Текст к слайдам

Гусев Владислав БПМИ187

12 мая 2020 г.

1 Слайд: общими словами про модель и ученых:

Модель ценообразования опционов была впервые представлена общественности в 1973 году двумя учеными: Фишером Блэком (Fisher Black) и Майраном Шоулзом (Myron Scholes). В настоящее время она широко известна как «модель Блэка-Шоулза» (англ. Black-Scholes Option Pricing Model). Авторами была предложена математическая модель описывающая рынок финансовых деривативов (в нашем случае только опционы). Практическим результатом модели стала формула Блэка-Шоулза, которая позволила рассчитать цену опциона колл европейского типа. Ее появление привело к буму торговли опционами, а сама она получила широкое применение среди участников рынка.

2 Слайд: Что такое опционы и их характеристики:

Опцион — это договор, по которому покупатель опциона получает право купить/продать какой-либо актив (товар, ценная бумага, валюта и др.) в определенный момент времени по заранее обусловленной цене.

При этом Обязанность по исполнению опциона ложится на его продавца, который может выступать как покупателем (put option), так и продавцом (call option) базового актива. В то время как покупатель, имея опцион, имеет право не использовать его.

По времени исполнения выделяются следующие типы инструмента:
- европейский — может быть исполнен только в последний день срока;
- американский — реализуется в любое время до окончания контракта;
- квазиамериканский, который погашается владельцем в определенные временные промежутки (договор предусматривает один или более отрезков).

Также опционы делятся на два главных класса: CALL и PUT: Опцион колл дает его покупателю право на покупку базового актива по фиксированной цене в определенное время. Соответственно, опцион пут дает право на продажу актива по заданной цене в заданное время.

Также стоит отметить, что приобретая опцион, покупатель платит продавцу премию — денежное вознаграждение за право покупки (продажи) базового актива по опционному договору – и именно эту стоимость рассчитывает «модель Блэка-Шоулза»

Самый понятный пример опциона из реальной жизни:
Рассмотрим такую ситуацию: Человек N приходит в автосалон и ему нравится какая-то машина с ценой X, но на данный момент у него не хватает денежных средств на ее приобретение, поэтому дилерская компания предлагает такую сделку:
N вносит какую-то сумму x(которая навсегда остается у автосалона), за которую компания будет готова не продавать данную машину T времени, в течение которого человек может забрать данный автомобиль по цене X. Но если N не воспользуется своим правом в течение времени T, то компания будет вправе продать машину другому покупателю. (Не путать с предоплатой, так как в данном случае x не входит в стоимость автомобиля)

3 Слайд: вывод модели Блэка-Шоулза

Уравнение Блэка-Шоулза является дифференциальным уравнением в частных производных, которое описывает цену опциона колл во времени.

Вывод модели основывается на концепции безрискового хеджирования. Покупая акции и одновременно покупая опционы PUT на эти акции, инвестор может конструировать безрисковую позицию, где прибыли по акциям будут точно компенсировать убытки по опционам, и наоборот.

Безрисковая хеджированная позиция должна приносить доход по ставке, равной безрисковой процентной ставке, в противном случае существовала бы возможность извлечения арбитражной прибыли и инвесторы, пытаясь получить преимущества от этой возможности, приводили бы цену опциона к равновесному уровню, который определяется моделью.

Вывод формулы:

Предполагается, что стоимость опциона зависит только от цены акции и времени, а также переменных, которые считаются константами.
$w(x,t)$ – значение опциона, как функция цены акции x и времени t. Поэтому количество опционов, которые должны быть проданы по отношению к купленной акции равно: $\frac{1}{(w(x,t)'_x)}$. (если цена акции изменить на $\Delta x \Rightarrow$ цена опциона измениться на $w(x,t)'_x \cdot \Delta x$, а количество опционов измениться на Δx. Что показывает компенсацию изменения цены стоимостью опционов.

Так как x и t постоянно изменяются, то поддержание хеджируемой позиции должно быть непрерывным.

В целом, если на одну акцию имеет $\frac{1}{w(x,t)'_x}$ опционов, то количество капитала в позе: $x - \frac{w}{w(x,t)'_x}$.

