Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Il Teorema della Sfera in Geometria Riemanniana

Relatore:
Prof.Andrea Malchiodi

Candidato:
Dario Rancati

Anno accademico 2017-2018

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa trattazione è di illustrare la dimostrazione fornita da Klingenberg a partire dal lavoro di Berger del Teorema della Sfera, il cui enunciato è il seguente:

TEOREMA 0.1. *Sia M^n, $n \geq 3$, una varietà riemanniana compatta e semplicemente connessa, la cui curvatura sezionale K soddisfi per ogni punto $p \in M$ e ogni piano $\sigma \subseteq T_pM$*

$$0 < \frac{1}{4}K_{max} < K(p,\sigma) \leq K_{max}$$

dove K_{max} indica il massimo della curvatura sezionale su M. Allora M è omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^n$.

Alla dimostrazione vera e propria sarà dedicato l'ultimo capitolo della tesi, mentre nei capitoli precedenti costruiremo passo passo gli strumenti necessari a svolgere la suddetta dimostrazione.

Come sarà chiaro, lo strumento fondamentale per l'approccio di Klingenberg e Berger sarà il cut locus, che introdurremo nella prima sezione dell'ultimo capitolo, ed in particolare una stima globale dal basso della distanza di un punto dal proprio cut locus. Tale minimo globale, detto *raggio di iniettività* della varietà M, sarà essenzialmente il punto centrale del nostro interesse, al punto che quasi tutto il lavoro dei capitoli precedenti confluirà nell'ottenere la stima di Klingenberg su di esso a partire dall'ipotesi del Teorema della Sfera sulla curvatura sezionale. Tale stima sarà poi lo strumento che ci permetterà di concludere, seguendo la dimostrazione di Tsukamoto (1962) che fa uso del Teorema di Rauch.

Vediamo ora la suddivisione della trattazione. Dopo un primo capitolo di richiami ai risultati introduttivi della Geometria Riemanniana e della Teoria di Morse, nel secondo capitolo introdurremo il funzionale energia su una varietà riemanniana

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \right\|^2 \mathrm{d}t.$$

Ne studieremo poi le proprietà geometriche in relazione ai campi di Jacobi sulla varietà M, utilizzandole poi nel capitolo 3 per dimostrare il Teorema dell'Indice di Morse: tale teorema, di importanza capitale nella dimostrazione della stima di Klingenberg, costituirà il legame fondamentale tra l'energia E e la geometria della della varietà (in particolare i punti coniugati lungo le geodetiche della stessa). Contestualmente, riprenderemo la definizione di spazio tangente allo spazio dei cammini Ω data nel capitolo 1, e ne studieremo opportuni sottospazi finito dimensionali sui quali si conservano le proprietà del funzionale E, e che avrà il ruolo chiave di permettere di applicare un approcio di deformazione Morse-Teoretico ad Ω per dimostrare la stima di Klingenberg.

L'ultima parte del capitolo 3 sarà dedicato al Teorema di Rauch, che è lo strumento che ha permesso a Tsukamoto di evitare di utilizzare il Teorema di Topogonov per concludere dalla stima di Klingenberg.
Nella conclusione esporremo in maniera sintetica e non esaustiva una serie di questioni, ad oggi di diverso grado di comprensione, che vengono sollevate naturalmente dal Teorema della Sfera e per le quali la dimostrazione del teorema (in particolare il concetto di raggio di iniettività) ha fornito un esempio fondamentale di approccio valido: esse comprenderanno il caso differenziabile, il comportamento in dimensione pari rimpiazzando $\frac{1}{4}$ con una costante più piccola, l'esistenza di metriche a curvatura negativa su una varietà differenziabile assegnata.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo forniremo una lista di definizioni e di risultati di Geometria Riemanniana e di Teoria di Morse che costituiranno la base della trattazione svolta negli altri capitoli della tesi.

1.1 Varietà Differenziabili

Per le dimostrazioni dei risultati in questa sezione il lettore può confrontare [1].

Definizione 1.1. Una *varietà differenziabile* di classe C^r di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff M con un insieme di aperti $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che per ogni $\alpha \in A$ esista un omeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ detto *carta* che rispetti le seguenti condizioni:

- $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$;
- $\forall\, \alpha, \beta \in$ A tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ la mappa
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\alpha \left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$
è di classe C^r tra aperti di $\mathbb{R}^n$;
- La famiglia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è massimale rispetto alle due condizioni precedenti.

Segue naturalmente la seguente definizione:

Definizione 1.2. Date M ed N varietà di classe C^r una mappa continua $f : M \to N$ si dice di classe C^s con $s \leq r$ se sono di classe C^s le rappresentazioni in carta $\varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}$ $\forall\, \alpha, \beta$. Se una mappa differenziabile ha un'inversa anch'essa differenziabile è detta *diffeomorfismo*. Se per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno U di p tale che f sia un diffeomorfismo quando ristretta ad U f è detta *diffeomorfismo locale*.

Nel seguito, se non diversamente specificato, varietà e mappe saranno assunte di classe C^∞.

Definizione 1.3. Due curve $c_1, c_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ su una varietà differenziabile con $c_1(0) = c_2(0) = p \in M$ sono dette *tangenti in p* se , data una carta φ su un intorno U di p, si ha
$$\frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0).$$

PROPOSIZIONE 1.4. *Fissato $p \in M$, essere tangenti in p non dipende dalla carta e dall'intorno scelti, ed è una relazione di equivalenza tra curve di M passanti per p al tempo* 0.

DEFINIZIONE 1.5. Fissato $p \in M$ l'insieme delle classi di equivalenza per tangenza delle curve $[c]$ in p indicato con T_pM è detto *spazio tangente* ad M in p. Si può verificare che T_pM è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione pari alla dimensione della varietà M.

DEFINIZIONE 1.6. L'unione disgiunta degli spazi tangenti in ogni punto ad una varietà M è detto *fibrato tangente* ed è indicato con TM. TM è dotabile di una struttura di varietà differenziabile di dimensione doppia rispetto a quella della varietà M.

PROPOSIZIONE 1.7. *Data $f : M \to N$ mappa C^1 tra varietà differenziabili e c_1, c_2 curve tangenti in $p \in M$, $f \circ c_1$ e $f \circ c_2$ sono curve tangenti in $f(p) \in N$.*

DEFINIZIONE 1.8. Data $f : M \to N$ mappa $C^r, r \geq 1$ tra varietà differenziabili, per la proposizione precedente è ben definita la mappa $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ data da $d_pf([c]) = [f \circ c]$ detta $differenziale$ di f in p. Naturalmente questa mappa definisce naturalmente una mappa $df : TM \to TN$ tra i fibrati tangenti di classe C^{r-1}, detta anch'essa differenziale di f.

DEFINIZIONE 1.9. Un *campo vettoriale* di regolarità C^r su una varietà M è una mappa C^r da M a TM. L'insieme dei campi vettoriali C^r su M si indica con $\mathfrak{X}^r(M)$; indichiamo inoltre $\mathfrak{X}^\infty(M)$ semplicemente con $\mathfrak{X}(M)$.

I campi vettoriali possono essere interpretati come operatori dall'insieme $\mathcal{D}$ delle funzioni lisce su M in sè, associando ad una funzione f in un punto p la sua derivata direzionale nella direzione di $X(p)$. Più precisamente, data una parametrizzazione $x : U \subset \mathbb{R} \to M$ in un intorno di p, sia

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove gli a_i sono funzioni lisce su U e i $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sono i campi coordinati associati alla parametrizzazione. Allora, la funzione $Xf \in \mathcal{D}$ è definita da:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

dove con un leggero abuso di notazione abbiamo indicato con f la rappresentazione locale di f mediante la parametrizzazione x.

DEFINIZIONE 1.10. Data M varietà differenziabile, $p \in M$ e x parametrizzazione su un intorno U di p con componenti $x_1, \ldots, x_n$, indicati con e_i i campi costanti paralleli alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ nel dominio di x indichiamo con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e chiamiamo *campi coordinati* i campi vettoriali tali che

$$d_{x^{-1}(q)}x(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \ \ \forall q \in U.$$

Nell'interpretazione appena data i campi coordinati agiscono ovviamente come le derivate parziali di $\mathbb{R}^n$ lette in carta.

Proposizione 1.11. *Dati X e Y campi vettoriali lisci su M, esiste un'unico campo vettoriale liscio Z su M tale che $Zf = XYf - YXf \ \forall \ f \in \mathcal{D}$. Tale campo è detto commutatore o parentesi di Lie di X e Y, si indica con $[X,Y]$ e gode delle seguenti proprietà:*

- $[X,Y] = -[Y,X]$;
- $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \, \forall \, a,b \in \mathbb{R}$;
- $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$;
- $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Metriche Riemanniane e Connessioni

Per le dimostrazioni dei risultati in questa sezione il lettore può confrontare [2]. Introduciamo ora una definizione chiave:

Definizione 1.12. Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile M è una corrispondenza che associa ad ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare $\langle \, . \, , . \, \rangle_p$ su T_pM (cioè una froma bilineare simmetrica e definita positiva) con la seguente proprietà: per ogni intorno U di p con associata una parametrizzzione x, definita

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \, , \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q \quad \forall q \in U$$

allora g_{ij} è una funzione liscia da U a $\mathbb{R}$. Una varietà differenziabile con una metrica riemanniana è detta una *varietà riemanniana*.

Definizione 1.13. Dette M ed N varietà riemanniane, un diffeomorfismo $f : M \to N$ è detto un'*isometria* se

$$\langle \, u \, , v \, \rangle_p = \langle \, d_pf(u) \, , d_pf(v) \, \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in M \;\; \forall u, v \in T_pM.$$

Definizione 1.14. Una mappa liscia $f : M \to N$ è detta *isometria locale* in $p \in M$ se esiste un intorno U di p tale che f ristretta ad U sia un'isometria.

Proposizione 1.15. *Ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una metrica riemanniana.*

Introduciamo adesso le costruzioni fondamentali che fanno uso dei costrutti di base appena introdotti, che ci permetteranno di effettuare operazioni di derivazione compatibilmente con la struttura di varietà riemanniana:

Definizione 1.16. Una *connessione affine* ∇ su una varietà differenziabile M è una mappa

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

che indichiamo con $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ e che rispetta le seguenti proprietà:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y (Z)$;

2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

in cui $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposizione 1.17. *Detta M una varietà differenziabile con una connessione affine ∇, esiste un'unica mappa che associa ad ogni campo vettoriale V lungo una curva fissata $c : (0,1) \to M$ un altro campo vettoriale lungo c, detto* derivata covariante *di V lungo c e indicato con $\frac{DV}{dt}$ tale che valgano:*

1. *$\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;*
2. *$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ per f liscia su I;*
3. *se V è restrizione di $Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$;*

dove l'ultima richiesta ha senso in quanto si può mostrare in coordinate che $\nabla_X Y(p)$ dipende solo da $X(p)$ e dal valore di Y su una curva tangente ad X in p. La derivata covariante si scrive in coordinate come

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dv^j}{dt}X_j + \frac{dx_i}{dt}v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

Definizione 1.18. Se indichiamo con X_I i campi coordinati indotti da una parametrizzazione x, chiamiamo *simboli di Christoffel* ed indichiamo con Γ_{ij}^k le funzioni lisce tali che

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Definizione 1.19. Detta M varietà differenziabile, ∇ connessione affine e V campo vettoriale lungo una curva c, se $\frac{DV}{dt} = 0$ V è detto *parallelo*.

Proposizione 1.20. *Sia ancora M varietà differenziabile, ∇ connessione affine, c curva con intervallo I e $t_0 \in I$. Se V_0 è tangente a M in $c(t_0)$ esiste un unico campo parallelo V lungo c con $V(c(t_0)) = V_0$. V è detto* trasporto parallelo *di V_0 lungo c. Il trasporto parallelo in coordinate rispetta il seguente sistema di equazioni al variare di k:*

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Adesso finalmente leghiamo il concetto di connessione a quello di metrica riemanniana:

Definizione 1.21. Sia M una varietà riemanniana e ∇ una connessione affine. ∇ è detta *compatibile* con la metrica $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ se per ogni curva c e ogni coppia di campi vettoriali V_1 e V_2 paralleli lungo c la funzione reale $\langle V_1 , V_2 \rangle$ è costante lungo c.

La seguente risulterà la definizione "operativa" di compatibilità:

Proposizione 1.22. *Una connessione affine ∇ su una varietà riemanniana M è compatibile se e solo se per ogni curva c e ogni coppia di campi vettoriali V e W lungo c vale*

$$\frac{d}{dt}\langle V , W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt} , W \right\rangle + \left\langle V , \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Definizione 1.23. Una connessione affine ∇ su una varietà differenziabile M è detta *simmetrica* se, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Siamo ora pronti per enunciare il risultato fondamentale della sezione:

Teorema 1.24. *(Levi-Civita) Sia M una varietà riemanniana. Allora su M esiste un'unica connessione affine ∇ che soddisfi:*

1. *∇ è simmetrica;*
2. *∇ è compatibile con la metrica riemanniana su M.*

Tale connessione è detta connessione di Levi-Civita o connessione riemanniana. Fissata una parametrizzazione locale ed indicata con G la matrice tale che $[G]_i^j = g_{ij}$, sia $g^{nm} := [G^{-1}]_n^m$: allora i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita nella parametrizzazione scelta rispettano:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

1.3 Geodetiche

Per le dimostrazioni dei risultati in questa sezione il lettore può confrontare [2]. Introduciamo la nozione di geodetica, che sarà fondamentale in tutta la trattazione. Per tutto ciò che seguirà M sarà una varietà riemanniana con la sua connessione di Levi-Civita.

Definizione 1.25. Una curva $\gamma : I \to M$ è una *geodetica al tempo* $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)(t_0) = 0$. Se γ è una geodetica per ogni tempo $t \in I$ γ è detta *geodetica*. La restrizione di una geodetica ad un intervallo chiusto $\subset I$ è detta *segmento di geodetica*.

Definizione 1.26. Data una curva $c : I \to M$ con $[a, b] \subset I$ si definisce la *lunghezza* del tratto di curva corrispondente ad $[a, b]$ con:

$$L_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t.$$

Proposizione 1.27. *La norma della velocità di una geodetica è costante.*

Proposizione 1.28. *Data una geodetica γ e un sistema di coordinate (U, X) intorno a $\gamma(t_0)$, γ soddisfa il sistema di quazioni del secondo ordine*

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad k = 1, \ldots, n.$$

Notiamo che, linearizzando il sistema, otteniamo la dipendenza C^∞ delle geodetiche dai dati iniziali. Il fatto che il sistema sia del secondo ordine codifica semplicemente l'informazione che una geodetica esiste unica fissate sia la posizione che la velocità iniziali. Questo è espresso precisamente dal seguente risultato, che tiene in conto anche di un'opportuna riparametrizzazione dell'intervallo di definizione della geodetica:

PROPOSIZIONE 1.29. *Dato $p \in M$ esiste un insieme aperto $V \subset M$, $p \in V$, $\epsilon > 0$ tali che, detto*

$$\mathcal{U} := \{(q,v) : q \in V,\ v \in T_qM,\ \|v\| < \epsilon\}$$

esista una mappa liscia $\gamma : (-2,2) \times \mathcal{U} \to M$ tale che la curva $t \to \gamma(t,q,v),\ t \in (-2,2)$ sia l'unica geodetica che passi al tempo $t = 0$ per q con velocità v per ogni $(q,v) \in \mathcal{U}$.

Possiamo ora definire un oggetto fondamentale della teoria:

DEFINIZIONE 1.30. Dato $p \in M$ e $\mathcal{U}$ come definiti nella proposizione precedente. Allora la mappa liscia $exp : \mathcal{U} \to M$ data da:

$$\exp(q,v) = \gamma(\,q,v) \ \ , \ \ (q,v) \in \mathcal{U}$$

è detta *mappa esponenziale* su $\mathcal{U}$.

Spesso ci limiteremo a definire $\exp$ su un intorno di T_pM, indicandola con $\exp_p$.

PROPOSIZIONE 1.31. *Dato $q \in M$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $\exp_q : B(\epsilon, 0) \subset T_qM \to M$ sia un diffeomorfismo. Più precisamente, vale*

$$d(\exp_q)_0 = Id.$$

Adesso esponiamo la proprietà geometrica basilare delle geodetiche, cioè la locale minimizzazione delle distanze.

DEFINIZIONE 1.32. Una *curva regolare a tratti* è una mappa continua $\omega : [0,1] \to M$ tale che $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ e tale che esista una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ di $[0,1]$ tale che ogni restrizione $\omega|_{[t_i,t_{i+1}]}$ sia liscia.

DEFINIZIONE 1.33. Un segmento di una geodetica γ è detto *minimizzante* se $L(\gamma) \leq L(c)$ per ogni curva c che unisce $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Citiamo ora un risultato che, anche se non useremo esplicitamente, svolge un ruolo estremamente importante nello sviluppo storico della teoria:

LEMMA 1.34. *(Gauss) Dato $p \in M$, $v \in T_pM$ tale che $\exp_p v$ sia definito. Visto che ovviamente T_pM è isomorfo a $T_v(T_pM)$, consideriamo $w \in T_pM$. Allora*

$$\Big\langle\, (d\exp_p)_v(v)\,, (d\exp_p)_v(w)\,\Big\rangle = \langle\, v\,, w\,\rangle\,.$$

Diamo ora una definizione:

DEFINIZIONE 1.35. Se $\exp_p$ è un diffeomorfismo su un intorno V dell'origine in T_pM, diciamo che $U = \exp_p V$ è un *intorno normale*. Se $B(\epsilon, 0) \subset V$, diciamo che $exp_pB(\epsilon,0)$ è una *palla normale*

Adesso la proprietà di locale minimizzazione:

PROPOSIZIONE 1.36. *Sia $p \in M$, U intorno normale di p e $B \subset U$ palla normale di centro p. Sia $\gamma : [0,1] \to B$ una geodetica con $\gamma(0) = p$. Se $c : [0,1] \to M$ è una qualsiasi curva regolare a tratti che unisce $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, allora vale $L(\gamma) \leq L(c)$, e se vale l'uguaglianza allora c è una riparametrizzazione di γ.*

Citiamo ora un risultato che rafforza la proposizione 1.31:

Proposizione 1.37. *Per ogni $p \in M$ esistono un intorno W di p e un reale $\delta > 0$ tali che, per ogni $q \in W$, $\exp_q$ sia un diffeomorfismo su $B(\delta, 0) \subset T_qM$ e tali che $W \subset \exp_q(B(\delta, 0)$, ossia W è un intorno normale di ogni suo punto.*

Quest'ultimo risultato può essere leggermente rinforzato per far sì che le geodetiche di lunghezza δ siano contenute in W ad ogni tempo.

