诚实考试吾心不虚 ，公平竞争方显实力，
考试失败尚有机会 ，考试舞弊前功尽弃。

上海财经大学《高等数学 II(工科类)》课程考试卷（A）闭卷

课程代码 **102544** 课程序号 **0486,0487, 0477**

2020 —2021 学年第二学期

姓名________ 学号________ 班级________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得分	

一. 填空题(本题共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分. 把答案填在各题中横线上.)

1. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在$(2,4,5)$处切线关于$x$轴的倾角为$\underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

2. 函数$u=x^2y+z^2-2xyz$在点$(2,-1,1)$处取得的最大增长率为$\underline{2\sqrt{10}}$.

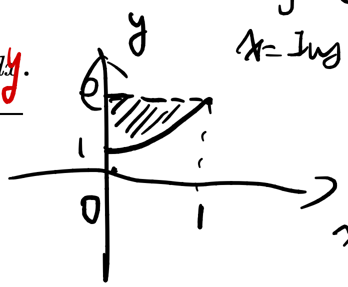
3. 函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在是函数$z=f(x,y)$在该点可微的<u>必要</u>条件.

4. 设二元函数$f(x,y)$在有界闭区域上连续，并且有函数$z=x^2y+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则函数$z$关于$y$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{x^2}$.

$y=e^x$

$x=\ln y$

5. 变换二次积分$I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$的积分次序后$I=\underline{\int_0^1 dx\int_{e^y}^{e} f(x,y)dy}$.



6. 已知曲线$y=x^2$，其中$0\leq x\leq\sqrt{2}$，则$\int_L xds=\underline{\dfrac{13}{6}}$.

7. 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{x^n}$的收敛区间为$\underline{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$.

$\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e} f(x,y)dy$

8. 方程$2y''-6y'+5y=0$的通解为$\underline{y=e^{\frac{3}{2}x}\left(C_1\cos\frac{1}{2}x+C_2\sin\frac{1}{2}x\right)}$.

得分	

二. 选择题（本题共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内.）

1. 函数$z=x^2+xy+y^2-3x-6y$的极小值是（ **D** ）.

A. 0　　B. -3　　C. -8　　D. -9

2. 已知$z=f(xy,x-y)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（ **C** ）.

A. $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$　　B. $f_1'+f_2'$　　C. $(x+y)f_1'$　　D. 0

其中，令$u=xy$，$v=x-y$，$f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial u}$，$f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

3. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则下列选项中一定正确的是（ B ）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散　B. 其部分和数列发散　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$也发散　D. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$

4. 累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$可以写成（ D ）.

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　**B.** $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　**D.** $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

5. 设Σ为平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限部分，则$\iint_\Sigma\left(2x+\dfrac{4y}{3}+z\right)dS=$（ **C** ）.

A. $4\int_0^2 dx\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}dy$　**B.** $\dfrac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^3 dy$

C. $\dfrac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}dy$　D. $\dfrac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^{2\left(\frac{y}{3}-1\right)}dy$

6. 曲面$e^z-z+xy=3$在点$P(2,1,0)$处的法线方程为（ C ）.

A. $\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}\\ z=0\end{cases}$　**B.** $\begin{cases}\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{1}\\ z=0\end{cases}$　**C.** $\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}$　**D.** $\begin{cases}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}$

7. 微分方程$x^2ydx=(1-y^2+x^2-x^2y^2)dy$是（ B ）微分方程.

A. 齐次　B. 可分离变量　C. 一阶线性齐次　D. 一阶线性非齐次

8. 函数$f(x,y,z)=\sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$在点$(1,-1,2)$处的梯度是（ A ）.

A. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　B. $2\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　C. $\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{-1}{9},\dfrac{2}{9}\right)$　D. $2\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{-1}{9},\dfrac{2}{9}\right)$

得分	

三. 计算题（本题共 7 小题，每小题 9 分，满分 63 分.）

1. 已知函数$z=f(x,y)$可微，且$dz=xdx+ydy$，求函数$z=f(x,y)$的极值.

解：由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=y,$$

于是得驻点$(0,0)$. 又

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1,$$

由于$AC-B^2>0$，且$A>0$，因此，函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$处取得极小值.

2. 计算$I=\oint_L \frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}$，其中$L$为圆心在原点的单位圆周，取逆时针方向.

解: 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2+4y^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

取l为椭圆$x^2+4y^2=\frac{1}{4}$ (也可取$x^2+4y^2=\varepsilon^2$，$\varepsilon>0$)，取逆时针方向，则

$$I=\oint_l \frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}=4\oint_l (x-y)dx+(x+4y)dy \text{（格林公式）}$$

$$=4\iint_D (1+1)dxdy=4\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\pi.$$

3. 求微分方程$y''-2y'-e^{2x}=0$的通解及初始条件为$y(0)=1,y'(0)=0$时的特解.

解：特征方程为$r^2-2r=0$，特征根为$r_1=0,r_2=2$，则齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{2x}.$$

设非齐次方程的特解为$y^*=axe^{2x}$，则代入方程比较两端同次项系数的$a=\frac{1}{2}$，特解为

$$y^*=\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

因此非齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

由初始条件$y(0)=1,y'(0)=0$解得$C_1=\frac{3}{4},C_2=\frac{1}{4}$，因此原方程的特解为

$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

4. 计算$I=\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数.

解： $I=\frac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz+(z+a)^2dxdy$，记$I_1=\frac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz$，$I_2=\frac{1}{a}\iint_\Sigma (z+a)^2dxdy$，于是

$$I_1=\frac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz=-2\iint_{y^2+z^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\,dydz$$

$$=-2\int_\pi^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=-\frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_\Sigma (z+a)^2dxdy=\frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]^2dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{6}a^3.$$

因此

$$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

注：可用高斯公式计算.

5. 设积分区域$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,a>0\}$，计算三重积分

$$\iiint_\Omega xe^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}dxdydz.$$

解：使用球面坐标变换可得

$$\iiint\limits_{\Omega} xe^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}} dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r\sin\varphi\cos\theta \cdot e^{\frac{r^2}{a^2}} r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^a r^3 e^{\frac{r^2}{a^2}} dr$$

$$= 1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 e^{\frac{r^2}{a^2}} d(r^2)$$

$$= \frac{\pi a^4}{8}.$$

6．求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及其和函数.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = 1$，则其收敛半径为$R=1$．显然，当$x=\pm 1$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$收敛域为发散，故此幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

设$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，则

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 2x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1.$$

7．在曲面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\vec{l}=(1,-1,0)$的方向导数最大.

解：$\vec{l}=(1,-1,0)$方向的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma = 0.$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = \sqrt{2}(x-y).$$

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda) = \sqrt{2}(x-y) + \lambda(2x^2+2y^2+z^2-1),$$

可求得可能取极值的点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$及$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

因为所求的最大值一定存在，比较$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)} = \sqrt{2}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)} = -\sqrt{2}$知所求的点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

得分	

四. (本题满分 5 分) 设数列u_n满足$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=1$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$收敛.

证明：记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$的前$n$项和为$S_n$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(u_k+u_{k+1})=u_1+(-1)^{n+1}u_{n+1}.$$

由条件$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=1$知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=u_1$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$收敛.