2 Задание

Собственные интегралы, зависящие от параметра

1 неделя

§13

(2.4) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int_0^1 \underbrace{x^2 e^{\alpha x^3}}_{f(x,\alpha)}dx \ \textcircled{=}$

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $\Pi = \{(x,\alpha) : 0\le x\le 1 ;\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\} \Rightarrow$

$\textcircled{=} \int_0^1 \lim\limits_{\alpha\to 1} x^2 e^{\alpha x^3} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{x^3} d(x^3) =$

$= \frac{1}{3}\left(e^{x^3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{e-1}{3}$

(14.4) $\Phi(\alpha) = \int_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2} dx \qquad \Phi'(\alpha) - ?$

$f(x,\alpha) = e^{\alpha x^2}$ непрерывна в $\Pi = \{(x,\alpha) : 3\alpha \le x \le \alpha^2 ;\ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}$

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) = x^2 e^{\alpha x^2}$ непрерывна в Π

$\varphi(\alpha) = 3\alpha$ диф-ма на $[\alpha_1;\alpha_2]$

$\psi(\alpha) = \alpha^2$ диф-ма на $[\alpha_1;\alpha_2]$

$\Rightarrow \Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha);\alpha)\,\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha);\alpha)\,\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx =$

$= e^{\alpha^5}\cdot 2\alpha - e^{9\alpha^3}\cdot 3 + \int_{3\alpha}^{\alpha^2} x^2 e^{\alpha x^2} dx$

Не совпадает с ответом в задачнике

(17) $I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} \quad \alpha > 0 \qquad \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$

Все $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ непр в $\Pi = \{(x,\alpha) : 0\le x\le b ;\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\}$ где $0<\alpha_1<\alpha_2$

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) = \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}$ непр в Π $\Rightarrow I'(\alpha) = \int_0^b \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}dx \Rightarrow \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{I'(\alpha)}{-2\alpha}$

$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_0^b = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{\alpha}$ $\quad = \int_0^{\pi}$

$\Rightarrow I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2}{\alpha^2}}\cdot\left(-\frac{b}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha^2+b^2}$

$\Rightarrow \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{I'(\alpha)}{-2\alpha} = \frac{1}{2\alpha^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$

18.3 $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \underbrace{\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}}_{f(x,\alpha)}, \ |\alpha|<1$

$f(x,\alpha)$ имеет разрыв в $x=\frac{\pi}{2}$. Исследуем его

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(1+\frac{2\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha\cancel{\cos x}}{(1-\alpha\cos x)\cancel{\cos x}} =$

$\ln(1)=0$

$= 2\alpha$

разрыв 1го рода $\Rightarrow$ устраним его доопределив ф-цию $f(x,\alpha)$ в $x=\frac{\pi}{2}$ 2α

Теперь $f(x)$ непр. в $\Pi = \{(x,\alpha): 0\le x\le\pi;\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\}$ $-1<\alpha_1<\alpha_2<1$

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) \circledeq$ $\cancel{\frac{1-\alpha\cos x}{1+\alpha\cos x}\cdot\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}}$

$\cancel{\frac{\cos^2 x}{(1-\alpha\cos x)^2}}$ непрерывна в Π

$\circledeq \frac{1}{\cos x}\frac{1-\alpha\cos x}{1+\alpha\cos x}\cdot\left[\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x} + \frac{(1+\alpha\cos x)\cdot\cos x}{(1-\alpha\cos x)^2}\right] =$

$= \frac{\cos x}{1+\alpha\cos x} + \frac{\cos x}{1-\alpha\cos x} = \frac{2\cancel{\cos x}}{1-\alpha^2\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos x}} = \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}$

$\Rightarrow I'(\alpha) = \int_0^{\pi}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}\,dx = \begin{vmatrix} u = \mathrm{tg}\,x \\ du = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow dx = \cos^2 x\,du \\ \cos^2 x = \frac{1}{u^2+1}\end{vmatrix}$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\cancel{(u^2+1)}}{u^2-\alpha^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{u^2+1}}\,du = \frac{1}{2}\,4\int_0^{\pi/2}\frac{du}{u^2+(1-\alpha^2)} = 4\,\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha = 2\pi\arcsin\alpha + C$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I(\alpha) = 2\pi\cdot\arcsin\alpha$$

2 неделя **Несобственные интегралы, зависящие от параметра**

§14

(1.1) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 1$

1) $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ при $\forall$ фикс. $\alpha_1 \in E$ $I(\alpha)$ – сходящийся интеграл

на $[1;+\infty)$ $|f(x,\alpha)| = \left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x)$ $\forall \alpha \in E$

признак В $\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_0}}\,dx \underset{\alpha>1}{<} \infty \Rightarrow$ (по призн. Вейерштрасса)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится равномерно

2) $\alpha \in (1;+\infty) = E_0$

Покажем, что $I(\alpha)$ сх-ся неравномерно (отриц. Крит. Коши):

$\exists \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}: n > [a]$ $\exists R_n' = n$, $R_n'' = 2n$ & $\exists \alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$:

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{x^{\left(-\frac{1}{n}\right)}}{-\frac{1}{n}}\Bigg|_n^{2n} = \frac{n}{1}\left(n^{-\frac{1}{n}} - (2n)^{-\frac{1}{n}}\right) = \frac{\sqrt[n]{2n} - \sqrt[n]{n}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2n^2}} =$$

$$= \frac{\left(1 - \sqrt[n]{2}\right)}{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$$

т.к. $1 \geq \frac{\ln 2}{2} = \varepsilon_0$

(1.2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0;\alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$

1) $I(\alpha)$ сх-ся при $\forall$ фикс. $\alpha_1 \in E$

призн. В. $\left\{ \begin{array}{l} \text{на } (0;1] \quad |f(x,\alpha)| = \left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \underset{\alpha_0<1}{\leq} \frac{1}{x^{\alpha_0}} = g(x) \quad \forall \alpha \in E \\ \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty, \text{ т.к. } \alpha_0 < 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса

$I(\alpha)$ сходится равномерно

2) $E = (0;1)$

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^{\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{e^{(1-\alpha)\ln\xi}}{1-\alpha} = \varphi(\xi,\alpha)$$

$$\sup_{\alpha\in E}\left|\int_0^{\xi}\frac{dx}{x^{\alpha}}\right| \geq \left|\varphi\left(\xi, 1+\frac{1}{\ln\xi}\right)\right| = \left|-\frac{1}{e}\ln\xi\right| \underset{\xi\to 0}{\not\to} 0$$

по опр. нерав. сх-сти

$\Rightarrow$ $I(\alpha)$ сх-ся неравномерно на E

(6.5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx \quad E_1 = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0; \; E_2 = (0;+\infty)$

1) $\alpha \in E_1$, $I(\alpha)$ сход.

$e^{-\alpha x^4} \leq e^{-\alpha x}$

$\tilde{f}(x,\alpha) = \left(x^2 e^{-\frac{\alpha}{2}x}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}} \leq e^{-\frac{\alpha}{2}x} \quad \forall x \geq x_{\alpha}$

$\tilde{f}(x,\alpha) \leq e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} \quad \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} dx < \infty \Rightarrow$ по призн. В

признак В.

I сх-ся равномерно по α на E_1

2) $\alpha \in E_2$, $I(\alpha)$ сх-ся

Запишем отриц. крит. Коши:

$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists R_n' = n \; \& \; R_n'' = 2n \; \& \; \exists \alpha_n = \frac{1}{n^4}$:

$$\left|\int_n^{2n} x^2 e^{-\frac{x^4}{n^4}} dx\right| \geq e^{-16} \cdot n^2 \geq e^{-16} = \varepsilon_0 \Rightarrow \text{ сх-ся неравномерно}$$

(7.4, 5, 6) 4) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^{\alpha})}{1+x^2} dx \quad E = (0;+\infty)$

$\exists\ t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\Rightarrow I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}\,(1+t^{\frac{\alpha}{2}})}\,dt \qquad E = (0; +\infty)$

$\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}\,(1+t^{\frac{\alpha}{2}})} \leq \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt < \infty$, т.к. $f(t) = \sin t \Rightarrow |F(t)| < M$

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ монотонно $\to 0$

$\Rightarrow$ по ~~д~~ Дирихле $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ сх-ся $\Rightarrow$ по признаку В $I(\alpha)$ равном. сх-ся.

15) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \quad E = \mathbb{R}$

Запишем отрицание крит. Коши

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > [\alpha] \quad \exists R_n' = n \quad \exists R_n'' = 2n \quad \exists \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$

$\int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{1+x^2}{4n^2}} dx \geq \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{1+4n^2}{4n^2}} dx \geq$ $\quad -\frac{1+4n^2}{4n^2} \geq -\frac{5n^2}{4n^2}$

$\geq \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-\frac{5}{4}} dx \geq \left(\frac{1}{2n} + o(1)\right) \cdot e^{-\frac{5}{4}} \cdot (2n - n) \geq \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{5}{4}} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{e^2}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon = \frac{1}{2e^2} : \forall n \quad R_n' = n, R_n'' = 2n \quad \exists \alpha_n = \frac{1}{2n}$:

$\left| \int_n^{2n} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx \right| \geq \varepsilon$

16) $I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha} \quad E(0;2)$

$\exists t = \frac{1}{x}$: $\Rightarrow I(\alpha) = \int_1^{+\infty} -\sin t \cdot \frac{dt}{t^{2-\alpha}} = -\int_1^{+\infty} \underbrace{\sin t}_{f(t)} \cdot \underbrace{t^{\alpha-2}}_{g(t)} dt$

$dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$-\frac{1}{t^2} dt = dx$

1) $f(t) = \sin t \quad F(t) = \cos t \leq 2 \quad \forall x \geq 1$

2) $g(t) = t^{\alpha-2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad$ 3) $g'(t) = (\alpha-2) \cdot t^{\alpha-3} = \frac{\alpha-2}{t^{3-\alpha}}$

для каждого фикс. $\alpha \in E$ $g'(t)$ не меняет знака на $[1;+\infty)$

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле $I(\alpha)$ сх-ся равномерно $\forall \alpha$.

