ограниченнный импульс длительностью τ линейно поляризованного излучения **нормально** падает на **двулучепреломляющую пластиинку** толщиной d . Пластиинка вырезана параллельно оптической оси. Плоскость поляризации света составляет угол 30° относительно одного из главных направлений. Найдем значения d , при которых за пластиинкой будут наблюдаться два различных импульса. Определим, как поляризованы эти импульсы и каковы максимальные значения их амплитуд, если максимальное значение амплитуды исходного импульса равно E_0 . Разность $\Delta n = n_o - n_e$ считаем известной и не зависящей от частоты света (№ 11.63). Чтобы импульсы разделились, разность хода лучей с разной поляризацией должна быть больше длины когерентности $\Delta nd > ct$. Откуда $d > ct/\Delta n$. Учитывая поляризацию и (11.1), для амплитуд получаем $E_0/2$ и $3^{1/2}E_0/2$.

На поверхность **плоскопараллельной пластиинки** толщиной $L = 0,1$ см нанесено высокоотражающее покрытие с энергетическим коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. На пластиинку нормально падает монохроматический пучок неполяризованного света ($\lambda_0 = 600$ нм). Свет на выходе из пластиинки оказался почти полностью линейно поляризованным вследствие слабой анизотропии материала пластиинки. Оценим минимальную величину анизотропии показателя преломляющей пластиинки $\Delta n = n_e - n_o$, при которой возможен этот эффект (№ 11.64, № 11.79). Пластиинку можно рассматривать как интерферометр Фабри—Перо, который называют также эталоном, и который можно считать резонатором. Разрешающая способность интерферометра Фабри—Перо (8.58) $R = \lambda/\delta\lambda = 2\pi L/[\lambda(1 - \rho)]$. Фактически $\delta\lambda$ — ширина резонансного пика. Один из лучей, образующихся в пластиинке, резонирует, а другой нет (выходит за $\delta\lambda$). Обозначив длину волны в вакууме λ_0 , получим разность хода между ними

$$\Delta\lambda = \lambda_0/n_o - \lambda_0/n_e = \lambda_0\Delta n/n^2 (n_0 \approx n_e \approx n_o, \lambda_1 \approx \lambda_0/n_o \approx \lambda_0/n_e \approx \lambda/n).$$

Чтобы один луч вышел за резонансный пик, должно быть $\Delta\lambda > \delta\lambda$. Получаем $\lambda_0\Delta n/n^2 > \lambda_1^2(1 - \rho)/(2\pi L)$, откуда

$$\Delta n \geq \lambda_0 (1 - \rho)/(2\pi L) = 1/R_0, \quad (11.30)$$

где $R_0 = R/n$ —добротность резонатора без вещества. В результате $\Delta n \geq 10^{-5}$. В данном случае разрешающую способность можно рассматривать как добротность.

Поверхности плоскопараллельной кварцевой пластиинки толщиной $d = 0,5$ мм, вырезанной параллельно оптической оси, покрыты высокоотражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,9$. Пластиинка освещается параллельным пучком света с круговой поляризацией (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Найдем поляризацию и интенсивность света, прошедшего через пластиинку, если интенсивность падающего света I . Главные показатели преломления $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5534$ (№ 11.80). Используя (11.30), получаем, что проходит только одна компонента, именно та, для которой выполняется условие резонанса (8.44) $2d = m\lambda/n$. В данном случае это необыкновенный луч, линейно поляризованный в направлении главной оси пластиинки. Пластиинка действует как поляроид, и интенсивность прошедшего света $I = I_0/2$.

Между двумя скрещенными поляроидами расположена анизотропная кристаллическая пластиинка с заданными Δn и d , вырезанная параллельно оптической оси. Разрешенные направления поляроидов составляют угол 45° с оптической осью. Система освещается параллельным пучком амплитудно-модулированного света. Найдем, при какой частоте модуляции система пропустит боковые гармоники, отфильтровав несущее колебание (№ 11.59). В соответствии с результатами для модулированных колебаний (см. 3, с. 426) получаем для амплитудно-модулированного света несущую гармонику ω и благодаря частоте модуляции Ω две боковые гармоники $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$. В данной системе задерживается свет с длиной волны, для которой пластиинка является пластиинкой в длину волны, и пропускается длина волны, для которой пластиинка является пластиинкой в полволны. Должно выполняться условие: $\Delta n d = m 2\pi c / \omega = (m + 1/2) 2\pi c / (\omega + \Omega) = (m - 1/2) 2\pi c / (\omega - \Omega)$, откуда $\Omega = \pi c / (\Delta n d)$.

Одноосные кристаллы CdSe могут быть выращены в виде тонких (десятки микрометров) пластиинок оптического качества с высокой степенью параллельности поверхностей, причем оптическая ось лежит в плоскости пластиинки. Из такого кристалла изготовлена пластиинка $\lambda/4$ на длину волны 1000 нм. Толщина пластиинки $L = 50$ мкм, показатели преломления $n_o = 2,500$ и $n_e = 2,475$. На эту пластиинку перпендикулярно оптическим поверхностям падает параллельный световой пучок с указанной длиной волны и линейной поляризацией, направленной под углом 45° к оптической оси. Определим состояние поляризации прошедшего и отраженного света (линейная, круговая, эллиптическая; если эллиптическая, то каково отношение полуосей и как ориентирован эллипс относительно оптической оси) (№ 11.98—11.100). Так

как поверхности пластиинки строго параллельны, то ее можно рассматривать как интерферометр Фабри—Перо. Для обыкновенного луча $n_o L = 125 \text{ мкм} = 125\lambda$, т. е. целое число полуволн. При этом пропускание равно 1, а отражение — 0. Для необыкновенного луча $n_e L = 123,75 \text{ мкм} = 123,75\lambda$. К целому добавляется $3\lambda/4$. В соответствии с (8.50) получаем максимальное отражение. Для коэффициента отражения (по интенсивности) из (2.35) следует

$$\rho = (n_e - 1)^2 / (n_e + 1)^2 = 0,18.$$

Из (8.50) для интенсивности отраженного света получаем

$$I_{\text{опт}}/I_0 = 1 - I_{\text{пр}}/I_0 = 4\rho\sin^2(\Delta/2)/[(1 - \rho)^2 + 4\rho\sin^2(\Delta/2)] = 0,517 \approx 0,52.$$

Относительное пропускание по интенсивности: $I_{\text{пр}}/I_0 \approx 0,48$.