Definizione 1.38. Diciamo che un sottoinsieme $S \subset M$ è *fortemente convesso* se per ogni coppia di punti $q_1, q_2 \in \overline{S}$ esiste un'unica geodetica minimizzante γ che unisce q_1 a q_2 tale che la sua parte interna è tutta contenuta in S.

Proposizione 1.39. *Per ogni $p \in M$ esiste un reale $\beta > 0$ tale che la palla geodetica $B(\beta, p)$ è fortemente convessa.*

Vediamo ora la più importante proprietà globale ascrivibile ad una varietà riemanniana, strettamente legata alle geodetiche.

Definizione 1.40. Una varietà riemanniana M è detta *completa* se, per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale $\exp_p$ è definita $\forall\, v \in T_pM$, cioè se le geodetiche passanti per p sono definite per ogni tempo.

Proposizione 1.41. *Una varietà riemanniana completa non è estendibile, cioè non esiste una varietà riemanniana M' tale che M sia isometrica ad un sottoinsieme aperto proprio di M'.*

Proposizione 1.42. *Definita*

$$d(p,q) := \inf \{L(f_{p,q}) : f_{p,q} \text{ curva liscia a tratti che unisce } p \text{ a } q\}$$

si ha che (M, d) è uno spazio metrico. Inoltre la topologia indotta da d su M coincide con la topologia originale di M.

Il seguente teorema sarà di importanza capitale in tutta la teoria:

Teorema 1.43. *(Hopf-Rinow) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *M è completa;*
2. *i sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti;*
3. *(M, d) è completa come spazio metrico;*

Inoltre, se vale qualsiasi dei precedenti ogni coppia di punti di M è congiunta da una geodetica minimizzante.

Corollario 1.44. *Ogni varietà riemanniana compatta è completa.*

1.4 Curvatura

Per le dimostrazioni dei risultati in questa sezione il lettore può confrontare [2].

Definizione 1.45. La *curvatura* R di una varietà riemanniana M è una corrispondenza che associa ad ogni coppia $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una mappa $R(X;Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definita da

$$R(X,Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

dove ∇ è ovviamente la connessione di Levi-Civita di M.

Proposizione 1.46. *La curvatura R gode delle seguenti proprietà:*

1. *R è bilineare su $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, ossia*

$$R(fX + gY, Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z),$$

$$R(X, fY + gZ) = fR(X,Y) + gR(X,Z),$$

per $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$;

2. *Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $R(X,Y)$ è lineare, ossia*

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

per $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

D'ora in avanti definiamo e usiamo, in luogo della curvatura, un operatore multilineare $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ dato da:

$$(X, Y, Z, W) := \langle\, R(X,Y)Z \,, W \,\rangle\,.$$

Proposizione 1.47. *L'operatore multilineare appena definiro gode delle seguenti proprietà:*

1. $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$ *(Prima Identità di Bianchi);*
2. $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$*;*
3. $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$*;*
4. $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$*.*

Ricordiamo ora che, per la definizione di prodotto vettore, per ogni coppia di vettori $x, y \in T_pM$ vale:

$$\|x \wedge y\| = \sqrt{\|x\|^2 \, \|y\|^2 - \langle\, x \,, y \,\rangle^2}.$$

Proposizione 1.48. *Sia $\sigma \subset T_pM$ un sottospazio 2-dimensionale dello spazio tangente a M in un punto p, e siano $x, y \in \sigma$ linearmente indipendenti. Allora la quantità*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{\|x \wedge y\|}$$

non dipende dai verroti x, y scelti. La quantità $K(\sigma) := K(x,y)$ è detta curvatura sezionale *di σ in p.*

Si può vedere che, se si conoscono tutte le curvature sezionali di una varietà M in un punto p, si può determinare univocamente la curvatura R nel suddetto punto.

PROPOSIZIONE 1.49. *Sia $x = z_n$ un vettore di norma unitaria in T_pM, e sia $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ una base ortonormale dell'iperpiano ortogonale a x. Allora definiamo la curvatura di Ricci come*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle\, R(x, z_i)x \,,\, z_i \,\rangle$$

e la curvatura scalare come

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_j).$$

Allora queste due espressioni non dipendono dalla base ortonormale scelta.

Passiamo ora alla trattazione di un particolare tipo di 2-varietà utile allo studio delle varietà riemanniane in cui esse si trovano:

DEFINIZIONE 1.50. Sia A un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2$, $U \subset A \subset \overline{U}$ con U aperto, tale che la frontiera ∂A sia una curva regolare a tratti i cui angoli ai vertici non sono π. Una *superficie parametrizzata* in M è una mappa liscia $s : A \to M$.

Sono ovvie le definizioni di campo vettoriale V lungo s e, fissato un sistema di coordinate (u, v) su $\mathbb{R}^2$, delle derivate covarianti $\frac{DV}{\partial u}$ e $\frac{DV}{\partial v}$.

PROPOSIZIONE 1.51. *Se M è una varietà differenziabile con una connessione simmetrica e $s : A \to M$ è una superficie parametrizzata vale*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Si può definire la curvatura di una superficie parametrizzata nel seguente modo:

PROPOSIZIONE 1.52. *La seguente è una buona definizione:*

$$R(\frac{\partial s}{\partial u}, \frac{\partial s}{\partial v})V := \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}V - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}V.$$

1.5 Teoria di Morse

Per le dimostrazioni dei risultati in questa sezione il lettore può confrontare [3].
Esporremo ora i risultati di base della Teoria di Morse, che entrerà in maniera cruciale nella dimostrazione del teorema della sfera. Per tutta la sezione M sarà una varietà liscia e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione liscia.

DEFINIZIONE 1.53. $p \in M$ è detto *punto critico* se d_pf è la mappa nulla. In questo caso $f(p)$ è detto *valore critico*.

LEMMA 1.54. *(Sard) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione $\mathcal{C}^n$, allora i valori critici hanno misura 0 secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$.*

I risultati in questa sezione hanno come obiettivo lo studio della topologia degli insiemi:

$$M^a = \{p \in M : \ f(p) \leq a\}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Notiamo che se a è un valore regolare M^a è una sottovarietà con bordo di M, e ovviamente il suo bordo è a sua volta una varietà.

DEFINIZIONE 1.55. Un punto critico p è detto *non degenere* se, detta H la matrice tale che scelta una parametrizzazione locale x_i in un intorno di p valga:

$$H_i^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

allora H è non degenere.

Si può vedere che tale definizione è indipendente dalla parametrizzazione scelta.

OSSERVAZIONE 1.56. I punti critici non degeneri sono isolati.

DEFINIZIONE 1.57. Una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ è detta *di Morse* se tutti i suoi punti critici sono non degeneri. Inoltre una funzione di Morse è detta *perfetta* se, detti $c_1 \neq c_2$ punti critici distinti, vale $f(c_1) \neq f(c_2)$.

PROPOSIZIONE 1.58. *Le funzioni di Morse perfette sono dense, nella norma uniforme, nelle funzioni lisce sulla varietà M.*

PROPOSIZIONE 1.59. *Se $p \in M$ è critico, definiamo l'Hessiano di f come il funzionale Hf*

$$Hf : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $v, w \in T_pM$ e due loro estensioni locali $\overline{v}, \overline{w}$, valga

$$Hf(v, w) := \overline{v}(\overline{w}(f))(p).$$

Allora Hf è ben definito, bilineare ed è rappresentato dalla matrice H nella base dei campi coordinati della parametrizzazione scelta. Inoltre, grazie alla criticità di p, Hf è anche simmetrico.

Diamo adesso la definizione chiave della teoria:

DEFINIZIONE 1.60. Se p è critico per f, definiamo l'*indice* di f in p come la massima dimensione di un sottospazio $V \subseteq T_pM$ su cui Hf sia definito negativo.

Il risultato che rende fondamentale la definizione di indice è il seguente:

LEMMA 1.61. *(Morse) Se $p \in M$ è un punto critico non degenere per f, allora esiste una parametrizzazione locale y_i in un intorno U di p tale che $y_j(p) = 0 \, \forall j$ e tale che*

$$f(q) = f(p) - (y_1(q))^2 - \ldots - (y_\lambda(q))^2 + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \ldots + (y_n(q))^2$$

per ogni $q \in U$, dove λ è l'indice di f in p.

COROLLARIO 1.62. *I punti critici non degeneri sono isolati.*

DEFINIZIONE 1.63. Una funzione $f : M \to M$ è detta *di Morse* se i suoi punti critici sono tutti non degeneri.

DEFINIZIONE 1.64. Sia Y uno spazio topologico, sia B_k la palla unitaria chiusa in $\mathbb{R}^k$ con frontiera $\mathbb{S}^{k-1}$, e sia $g : \mathbb{S}^{k-1} \to Y$ una mappa continua. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza sull'unione disgiunta $Y \sqcup B_k$ tale che

$$x \sim y \iff g(x) = y$$

Allora se $k \geq 1$ definiamo l'incollamento di Y e B_k secondo g come

$$Y \smile_g B_k := {Y \sqcup B_k}/{\sim}.$$

Diamo ora i due risultati fondamentali della teoria, che descrivono il variare della topologia dei sottolivelli M^a.

LEMMA 1.65. *Siano $a < b$ numeri reali tali che $f^{-1}[a, b]$ sia compatto e senza punti critici per f. Allora M^a è un retratto per deformazione forte di M^b.*

LEMMA 1.66. *Se p è un punto critico non degenre per f di indice λ con $f(p) = c$. Supponiamo esista $\epsilon > 0$ tale che $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ sia compatto e senza altri punti critici per f oltre a p. Allora $M^{c+\epsilon}$ si retrae per deformazione forte su un incollamento di $M^{c-\epsilon}$ con B_λ per una certa funzione di incollamento.*

Diamo un esempio di corollario di questi risultati:

COROLLARIO 1.67. *(Reeb) Se M è una varietà compatta e f è una funzione liscia su M con esattamente due punti critici entrambi non degenri, allora M è omeomorfa ad una sfera.*

Capitolo 2

L'Energia su una Varietà Riemanniana

Sappiamo che le geodetiche su una varietà riemanniana M hanno alcune interessanti proprietà, ad esempio il fatto che localmente minimizzano la lunghezza. Tuttavia, noteremo che per ricavare proprietà globali riguardo alla varietà M risulterà fondamentale studiare un funzionale diverso dalla lunghezza, che chiameremo funzionale energia. All'inizio di questo studio definiremo prima di tutto lo spazio dei cammini $\Omega(M; p, q)$ che costituirà il dominio del suddetto funzionale: passeremo poi a studiare le variazioni di questo funzionale in un piccolo intorno di un elemento dello spazio dei cammini, ricavando la formula per la variazione seconda dell'Energia che sarà il risultato principale di questo capitolo. Da essa seguirà naturalmente lo studio di alcuni particolari campi vettoriali lungo una geodetica, detti Campi di Jacobi.

2.1 Lo Spazio dei Cammini

Sia M una varietà liscia, e siano p e q due punti di M (non necessariamente distinti).

DEFINIZIONE 2.1. Una curva regolare a tratti è una mappa continua $\omega : [0, 1] \to M$ tale che $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ e tale che esista una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ di $[0, 1]$ tale che ogni restrizione $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sia liscia. Lo *Spazio dei Cammini* tra p è q è l'insieme di tutte le curve regolari a tratti tra p e q, e lo indicheremo con $\Omega(M; p, q)$ o per brevità con Ω.

OSSERVAZIONE 2.2. Lo spazio dei cammini $\Omega(M; p, q)$ è arricchibile di una struttura di spazio topologico, ma la suddetta non è necessaria agli obiettivi di questa tesi. Comunque, è interessante notare che $\Omega(M; p, q)$ presenta vaghe analogie con una varietà, benchè in un qualche senso la sua dimensione secondo questa analogia è infinita. Questo porta naturalmente alla seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.3. Lo *Spazio Tangente* a Ω in un cammino ω, denotato con $T\Omega_\omega$, è lo spazio vettoriale costituito dai campi vettoriali regolari a tratti (secondo la stessa suddivisione della curva ω) che si annullano in $\omega(0)$ e $\omega(1)$.

Risulta ora naturale chiedersi, in analogia con il caso a dimensione finita, se sia possibile definire a partire da una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ il suo differenziale F_*. Iniziamo a precisare il concetto di "curve vicine ad una curva data" in Ω.

Definizione 2.4. Data ω regolare a tratti, una *variazione* di ω è una mappa $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ definita per un certo $\epsilon > 0$ tale che $\alpha(0) = \omega$ e che esista una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ di $[0, 1]$ tale che la mappa $A : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \to M$ definita da

$$A(u, t) := \alpha(u)(t)$$

sia liscia ristretta a ciascuna striscia $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$. Notiamo in particolare che vale $A(u, 0) = p$, $A(u, 1) = q$ $\forall u \in (-\epsilon, \epsilon)$ (su alcuni testi si usa una definizione meno forte di variazione in cui non è presente la condizione che i punti estremali siano fissi e si chiamano quelle con quest'ultima proprietà *variazioni proprie*. Noi, salvo esplicita menzione, intenderemo sempre variazioni proprie).

Possiamo considerare α come un "cammino liscio" in Ω. Notando che A parametrizza una superficie in M, possiamo definire la velocità di α come il campo vettoriale W lungo ω appartenente a $T\Omega_\omega$

$$W = \frac{\partial A}{\partial u}(0, t).$$

Mostriamo ora una risultato che chiarisce la corrispondenza tra variazioni e campi tangenti ad una curva:

Proposizione 2.5. *Dato un campo vettoriale regolare a tratti $V(t)$ lungo la curva regolare a tratti $\omega : [0, 1] \to M$ esiste una variazione $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \to M$ tale che V è la velocità di f. Inoltre se $V(0) = V(1) = 0$ si può scegliere f variazione propria.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che esiste $\delta > 0$ tale che $exp_{\omega(t)}$, $t \in [0, 1]$ è ben definito per ogni $v \in T_{\omega(t)}M$ con $\|v\| < \delta$. Infatti, per ogni $\omega(t)$ cosideriamo un intorno totalmente normale U_t e il numero ad esso associato δ_t che esiste grazie alla proposizione 1.37. L'unione lungo t degli U_t ricopre $\omega([0, 1])$ che è compatto, e dunque esiste un sottoricoprimento finito $U_1, \ldots U_n$. A questo punto basta considerare $\delta = \min(\delta_1, \ldots \delta_n)$. Consideriamo ora $N = \max_{t\in[0,1]}(\|V(t)\|)$, $\epsilon < \frac{\delta}{N}$ e definiamo $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \to M$ come

$$f(s, t) = \exp_{\omega(t)} sV(t) \quad \forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Notiamo che essa è ben definita per la scelta di ϵ. Inoltre, visto che

$$\exp_{\omega(t)} sV(t) = \gamma(1, \omega(t), sV)t))$$

per una geodetica γ che dipende in modo regolare dai valori iniziali, si ha che f è regolare a tratti. Inoltre chiaramente $f(0, t) = \omega(t)$. Infine, la velocità di f è data da:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \frac{d}{ds}(\exp_{\omega(t)} sV(t))\bigg|_{s=0} = (d\ \exp_{\omega(t)})_0 V(t) = V(t).$$

$\square$

Forti di ciò, se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ vorremmo tentare di definire

$$F_* : T\Omega_\omega \to T\mathbb{R}_{F(\omega)}$$

come segue. Dato $W \in T\Omega_\omega$ scegliamo una variazione $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ con

$$\alpha(0) = \omega \quad \frac{d\alpha}{du}(0) = W$$

e porre

$$F_*(W) = \left.\frac{d(F(\alpha(u))}{du}\right|_{u=0} \left(\frac{d}{dt}\right)_{F(\omega)}.$$

Naturalmente senza ipotesi su F non abbiamo speranza di poter verificare che questa è una buona definizione. Tuttavia la cosa non ci causerà problemi, in quanto l'unica nozione legata a F_* che ci interesserà è la seguente:

Definizione 2.6. Un cammino ω è detto *critico* per $F : \Omega \to \mathbb{R}$ se e solo se vale

$$\left.\frac{d(F(\alpha(u))}{du}\right|_{u=0} = 0$$

per ogni variazione α di ω.

2.2 Il Funzionale Energia

Sia, come al solito, M una varietà riemanniana, e sia $\Omega = \Omega(M; p, q)$. Per $\omega \in \Omega$ e $0 \leq a < b \leq 1$ definiamo *l'Energia di ω da a a b* come:

$$E_a^b(\omega) \ := \int_a^b \left\langle \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Per brevità scriveremo inoltre $E(\omega)$ al posto di $E_0^1(\omega)$. Quest'ultima funzione definisce dunque una mappa dallo spazio dei cammini $\Omega \to \mathbb{R}$. Iniziamo a notarne una prima proprietà fondamentale perchè essa ci sia utile:

Proposizione 2.7. *Siano p e q due punti di una varietà riemanniana completa M, e sia d la distanza geodetica tra p e q. Allora la funzione energia*

$$E \ : \ \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$$

ha i punti di minimo esattamente nelle geodetiche minimali che uniscono p e q. Inoltre il valore di questi minimi è d^2.

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione della lunghezza tra due punti p e q:

$$L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| \mathrm{d}t.$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle funzioni $\left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|$ e alla costante 1 otteniamo:

$$\left(L_a^b\right)^2 \leq (b-a)E_a^b$$

con l'uguaglianza che vale se e solo se $\left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|$ è costante, cioè se ω è parametrizzata per lunghezza d'arco. Consideriamo dunque una geodetica minimale γ tra $p = \omega(0)$ e $q = \omega(1)$ (che esiste per l'ipotesi di completezza). Allora vale

$$E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\omega)^2 \leq E(\omega)$$

e notiamo inoltre che vale $L(\gamma)^2 = L(\omega)^2$ solo se anche ω è una geodetica minimale, e che come già detto $L(\omega)^2 = E(\omega)$ solo se ω è parametrizzata per lunghezza d'arco. Questo conclude la proposizione. □

Corollario 2.8. *Ogni geodetica minimale ω è un cammino critico per E.*

Vogliamo ora caratterizzare i cammini critici per E.

