

Решения задач экзаменационной контрольной работы по физике

Для студентов 2-го курса МФТИ

31 мая 2018г.

ВАРИАНТ А

1А. (Локишин Г.Р.) Угол между двумя пучками $\delta\varphi$ для длин волн λ и $\lambda + \delta\lambda$ определяется законом дисперсии $n(\lambda)$: $\delta\varphi = \alpha \delta n = \alpha \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda$. Высота призмы $H = \frac{b}{\tan \alpha} \approx \frac{b}{\alpha} = 4$ см. Падающий на призму пучок полностью освещает призму, поэтому угловая расходимость пучка, прошедшего через призму, $\Delta\varphi_0 = \frac{\lambda}{H}$. При фокусировке пучков объективом L возникает дополнительное угловое уширение пучков $\Delta\varphi_1 = \frac{\lambda}{D}$. Полная угловая расходимость пучков $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{H} + \frac{\lambda}{D}$. Предел разрешения определяется критерием Релея $\delta\varphi = \Delta\varphi$:

$$\alpha \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = \lambda \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{D} \right) \Rightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\alpha \frac{dn}{d\lambda}}{\left(\frac{\alpha}{b} + \frac{1}{D} \right)} = \frac{\alpha b D \frac{dn}{d\lambda}}{(\alpha D + b)} = \frac{0,2 \cdot 0,8 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 1 + 0,8} = \boxed{160}$$

Грубую оценку ($D \ll H$) $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \alpha D \frac{dn}{d\lambda} = \boxed{200}$ не считать ошибкой.

2А. (Овчинкин В.А., Судаков О.А.) Если M — порядок интерференции в центре колец, то

$$d \cos \theta = (M - m)\lambda, \quad (d + \Delta d) \cos \theta = (M - m)\lambda + \lambda,$$

$$\Delta d \cos \theta = \lambda \Rightarrow \Delta d = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{0,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx \boxed{0,577 \text{ мкм}}$$

3А. (Локишин Г.Р.) Радиус отверстия при $m = 1$:

$$\frac{D}{2} = \sqrt{m \frac{a \cdot (a/2)}{a + a/2}} \lambda = \sqrt{\frac{1}{3} m a \lambda} = \sqrt{\frac{1}{3} a \lambda}.$$

Найдем положение изображения источника после установки линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{a} \Rightarrow a' = -a/2$, т.е. мнимое изображение источника S' находится на расстоянии $a/2$ слева от линзы. Число зон Френеля m' находим из равенства

$$\frac{D}{2} = \sqrt{m' \frac{(a/2) \cdot (a/2)}{a/2 + a/2}} \lambda = \sqrt{\frac{1}{4} m' a \lambda}, \text{ откуда } m' = \frac{4}{3} m = \frac{4}{3}.$$

После установки линзы изменяется интенсивность в т. P в отсутствие экрана с отверстием. Без линзы поток энергии Φ_0 , идущий от источника в угловой растров φ освещает в плоскости наблюдения круг диаметра $\varphi \left(a + \frac{a}{2} \right) = \frac{3}{2} \varphi a$. После установки линзы тот же поток, идущий теперь от мнимого источника в угловой растров 2φ , освещает в плоскости наблюдения круг диаметра $2\varphi a$.

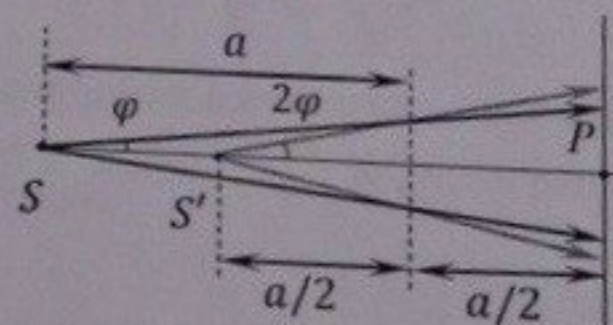
Для интенсивностей в т. P , равных отношению потока энергии к площади соответствующего круга, получим

$$\frac{I_0}{I} = \frac{\Phi_0}{\left(\frac{3}{2} \varphi a \right)^2} \cdot \frac{(2 \varphi a)^2}{\Phi_0} = \frac{16}{9} \Rightarrow A = \frac{3}{4} A_0.$$

