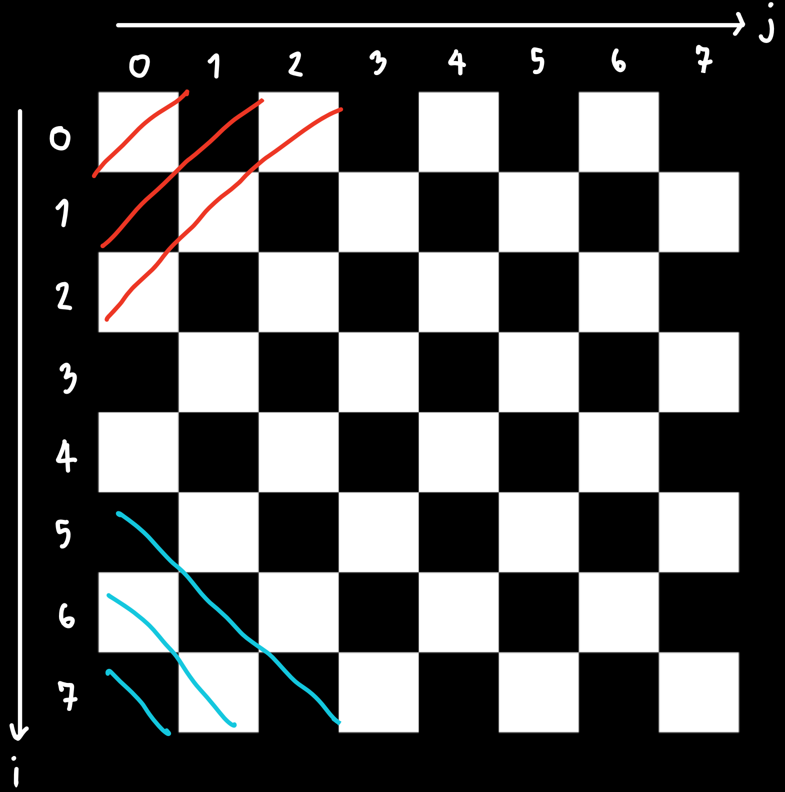
Queen problem QUBO



ตาราง N×N

$x_{ij} = 1$ ถ้ามี Q ในช่องนั้น

$= 0$ otherwise

$\sum_{ij} x_{ij} = N$ มี Q ทั้งหมด N ในตาราง

แต่ละคอลัมน์จะมี Q แค่ 1 ตัว

For all j, $\sum_i x_{ij} = 1$ (one-hot)

แต่ละแถว จะมี Q แค่ 1 ตัวเท่านั้น

For all i, $\sum_j x_{ij} = 1$ (one-hot)

แต่ละแนวทแยง จะมี Q ได้ไม่เกิน 1 ตัว

For all diagonals $\sum_{ij \in S} x \leq 1$

$x_{0,0} \leq 1$

$x_{0,1} + x_{1,0} \leq 1$

$x_{2,0} + x_{1,1} + x_{0,2} \leq 1$

$x_{0,7} \leq 1$

$x_{0,6} + x_{1,7} \leq 1$

trick

$A \leq 1 \longrightarrow A(A-1)$

minimize :

$$obj = \sum_j \left(\sum_i x_{ij} - 1\right)^2 + \sum_i \left(\sum_j x_{ij} - 1\right)^2$$

$$+ \sum_S \sum_{i,j \in S} x \left(\sum_{i,j \in S} x - 1\right)$$

ครอบคลุม $x_i^2 = x_i$ (binary)

QUBO obj : $\sum_{ij} x_i x_j C_{ij} + A + \sum_i x_i b_i$

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \qquad x = [x_0, x_1, x_2]$$

$$[x_0, x_1, x_2] \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x \text{ @ qubo @ } x$$

$$p = x_0 + x_1 - 1$$

$$\downarrow$$

$$p = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ 1 \right)$$

$$p' = 2x_0 x_1 + x_2 x_0 + x_2 + 5$$

$$p' = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ 5 \right)$$

$$p + p' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ 4 \right) = x_0 + x_1 + x_2 + 2x_0 x_1 + x_2 x_0 + 4$$

$$p = x_0 + x_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p^2 = (x_0 + x_1)(x_0 + x_1)$$

$$= x_0 x_0 + x_1 x_0 + x_0 x_1 + x_1 x_1$$

$$= x_0 + x_1 + x_1 x_0 + x_0 x_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{outer product}]{} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = \underbrace{x_0 + x_1} + a$$

$$p^2 = (\bar{x} + a)^2 = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\cdot a + a^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 2}_{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + 4$$

$$p^2 = \left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4 \right)$$

$$(x_0 + x_1 + 2)^2 = x_0^2 + x_1^2 + 4 + 2x_0 + 2x_1 + x_0x_1 + 2x_0 + 2x_1 + x_1x_0$$

$$= 5x_0 + 5x_1 + x_0x_1 + x_1x_0 + 4$$

$$p = x_0 + x_1 + 5$$

$$p' = x_1 + x_2 + 1$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p \cdot p' = (\underbrace{x_0 + x_1}_{\bar{x}} + 5)(\underbrace{x_1 + x_2}_{\bar{x}'} + 1)$$

$$= (\bar{x} + 5)(\bar{x}' + 1)$$

$$= \bar{x}\bar{x}' + 5\bar{x}' + \bar{x}' + 5$$

$$\bar{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}' \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

outer product $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= x_1x_0 + x_1 + x_2x_0 + x_2x_1$$