Teorema 2.9. *(Formula per la Variazione Prima dell'Energia) Sia ω un cammino di M, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ una variazione di ω, $A : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \to M$ la superficie associata ad α in M e $W(t) = \frac{\partial A}{\partial u}(0, t)$ la velocità di α. Definiamo inoltre $V(t) = \frac{d\omega}{dt}(t)$ la velocità di ω, $Y(t) = \frac{D}{\partial t}\frac{d\omega}{dt}(t)$ l'accelerazione di ω e infine*

$$\Delta V(t) = \lim_{s\to t^+} V(s) - \lim_{s\to t^-} V(s)$$

la discontinuità della velocità in $t \in [0, 1]$, dove ovviamente $\Delta V(t) \neq 0$ solo per un numero finito di $t \in [0, 1]$. Allora vale

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\alpha(u))}{du}\bigg|_{u=0} = -\sum_t \langle\, W(t)\, , \Delta V(t)\,\rangle - \int_0^1 \langle\, W(t)\, , Y(t)\,\rangle\, \mathrm{d}t.$$

Dimostrazione. Grazie a 1.22 sappiamo che

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle.$$

Inoltre, grazie 1.51 a abbiamo

$$\frac{D}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u}.$$

Unendo queste due relazioni abbiamo:

$$\frac{dE(\alpha(u))}{du} = \frac{d}{du}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t.$$

Scegliamo ora $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tali che A sia liscia su ogni striscia $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$ al variare di i. Ricordando che, sempre grazie a 1.22, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle.$$

Da cui, per una sorta di integrazione per parti:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t = \left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle\bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t.$$

Sommando l'equazione appena scritta per $i = 1, \ldots, k$ e ricordando che

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u,0) = \frac{\partial A}{\partial u}(u,1) = 0$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\alpha(u))}{du} = -\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \Delta\frac{\partial A}{\partial t}(t_i)\right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t.$$

Ponendo infine $u = 0$, otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{dE\circ\alpha}{du}(0) \;=\; -\;\sum_t \langle\, W(t)\,, \Delta V(t)\,\rangle \;-\; \int_0^1 \langle\, W(t)\,, Y(t)\,\rangle\,\mathrm{d}t$$

che conclude la dimostrazione. □

Ne segue il seguente fondamentale corollario:

Corollario 2.10. *Un cammino ω è un punto critico per E se e solo se è una geodetica.*

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che le geodetiche sono cammini critici. Sia ora ω un cammino critico, la cui suddivisione associata di $[0,1]$ è $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$. Esiste una funzione liscia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f(t) \geq 0\, \forall t \in [0,1]$ e $f(t) = 0 \iff t = t_i$ per un qualche i. Consideriamo Y l'accelerazione del cammino ω, cioè:

$$Y(t) = \frac{D}{\partial t}\frac{d\omega}{dt}(t).$$

Consideriamo la variazione di ω con velocità della variazione uguale a:

$$W(t) = f(t)Y(t).$$

Applicando la formula per la variazione prima dell'Energia otteniamo:

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{du}(0) = -\int_0^1 f(t)\,\langle\, Y(t)\,, Y(t)\,\rangle\,\mathrm{d}t,$$

che poichè ω è critico è uguale a 0. Questo dimostra che ogni restrizione

$$\omega\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$$

ha accelerazione nulla, ed è quindi una geodetica.
Ci basta ora mostrare che queste geodetiche di incollano in modo liscio in corrispondenza dei t_i. Consideriamo quindi una variazione di ω con velocità nei punti t_i uguale a

$$W(t_i) = \Delta V(t_i)$$

dove V indica la velocità del cammino ω. Allora:

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{du}(0) = -\sum_i \langle\, \Delta V(t_i)\,, \Delta V(t_i)\,\rangle$$

che è 0 se e solo se e solo se vale $\Delta V(t_i) = 0$ per ogni i. Per cui ω è una soluzione C^1 dell'equazione differenziale delle geodetiche della proposizione 1.28: per l'unicità della soluzione a questa equazione, ω è C^∞, ed è quindi una geodetica. Questo conclude la dimostrazione. □

2.3 La Formula per la Variazione Seconda

Proseguendo l'analogia con le funzioni a valori reali su una varietà, il nostro obiettivo è ora di definire una funzione bilineare

$$E_{**}: \; T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \to \mathbb{R}$$

dove γ è un punto critico di E, cioè una geodetica. Chiameremo questa funzione bilineare *Hessiano* di E. Prima di tutto definiremo questa funzione E_{**}, e poi dimostreremo che tale definizione è una buona definizione tramite la Formula per la Variazione Seconda dell'Energia. Sia dunque γ una geodetica, U un intorno di $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$: definiamo una *2-variazione* di γ come una funzione

$$V : U \times [0,1] \to M$$

con una suddivisione $0 = t_0 < \ldots < t_k = 1$ di $[0,1]$ tale che le restrizioni agli insiemi

$$U \times [t_i, t_{i+1}]$$

siano lisce. Dati due campi vettoriali $W_1, W_2 \in T\Omega_\gamma$ scegliamo dunque una 2-variazione A di γ con intorno U di $\mathbb{R}^2$ parametrizzato da (u_1, u_2) tale che

$$A(0,0,t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial A}{\partial u_1}(0,0,t) = W_1(t), \quad \frac{\partial A}{\partial u_2}(0,0,t) = W_2(t).$$

Indicando ovviamente con $A(u_1, u_2, t)$ il cammino di Ω_γ fissando le prime due coordinate di A, allora l'Hessiano di E è definito da

$$E_{**}(W_1, W_2) = \left.\frac{\partial^2 E(A(u_1, u_2, t))}{\partial u_1 \partial u_2}\right|_{(0,0,t)}.$$

Spesso accorceremo la notazione di quest'ultima definizione con $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0)$.
Come anticipato, mostriamo che è una buona definizione.

Teorema 2.11. *(Formula per la Variazione Seconda dell'Energia) Usiamo le notazioni finora introdotte per U, A, W_1 e W_2. Sia inoltre R l'operatore curvatura della varietà M. Definiamo inoltre $V(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ e, similmente a quanto definito nella formula per la variazione prima,*

$$\Delta \frac{DW_1}{dt}(t) = \lim_{s \to t^+} \frac{DW_1}{dt}(s) - \lim_{s \to t^-} \frac{DW_1}{dt}(s).$$

Allora vale:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0) = -\sum_t \left\langle W_2(t)\,, \Delta \frac{DW_1}{dt}(t) \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2(t)\,, \frac{D^2 W_1}{dt}(t) + R(V(t), W_1(t))V(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Dimostrazione. Dalla formula per la variazione prima abbiamo:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2} = -\sum_t \left\langle \frac{\partial A}{\partial u_2}, \Delta \frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial A}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Derivando rispetto a u_1 e portando la derivata sotto il segno di integrale di ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = &- \sum_t \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial A}{\partial u_2}, \Delta\frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial A}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1}\Delta\frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle \\ &- \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial A}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle \mathrm{d}t - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial A}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}(t) \right\rangle \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Valutando quest'espressione in $(u_1, u_2) = (0, 0)$, si ha che poichè $\gamma(t) = A(0, 0, t)$ è una geodetica

$$\Delta\frac{\partial A}{\partial t}(t) = 0, \quad \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t}(t) = 0.$$

Da cui il primo e il terzo termine di (2.1) sono 0. Adesso, ricordiamo che per 1.52 vale:

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u_1}V = R(\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial u_1})V = R(V, W_1)V.$$

Unendo questo alla proposizione 1.51:

$$\frac{D}{\partial u_1}V = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u_1} = \frac{D}{dt}W_1$$

si ha che

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}V = \frac{D^2 W_1}{dt}(t) + R(V(t), W_1(t))V(t).$$

Quindi il quarto termine di (2.1) vale:

$$-\int_0^1 \left\langle W_2(t), \frac{D^2 W_1}{dt}(t) + R(V(t), W_1(t))V(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Infine, grazie alla liscezza delle funzioni coinvolte, l'operatore Δ commuta con la derivazione covariante. Usando sempre 1.51 si ha:

$$\frac{D}{\partial u_1}\Delta\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \Delta\frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \Delta\frac{D}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial u_1}(t) = \Delta\frac{D}{\partial t}W_1.$$

Che una volta inserito nel secondo termine di (2.1). Questo conclude la dimostrazione. □

Ne segue un risultato fondamentale:

Corollario 2.12. $E_{**}(W_1, W_2) = \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ *è ben definita, bilineare e simmetrica.*

Dimostrazione. La buona definizione e la bilinearità seguono dalla formula per la variazione seconda. La simmetria segue invece dal teorema di Schwarz. □

Osservazione 2.13. I termini diagonali $E_{**}(W, W)$ possono essere scritti in funzione di una sola variazione ad un parametro. In particolare vale, se α è una variazione ad un parametro con velocità W,

$$E_{**}(W, W) = \frac{d^2 E \circ \alpha}{du^2}.$$

Questa osservazione ha la fondamentale conseguenza di mostrare che le geodetiche minimizzanti sono minimi dell'energia, come segue da $E(\alpha(u)) \geq E(\gamma) = E(\alpha(0))$.

Osservazione 2.14. Ovviamente la formula per la variazione seconda è disponibile anche per variazioni non proprie: in questo caso il primo termine in 2.1 non si annulla, e permane come termine di bordo.

Osservazione 2.15. Sempre per generalità nel caso non proprio, possiamo riscrivere l'espressione per la Variazione Seconda dell'energia nel modo seguente: usando che, per 1.22, vale

$$\frac{d}{dt}\left\langle V\,, \frac{DW}{dt}\right\rangle = \left\langle V\,, \frac{D^2W}{dt^2}\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{dt}\,, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

per ogni coppia di campi vettoriali V e W lungo la geodetica. Abbiamo allora che, chiamando $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$ la partizione per la geodetica γ

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\langle V(t)\,, \frac{D^2W}{dt}(t) + R(\gamma'(t), W(t))\gamma'(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{k}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt}\left\langle V\,, \frac{DW}{dt}\right\rangle \mathrm{d}t\right. \\
&\left. - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\left\langle \frac{DV}{dt}\,, \frac{DW}{dt}\right\rangle - \langle V\,, R(\gamma', W)\gamma'\rangle)\,\mathrm{d}t\right\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ne segue l'espressione cercata:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0) = &\int_0^1 (\langle W'\,, V'\rangle - \langle R(\gamma', W)\gamma'\,, V\rangle)\,\mathrm{d}t \\
&- \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}\,, \gamma'\right\rangle(0,0) + \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}\,, \gamma'\right\rangle(0,a).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Per ragioni che chiariremo nel capitolo successivo, definiamo da quest'espressione l'*index form* di γ come la forma bilineare su $T\Omega_\gamma$ data da :

$$\mathcal{I}_{t_0}(W,V) := \int_0^{t_0} (\langle W'\,, V'\rangle - \langle R(\gamma', W)\gamma'\,, V\rangle)\,\mathrm{d}t.$$

Notiamo che, grazie a 1.47, $\mathcal{I}_{t_0}$ oltre ad essere bilineare è anche simmetrica.

Vediamo ora una prima applicazione geometrica della formula per la variazione seconda dell'energia, ossia il Teorema di Bonnet-Myers.

Teorema 2.16. *(Bonnet-Myers) Sia M^n una varietà Riemanniana completa, la cui curvatura di Ricci soddisfa*

$$Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ con $\|v\| = 1$. Allora M è compatta e il suo diametro soddisfa $diam(M) \leq \pi r$.

Dimostrazione. Siano p e q punti di M, e $\gamma : [0,1] \to M$ un segmento di geodetica minimizzante che li unisce. Per mostrare la tesi ci basta mostrare $L(\gamma) \leq \pi r$, poichè a quel punto M sarebbe uno spazio metrico limitato e completo, dunque compatto. Poniamo per brevità $L := L(\gamma)$, e supponiamo per assurdo $L > \pi r$. Consideriamo $\{e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)\}$ campi ortonormali e paralleli lungo γ appartenenti all'ortogonale del campo $\gamma'(t)$. Poniamo $e_n(t) := \frac{\gamma'(t)}{L}$ e sia V_j in campo vettoriale lungo γ dato da

$$V_j(t) := (\sin \pi t) e_j(t), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ovviamente $V_j(0) = V_j(1) = 0$, per cui V_j è la velocità di una variazione di γ. Indichiamone con E_j l'energia corrispondente. Dalla formula per la variazione seconda dell'energia e poichè e_j è parallelo si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_j''(0) &= -\int_0^1 \langle V_j \,, V_j'' + R(\gamma', V_j)\gamma' \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)(\pi^2 - L^2 K(e_n(t), e_j(t))) \, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove K è ovviamente la curvatura sezionale. Sommando su j e usando la definizione di curvatura di Ricci:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) = (n-1) \int_0^1 \{\sin^2(\pi t)(\pi^2 - L^2 \mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)))\} \, \mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Adesso, poichè $\mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) \geq \frac{1}{r^2}$ e $L > \pi r$, si ha

$$L^2 \mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) > \pi^2.$$

E dunque

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < (n-1) \int_0^1 \sin^2(\pi t)(\pi^2 - \pi^2) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Il che implica che esiste almeno uno dei V_j che è velocità di una variazione lungo cui E decresce, ma ciò è assurdo in quanto γ è minimizzante. La tesi è quindi dimostrata. □

2.4 Campi di Jacobi

Dalla formula per la variazione seconda dell'energia segue naturalmente lo studio dei campi vettoriali che rispettano un'opportuna equazione differenziale del secondo ordine lungo una geodetica, detta *Equazione di Jacobi*, che svolgono il ruolo di "punti di flesso" per il funzionale energia.

Definizione 2.17. Sia M una varietà riemanniana, $\gamma(t) : [0.1] \to M$ una geodetica. Un campo vettoriale J lungo γ è detto Campo di Jacobi se soddisfa

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \tag{2.6}$$

per ogni $t \in [0,1]$.

Osservazione 2.18. Un campo di Jacobi lungo γ è univocamente determinato dalle condizioni iniziali $J(0)$ e $\frac{DJ}{dt}(0)$. Infatti, detti $e_1(t)\dots e_n(t)$ campi vettoriali lungo γ ortonormali in ogni punto, scriviamo

$$J(t) = \sum_i f_i(t)e_i(t), \qquad a_{ij}(t) = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t)\rangle.$$

Allora con semplici passaggi algebrici l'equazione di Jacobi risulta equivalente al seguente sistema lineare di equazioni differenziali al secondo ordine

$$f_j''(t) + \sum_i a_{ij}(t)f_j(t) = 0, \quad 1 \le j \le n.$$

Notiamo che, tra le altre cose, questo mostra che lungo una geodetica esistono al più $2n$ campi di Jacobi linearmente indipendenti.

Mostreremo ora che l'equazione di Jacobi ha una classe di soluzioni molto semplice, costituita da campi vettoriali che intuitivamente esprimono il diffondersi delle geodetiche lungo la superficie M.

Proposizione 2.19. *Sia $p \in M$, $v \in T_pM$ e $w \in T_v(T_pM)$. Sia inoltre $v(s) : [-\epsilon, \epsilon] \to T_pM$ una curva con $v(0) = v$, $v'(0) = w$. Sia f la superficie in M parametrizzata da*

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s)), \quad 0 \le t \le 1, \quad -\epsilon \le s \le \epsilon.$$

Allora il campo vettoriale

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (d\ \exp_p)_{tv}(tw)$$

risolve l'equazione di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv),\ 0 \le t \le 1$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{2.7}$$

Ricordiamo che, se $f : A \to M$ è una superficie parametrizzata su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $V \in \mathfrak{X}(f(A))$, possiamo calcolare la curvatura con la seguente formula:

$$R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})V = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V. \tag{2.8}$$

Ora, usando la simmetria della connessione di Levi-Civita e l'antisimmetria della curvatura R:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} - R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2.9}$$

dove l'ultima uguaglianza vale poichè γ è una geodetica di M. □

Mostreremo ora che questa caratterizzazione geometrica di una classe di soluzioni dell'Equazione di Jacobi esaurisce tutto l'insieme delle soluzioni. Ci limiteremo a mostrarlo per la il sottoinsieme di soluzioni J con $J(0) = 0$, in quanto questo sarà l'unico caso che ci interesserà nello studio dei punti coniugati lungo le geodetiche di M (ma in realtà la suddetta ipotesi non è necessaria).

Proposizione 2.20. *Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica e J un campo di Jacobi lungo γ con $J(0) = 0$. Sia $\gamma'(0) = v$ e $\frac{DJ}{\partial t}(0) = w \in T_v(T_{\gamma(0)}M)$: costruiamo una curva $v(s)$ in $T_{\gamma(0)}M$ con $v(0) = v$ e $v'(0) = w$. Allora detta $f(t,s) = \exp_{\gamma(0)}(tv(s))$ e definito il campo di Jacobi associato a f $J_1(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$, vale $J_1 = J$ su $[0,1]$.*

Dimostrazione. Notiamo che, per l'unicità della soluzione dell'Equazione di Jacobi fissate le condizioni iniziali, basta mostrare $J(0) = J_1(0)$ e $\frac{DJ}{\partial t}(0) = \frac{DJ_1}{\partial t}(0)$. Allora, dato che

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = (d\ \exp_{\gamma(0)})(tv'(s))$$

vale $J_1(0) = J(0) = 0$. Basta quindi dimostrare

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = w.$$

Notiamo che vale:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \frac{D}{\partial t}((d\ \exp_{\gamma(0)})_{tv}(tw)) = (d\ \exp_{\gamma(0)})_{tv}(w) + t\frac{D}{\partial t}((d\ \exp_{\gamma(0)})_{tv}(w)).$$

Ne segue che, poichè il differenziale della mappa esponenziale nell'origine è l'identità, $\frac{DJ_1}{\partial t}(0) = w$, che prova la tesi. $\square$

Concludiamo questa sezione esplicitando una relazione che mostra come i Campi di Jacobi leghino naturalmente la nozione di geodetica e quella di curvatura.

