Инновационная образовательная программа

А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОСНОВАН В 1878 ГОДУ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Назаров, А.Ф.Терпугов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям:
010501 – Прикладная математика и информатика,
080116 – Математические методы в экономике

2-е издание, исправленное

Томск – 2010

УДК 519.2
Н 192

Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случай-
Н 192 ных процессов: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

ISBN 5-89503-316-4

Материал, изложенный в учебном пособии, соответствует программе курса «Теория вероятностей и случайных процессов» для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика» и «Математические методы в экономике».

При написании учебного пособия предполагалось, что читатели знакомы с математическим анализом в объёме учебного пособия Г.М.Фихтенгольца.

Книга будет полезна аспирантам, научным работникам, инженерам, экономистам и представителям других специальностей, занимающимся приложениями математических методов и, в частности, моделей и методов теории вероятностей и случайных процессов.

УДК 519.2

Рецензенты:

А.М. Горцев – докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой исследования операций Томского госуниверситета

Р.Т. Якупов – докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой филиала КемГУ в г. Анжеро-Судженске

ISBN 5-89503-316-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЧАСТЬ 1
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей изучает в основном следующие объекты: случайные события, последовательности случайных событий, случайные величины и их последовательности.

Изучение теории вероятностей начнём с рассмотрения понятия **случайного события.**

Все события, происходящие вокруг нас, можно разделить на две группы – детерминированные и случайные.

Детерминированные события характеризуются тем, что **при данном комплексе условий** они либо всегда наступают, либо никогда не наступают. Например, с одной стороны, при температуре 100 °С и нормальном давлении вода закипает. С другой – при повышенном давлении закипания не происходит.

Но есть и еще группа событий, которая характеризуется тем, что при данном комплексе условий они могут как наступать, так и не наступать, и предсказать заранее, наступит это событие или нет, невозможно. Например, при бросании монеты появление герба на верхней стороне – событие случайное, при посеве семян прорастёт данное семя или нет – тоже случайное событие.

Случайным событием называется такое событие, которое **при данном комплексе условий** может как наступить, так и не наступить, и наступит оно или нет – предсказать невозможно.

Подчеркнём два момента.

1. Понятие случайности зависит от того комплекса условий, при котором происходит (или не происходит) данное событие. Изменяя комплекс условий, мы изменяем «степень случайности» данного события.

2. Понятие случайности в сильной степени зависит от нашего знания или незнания. Так, в принципе, можно совершенно точно рассчитать траекторию движения брошенной монеты и определить, какой стороной она упадёт, но для этого необходимо совершенно точно знать её характеристики, начальные условия старта, сопротивление воздуха, параметры поверхности стола и т.д. Если что-либо неизвестно, то заранее предсказать результат такого эксперимента невозможно. Таким образом, наши знания тоже входят в заданный комплекс условий, при котором реализуется рассматриваемое событие.

Что же изучает теория вероятностей, если предсказать, наступит случайное событие или нет, невозможно? Это действительно так, если речь идёт об одном опыте. Но если опыт повторяется неоднократно, если опытов много, то начинают проявляться вполне определённые закономерности. Количество переходит в качество – многократное повторение опыта приводит к появлению закономерностей, которые можно изучать, проверять экспериментально, делать прогноз, использовать в практических целях. Именно это и обеспечивает прикладное значение теории вероятностей, которая в настоящее время широко применяется в науке, технике, экономике, производстве, медицине, социологии, демографии – словом всюду, где имеет место **массовое повторение опытов.**

1.2. Случайные события (неформальное описание)

Случайным событием будем называть любой факт, который может наступить или не наступить. Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами, например $A, B, C, \ldots$

Среди всех событий выделим два крайних.

Событие Ω называется **достоверным**, если оно наступает в каждом опыте.

Событие $\varnothing$ называется **невозможным**, если оно не наступает ни в одном опыте.

Над событиями можно ввести операции.