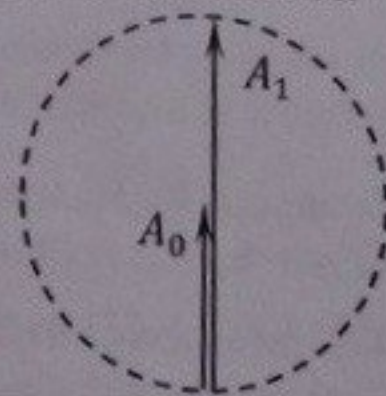
До установки линзы (см. рис.) $A_1 = 2 A_0$. После установки линзы (см. рис.) $A_2 = 2 A \sin 60^\circ = \sqrt{3} A = \frac{3\sqrt{3}}{4} A_0$. Отношение интенсивностей

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{27}{16} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{27}{64}}$$

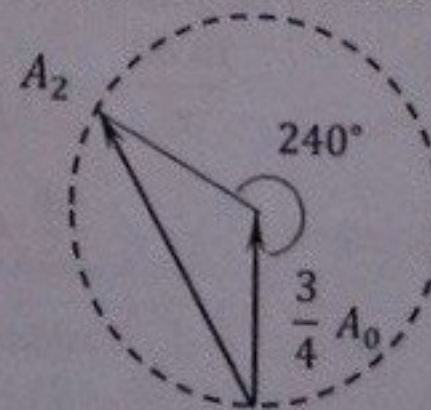
4А. (Данилин В.А., Попов П.В.) Плоскость поляризации волны поворачивается из-за различия фаз φ_1 и φ_2 , набираемых волнами с правой и левой круговой поляризацией по ходу распространения волны. Показатель преломления



До установки линзы



После установки линзы



$$n_{1,2} = \sqrt{1 - \frac{v_p^2}{v(v \pm v_H)}} \approx 1 - \frac{v_p^2}{2v(v \pm v_H)} \approx 1 - \frac{v_p^2}{2v^2} \mp \frac{v_p^2 v_H}{2v^3}.$$

Угол поворота плоскости поляризации:

$$\theta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \pi \frac{v_H}{c} (n_2 - n_1) = \frac{\pi v_H v_p^2}{c v^2}, \quad \rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{\Delta \theta v^2 c}{\pi v_H h}} \approx \left(\frac{0,03 \cdot 10^{18} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{10 \text{ МГц}}.$$

5А. (Локишин Г.Р., Попов П.В.) Функция пропускания решётки 2 представима в виде $t_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_p(x)$, где $t_p(x)$ — функция пропускания обычной дифракционной решётки с периодом d и $N = D/d$ щелями размером b . Амплитуда для картины дифракции на такой решётке пропорциональна

$$A_p \propto b \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2} k b \sin \theta)}{\frac{1}{2} k b \sin \theta} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2} k N d \sin \theta)}{\sin(\frac{1}{2} k d \sin \theta)}$$

В главном максимуме ($\theta \rightarrow 0$) амплитуда $A_{p0} \propto bN$.

Постоянное слагаемое ответственно за дифракцию на щели шириной $D = Nd$:

$$A_{\text{щ}} \propto D \frac{\sin(\frac{1}{2} k D \sin \theta)}{\frac{1}{2} k D \sin \theta}.$$

В главном максимуме ($\theta \rightarrow 0$) имеем $A_{\text{щ}0} \propto D = Nd$.