P1) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1-x^2)^\alpha} dx \quad E = [0; \frac{1}{2}]$

(T1) вычислить интегралы Дирихле и Лапласа:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx \; ; \; \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx \; ; \; \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx$$

I) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}$ (*)

] $a>0$. Тогда рассмотрим
$$\Phi(a,b) = \int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin ax}{x}\,dx \quad , b>0$$

При фикс. $b>0$ этот интеграл сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по Дирихле, т.к. $\frac{1}{x}e^{-bx}$ монотонно убывает на $(0;+\infty)$, а $\sin ax$ имеет огранич. первообразную $\frac{\cos ax}{-a}$.

При $a=0$ $\Phi(0,b)=0$. $K(a,b)=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\,dx$ — сх-ся рав-но по b

продифференцируем $\Phi(a,b)$:
$$\Phi'_a(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-bx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-bx}\cos ax\,dx =$$
$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

Интегрируя на $[0;\alpha]$
$$\Phi(a,b) - \Phi(0,b) = b\int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$$

т.к. $\Phi(0,b)=0 \Rightarrow \forall b>0$ верно $\Phi(a,b) = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-bx}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \quad (1)$$

] $\alpha>0$. Найдём значение интеграла (*)

При каждом фикс. $\alpha>0$ $\Phi(a,b)$ сх-ся р-но по b на $[0;1]$

по признаку Дирихле, т.к. $\frac{e^{-bx}}{x}$ монотонно убывает до 0 при $x \to \infty$

а $\sin ax$ имеет огр. первообразную.

Из равномерной сх-сти (1) и
непрерывности $e^{-bx} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ на $G = \{(x, b) : 0 \le x < +\infty,\ 0 \le b \le 1\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Непрерывность $\Phi(a, b)$ по b на $[0; 1]$ и в частности $b \to 0$.

А это значит, что мы можем записать

$$\lim_{b \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{b \to +0} \left(e^{-bx} \frac{\sin ax}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx =$$

$$= \lim_{b \to +0} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

т.к. $\frac{\sin ax}{x}$ нечетная по a функция, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a)$$

II) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$; $K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$

$\exists\, \alpha > 0$.

$\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непр при $\forall x, \forall \alpha$ $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$

сходится равномерно по α на $[\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$

$$\Rightarrow I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$

Сложим его с интегралом Дирихле почленно:

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx$$

Дифференцируем почленно по α:

$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$

$\Rightarrow I''(\alpha) - I(\alpha) = 0 \Rightarrow I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$

$|I(\alpha)| \le I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

$C_1 e^{\alpha} \to \infty$ при $\alpha \to \infty$ | $\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

$C_2 e^{-\alpha} \to 0$ при $\alpha \to \infty$ |

$\Rightarrow I(0) = C_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$

т.к. $I(\alpha)$ четная, то $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in R$

$I'(\alpha) = -K(\alpha)$

$\Rightarrow K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

т.е. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

Т.к. $K(\alpha)$ нечетная, то выходит

$K(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \cdot sign(\alpha)$ $\alpha \in R$

9.1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin^2 \alpha x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x (1 - \cos^2 \alpha x)}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos 2\alpha x}{x}\, dx =$

$= \frac{\pi}{2} \cdot sign(\alpha)$

dv u

$dv = \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$

$v = \frac{\pi}{2}$

$= \overbrace{\frac{\pi}{4}}^{sign(\alpha)} - \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{sign(\alpha)} \cdot \cos(2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{sign(\alpha)} \int_0^{+\infty}$ [illegible] $d(\cos 2\alpha x) =$

$= \frac{\pi}{4} sign\,\alpha - \frac{\pi}{4} \cdot \cos(2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} + \frac{\pi}{4} \cdot (\cos 2\alpha x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} sign\,\alpha$

9.5 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}\, dx =$

$= \cancel{I_1 - 2I_2 + I_3}$

$\cancel{I_1 = \frac{\pi}{2}}$

$\cancel{I_2 = \frac{\pi}{4}}$ (by 3.1)

$\cancel{I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx}$

$\sin(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t =$

$= \cos^3 t + 3i\cos^2 t\sin t - 3\cos t\sin^2 t - i\sin^3 t$

$\Rightarrow \sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t =$

$3\sin t - 4\sin^3 t$

$\Rightarrow \sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}$

(3.1) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3(\alpha x)}{x} dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3\alpha x)}{3x} 3dx =$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(\alpha) - \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\alpha)$

(3.5) $\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^4 x}{x} dx}_{I} = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx}_{I_1} - 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx}_{I_3} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx}_{I_5}$

$= I_1 - 2I_3 + I_5$

$I_1 = \frac{\pi}{2}$; $I_3 = \frac{\pi}{4}$

$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x} dx$

$\sin 5t = \sin^5 t - 10\sin^3 t(1-\sin^2 t) + 5(1-\sin^2 t)^2 \sin t =$

$= \sin^5 t - 10\sin^3 t + 10\sin^5 t + 5\sin^5 t - 10\sin^3 t + 5\sin t =$

$= 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = 16\sin^5 t + \cancel{15} - 10\sin t + 5\sin 3t$

$\Rightarrow \sin^5 t = \frac{\sin 5t - 5\sin 3t + 10\sin t}{16}$

$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x} dx - \frac{5}{16}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x} dx + \frac{5}{8}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{3\pi}{16}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$