Относительная амплитуда прошедшей волны: $A = (I_{\text{пр}}/I_0)^{1/2} \approx 0,7$.

Таким образом, в отраженном свете будет присутствовать одна поляризация, параллельная оптической оси пластиинки, а прошедшее излучение будет эллиптически поляризованным с соотношением полуосей 1:0,7 (для амплитуд) и с направлением большой полуоси перпендикулярно оптической оси пластиинки.

Две поляризационные призмы с воздушной прослойкой изготовлены из исландского шпата. В одной призме оптическая ось перпендикулярна, в другой — параллельна плоскости падения (рис. 11.42). Опишем действие каждой призмы. Найдем, как будет поляризован проходящий свет, какая призма будет пропускать больше света, в каких пределах должен быть заключен угол α , чтобы из призмы выходил линейно поляризованный свет. Для исландского шпата $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$. Свет падает на грань призмы перпендикулярно (№ 11.66). Из (1.2) для полного внутреннего отражения на границе с воздухом угол падения должен быть больше $\alpha = \arcsin(1/n)$. Это раньше получаем для обыкновенного луча, который таким образом выводится из призмы. Из каждой призмы выходит необыкновенный луч с поляризацией в направлении главной оптической оси. Для получения этого должно выполняться: $1/n_o < \sin\alpha < 1/n_e$, откуда $37^\circ 6' < \alpha < 42^\circ 18'$. Для определения пропускания света призмами воспользуемся (2.17) и (2.19). В случае первой призмы поляризация необыкновенного луча перпендикулярна плоскости падения. В случае второй

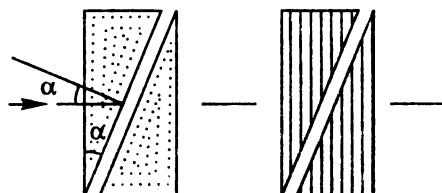


Рис. 11.42

призмы поляризация необыкновенного луча лежит в плоскости падения. Обозначив угол падения α и угол преломления ψ , для отношения коэффициентов пропускания получаем

$$T_{\text{V}}/T_{\perp} = (\cos \alpha + \cos \psi/n)/(\cos \psi + \cos \alpha/n).$$

Учитывая (2.8), находим косинусы. Подставляя косинусы и $n = n_e$, находим, что отношение коэффициентов пропускания больше 1. Для второй призмы поляризация лежит в плоскости падения луча, а для первой — перпендикулярно плоскости падения. Отсюда следует, что вторая призма пропускает больше света.

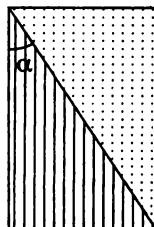


Рис. 11.43

Призма Волластона (рис. 11.43) изготовлена из исландского шпата ($n_e = 1,658$, $n_o = 1,486$), $\alpha = 15^\circ$. Рассчитаем, на какой угол ϕ будут разведены обыкновенный и необыкновенный лучи (№ 11.65). На рис. 11.44 показано преломление обыкновенного и необыкновенного лучей. Считая углы малыми, получаем

$$\alpha/\beta_1 = n_e/n_o < 1, \quad \alpha/\beta_2 = n_o/n_e > 1;$$

$$\delta_1 = \beta_1 - \alpha = \alpha(n_o - n_e)/n_e, \quad \delta_2 = \alpha - \beta_2 = \alpha(n_o - n_e)/n_o;$$

$$\gamma_1 = n_e \delta_1 = (n_o - n_e)\alpha, \quad \gamma_2 = n_o \delta_2 = (n_o - n_e)\alpha;$$

$$\phi = \gamma_1 + \gamma_2 = 2(n_o - n_e)\alpha = 5,1^\circ.$$

На пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает белый свет, поляризованный по кругу. За пластинкой поставлен **полироид**, главное направление которого составляет угол 45° с осью пластиинки. Прошедший свет попадает на щель спектрографа. Найдем, сколько темных полос k получится в спектре, если толщина кварцевой пластиинки $d = 2$ мм, $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$. Падающий свет занимает интервал длин волн от $\lambda_1 = 4000 \text{ \AA}$ до $\lambda_2 = 5000 \text{ \AA}$, в котором $n_e - n_o = \text{const}$ (№ 11.68). В зависимости от направления вращения при

