Pertemuan 9

PERKALIAN TITIK, PERKALIAN SILANG

Mata Kuliah : Kalkulus 1

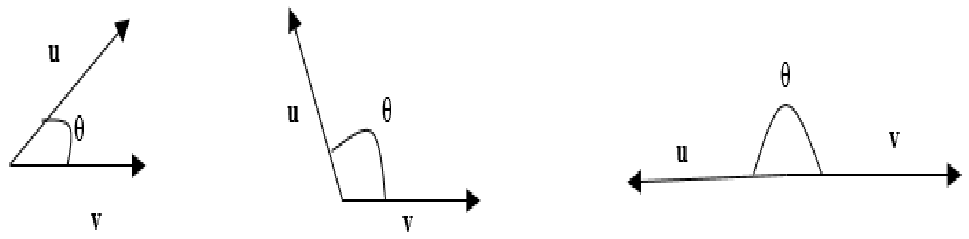
Dosen : Dr. Melina, S.Si., M.Si.

Teknik Informatika
Universitas Jenderal Achmad Yani
Cimahi

2025

PERKALIAN TITIK

Misalnya $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah dua vektor taknol di ruang-2 dan ruang-3,dan anggaplah vektor-vektor ini telah dilokasikan sehingga titik awalnya berimpit. Artinya **sudut di antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$**, dengan sudut θ yang ditentukan oleh $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ yang memenuhi $0 \leq \theta \leq \pi$



Definisi : Jika u dan v adalah vektor-vektor di ruang-2 atau ruang-3 dan θ adalah sudut di antara u dan v, maka hasil kali titik (*dot product*) atau hasil kali dalam Euclidis (*Euclidean inner product*) $u \bullet v$ didefinisikan oleh

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta & \text{jika } \mathbf{u} \neq 0 \text{ dan } \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \text{jika } \mathbf{u} = 0 \text{ dan } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor taknol, maka rumus di atas dapat ditulis

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|}}$$

Contoh 1

Tentukan $u \cdot v$ dan tentukan hasil kali / sudut θ di antara u dan v dengan $u = (2,-1,1)$ dan $v = (1,1,2)$

Penyelesaian

$$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Teorema 2

Misalkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor di ruang-2 atau ruang-3.

$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2\,;\ yakni, \|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}}$

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor taknol dan θ adalah sudut di antara kedua vektor tersebut, maka

θ lancip jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} > 0$
θ tumpul jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} < 0$
$\theta = \pi/2$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$

Vektor tegak lurus disebut juga vektor ***ortogonal***. Pada teorema di atas, dua vektor taknol adalah tegaklurus jika dan hanya jika hasil kali titiknya adalah nol. Vektor $\boldsymbol{u}$ maupun $\boldsymbol{v}$ akan ortogonal jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$.

Contoh 2

Tinjau vektor berikut

$$u = (1, -2,3), v = (-3,4,2)\ dan\ w = (3,6,3)$$

Tentukan apakah u dan v, v dan $w, u\ dan\ w$ membentuk sudut lancip, tumpul atau orthogonal ?

Penyelesaian

$$u.v = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$
$$v.w = (-31)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$
$$u.w = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

u dan v membentuk sudut tumpul, v dan w membentuk sudut lancip, $u\ dan\ w$ tegak lurus ■

PERKALIAN SILANG

Definisi : jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di ruang-3, maka hasil kali silang $u\ x\ v$ adalah vector yang didefinisikan oleh

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1})$$

atau dalam notasi determinan

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Terdapat pola pada rumus di atas yang berguna untuk diingat.
Jika di bentuk matriks 2 x 3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- Determinan komponen pertama dengan cara mencoret kolom pertama
- Determinan komponen kedua dengan cara mencoret kolom kedua
- Determinan komponen ketiga dengan cara mencoret kolom ketiga

Contoh 3

Carilah $u \times v \, dimana \, u = (1,2,-2)$ dan $v = (3,0,1)$

Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u \times v = \left(\left\| \begin{matrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2,-7,-6)$$