Proposizione 2.21. *Sia $p \in M$ e $\gamma : [0,a] \to M$ una geodetica con $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Sia $w \in T_v(T_pM)$ tale che $\|w\| = 1$ e sia J un campo di Jacobi lungo γ dato da*

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw), \quad 0 \le t \le a.$$

Allora la serie di Taylor di $\|J(t)\|^2$ intorno a $t = 0$ è data da

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}\langle\, R(v,w)v\,, w\,\rangle\, t^4 + \mathcal{O}(t^4).$$

Dimostrazione. Poichè $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$, abbiamo:

$$\langle\, J\,, J\,\rangle\,(0) = 0,$$

$$\langle\, J\,, J\,\rangle'\,(0) = 2\,\langle\, J\,, J'\,\rangle\,(0) = 0,$$

$$\langle\, J\,, J\,\rangle''\,(0) = 2\,\langle\, J'\,, J'\,\rangle\,(0) + 2\,\langle\, J\,, J''\,\rangle\,(0) = 2,$$

poichè $\|w\| = 1$. D'altro canto, poichè dall'equazione di Jacobi $J''(0) = -R(\gamma', J)\gamma'(0) = 0$ si ha

$$\langle\, J\,, J\,\rangle'''\,(0) = 6\,\langle\, J'\,, J''\,\rangle\,(0) + 2\,\langle\, J\,, J'''\,\rangle\,(0) = 0.$$

Adesso per proseguire ci serve il fatto seguente:

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0).$$

Notiamo che per ogni W abbiamo, in $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{dt}(R(\gamma', J)\gamma')\,, W \right\rangle &= \frac{d}{dt}\,\langle\, R(\gamma', W)\gamma'\,, J\,\rangle - \langle\, R(\gamma', J)\gamma'\,, W'\,\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{dt}(R(\gamma', W)\gamma')\,, J \right\rangle + \langle\, R(\gamma', W)\gamma'\,, J'\,\rangle \\
&= \langle\, R(\gamma', J')\gamma'\,, W\,\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Da quest'ultima relazione e dall'equazione di Jacobi segue che $J'''(0) = -R(\gamma', J')\gamma'(0)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\langle\, J\,, J\,\rangle''''\,(0) &= 8\,\langle\, J'\,, J'''\,\rangle\,(0) + 6\,\langle\, J''\,, J''\,\rangle\,(0) + 2\,\langle\, J''''\,, J\,\rangle\,(0) \\
&= -8\,\langle\, J'\,, R(\gamma', J')\gamma'\,\rangle\,(0) \\
&= -8\,\langle\, R(v, w)v\,, w\,\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Unendo tutte queste relazioni si ottiene la tesi. □

Il teorema precedente contiene fondamentalmente la relazione tra geodetiche e curvatura. Riformuliamolo in maniera più elegante:

Corollario 2.22. *Se γ è parametrizzata per lunghezza d'arco (cioè $\|v\| = 1$) e $\langle\, v\,, w\,\rangle = 0$, se chiamiamo σ il piano generato da v e w vale:*

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + \mathcal{O}(t^3).$$

2.5 Punti Coniugati lungo una Geodetica

Definizione 2.23. Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica, $t_0 \in (0, a]$. Il punto $\gamma(t_0)$ è detto coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ se esiste un campo di Jacobi J lungo γ non identicamente nullo tale che $J(\gamma(0)) = J(\gamma(t_0)) = 0$. Il massimo numero di campi di Jacobi linearmente indipendenti con questa proprietà è detto *molteplicità* del punto coniugato $\gamma(t_0)$.

Osservazione 2.24. Grazie all'univoca determinazione dei campi di Jacobi date le condizioni iniziali $J(0)$ e $J'(0)$, k dei campi di Jacobi con $J_i(0) = 0$ sono linearmente indipendenti se e solo se $J_i'(0)$ sono linearmente indipendenti: unendo a questo fatto l'osservazione che, data una geodetica γ, il campo di Jacobi $t\gamma'(t)$ si annulla in 0 e solo in 0, la molteplicità di un punto coniugato su una varietà di dimensione n è al massimo $n - 1$. Tale stima inoltre è ottimale: considerando la sfera unitaria S^n e una geodetica $\gamma : [0, \pi] \to S^n$ che unisce due punti antipodali, si vede facilmente che esistono $n-1$ campi paralleli, di norma costante e indipendenti w_i lungo γ che soddisfano $\langle \gamma'(t), w_i \rangle = 0$ e che $J_i(t) = \sin t \cdot w_i(t)$ sono campi di Jacobi indipendenti lungo γ.

Diamo ora una caratterizzazione dei punti coniugati come punti critici della mappa esponenziale.

Proposizione 2.25. *Sia $\gamma[0, a] \to M$ una geodetica e sia $\gamma(0) = p$. Il punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$, è coniugato a p lungo γ se e solo se $v_0 := t_0\gamma'(0)$ è un punto critico della* *mappa esponenziale* $\exp_p$*. Inoltre, la molteplicità di questo punto coniugato coincide con la dimensione del nucleo di* $d_{v_0}\exp_p$*.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $v = \gamma'(0)$: stiamo cercando un campo di Jacobi con $J(0) = J(t_0) = 0$. Scegliamo un vettore $w = J'(0)$: per la Proposizione il campo lungo γ $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$, $t \in [0, a]$ è un campo di Jacobi ed è l'unico con $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$. Per l'esistenza di un intorno normale di p abbiamo che localmente $\exp_p$ è un diffeomorfismo, e dunque J è identicamente nullo se e solo se $w = 0$. Per cui possiamo supporre $w \neq 0$, e $q = \gamma(t_0)$ è coniugato se e solo se

$$(d\exp_p)_{t_0 v}(t_0 w) = 0$$

cioè se e solo se $t_0 v$ è un punto critico di $\exp_p$.
Per la seconda parte, basta ossevare nuovamente che dei campi di Jacobi nulli in 0 $J_1 \dots J_k$ sono indipendenti se e solo se lo sono $J_1'(0), \dots J_k'(0)$, e la tesi segue banalmente. □

La seguente è una proprietà molto utile dei campi di Jacobi, che utilizzeremo più avanti:

PROPOSIZIONE 2.26. *Sia J un campo di Jacobi lungo $\gamma : [0, a] \to M$. Allora:*

$$\langle J(t) , \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0) , \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0) , \gamma'(0) \rangle$$

per ogni $t \in [0, a]$.

DIMOSTRAZIONE. Omettendo t per snellire la notazione, dall'equazione di Jacobi si ha

$$\langle J' , \gamma' \rangle' = \langle J'' , \gamma' \rangle = -\langle R(\gamma', J)\gamma' , \gamma' \rangle = 0.$$

Dunque $\langle J' , \gamma' \rangle ? \langle J'(0) , \gamma'(0) \rangle$. Inoltre

$$\langle J , \gamma' \rangle' = \langle J' , \gamma' \rangle = \langle J'(0) , \gamma'(0) \rangle .$$

Integrando l'ultima equazione in t si ha finalmente

$$\langle J , \gamma' \rangle = \langle J'(0) , \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0) , \gamma'(0) \rangle .$$

□

Ora mostriamo che un campo di Jacobi è determinato univocamente dai suoi valori agli estremi, ovviamente se questi non sono 0.

PROPOSIZIONE 2.27. *Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica, $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$, $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$. Se $\gamma(a)$ non è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ esiste un unico campo di Jacobi J lungo γ con $J(0) = V_1$ e $J(a) = V_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{J}$ l'insieme dei campi di Jacobi con $J(0) = 0$. Definiamo la mappa $\Theta : \mathcal{J} \to T_{\gamma(a)}M$ come la valutazione in a; dall'ipotesi di non-coniugazione Θ è iniettiva. Poichè Θ è lineare e poichè si ha $\dim \mathcal{J} = \dim T_{\gamma(a)}M$, Θ è un isomorfismo: in particolare esiste $J_1 \in \mathcal{J}$ con $J_1(0) = 0$ e $J_1(a) = V_2$. Con un ragionamento analogo esiste J_2 con $J_2(0) = V_1$, $J_2(a) = 0$, per cui $J_1 + J_2$ soddisfa la tesi. L'unicità segue ancora dall'ipotesi di non coniugazione. □

Ora diamo finalmente il risultato che ci saremmo aspettati di ottenere quando abbiamo introdotto i campi di Jacobi a partire da E_{**}. Ricordiamo che il *radicale* di una forma bilineare $B : V \times V \to \mathbb{R}$ è dato dagli elementi $v \in V$ tali che $B(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$.

TEOREMA 2.28. *Un campo vettoriale $W_1 \in T\Omega_\gamma$ appartiene al radicale di E_{**} se e solo se W_1 è un campo di Jacobi. In particolare E_{**} è degenere se e solo se i punti estremali p e q della geodetica γ sono coniugati lungo γ, e inoltre la dimensione del suddetto radicale è la molteplicità di p e q.*

DIMOSTRAZIONE. Se J è un campo di Jacobi nullo in p e q, allora dalla formula per la variazione seconda $\forall\, W_2 \in T\Omega_\gamma$:

$$-\frac{1}{2}E_{**}(J, W_2) = \sum_t \langle\, W_2(t)\, , 0\, \rangle + \int_0^1 \langle\, W_2\, , 0\, \rangle \,\mathrm{d}t = 0.$$

Per cui chiaramente J appartiene al radicale.
Viceversa, supponiamo W_1 appartenga ad radicale. W_1 è regolare a tratti, dunque scegliamo una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ in modo che $W_1 \big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sia liscio per ogni i. Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liscia tale che $f(t_i) = 0$ per ogni i e che non si annulli in nessun altro punto, e sia:

$$W_2(t) := f(t) \left(\frac{D^2 W_1}{dt^2}(t) + R(\gamma', W_1)\gamma'(t) \right).$$

Allora dalla formula per la Variazione Seconda:

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = \sum_t 0 + \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D^2 W_1}{dt^2}(t) + R(\gamma', W_1)\gamma'(t) \right\|^2 \mathrm{d}t.$$

Poichè W_1 sta nel radicale, questa quantità è 0, da cui

$$\frac{D^2 W_1}{dt^2}(t) + R(\gamma', W_1)\gamma'(t) = 0$$

cioè $W_1 \big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è di Jacobi per ogni i. Resta da dimostrare che W_1 è liscio. Sia dunque $W_2' \in T\Omega_\gamma$ un campo con $W_2'(t_i) = \Delta \frac{DW_1}{dt}(t_i)$ per $i = 1, \ldots, k-1$. Allora

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2') = \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \Delta \frac{DW_1}{dt}(t_i) \right\|^2 + \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t = 0.$$

Poichè W_1 è quasi ovunque di Jacobi. Ne segue che W_1 è liscio, il che completa la dimostrazione. $\square$

Capitolo 3

I Teoremi dell'Indice e di Rauch

Questo capitolo sarà diviso in due parti, la prima delle quali dedicata al Teorema dell'Indice di Morse e la seconda al Teorema di Rauch. Entrambi questi risultati sono cruciali nel percorso verso la dimostrazione del Teorema della Sfera: il primo è ovviamente fondamentale perchè abbia senso l'approccio che passa per i punti coniugati che esporremo nell'ultimo capitolo, mentre il secondo è lo strumento che ha permesso a Tsukamoto(1962) di dimostrare il caso in dimensione pari del Teorema senza l'utilizzo del Teorema di Topogonov.

3.1 Il Teorema dell'Indice di Morse

Definiamo l'*indice* λ dell'Hessiano

$$E_{**} : T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \to \mathbb{R}$$

come la massima dimensione di un sottospazio vettoriale $V \subseteq T\Omega_\gamma$ su cui E_{**} sia definito negativo. Ovviamente a priori tale massimo potrebbe non esistere: il risultato fondamentale di questa sezione implica, tra le altre cose, che questo non accade mai.

TEOREMA 3.1. *(Morse) L'indice λ di E_{**} è sempre finito, e coincide con il numero di punti $\gamma(t)$ con $0 < t < 1$ coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ, ciascuno contato con la sua molteplicità.*

Un corollario fondamentale sarà il seguente:

COROLLARIO 3.2. *Un segmento di geodetica $\gamma : [0, 1] \to M$ ha sempre un numero finito di punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ.*

OSSERVAZIONE 3.3. L'indice di E_{**} appena definito coincide con l'indice (sempre inteso come massima dimensione di un sottospazio su cui la forma è definita negativa) della forma bilineare e simmetrica $\mathcal{I}$ definita nell'osservazione 2.15. Non sviluppiamo tale uguaglianza nei dettagli, comunque piuttosto diretta dalla suddetta osservazione.

Notiamo ora che, per 1.28 e per 1.39, per ogni punto $\gamma(t)$ esiste un intorno fortemente convesso U tale che ogni coppia di punti in U è congiunta da un'unica geodetica minimizzante contenuta interamente in U e che dipende in modo liscio dai dati iniziali.

Dunque, per la compattezza di $\gamma[0,1]$ unita alla 1.39, esiste una suddivisione di $[0,1]$ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tale che ciascun segmento del tipo $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ sia interamente contenuto in un intorno U del tipo descritto sopra. In particolare, $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ è minimizzante $\forall i$.

Definizione 3.4. Definiamo $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k) \subset T\Omega_\gamma$ come lo spazio vettoriale formato dai campi W lungo γ tali che:

1. $W\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ sia un campo di Jacobi lungo $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ $\forall i$;
2. $W(0) = W(1) = 0$.

In particolare, grazie a (prop finitezza dim Jacobi), $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ ha dimensione finita.

Sia ora $T' \subseteq T\Omega_\gamma$ lo spazio vettoriale formato dai campi $V \in T\Omega_\gamma$ tali che $V(t_i) = 0$ $\forall\ 0 \leq i \leq k$. Il primo risultato verso il teorema dell'Indice è il seguente:

Lemma 3.5. *Lo spazio vettoriale $T\Omega_\gamma$ si decompone nella somma diretta*

$$T\Omega_\gamma = T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k) \oplus T'.$$

Tali sottospazi sono ortogonali rispetto alla forma E_{**}. Inoltre, E_{**} ristretta a T' è definita positiva.

Dimostrazione. Dato $W \in T\Omega_\gamma$, grazie alla proposizione 2.27 esiste un unico $W_1 \in T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ tale che $W_1(t_i) = W(t_i)$ per ogni i. Ovviamente $W - W_1 \in T'$: ne segue che i due sottospazi in questione generano $T\Omega_\gamma$, e sempre per 2.27 hanno solo il campo vettoriale nullo in comune. Ora presi $W_1 \in T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ e $W_2 \in T'$ dalla formula per la Variazione Seconda segue

$$\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = -\sum_t \left\langle 0\,, \Delta\frac{DW_1}{dt}(t) \right\rangle - \int_0^1 \langle\, W_2(t)\,, 0\,\rangle\, \mathrm{d}t = 0.$$

Dunque effettivamente i due sottospazi sono ortogonali rispetto a E_{**}. Resta da mostrare che E_{**} ristretto a T' è definito positivo: ricordiamo che per ogni $W \in T\Omega_\gamma$ l'Hessiano $E_{**}(W, W)$ è definito come $\frac{d^2 E\circ\alpha}{du^2}(0)$, dove $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ è una variazione di γ con velocità in 0 uguale a W. Se inoltre $W \in T'$ possiamo assumere $\alpha(u)(t_i) = \gamma(t_i)$ per ogni $u \in (-\epsilon, \epsilon)$ e per ogni i. Questo implica che, poichè $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ è minimizzante $\forall i$ e poichè $\alpha(u)$ è un cammino regolare a tratti per ogni u

$$E(\alpha(u)) \geq E(\gamma) = E(\alpha(0)).$$

Considerando $E \circ \alpha$ come funzione da $(-\epsilon, \epsilon)$ a $\mathbb{R}$, bisogna necessariamente avere $E_{**}(W, W) = \frac{d^2 E\circ\alpha}{du^2}(0) \geq 0$. Non resta da mostrare che quest'ultima derivata è 0 su T' se e solo se $W = 0$. Supponiamo $E_{**}(W, W) = 0$. Sappiamo già che per ogni $W_1 \in T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ si ha $E_{**}(W, W_1) = 0$. Per ogni $W_2 \in T'$ si ha ora

$$0 \leq E_{**}(W + cW_2, W + cW_2) = 2cE_{**}(W_2, W) + c^2 E_{**}(W_2, W_2)$$

per ogni $c \in \mathbb{R}$, da cui con un semplice conto si ha $E_{**}(W_2, W)) = 0$. Ma ora per la decomposizione in somma diretta si ha che W appartiene al radicale di E_{**}, che per il Teorema 2.28 è l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ. Ma T' contiene come unico campo di Jacobi lungo γ il campo nullo, il che completa la dimostrazione. $\square$

Un primo corollario è il seguente:

COROLLARIO 3.6. *L'indice di E_{**} coincide con l'indice di E_{**} ristretto a $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$; in particolare, tale indice è sempre finito.*

Andiamo ora verso la dimostrazione del Teorema 3.1: essa si comporrà di quattro lemmi dalle quali la tesi seguirà banalmente.
Innanzitutto, sia γ_τ la restrizione di γ all'intervallo $[0, \tau]$, sia $(E_0^\tau)_{**}$ l'hessiano associato a questa geodetica e sia $\lambda(\tau)$ l'indice di questo hessiano. Vogliamo dunque determinare $\lambda(1)$.

