ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

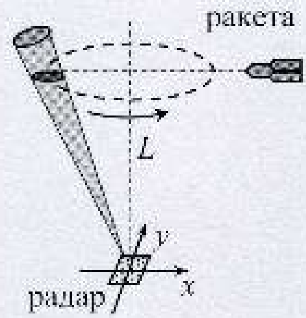
Для студентов 2-го курса МФТИ *11 июня 2015г.*

ФИО	№ группы

ВАРИАНТ А

1	2	3	4	5	Σ	оценка

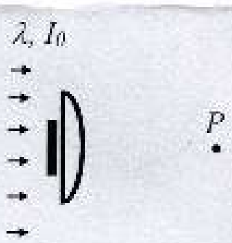
1А. Фазированная антенная решётка (радар) представляет собой неподвижную квадратную двумерную решётку излучателей периода d, излучающую радиоволны длиной $\lambda = 10$ см (размер решётки $D = 10$ м). Для управления лучом радара (направлением главного дифракционного максимума) начальные фазы излучающих элементов φ меняются по закону $\varphi(x,y,t) = \frac{\varphi_0 x}{\lambda}\sin\Omega t + \frac{\varphi_0 y}{\lambda}\cos\Omega t$, где $\varphi_0 = \frac{\pi}{10}$, $\Omega = 20\pi$ рад/с. Оцените, с какой минимальной скоростью v должна двигаться ракета, чтобы, пролетая через центр зоны облучения на расстоянии $L = 100$ км от радара, иметь шанс остаться незамеченной?



2А. При наблюдении колец Ньютона в отражённом свете через микроскоп было обнаружено, что если навести микроскоп точно на верхнюю поверхность плоской стеклянной пластинки, то можно разглядеть $m_1 = 100$ тёмных колец, а если после этого поднять тубус микроскопа на $\delta = 1$ мм, то можно разглядеть только $m_2 = 10$ колец. Оцените ширину спектра $\Delta\lambda$ и угловой размер θ источника излучения, если известно, что средняя длина волны $\lambda = 400$ нм, а радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 2{,}5$ см.

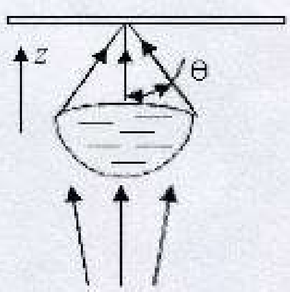
Указание. Для оценки можно пренебречь преломлением света на изогнутой поверхности линзы и считать, что в микроскоп наблюдается интерференция плоской волны, отражённой от пластинки, и сферической волны, отражённой от выпуклой поверхности линзы.

3А. Круглый диск диаметра d, изготовленный из поляроидной плёнки, освещается нормально падающей плоской волной естественного света (длина волны λ, интенсивность света I_0). Во сколько раз изменится интенсивность света в точке P, если вплотную к диску поместить собирающую линзу диаметра $2d$, и при этом точка P окажется в фокусе линзы? Диск закрывает 1,5 зоны Френеля для точки P и для разрешённого направления вносит фазовую задержку, кратную 2π. Толщина линзы на краях равна нулю.



4А. В спектрах рентгеновской дифракции на тонких кристаллических пленках, помимо выраженных брэгговских пиков, наблюдаются слабые осцилляции, связанные с конечной толщиной пленки (осцилляции Киссига). Определите по представленной зависимости интенсивности отраженного рентгеновского излучения от угла скольжения: 1) толщину пленки; 2) расстояние между атомными плоскостями в направлении роста пленки. Длина волны рентгеновского излучения $\lambda = 1{,}54$ Å. Учтите, что показатель преломления рентгеновского излучения в веществе близок к единице.