Изменение капитала в хеджируемой за короткий интервал $\Delta t : \Delta x - \frac{\Delta w}{w(x,t)'_x}$

Так как позиция изменяется непрерывно, то расчитать $\Delta w = w(x + \Delta x, t + \Delta t) - w(x,t)$:

$$\Delta w = w'_x \Delta x + \frac{1}{2}(w'_x)'_x v^2 x^2 \Delta t + w'_t \delta t$$

где v^2 – коэффицент доходности акций.

Подставим полученное выражение в формулу изменения капитала за Δt и получим:

$$-\left(\frac{1}{2}(w'_x)'_x v^2 x^2 + w'_t\right)\frac{\Delta t}{w'_x}$$

Так как доходность капитала в хеджирумой позиции определена, то возвратный коэффицент будет равен $r\Delta t$, чтобы выполнялось условие доходности только по процентной ставке r. Следовательно изменение капитала должно быть равно значиню капитала, умноженного на $r\Delta t$:

$$-\left(\frac{1}{2}(w'_x)'_x v^2 x^2 + w'_t\right)\frac{\Delta t}{w'_x} = (x - \frac{w}{w'_x}) \cdot r\Delta t$$

делим на Δt с обеих сторон и получаем дифференцальное уравнение для стоимости опциона:

$$w'_t = rw - rxw'_x - \frac{1}{2}v^2x^2(w'_x)'_x$$

Берем t^* – дата экспирации опциона, c – цена исполнения опциона, тогда знаем такие ограничения:

$$\begin{cases} w(x,t^*) = x - c, & x \geq c \\ 0, & x < c \end{cases}$$

Далее делается замена:

$$w(x,t) = e^{r(t-t^*)}y\left[\left(\frac{2}{v^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}v^2\right)\left[ln(\frac{x}{c}) - \left(r - \frac{1}{2}v^2\right)(t-t^*)\right], -\left(\frac{2}{v^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}v^2\right)^2(t-t^*)\right]$$

где y – функия от двух переменных.
И после замены дифференцальное уравнение будет выглядеть так:

$$y'_t = (y'_x)'_x$$

А ограничения будут выглядеть так:

$$\begin{cases} y(u,0) = 0, & u < 0 \\ c\left[e^{u\left(\frac{1}{2}v^2\right)/\left(r - \frac{1}{2}v^2\right)} - 1\right], & u \geq 0 \end{cases}$$

Данное уравнение является физическим уравнением теплопередачи. Его решение:

$$y(u,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-u}{\sqrt{2s}}}^{\infty}\left(c\left[e^{(u+q\sqrt{2s})\left(\frac{1}{2}v^2\right)}/\left(r - \frac{1}{2}v^2\right) - 1\right]e^{\frac{-q^2}{2}}dq\right)$$

производим обратную замену, упрощаем и получаем:

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{x}{c}) + \left(r + \frac{1}{2}v^2\right)(t * -t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{x}{c}) + \left(r - \frac{1}{2}v^2\right)(t * -t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

Формула Блэка-Шоулза позволяет рассчитать цену опциона колл европейского типа.

$N(d_1)$ является вероятностью того, что опцион колл окажется «в деньгах», то есть цена базового актива на момент исполнения T будет выше или равна страйку ($S_T \geq K$). В свою очередь $N(d_2)$ является вероятностью того, что опцион колл окажется «вне денег», то есть ($S_T < K$).

Есть формула паритета: (A = C - P), где A – акция, C –опцион CALL, P– опцион PUT. где знак "+" – означает покупку, а зна "-" – продажу. Тогда данная формула дает идеальное хеджирование при покупке акции: Нужно продать CALL и купить PUT.

4 Слайд: простое решение для дискретных и непрерывных дивидендов:

Данная модель может быть расширена до расчетов стоимости европейских опционов на акции, или другие инструменты, имеющие выплату дивидендов (только в том случае, когда известен процент дивидендов от стоимости акции):

Рассматривают два случая вычисления стоимости опционов на инструменты с выплатой дивидендов:

1)

Дивиденды выплачиваются дискретно, то есть рассматривается опцион на какую-то одну акцию или на один инструмент, в таком случае становиться известен точный день выплаты дивидендов, что упрощает вычисления стоимости опционов:

В результате выплаты дивидендов цена акции снижается, следовательно цена опциона колл также уменьшается, а цена соответствующего ему опциона пут увеличивается. Чтобы учесть это в формуле текущая спотовая цена акции (S_t) должна быть уменьшена на величину стоимости ожидаемых дивидендов, которые будут выплачены до наступления даты исполнения опциона.