Asserzione 1. *$\lambda(\tau)$ è una funzione monotona di τ.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\tau < \tau'$ esiste uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ $\lambda(\tau)$ dimensionale di campi vettoriali lungo γ_τ che si annullano in $\gamma(0)$ e $\gamma(\tau)$ su cui l'hessiano $(E_0^\tau)_{**}$ è definito negativo. Estendendo questi campi ponendoli identicamente nulli tra $\gamma(\tau)$ e $\gamma(\tau')$ otteniamo che $\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau')$. $\square$

Asserzione 2. *$\lambda(\tau) = 0$ per τ abbastanza piccolo.*

DIMOSTRAZIONE. Se τ è abbastanza piccolo γ_τ è minimizzante, da cui per ogni variazione α di γ abbiamo

$$E(\alpha(u)) \geq E(\gamma)$$

da cui $\lambda(\tau) = 0$. $\square$

Asserzione 3. *Per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha $\lambda(\tau - \epsilon) = \lambda(\tau)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo innanzitutto senza perdita di generalità che la suddivisione $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ sia scelta in modo che esista i tale che $t_i < \tau < t_{i+1}$. Allora l'indice $\lambda(\tau)$ coincide con l'indice di $(E_0^\tau)_{**}$ ristretta allo spazio $T\Omega_\gamma(0, t_1, \ldots, t_i, \tau)$ dei campi di Jacobi a tratti lungo γ_τ che si annullanno agli estremi. Poichè grazie alla proposizione 2.27 un campo di Jacobi è determinato univocamente dai suoi valori estremali se i punti non sono coniugati, vale:

$$T\Omega_\gamma(0, t_1, \ldots, t_i, \tau) = TM_{\gamma(t_1)} \oplus TM_{\gamma(t_2)} \oplus \cdots \oplus TM_{\gamma(t_i)}.$$

Notiamo in particolare che tale spazio vettoriale è indipendente da τ. Ora $(E_0^\tau)_{**}$ è definito negativo su un sottospazio vettoriale $\mathcal{V} \subset T\Omega_\gamma(0, t_1, \ldots, t_i, \tau)$. Per ogni τ' abbastanza vicina a τ anche $(E_0^{\tau'})_{**}$ è definito negativo su $\mathcal{V}$, dunque $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$. Ma per l'asserzione 1 se $\tau' = \tau - \epsilon < \tau$ si ha $\lambda(\tau - \epsilon) \leq \lambda(\tau)$, che conclude. $\square$

Asserzione 4. *Sia ν la dimensione del radicale di $(E_0^\tau)_{**}$. Allora per $\epsilon > 0$ piccolo si ha*

$$\lambda(\tau + \epsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto mostriamo $\lambda(\tau+\epsilon) \geq \lambda(\tau)+\nu$. Vale $\dim T\Omega_\gamma(0, t_1, \ldots, t_i, \tau) = n \cdot i$ per quanto mostrato nella dimostrazione dell'asserzione precedente, per cui $(E_0^\tau)_{**}$

è definito positivo su uno spazio $\mathcal{W}$ di dimensione $n \cdot i - \lambda(\tau) - \nu$. Per tutti i τ' vicini a τ anche $(E_0^{\tau'})_{**}$ è definito positivo su $\mathcal{W}$. Dunque:

$$\lambda(\tau') \leq \dim T\Omega_\gamma(0, t_1, \ldots, t_i, \tau) - \dim \mathcal{W} = \lambda(\tau) + \nu.$$

Passiamo ora alla disuguaglianza opposta. Siano $W_1, \ldots, W_{\lambda(\tau)}$ campi vettoriali lungo γ_τ nulli agli estremi e tali che la matrice che ha al posto (i, j)

$$((E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j))$$

sia definita negativa. Siano $J_1, \ldots, J_\nu$ campi di Jacobi linearmente indipendenti lungo γ_τ, nulli agli estremi. Dalla lineare indipendenza segue che al variare di h i vettori

$$\frac{DJ_h}{dt}(\tau) \in TM_{\gamma(\tau)}$$

sono anch'essi indipendenti. Dunque possiamo scegliere $X_1, \ldots, X_\nu$ campi vettoriali lungo $\gamma_{\tau+\epsilon}$, nulli agli estremi, tali che la matriche avente al posto (i, j)

$$\left(\left\langle \frac{DJ_i}{dt}(\tau)\, , X_j(\tau) \right\rangle\right)$$

sia l'identità. Estendendo i W_i e i J_h a $\gamma_{\tau+\epsilon}$ mettendoli nulli tra τ e $\tau+\epsilon$, dalla formula per la variazione seconda segue:

$$(E_0^{\tau+\epsilon})_{**}(J_h, W_i) = 0,$$

$$(E_0^{\tau+\epsilon})_{**}(J_h, X_k) = 2\delta_{hk},$$

dove δ indica la delta di Kronecker. Adesso claimiamo che, dato $c > 0$, i $\lambda(\tau)+\nu$ campi vettoriali lungo $\gamma_{\tau+\epsilon}$

$$W_1, \ldots, W_{\lambda(\tau)}, \frac{J_1}{c} - cX_1, \ldots, \frac{J_\nu}{c} - cX_\nu,$$

generano uno spazio vettoriale su cui $(E_0^{\tau+\epsilon})_{**}$ è definita negativa. Infatti, la matrice che rappresenta tale forma nella base appena scritta è

$$\left[\begin{array}{c|c} (E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j) & cA \\ \hline cA^T & -4Id + c^2B \end{array}\right]$$

con A, B matrici fissate. Ora per c abbastanza piccolo questa matrice è chiaramente definita negativa, il che dimostra la tesi. □

Dalle asserzioni 2,3 e 4 segue la dimostrazione di 3.1.
Oltre a quello già citato, il Teorema dell'indice ha anche il seguente importante corollario:

Corollario 3.7. *(Jacobi) Un segmento di geodetica $\gamma : [0, a] \to M$ con $\gamma(0)$ non coniugato a $\gamma(a)$ non ha punti coniugati al suo interno se e solo se l'energia cresce lungo ogni variazione di γ. In particolare, un segmento di geodetica minimizzante non ha punti coniugati al suo interno.*

3.2 Un'approssimazione finito-dimensionale di Ω

Dal fatto che l'indice di E_{**} sia sempre finito si può immaginare che la "varietà di dimensione infinita" Ω possa essere sostituita, in molte applicazioni, da una varietà di dimensione finita. Ad esempio, sarà questo il caso nella dimostrazione del Teorema della Sfera nell'ultimo capitolo. Vediamo ora tale processo di approssimazione.

Definizione 3.8. Sia M una varietà connessa, $p, q \in M$, e sia ρ la sua distanza riemanniana. Dati $\omega(t), \omega'(t) \in \Omega$ e siano $s(t)$ ed $s'(t)$ le loro riparametrizzazioni per lunghezza d'arco. Allora definiamo una *distanza* d su Ω tramite:

$$d(\omega, \omega') := \max_{0 \le t \le 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La verifica che è effettivamente una distanza è banale. Notiamo inoltre che, con la topologia indotta da d, la funzione $E = E_0^1$ è continua da Ω a $\mathbb{R}$.

Fissato $c > 0$ denotiamo ora con Ω^c il sottoinsieme chiuso di Ω $E^{-1}([0, c])$, con $\mathrm{Int}\Omega^c$ la sua parte interna $E^{-1}([0, c))$. Scegliamo adesso una suddivisione qualunque $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ dell'intervallo unitario e definiamo $\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ come l'insieme dei cammini $\omega : [0, 1] \to M$ tali che

1. $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$;
2. $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sia una geodetica per ogni i.

Definiamo finalmente gli spazi che ci interessano davvero:

$$\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c := \Omega^c \cap \Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k),$$

$$\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c := (\mathrm{Int}\Omega^c) \cap \Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k).$$

Lemma 3.9. *Data M una varietà riemanniana completa e $c > 0$ tale che $\Omega^c \neq \varnothing$, per ogni suddivisione sufficientemente fine dell'intervallo unitario $\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$ è dotabile della struttura di varietà liscia finito dimensionale.*

Dimostrazione. Sia S la palla

$$\left\{ x \in M : \rho(x, p) \le \sqrt{c} \right\}.$$

Notiamo che, grazie a $L^2 \le E \le c$, ogni cammino di Ω^c sta in S. Poichè (M, ρ) è completo, S è compatto: ne segue per 1.39 che esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in S$ con $\rho(x, y) < \epsilon$ esiste un'unica geodetica che unisce x a y di lunghezza $< \epsilon$, e tale geodetica dipende ovviamente il modo liscio da x e y. Scegliamo ora una suddivisione di $[0, 1]$ tale che $t_i - t_{i-1} < \frac{\epsilon^2}{c}$: allora per ogni geodetica a tratti

$$\omega \in \Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$$

si ha che

$$\left(L_{t_{i-1}}^{t_i} \omega \right)^2 = (t_i - t_{i-1}) \left(E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega \right) \le (t_i - t_{i-1})(E\omega) \le (t_i - t_{i-1})c < \epsilon^2.$$

Pertanto il segmento di geodetica $\omega\big|_{[t_1,t_{i+1}]}$ è univocamente determinato dai suoi punti estremali. Ne segue che ω è univocamente determinata dai punti

$$\omega(t_1),\omega(t_2),\dots,\omega(t_{k-1})\in M^{k-1}.$$

Tale corrispondenza induce quindi un omeomorfismo

$$\omega\to(\omega(t_1),\dots,\omega(t_{k-1}))$$

tra $\mathrm{Int}\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)^c$ e il prodotto di M con se stessa $k-1$ volta M^{k-1}. Questo induce ovviamente in modo naturale una struttura differenziabile su $\mathrm{Int}\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)^c$, e completa la dimostrazione. □

Nel seguito per alleggerire la notazione porremo $\mathrm{Int}\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)^c=B$ e con $E':B\to\mathbb{R}$ la restrizione di $E:\Omega\to\mathbb{R}$ a B. Diamo adesso il teorema fondamentale della sezione, che mostra come le considerazioni fatte fin'ora su E passino, quasi immutate, ad E'.

Teorema 3.10. *La funzione E' è liscia. Inoltre per ogni $a<c$ l'insieme*

$$B^a:=(E')^{-1}[0,a]$$

è compatto ed è un retratto per deformazione di Ω^a. I punti critici di E' coincidono con i punti critici di E in $\mathrm{Int}\Omega^c$, ossia le geodetiche continue da p a q di lunghezza minore di $\sqrt{c}$. Infine l'indice di E'_{**} nei suddetti punti critici coincide con quello di E_{**}.

Dimostrazione. Poichè ω dipende in modo liscio dai punti

$$\omega(t_1),\omega(t_2),\dots,\omega(t_{k-1})\in M^{k-1}$$

anche l'energia E' ne dipende lisciamente, grazie alla formula esplicita

$$E'(\omega)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho(\omega(t_{i-1}),\omega(t_i))^2}{t_i-t_{i-1}}$$

dovuta al fatto che ω è una geodetica a trati. Dunque per $a<c$ l'insieme B^a è omeomorfo all'insiem delle $(k-1)$-tuple $(p_1,\dots p_{k-1})\in S^{k-1}$ tali che

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho(p_{i-1},p_i)}{t_i-t_{i-1}}\le a.$$

Notiamo che tale insieme è compatto. Una retrazione $r:\mathrm{Int}\Omega^c\to B$ è la seguente: $r(\omega)$ è l'unica geodetica a tratti in B tale che ogni $r(\omega)\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ è una geodetica di lunghezza $<\epsilon$ che unisce $\omega(t_{i-1})$ a $\omega(t_i)$. La disuguaglianza

$$\rho(p,\omega(t))^2\le(L\omega)^2\le E\omega<c$$

implica $\omega[0,1]\subset S$. La disuguaglianza

$$\rho(\omega(t_{i-1}),\omega(t_i))^2\le(t_i-t_{i-1})\left(E_{t_{i-1}}^{t_i}\omega\right)<\frac{\epsilon^2}{c}\cdot c=\epsilon^2$$

implica che la definizione data per $r(\omega)$ ha senso. Definiamo dunque una famiglia di mappe ad un parametro

$$r_u : \mathrm{Int}\Omega^c \to \mathrm{Int}\Omega^c$$

ponendo, per $t_{i-1} \leq u \leq t_i$:

$$\begin{cases} r_u(\omega)\,|[0, t_{i-1}] = r(\omega)\,|[0, t_{i-1}] \\ r_u(\omega)\,|[t_{i-1}, u] = \text{geodetica minimale tra } \omega(t_{i-1}) \text{ e } \omega(u) \\ r_u(\omega)\,|[u, 1] = \omega\,|[u, 1] \end{cases}$$

Si verifica facilmente che r_0 è l'identità su $\mathrm{Int}\Omega^c$, che $r_1 = r$ e che $r_u(\omega)$ è continua in entrambe le variabili. Poichè $E(r_u(\omega)) \leq E(\omega)$ abbiamo che B^a è a sua volta un retratto di Ω^a. Per la formula per la variazione prima dell'energia (referenza) i punti critici di E' sono esattamente le geodetiche non a tratti, che in particolare sono geodetiche a tratti e stanno dunque in B. Infine, data una qualsiasi variazione

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to B$$

di γ fatta da geodetiche a tratti ha come velocità un campo di Jacobi a tratti. Possiamo dunque identificare TB_γ con $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \ldots, t_k)$, e poichè per il Lemma 3.5 questo è l'unico spazio su cui serve calcolare l'indice di E segue infine anche che l'indice di E'_{**} sui suoi punti critici coincide con quello di E_{**}. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

3.3 Il Teorema di Rauch

Il Teorema di Rauch, che qui dimostriamo in quanto sarà un risultato chiave nella dimostrazione del Teorema della Sfera, è uno dei risultati fondamentali della Geometria Riemanniana. Esprime in maniera precisa il fatto intuitivo che, al crescere della curvatura, la lunghezza (dei campi di Jacobi nel teorema, e delle curve vere e proprie in uno dei corollari) diminuisce.

Teorema 3.11. *(Rauch) Siano M_1^n ed M_2^{n+k} due varietà riemanniane complete, siano $\gamma_1 : [0, a] \to M$ e $\gamma_2 : [0, a] \to N$ due geodetiche con $\|\gamma_1'(t)\| = \|\gamma_2'(t)\|$ per ogni $t \in [0, a]$ e siano J_1 e J_2 campi di Jacobi lungo γ_1 e γ_2 rispettivamente tali che*

$$J_1(0) = J_2(0) = 0,$$

$$\langle\, J_1'(0)\,, \gamma_1'(0)\,\rangle = \langle\, J_2'(0)\,, \gamma_2'(0)\,\rangle\,,$$
$$\|J_1'(0)\| = \|J_2'(0)\|\,.$$

Supponiamo inoltre che γ_2 non abbia punti coniugati su $(0, a]$ e che, per ogni t e ogni $x_1 \in T_{\gamma_1(t)}M_1$ e $x_2 \in T_{\gamma_2(t)}M_2$ si abbia

$$K_2(x_2, \gamma_2'(t)) \geq K_1(x_1, \gamma_1'(t))$$

dove K_i rappresenta la curvatura sezionale sulla varietà opportuna. Allora

$$\|J_2\| \leq \|J_1\|\,.$$

Inoltre, se per qualche $t_0 \in (0, a]$ vale l'uguaglianza allora $K_2(J_2(t), \gamma_2'(t)) = K_1(J_1(t), \gamma_1'(t))$ per ogni $t \in [0, t_0]$.

Prima della dimostrazione vera e propria ci serviranno un paio di fatti preliminari, che dimostriamo ora. Uno di questi, il Lemma 3.12, è un fatto molto più generale dotato di un gran numero di altre applicazioni.
Ricordiamo la definizione di index form:

$$\mathcal{I}_{t_0}(W,V) = \int_0^{t_0} (\langle W', V' \rangle - \langle R(\gamma', W)\gamma', V \rangle)\, \mathrm{d}t.$$

Lemma 3.12. *(Index Lemma) Sia $\gamma : [0,a] \to M^n$ una geodetica senza punti coniugati a $\gamma(0)$ in $(0,a]$. Sia J un campo di Jacobi lungo γ, con $\langle J, \gamma' \rangle = 0$, e sia V un campo vettoriale liscio a tratti lungo γ con $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. Supponiamo che $J(0) = V(0) = 0$ e $J(t_0) = V(t_0)$ con $t_0 \in (0,a]$. Allora*

$$\mathcal{I}_{t_0}(J,J) \leq \mathcal{I}_{t_0}(V,V)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $V = J$ su $[0,t_0]$.

Dimostrazione. Lo spazio vettoriale $\mathcal{J}$ dei campi di Jacobi J lungo γ con $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ ha dimensione $n-1$: sia $\{J_1, \dots, J_{n-1}\}$ una sua base. Per l'assenza di punti coniugati $\{J_1(t), \dots, J_{n-1}(t)\}$ è bae dell'ortogonale a γ' in $T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in (0,a]$. Ne segue che esistono $f_i(t)$ funzioni lisce a tratti su $(0,a]$ tali che

$$V(t) = \sum_i f_i(t) J_i(t).$$

Per prima cosa vogliamo mostrare che le f_i sono estendibili in modo liscio in 0. Per fare ciò, sappiamo che esistono A_i lisce a tratti tali che $J_i(t) = tA_i(t)$. Allora $A_i(0) = J_i'(0)$, e per l'osservazione 2.18 gli $A_i(0)$ sono indipendenti. Ne segue che $A_i(t)$ sono indipendenti per ogni $t \in [0,a]$, e vale

$$V(t) = \sum_i g_i(t) A_i(t)$$

con le g_i lisce a tratti su $[0,a]$ e $g_i(0) = 0$. Applicando ancora **??** si trova $g_i(t) = th_i(t)$ con le h_i lisce a tratti su $(0,a]$, e siccome $f_i = h_i$ per $t \neq 0$ abbiamo esteso con successo le funzioni. Adesso dimostreremo che, nella parte interna di ciascun intervallo su cui le f_i sono lisce:

$$\begin{aligned}\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle = &\left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_j f_j' J_j \right\rangle \\ &+ \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j' \right\rangle.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Difatti, siccome

$$R(\gamma', V)\gamma' = R(\gamma', \sum_I f_i J_i)\gamma' = \sum_i f_i R(\gamma', J_i)\gamma' = -\sum_i f_i J_i'',$$

si ha

$$\begin{aligned}
&\langle V' , V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma' , V \rangle = \\
&\qquad = \left\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j + \sum_j f_j J_j' \right\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma' , V \rangle \\
&\qquad = \left\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j' J_j \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \sum_i f_i J_i'' , \sum_j f_j J_j \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j' \right\rangle &= \left\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&+ \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' + \sum_j f_j J_j'' \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j J_j' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&+ \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j'' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dunque per mostrare il claim ci basta

$$\left\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j \right\rangle = \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' \right\rangle .$$

Per mostrare ciò poniamo

$$h(t) = \langle J_i' , J_j \rangle - \langle J_i , J_j' \rangle .$$

. Notiamo che $h(0) = 0$ e che

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \langle J_i'' , J_j \rangle + \langle J_i' , J_j' \rangle - \langle J_i' , J_j' \rangle - \langle J_i , J_j'' \rangle \\
&= - \langle R(\gamma', J_i)\gamma' , J_j \rangle + \langle J_i , R(\gamma', J_j)\gamma' \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

da cui $h \equiv 0$, cioè il claim è dimostrato. Applicando il claim prima a V e poi a J otteniamo:

$$\mathcal{I}_{t_0}(V, V) = \left\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j' \right\rangle (t_0) + \int_0^{t_0} \left\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j' J_j \right\rangle \mathrm{d}t;$$

$$\mathcal{I}_{t_0}(J,J) = \left\langle \sum_i \alpha_i J_i \,, \sum_j \alpha_j J_j' \right\rangle (t_0).$$

Siccome $J(t_0) = V(t_0)$ si ha che $\alpha_i = f_i(t_0)$, e dunque

$$\mathcal{I}_{t_0}(V,V) = \mathcal{I}_{t_0}(J,J) + \int_0^{t_0} \left\| \sum_i f_i' J_i \right\|^2 \mathrm{d}t.$$

Da quest'ultima segue $\mathcal{I}_{t_0}(J,J) \leq \mathcal{I}_{t_0}(V,V)$, che dimostra la prima parte del lemma. Se $\mathcal{I}_{t_0}(J,J) = \mathcal{I}_{t_0}(V,V)$ allora $\sum_i f_i' J_i = 0$. Per la lineare indipendenza dei J_i per $t \neq 0$ abbiamo, per continuità, che $f_i' = 0$ per ogni i e ogni $t \in [0, t_0]$. Dunque le f_i sono costanti e, siccome $f_i(t_0) = \alpha_i$, abbiamo $f_i(t) = \alpha_i$ che implica $V = J$. □

Siamo ora pronti per mostrare il Teorema di Rauch.

Dimostrazione. 3.11 Osserviamo che, grazie alla proposizione 2.26, la condizione $\langle J_1'(0) \,, \gamma_1'(0) \rangle = \langle J_2'(0) \,, \gamma_2'(0) \rangle$ è equivalente a $\langle J_1 \,, \gamma_1' \rangle = \langle J_2 \,, \gamma_2' \rangle$. Inoltre, poichè

$$\langle J_1 \,, \gamma_1' \rangle \, \gamma_1' = \langle J_1'(0) \,, \gamma_1'(0) \rangle \, t\gamma_1' + \langle J_1(0) \,, \gamma_1'(0) \rangle \, \gamma_1'$$

le componenti tangenziali di J_1 e J_2 hanno, per ipotesi, la stessa lunghezza. Possiamo dunque supporre che

$$\langle J \,, \gamma' \rangle = 0 = \langle J_2 \,, \gamma_2' \rangle \,.$$

Se $\|J_1'(0)\| = \|J_2'(0)\| = 0$, allora $\|J_1\| = \|J_2\| = 0$. Così non fosse, poniamo $\|J_1(t)\|^2 = v_1(t)$ e $\|J_2(t)\|^2 = v_2(t)$. Poichè γ_2 non ha punti coniugati in $(0, a]$, la funzione $\frac{v_1(t)}{v_2(t)}$ è ben definita per $t \in (0, a]$. Per il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{t \to 0} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1''(t)}{v_2''(t)} = \frac{\|J_1'(0)\|^2}{\|J_2'(0)\|^2} = 1.$$

Pertanto per provare la tesi ci basta mostrare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \right) \geq 0$$

che si riformula in $v_1' v_2 \geq v_1 v_2'$. Per mostrare ciò, fissiamo $t_0 \in (0, a]$. Se $v_1(t_0) = 0$ allora

$$v_1'(t_0) = 2 \, \langle J_1'(t_0) \,, J_1(t_0) \rangle = 0$$

da cui la tesi. Se invece $v_1(t_0) \geq 0$, definiamo

$$U_1(t) = \frac{J_1(t)}{\sqrt{v_1(t_0)}}, \quad U_2(t) = \frac{J_2(t)}{\sqrt{v_2(t_0)}},$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{v_1'(t_0)}{v_1(t_0)} &= \frac{2 \, \langle J_1'(t_0) \,, J_1(t_0) \rangle}{\langle J_1(t_0) \,, J_1(t_0) \rangle} = 2 \, \langle U_1'(t_0) \,, U_1(t_0) \rangle = \langle U_1 \,, U_1 \rangle' \, (t_0) \\ &= \int_0^{t_0} \langle U_1 \,, U_1 \rangle'' \, \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \{ \langle U_1' \,, U_1' \rangle - \langle U_1 \,, R(\gamma', U_1)\gamma' \rangle \} \, \mathrm{d}t \\ &= 2\mathcal{I}_{t_0}(U_1, U_1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Similmente,
$$\frac{v_2'(t_0)}{v_2(t_0)} = 2\mathcal{I}_{t_0}(U_2, U_2).$$
Dall'arbitrarietà di t_0 basta quindi mostrare
$$\mathcal{I}_{t_0}(U_2, U_2) \leq \mathcal{I}_{t_0}(U_1, U_1).$$
Per fare ciò fissiamo $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots f_{n+k}\}$ basi parallele e ortonormali dei campi lungo γ_1 e γ_2 rispettivamente, tali che:
$$e_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|}, \quad e_2(t_0) = U_1(t_0),$$
$$f_1(t) = \frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma_2'(t)\|}, \quad f_2(t_0) = U_2(t_0).$$
Definiamo inoltre una mappa ϕ dai campi vettoriali lungo γ_1 a quelli lungo γ_2 definita da
$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(t)e_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)f_i(t).$$
Tale mappa soddisfa
$$\langle\, \phi V_1 \,, \phi V_2 \,\rangle = \langle\, V_1 \,, V_2 \,\rangle$$
$$(\phi V)' = \phi(V').$$
Ne segue che, per l'ipotesi sulle curvature sezionali e per il fatto che le due geodetiche considerate hanno la stessa velocità:
$$\mathcal{I}_{t_0}(\phi(U_1), \phi(U_1)) \leq \mathcal{I}_{t_0}(U_1, U_1).$$
Ma ora U_2 e $\phi(U_1)$ sono campi vettoriali lungo γ_2 che rispettalo le ipotesi del lemma 3.12, ed essendo U_2 un campo di Jacobi si ha
$$\mathcal{I}_{t_0}(U_2, U_2) \leq \mathcal{I}_{t_0}(\phi(U_1), \phi(U_1)) \leq \mathcal{I}_{t_0}(U_1, U_1)$$
che dimostra la disuguaglianza della tesi. Adesso, se $\|J_1(t_0)\| = \|J_2(t_0)\|$, siccome abbiamo per ogni $t \neq 0$ che $\mathcal{I}_t(U_2, U_2) \leq \mathcal{I}_t(U_1, U_1)$ e quindi $v_1'v_2(t) \geq v_1v_2'(t)$, si ha che
$$v_1'v_2(t) = v_1v_2'(t), \quad t \in (0, t_0]$$
e dunque
$$\mathcal{I}_t(\phi(U_1), \phi(U_1)) = \mathcal{I}_t(U_1, U_1), \quad t \in (0, t_0].$$
Quest'ultima uguaglianza implica, per le proprietà di ϕ, che
$$K_1(J_1(t), \gamma_1'(t)) = K_2(J_2(t), \gamma_2'(t))$$
per $t \in (0, t_0]$ e, per continuità, anche in $t = 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Vediamo una prima applicazione del Teorema di Rauch che lega i punti coniugati su una varietà M a una disuguaglianza sulla curvatura.

Proposizione 3.13. *Supponiamo esistano costanti H ed L tali che la curvatura sezionale di una varietà M soddisfi*

$$0 < L \leq K \leq H.$$

Allora detta γ una geodetica in M la distanza d tra due punti coniugati consecutivi soddisfa

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza $d \geq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ applichiamo il Teorema di Rauch a M^n e alla sfera di curvatura costantemente H $\mathbb{S}^n(H)$. Sia dunque $\gamma_1 : [0,l] \to M$ una geodetica normalizzata con $\gamma(0) = p_1$, e sia J_1 un campo di Jacobi con $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Fissiamo $p_2 \in \mathbb{S}^n(H)$, una geodetica $\gamma_2 \to \mathbb{S}^n$ con $\gamma_2(0) = p_2$ e un campo di Jacobi J_2 lungo γ_2 con $J_2(0) = 0$, $\langle J_2, \gamma_2' \rangle = 0$ e $\|J_2'(0)\| = \|J_1'(0)\|$. Poichè γ_2 non ha punti coniugati nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{\sqrt{H}})$, grazie a Rauch $\|J_1(t)\| \geq \|J_2(t)\| > 0$ se $t \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{H}})$. Per cui $d \geq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Per l'altra disuguaglianza facciamo un ragionamento simile con la sfera di curvatura costante L, supponendo per assurdo $d > \frac{\pi}{\sqrt{L}}$ e concludendo sempre con Rauch. □

Adesso mostriamo una conseguenza del Teorema di Rauch che genera da una disuguaglianza sulla norma dei campi di Jacobi ad una sulla lunghezza delle curve vere e proprie.

Lemma 3.14. *Siano M_1 ed M_2 varietà riemanniane della stessa dimensione tali che, per ogni coppia di punti $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$, piani σ_1 e σ_2 nei rispettivi spazi tangenti si abbia, detta K_i la curvatura sezionale opportuna,*

$$K_2(p_2, \sigma_2) \geq K_1(p_1, \sigma_1).$$

Fissiamo un'isometria $i : T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$, e sia $r > 0$ tale che $\exp_{p_1}$ è un diffeomorfismo su $B_r(0) \subset T_{p_1}M_1$ e tale che exp_{p_2} sia non degenre su $B_r(0) \subset T_{p_2}M_2$. Sia $c_1 : [0,a] \to \exp_{p_1}(B_r(0))$ una curva liscia e definiamo $c_2 : [0,a] \to \exp_{p_2}(B_r(0))$ con

$$c_2(s) = \exp_{p_2} \circ\, i \circ \exp_{p_1}^{-1}(c_1(s)).$$

Allora

$$L(c_1) \geq L(c_2).$$

Dimostrazione. Consideriamo la curva $\overline{c}(s) = \exp_{p_1}^{-1} c(s)$ in $T_{p_1}M_1$. Fissiamo s e consideriamo la geodetica radiale $\gamma_s(t) = \exp_{p_1} t\overline{c}(s)$. La mappa

$$f(t,s) = \gamma_s(t), \quad 0 \leq s \leq a, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

è una superficie parametrizzata, e dunque $\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = J_s(t)$ è un campo di Jacobi lungo γ_s con $J_s(0) = 0$ e $J_s(1) = c'(s)$. Inoltre

$$\frac{DJ_s}{dt}(0) = \frac{D}{dt}\left\{(d\ \exp_{p_1})_{t\bar{(c)}(s)}(t\overline{c}'(s))\right\}\Big|_{t=0} = \overline{c}'(s).$$

Consideriamo una superficie parametrizzata $g(t,s)$ in M_2 data da

$$g(t,s) = \exp_{p_2} ti(\overline{c}(s)) = \widetilde{\gamma}_s(t),$$

notando che $\widetilde{\gamma}_s$ è una geodetica. Il campo di Jacobi $\widetilde{J}_s(t) = \frac{\partial g}{\partial s}(t,s)$ soddisfa

$$\widetilde{J}_s(0) = 0, \quad \widetilde{J}_s(1) = \overline{c}'(s), \quad \frac{D\widetilde{J}_s}{dt}(0) = i\overline{c}'(s).$$

Poichè i è un'isometria

$$\|J_s(0)\| = \left\|\widetilde{J}_2(0)\right\| = 0, \quad \|J_s'(0)\| = \left\|\widetilde{J}_s'(0)\right\|$$

e

$$\left\langle \widetilde{J}_s'(0)\,, \widetilde{\gamma}_s'(0) \right\rangle = \langle\, i\overline{c}'(s)\,, i\gamma_s'(0)\,\rangle = \langle\, \overline{c}'(s)\,, \gamma_s'(0)\,\rangle = \langle\, J_s'(0)\,, \gamma_s'(0)\,\rangle\,.$$

Dal teorema di Rauch segue allora

$$\|\overline{c}'(s)\| = \left\|\widetilde{J}_s'(1)\right\| \leq \|J_s(1)\| = \|c'(s)\|\,,$$

che integrando porta alla tesi. □

Capitolo 4

La dimostrazione del Teorema della Sfera

Siamo finalmente giunti alla dimostrazione vera e propria del Teorema della Sfera, che utilizzerà tutti gli strumenti esposti nei capitoli precedenti. Enunciamone quindi precisamente la tesi:

TEOREMA 4.1. *Sia M^n, $n \geq 3$, una varietà riemanniana compatta e semplicemente connessa, la cui curvatura sezionale K soddisfa, detti h un reale e $K_{\max}$ il massimo di K:*

$$0 < hK_{\max} < K \leq K_{\max}.$$

Allora, se $h = \frac{1}{4}$, M è omeomorfa a $\mathbb{S}^n$.

4.1 Il *cut locus*

Iniziamo con una definizione:

DEFINIZIONE 4.2. Sia M una varietà riemanniana completa con distanza d, $p \in M$, e sia $\gamma : [0, \infty) \to M$ una geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\|\gamma'\| = 1$. Definiamo il *punto di taglio* di p lungo γ come il massimo, se esiste, dei $t \in [0, \infty)$ tali che $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Definiamo e indichiamo con $C_m(p)$ il *cut locus* di p come l'unione lungo tutte le geodetiche passanti per p dei punti di taglio di p.

OSSERVAZIONE 4.3. Notiamo che, per t piccolo, essendo γ localmente minimizzante vale effettivamente $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, e che se per un certo t_1 vale $d(\gamma(0), \gamma(t_1)) > t_1$ allora questo vale per ogni $t \geq t_1$. Notiamo inoltre che se M è compatta essa ha diametro finito, e quindi lungo ogni geodetica esiste un punto di taglio. Anche la proposizione inversa è vera, come mostreremo più avanti.

Diamo alcune proprietà fondamentali del cut locus.

PROPOSIZIONE 4.4. *Supponiamo $\gamma(t_0)$ sia il punto di taglio di $p = \gamma(0)$ lungo γ. Allora vale almeno una delle seguenti:*

1. *$\gamma(t_0)$ è il primo punto coniugato di $\gamma(0)$ lungo γ;*

2. *esiste una geodetica $\sigma \neq \gamma$ da p a $\gamma(t_0)$ con $L(\sigma) = L(\gamma)$.*

Inoltre, se vale una di queste due condizioni esiste un punto di taglio $\gamma(\bar{t})$ con $\bar{t} \in (0, t_0]$.

Dimostrazione. Sia $\{\epsilon_i\}$ una successione con $\epsilon_i > 0$ e $\epsilon_i \to 0$, e sia σ_i una geodetica minimizzante normalizzata che congiunge p a $\gamma(t_0 + \epsilon_i)$, e sia $\{\sigma_i'(0)\} \in T_pM$. Poichè la dimensione di T_pM è finita possiamo supporre, a meno di sottosuccessioni, che $\{\sigma_i'(0)\}$ converga e che dunque per continuità esista una geodetica minimizzante σ tale che $\sigma_i \to \sigma$ (nel senso che converge punto a punto nello spazio metrico) che congiunge p a $\gamma(t_0)$, per la quale vale dunque $L(\sigma) = L(\gamma)$. Se $\sigma \neq \gamma$ abbiamo concluso: supponiamo quindi $\sigma = \gamma$, e dobbiamo mostrare che $\gamma(t_0)$ è il primo punto coniugato di $\gamma(0)$. Grazie alla proposizione 2.25 ci basta verificare che $t_0\gamma'(0)$ è critico per $d\exp_p$. Supponiamo per assurdo che non lo sia: allora per continuità del determinante esiste un intorno U di $t_0\gamma'(0)$ sul quale $\exp_p$ è un diffeomorfismo. Per ipotesi $\gamma(t_0 + \epsilon_j) = \sigma_j(t_0 + \epsilon_j')$ con $\epsilon_j' \leq \epsilon_j$: prendiamo ϵ_j abbastanza piccolo affinchè $(t_0 + \epsilon_j')\sigma_j'(0)$ e $(t_0 + \epsilon_j)\gamma'(0)$ appartengano a U. Allora

$$\begin{aligned} \exp_p((t_0 + \epsilon_j)\gamma'(0)) &= \gamma(t_0 + \epsilon_j) \\ &= \sigma_j(t_0 + \epsilon_j') = \exp_p((t_0 + \epsilon_j')\sigma_j'(0)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dunque $(t_0 + \epsilon_j)\gamma'(0) = (t_0 + \epsilon_j')\sigma_j'(0) \Rightarrow \gamma'(0) = \sigma_j'(0)$ perchè hanno norma unitaria, ma questo è assurdo perchè σ_j è minimizzante e invece γ non può minimizzare fino a $\gamma(t_0 + \epsilon_j)$, e dimostra la prima parte dell'enunciato. Per il viceversa, supponiamo valga la prima condizione: grazie al corollario 3.7 abbiamo che una geodetica non può minimizzare passato il primo punto coniugato: ne segue che il punto di taglio di p lungo γ deve essere $\gamma(\bar{t})$ deve soddisfare $\bar{t} \leq t_0$. Se invece vale la seconda, sia $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo affinchè $\sigma(t_0 - \epsilon)$ e $\gamma(t_0 + \epsilon)$ siano entrambi contenuti in un un intorno totalmente normale di $\gamma(t_0)$. Sia τ la geodetica minimizzante che unisce $\sigma(t_0 - \epsilon)$ a $\gamma(t_0 + \epsilon)$: la curva ottenuta percorrendo σ fino a $t_0 - \epsilon$ e poi τ ha lunghezza strettamente minore di $t_0 + \epsilon$ per la disuguaglianza triangolare della distanza d, e pertanto la tesi è dimostrata. □

Vediamo due corollari.

Corollario 4.5. *Se q è punto di taglio di p lungo γ, allora p è punto di taglio di q lungo $-\gamma$.*

Dimostrazione. Per quanto appena mostrato se q è di taglio per p lungo γ allora o q è coniugato a p oppure esiste una geodetica $\sigma \neq \gamma$ che unisce p a q e che ha la stessa lunghezza di γ. In entrambi i casi il punto di taglio di q lungo $-\gamma$ non arriva prima di p, e poichè $L(-\gamma) = d(p, q)$ si ha che p è di taglio per q. □

Corollario 4.6. *Se $q \in M \setminus C_m(p)$ esiste un unica geodetica minimizzante che unisce p e q.*

Il corollario 4.6 mostra che $\exp_p$ è iniettiva su una palla aperta $B_r(p)$ centrata in p se e solo se il raggio r è minore o uguale della distanza tra p e $p \in M$. Diamo quindi una definizione.