5А. В оптических Blu-ray приводах для острой фокусировки излучения полупроводникового лазера на диск используются светосильные асферические линзы, у которых отношение квадратов диаметра и фокусного расстояния ~1. Они обеспечивают почти идеальный сферический фронт сходящейся волны, но имеют малый продольный (вдоль оси z) размер фокального пятна. Найти, с какой точностью нужно поддерживать расстояние между линзой и поверхностью диска, чтобы еще не попасть в первый минимум (при продольном смещении) интенсивности световой волны. Числовая апертура $\sin\theta = 0{,}85$, длина волны $\lambda = 0{,}405$ мкм, амплитуда световой волны одинакова во всех точках волнового фронта после линзы.



ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

Для студентов 2-го курса МФТИ

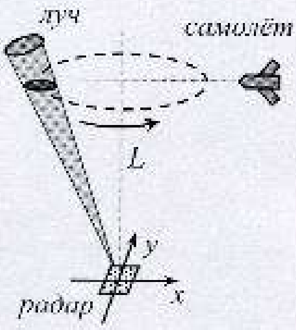
11 июня 2015г.

ФИО	№ группы

ВАРИАНТ Б

1	2	3	4	5	Σ	оценка

1Б. Фазированная антенная решётка (радар) представляет собой неподвижную квадратную двумерную решётку излучателей периода d, излучающую радиоволны длиной $\lambda = 10$ см (размер решётки $D = 10$ м). Для управления лучом радара (направлением главного дифракционного максимума) начальные фазы излучающих элементов φ меняются по закону $\varphi(x, y, t) = \frac{\varphi_0 x}{\lambda}\sin\Omega t + \frac{\varphi_0 y}{\lambda}\cos\Omega t$, где $\varphi_0 = \frac{\pi}{10}$, $\Omega = 20\pi$ рад/с. Оцените, сколько раз самолёт, пролетающий с постоянной скоростью $v = 500$ м/с через центр зоны облучения на расстоянии $L = 100$ км от радара, окажется в области луча радара.



2Б. Для наблюдения колец Ньютона в отражённом свете используется источник света с угловым размером $\theta = 5\cdot10^{-2}$ рад, средней длиной волны $\lambda = 450$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 9$ нм. Кольца наблюдают с помощью микроскопа, сфокусированного на верхнюю поверхность стеклянной пластинки, на которой лежит плосковыпуклая линза с радиусом кривизны выпуклой поверхности $R = 5$ см.

1. Какое максимальное число тёмных колец m_{max} можно увидеть в данных условиях?
2. Оцените, при каком максимальном смещении δ тубуса микроскопа по вертикали количество видимых колец ещё не будет уменьшаться?

Указание. Для оценки можно пренебречь преломлением света на изогнутой поверхности линзы и считать, что в микроскоп наблюдается интерференция плоской волны, отражённой от пластинки, и сферической волны, отражённой от выпуклой поверхности линзы.

3Б. Плоскопараллельная прозрачная пластинка толщины d с показателем преломления n освещается параллельным, нормально падающим пучком света с длиной волны λ и интенсивностью I_0. В пластинке просверлено маленькое отверстие в 1,5 зоны Френеля для точки наблюдения P, лежащей на оси отверстия (см. рис.1). Отверстие перегорожено непрозрачным диском. Найти изменение интенсивности в т. P, если диск заменить линзой, вставленной в отверстие так, что точка P оказывается в фокусе линзы (толщина линзы на краях равна нулю, см. рис.2). При какой толщине пластинки интенсивность в т. P максимальна? Найти I_{max}.

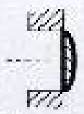


Рис.2

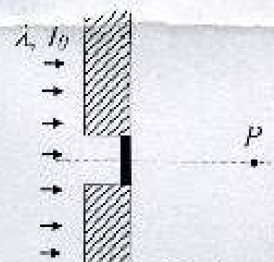
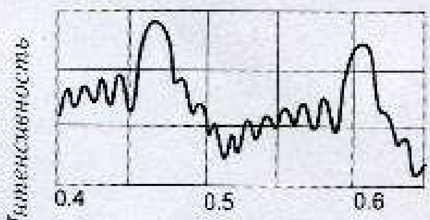
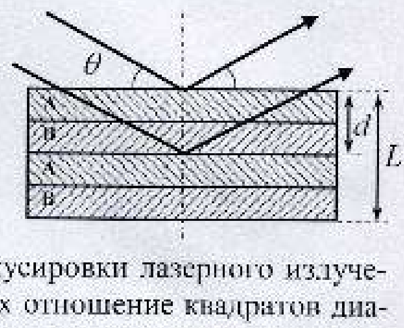