4.4 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx = \cancel{-2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)}{x^2}\,dx}$

$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\beta x}{x^2}\,dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx$

Решаем для $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx$. Для 2го будет аналогично

$f(x,\alpha) = \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}$ имеет разрыв в $x=0$

доопределим $f(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}, & x>0 \\ \frac{\alpha^2}{2}, & x=0 \end{cases}$

Тогда $f'_\alpha(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{\sin\alpha x}{x}, & x>0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$

- $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ непр на $[0;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$
- $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ сх-ся равномерно $\forall\alpha$ по призн. В., т.к. $\left|\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$, $\int\limits_0^{+\infty}\frac{2}{x^2} < \infty$
- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ сх-ся равномерно по α по призн. Дирихле:
  1) $\sin\alpha x$ имеет ограниченную первообразную $\left|\int\limits_a^b \sin\alpha x\right| = \left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right|_a^b \le \frac{2}{\delta}$, $A = [\delta;+\infty)$
  2) $\frac{1}{x}$ монотонно $\to 0$ при $x\to+\infty$

Выполнены условия теоремы о дифференцировании!

$\Rightarrow I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(\alpha)$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + C$

и тогда $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(|\beta| - |\alpha|)$

6.3

(6.1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$

$f(\alpha,\beta)$ имеет разрыв в $x=0$. доопределим ее:

$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-\beta x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Теперь $f(x,\alpha,\beta)$ непрерывна на $[0;+\infty)$

~~Итак~~

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ $[0;+\infty)$

Фиксируем β

$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x} dx$ р-но сх-ся по признаку D:

$\int_0^{x} \sin \alpha x \, dx = \left| \frac{-\cos \alpha x}{\alpha} \Big|_0^x \right| \le \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{\alpha}$

$g(x) = e^{-\beta x}$ монотонно $\to 0$ при $x \to +\infty$

$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha) dx$ сходится при каждом фикс. α

$\Rightarrow I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \cdot e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} d\alpha$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2+\beta^2) - \ln(\beta^2) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1\right) + C(\beta)$

$I(0) = \frac{1}{2} \ln(1) + C(\beta) = 0 \Rightarrow C(\beta) = 0$

$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right)$

6.3 $I(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx \quad \alpha,\beta>0$

Проверка условий теоремы о дифференцируемости:

1) $f(x)$ непр на $(0;+\infty)$ и имеет разрыв в $x=0$. Исследуем $x=0$

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x=0$$

доопределим $f(x)$ нулем в нуле

$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos\lambda x$ — непр на $[0;+\infty)$ как композиция непрерывных

2) $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\lambda}dx=\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos\lambda x\,dx$ равномерно сходится по признаку Дирихле:

- $\cos\lambda x$ имеет огран. первообразную
- $\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)$ монотонно сходится к 0 при $x\to\infty$

3) $\left|\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cdot\sin(\lambda x)\,dx\right|\le\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\lambda x\right|\le$

$$\leq \left|\int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx\right| + \left|\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx\right| < \infty$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda \cdot x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = \int \frac{\alpha \cdot d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2} - \int \frac{\beta \cdot d\lambda}{\beta^2+\lambda^2} = \int \frac{d\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} - \int \frac{d\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)}{1+\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + C(\alpha,\beta)$$

$I(0) = 0 - 0 + C(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow C(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow I(\lambda) = \operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\beta}$

6.5 $\int_0^1 \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}}_{f(x)}dx$

~~f(x) непрерывна~~ доопределим $f(x)$ в $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\right) = \alpha \Rightarrow$ доопределим $f(x)$ α в нуле.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{1+\alpha^2x^2}$$

1) $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непрерывны в $[0;1]\times R$

2) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1+\alpha^2x^2)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – сх-ся $\xRightarrow{\text{признак}}$ В

$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ сх-ся равномерно по α.

3) $I(\alpha,\beta)=0$

$\Rightarrow$ Применима Теорема о дифференцировании

$$I'(\lambda)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\lambda^2x^2)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{1+\lambda^2\sin^2 u}=\int_{t=\operatorname{tg}u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\lambda^2\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\right)}=$$

$(u=\arcsin x)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+t^2+\lambda t^2}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\sqrt{\lambda^2+1}\,t\right)}{\left(\sqrt{\lambda^2+1}\,t\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda^2+1}\cdot t\right)\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda^2+1}}$$

$$I(\lambda)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right)+C$$

$I(0)=0=C \Rightarrow C=0 \Rightarrow I(\lambda)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right)$

$\frac{\lambda}{\beta}$

13.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx=2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right),\ \alpha,\beta>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}}{x^2}$$

Найдем $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\,dx=I(\lambda)$

$$\left.\begin{aligned} f(x,\lambda)&=\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\\ f'_\lambda(x,\lambda)&=-e^{-\lambda x^2}\end{aligned}\right\}\ \text{непр. на } (0;+\infty)\cup(0;-\infty)$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}-e^{-\lambda x^2}\,dx$ $\overbrace{\text{сх-ся}}^{\text{равн-но}}$ при $\forall$ фикс. $\lambda\in(0;+\infty)$ по признаку В

$\left|-e^{-\lambda x^2}\right|\le e^{-x^3}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^3}dx<\infty$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x^3}}{x^2}\,dx$; $\left|\frac{e^{-\lambda x^2}}{x^2}\right|\le \frac{e^{-x^3}}{x^2}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^3}}{x^2}<\infty \Rightarrow$ по признаку В

$\int_0^{+\infty} f(x,\lambda)$ сх-ся.