Таким образом, в главном максимуме решётки 2 имеем амплитуду

$$A_{20} = \frac{1}{2} A_{p0} + \frac{1}{2} A_{\text{щ}0} \propto \frac{1}{2} (d + b) N.$$

Функции пропускания $t_1(x)$ и $t_2(x)$ связаны соотношением $t_1(x) = 1 - t_2(x)$, т.е. решётка $t_2(x)$ является дополнительным экраном к решётке $t_1(x)$. Поэтому в главном максимуме имеем

$$A_{10} = A_{\text{щ}} - A_{20} \propto Nd - \frac{1}{2} (b + d) N = \frac{1}{2} (d - b) N.$$

Таким образом,

$$\frac{A_{20}}{A_{10}} = \frac{d + b}{d - b} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{I_{20}}{I_{10}} = \boxed{\frac{36}{25}}.$$

Альтернативно: непосредственно из метода Рэлея для задачи дифракции находим амплитуду в нулевом максимуме: $A_0 \propto \int_{-D/2}^{D/2} t(x) dx = N \int_0^d t(x) dx$. Следовательно,

$$\frac{A_{20}}{A_{10}} = \frac{\frac{1}{2} (d - b) + 1 \cdot b}{\frac{1}{2} (d - b) + 0 \cdot b} = \frac{d + b}{d - b} = \frac{6}{5}.$$

ВАРИАНТ Б

1Б. (Локишин Г.Р.) Направления на m -ый максимум для близких спектральных линий λ и $\lambda + \delta\lambda$: $d \sin \varphi = m\lambda$ и $d \sin(\varphi + \delta\varphi) = m(\lambda + \delta\lambda)$ отличаются на $\delta\varphi \approx m \delta\lambda / d$ при $\varphi \ll 1$. Угловая расходимость каждого из пучков (для λ и $\lambda + \delta\lambda$) из-за дифракции на решётке: $\Delta\varphi_0 = \frac{\lambda}{Nd}$. Ограничение, обусловленное размерами линзы L , приводит к дополнительному уширению $\Delta\varphi_1 = \frac{\lambda}{d}$, поэтому полная угловая ширина: $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd} + \frac{\lambda}{d}$. По критерию Релея предел разрешения $\delta\varphi = \Delta\varphi$:

$$\frac{m \delta\lambda}{d} = \lambda \left(\frac{1}{Nd} + \frac{1}{d} \right) \Rightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m}{\left(\frac{1}{Nd} + \frac{1}{d} \right) d} = \frac{mNd}{D + Nd} = \frac{1 \cdot 600 \cdot 1}{1 + 600 \cdot 0,015} = \boxed{60}.$$

Грубую оценку $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{mD}{d} = \frac{1}{0,015} \approx \boxed{66,7}$ не считать ошибкой.

2Б. (Овчинкин В.А., Судаков О.А.) Если M — порядок интерференции в центре колец, то $d \cos \theta = (M - 3)\lambda$, $(d + \Delta d) \cos \theta = (M - 2)\lambda$, откуда

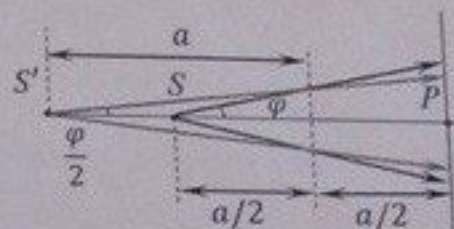
$$\frac{d + \Delta d}{d} = \frac{M - 2}{M - 3} \Rightarrow 1 + \frac{\Delta d}{d} = 1 + \frac{1}{M - 3} \Rightarrow M = \frac{d}{\Delta d} + 3 = \boxed{103}.$$

3Б. (Локшин Г.Р) Радиус отверстия при $m = 2/3$:

$$\frac{D}{2} = \sqrt{m \frac{(a/2) \cdot (a/2)}{a/2 + a/2} \lambda} = \sqrt{\frac{1}{4} m a \lambda} = \sqrt{\frac{1}{6} a \lambda}.$$

Найдем положение изображения источника после установки линзы: $\frac{1}{a/2} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} \Rightarrow a' = -a$, т.е. мнимое изображение источника S' находится на расстоянии a слева от линзы. Теперь число зон Френеля m' найдем из равенства

$$\frac{D}{2} = \sqrt{m' \frac{(a/2) \cdot a}{a/2 + a} \lambda} = \sqrt{\frac{1}{3} m' a \lambda}, \text{ откуда } m' = \frac{3}{4} m = \frac{1}{2}.$$