1. **Следование событий.**

Говорят, что событие A влечёт событие B, что обозначается как $A \subset B$, если при наступлении события A обязательно наступает и событие B.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются **равными**, что обозначается как $A = B$.

По определению будем полагать, что для любого случайного события A имеет место соотношение

$$\varnothing \subset A \subset \Omega .$$

2. **Произведение событий.**

Произведением событий A и B называется такое событие

$$C = A \bigcap B = AB ,$$

которое наступает тогда, когда наступают оба события A и B.

Если $A \bigcap B = \varnothing$, то события A и B называются **несовместными.**

Для произведения конечного или счётного числа событий A_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем применять обозначения

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \quad C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C = \bigcap_{i} A_i .$$

3. **Сумма событий.**

Суммой событий A и B называется такое событие

$$C = A \bigcup B ,$$

которое наступает тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B.

Если события A и B несовместны, то их сумму C будем обозначать как

$$C = A + B .$$

Для сумм конечного или счётного числа событий A_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем применять обозначения

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C = \bigcup_{i} A_i$$

– для произвольных событий и обозначения

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad C = \sum_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C = \sum_{i} A_i$$

– для **попарно несовместных** событий.

События A_i называются **попарно несовместными,** если $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$.

4. **Вычитание событий.**

Разностью событий A и B называется такое событие

$$C = A \setminus B,$$

которое наступает тогда, когда наступает событие A и не наступает событие B.

Событие

$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

называется **противоположным** событию A. Оно наступает тогда, когда событие A не наступает, и наоборот, если A наступает, то $\bar{A}$ – не наступает.

5. **Полная группа событий.**

Говорят, события A_1, A_2, ... A_n образуют **полную группу событий**, если

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий, если

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$, для любых $i \neq j$,

то есть $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Полная группа попарно несовместных событий довольно широко применяется в теории вероятностей.

1.3. Аксиоматическое определение случайного события

Приступим к математически корректному определению понятия случайного события.

Достаточно очевидно, что все операции над событиями и многие термины теории вероятностей аналогичны терминам из теории множеств, поэтому при формальном построении теории вероятностей применяют основные понятия теории множеств.

Пусть при заданном комплексе условий производится некоторый опыт, результатом которого может быть достаточно большое число различных исходов, называемых **элементарными исходами**, или **элементарными событиями.**

Пронумеруем все возможные элементарные исходы опыта и k-й из них обозначим ω_k.

Обозначим множество

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots \}$$

всех элементарных исходов опыта.

Множество Ω называется **пространством элементарных исходов**, или **пространством элементарных событий.**

Отметим, что хотя Ω записано как счётное множество, в теории вероятностей это множество произвольной мощности – оно может быть конечным, счётным, континуальным и множеством более высокой мощности.

Теперь можно дать такое определение.

Случайным событием A называется некоторое подмножество пространства Ω элементарных событий, но не всякое подмножество. Более точно класс этих подмножеств будет определён ниже.

Теперь операции над случайными событиями принимают теоретико-множественный смысл.

В частности, $A \subset B$, если из $\omega \in A$ следует, что $\omega \in B$. Равенство случайных событий $A = B$ выполняется тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B .$$

Для противоположных событий докажем **формулы двойственности**

$$\overline{\bigcup_t A_t} = \bigcap_t \overline{A_t}, \qquad \overline{\bigcap_t A_t} = \bigcup_t \overline{A_t} .$$

В силу определения противоположного события эти формулы можно записать и так:

$$\Omega \setminus \bigcup_t A_t = \bigcap_t (\Omega \setminus A_t), \qquad \Omega \setminus \bigcap_t A_t = \bigcup_t (\Omega \setminus A_t) .$$

Для первой из этих формул имеем

$$\omega \in \Omega \setminus \bigcup_t A_t \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_t A_t \Leftrightarrow \forall t, \omega \notin A_t \Leftrightarrow \forall t, \omega \in \Omega \setminus A_t \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_t (\Omega \setminus A_t) .$$

Аналогично можно получить вторую формулу.