$\Rightarrow$ можем применить теорему о дифференцировании

$$I'_\lambda(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}x)^2}\,d(\sqrt{\lambda}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow I(\lambda) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda = -\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\lambda} + C$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx - 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx =$$

$$= -2\sqrt{\alpha\pi} + 2\sqrt{\beta\pi} = 2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)$$

15.5 $$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}}_{f(x,\alpha)}\,dx$$

1) $f(x,\alpha)$ непр в $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = -\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}$ непр. в $(0;+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}$ сх-ся, т.к. $\left|\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\right| \overset{\text{призн В.}}{\leq} \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ~~$\sim\frac{1}{x^4}$~~ ~~$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4} < \infty$~~

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2} < \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} f\,dx$ сх-ся

3) $\left|\int_0^{+\infty} -\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx\right| \overset{\text{призн В}}{\leq} \int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx < \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx$ сх-ся р-но

$\Rightarrow$ применим теорему о дифференцировании

$$I'_\alpha(\alpha) = -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\sin\alpha x\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \underbrace{\int^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx}_{\text{интеграл Лапласа}} = -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

$$I(\alpha) = I(0) - \frac{\pi}{4} \int_0^\alpha t e^{-|t|} dt = I(0) + \frac{\pi}{4} \left((t+1) e^{-t}\right)\Big|_0^\alpha =$$

$$= I(0) + \frac{\pi}{4} e^{-|\alpha|}(1+|\alpha|) - \frac{\pi}{4}$$

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \underset{t = \operatorname{tg} t}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{4} e^{-|\alpha|}(1+|\alpha|)$$

6.16

(1.4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ – ?

Воспользуемся формулой дополнения: $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ $0<p<1$

$\Rightarrow$ При $p = \frac{1}{2}$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(1.5) $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ – ?

~~по опр~~ Воспользуемся связью эйлеровых интегралов

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{=1}} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$$

(1.6) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \ldots =$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(n - \frac{2i-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$$

(7.5) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2 (x-1)}\, dx = \int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{1}{3}} dt = B\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{=1}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

(9.5) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{1}{x^\beta+1} & x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ dt = -\beta\cdot\frac{x^{\beta-1}}{(1+x^\beta)^2}\,dx & \\ \Rightarrow dx = -\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{dt}{t^2} & \end{array} \right| =$

$$= +\int_0^{1} \frac{1}{\beta}\, t\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}}\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\frac{dt}{t^2} =$$

$$= +\frac{1}{\beta}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\cdot t^{-1}\,dt = -\frac{1}{\beta}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\cdot t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\,dt =$$

$$= +\frac{1}{\beta}\,B\left(1-\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{\alpha}{\beta}\right) = +\frac{1}{\beta}\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)/\underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = +\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi/\beta)}$$

(14.5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx = \quad \alpha > -1;\ \beta > -1$

$= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \sqrt{1-t^2}\,dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = \cancel{\int_0^1 t^\alpha\cdot(1-t)^{\frac{\beta}{2}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}}\,\frac{dt}{(1-t)^{\frac12}(1+t)^{\frac12}}} =$

$$\cancel{= \int_0^1 t^\alpha\cdot(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}(1+t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt}$$

$$= \int_0^1 t^\alpha\cdot(1-t^2)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt = \left|u = t^2\right| =$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}}(1-u)^{\frac{\beta-1}{2}}\cdot\frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-u)^{\frac{\beta-1}{2}}\,du = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2};\ \frac{\beta+1}{2}\right)$$

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

$\boxed{\S\, R}$

253) $V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{R\to\infty}\ln|x|\Big|_{-R}^{R} = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\ln|R|-\ln|-R|\right)=0$

255) $V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x-2}-\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x-1}\right) =$

$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$= \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\ln|x-2|\Big|_{-R}^{R} - \ln|x-1|\Big|_{-R}^{R}\right) = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{R-2}{R+2}\right| - \ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right|\right)=0$

$V.p.\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2} = V.p.\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx =$

$= \lim\limits_{\varepsilon_2\to+\infty}\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\left(\int\limits_{0}^{1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(x)\,dx\right)$

$\int\limits_{0}^{1-\varepsilon_1}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \left(\ln|x-2|-\ln|x-1|\right)\Big|_{0}^{1-\varepsilon_1} = \ln|1+\varepsilon_1| - \ln 2 - \ln|\varepsilon_1| + 0$

$\int\limits_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_1}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \left(\ln|x-2|-\ln|x-1|\right)\Big|_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_1} = \cancel{\ln|\varepsilon_1|} - \ln|\varepsilon_1+1| - \ln|\varepsilon_1-1| +$

$+ \cancel{\ln|\varepsilon_1|}$

$\int\limits_{2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \left(\ln|x-2|-\ln|x-1|\right)\Big|_{2+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} =$