DEFINIZIONE 4.7. Definiamo il *raggio di iniettività* di una varietà riemanniana completa M come

$$i(M) := \inf_{p \in M} d(p, C_m(p)).$$

Il raggio di iniettività sarà un oggetto fondamentale nella dimostrazione del Teorema della Sfera: per studiarlo dobbiamo prima indagare le proprietà topologiche di $C_m(p)$. Facendolo, mostreremo che se M è compatta il $i(M)$ è positivo: nella sezione successiva ne forniremo inoltre una stima dal basso.
Consideriamo $T_1 M$ il sottoinsieme del fibrato tangente di M formato dai vettori di norma unitaria, e consideriamo una funzione $f : T_1 M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definita da:

$$f(\gamma(0), \gamma'(0)) = \begin{cases} t_0 & \text{se } \gamma(t_0) \text{ è punto di taglio di } \gamma(0) \text{ lungo } \gamma, \\ \infty & \text{se tale punto di taglio non esiste.} \end{cases}$$

Dotiamo ora $\mathbb{R} \cup \infty$ di una topologia una cui base di aperti è data dagli intervalli aperti e limitati $(a, b) \subset \mathbb{R}$ e dagli insiemi del tipo $(a, \infty]$. Notiamo che $[a, \infty]$ è compatto in questa topologia e che una sequenza $\{t_n\} \to \infty$ nel senso classico.

PROPOSIZIONE 4.8. *Con la topologia appena introdotta, f è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente ci basta mostrare la continuità per successioni. Siano allora $(\gamma_i(0), \gamma_i'(0)) \to (\gamma(0), \gamma'(0))$, e siano $t_0^i, t_0 \in \mathbb{R} \cup \infty$ tali che $\gamma_i(t_0^i)$, $\gamma(t_0)$ sono i punti di taglio. Dobbiamo mostrare che $\lim t_0^i = t_0$. Mostreremo $\limsup t_0^i \leq t_0$ e $\liminf t_0^i \geq t_0$, che ovviamente porterà alla tesi.
Per quanto riguarda il $\limsup$, se $t_0 = \infty$ la tesi è banale. Altrimenti, fissiamo $\epsilon > 0$ qualunque, ed osserviamo che non possono esistere infiniti indici j tali che $t_0 + \epsilon < t_0^j$, o si avrebbe

$$d(\gamma_j(0), \gamma_j(t_0 + \epsilon)) = t_0 + \epsilon,$$

che per continuità di d implicherebbe $d(\gamma(0), \gamma(t_0 + \epsilon)) = t_0 + \epsilon$, contro il fatto che $\gamma(t_0)$ sia punto di taglio. Ne segue $\limsup t_0^j \leq t_0 + \epsilon$ per ogni ϵ, che mostra il primo claim. Per il $\liminf$, possiamo innanzitutto ancora supporre che esso sia $< \infty$. Adesso, notiamo che se troviamo una sottosuccessione dei t_0^j convergente al $\liminf$ e in cui ogni punto t_0^j è tale che $\gamma_j(t_0^j)$ è coniugato a $\gamma_j(0)$ lungo γ_j, avremmo concluso perchè limite di punti coniugati è coniugato e avremmo quindi $\gamma(\liminf t_0^j)$ coniugato, e concluderemmo in quanto $\gamma(t_0)$ è di taglio. Indichiamo con t_1 il $\liminf$, e supponiamo dunque per assurdo esista una sequenza $t_0^j \to t_1$ in cui $\gamma_j(t_0^j)$ non è coniugato a $\gamma_j(0)$ per tutti i j. Allora esistono geodetiche $\sigma_j \neq \gamma_j$ che soddisfano le condizioni descritte nella proposizione 4.4. A meno di sottosuccessioni possiamo supporre $\sigma_j \to \sigma$, con σ geodetica che unisce $\gamma(0)$ a $\gamma(t_1)$. Se $\gamma \neq \sigma$ sempre per la 4.4 abbiamo $t_0 \leq t_1$. Se invece $\sigma = \gamma$ ripetendo la dimostrazione fatta sempre in 4.4 si mostra che $\gamma(t_1)$ è coniugato a $\gamma(0)$, che mostra la tesi. $\square$

Questa proposizione ci dà subito diverse informazioni sulla topologia di $C_m(p)$.

COROLLARIO 4.9. *Per ogni $p \in M$ $C_m(p)$ è chiuso. In particolare, se M è compatta, $C_m(p)$ è compatto.*

Dimostrazione. Ovviamente vale

$$C_m(p) = \{\gamma(t) : t = f(p, \gamma'(0)\},$$

con γ geodetica normalizzata. Pertanto se q è un punto di accumulazione per punti di $C_m(p)$, esiste una sequenza $\gamma_j(t_j)$ con $t_j = f(p, \gamma_j'(0))$ tale che $\lim \gamma_j(t_j) = q$. A meno di sottosuccessioni abbiamo $\gamma_j(0) \to v$ con v unitario. Sia γ la geodetica con $\gamma(0) = p$, $\gamma')0) = v$. Allora per la continuità di f:

$$\begin{aligned} q = \lim \gamma_j(t_j) &= \lim \gamma_j(f(p, \gamma_j'(0))) \\ &= \lim \exp_p(f(p, \gamma_j'(0))\gamma_j'(0)) = \exp_p(f(p, \gamma'(0))\gamma'(0)) \\ &= \gamma(f(p, \gamma'(0))) \in C_m(p), \end{aligned} \tag{4.2}$$

che conclude la dimostrazione. □

Corollario 4.10. *Se M è completa ed esiste $p \in M$ per il quale esiste un punto di taglio lungo ogni geodetica passante per esso, allora M è compatta.*

Dimostrazione. Con una facile verifica notiamo che

$$M = \{\gamma(t) : \gamma \text{ geodetica unitaria per } p, t \leq f(p, \gamma'(0))\}.$$

Dalla continuità di f di ha che f è limitata, e per la compattezza della palla chiusa in T_pM anche M è limitata. Essendo M banalmente chiusa e completa per ipotesi, la compattezza segue da Hopf-Rinow. □

Proposizione 4.11. *Sia $p \in M$. Supponiamo esista un punto $q \in C_m(p)$ tale che $d(p, q) = d(p, C_m(p))$. Allora vale una delle seguenti:*

1. *esiste una geodetica minimizzante γ che unisce p a q lungo la quale q è coniugato a p;*

2. *esistono esattamente due geodetiche minimizzanti γ e σ che uniscono p a q: inoltre detta $L = d(p, q)$ si ha $\gamma'(L) = -\sigma'(L)$.*

Dimostrazione. Sia γ una geodetica minimizzante che unisce p e q. Per la proposizione 4.4 o q è coniugato a p lungo γ e quindi vale la prima condizione, oppure esiste $\sigma \neq \gamma$ che unisce p a q e $L(\sigma) = L(\gamma)$. Supponiamo dunque di essere in questo secondo caso, e supponiamo $\gamma'(L) \neq -\sigma'(L)$: se mostrassimo che questo è assurdo avremmo concluso, perchè a meno di riparametrizzare i tempi traslando di L la condizione $\gamma'(L) = -\sigma'(L)$ identifica univocamente una geodetica per l'unicità delle stesse fissate posizione e velocità iniziali. Dalla condizione $\gamma'(L) \neq -\sigma'(L)$ si deduce che esiste $v \in T_qM$ tale che

$$\langle\, v\,, \gamma'(L)\,\rangle < 0, \quad \langle\, v\,, \sigma'(L)\,\rangle < 0.$$

Sia $\tau : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva con $\tau(0) = q$, $\tau'(0) = v$. Poichè q non è coniugato a p lungo γ, esiste un intorno $U \subset T_pM$ di $L\gamma'(0)$ sul quale $\exp_p$ è un diffeomorfismo. Sia $\eta(-\epsilon, \epsilon) \to U$ una curva tale che $\exp_p(\eta(s)) = \tau(s)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, e sia $\gamma_s(t) =$

$\exp_p(\frac{T}{L}\eta(s))$, $t \in [0, L]$ una variazione di γ. Dalla formula per la variazione prima dell'energia:

$$\frac{d}{ds}L(\gamma_s)\bigg|_{s=0} = \langle\, v\,, \gamma'(L)\,\rangle < 0.$$

Essendo q non coniugato a p lungo σ otteniamo in maniera analoga una variazione $\sigma_s(t)$ che soddisfa:

$$\frac{d}{ds}L(\sigma_s)\bigg|_{s=0} = \langle\, v\,, \sigma'(L)\,\rangle < 0,$$

$$\sigma_s(L) = \tau(s).$$

Quindi, per $s > 0$ sufficientemente piccolo si ha $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ e $L(\sigma_s) < L(\sigma)$. Se $L(\gamma_s) = L(\sigma_s)$ per la proposizione 4.4 si ha $\tau(s) = \gamma_s(L)$ è di taglio per p. Poichè

$$d(p, \gamma_s(L)) = L(\gamma_s) < d(p, C_m(p)),$$

questo contraddiche l'ipotesi fatta sulla distanza da p a q uguale a quella di p dal suo cut locus. Se $L(\gamma_s) < L(\sigma_s)$ allora σ_s non è minimizzante, ed esiste dunque un punto di taglio $\sigma_s(t_1)$ con $t_1 < L$ lungo σ_s, che contraddice ancora il fatto che q realizzi la distanza tra p e il suo cut locus. Similmente concludiamo il caso $L(\gamma_s) > L(\sigma_s)$, che porta alla tesi. □

La seguente proposizione comincia ad avvicinarci al Teorema della Sfera vero e proprio.

PROPOSIZIONE 4.12. *Se la curvatura sezionale K di una varietà riemanniana completa M soddisfa*

$$0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max},$$

allora vale una delle seguenti:

1. $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$;
2. *esiste una geodetica chiusa γ in M, la cui lunghezza è minore di quella di tutte le altre geodetiche di M, e che è tale che*

$$i(M) = \frac{1}{2}L(\gamma).$$

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema di Bonnet-Myers M è compatta. Poichè T_1M è compatto, dalla continuità di f esiste $p \in M$ tale che $d(p, C_m(p)) = \inf_{r\in M} d(r, C_m(r))$. Dalla compattezza di $C_m(p)$ segue che esiste $q \in C_m(p)$ che realizza la distanza tra p e $C_m(p)$. Se q è coniugato a p, segue $d(p, q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$ dalla proposizione 3.13. Se q non è coniugato di p esiste, per la proposizione 4.11 esistono due geodetiche μ e σ con le proprietà esposte nella proposizione. Poichè $q \in C_m(p)$, per la reciprocità mostrata prima vale $p \in C_m(q)$ e realizza ovviamente la distanza dal cut locus perchè abbiamo scelto p che minimizzasse. Ne segue che $\mu'(0) = -\sigma'(0)$, e quindi per questa condizione unita a quella della 4.11 μ e σ formano una geodetica chiusa che soddisfa la seconda condizione del testo. □

4.2 Stima del raggio di iniettività

Lo scopo di questa sezione è dimostrare il seguente fondamentale risultato verso il Teorema della Sfera.

Proposizione 4.13. *(Klingenberg) Sia M^n con $n \geq 3$ una varietà riemanniana compatta, semplicemente connessa, tale che la sua curvatura sezionale K soddisfi*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Allora $i(M) \geq \pi$.

Nella dimostrazione di questo fatto, dove utilizzeremo finalmente la Teoria di Morse, ci serviranno un paio di lemmi.

Lemma 4.14. *Siano M_1 ed M_2 varietà riemanniane della stessa dimensione tali che le rispettive curvature sezionali K_1 e K_2 soddisfino $\sup K_2 \leq \inf K_1$. Consideriamo $\sigma_1 : [0,l] \to M_1$ una geodetica con $\sigma_1(0) = p_1$, e fissiamo $p_2 \in M_2$. Sia $i : T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$ un'isometria lineare e sia $\sigma_2 : [0,l] \to M_2$ definita da*

$$\sigma_2(t) := \exp_{p_2}(i\sigma_1'(0)), \quad t \in [0,l].$$

Allora $\operatorname{index}\sigma_1 \geq \operatorname{index}\sigma_2$.

Dimostrazione. Consideriamo W_2 campo vettoriale lungo σ_2 con $W_2(\sigma_2(0)) = W_2(\sigma_2(l)) = 0$. Definiamo un campo vettoriale W_1 lungo σ_1 nel modo ovvio:

$$W_1(t) = P_1^t \circ i^{-1} \circ (P_2^t)^{-1}(W_2(t))$$

dove P_i^t indica il trasporto parallelo da 0 a t lungo la geodetica corrispondente. Questi campi rispettano:

$$\langle\, W_1\,, \sigma_1'\,\rangle = \langle\, W_2\,, \sigma_2'\,\rangle\,, \quad \|W_1(t)\| = \|W_2(t)\|\,,$$
$$\|W_1'(t)\| = \|W_2'(t)\|\,, \quad W_1(\sigma_1(0)) = W_1(\sigma_1(l)) = 0.$$

Ricordiamo ora che, per l'osservazione 2.15, per un campo vettoriale V liscio vale

$$\frac{1}{2}E_{**}(V,V) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(0,0) = \int_0^1 (\langle\, V'\,, V'\,\rangle - \langle\, R(\gamma',V)\gamma'\,, V\,\rangle)\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

dove $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [0,l] \to M_i$ è un'opportuna variazione propria, di σ_i. Ne segue che, poichè $\sup K_2 \leq \inf K_1$, $E_{**}(W_1,W_1) \leq E_{**}(W_2,W_2)$, pertanto se $E_{**}(W_2,W_2) < 0$ anche $E_{**}(W_1,W_1) < 0$, che dimostra la tesi. □

L'indice nel Lemma che segue è da intendersi nel senso Morse-teoretico definito nei preliminari, così come le notazioni per i sottolivelli M^a.

Lemma 4.15. *Sia M^n una varietà liscia, $f : M \to \mathbb{R}$ funzione di Morse perfetta. Dati $p,q \in M$ e $\gamma : [0,1] \to M$ curva liscia che li congiunge, siano $a = \max\{f(p), f(q)\}$ e $b = \max_{t\in[0,1]}(f \circ \gamma(t))$. Supponiamo che $f^{-1}([a,b])$ sia compatto e non contenga punti critici di indice 1 o 0. Allora, per ogni $\delta > 0$, γ è omotopo ad un cammino γ_1 tale che $\gamma_1([0,1]) \subset M^{a+\delta}$ tramite un'omotopia che fissa gli estremi ad ogni tempo.*

Dimostrazione. Ovviamente possiamo supporre $b > a$, o non c'è nulla da dimostrare. Siano $p_1, \dots, p_k$ i punti critici di f in $f^{-1}([a,b])$, e siano $c_1, \dots, c_k$ i corrispondenti valori di f (tali punti sono ovviamente finiti per compattezza in quanto isolati) tali che $b \geq c_1 > c_2 > \ldots > c_k > a$. Se ora b non è valore critico per f per il lemma 1.65 possiamo scegliere ϵ tale che esista una retrazione forte $h_1 : M^b \to M^{c_1+\epsilon}$ e ovviamente $\gamma_1 := h_1 \circ \gamma$ sta in $M^{c_1+\epsilon}$. Se invece b è valore critico, notiamo che per ipotesi p_1 ha indice λ almeno 2. Sia allora H un intorno, che esiste per il lemma 1.61, sul quale f si scriva come

$$f = c_1 + x_1^2 + \cdots + x_{n-\lambda}^2 - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2$$

per un'opportuna parametrizzazione. Allora per il lemma 1.66 esiste $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che esista una retrazione per deformazione forte $\overline{h_1} : M^{c_1+\epsilon} \to M^{c_1-\epsilon} \cup H$, e poniamo $\overline{\gamma_1} := \overline{h_1} \circ \gamma$. Sia ora L la $(n-\lambda)$-cella definita come l'insieme dei punti per cui $y_1 = \cdots = y_\lambda = 0$: poichè per ipotesi $\lambda \geq 2$ esiste una curva liscia $\widetilde{\gamma_1}$ ottenuta modificando leggermente $\overline{\gamma_1}$ fissandone gli estremi che non intersechi L. Ma allora per il lemma 1.65 esiste una retrazione per deformazione forte $h_2 : M^{c_1+\epsilon} \cup (H \setminus L) \to M^{c_1-\epsilon}$. Definiamo $\gamma_2 = h_2 \circ \widetilde{\gamma_1} \subset M^{c_1-\epsilon}$: abbiamo così scavallato con successo un punto critico per la funzione. Procedendo per induzione, si ha $\gamma_{k+1} \subset M^{c_k-\epsilon}$: fissando $\delta > 0$ non ci sono punti critici in $M^{c_k-\epsilon} - M^{a+\delta}$, e applicando ancora 1.65 arriviamo alla tesi. □

Osservazione 4.16. Un ragionamento del tutto analogo mostra che, se anche ci sono punti critici di indice 0 o 1 in $f^{-1}([a,b])$, possiamo comunque retrarre γ ad una curva in $M^{c+\delta}$ per $\delta > 0$, dove c è il maggiore tra i valori critici di tali punti con indice problematico.

Lemma 4.17. *Sia M una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale $K \leq K_0$, con K_0 costante positiva. Siano p, $q \in M$ e siano γ_0 e γ_1 due geodetiche distinte che li uniscono con $L(\gamma_0) \leq L(\gamma_1)$. Supponiamo esista un'omotopia α_t con $t \in [0,1]$ che unisce queste due geodetiche. Allota esiste $t_0 \in [0,1]$ tale che*

$$L(\gamma_0) + L(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

Dimostrazione. Possiamo ovviamente supporre $L(\gamma_0) < \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$, o la tesi è banale. Allora, applicando il teorema di Rauch con $M_1 = M$ ed M_2 come la sfera di curvatura K_0 costante $\mathbb{S}^n(K_0)$ dalla forma esplicita dei campi di Jacobi sulle sfere sappiamo che non ci sono punti coniugati con p a distanza $< \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. Pertanto la mappa esponenziale $\exp_p$ è un diffeomorfismo sulla palla aperta $B \subset T_pM$ di raggio $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ e centro p. Possiamo allora sollevare γ_0 ad una curva $\widetilde{\gamma_0}$ in T_pM, e lo stesso vale ovviamente per continuità anche per α_t con t piccolo. Questo non si può ovviamente fare per tutti i t, in quanto per $t = 1$ se potessimo sollevare γ_1 contraddiremmo il fatto che γ_0 e γ_1 sono distinte. Notiamo ora che tali sollevamenti, per i t per i quali esistono, sono arbitrariamente vicini a ∂B: infatti, se esistesse $\epsilon > 0$ tale che tutti i sollevamenti $\widetilde{\alpha_t}$ sono a distanza $\geq \epsilon$ da ∂B, l'insieme dei t tali che α_t è sollevabile sarebbe chiuso, oltre ad essere ovviamente aperto; dunque α_1 sarebbe sollevabile, il che è assurdo. Ne segue che per ogni $\epsilon > 0$

esiste $t(\epsilon)$ tale che $\alpha_{t(\epsilon)}$ è sollevabile ad un cammino che contiene punti a distanza $< \epsilon$ dal bordo di B, e dunque usando il Lemma di Gauss:

$$L(\gamma_0) + L(\alpha_{t(\epsilon)}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} - 2\epsilon.$$

Allora, scelta una sequenza $\epsilon_n \to 0$, a meno di sottosuccessioni $t(\epsilon_n) \to t_0$, e ne segue

$$L(\gamma_0) + L(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

□

Possiamo ora finalmente mostrare la stima di Klingenberg.