Теперь определим понятие предела последовательности случайных событий.

Предел последовательности случайных событий

Пусть имеется последовательность случайных событий A_1, A_2, ...

Верхним пределом последовательности событий A_n (обозначение $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$) называется такое случайное событие, которое наступает тогда, когда наступает бесконечное число событий из последовательности A_n.

Отметим, что не наступать может также бесконечное число событий, хотя может не наступать и конечное число.

В теоретико-множественном смысле это означает

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \to \infty, \forall n, \omega \in A_{k_n}.$$

Нижним пределом последовательности случайных событий A_n (обозначение $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$) называется такое случайное событие, которое наступает тогда, когда наступают все, кроме, может быть, конечного числа, события из последовательности A_n.

Отметим, что не наступать может лишь конечное число событий.

В теоретико-множественном смысле это означает

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n, \forall k \ge n, \omega \in A_k.$$

Очевидно, что

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Если $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, то говорят, что существует предел последовательности случайных событий A_n

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Теорема 1. Имеют место равенства

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Доказательство. Для $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ согласно определению имеем

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n, \forall k \geq n, \omega \in A_k \Leftrightarrow \exists n, \omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Для $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ согласно определению имеем

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \to \infty, \forall n, \omega \in A_{k_n}.$$

Так как для любого s найдётся такое $k_n \geq s$, что $\omega \in A_{k_n}$, то $\omega \in \bigcup\limits_{k=s}^{\infty} A_k$, но это соотношение верно $\forall s$, поэтому $\omega \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=s}^{\infty} A_k$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A}_n$.

Доказательство. Так как существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то выполняется равенство

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

которое, в силу теоремы 1, перепишем в виде

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

По формулам двойственности имеем

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k = \limsup_{n\to\infty} \overline{A}_n,$$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k = \liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n.$$

Так как $\liminf\limits_{n\to\infty} \overline{A}_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \overline{A}_n$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}_n = \liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n = \limsup_{n\to\infty} \overline{A}_n.$$

Теорема доказана.

Монотонные последовательности

Последовательность случайных событий A_n называется монотонно возрастающей (обозначение $A_n\uparrow$), если $\forall n,\ A_n \subset A_{n+1}$.

Последовательность случайных событий A_n называется монотонно убывающей (обозначение $A_n\downarrow$), если $\forall n \quad A_{n+1} \subset A_n$.

Теорема 3. Для монотонно возрастающей последовательности случайных событий существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Для монотонно убывающей последовательности существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказательство. Пусть $A_n\uparrow$, тогда, в силу монотонного возрастания последовательности случайных событий A_n, можно записать

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup \left\{ \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right\} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Но тогда выполняется равенство

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

С другой стороны:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n ,$$

и поэтому
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

следовательно

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n .$$

Тем самым теорема для монотонно возрастающих последовательностей доказана.

Аналогично теорему можно доказать для монотонно убывающих последовательностей.

Пусть $A_n \downarrow$, тогда, в силу монотонного убывания последовательности случайных событий A_n, можно записать

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n,$$

и поэтому
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

С другой стороны, опять-таки в силу монотонного убывания последовательности случайных событий A_n

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cap \left\{\bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k\right\} = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Но тогда выполняется равенство

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

следовательно

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для нижнего и верхнего пределов последовательности событий имеют место равенства

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}.$$

Доказательство. Так как последовательности

$$B_n = \left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\uparrow, \qquad C_n = \left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\downarrow$$

монотонные, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\} = \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Следствие доказано.

Теперь приступим к изложению наиболее важной части этого параграфа.

Пространство случайных событий

Класс F подмножеств пространства элементарных событий Ω называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1. $\Omega \in F, \varnothing \in F$.
2. Если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \backslash B \in F$.
3. Если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$.
4. Если $A_i \in F$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$, а также $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Подмножества класса F называются **измеримыми.**

Теперь можно сформулировать математически корректное (аксиоматическое) определение понятия случайного события.

