Il Teorema della Sfera in Geometria Riemanniana

Candidato: Dario Rancati
Relatore: prof. Andrea Malchiodi

Università di Pisa

13 luglio 2018

Il Teorema

(Klingenberg 1961)

Sia M^n, $n \geq 3$, una varietà riemanniana compatta e semplicemente connessa, la cui curvatura sezionale K soddisfa, detto $K_{\max}$ il massimo di K:

$$0 < \frac{1}{4} K_{\max} < K \leq K_{\max}.$$

Allora M è omeomorfa a $\mathbb{S}^n$.

Lo Spazio dei Cammini

Definizione

Sia M una varietà liscia, e siano p e $q \in M$. Lo *Spazio dei Cammini* tra p è q è l'insieme di tutte le curve regolari a tratti tra p e q, e lo indicheremo con $\Omega(M; p, q)$. Lo *Spazio Tangente* a Ω in un cammino ω, denotato con $T\Omega_\omega$, è lo spazio vettoriale costituito dai campi vettoriali regolari a tratti che si annullano in $\omega(0)$ e $\omega(1)$.

Il Funzionale Energia

Definizione

Sia M una varietà riemanniana. Per $\omega \in \Omega(M; p, q)$ e $0 \leq a < b \leq 1$ definiamo *l'Energia di* ω *da* a *a* b come:

$$E_a^b(\omega) := \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 \mathrm{d}t.$$

Il Funzionale Energia

Definizione

Sia M una varietà riemanniana. Per $\omega \in \Omega(M; p, q)$ e $0 \leq a < b \leq 1$ definiamo *l'Energia di ω da a a b* come:

$$E_a^b(\omega) := \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 \mathrm{d}t.$$

Definiamo *variazione* di $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ una mappa $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega(M; p, q)$ tale che $\alpha(0) = \gamma$ e che $(\alpha, \alpha(\cdot))$ sia liscia su ciascuna restrizione $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$. Similmente, possiamo definire una *n*-variazione sostituendo a $(-\epsilon, \epsilon)$ un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$.

Variazioni dell'Energia

Variazione Prima

Sia ω un cammino di M, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ una variazione di ω, $W(t)$ la velocità di α, $V(t) = \frac{d\omega}{dt}(t)$ la velocità di ω, $Y(t)$ l'accelerazione di ω e infine $\Delta V(t)$ la discontinuità della velocità in $t \in [0,1]$. Allora vale

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\alpha(u))}{du}\bigg|_{u=0} = -\sum_t \langle\, W(t)\,, \Delta V(t)\,\rangle - \int_0^1 \langle\, W(t)\,, Y(t)\,\rangle\, \mathrm{d}t.$$

Variazioni dell'Energia

Variazione Prima

Sia ω un cammino di M, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ una variazione di ω, $W(t)$ la velocità di α, $V(t) = \frac{d\omega}{dt}(t)$ la velocità di ω, $Y(t)$ l'accelerazione di ω e infine $\Delta V(t)$ la discontinuità della velocità in $t \in [0,1]$. Allora vale

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\alpha(u))}{du}\bigg|_{u=0} = -\sum_t \langle\, W(t)\,, \Delta V(t)\,\rangle - \int_0^1 \langle\, W(t)\,, Y(t)\,\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Conseguenza fondamentale della formula per la variazione prima è che un cammino ω è critico per E_a^b se e solo se esso è una geodetica.

Variazione Seconda

Sia γ una geodetica, V la sua velocità, A una sua 2-variazione con velocità W_1 e W_2 e $\Delta\frac{DW_1}{dt}(t)$ la discontinuità di $\frac{DW_1}{dt}$. Allora vale:

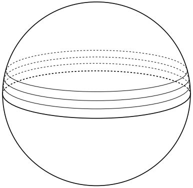
$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 E(A(u_1,u_2,t))}{\partial u_1 \partial u_2}\right|_{(0,0,t)} = -\sum_t \left\langle W_2(t)\,, \Delta\frac{DW_1}{dt}(t)\right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2(t)\,, \frac{D^2 W_1}{dt}(t) + R(V(t),W_1(t))V(t)\right\rangle \mathrm{d}t.$$

Variazioni dell'Energia

Variazione Seconda

Sia γ una geodetica, V la sua velocità, A una sua 2-variazione con velocità W_1 e W_2 e $\Delta \frac{DW_1}{dt}(t)$ la discontinuità di $\frac{DW_1}{dt}$. Allora vale:

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 E(A(u_1,u_2,t))}{\partial u_1 \partial u_2}\right|_{(0,0,t)} = -\sum_t \left\langle W_2(t), \Delta \frac{DW_1}{dt}(t) \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2(t), \frac{D^2 W_1}{dt}(t) + R(V(t), W_1(t))V(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$



Conseguenze della Variazione Seconda

Dalla formula per la variazione seconda segue che, definendo l'*Hessiano* di E_a^b in una geodetica come

$$E_{**} : T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \to \mathbb{R}$$

$$E_{**}(W_1, W_2) := \left. \frac{\partial^2 E(A(u_1, u_2, t))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0,t)}$$

tale funzione è ben definita, bilineare e simmetrica.

Campi di Jacobi

Definizione

Sia M una varietà riemanniana, $\gamma(t) : [0,1] \to M$ una geodetica. Un campo vettoriale J lungo γ è detto Campo di Jacobi se soddisfa

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \tag{1}$$

Campi di Jacobi

Definizione

Sia M una varietà riemanniana, $\gamma(t) : [0,1] \to M$ una geodetica. Un campo vettoriale J lungo γ è detto Campo di Jacobi se soddisfa

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \tag{1}$$

definizione

Sia $\gamma : [0,a] \to M$ una geodetica, $t_0 \in (0,a]$. Il punto $\gamma(t_0)$ è detto coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ se esiste un campo di Jacobi J lungo γ non identicamente nullo tale che $J(\gamma(0)) = J(\gamma(t_0)) = 0$. Il massimo numero di campi di Jacobi linearmente indipendenti con questa proprietà è detto *molteplicità* del punto coniugato $\gamma(t_0)$.

Proprietà dei Campi di Jacobi

- Sia γ una geodetica, e sia $v(s)$ una curva in $T_{\gamma(0)}M$ con $v(0) = \gamma'(0)$ e $v'(0) = w$. Allora il campo vettoriale

$$J(t) = \frac{\partial(\exp_{\gamma(0)}(tv(s)))}{\partial s}(t, 0)$$

è di Jacobi, ed è l'unico con $J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{\partial t}(0) = w$;

Proprietà dei Campi di Jacobi

- Sia γ una geodetica, e sia $v(s)$ una curva in $T_{\gamma(0)}M$ con $v(0) = \gamma'(0)$ e $v'(0) = w$. Allora il campo vettoriale
$$J(t) = \frac{\partial(\exp_{\gamma(0)}(tv(s)))}{\partial s}(t, 0)$$
è di Jacobi, ed è l'unico con $J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{\partial t}(0) = w$;
- sia γ una geodetica con $\gamma(0) = p$. Il punto $q = \gamma(t_0)$ è coniugato a p se e solo se $t_0\gamma'(0)$ è un punto critico di $\exp_p$;

Proprietà dei Campi di Jacobi

- Sia γ una geodetica, e sia $v(s)$ una curva in $T_{\gamma(0)}M$ con $v(0) = \gamma'(0)$ e $v'(0) = w$. Allora il campo vettoriale

$$J(t) = \frac{\partial(\exp_{\gamma(0)}(tv(s)))}{\partial s}(t, 0)$$

  è di Jacobi, ed è l'unico con $J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{\partial t}(0) = w$;
- sia γ una geodetica con $\gamma(0) = p$. Il punto $q = \gamma(t_0)$ è coniugato a p se e solo se $t_0\gamma'(0)$ è un punto critico di $\exp_p$;
- un campo vettoriale $W \in T\Omega_\gamma$ appartiene al radicale di E_{**} se e solo se W è un campo di Jacobi. In particolare E_{**} è degenere se e solo se i punti estremali p e q sono coniugati.

Indice dell'Energia

Definiamo l'*indice* dell'Energia E_{**} come la massima dimensione di un sottospazio sul quale E_{**} sia definito negativo.

Indice dell'Energia

Definiamo l'*indice* dell'Energia E_{**} come la massima dimensione di un sottospazio sul quale E_{**} sia definito negativo.

Teorema dell'Indice (Morse 1934)

L'indice di E_{**} è sempre finito, e coincide con il numero di punti $\gamma(t)$ con $0 < t < 1$ coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ, ciascuno contato con la sua molteplicità.

Indice dell'Energia

Definiamo l'*indice* dell'Energia E_{**} come la massima dimensione di un sottospazio sul quale E_{**} sia definito negativo.