$= \ln|\varepsilon_2-2| - \ln|\varepsilon_1| - \ln|\varepsilon_2-1| + \ln|\varepsilon_1+1|$

2) $V.p.\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{\varepsilon_2\to+\infty}\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\left(\cancel{\ln|\varepsilon_1+1|} - \ln 2 - \cancel{\ln|\varepsilon_1|} - \cancel{\ln|\varepsilon_1+1|} - \ln|\varepsilon_1-1| + \cancel{2\ln|\varepsilon_1|} +\right.$

$\left. + \ln|\varepsilon_2-2| - \cancel{\ln|\varepsilon_1|} - \ln|\varepsilon_2-1| + \ln|\varepsilon_1+1|\right) =$

$$= \lim_{\varepsilon_2\to\infty} \lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(-\ln 2 + \ln\left|\frac{\varepsilon_1+1}{\varepsilon_1-1}\right| + \ln\left|\frac{1-\frac{2}{\varepsilon_2}}{1-\frac{1}{\varepsilon_2}}\right|\right) =$$

$$= -\ln 2$$

5.2

§17

(1.3) $f(x) = \operatorname{sign}(x-a) - \operatorname{sign}(x-b)$, $b > a$

$$f(x) \sim \begin{cases} 2, & \cancel{a<x<b}\ x\in(a;b) \\ 1; & x=a \cup x=b \\ 0; & \cancel{x}\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty) \end{cases}$$

c) $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_a^b 2\cdot\cos y(x-t)\,dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cancel{dy}\cdot\frac{\sin(y(x-b)) - \sin(y(x-a))}{-y}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(y(x-a)) - \sin(y(x-b))}{y}\,dy$$

(3.1) $f(x) = \underbrace{\underbrace{e^{-\alpha|x|}}_{\text{чет}}\ \underbrace{\sin\beta x}_{\text{нечет}}}_{\text{нечет}}$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin\beta t\,\sin yt\,dt =$$

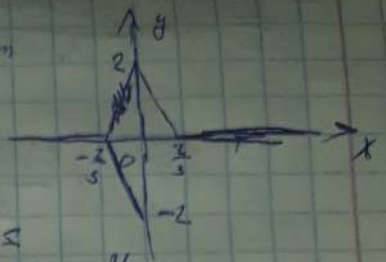
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos((\beta-y)t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos((\beta+y)t)\,dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta-y)^2)} - \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta+y)^2)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\cancel{\alpha^2}+(\beta+y)^2-\cancel{\alpha^2}-(\beta-y)^2}{(\alpha^2+(\beta-y)^2)(\alpha^2+(\beta+y)^2)} = \frac{4\alpha\beta y}{\pi(\alpha^2+(\beta-y)^2)(\alpha^2+(\beta+y)^2)}$$

$$f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\cdot\sin(xy)\,dy}{(\alpha^2+(\beta-y)^2)(\alpha^2+(\beta+y)^2)}$$

5.2 $f(x) = \begin{cases} 2-3x & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 0 & x > 2/3 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ нечет



$f(x)$ нечет: $b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}(2-3t)\sin yt\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2/3}(2-3t)\sin yt\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{2/3}\sin yt\,dt - \frac{6}{\pi}\int_0^{2/3} t\sin yt\,dt =$

$= -\frac{4}{\pi}\left.\frac{\cos yt}{y}\right|_0^{2/3} + \frac{6}{\pi y}(t\cdot\cos yt)\Big|_0^{2/3} - \frac{6}{\pi y}\int_0^{2/3}\cos yt\,dt =$

$= +\frac{4}{\pi y}\left(1-\cos\left(\frac{2}{3}y\right)\right) + \cancel{\frac{4}{\pi y}\cdot\cos\left(\frac{2}{3}y\right)} - \frac{6}{\pi y^2}\sin\frac{2}{3}y =$

$= \frac{2}{\pi y^2}\left(2y - 3\sin\left(\frac{2}{3}y\right)\right)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2y - 3\sin(2/3\,y)}{y^2}\sin xy\,dy$

6.1 $f(x) = e^{-\alpha x},\ x \ge 0,\ \alpha > 0$

продолжаем четно $\Rightarrow a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos yt\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)\,dy}{\alpha^2+y^2}$

7.3 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$

$f(x)$ четная $\Rightarrow$ Фурье-преобразование совпадает с косинус-преобразованием.

$F[f](x) = \mathcal{F}_c f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\cos t\cdot\cos tx\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}(\cos(t+tx) + \cos(tx-t))\,dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(t(x+1))}{x+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(t(x-1))}{x-1}\Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin(\pi(x+1))}{x+1} + \frac{\sin(\pi(x-1))}{x-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \pi x}{x-1} + \frac{\sin \pi x}{x+1} \right) = \cancel{\frac{2 \sin(\pi x)}{}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow F[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2-1}$$