Измеримые подмножества $A \in F$ пространства элементарных событий Ω называются **случайными событиями,** а пару $\{\Omega, F\}$ будем называть **пространством случайных событий.**

1.4. Вероятность случайного события (неформальное описание)

Существует более десяти различных неформальных определений понятия **вероятности.**

Рассмотрим три из них.

Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности основано на первичном, не формализуемом, интуитивно очевидном понятии **равновозможности элементарных событий**, которое отражает, в определённом смысле, симметрию в появлении элементарных событий. Именно эта симметрия и обеспечивает их равновозможность.

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно, то есть

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \}$$

и все элементарные события равновозможны.

Пусть некоторое случайное событие $A \subset \Omega$ состоит из m элементарных событий, то есть

$$A = \left\{ \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m} \right\}.$$

Вероятностью случайного события A называется величина

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

то есть отношение числа исходов опыта, благоприятствующих наступлению события A к общему числу всех равновозможных исходов опыта.

Несмотря на внешнюю простоту этой формулы, реально пользоваться ею достаточно сложно, так как она требует знания комбинаторики, а это – целый раздел математики.

Приведём один простой пример применения этой формулы.

Пусть имеется N урн и $M \leq N$ шаров, которые раскладываются по этим урнам. Попадание каждого шара в каждую урну равновозможно. Какова вероятность случайного события A, заключающегося в том, что в каждой урне окажется не более одного шара?

Сначала найдём общее число n всех равновозможных исходов опыта. Так как каждый шар может попасть в одну из N урн, то

$$n = N \times N \times \ldots \times N = N^M.$$

Теперь найдём число m исходов опыта, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события A.

Первый шар может попасть в одну из N урн. Второй – уже только в одну из $N - 1$ пустых урн, иначе в урне с шаром окажутся два шара. Третий шар должен попасть в одну из $N - 2$ пустых урн и так далее. Последний, M-й шар, должен попасть в одну из $N - (M - 1)$ пустых урн.

Следовательно:

$$m = N(N-1)(N-2)\ldots(N-M+1),$$

и поэтому

$$P(A) = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-M+1)}{N^M} = \frac{N!}{N^M(N-M)!}.$$

Такие **урновые схемы** достаточно распространены в теории вероятностей.

Очевидно, что понятие равновозможности нельзя обобщить на случай пространства элементарных событий счётной мощности, в то время как для пространства континуальной мощности это возможно, что приводит к геометрическому определению вероятности.

Геометрическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую ограниченную замкнутую область точек на плоскости.

Опыт заключается в том, что из этой области наудачу выбирается точка. Выбор любой точки из пространства элементарных событий равновозможен.

Пусть случайное событие A заключается в том, что выбранная точка принадлежит области $A \subset \Omega$.

Вероятностью случайного события A называется величина

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ – площади этих областей.

Если область Ω трёхмерная, то вместо площади следует брать объёмы этих областей, а в одномерном случае – рассматривать длины соответствующих отрезков. В общем случае пишут

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)},$$

где $\mathrm{mes}(A)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$ – меры (длины, площади, объёмы и так далее) этих областей.

Неформальные определения вероятности могут приводить к некоторым парадоксам.

Парадокс Бертрана

Бертраном была поставлена следующая задача.

В круге наудачу выбирается хорда. Какова вероятность того, что её длина больше длины стороны правильного, вписанного в этот круг, треугольника?

Учёными того времени были предложены три варианта значений этой вероятности: $P(A) = 1/3$, $P(A) = 1/4$, $P(A) = 1/2$.

Их дискуссия по этому вопросу не привела к однозначному ответу, что в дальнейшем получило название «парадокса Бертрана».

Объяснение этого парадокса заключается в том, что в первом случае хордой называли отрезок, соединяющий две точки окружности. Во втором – хордой называли отрезок, середина которого совпадает с заданной точкой рассматриваемого круга. А в третьем – хордой называли отрезок, перпендикулярный некоторому диаметру этого круга.

Применение геометрического определения вероятности давало упомянутые ответы, что вполне естественно, так как для каждого варианта рассматривалось своё пространство элементарных событий.