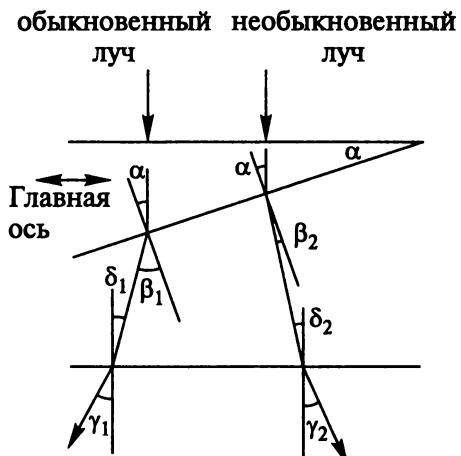


Рис. 11.44

круговой поляризации света пластинка превращает свет в линейно поляризованный в плоскости, перпендикулярной главному направлению поляроида при изменении разности хода в пластинке либо на $\pi/4$, либо на $3\pi/4$. Результат не меняется, если добавить целое число длин волн. Условием образования темной полосы минимального порядка будет либо: $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + \lambda_2/4$, либо: $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + 3\lambda_2/4$, где λ_2 — наибольшая длина волны в падающем свете, для которой m есть целое число. Аналогичным условием для меньших длин волн λ_i , в том числе и для минимальной длины волны λ_1 будет либо: $d(n_e - n_o) = (m + k)\lambda_1 + \lambda_1/4$, либо: $d(n_e - n_o) = (m + k)\lambda_1 + 3\lambda_1/4$. Здесь k — целое число. Оно меняется для λ_i и достигает максимального значения для минимального λ_1 . Исключив m из приведенных выше выражений, получаем максимальное значение

$$k = d(n_e - n_o)(\lambda_2 - \lambda_1)/(\lambda_1\lambda_2) = 10.$$

На кварцевую пластинку толщиной 3 мм, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает пучок белого линейно поляризованного света, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с осью пластинки. Выходящий из пластинки свет сначала вновь проходит через николь, скрещенный с первичным поляризатором светового пучка, а затем падает на щель спектрографа. Найдем, сколько темных полос будет наблюдаться в спектре между длинами волн $\lambda_D = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_F = 4860 \text{ \AA}$, если обыкновенный (n_o) и необыкновенный (n_e) показатели преломления кварца для этих длин волн имеют следующие значения: для $\lambda_D - n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$, а для $\lambda_F - n_o = 1,5497$, $n_e = 1,5589$ (№ 11.72). Разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами, вносимая кварцевой пластинкой, $\Delta = d(n_e - n_o)$. Подставив сюда численные значения d , n_e , n_o , получим, что Δ практически одинаково для λ_D и λ_F . Число длин волн λ_D , укладывающихся в Δ , будет $k_1 = \Delta/\lambda_D$. Соответственно, $k_2 = \Delta/\lambda_F$. Число промежуточных длин волн (между крайними), удовлетворяющих подобному условию и не меняющих состояние поляризации, а, следовательно, дающих в спектре темные полосы, равно $k_2 - k_1 = 12$.

Фазовая синусоидальная решетка с глубиной модуляции $m \ll 1$ установлена в передней фокальной плоскости линзы L_1 и освещается параллельным пучком монохроматического линейно поляризованного света с длиной волны λ . Определим толщину и ориентацию маленькой кристаллической пластинки, установленной в фурье-плоскости (рис. 11.45), при которой контраст изображе-

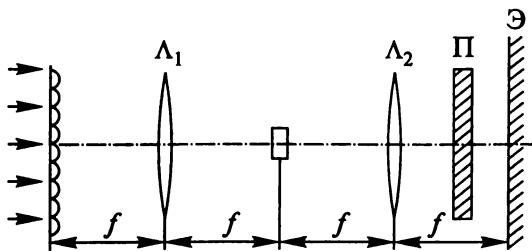


Рис. 11.45

ния на экране (видность) максимальен. Найдем также, какова при этом максимальная и минимальная видность при вращении поляроида вокруг оптической оси (поляроид расположен между линзой L_2 и экраном) (№ 9.18). Если на оптической оси установить пластинку в $\lambda/2$ так, чтобы направление поляризации пучка составляло с главными осями пластиинки 45° , то поляризация прошедшего света изменится на 90° . Поворачивая поляроид, можно пропустить либо один осевой пучок, либо два боковых. Один осевой пучок не приводит к интерференционной картине, а представляет собой параллельный пучок постоянной интенсивности ($V = 0$). Два боковых пучка дают интерференционную картину с $I_{\min} = 0$. В соответствии с (4.3) видность $V = 1$.

Решетка с функцией пропускания $\tau(x) = 1 + m \cos \Omega x$, $m < 1$, установлена во входной плоскости схемы Катрона (рис. 11.46) и освещается параллельным пучком монохроматического циркулярно поляризованного света с длиной волны λ . Определим толщину маленькой кристаллической пластиинки, установленной на оси системы в фурье-плоскости, а также взаимную ориентацию разрешенного направления поляроида и пластиинки, если контраст (видность) изображения на экране максимальен. Найдем также, чему равна видность изображения, если после этого повернуть поляроид на 90° (№ 9.21). Если на оси системы установить пластиинку в $\lambda/4$, то она превращает осевую компоненту с круговой поляризацией в линейно поляризованную. Поляроид в случае, когда его

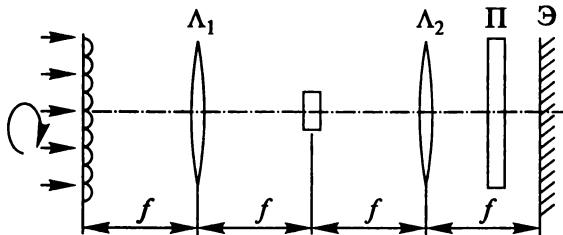


Рис. 11.46

разрешенное направление составляет угол 45° с главными осями пластиинки, может либо пропускать, либо исключить осевую компоненту с линейной поляризацией. При этом боковые компоненты приобретают после поляроида линейную поляризацию. Так как амплитуды у этих компонент одинаковые, при исключении осевой компоненты получаем $I_{\min} = 0$ и в соответствии с (4.3) видность $V = 1$, т. е. максимальна. С заданной функцией пропускания для амплитуд каждой из компонент круговой поляризации имеем $m/2$. Считая, что поляроид установлен под углом 45° , получаем: $2(m/2)/(2)^{1/2} = m/(2)^{1/2}$. От двух боковых в максимуме получаем сумму $m(2)^{1/2}$, в минимуме — нуль. При прохождении осевой компоненты имеем: $I_{\max} = [1 + m(2)^{1/2}]^2$; $I_{\min} = 1$, откуда $V \approx m(2)^{1/2}$.

Для наблюдения фазового (прозрачного) объекта в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливают небольшой идеальный поляроид, который вносит для проходящего света фазовую задержку в 2π (рис. 11.47). Определим видность интерференционной картины в задней фокальной плоскости линзы L_2 , если расположенную в передней фокальной плоскости линзы L_1 фазовую решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(i \cdot 0,2 \cos \Omega x)$ освещать плоским пучком монохроматического света, поляризованного по кругу (№ 9.19). Поляризованный по кругу свет можно представить как сумму двух пучков с линейной взаимно перпендикулярной поляризацией. Через поляроид проходит пучок, поляризация которого совпадает с разрешенным направлением поляроида (обозначим индексом «р»), и не проходит пучок, у которого поляризация перпендикулярна разрешенному направлению поляроида (обозначим индексом «з»). После прохождения через решетку каждый из пучков дает три плоские волны. Поляроид поглощает только центральную плоскую волну пучка «з». Поэтому в плоскости экрана складываются волны с комплексными амплитудами

$$f_p(x) = a(1 + i \cdot 0,1 e^{i\Omega x} + i \cdot 0,1 e^{-i\Omega x}) \text{ и} \\ f_z(x) = a(i \cdot 0,1 e^{i\Omega x} + i \cdot 0,1 e^{-i\Omega x}).$$

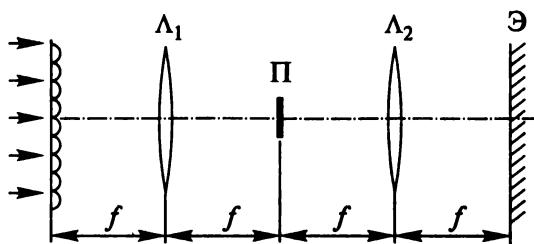


Рис. 11.47

Интенсивность в плоскости экрана

$$I(x) = I_p + I_s = f_p f_p^* + f_s f_s^* = a^2 + f_s f_s^*;$$

$$I_{\max} = a^2(1 + 0,04), \quad I_{\min} = a^2.$$

В соответствии с (4.3) $V \approx 0,02$. Пространственный период $\Lambda = 2\pi/(2\Omega)$.

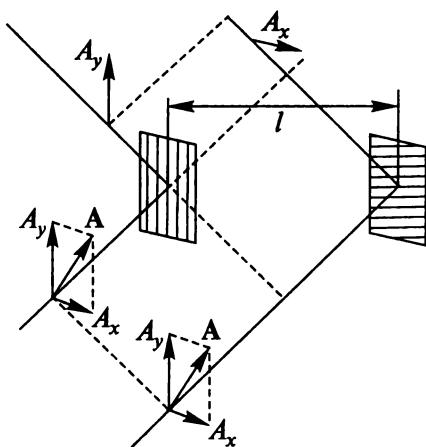


Рис. 11.48

Две одинаковые **плоские густые решетки** из параллельных тонких идеально проводящих проволок расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $l = 1,5$ см одна от другой так, что образующие их проволоки взаимно перпендикулярны. Плоскость поляризации волны ($\lambda = 8,5$ см), падающей на систему решеток под углом $\alpha = 45^\circ$, наклонена на угол $\theta = 45^\circ$ к плоскости падения. Определим характер поляризации отраженной волны для случая, когда плоскость падения параллельна направлению проволок 1-й решетки (№ 11.83).

На волну, линейно поляризованную параллельно направлению проволок, решетка действует как зеркало. Волну, поляризованную перпендикулярно направлению проволок, решетка пропускает без изменения. На рис. 11.48 показана картина распространения линейно поляризованной волны с амплитудой A и, соответственно, компонентами $A_y = A_x = A/(2)^{1/2}$. За счет разности хода, как показывает подстановка данных в условии значений, компоненты приобретают разность фаз $(2\pi/\lambda)2l\cos 45^\circ = \pi/2$. Это соответствует сдвигу компонент на $\lambda/4$, что приводит к круговой поляризации.

При нормальном падении волны с круговой поляризацией на решетку из параллельных тонких идеально проводящих проволок возникает давление на решетку (№ 11.84). Используя (11.6), для интенсивности волны можно записать: $I = S = cEH/(4\pi)$. Давление $p = EH^2/(8\pi) = I/(2c)$. Сила, действующая на площадь σ при отражении волны, равна $F = 2p\sigma = I\sigma/c$.

Явление самофокусировки объясняется зависимостью показателя преломления от интенсивности света ($n = n_0 + n_2 E_0^2$, где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в световой волне).