Рис.1

4Б. Наблюдается дифракция рентгеновского излучения ($\lambda = 1{,}54$ Å) на многослойной структуре, составленной из чередующихся слоев материалов А и В. Толщины слоев t_A и t_B различны, межплоскостные расстояния в материалах А и В также различны. При этом на зависимости интенсивности отраженного излучения от угла скольжения наблюдаются пики, связанные с искусственной периодичностью структуры и конечной толщиной всей многослойной пленки. Определить период структуры $d = t_A + t_B$, а также толщину многослойной пленки L. Учтите, что показатель преломления рентгеновского излучения в веществе близок к единице, и в рассматриваемом диапазоне углов скольжения структура дифракционной картины, связанная с отражением от отдельных атомных плоскостей, никак не проявляется.





5Б. В экспериментах по лазерному термоядерному синтезу для острой фокусировки лазерного излучения на мишень используются светосильные асферические линзы, у которых отношение квадратов диаметра и фокусного расстояния ~1. Они обеспечивают почти идеальный сферический фронт сходящейся волны, но имеют малый продольный размер фокального пятна. Найти, насколько можно сместить мишень в продольном направлении от фокальной плоскости, чтобы еще не попасть в первый минимум интенсивности световой волны? Диаметр пучка $D = 6$ см, фокусное расстояние $F = 10$ см, длина волны $\lambda = 0{,}53$ мкм, амплитуда световой волны одинакова во всех точках волнового фронта.

Решения задач экзаменационной контрольной работы по физике

Для студентов 2-го курса МФТИ *11 июня 2015г.*

ВАРИАНТ А

1А. (Данилин В.А.) Чтобы направление луча радара θ_x указывало на максимум интенсивности вдоль координаты x, необходимо, чтобы разность фаз излучающих элементов решётки, находящихся на расстоянии d, была скомпенсирована начальной разностью фаз их излучения: $\frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta_x = \varphi_0 \frac{d}{\lambda} \sin\Omega t$, $\Rightarrow \sin\theta_x(t) = \frac{\varphi_0}{2\pi}\sin\Omega t$. Учитывая, что $\frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{1}{20}$, синус угла можно заменить самим углом. Для x-координаты центра луча в плоскости $z=L$ получим: $x_c \approx L\,\theta_x = \frac{\varphi_0}{2\pi} L \sin\Omega t$.

Аналогично находится угол θ_y, указывающий на максимум интенсивности вдоль координаты y: $\theta_y(t) \approx \frac{\varphi_0}{2\pi}\cos\Omega t$. Для y-координаты центра луча в плоскости $z=L$ получим: $y_c \approx L\,\theta_y = \frac{\varphi_0}{2\pi} L\cos\Omega t$.

Т.о., центр луча в плоскости $z=L$ будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{\varphi_0}{2\pi} L = 5$ км со скоростью $v_{луч} \approx \Omega R = 314$ км/с.

Область пересечения луча с плоскостью $z=L$ представляет собой круг (малые углы отклонения), радиус которого определяется дифракционным углом $r = \frac{\lambda}{D} L = 1$ км.

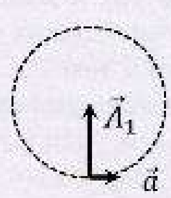
Для того, чтобы ракета пролетела незамеченной, она должна за время оборота луча успеть пролететь поперечный размер луча, так что $v_{min} = \frac{2r}{T} = \frac{r}{\pi}\Omega = \frac{\lambda}{D}\frac{L\Omega}{\pi} = 20$ км/с.