Teorema dell'Indice (Morse 1934)

L'indice di E_{**} è sempre finito, e coincide con il numero di punti $\gamma(t)$ con $0 < t < 1$ coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ, ciascuno contato con la sua molteplicità.

Corollario: il numero di punti coniugati lungo una geodetica è sempre finito.

Approssimazione finito-dimensionale di $\Omega(M; p, q)$

Diamo innanzitutto ad $\Omega(M; p, q)$ una struttura di spazio metrico:

Approssimazione finito-dimensionale di $\Omega(M; p, q)$

Diamo innanzitutto ad $\Omega(M; p, q)$ una struttura di spazio metrico:

Distanza indotta

Sia M una varietà connessa, $p, q \in M$, e sia ρ la sua distanza riemanniana. Dati $\omega(t), \omega'(t) \in \Omega(M; p, q)$, definiamo:

$$d(\omega, \omega') := \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\omega'}{dt} \right\|^2 \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Con la topologia indotta da d la funzione $E = E_0^1$ è continua da $\Omega(M; p, q)$ a $\mathbb{R}$.

Approssimazione finito-dimensionale di Ω

Fissato $c > 0$ denotiamo ora con Ω^c il sottoinsieme chiuso $E^{-1}([0,c])$ di $\Omega(M;p,q)$, e con $(\mathrm{Int}\Omega^c)$ la sua parte interna. Siano $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, e definiamo

$$\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$$

l'insieme delle geodetiche a tratti da p a q secondo la suddivisione assegnata.

Approssimazione finito-dimensionale di Ω

Fissato $c > 0$ denotiamo ora con Ω^c il sottoinsieme chiuso $E^{-1}([0,c])$ di $\Omega(M;p,q)$, e con $(\mathrm{Int}\Omega^c)$ la sua parte interna. Siano $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, e definiamo

$$\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$$

l'insieme delle geodetiche a tratti da p a q secondo la suddivisione assegnata. Definiamo inoltre

$$\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c := (\mathrm{Int}\Omega^c) \cap \Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k).$$

Approssimazione finito-dimensionale di Ω

Struttura di varietà

Data M^n una varietà riemanniana completa e $c > 0$ tale che $\Omega^c \neq \varnothing$, allora esiste una suddivisione dell'intervallo unitario tale che $\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$ è dotabile della struttura di varietà liscia finito dimensionale, di dimensione $n \times (k-1)$.

Approssimazione finito-dimensionale di Ω

Struttura di varietà

Data M^n una varietà riemanniana completa e $c > 0$ tale che $\Omega^c \neq \varnothing$, allora esiste una suddivisione dell'intervallo unitario tale che $\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$ è dotabile della struttura di varietà liscia finito dimensionale, di dimensione $n \times (k-1)$.

Indichiamo ora con E' la restrizione di E a $\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$.

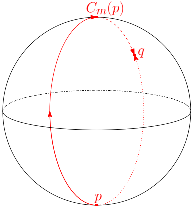
Coerenza con l'Energia

La funzione E' è liscia. I punti critici di E' coincidono con i punti critici di E in $\mathrm{Int}\Omega^c$. Inoltre l'indice di E'_{**} nei suddetti punti critici coincide con quello di E_{**}.

Il Cut Locus

Definizione

Sia M una varietà riemanniana completa con distanza d, $p \in M$, e sia $\gamma : [0, \infty) \to M$ una geodetica unitaria con $\gamma(0) = p$.
Definiamo il *cut point* di p lungo γ come il massimo, se esiste, dei $t \in [0, \infty)$ tali che $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Definiamo $C_m(p)$ il *cut locus* di p come l'unione lungo tutte le geodetiche passanti per p dei cut points di p.



Caratterizzazione Cut Locus

Supponiamo $\gamma(t_0)$ sia il cut point di $p = \gamma(0)$ lungo γ. Allora vale almeno una delle seguenti:

1. $\gamma(t_0)$ è il primo punto coniugato di $\gamma(0)$ lungo γ;
2. esiste una geodetica $\sigma \neq \gamma$ da p a $\gamma(t_0)$ con $L(\sigma) = L(\gamma)$.

Inoltre, se vale una di queste due condizioni esiste un punto di taglio $\gamma(\bar{t})$ con $\bar{t} \in (0, t_0]$.

In particolare, notiamo che se abbiamo $d(p, C_m(p)) > C$ allora per ogni $p \in M$ in $B(p, C)$ sono uniche le geodetiche minimizzanti.