Одним из самых больших значений n_2 обладает сероуглерод ($n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Мощный пучок лазерного излучения с параболической зависимостью интенсивности от расстояния от центра пучка ($I = I_0(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$ и $I = 0$ при $r > r_0$) проходит сквозь слой сероуглерода толщиной $L = 5$ см. Найдем, на каком расстоянии от кюветы с сероуглеродом сфокусируется лазерный пучок $I_0 = 5 \cdot 10^8$ Вт/см², $r_0 = 5$ мм (№ 11.89). Для интенсивности света, например используя (6.10), можно записать

$$I = S = c\omega = cE^2/(8\pi). \quad (11.31)$$

На рис. 11.49 показано, как поворачивается фронт волны при прохождении через кювету. Из плоской волны превращается в сходящуюся сферическую. За одно и то же время лучи проходят разный путь. Фронт поворачивается на угол α . Из рис. 11.49 находим

$$r/F = -Ldn/dr. \quad (11.32)$$

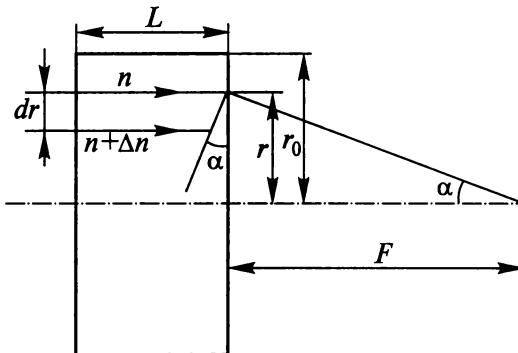


Рис. 11.49

Используя условие и (11.31), получаем $dn/dr = -(8\pi/c)n_2I_0 \times 2r/r_0^2$. Отсюда

$$F = r_0^2c/(16\pi n_2 I_0 L) = 3 \text{ м.}$$

У большинства веществ показатель преломления уменьшается с ростом температуры (вследствие теплового расширения). Пучок лазерного излучения видимого диапазона спектра проходит сквозь слой слабопоглощающей жидкости толщиной $L = 1$ см, так что в жидкости устанавливается распределение температуры $t = t_0 + t_1(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$ и $t = t_0$ при $r > r_0$, где r — расстояние от центра пучка, $t_1 = 2$ °C, $r_0 = 2$ мм. Найдем фокусное расстояние и знак наведенной в жидкости линзы, если $dn/dt = -4 \cdot 10^{-4}$ K⁻¹ (№ 11.91). Для градиента показателя преломления получаем

$$dn/dr = dn/dt \cdot dt/dr = -dn/dt t_1 \cdot 2r/r_0^2 > 0.$$

Пользуясь рис. 11.49, находим $F = r_0^2/(2Lt_1dn/dr) = -25$ см — рассеивающая линза.

Гауссов пучок неодимового лазера ($\lambda = 1$ мкм) с радиальным распределением поля по сечению: $E = E_0 \exp(-r^2/r_0^2)$ ($r_0 = 3$ мм), от которого и происходит его название, и с плоским волновым фронтом падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 1$ см, изготовленную из нелинейного вещества, показатель преломления которого зависит от интенсивности: $n = n_0 + n_2 E^2$ ($n_2 = 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Оценим, при какой мощности лазера возможно уменьшить диаметр пучка (фокусировка) после прохождения пластины (№ 11.90).

Фокусировка пучка возможна, если уменьшение диаметра пучка из-за нелинейной фокусировки, которую можно характеризовать отношением его радиуса (r_0) к расстоянию фокусировки f , больше дифракционной расходимости $r_0/f > \lambda/r_0$. Используя условие и рис. 11.49, получаем: $dn/dr = n \cdot 2EdE/dr = -4n_2 E_0^2/(e^2 r_0) = = r_0/(fd)$, откуда $E_0^2 = \lambda e^2/(4n_2 d)$. Из (2.1) $I = S = cE^2/(4\pi)$.

Нелинейный интерферометр Фабри—Перо представляет собой тонкую пластинку из вещества, показатель преломления которого пропорционален квадрату напряженности электрического поля: $n = n_0 + n_2 E^2$. Пластинка покрыта высокоотражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 99\%$. Определим уровень плотности мощности S лазерного излучения ($\lambda = 1,051$ мкм), пропускаемого таким интерферометром, если $n_0 = 3,5$, $n_2 = 10^{-9}$ ед. СГСЭ, а толщина пластины $d = 12$ мкм (№ 11.88). Интерферометр пропускает излучение только при точной настройке в резонанс, т. е. при $2dn = m\lambda$. При малой мощности $n \approx n_0$. Для отношения $2dn_0/\lambda$ получаем 79,92. Ближайшее к нему целое число $m = 80$. Используя условие, получаем

$$E^2 = (m\lambda - 2dn_0)/(2dn_2) = (1/3) \cdot 10^7 \text{ ед. СГСЭ.}$$

Поток мощности, выходящей из интерферометра, в соответствии с (2.1)

$$I = S = c\varepsilon E^2(1 - \rho)/(4\pi) = 10^8 \text{ Вт/см}^2.$$

Здесь $\varepsilon = n_0^2$.

Пространство между зеркалами интерферометра Фабри—Перо с разрешающей способностью $R = \lambda/\delta\lambda = 10^8$ заполнено химически чистым нитробензолом. При наложении однородного попечерного электрического поля нитробензол становится слабоанизо-

тропной средой, причем оптическая ось совпадает с направлением поля (**эффект Керра**). Интерферометр освещается монохроматическим пучком неполяризованного света ($\lambda = 600 \text{ нм}$). Оценим минимальную величину электрического поля, при которой на выходе интерферометра будет наблюдаться почти полностью линейнополяризованный свет. Постоянной Керра называют константу B в выражении

$$n_e - n_o = \lambda B E^2. \quad (11.33)$$

Постоянную примем $B = 2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ (№ 11.87). Считая длину волны света в вакууме λ , для разных показателей преломления в нитробензоле получаем разницу длин волн $\Delta\lambda = \lambda/n_o - \lambda/n_e \approx \approx \lambda \Delta n / n^2$. Для показателей преломления имеем $n_o \approx n_e \approx n \approx 1$. Если $\Delta\lambda > \delta\lambda = \lambda/R$, то в интерферометре резонирует только один из лучей, т. е. наблюдается поляризация. Таким образом, должно выполняться условие: $\Delta n_{\min} = 1/R$, откуда

$$E_{\min} = [\Delta n_{\min}/(\lambda B)]^{1/2} = 1/(R\lambda B)^{1/2} \approx 900 \text{ В/м.}$$