2А. (Виноградов С.В.) m_1 определяется максимальным порядком интерференции $m_{max} = \lambda/\Delta\lambda$, откуда $\Delta\lambda = \lambda/m_1 = 4$ нм. Радиусы тёмных колец $r_m = \sqrt{mR\lambda}$, расстояние между ними $\Delta r_m \approx \sqrt{R\lambda/4m}$, причём Δr_m связано с углом α схождения интерферирующих волн на данном радиусе формулой $\Delta r_m = \lambda/\alpha$, откуда $\alpha = \lambda/\Delta r_m$, а расстояние между интерферирующими лучами вдоль фронта волны от источника $l = \alpha\cdot\delta$. Это расстояние должно быть меньше радиуса пространственной когерентности: $l = \alpha\cdot\delta < L_{ког} = \lambda/\theta$, откуда получаем $\theta = \frac{\sqrt{\lambda R/m_2}}{2\delta} \approx 1{,}5\cdot 10^{-2}$ рад.

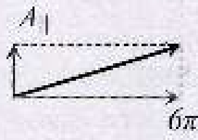
3А. (Локшин Г.Р.) 1. <u>Без линзы.</u> Для составляющей, параллельной разрешённому направлению поляроида (её интенсивность равна $\frac{1}{2}I_0$) диск прозрачен, интенсивность в т. P равна $\frac{1}{2}I_0$. Для ортогональной составляющей диск непрозрачен, в т. P возникает пятно Пуассона, интенсивность в пятне равна $\frac{1}{2}I_0$. Результирующая интенсивность – сумма интенсивностей ортогональных компонент – равна I_0.

2. <u>С линзой.</u> Линза перекрывает количество зон Френеля

$$m = \frac{(2r)^2}{\lambda z} = 4\frac{r^2}{\lambda z} = 4m_0 = 6.$$



Линза «выстраивает» цепочку векторов, составляющих 6 зон спирали Френеля, длиной $6\pi A_{\|}$, в коллинеарную цепочку векторов. Составляющая, параллельная разрешённому направлению поляроида, имеет амплитуду $A_{\|} = \sqrt{I_0/2}$. Соответствующий вектор совпадает по направлению с вектором $\vec{a}$, последним в цепочке, составляющей 6 зон Френеля. Свет с той же поляризацией, проходящий вне линзы (через область $|\rho| > d$) создаёт колебание $\vec{A}_1$: $|\vec{A}_1| = A_{\|}$.



Итак, интенсивность колебания

$$I_{\|} = (6\pi A_{\|})^2 + A_{\|}^2 = (6\pi+1)^2 A_{\|}^2 = (6\pi+1)^2\, I_0/2\,.$$

Для ортогональной компоненты ($A_\perp = A_{\|} = \sqrt{I_0/2}$) из цепочки длиной $6\pi A_\perp$ диск «отрезает» вклад $1{,}5\pi A_\perp$ полутора зон, поэтому

$$I_\perp = (6\pi A_\perp - 1{,}5\pi A_\perp)^2 + A_\perp^2 = (4{,}5\pi+1)^2\, I_0/2\,.$$

Результирующая интенсивность

$$I = I_{\|} + I_{\perp} = (6\pi + 1)^2 \frac{I_0}{2} + (4{,}5\pi + 1)^2 \frac{I_0}{2} = \frac{I_0(8+84\,\pi+225\,\pi^2)}{8},$$

$$\frac{I\,(\text{с линзой})}{I\,(\text{без линзы})} = \frac{8+84\,\pi+225\,\pi^2}{8} \approx 312\,.$$

4А. (Свинцов Д.А.)
Межплоскостное расстояние определяем по углам, соответствующим брэгговским пикам

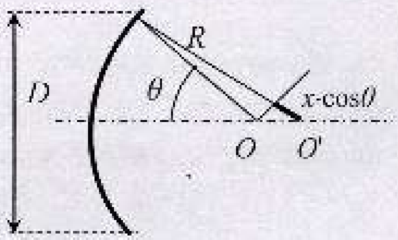
$$2d\sin\theta = m\lambda \;\Rightarrow\; d = \frac{\lambda}{2(\sin\theta_{m+1} - \sin\theta_m)} \approx \frac{\lambda}{2(\theta_{m+1} - \theta_m)} = \frac{1.54\ \text{Å}}{2(0.3 - 0.15)} = 5\ \text{Å}\,.$$

Осцилляции Киссига являются результатом интерференции волн, отраженных от верхней и нижней граней пленки. Условие максимума для них имеет вид, аналогичный условию Брэгга-Вульфа, но межплоскостное расстояние заменено на толщину пленки L. Угловое же расстояние между максимумами этих осцилляций в 7 раз меньше расстояния между брэгговскими пиками (на рисунке между брэгговскими пиками 6 малых максимумов). Поэтому

$$L \approx \frac{7\,\lambda}{2(\theta_{m+1} - \theta_m)} = 35\ \text{Å} = 3{,}5\ \text{нм}.$$

Причина слабой выраженности осцилляций Киссига по сравнению с брэгговскими пиками состоит в том, что здесь в фазе находятся только две волны, отраженные от верхней и нижней сторон пленки. В брэгговских пиках в фазе находятся волны, отраженные от всех атомных плоскостей. Ситуация аналогична главным и побочным максимумам дифракционной решетки.

5А. (Петухов В.А.) Площадь сферической поверхности, ограниченной конусом с углом 2θ при вершине, равна $2\pi R^2(1 - \cos\theta)$, т.е. пропорциональна $(1 - \cos\theta)$. В этой формуле $R = F$ – фокусное расстояние линзы. Разность оптических путей от сферической поверхности до точки O', смещенной на малое расстояние x относительно центра сферы O, для центрального и краевого лучей равна $\Delta = (R + x) - (R + x\cdot\cos\theta) = x\,(1 - \cos\theta)$, также пропорциональна $(1 - \cos\theta)$. Следовательно, применима техника зон Френеля. Минимум амплитуды будет, когда для точки O' сферическая поверхность волнового фронта занимает 2 зоны, или



$$\Delta = \lambda \to x = \lambda/(1 - \cos\theta) = \lambda/[1 - (1 - \sin^2\theta)^{1/2}] = 0{,}86\ \text{мкм}.$$

Менее точно задачу можно решить, используя стандартную формулу для числа зон Френеля $m = (D^2/4\lambda)(1/a + 1/b)$, полученную для малых углов $\sin\theta = D/2R \ll 1$, где D – диаметр линзы. Подставляя $m = 2$, $a = R$, $b = -(R + x)$, получим $x = 8\lambda R^2/D^2 = 8\lambda F^2/D^2 = 2\lambda/\sin^2\theta = 1{,}12$ мкм.

Примечание: В решении не учитывается, что при больших углах θ вклад от второй зоны Френеля будет меньше, чем от первой, потому что в точке наблюдения векторы электрического поля от волн, пришедших от разных участков сферического фронта, становятся неколлинеарными. Минимум будет при том же x, но сигнал в минимуме не равен 0. Грубая оценка показывает, что интенсивность в минимуме составляет несколько процентов от интенсивности в фокусе.

ВАРИАНТ Б

1Б. (Данилин В.А.) Центр луча радар в плоскости $z = L$ будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{\varphi_0}{2\pi} L = 5$ км со скоростью $v_{\text{луч}} \approx \Omega R = 314$ м/с. (см. задачу 1А). Радиус дифракционного пятна в этой же плоскости равен $r = \frac{\lambda}{D} L = 1$ км. Время пересечения самолетом поперечного диаметра луча радара равно $\tau = 2r/v = 4$ с. Количество попаданий самолётом в область луча

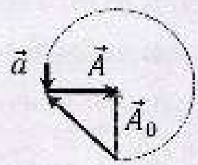
$$N = 2\frac{\tau}{T} = 2\frac{2r}{v}\frac{\Omega}{2\pi} = 2\frac{\lambda}{D}\frac{L\,\Omega}{\pi v} = 80\ \text{раз}.$$

«Двойка» учитывает то, что самолёт пересекает окружность дважды.

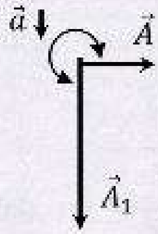
2Б. (Виноградов С.В.) Значение m_{max} определяется максимальным порядком интерференции: $m_{max} = \lambda/\Delta\lambda = 50$. Максимальное число колец будет наблюдаться, если ограничение из-за пространственной некогерентности будет более слабым, чем ограничение из-за временной некогерентности, т.е. при $m_2 > m_{max}$ (см. решение варианта А), откуда для δ получаем

$$\delta = \frac{\sqrt{\lambda R / m_{\max}}}{2\theta} \approx 0{,}2 \text{ мм}.$$

3Б. (Локшин Г.Р.) 1. В отсутствии плоскопараллельной пластинки векторная диаграмма для точки P имеет вид (см. рис). Вектор $\vec{A}$ – амплитуда колебания, созданного светом, прошедшим мимо непрозрачного диска (так называемое пятно Пуассона), $|\vec{A}| = A_0$, $A_0^2 = I_0$. Обратим внимание, что вектор $\vec{a}$, изображающий вклад маленького колечка, примыкающего к краю отверстия, является последним в цепочке векторов образующих дугу окружности с углом $3\pi/2$ и отстаёт по фазе на $\pi/2$ от суммарного колебания, созданного всей волной, прошедшей мимо отверстия.



2. Линза выстраивает эту дугу в коллинеарную цепочку векторов $\vec{A}_1$, направленную по вектору $\vec{a}$, длина этой цепочки равна $|\vec{A}_1| = \frac{3}{2}\pi A_0$. Плоскопараллельная пластинка вносит задержку по фазе $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d$. Чтобы интенсивность стала максимальной, необходимо «повернуть» вектор $\vec{A}$ на угол $\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$.



Отсюда получаем: $\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \;\Rightarrow\; d = \frac{(3+4m)\lambda}{4(n-1)}$.

Максимальная интенсивность: $I_{max} = (\frac{3}{2}\pi A_0 + A_0)^2 = \left(\frac{3}{2}\pi + 1\right)^2 I_0 \approx 32.6\, I_0$.

4Б. (Свинцов Д.А.) Решение аналогично задаче 4А. Здесь роль межплоскостного расстояния в условии Брэгга-Вульфа играет период структуры по вертикали d, из расстояния между брэгговскими пиками находим аналогично:

$$d = \frac{\lambda}{2(\theta_{m+1} - \theta_m)} = \frac{1.54\ \text{Å}}{2\frac{(0.61-0.47)}{180}\pi} \approx 30 \text{ нм}.$$

Между брэгговскими пиками наблюдается 9 побочных максимумов, связанных с интерференцией лучей, отраженных от верхней и нижней граней всей многослойной пленки. Угловое расстояние между этими максимумами, таким образом, в 10 раз меньше, чем расстояние между брэгговскими пиками. Толщина всей пленки, соответственно, в 10 раз больше периода структуры:

$$L = 10d \approx 300 \text{ нм}.$$

Стоит заметить, что обычная браэгговская дифракция, связанная со сложением волн, отраженных от различных атомных плоскостей, не играет роли, т.к. межплоскостные расстояния в материалах А и В различны. Также, в силу условия $t_A \neq t_B$ в качестве периода структуры следует брать именно суммарную толщину пленок материалов А и В. В противном случае возможно было бы когерентное сложение волн, отраженных от всех границ раздела, и в качестве периода структуры следовало бы подставить $t_A = t_B = d/2$.

Замечание Заметим также, что обе задачи можно было бы решить формально, просуммировав с учетом фазы амплитуды волн, отраженных от последовательных межатомных плоскостей (включив в рассмотрение волну, отраженную от нижней грани структуры)

$$A = \sum_{m=0}^{N} |A_m| \exp\left(2\pi m\, i\, \frac{2d\sin\theta}{\lambda}\right),$$

где $N = L/d$. В реальных экспериментах $|A_k|$ зависят сложным образом от номера отражающего слоя, что приводит к экспоненциальному спаду интенсивности $I(\theta)$. В самой простой модели можно считать $|A_k| = A_0 = const$, и получить

$A = A_0\,\frac{e^{i(N+1)\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1},\ \ \varphi = 2\pi\,\frac{2d\sin\theta}{\lambda}\ \Rightarrow\ I(\varphi) = |A|^2 = A_0^2\left(\frac{\sin[(N+1)\varphi/2]}{\sin[\varphi/2]}\right)^2$

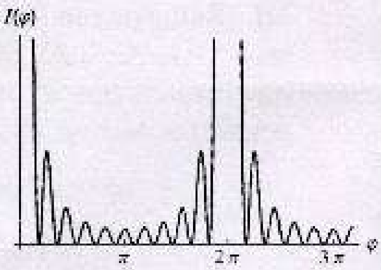


График функции $I(\varphi)$ для N=10 представлен на рисунке. Видно, что между главными брэгговскими максимумами расположено 9 побочных максимумов (осцилляций Киссига), что оправдывает наше не очень формальное решение.

5Б. (Петухов В.А.) См. решение задачи 5А.

$$\cos\theta = (1 - D^2/4F^2)^{1/2} \to x = \lambda/[1 - (1 - D^2/4F^2)^{1/2}] = 11{,}5 \text{ мкм.}$$

Менее точный ответ даёт $x = 8\lambda F^2/D^2$=11,8 мкм (т.е. здесь это приближение оправдано).

Вниманию преподавателей!

Оценку каждой задачи предлагается отображать в итоговой таблице символами, каждому из которых соответствует определённое количество баллов. Итоговая оценка по десятибалльной шкале определяется как округлённая до целого величина 2Σ, где Σ — сумма баллов за задачи.

оценка	баллы	комментарий
$+$	1	Чисто решенная задача — приведено обоснованное решение, аналитический и численный ответ которого совпадает с ответом авторов задачи.
$\underset{\cdot}{+}$	0.9	Задача решена, но есть мелкие недочёты (не приведён в явном виде необходимый логический аргумент; арифметическая ошибка, не приведшая к заведомо абсурдному ответу; и т.п.)
$\pm$	0.7	Задача решена, в общем, верно, но есть существенные недочёты (из-за арифметической ошибки приведён заведомо абсурдный численный ответ; нет численного ответа; ошибки в формулах вследствие описок; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т.п.)
+/2	0.5	Задача решена наполовину (дан ответ только на часть вопросов задачи, если их несколько; выкладки не доведены до конца; есть ошибки в части выкладок вследствие недостаточной математической подготовки; принципиально важные промежуточные результаты приведены без доказательства и т.п.)
$\mp$	0.3	Задача не решена, но есть существенные подвижки в ее решении (есть исходная система уравнений и начаты, но не доведены до конца выкладки; либо в выкладках есть логические ошибки, приведшие к существенно неверному ответу; и т.п.)
$\underset{\cdot}{-}$	0.1	Задача не решена, но есть незначительное продвижение в решении (записаны уравнения для основных законов, на основе которых задача может быть решена)
—	0	Основные законы записаны с ошибками, или подход к решению задачи принципиально неверен.
0	0	Попытки решить задачу не было.

Оценка 10 (т.е. отл+ по пятибалльной шкале) может ставиться только за 5 чисто решённых задач, получившие эту оценку студенты могут быть рекомендованы преподавателем лектору для получения отличной оценки без устного экзамена (преподаватель не обязан рекомендовать, а лектор не обязан соглашаться).

Обсуждение письменного экзамена состоится в понедельник 15.06.2015 в 8 час. 30 мин. в Главной Физической аудитории.