В первом случае оно являлось множеством всех точек окружности. Во втором – всех точек рассматриваемого круга, а в третьем – всех точек диаметра этого круга.

То есть с точки зрения современной теории вероятностей решались различные задачи, что естественно приводило к различным ответам.

Математически корректное, формально-аксиоматическое определение вероятности, которое будет приведено ниже, естественно лишено таких недостатков.

С практической точки зрения наиболее полезным является статистическое определение вероятности.

Статистическое определение вероятности

Оба приведённых выше определения вероятности основаны на понятии равновозможности элементарных исходов опыта, которое на практике бывает лишь в очень редких случаях.

Статистическое определение вероятности основано на экспериментально установленном факте – так называемой **устойчивости частот.**

Пусть в результате опыта может наступить или не наступить некоторое случайное событие A.

Пусть этот опыт повторён n раз, в которых событие A наступило m раз, а в $n - m$ повторениях не наступало. Тогда величина

$$h(n) = \frac{m}{n}$$

называется частотой наступления события A в серии из n опытов.

Многократно экспериментально подтверждался тот факт, что с увеличением числа n опытов в серии частота «сходится» к некоторой величине, однозначной для рассматриваемого случайного события A. Эту величину называют **статистической вероятностью** случайного события A.

Возникает вопрос: имеет ли отношение статистическая вероятность события A к вероятности этого события, полученной другим способом, например, применением классического или геометрического определений вероятности? Ниже будет доказано, что значения этих вероятностей совпадают.

Простейшие свойства вероятности

Пользуясь геометрическим определением вероятности, выведем её простейшие свойства.

1. $0 \le P(A) \le 1$. Это свойство следует из того, что $0 \le \mathrm{mes}(A) \le \mathrm{mes}(\Omega)$.

2. $P(\varnothing) = 0; P(\Omega) = 1$. Это свойство следует из того, что $\mathrm{mes}(\varnothing) = 0$.

3. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$. Это свойство вероятностей следует из свойства мер для областей A и B, так как, если $A \subset B$, то выполняется неравенство $\mathrm{mes}(A) \le \mathrm{mes}(B)$.

4. Для несовместных случайных событий A и B имеет место равенство

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathrm{mes}(A+B) = \mathrm{mes}(A) + \mathrm{mes}(B)$, следовательно:

$$P(A+B) = \\ = \frac{\mathrm{mes}(A+B)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{\mathrm{mes}(A)+\mathrm{mes}(B)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)} + \frac{\mathrm{mes}(B)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \\ = P(A) + P(B).$$

Очевидно, что если события $A_1, A_2, \ldots A_n$ попарно несовместны, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Действительно, так как

$$\mathrm{mes}(\bar{A}) = \mathrm{mes}(\Omega) - \mathrm{mes}(A),$$

то
$$P(\bar{A}) = \frac{\mathrm{mes}(\bar{A})}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{\mathrm{mes}(\Omega) - \mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = 1 - P(A).$$

6. Если $A \subset B$, то

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Действительно, если $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$, тогда

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

откуда следует сформулированное свойство, а также свойство 5.

1.5. Аксиоматическое определение вероятности

Трудности с выделением равновозможных элементарных событий, а также указанные парадоксы неформального определения вероятности приводят к необходимости математически корректного формально-аксиоматического определения вероятности.

Пусть задано пространство случайных событий $\{\Omega, F\}$.

Правило, которое каждому множеству $A \in F$ ставит в соответствие число, называется **функцией множеств** $\varphi(A)$:

$$\forall A \in F \xrightarrow{\varphi} \varphi(A).$$

Функция множеств $\varphi(A)$ называется **счётно-аддитивной**, если для попарно несовместных множеств A_i выполняется равенство

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Вероятностной мерой $P(A)$ на пространстве случайных событий $\{\Omega, F\}$ называется произвольная

1) неотрицательная,

2) счётно-аддитивная функция множеств,

3) удовлетворяющая **условию нормировки** $P(\Omega) = 1$.