В заполненной нитробензолом кювете с прозрачными окнами расположен плоский конденсатор. Пучок света **круговой поляризации** с длиной волны λ и интенсивностью $I_{\text{вх}}$ проходит внутри конденсатора с пластинами длиной $l = 6 \text{ см}$, а затем через поляроид Π с разрешенным направлением, составляющим угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением **электрического поля** в конденсаторе (рис. 11.50). Найдем, как зависит интенсивность $I_{\text{вых}}$ пучка света на выходе системы от напряженности поля E в конденсаторе, и при каком значении E система окажется непрозрачной для света. Постоянная Керра нитробензола $B = 2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ (№ 11.96). Круговую поляризацию можно представить в виде суммы двух линейнополяризованных (вдоль и поперек электрического поля) волн с амплитудами $A_0 = (I_{\text{вх}}/2)^{1/2}$ и сдвигом фаз $\Delta\phi = \pm\pi/2$. В отсутствие в кон-

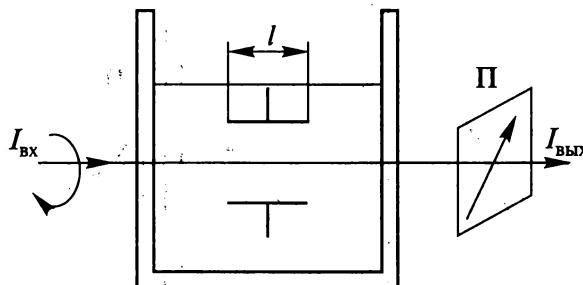


Рис. 11.50

денсаторе электрического поля после поляроида распространяются две волны одинаковой линейной поляризации с амплитудами $A_1 = A_2 = A_0(2)^{1/2} = (I_{\text{вх}})^{1/2}/2$ и тем же сдвигом фаз.

Электрическое поле E превращает нитробензол в анизотропную среду с оптической осью, параллельной полю, и, в соответствии с (11.33),

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda BE^2.$$

В результате сдвиг фаз становится равным

$$\Delta\phi_E = \pm\pi/2 + kI\Delta n = 2\pi(BIE^2 \pm 1/4).$$

В соответствии с (3.12)

$$I_{\text{вых}} = (I_{\text{вх}}/4)(1 + \cos\Delta\phi_E).$$

Интенсивность обращается в нуль при $\Delta\phi_E = 2\pi(m + 1/2)$, т. е. при $BIE^2 \pm 1/4 = m \pm 1/2$ или $BIE^2 = m + 1/2 \pm 1/4$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Минимальное поле, при котором $I_{\text{вых}} = 0$, соответствует $m = 0$ и равно $E = 1/2(Bl)^{1/2} \approx 15$ кВ/см.

Рассмотрим также вариант, когда заполненная нитробензолом кювета с прозрачными окнами и расположенным в ней плоским конденсатором помещена между скрещенными поляроидами Π_1 и Π_2 , разрешенные направления которых составляют угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением электрического поля в конденсаторе (рис. 11.51). На систему падает пучок неполяризованного света с длиной волны λ и интенсивностью $I_{\text{вх}}$. Расстояние между пластинами $d = 0,8$ см, их длина в направлении луча $l = 6,4$ см. Найдем, как зависит интенсивность $I_{\text{вых}}$ пучка света на выходе системы от напряжения U между пластинами конденсатора, и при каком напряжении интенсивность $I_{\text{вых}}$ достигает максимального значения. Постоянная Керра нитробензола $B = 2 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ (№ 11.97). Линейно поля-

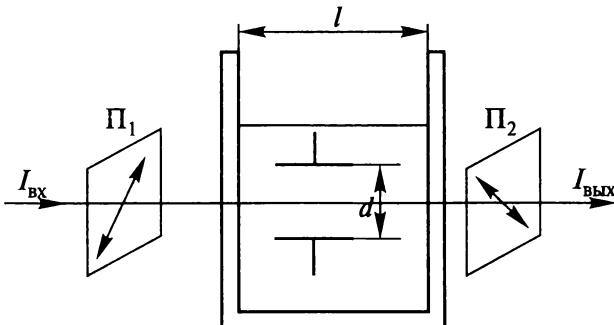


Рис. 11.51

ризованная волна после первого поляроида имеет амплитуду $A = (I_{\text{вых}}/2)^{1/2}$ и может быть представлена как сумма двух синфазных линейно поляризованных (вдоль и поперек электрического поля) волн с амплитудами $A_0 = A/(2)^{1/2}$. В отсутствие поля волна через второй поляроид не проходит. Это эквивалентно двум волнам, разность фаз между которыми $\Delta\phi = \pi$, а их амплитуды $A_1 = A_2 = A_0/(2)^{1/2} = (I/8)^{1/2}$. Электрическое поле $E = U/d$ превращает нитробензол в анизотропную среду с оптической осью, параллельной полю. В соответствии с (11.33) $\Delta n = n_e - n_o = \lambda BE^2$. Сдвиг фаз между волнами

$$\Delta\phi_E = \pi + kl\Delta n = \pi(1 + 2BIU^2/d^2) = \pi(1 + 2BIU^2/d^2).$$

Интенсивность $I_{\text{вых}} = (I_{\text{вх}}/8)(1 + \cos\Delta\phi_E)$ максимальна при $\Delta\phi_E = 2\pi m$, т. е. при $(1 + 2BIU^2/d^2) = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$). Наименьшее напряжение, при котором достигается максимальная интенсивность ($I_{\text{вых}} = I_{\max}$), будет при $m = 1$ и равно $U = d/(2BI)^{1/2} = 50$ ед. СГСЭ = 15 кВ.