После установки линзы изменяется интенсивность в т. P в отсутствие экрана с отверстием. Без линзы поток энергии Φ_0 , идущий от источника в угловой растров φ освещает в плоскости наблюдения круг диаметра φa . После установки линзы тот же поток, идущий теперь от мнимого источника в угловой растров $\varphi/2$, освещает в плоскости наблюдения круг диаметра

$$\frac{\varphi}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) = \frac{3}{4} \varphi a.$$

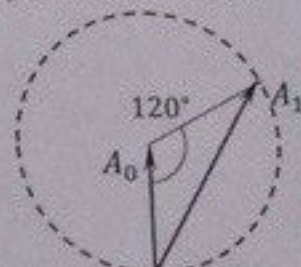
Для интенсивностей в т. P , равных отношению потока энергии к площади соответствующего круга, получим

$$\frac{I_0}{I} = \frac{\Phi_0}{(\varphi a)^2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4} \varphi a \right)^2}{\Phi_0} = \frac{9}{4} \Rightarrow A = \frac{4}{3} A_0.$$

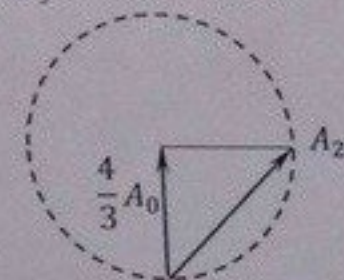
До установки линзы (см. рис.) $A_1 = 2 A_0 \sin 60^\circ = \sqrt{3} A_0$. После установки линзы (см. рис.) $A_2 = \frac{4}{3} A_0 \sqrt{2}$. Отношение интенсивностей

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{27}.$$

До установки линзы



После установки линзы



4Б. (Локшин Г.Р., Филатов Ю.Н.) Толщина пластинки должна быть в " λ " для одной из спектральных компонент: $\frac{2\pi}{\lambda_1} (n_0 - n_e) d = 2\pi m$, и в " $\lambda/2$ " для другой:

$\frac{2\pi}{\lambda_2} (n_0 - n_e) d = 2\pi(m + \ell) + \pi$, где m и ℓ — целые числа.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2m}{2m + 2\ell + 1}.$$

При $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 550$ нм для m получим уравнение: $m = 10\ell + 5$, которое имеет минимальное решение при $m = 5$, $\ell = 0$. В этом случае через систему полностью проходит лишь одна спектральная компонента λ_1 . При этом минимальная толщина пластинки составит:

$$d = \frac{m\lambda_1}{\Delta n} = \frac{5 \cdot 0,5}{0,0091} \approx \boxed{275 \text{ мкм}}.$$

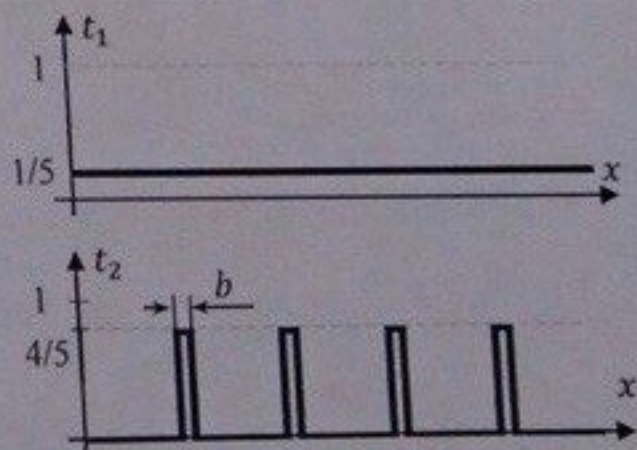
Через систему полностью проходит лишь одна спектральная компонента λ_1 , λ_2 без потери интенсивности пройти не может. Действительно, в этом случае уравнение для m получается перестановкой индексов "1" и "2" у спектральных компонент: $m = -11\ell - 5,5$, которое в целых числах не имеет решений.