■

Teorema. Jika u dan v adalah vector di ruang-3, maka :

a. $u\,.\,(u \; x \; v) \; = \; 0$ $\quad (u \times v \; orthogonal \; ke \; u)$
b. $v\,.\,(u \; x \; v) = 0$ $\quad (u \times v \; orthogonal \; ke \; v)$
c. $\| u \; x \; v \|^2 = \| u \| \, \| v \|^2 - (u\,.\,v)^2$ (identitas Lagrange)

Contoh 4

Tinjau vector-vector $u = (1,2,-2)$ dan $v = (3,0,1)$, apakah orthogonal

Penyelesaian

Dari contoh sebelumnya, telah diperoleh $u \times v = (2,-7,-6)$

$u\,.\,(u \times v) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$
$v\,.\,(u \times v) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$

Maka $u \times v$ orthogonal kepada kedua u dan v

■

Teorema. Jika u, v dan w adalah sebarang vektor di ruang-3 dan k adalah sebarang scalar, maka :

a. $u \times v = -(v \times u)$
b. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
c. $(u + v) \times w = (u \times w) + v \times w)$
d. $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
e. $u \times 0 = 0 \times u$
f. $u \times u = 0$

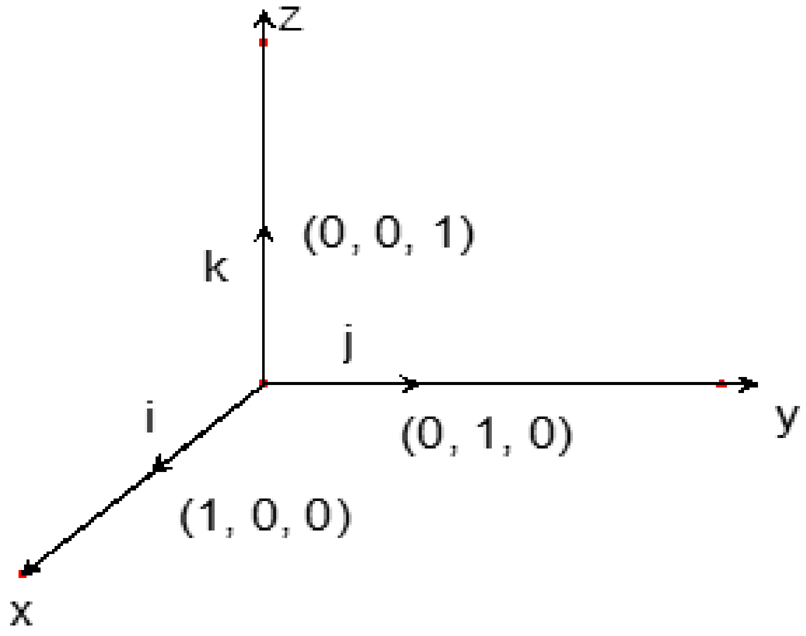
Contoh 5

Tinjaulah vector-vektor : $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$

Setiap vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ di ruang ke-3 dapat di ungkapkan dengan i, j, dan k, karenanya kita dapat menuliskan

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

dan dalam gambar berikut :



dan dari gambar ini di dapat :

$$i \times j = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = k$$

jika u dan v adalah vector-vektor taknol di ruang-3, maka

Sebuah perkalian silang dapat dinyatakan kedalam bentuk determinan matiks 3×3

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} k$$

Contoh

Jika $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{2})$ dan $\boldsymbol{v} = (\mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ maka

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2i - 7j - 6k$$

Jika $u\ dan\ v$ adalah vector-vector tak nol di ruang-3, norma dari $u \times v$ sama dengan luas parallelogram yang ditentukan oleh u dan v , yaitu :

$$\boldsymbol{A = (alas)\,(tinggi) = \|u\|\,\|v\|\,sin\,\theta = \|u \times v\|}$$

Contoh 6

Carilah luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik $P_1(2,2.0), P_2\ (-1,0,2\ )\text{dan}P_3\ (0,4,3)$

Penyelesaian

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$= (-1 - 2, 0 - 2, 2 - 0) = (-3, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$= (0 - 2, 4 - 2, 3 - 0) = (-2,2, 3)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-10, 5, -10)$$

Sehingga luas $A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2}\ (15) = 7{,}5$ ■

LATIHAN

Carilah luas segitiga yang mempunyai titik sudut P, Q, R dengan $P(1,5,-2), Q(0,0,0), R(3,5,1)$

Terima Kasih