2)

В данном случае рассматриваются опционы на индексы, включающие в себя большое множество компаний, дивиденды по которым выплачиваются в разное время, поэтому делается предположение о непрерывной выплате дивидендов. Вторым факторов в данном вычислении является предположение о постоянной ставке дивидендной доходности. Что в сумме дает следующую формулу: тут слайд

5 Слайд: минусы модели Блэка-Шоулза:

Как и любой математической модели, модель Блэка-Шоулза имеет свои преимущества и недостатки:

1. Отсутствие арбитража: Ни один из участников рынка не может получить прибыль за счет разницы цен на один и тот же актив на разных рынках. То есть другими словами, цена актива одинакова на всех рынках.

2. Безрисковая процентная ставка: Любой участник рынка может взять в долг или одолжить любую сумму в любой момент времени под безрисковую процентную ставку.

3. Отсутствие ограничений на торговлю: В любой момент времени у участников рынка есть возможность купить или продать любое количество акций, включая дробное. Также не существует ограничений на сделку short.

4. Отсутствие транзакционных издержек: При осуществлении покупки или продажи участники рынка не несут каких-либо дополнительных затрат, как, например, комиссионные или налоги.

5. Цена актива изменяется случайным образом: Изначально предполагается, что курс акций изменяется случайным образом (подчиняется закону нормального распределения) с постоянным направлением и волатильностью.

6. Отсутствие дивидендов: Предполагается, что по акции, являющейся базовым активом для опциона, не выплачиваются дивиденды.

7. Нейтральность к риску: Все участники рынка являются нейтральными по отношению к риску, то есть принимают решение в пользу актива с максимальной доходностью не принимая при этом во внимание фактор риска. Другими словами, если существует два актива с одинаковой доходностью, но разным уровнем риска, нейтральному к риску инвестору будет безразлично какой из них выбрать.

!6 Слайд: какие существуют модели:

Для случаев, когда процент дивидендов от стоимости акции неизвестен, применяют следующие модели для вычисления стоимости опционов:

7 Слайд: модель Норина Вольфсона:

В данной модели используются точно такие же предположения(минусы), что и в модели Блэка-Шоулза, за исключением трех факторов:

1. Данная модель может учитывать выплату дивидендов по инструменту, что дает ей более широкое применение.

2. Выплата дивидендов считается непрерывной.

3. Модель учитывает возможное уменьшение стоимости опциона до момента его исполнения.

4. Модель имеет ту же форму и использует те же определения переменных, которые использовались в модели Блэка-Шоулза

!8 Слайд: Аналитическое решение для американских CALL опционов с одним дискретным дивидендом:

В случае, когда актив выплачивает ровно один известный дискретный дивиденд в течение срока действия опциона, точное решение уравнения Блэка-Шоулза для американского колл опциона было найдено Роллом, Geske и Уэйли. Это возможно, потому что экспирации опционов до окончания их действия оптимальны только в один момент времени (а именно на дату выплаты дивидендов).

Для дивидендов D и времени t' цена колла выражакется таким образом:

где $M(x, y, p)$ – кумулятивное двумерное нормальное распределение

I – критическая цена акции до выплаты дивидендов, которая решает уравнение $V_{call}(I, X, T - t') = I + D - X$, где V – стоимость европейского call опциона с ценой акции I и временем до погашения $T - t'$.

Если $D \leq X(1 - e^{-r(T-r')}$ или $I = \infty$, то будет не оптимально эксперировать опцион заранее.

Тогда цена данного опциона равна цене эквивалентного европейского опциона. Если в течение срока действия опциона существует несколько ожидаемых дивидендов, то в большинстве случаев оптимальным является только раннее исполнение в последнюю дату. Таким образом, в качестве приближения можно использовать формулу Ролла, Geske и Уэйли, рассматривая все дивиденды, кроме финального для снижения цены спот-актива.

!9

!10

!11

!12