Обобщённые функции

$\boxed{24}$

60) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \overset{1)}{\cos nx}, \lim\limits_{n\to\infty} \overset{2)}{\sin nx}$ в D'?

1) $(\cos nx, \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\tilde{f}, \varphi)$
$\forall \varphi \in D$ $\quad f$ — гладкая

$\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos nx\, \varphi(x)\, dx}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x) dx \quad \Rightarrow f(x) = 0$

по т. Римана об осцилляции

2) Аналогично $f(x) = 0$

62 а) $f_n \in L^1_R(-\infty; +\infty)$

1) $\left|\int_a^b f_n(x)\, dx\right|$ — огран. сверху

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & a<b<0,\ b>a>0 \\ 1 & a<0<b \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{D'}{=} \delta(x)$

$\forall \varphi \in D \to (\delta(x), \varphi) = \varphi(0)$

v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \underbrace{\int_{-R}^{R} f_n(x)[\varphi(x) - \varphi(0)] dx}_{J_2} + \varphi(x_0) \underbrace{\int_{-R}^{R} f_n(x) dx}_{\to \varphi(0)}$

$\forall \varepsilon_\varphi > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon_\varphi) > 0 : \forall x: |x| < \delta \to |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon_\varphi$

$J_2 = \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)[\varphi(x) - \varphi(0)] dx}_{<\varepsilon_\varphi} + \underbrace{\int_{-R}^{-\delta} f_n [\varphi(x) - \varphi(0)] dx}_{\to 0} + \underbrace{\int_{\delta}^{R} f_n [\varphi(x) - \varphi(0)] dx}_{\to 0}$

T3 a) $\lim\limits_{a \to +0} \frac{a}{a^2+x^2} = \pi \delta(x)$, $\mathcal{D}'$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2} \varphi(x)\, dx \xrightarrow[a \to +0]{} \pi \cdot \varphi(0)$

$=$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(\xi(x))$

$$= \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,x\,\varphi'(\xi(x))}{a^2+x^2}\,dx = J_1 + J_2$$

$$J_1 = 2\varphi(0)\cdot\int_0^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = 2\varphi(0)\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \pi\cdot\varphi(0)$$

$$|J_2| \le M\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a|x|}{a^2+x^2}\,dx = aM\int_0^{+\infty} \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} =$$

$$= aM\ln|x^2+a^2|\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} aM\cdot\ln|x^2+a^2|\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} aM\ln\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right) =$$

$R \to +\infty$
но и
$a \to +0$ и a быстрее
т.к. это степенная

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ a\to+0}} M\cdot\ln\left((0\cdot\infty)^a\right) = 0$$

(T3.5) Вычислить

$$\lim_{a\to+0} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} = \pi\delta(x)$$

$\forall \varphi \in D$

$$(g_a,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \underbrace{2\varphi(0)\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx}_{\text{интеграл Дирихле}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\xi(x))\sin\left(\frac{1}{a}\cdot x\right)dx}_{\xrightarrow[a\to+0]{\text{по лемме Римана об осциллирующем интеграле}} 0}$$

$\pi\cdot\varphi(0)$

0

$\forall k \; (f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$

(73) $|x| \quad \forall \varphi \in D$

$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x)\, dx$

$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \varphi'(x)\, dx =$

$= -\int_{-\infty}^{0} (-x) \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} (+x) \varphi'(x)\, dx \; (=)$

$\int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x)\, dx = x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x)\, dx$

$\varphi(+\infty) = 0$
т.к. имеет компактный носитель

$\int_{-\infty}^{0} x \varphi'(x)\, dx = x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot \varphi(x)\, dx$

$(=) \int_{-\infty}^{0} (-1) \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} 1\, \varphi(x)\, dx = (\mathrm{sgn}(x), \varphi(x))$

$|x|' = \mathrm{sign}(x)$

(74) в D' найти $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{ax}{(a^2+x^2)^2}$

$$\underbrace{\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)'}_{\text{произ-ная}} = -\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2}$$

Предел и обобщённых функциях можно менять местами

$\lim \dfrac{ax}{(a^2+x^2)^2} = -\dfrac{\pi}{2}\delta'(x)$

(T5)

a) $\Big(\underbrace{\frac{x^{2021}}{1+x^{2022}} + \sin^4 x \cos^4 3x + e^{\cos x}}_{a}\Big)\,\delta(x)$

$\forall \varphi \in D: \ (a\cdot\delta(x), \varphi) = (\delta(x), a\varphi) = a(0)\cdot\varphi(0) =$

$= (0 + 0 + e^0)\cdot\varphi(0) = e\,\varphi(0) = (e\cdot\delta(x), \varphi)$

б) $(\underbrace{e^{\sin x} - 2\operatorname{sh} x}_{a})\,\delta'(x)$

$\forall \varphi \in D: \ (a\cdot\delta'(x), \varphi) = (\delta'(x), a\varphi) = -(\delta(x), (a\cdot\varphi)') =$

$= -(a'(0)\varphi(0) + a(0)\varphi'(0)) \ \textcircled{=}$

$a(0) = e^0 - 2\cdot 0 = e$

$a'(0) = \cos(0)\cdot e^0 - 2\operatorname{ch}(0) = 1 - 2 = -1$

$\textcircled{=} \ -(-\varphi(0) + \varphi'(0)) = \varphi(0) - \varphi'(0) = (\delta(x) + \delta'(x), \varphi)$

в) $(\underbrace{x\,e^x}_{a})\cdot\delta''(x)$

$\forall \varphi \in D: \ (a\,\delta''(x), \varphi) = (\delta''(x), a\varphi) = (-1)^2(\delta(x), (a\varphi)'') =$

$= (\delta(x), a''(x)\varphi(x) + 2a'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\,a(x)) =$

$= a''(0)\varphi(0) + 2a'(0)\varphi'(0) + \varphi''(0)\,a(0) = 2\varphi(0) + 2\varphi'(0) =$

$a(0) = 0$

$= (2(\delta(x) \mp \delta'(x)), \varphi)$

$a'(0) = (x+1)e^x = 1$

$a''(0) = (x+2)e^x = 2$

(75) $\ln|x| = f$

$$\forall \varphi \in D \quad (f, \varphi) = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \, \varphi(x)\, dx$$

$$(f', \varphi) = -(f; \varphi') = -V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \cdot \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\, \varphi'(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\, \varphi'(x)\, dx \right]$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\, \varphi'(x)\, dx = \ln(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\, \varphi'(x)\, dx = \ln(-x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{+x}\varphi(x)\, dx$$

$$\varphi(\pm\infty) = 0$$

т.к. компактный носитель

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln\varepsilon\, \varphi(\varepsilon) - \ln(\varepsilon)\, \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right]$$

$$\ln\varepsilon \cdot \big(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\big) = 2\varepsilon\, \varphi'(\xi(\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} 0$$

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right)$$

(84) ~~[illegible]~~

$\boxed{I}$ $\exists\ \frac{df}{dx}$ — производная в обычном смысле при $x \neq x_k$

$p_i = [f]_{x_i}$ — величина скачка в x_i $\left(p_i = f(x_i+0) - f(x_i-0) \right)$

$\exists\ \forall \varphi \in D \quad (f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx =$

$$= -\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

Если добавить к точкам x_i $i=\overline{1,n}$ ~~[illegible]~~ пару точек, находящихся "довольно далеко", чтобы $[x_0, x_{n+1}]$ покрывал $\operatorname{supp}(\varphi)$

то искомая ф-ла не изменится, т.к. $[f]_{x_0} = [f]_{x_{n+1}} = 0$

$$-\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\sum_k \left[f(x)\, \varphi(x) \Big|_{x_k - 0}^{x_{k+1}+0} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{df}{dx} \varphi(x)\, dx \right] =$$

$$= -\sum_k p_k \cdot \varphi(x_k) + \underbrace{\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{df}{dx} \cdot \varphi(x)\, dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \varphi(x)} = \left(\frac{df}{dx} + \sum_k p_k\, \delta(x - x_k), \varphi(x) \right)$$

$$= (f', \varphi)$$