5Б. (Локшин Г.Р) Функцию пропускания экрана со щелями можно представить в виде суммы двух слагаемых $t_1 = \frac{1}{5}$ (константа) и

$$t_2 = \frac{4}{5} t_p(x):$$

$$t(x) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} t_p(x) \quad (1),$$

где $t_p(x)$ — функция пропускания решётки со щелями шириной b (см. рис.). Соответственно, дифракционная картина (комплексная амплитуда) есть сумма двух дифракционных картин: одна из них —



дифракция на щели ширины D , прикрытая однородным экраном с прозрачностью $t_1 = 1/5$, амплитуда которой пропорциональна

$$A_1 \propto \frac{1}{5} D \left(\frac{\sin(\pi D/\lambda \sin \theta)}{\pi D/\lambda \sin \theta} \right),$$

другая — дифракция на решётке $\frac{4}{5}t_p(x)$ с шириной щелей b , амплитуда которой пропорциональна

$$A_2 \propto \frac{4}{5} b \left(\frac{\sin(\pi b/\lambda \sin \theta)}{\pi b/\lambda \sin \theta} \right) \left(\frac{\sin(N \pi d/\lambda \sin \theta)}{\sin(\pi d/\lambda \sin \theta)} \right).$$

Для главного максимума $\sin \theta = 0$ и с точностью до константы амплитуды A_1 и A_2 принимают значения:

$$f_{10} = \frac{1}{5} D, f_{20} = \frac{4}{5} b N. \text{ С учетом знака "+" в выражении (1) для суммарной волны получим}$$

$$f_0 = f_{10} + f_{20} = \frac{D + 4Nb}{5}.$$

Для максимума 1-ого порядка $\sin \theta = \lambda/d$ и с точностью до константы амплитуды A_1 и A_2 принимают значения: $f_{11} = 0, f_{21} = \frac{4}{5} b \frac{\sin(\pi b/d)}{\pi b/d} N \approx \frac{4}{5} b N$ (здесь использовано, что $\frac{b}{d} = \frac{bN}{D} = 0,1 \ll 1$)

Для суммарной волны получим

$$f_1 = f_{11} + f_{21} = \frac{4Nb}{5}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{f_0}{f_1} = 1 + \frac{D}{4bN} = 1 + \frac{2}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 200} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{I_0}{I_{11}} = \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = \left[\frac{49}{4} \right] = 12,25.$$

Вниманию преподавателей!

Инструкция для проверяющих

За задачу ставится полных 2 балла, если задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины. В противном случае балл за задачу определяется согласно таблице:

1,5 балла	Ход решения в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания (арифметические ошибки, не влияющие на порядок или знак величины; ошибки в выкладках, не влияющие на ход решения и т. п.).
1 балл	Задача решена частично, либо решение содержит грубые ошибки (напр., имеются вычислительные ошибки, влияющие на ход решения; ошибки в размерности; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т. п.), но все основные законы корректно применены к задаче.
0,5 балла	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении (сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена).
0 баллов	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

К баллам за письменную работу добавляются баллы за сданные задания:

отл: + 2 б./задание; хор: + 1 б./задание; удовл: 0 б./задание; не сдано: - 3 б./задание.

Итоговая сумма округляется до целых. Результат определяет максимальную оценку на устном экзамене (минимальная оценка всегда «неуд(1)»). Примеры заполнения:

1	2	3	4	5	Σ
0,5	1,0	1,5	1,0	1,0	5,0

Задание		Итог
I	II	
+1	-3	3

1	2	3	4	5	Σ
1,0	2,0	1,5	2,0	2,0	8,5

Задание		Итог
I	II	
+1	+2	12

В примере слева максимально возможная оценка на устном экзамене — удовл(3), справа — отл(10). Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru.

Обсуждение письменного экзамена состоится в понедельник 04.06.2018 в 8 час. 40 мин. в Главной Физической аудитории.