Линейно поляризованный импульс квазимохроматического излучения проходит через электрооптическую ячейку Поккельса длиной $l = 10$ см. Показатель преломления ячейки увеличивают по закону $n(t) = n_0 + \alpha t$. Найдем, как изменится длительность импульса и его средняя частота после прохождения через ячейку, если $\alpha = 3 \cdot 10^8$ с $^{-1}$ (№ 10.38). Электрооптическим эффектом Поккельса называют изменение оптических свойств кристалла под действием внешнего электрического поля. Как видно из (11.33) эффект Керра пропорционален квадрату напряженности поля. Эффект Поккельса — линеен. Практическая безынерционность позволяет использовать эффект Поккельса для создания быстро действующих оптических затворов и высокочастотных модуляторов света. Ячейка Поккельса представляет собой кристалл, помещенный между двумя скрещенными николями. Николи не пропускают свет при отсутствии внешнего электрического поля. Свет проходит при наложении электрического поля. Оптически односный кристалл вырезают перпендикулярно оптической оси. Свет направляют вдоль этой оси. Если внешнее поле направлено перпендикулярно оси, получаем поперечный модулятор света, если параллельно распространению света — продольный модулятор. При включении поля возникает двойное лучепреломление. Появляется сдвиг фаз, зависящий от разности хода. Набег фазы будет равен

$$\varphi = kln = (\omega/c)l(n_0 + \alpha t).$$

Используя представление об интеграле Фурье (см. 3, с. 425), получаем выражение сигнала через спектр

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega.$$

На входе в ячейку при $x = 0$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

При учете набега фазы для сигнала на выходе из ячейки имеем

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi(\omega, t)} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \exp[i\omega(t - \alpha l/c) - n_0 l/c] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = E(\tau), \text{ где } \tau = t(1 - \alpha l/c) - n_0 l/c. \end{aligned}$$

Таким образом, длительность увеличится в $1/(1 - \alpha l/c) \approx 1,1$ раз. Во столько же раз уменьшится частота.

Можно решать иначе. Обозначим длительность приходящего к ячейке сигнала T . Из ячейки начало его выходит через t_1 , а конец через t_2 . В кристалле за dt сигнал проходит путь $dx = [c/n(t)]dt$. Для начала сигнала

$$l = c \int_0^{t_1} dt (n_0 + \alpha t) = (c/\alpha) \ln(n_0 + \alpha t_1)/n_0,$$

откуда $t_1 = (n_0/\alpha)(e^{\alpha l}/c - 1)$.

Аналогичным образом записываем для конца сигнала

$$l = c \int_T^{t_2} dt (n_0 + \alpha t) = (c/\alpha) \ln((n_0 + \alpha t_2)/(n_0 + \alpha T)),$$

откуда $t_2 = (n_0/\alpha + T)(e^{\alpha l}/c - n_0)/\alpha$.

В результате $t_2 - t_1 = Te^{\alpha l/c}$ и $(t_2 - t_1)/T = e^{\alpha l/c} \approx 1 + \alpha l/c = 1,1$.

Предметный указатель

A

Азимут колебания (поляризации) волны 52

Амплитудная решетка 226

Амплитудные коэффициенты отражения и преломления 49

Анализатор 305

Апертура системы 11

— интерференции 103

Апертурный угол (угловая апертура) 11

Апланатические точки 44

Астигматическая система 14

Афокальная система 23

B

Билинза Бийе 76

Бинокль 30, 52

Бипризма Френеля 72

V

Видность 87

Волновой параметр 146

Волна гармоническая 148

— когерентная 148

— обыкновенная 288

— однородная 59

— опорная 248

— плоская поляризованныя по кругу

310, 312

— предметная 248

— ультразвуковая 239

— эллиптически поляризованныя 305

Второстепенные (добавочные) максимумы 178

— минимумы 178

Входной зрачок 10

G

Гауссов пучок 336

Главная оптическая ось 15

— плоскость 24, 33

Главное сечение 10

— кристалла 228

Главные точки центрированной системы 24

— фокусные расстояния 25

Главный фокус 23

Глубина резкости 20

Голограмма 248

Гомоцентрический пучок 8

Групповая скорость 258

D

Двойная звезда 282

Двойное лучепреломление 292, 339

Двоякпреломляющий кристалл 289

Дельта-функция 227

Дисперсионная область 190

Дисперсия аномальная 259

— линейная 187

— нормальная 200, 259

— угловая 187, 189

Дифракция 118

— Фраугофера 146

Дизэлектрический тензор (главные направления и главные значения) 287

Длина когерентности 102

Длительность импульса 212

Добавочные минимумы 177

Добротность 211

Дополнительный экран 174

Допустимый диаметр 187

E

Естественный свет 285

3

Закон дисперсии линейный 260

— Ламберта 38

— Малиуса 285

— отражения 6

— Снеллиуса 6

Затухание волн 264

Зонная пластинка 126, 140, 316

— фазовая 143

Зоны Френеля 118

— Шустера 139

Зрительная труба 30, 160

I

Инвариант Лагранжа—Гельмгольца 27

Интенсивность света (колебаний) 54

— светового (лучистого) потока (лучистость излучения) 38

Интерферционные полосы 290

Интерференция 69

— многолучевая 85

Интерферометр двулучевой 291

— Малькейсона 85

— Фабри—Перо 206, 237

— нелинейный 336

K

Камера-обскур 156

Кардиальные точки 24

Коллинеарное соответствие 22

Кольца Ньютона 78

Контрастность 234

Коэффициент отражения 50, 51
— преломления 51, 129
— пропускная 179
Критерий Релея 190
Круговая поляризация (правая и левая) 285