Её значение для конкретного события A называется **вероятностью случайного события.**

Ещё раз подчеркнём три основных момента в определении вероятностной меры:

1. $\forall A \in F,\ P(A) \geq 0$.

2. $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

3. $P(\Omega) = 1$.

Тройка $\{\Omega, F, P\}$ называется **вероятностным пространством с вероятностной мерой P.**

Для вероятности, определённой формально-аксиоматически, выполняются все свойства, полученные выше на основе геометрического определения.

Далее, более подробно докажем наиболее важные свойства вероятностной меры.

1.6. Теорема сложения вероятностей

Теорема (сложения вероятностей). Для произвольных случайных событий A и B имеет место равенство

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Доказательство. Очевидно, что выполняются равенства

$$A = (A \setminus B) + (A \bigcap B) = (A \setminus B) + AB,$$

$$B = (B \setminus A) + (A \bigcap B) = (B \setminus A) + AB.$$

Из аддитивности вероятностной меры следует, что выполняются равенства

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(AB),$$

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(AB),$$

поэтому

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB),$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(AB).$$

Так как выполняется равенство

$$A \bigcup B = (A \setminus B) + (B \setminus A) + (AB),$$

то опять же в силу аддитивности вероятностной меры, а также полученных выше равенств можно записать

$$P(A \bigcup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(AB) =$$

$$= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема доказана.

Следствие. Для любых случайных событий A и B выполняется неравенство

$$P(A \bigcup B) \le P(A) + P(B).$$

Теорема (обобщённая теорема сложения вероятностей). Для любых случайных событий A_1, A_2, ... A_n выполняется равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

Доказательство. Доказательство нетрудно выполнить методом математической индукции.

1.7. Теорема о полуаддитивности вероятности

Теорема. Для счётного множества произвольных случайных событий A_n имеет место неравенство

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Доказательство. Построим последовательность B_n – попарно несовместных случайных событий:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right), \dots,$$

для которых выполняются следующие условия:

а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,

б) $B_n \subset A_n$,

поэтому можно записать

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = P\left\{\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Теорема доказана.

1.8. Теорема о непрерывности вероятностной меры

Теорема (для монотонных последовательностей). Если A_n, $n = 1, 2, \dots$, монотонная последовательность, то

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Доказательство. Пусть $A_n \uparrow$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \dots.$$

В силу счётной аддитивности

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_{k+1} \setminus A_k\} = P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P\{A_{k+1} \setminus A_k\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{P(A_1) + [P(A_2) - P(A_1)] + \ldots + [P(A_n) - P(A_{n-1})]\} = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Пусть $A_n \downarrow$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \{\Omega \setminus \overline{A}_n\} = \Omega \setminus \lim_{n\to\infty} \overline{A}_n,$$

поэтому, в силу монотонного возрастания последовательности $\overline{A}_n$, можно записать

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} \overline{A}_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \{1 - P(A_n)\} = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Теорема доказана.

Теорема (для произвольных последовательностей). Если существует предел последовательности случайных событий A_n, то

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Доказательство. 1. Докажем, что

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} A_n\right\} \le \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} P(A_k).$$

Так как

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\},$$

то выполняется равенство

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} A_n\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\},$$

в котором для $\forall k \ge n$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_k,$$

поэтому

$$P\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\} \le \inf_{k\ge n} P(A_k),$$

следовательно, выполняется неравенство

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} A_n\right\} \le \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} P(A_k).$$

2. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} P(A_k) \leq P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right\}.$$

Так как
$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\},$$

то выполняется равенство

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\},$$

в котором $\forall k \geq n$
$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_k,$$

поэтому
$$P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} \geq \sup_{k\geq n} P(A_k),$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} P(A_k) \leq P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right\}.$$

3. Теперь можно записать следующие неравенства:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\inf A_n\right\} \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} P(A_k) \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} P(A_k) \leq P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right\}.$$

Так как для сходящейся последовательности случайных событий A_n выполняется равенство её нижнего и верхнего пределов, то выполняется равенство

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\inf A_n\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right\},$$

следовательно, также выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} P(A_k) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} P(A_k),$$

а это означает, что

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Теорема доказана.