(8.2) $f(x) = e^{-x^2/2}$ – четная

$$F[f](x) = \mathcal{F}_c^f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cdot \cos(tx)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Big[\underbrace{e^{itx - t^2/2}}_{I} + \underbrace{e^{-itx - t^2/2}}_{II} \Big] dt$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2 + itx - \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^2x^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt2} - \frac{ix}{\sqrt2}\right)^2} \cdot e^{-x^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \overbrace{\int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp}^{\text{инт. Эйлера-Пуассона}} =$$

$$p = \left(\frac{t}{\sqrt2} - \frac{ix}{\sqrt2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x^2/2}$$

$$II = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2 - itx - \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^2x^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt2} + \frac{ix}{\sqrt2}\right)^2} \cdot e^{-x^2/2} dt = \frac{1}{2} e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow F[f](x) = e^{-x^2/2}$$

(8.6) $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x e^{-|x|}\right) = g''$, g – нечет

$$F[f](x) = F[g''](x) = (ix)^2 F[g](x) = -x^2 F[g](x)$$

$$F[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-|t|} e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} t e^{t(1-ix)} dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t(1+ix)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\cancel{\frac{t e^{t(1-ix)}}{1-ix} \Big|_{-\infty}^{0}} - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix} dx - \cancel{\frac{t \cdot e^{-t(1+ix)}}{1+ix} \Big|_0^{+\infty}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+ix)}}{1+ix} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{(1-ix)^2} + \frac{1}{(1+ix)^2} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(1+ix)^2 - (1-ix)^2}{(1+x^2)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i x^3}{(1+x^2)^2}$$

14.1 $\hat{f}(y)$ – преобразование Фурье $f(x) = \frac{1}{1+|x|^5}$

Функции f, xf, $x^2 f$, $x^3 f$ абс. инт.:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+|x|^5} dx \right| = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^5} dx = \underbrace{2 \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^5} dx}_{\text{собственный, нет особенностей}} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^5} dx < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

по призн. В сх-ся

$\Rightarrow x^3 f$ абс. инт.

Тогда $F'''[f](y) = -i F[x^3 f](y)$

т.к. $x^3 f$ абс. инт., то $F[x^3 f](y)$ непр. $\Rightarrow F'''[f](y)$ непр.

14.3 $\left(\frac{1}{1+|x|^5}\right)^{(V)}$ – непрерывна и абс. инт-ма

$$F\left[\left(\frac{1}{1+|x|^5}\right)^{V}\right] = i y^5 F\left[\frac{1}{1+|x|^5}\right] \Rightarrow y^5 F\left[\frac{1}{1+|x|^5}\right] = -i F\left[\frac{1}{1+|x|^5}^{V}\right] \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$$

по лемме Римана об осцилляции

$\Rightarrow \hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right)$ при $y \to \infty$

(T2) $f(x)$ - абс. инт ; нечет

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R} f(x)\,dx \right) = \lim_{R\to\infty} \left(-\int_{0}^{R} f(t)\,dt + \int_{0}^{R} f(x)\,dx \right) =$$

$= 0$

Обобщенные функции

24

(60) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ в D'?

1) $(\cos nx, \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\tilde{f}, \varphi)$

$\forall \varphi \in D$ $\quad$ f - искомая

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos nx\, \varphi(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x) dx$

$\to 0$ по т. Римана об осцилляции

$\Rightarrow f(x) = 0$

2) Аналогично $f(x) = 0$

(62 б) $f_n \in L^1_R(-\infty; +\infty)$

1) $\left| \int_a^b f_n(x)\, dx \right|$ - огран. сверху

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & a<b<0,\ b>a>0 \\ 1 & a<0<b \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{D'}{=} \delta(x)$

$\forall \varphi \in D \to (\delta(x), \varphi) = \varphi(0)$

V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f_n(x) \varphi(x) dx = \underbrace{\int\limits_{-R}^{R} f_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx}_{J_2} + \varphi(x_0) \int\limits_{-R}^{R} f_n(x) dx \to \varphi(0)$

$\forall \varepsilon_\varphi > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon_\varphi) > 0 : \forall x: |x| < \delta \to |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon_\varphi$

$J_2 = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int\limits_{-R}^{-\delta} f_n [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int\limits_{\delta}^{R} f_n [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$

$< \varepsilon_\varphi \qquad \to 0 \qquad \to 0$

13 a) $\lim\limits_{a \to +0} \frac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$, D'

$\forall \varphi \in D$: $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2} \varphi(x)\, dx \xrightarrow[a \to +0]{} \pi \cdot \varphi(0)$

$=$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(\xi(x))$

$$= \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a x\, \varphi'(\xi(x))}{a^2+x^2}\,dx = J_1 + J_2$$

$$J_1 = 2\varphi(0)\cdot\int_0^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = 2\varphi(0)\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \pi\cdot\varphi(0)$$

$$|J_2| \leq M\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a|x|}{a^2+x^2}\,dx = aM\int_0^{+\infty} \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} =$$

$$= aM \ln|x^2+a^2|\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} aM\cdot\ln|x^2+a^2|\Big|_0^{R} = \lim_{R\to+\infty} aM\ln\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right) =$$

$R\to+\infty$
но и
$a\to+0$ и а быстрее т.к. это степенная

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ a\to+0}} M\cdot\ln\left((\infty\cdot 0)^{a}\right) = 0$$