Л

Лазер 164
— гелий-неоновый 211, 242, 253
— импульсный 198
— на неодимовый 199
— на CO₂ 267
Линза 276
— отрицательная (рассеивающая) линза 18, 252
— положительная (собирающая) линза 18, 77, 251
— толстая 33
— тонкая 17
Линейная поляризация 52, 285
Линейно поляризованный свет 52
Лупа 30

М

Метод вращающегося зеркала 262
— Релея 225
— темного поля 242
Микроскоп 30, 32, 166, 167
Мультиплексия 238
Н
Немонохроматичность 253
Необыкновенный показатель преломления кристалла 289
Нулевой инвариант Аббе 14
О

Объектив 30
Обыкновенный показатель преломления кристалла 289
Одноосная среда 287
Одноосный кристалл 289, 328
Оптическая длина 72
— ось кристалла 287
— сила 14
Оптический интервал 26
— затвор 195
— путь 76
— резонатор 210, 283
— световод 262
— центр линзы 17, 18
Оптическое волокно 324
Опыт Юнга 154, 294
Освещенность 39, 120, 162
Осцилляция 212, 217
Отражательная способность 51

П

Параксиальный пучок 8
Параллелепипед Френеля 60
Плазма 264
Пластиника Луммера—Герке 85, 221
Пластиинки переменной толщины 77
— постоянной толщины 56
Плоскость колебаний 52
— падения 47
— поляризации 52, 285
— пропускания 285
— фокальная 18, 28
Побочная ось 18
Поверхностная прозрачность 52
Полосы равного наклона 77
— равной толщины 78
Полное внутреннее отражение 8
Поляроид 285, 296, 297, 310, 311, 319, 321
Поток лучистой энергии 37
Призма 10, 200, 201, 204
— Волластона 330
Принцип Бабине 175
— взаимности 6
— Гюйгенса—Френеля 118
— таутохронизма 19
Просветленная оптика 77
Пространственная частота 225
Пространственный период 225
Пульсары 226
— радиоизлучение 266
Пятно Пуассона 125

Р

Размер (ширина) пространственной когерентности 122
Разрешающая способность 155, 189, 192, 193, 195, 207
«Рентгеновод» 274
Решетка дифракционная 180, 318
— двумерная 197
— дополнительная 180
— отражательная 178, 184
— синусоидальная 188, 220, 229
— фазовая 185, 186, 227
Ряд Фурье 228, 239, 258

С

Саморепродукция 236
Самофокусировка 334
Светимость 38
Световод 273
Световой вектор 285

Светосила объектива (линзы) 40, 155
«Свистящие атмосферики» 265
Сила света 37
Скважность 199
Скользящее падение 52
Сложение оптических сил 17, 30
Солнечная постоянная 63
Соотношение между шириной спектра и длительностью светового импульса (соотношение неопределенности) 103, 276
Сопряженные точки 21
Спектрограф 201, 330
Спектроскоп 331
Сpirаль Корни 139
— Френеля 119
Степень поляризации 158, 308
Стигматическое изображение 14
Стигматический пучок 14
Схема Габора 251
— Юнга 71

Т

Телескоп 30, 159–161
Телескопическая система 23
Тепловой фотоприемник 41
Транспарант 227, 248

У

Угловая полуширина главного максимума 147
Увеличение угловое 25
— нормальное 43
— поперечное 23
— продольное (осевое) 25
Угол Брюстера 53
— отклонения 10
— полного внутреннего отражения 8
— преломления 10
Узловые точки 25

Условие Брэга—Вульфа 255
— синусов Аббе 44

Ф

Фаза волны 258
Фазовая скорость 258, 267
Фокус основной 19, 140
Формула Релея 259
Формулы Френеля 49, 287
Фотоприемник 233
Фотосфера Солнца 267
Функция передачи 225
Фурье-плоскость 228, 236, 255
Фурье-преобразование 228
Фурье-спектрометр 95

Ц

Центрированная оптическая система 16

Ш

Ширина когерентности 5
— полосы 70
— спектра излучения 150
— спектральной линии 178

Э

Эллиптическая поляризация (правая и левая) 285
Эталон (интерферометр) Фабри—Перо 206
Эффект Доплера 278
— Зеемана 193
— Керра 337
— Покельса 339
— Смита—Парселла 223
Эшелон Майкельсона 204

Я

Яркость 38
— изображения Луны 42
— светового потока 38
— Солнца 40
Ячейка Покельса 339

Содержание

Предисловие	3
Введение	5
1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии	6
2. Формулы Френеля. Световое давление	45
3. Интерференция монохроматического света	69
4. Интерференция квазимонохроматического света. Временная когерентность	86
5. Протяженные источники света. Пространственная когерентность . .	101
6. Дифракция Френеля. Зонные пластинки	118
7. Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов	146
8. Спектральные приборы	176
9. Элементы фурье-оптики и голограммии	225
10. Дисперсия света. Эффект Доплера в оптике	258
11. Поляризованный свет. Элементы кристаллооптики и нелинейной оптики	285
Предметный указатель	341

Учебное издание

Корявов Владимир Павлович

**Методы решения задач в общем курсе физики
Оптика**

Изд. № 04. Подп. в печать 03.10.11. Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офсетная.

Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная. Объем 21,07 усл.печ.л.

21,57 усл. кр.-отт. Тираж 1000 экз. Заказ 1647

ООО «ТИД «Студент»,
109004, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 64, стр. 2, офис 717(31)
Тел.: (495)915-08-96, 915-80-41
E-mail: sales_student@mail.ru

ООО «Великолукская городская типография»
182100, Псковская область, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95.
E-mail: zakaz@veltip.ru