УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2022 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школы: **ФПМИ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 39 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 апреля 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
2. Комплексная дифференцируемость функции комплексного переменного и условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной в области. Понятие гармонической функции двух переменных, связь с регулярной функцией.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, экспонента и тригонометрические, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви логарифмической функции и корня n-ой степени.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.
5. Лемма Гурса и интегральная теорема Коши для односвязной области. Обобщенная интегральная теорема Коши по границе области (доказательство для звездной области).
6. Интеграл Коши и его свойства. Интегральная формула Коши и бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Интегральная формула Коши для производных.
7. Степенные ряды, первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
8. Нули регулярной функции и теорема единственности. Теорема Морера и теорема о стирании разреза. Взаимосвязь первообразных регулярной функции.
9. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность.
10. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана.
11. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
12. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$ в односвязной области, не содержащей нуля.

13. Теорема о существовании регулярной ветви логарифма регулярной в области функции. Теорема о существовании регулярной ветви корня регулярной в области функции. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.
14. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.
15. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных дробей. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей.
16. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля регулярной функции и лемма Шварца. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Теорема о среднем для гармонической функции.
17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Конформность в расширенной комплексной плоскости.
18. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства: конформность, групповое, круговое и принцип симметрии.
19. Конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Теорема о соответствии границ при конформном отображении (без доказательства).
20. Принцип симметрии при конформных отображениях.
21. Классическая и общая задачи Дирихле на плоскости. Теорема единственности решения общей задачи Дирихле. Конформная инвариантность гармонической функции. Интеграл Пуассона и решение общей задачи Дирихле в круге.
22. Аналитическое продолжение. Аналитические продолжения элементов с помощью конечной цепочки областей и вдоль пути, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие о (полной) аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства).
23. Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Теорема Коши–Адамара.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2022.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.
3. *Горяйнов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.

Дополнительная

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Санкт-Петербург : Лань, 2002.
5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч, 1, 2. — Москва : Наука, 1985; Санкт-Петербург : Лань, 2004.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 5 октября)

I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

§1: 1(4); <u>5(4)</u>; 6; <u>10(5)</u>; 11;16.

§2: 1(4); 12.

II. Элементарные функции. Ряды

§3: <u>12(2)</u>; <u>13(2)</u>; 17(3,4); 19.

§4: 6(2); 7(2).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: <u>1(4)</u>; 7(6); 11; 17(6,7,8).

T.1. Найти области, в которых функция

$$f(z) = 2|xy| + i|x^2 - y^2|, \qquad z = x + iy,$$

является регулярной.

T.2. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, является регулярной в области G функцией. Докажите, что $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$ во всех точках области G.

IV. Ряд Тейлора

§7: 2(4); 3(8,13); 4; 6(3,6); 7; 12(1).

T.3. Найти все значения 3^i, i^i, $(-1)^i$.

V. Теорема единственности

§9: 2(5,7,8); 5.

T.4. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено равенство $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f - полином степени меньше n.

T.5*. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть для любой точки $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Является ли f полиномом?

VI. Ряд Лорана

§11: 1(1); 3(3); 4(4); 5(5); 9(2); 10(7).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: 8(4,7); 15(1,11); 17(5); 20(2,5).

T.6. Пусть задана регулярная в кольце $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ функция f такая, что найдутся действительные числа $A > 0$, $B > 0$ и $\alpha \in [0,1]$, при которых справедливы неравенства

$$\frac{A}{|z|^{\alpha}} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall z \in G.$$

Определить при различных α тип особой точки 0 функции f.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3—9 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 1(3); 3(1); 5(5,6).
§14: 1(5); 2(3,8,17,22); 3(2).
§23: 1(3,6); 2(7,15,19).

T.1. Вычислить интегралы

$$a)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x+i)}{x^2-2x+5}dx;\quad b)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-4x+1-4i}dx$$

T.2. Используя равенство $\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-ix^2}dx$.

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 3; 5; 6*.

§17: 4, 6,7, 8*.

§18: 9(1,2); 20(2); 24; 25; 27; 35; 37*; 38*..

T.3*. Доказать, что функция

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{z}}\,dt,\quad \mathrm{Re}z>0,$$

является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{\pi z}\}$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=1$ и указать радиус сходимости этого ряда.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 1(4); 5; 10; 24; 25*; 42; 45*; 48*.

§23: 5(3,4,7); 6(4,6,8); 7(3,7*).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(3,6,7,10); 4.

T.4. Найти число корней многочлена $2z^6+2z^3-5z-2$ в круге $|z|<1$.

T.5. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1}\sin\left(\frac{iz^3}{4z^3-2iz^2+1}\right)dz.$$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 декабря)

I. Конформные отображения

§26: 3; 4; 10.

§27: <u>3(2)</u>; 6(2); 7(3); 8(<u>2</u>,4); 9(2).

§28: 5 (рис.28.31, 28.34, <u>28.38</u>, 28.42; 28.45); 10 (рис. <u>28.51</u>, 28.53, 28.57; <u>28.61</u>); 12 (рис. 28.65); <u>13</u>; 19 (рис. 28.71, <u>28.75</u>, 28.81, <u>28.84</u>, 28.85); 20 (рис. 28.89).

§29: 3(рис.29.19, <u>29.21</u>); 4^*; 5.

II. Задача Дирихле

<u>Т.1</u>. Решить классическую задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

а) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}$;

б) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{4+5\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$.

Т.2*. Решить общую задачу Дирихле в области $G = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, \quad z \in G; \quad u|_{\operatorname{Im} z = 0} = 0,\ u|_{|z|=1} = 1.$$

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин