Лекции по дифференциальным уравнениям. ФКН 2 курс.

hse-ami

Содержание

1 Лекция 1 (18.01)

https://www.youtube.com/watch?v=qr_1zepmqBY

Определение 1. ***Дифференциальным*** *называется уравнение, которое связывает значение функции с ее производной.*

Определение 2. ***Обыкновенное дифференциальное уравнение*** *(ОДУ) – это уравнение, зависящее от одной независимой переменной, т.е. $x(t)$. Данный тип уравнений содержит обыкновенные производные.*

$$P(t,x)dt + Q(x,t)dx = 0$$

Определение 3. ***Дифференциальные уравнения в частных производных*** *(УРЧП) – это уравнения,содержащие неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные, т.е. $v(x,y,z,t)$. Данный тип уравнений содержит частные производные.*

$$P(x_1, x_2, ..., x_m, z, \frac{\delta z}{\delta x_1}, ..., \frac{\delta^n z}{\delta x_m^n}) = 0$$

Решение УРЧП обычно сложнее, чем решение ОДУ.

1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) может быть интегрировано напрямую:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = G(t),$$

где производная $x = x(t)$ может быть любого порядка, а правая часть уравнения может зависеть только от независимой переменной t.
Пример:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = -mg,$$

где x – высота объекта над уровнем земли, m – его масса, $g = 9.81 m/s^2$ – ускорение свободного падения. Массу можно сократить:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$$

1.2 Модель экономического роста Роберта Солоу.

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \delta k,$$

где $\frac{dk}{dt}$ – темп изменения значения функции $k(t)$ (капитала), s – ставка сбережения, δ – темп амортизации, f – функция производства.

1.3 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Классический вид дифференциальных уравнений первого порядка для функции $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – функция от независимой переменной x и зависимой переменной y.
Нахождение числового решения уравнения:
Рассмотрим дифференциальное уравнения первого порядка следующего вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_n(x_n) = F(x)$$

в случае решения системы ДУ или УРЧП, каждое уравнение должно иметь линейную форму. Когда ДУ невозможно привести к линейному виду, такое уравнение называется нелинейным ДУ.
Если функция F больше нуля (положительна), то такое уравнения называется однородным, в противном случае – неоднородным.
Если ДУ не содержит независимых переменных, оно называется автономным ДУ.

1.4 Метод Эйлера.

Не всегда возможно для уравнения $y = y(t)$ найти решение аналитически, но всегда можно найти численное решение уравнения, зная, что функция $f(x, y)$ – это функция с регулярным поведением, а так же некое его значение $y(x_0) = y_0$. ДУ показывает касательную к функции в какой-то конкретной точке (x_0, y_0), где производная функции означает ее наклон.
Используя метод Эйлера, получим

$$y_1 = y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$$

Решение уравнения (x_1, y_1) станет начальным условием, справедливым для следующей точки (x_2, y_2) определяющимся новым наклоном касательной $f(x_1, y_1)$. Для малых значений Δx численное решение сходится к точному решению уравнения.

1.5 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют следующий вид:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

где функция $g(y)$ не зависит от переменной x, а $f(x)$ от y. Интегрируем от x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} g(y(x))y'(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Используем замену $u = y(x), dy = y'(x)dx$, меняем пределы интегрирования относительно y:

$$\int_{y_0}^{y} g(u)du = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

2 Лекция 2 (дата)

3 Лекция 3 (дата)

4 Лекция 4 (дата)