Dimostrazione. 4.13 Supponiamo per assurdo $i(M) < \pi$. Per la proposizione 4.11 esiste una geodetica chiusa γ in M di lunghezza $L < 2\pi$. Poichè i punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ sono discreti, esiste $\epsilon > 0$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\gamma(L-\epsilon)$ non è coniugato a $p = \gamma(0)$;
2. $\exp_p$ è un diffeomorfismo su $B_{2\epsilon}(p)$;
3. $3\epsilon < 2\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\inf_M K}}$;
4. $3\epsilon < 2\pi - L$;
5. $5\epsilon < 2\pi$.

Grazie al Lemma di Sard esiste $q \in B_\epsilon(\gamma(L-\epsilon))$ valore regolare per $\exp_p$, ed inoltre possiamo sceglierlo in modo che $q = \gamma_1(t)$, con γ_1 geodetica passante per p con $3\epsilon < L(\gamma_1) < L$ ottenuta perturbando γ grazie alla continuità della funzione distanza e al fatto che $L > 4\epsilon$ poichè essendo chiusa ed essendo $\exp_p$ un diffeomorfismo su $B_{2\epsilon}$ essa deve uscire e rientrare da tale palla almeno una volta. Se adesso chiamiamo γ_0 minimizzante che unisce p a q, poichè

$$L(\gamma_0) \leq d(p, \gamma(L-\epsilon)) + d(\gamma(L-\epsilon), q) < 2\epsilon,$$

per un'evidente incongruenza di lunghezze $\gamma_1 \neq \gamma_0$, ossia γ_1 così scelta non minimizza. Adesso consideriamo il sottospazio Ω^c dello spazio dei cammini $\Omega(M : p, q)$ dato dai cammini di energia $\leq c$, e sia B la sua approssimazione finito-dimensionale. Essendo q regolare per $\exp_p$, i punti critici dell'energia in Ω^c sono non degenri, oppure esisterebbe un campo di Jacobi lungo uno di essi che si annulla in p e in q, e dunque q sarebbe coniugato a p. Poichè M è semplicemente connessa esiste un'omotopia tra γ_0 e γ_1 che tiene fissi p e q: la denotiamo con γ_s. Essendo B un retratto per deformazione di Ω^c, anche γ_s viene retratta da questa mappa ad una curva in B, che indichiamo con $\overline{\gamma_s}$.

Notiamo che, ricordando che la definizione di B è l'insieme delle geodetiche a tratti per una partizione dell'intervallo sufficientemente fine da avere l'esistenza di una geodetica minimizzante in ciascun segmentino, su B punti critici e indici dei suddetti punti critici di lunghezza ed energia coincidono. Infatti, per un tratto di geodetica sul segmento $[t_{i-1}, t_i]$ vale $L^2 = (t_i - t_{i-1})E$, da cui si deduce che i punti critici della lunghezza sono un sottoinsieme di quelli dell'energia: per l'altra inclusione basta ricordare che i punti critici dell'energia sono esattamente le geodetiche e procedere direttamente. Una volta noto che coincidono i punti critici, ancora dalla formula $L^2 = (t_i - t_{i-1})E$ è chiaro che gli indici devono coincidere. Da qui in avanti parleremo quindi alternativamente di lunghezza ed energia quando ci riferiamo a B.

Poichè B ha dimensione finita possiamo applicare il lemma 4.15 usando come funzione E e ottenere che esiste una retrazione per deformazione che manda $\overline{\gamma_s}$ in un'omotopia (cioè una curva in B tra γ_0 e γ_1) $\widetilde{\gamma_s}$ che soddisfa la seguente condizione: detta $\widetilde{\gamma}$ la curva di lunghezza massima per cui passa $\widetilde{\gamma_s}$ e detta σ la geodetica di lunghezza massima di indice ≤ 1 in B vale $L(\widetilde{\gamma}) < a + \delta$ per ogni $\delta > 0$, dove $a = \max\{L(\gamma_0), L(\gamma_1), L(\sigma)\}$. Fissiamo dunque $\delta = \epsilon$: avevamo già che

$$L(\gamma_0) < 2\epsilon, \quad 3\epsilon < L(\gamma_1) < L < 2\pi - 3\epsilon.$$

Adesso, grazie al lemma 4.14 applicato con $M_1 = M$ ed $M_2 = \mathbb{S}^n(\inf_M K)$ si ottiene (con $\sigma_1 = \sigma$)

$$\operatorname{index} \sigma_2 \leq \operatorname{index} \sigma < 2.$$

Siccome σ_2 è una geodetica di $\mathbb{S}^n$ ed $n \geq 3$ dal teorema dell'indice di Morse e dalla conoscenza esplicita dei campi di Jacobi sulle sfere sappiamo che se avessimo $L(\sigma) > \frac{\pi}{\sqrt{\inf_M K}}$ avremmo $\operatorname{index} \sigma_2 \geq 2$, assurdo. Quindi ne deduciamo

$$L(\sigma) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\inf_M K}} < 2\pi - 3\epsilon,$$

da cui finalmente, ricordando come era definito a

$$L(\widetilde{\gamma}) < a + \epsilon < 2\pi - 3\epsilon + \epsilon = 2\pi - 2\epsilon.$$

D'altro canto, dal lemma 4.17 sappiamo che nell'omotopia $\widetilde{\gamma_s}$ c'è almeno una curva $\widetilde{\gamma_{s_0}}$ che soddisfa $L(\widetilde{\gamma_{s_0}}) + L(\widetilde{\gamma_0}) \geq 2\pi$. Ne segue

$$L(\widetilde{\gamma}) \geq L(\widetilde{\gamma_{s_0}}) \geq 2\pi - L(\widetilde{\gamma_0}) > 2\pi - 2\epsilon.$$

Il che è assurdo, e conclude la dimostrazione.

□

4.3 Il Teorema della Sfera

Prima della conclusione, un paio di lemmi.

Lemma 4.18. *(Berger) Sia M una varietà riemanniana compatta, e siano $p, q \in M$ tali che $d(p, q) = diam(M)$. Allora $\forall W \in T_pM$ esiste una geodetica minimizzante γ che unisce p e q tale che $\langle \gamma'(0), W \rangle \geq 0$.*

Dimostrazione. Definiamo $\lambda(t) = \exp_p tW$ e $\gamma_t : [0, L(\gamma_t)] \to M$ una geodetica minimizzante cche unisce $\lambda(t)$ e q. Notiamo che, se mostriamo che per ogni n esiste un t_n con $0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}$ tale che $\left\langle \gamma'_{t_n}, \lambda'(t_n) \right\rangle \geq 0$ avremmo che, a meno di sottosuccessioni, γ_{t_n} convergerebbe a γ tale che

$$0 \leq \langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = \langle \gamma'(0), W \rangle,$$

e avremmo concluso. Supponiamo quindi che esista un n tale che, per ogni t tale che $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ valga $\left\langle \gamma'_{t_n}, \lambda'(t_n) \right\rangle$. Fissiamo uno qualunque di tali t, un intorno U totalmente normale di $\lambda(t)$ e un punto $q_0 \in U$ di γ_t. Sia $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo perchè $\lambda(s)$ con $s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$ stia in U, e σ_s una geodetica minimizzante che unisce q_0 a $\lambda(s)$. Dalla formula per la variazione prima dell'energia

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E(\sigma_s)\bigg|_{s=t} = -\langle \gamma'_t(0), \lambda'(t) \rangle > 0.$$

Dunque per $s < t$ si ha $d(q_0, \lambda(s)) < d(q_0, \lambda(t))$, e dunque

$$d(q, \lambda(s)) \leq d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(s)) < d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(t)) = d(q, \lambda(t)).$$

Tuttavia, poichè p e q realizzano il diametro di M, si ha $d(q, \lambda(t)) \leq d(q, \lambda(0))$, che ci dà la contraddizione che cercavamo. $\square$

Il seguente lemma, originariamente dimostrato da Berger grazie al teorema di Topogonov, contiene essenzialmente il passo chiave per dimostrare il teorema della sfera. La dimostrazione qui presentata, dovuta a Tsukamoto, utilizza il Teorema di Rauch.

Lemma 4.19. *Sia M^n, $n \geq 3$, un varietà riemanniana compatta e semplicemente connessa la cui curvatura sezionale K soddisfa ovunque*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1,$$

e siano $p, q \in M$ tali che $d(p,q) = diam M$. Allora esiste ρ con $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho < \pi$ tale che, detta $B_r(p) \subset M$ la palla geodetica di centro p e raggio r, si ha

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q).$$

Dimostrazione. (Tsukamoto) Dalla stima di Klingenberg del raggio di iniettività si ha $i(M) \geq \pi$, da cui $B_\rho(p)$ non contiene punti del cut locus e dunque, in particolare, punti coniugati, da cui $\exp_p$ è un diffeomorfismo tra $B_\rho(p)$ e una palla euclidea. Notiamo inotre che le geodetiche minimizzanti che uniscono due punti in una di queste palle sono uniche. Supponiamo dunque per assurdo esista $r \in M$ tale che $d(p,r) \geq d(q,r) \geq \rho$. Sia q' l'intersezione tra la frontiera di $B_\rho(q)$ e una geodetica minimizzante da q ad r. Allora se per assurdo $q' \in B_\rho(p)$

$$d(r, q') > d(r, B_\rho(p)) \geq d(r, B_\rho(q)) = d(r, q').$$

Dunque $d(q', p) \geq \rho$. Ora dal teorema di Bonnet-Myers

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < 2\rho.$$

Similmente a prima, detto q'' il punto di intersezione tra la frontiera di $B_\rho(q)$ e la geodetica minimizzante da q a p, si ha

$$d(p, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2\rho - \rho = \rho,$$

dunque $q'' \in B_\rho(p)$. Allora dalla connessione per archi di $\partial B_\rho(q)$ (per il diffeomorfismo tra palle geodetiche e palle euclidee) si ha $\partial B_\rho(q) \cap \partial B_\rho(p) \neq \varnothing$, da cui esiste $r_0 \in M$ tale che $d(r_0, p) = d(r_0, q) = \rho$.
Adesso, detta λ una geodetica da p ad r_0, dal Lemma di Berger esiste una geodetica minimizzante γ da p a q tale che $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$. Sia s un punto di γ tale che $d(p, s) = \rho$. Dal lemma 3.14 applicato con $M_2 = M$ e $M_1 = \mathbb{S}^n(\delta)$, dal fatto che le isometrie conservano gli angoli, che su una sfera $\mathbb{S}$ un triangolo equilatero con tre angoli di $\frac{\pi}{2}$ ha lati pari a $\operatorname{diam}(S)/2$, che l'angolo $\measuredangle r_0 p s$ è $\leq \frac{\pi}{2}$ e che $d(r_0, s)$ ha distanza minima tra le curve che uniscono r_0 e s abbiamo

$$d(r_0, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Poichè $d(r_0, p) = d(r_0, q) = \rho$ e poichè esiste un punto s di γ con $d(r_0, s) < \rho$, la distanza tra r_0 e γ (che è compatta) è realizzata da un punto s_0 interno a γ. La geodetica minimizzante da r_0 a s_0 è ovviamente ortogonale a γ, e vale

$$d(r_0, \gamma) = d(r_0, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Poichè $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ si ha che o $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ o $d(q, s_0) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\delta}}$: mostriamo che uno qualsiasi dei due casi, ovviamente simmetrici, è assurdo. Supponiamo $d(p, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$: poichè $d(r_0, s_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ e $\measuredangle p s_0 r_0 = \pi/2$, sempre grazie al lemma 3.14 confrontando con un triangolo geodetico equilatero su una sfera si ottiene

$$d(p, r_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho,$$

che è assurdo. Questo conclude la dimostrazione. □

Adesso non resta che costruire esplicitamente l'omeomorfismo menzionato nella tesi del Teorema. Vediamo prima un lemma, che identifica l'"equatore" della sfera.

Lemma 4.20. *Nelle ipotesi del lemma precedente, per ogni geodetica passante per p esiste un unico punto m tale che*

$$d(p, m) = d(q, m) < \rho.$$

Dimostrazione. Vediamo l'esistenza. Definiamo , fissata una geodetica $\gamma : [0, \rho] \to M$ con $\gamma(0) = p$, la funzione $f : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = d(\gamma(t), p) - d(\gamma(t), q).$$

Notiamo che $f(0) = 0 - \operatorname{diam}(M) < 0$, e che un punto M ha la proprietà cercata nella tesi se e solo se è del tipo $\gamma(\bar{t})$ con $f(\bar{t}) = 0$. Per l'ovvia continuità di f, basta trovare un $t \in (0, \rho)$ con per cui valga $f(t) > 0$. Notiamo che necessariamente si ha $\gamma(\rho) \in B_\rho(q)$, altrimenti siccome $\gamma(\rho)$ non appartiene a $B_\rho(p)$ avremmo una contraddizione per il lemma precedente. Allora si ha $f(\rho) > 0$, e per continuità per ϵ abbastanza piccolo si ha $f(\rho - \epsilon) > 0$, che dimostra l'esistenza.

Per l'unicità, supponiamo per assurdo esistano m_1, m_2 distinti in γ che rispettano la tesi, assumendo senza perdita di generalità $d(m_1, p) > d(m_2, p)$. Allora vale

$$d(m_1, m_2) = d(m_1, p) - d(m_2, p) = d(m_1, q) - d(m_2, q).$$

Tuttavia siccome $m_1, m_2 \in B_\rho(q)$ e poichè entro il raggio di iniettività (maggiore di ρ) le geodetiche minimizzanti sono uniche, m_1 ed m_2 stanno sulla stessa geodetica minimizzante passante per q, che deve ovviamente passare anche per p. Ma a questo punto m_1 ed m_2 possono essere entrambi equidistanti solo se coincidono, il che è assurdo, e porta alla tesi. $\square$

E adesso arriviamo alla dimostrazione del Teorema della Sfera.

Dimostrazione. 4.1 Definiamo D_1 come il sottoinsieme di $B_\rho(p)$ ottenuto dall'unione dei segmenti di geodetica che uniscono p ai punti m che rispettano la condizione del lemma precedente. Similmente definiamo D_2: vogliamo innanzitutto mostrare $M = D_1 \cup D_2$ e $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$. Per ogni $r \in M$ vale o $d(p, r) < \rho$ o $d(q, r) < \rho$: consideriamo il primo caso, il secondo è analogo. Per la stima di Klingenberg esiste un'unica geodetica minimizzante che unisce p ed r, e per il lemma precedente su di essa un unico punto m sull'equatore rispetto a p di M. Ora se $d(p, m) \geq d(p, r)$ ovviamente di ha $r \in D_1$: se vale $d(p, m) < d(p, r)$ vale $d(q, r) < \rho$, e ripetendo il ragionamento appena fatto $r \in D_2$. A questo punto la condizione sull'intersezione segue banalmente.

Consideriamo ora la sfera unitaria $\mathbb{S}^n$, fissiamo un punto $N \in \mathbb{S}^n$ ed il suo antipodo S. Consideriamo un'isometria $i : T_N\mathbb{S}^n \to T_pM$: per ogni punto e dell'equatore di $\mathbb{S}^n$ consideriamo una geodetica unitaria γ passante per N al tempo 0 e per e al tempo $\frac{\pi}{2}$. Vogliamo, naturalmente, mappare tale geodetica nella geodetica di M passante per p al tempo 0 e avente come velocità in p il vettore $i(\gamma'(0))$. Sia dunque m il punto su $D_1 \cap D_2$ appartenente a tale geodetica, σ la geodetica mimizzante da q a m, e definiamo $\Xi : \mathbb{S}^n \to M$. La mappa descritta ha l'espressione seguente:

$$\begin{cases} \Xi(\gamma(s)) = \exp_p(s\frac{2}{\pi}d(p, m)(i \circ \gamma'(0))), & 0 < s \leq \frac{\pi}{2}, \\ \Xi(\gamma(s)) = \exp_q((2 - \frac{2s}{\pi})d(q, m)\sigma'(0)), & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi. \end{cases}$$

Allora Ξ mappa bigettivamente l'emisfero nord (chiuso) di $\mathbb{S}^n$ in D_1 e quello sud in D_2, e l'equatore E in $D_1 \cap D_2$. Allora Ξ è iniettiva e surgettiva, oltre che ovviamente continua: ma allora essendo $\mathbb{S}^n$ compatta essa è un omeomorfismo, e la tesi è finita. $\square$

Nota 4.21. Esiste un controesempio al Teorema della Sfera quando l'ipotesi è rimpiazzata dalla più debole

$$\frac{1}{4}K_{\max} \leq K \leq K_{max}.$$

In particolare, un controesempio è dato dallo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ equipaggiato con la cosiddetta *metrica di Fubini-Study*.

Bibliografia

[1] Abraham, R, Marsden, J.E., Ratiu, T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* Applied Mathematical Sciences, 75, Springer-Verlag, New Jork, New Jork, 1988.

[2] Carmo, M. do. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1992.

[3] Milnor, J. *Morse Theory* Annals of Mathematics Studies, 51, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[4] Petersen, P. *Riemannian Geometry* Graduate Texts in Mathematics, 171, Springer-Verlag, New Jork, New Jork, 2006.

Ringraziamenti

Grazie a mamma, papà e tutta la mia famiglia per tutto, tutto, tutto di questi anni.
Grazie al professor Malchiodi, senza la cui guida niente di questa tesi sarebbe mai esistito.
Grazie a tutti i miei amici: quelli di Brescia, quelli di Pisa e quelli di tutti gli altri posti.
Grazie a Silvia, per tutta la gioia.