(Т3.б) Вычислить:

$$\lim_{a\to+0} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} = \pi\delta(x)$$

$$\forall\varphi\in D \qquad (g_a,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \underbrace{2\varphi(0)\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx}_{\text{интеграл Дирихле}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\xi(x))\sin\left(\frac{1}{a}\cdot x\right)dx}_{\text{по лемме Римана об осциллирующем интеграле} \to 0}$$

$\pi\cdot\varphi(0)$

$a\to+0$

0

$\forall k$ $(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$

73) $|x|$ $\forall \varphi \in D$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x)\, dx$$

$$(f', \varphi) = - (f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} (-x) \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} (+x) \varphi'(x)\, dx \;=$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x)\, dx = x\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x)\, dx$$

$\varphi(+\infty) = 0$
т.к. имеет
компактный
носитель

$$\int_{-\infty}^{0} x \varphi'(x)\, dx = x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (-1) \varphi(x)\, dx + \int_0^{+\infty} 1\, \varphi(x)\, dx = (\mathrm{sgn}(x), \varphi(x))$$

$$|x|' = \mathrm{sign}(x)$$

74) в D' найти $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{ax}{(a^2+x^2)^2}$

$$\underbrace{\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)'}_{\text{произв-ую}} = -\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2}$$

Предел и обобщённых функциях можно менять местами

с) $\lim \dfrac{ax}{(a^2+x^2)^2} = -\dfrac{\pi}{2} \delta'(x)$

(T5)

a) $\underbrace{\left(\frac{x^{2021}}{1+x^{2022}} + \sin^4 x \cos^4 3x + e^{\cos x}\right)}_{a} \delta(x)$

$\forall \varphi \in D: \; (a \cdot \delta(x), \varphi) = (\delta(x), a\varphi) = a(0) \cdot \varphi(0) =$

$= (0 + 0 + e^0) \cdot \varphi(0) = e\,\varphi(0) = (\underline{e \cdot \delta(x)}, \varphi)$

б) $(\underbrace{e^{\sin x} - 2\operatorname{sh} x}_{a})\, \delta'(x)$

$\forall \varphi \in D: \; (a \cdot \delta'(x), \varphi) = (\delta'(x), a\varphi) = -(\delta(x), (a \cdot \varphi)') =$

$= -(a'(0)\varphi(0) + a(0)\varphi'(0)) \Leftrightarrow$

$a(0) = e^0 - 2 \cdot 0 = e$

$a'(0) = \cos(0) \cdot e^0 - 2\operatorname{ch}(0) = 1 - 2 = -1$

$\Leftrightarrow -(-\varphi(0) + \varphi'(0)) = \varphi(0) - \varphi'(0) = (\delta(x) - \delta'(x), \varphi)$

в) $(\underbrace{x e^x}_{a}) \cdot \delta''(x)$

$\forall \varphi \in D: \; (a\delta''(x), \varphi) = (\delta''(x), a\varphi) = (-1)^2 (\delta(x), (a\varphi)'') =$

$= (\delta(x), a''(x)\varphi(x) + 2a'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)a(x)) =$

$= a''(0)\varphi(0) + 2a'(0)\varphi'(0) + \varphi''(0) a(0) = 2\varphi(0) + 2\varphi'(0) =$

$= (2(\delta(x) \mp \delta'(x)), \varphi)$

$a(0) = 0$

$a'(0) = (x+1)e^x = 1$

$a''(0) = (x+2)e^x = 2$

(75) $\ln|x| = f$

$$\forall \varphi \in D \quad (f, \varphi) = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \, \varphi(x)\, dx$$

$$(f', \varphi) = -(f; \varphi') = -V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \cdot \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\, \varphi'(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x) \varphi'(x)\, dx \right]$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\, \varphi'(x)\, dx = \ln(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\, \varphi'(x)\, dx = \ln(-x)\, \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{+x} \varphi(x)\, dx$$

$$\varphi(\pm\infty) = 0$$

т.к. компактный носитель

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln \varepsilon\, \varphi(\varepsilon) - \ln(\varepsilon)\, \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$

$$\ln \varepsilon \cdot \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \right) = 2 \varepsilon\, \varphi'(\xi(\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} 0$$

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right)$$

84

Т $\exists$ $\frac{df}{dx}$ – производная в обычном смысле при $x \neq x_k$

$p_i = [f]_{x_i}$ – величина скачка в x_i $\left(p_i = f(x_i+0) - f(x_i-0) \right)$

$\exists$ $\forall \varphi \in D$ $(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx =$

$$= -\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

Если добавить к точкам x_i $i=\overline{1,n}$ пару точек, находящихся "довольно далеко", чтобы $[x_0, x_{n+1}]$ покрывал $supp\, \varphi$, то искомая ф-ла не изменится, т.к. $[f]_{x_0} = [f]_{x_{n+1}} = 0$

$$-\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\sum_k \left[f(x)\varphi(x)\Big|_{x_k-0}^{x_k+0} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{df}{dx} \varphi(x)\, dx \right] =$$

$$= -\sum_k p_k \cdot \varphi(x_k) + \underbrace{\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{df}{dx} \cdot \varphi(x)\, dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \varphi(x)} = \left(\frac{df}{dx} + \sum_k p_k \delta(x - x_k), \varphi(x) \right)$$

$$= (f', \varphi)$$