Il Raggio di Iniettività

Definizione

Definiamo il *raggio di iniettività* di una varietà riemanniana compatta M come

$$i(M) := \inf_{p \in M} d(p, C_m(p)).$$

Il Raggio di Iniettività

Definizione

Definiamo il *raggio di iniettività* di una varietà riemanniana compatta M come

$$i(M) := \inf_{p \in M} d(p, C_m(p)).$$

(Klingenberg)

Sia M^n con $n \geq 3$ una varietà riemanniana compatta, semplicemente connessa, tale che la sua curvatura sezionale K soddisfi

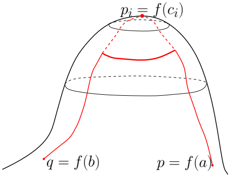
$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Allora $i(M) \geq \pi$.

Teoria di Morse

Lemma di Deformazione

Sia M^n una varietà liscia, $f : M \to \mathbb{R}$ funzione di Morse. Dati $p, q \in M$ e $\gamma : [0,1] \to M$ curva liscia che li congiunge, siano $a = \max\{f(p), f(q)\}$ e $b = \max_{t\in[0,1]}(f \circ \gamma(t))$. Supponiamo che $f^{-1}([a,b])$ sia compatto e non contenga punti critici di indice 1 o 0. Allora, per ogni $\delta > 0$, γ è omotopo ad un cammino γ_1 tale che $\gamma_1([0,1]) \subset M^{a+\delta}$ tramite un'omotopia che fissa gli estremi ad ogni tempo.



La stima di Klingenberg segue applicando questo lemma e il Teorema dell'Indice con $M = \mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$ ed $f = E'$.

La stima di Klingenberg segue applicando questo lemma e il Teorema dell'Indice con $M = \mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)^c$ ed $f = E'$.

(Berger, Tsukamoto)

Sia M^n, $n \geq 3$, un varietà riemanniana compatta e semplicemente connessa la cui curvatura sezionale K soddisfa ovunque

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1,$$

e siano $p, q \in M$ tali che $d(p, q) = \mathrm{diam} M$. Allora esiste ρ con $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho < \pi$ tale che, detta $B_r(p) \subset M$ la palla geodetica di centro p e raggio r, si ha

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q).$$

L'omeomorfismo esplicito

Dal lemma possiamo facilmente individuare sulla varietà M un "equatore" formato dai punti equidistanti da p e da q, e da esso due "emisferi" D_1 e D_2.

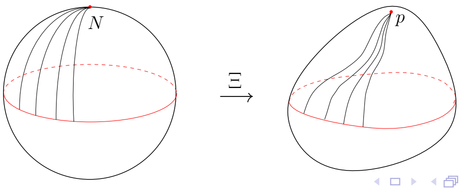
L'omeomorfismo esplicito

Dal lemma possiamo facilmente individuare sulla varietà M un "equatore" formato dai punti equidistanti da p e da q, e da esso due "emisferi" D_1 e D_2. Fissiamo $N \in \mathbb{S}^n$, un'isometria $i : T_N\mathbb{S}^n \to T_pM$, e sull'equatore di $\mathbb{S}^n$, γ geodetica unitaria da N, m sull'equatore di M sulla geodetica per p con velocità $i(\gamma'(0))$, σ unitaria minimizzante su M da q a m. Definiamo $\Xi : \mathbb{S}^n \to M$:

L'omeomorfismo esplicito

Dal lemma possiamo facilmente individuare sulla varietà M un "equatore" formato dai punti equidistanti da p e da q, e da esso due "emisferi" D_1 e D_2. Fissiamo $N \in \mathbb{S}^n$, un'isometria $i : T_N\mathbb{S}^n \to T_pM$, e sull'equatore di $\mathbb{S}^n$, γ geodetica unitaria da N, m sull'equatore di M sulla geodetica per p con velocità $i(\gamma'(0))$, σ unitaria minimizzante su M da q a m. Definiamo $\Xi : \mathbb{S}^n \to M$:

$$\begin{cases} \Xi(\gamma(s)) = \exp_p(\frac{2s}{\pi} d(p,m)(i \circ \gamma'(0))), & 0 < s \leq \frac{\pi}{2}, \\ \Xi(\gamma(s)) = \exp_q((2 - \frac{2s}{\pi}) d(q,m) \sigma'(0)), & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi. \end{cases}$$



Bibliografia

Do Carmo, Manfredo Perdigão . *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1992.

Milnor, John. *Morse Theory* Annals of Mathematics Studies, 51, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.