1.9. Условная вероятность. Независимость случайных событий

Как показано выше, вероятность является единственной числовой характеристикой случайного события. Всё, что можно сказать о случайном событии, заключено в его вероятности.

Но это так до тех пор, пока рассматривается единственное случайное событие.

Теперь рассмотрим несколько случайных событий, наступления которых зависимы.

Пусть имеется некоторое случайное событие A, характеризуемое своей вероятностью $P(A)$. Если стало известным, что наступило какое-то другое событие B, то этот факт может изменить значение вероятности наступления события A, она станет теперь равной $P(A|B)$. Эта величина называется **условной вероятностью** наступления события A, **при условии**, что наступило событие B.

Применяя геометрическое определение вероятности, найдём значение условной вероятности $P(A|B)$.

Согласно геометрическому определению вероятности, имеем

$$P(A)=\frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}, \qquad P(B)=\frac{\text{mes}(B)}{\text{mes}(\Omega)}.$$

Но если известно, что наступило событие B, то это означает, что наступило одно из элементарных событий $\omega\in B$, поэтому множество B в рассматриваемом случае начинает играть роль всего пространства элементарных событий, так как другие элементарные события $\omega\notin B$ наступать не могут, следовательно, естественно полагать, что выполнено равенство

$$P(A\,|\,B)=\frac{\text{mes}(A\cap B)}{\text{mes}(B)}=\frac{\text{mes}(AB)/\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(B)/\text{mes}(\Omega)}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Поэтому для произвольных случайных событий A и B из одного и того же вероятностного пространства $\{\Omega,F,P\}$ с произвольной вероятностной мерой P дадим следующее определение.

Условной вероятностью $P(A|B)$ того, что наступило событие A, **при условии, что наступило событие** B, называется величина

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Здесь, естественно, выполняется условие $P(B)\neq 0$.

Совершенно аналогично можно записать

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

если $P(A) \neq 0$.

Перепишем эти формулы в виде

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A).$$

Полученное равенство называется **теоремой умножения вероятностей.**

Далее определим одно из наиболее важных в теории вероятностей понятие **независимости случайных событий.**

Говорят, что случайное событие A не зависит от события B, если выполняется равенство

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Теорема. Если событие A не зависит от события B, то событие B также не зависит от события A.

Доказательство. Если событие A не зависит от события B, то в силу теоремы умножения вероятностей и определения независимости запишем равенство

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B),$$

из которого, сократив на $P(A)$, получим, что

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B \mid A),$$

то есть событие B также не зависит от события A.

Теорема доказана.

Таким образом, свойство независимости случайных событий является взаимным, поэтому можно дать такое определение.

Случайные события A и B называются **стохастически независимыми**, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема. Если случайные события A и B независимы, то независимы также пары событий $\bar{A}$ и B; A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Доказательство. Так как выполняется равенство

$$\bar{A}B = (\Omega \setminus A)B = B \setminus AB,$$

то можно записать

$$P(\bar{A}B) = P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= P(B)\{1 - P(A)\} = P(B)P(\bar{A}),$$

следовательно, события $\bar{A}$ и B независимы.

Аналогично нетрудно доказать независимость и двух других пар случайных событий.

Теорема доказана.

Теорема умножения для n случайных событий выглядит следующим образом

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

Случайные события A_1, A_2, ... A_n называются **независимыми в совокупности**, если для любой группы индексов $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ выполняется равенство

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right\} = \prod_{k=1}^{m} P(A_{i_k}),$$

и в частности
$$P\left\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right\} = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Очевидно, что из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Обратное утверждение неверно.

Например, рассмотрим тетраэдр, грани которого раскрашены следующим образом: одна грань – синяя, вторая – красная, третья – зелёная, а четвёртая грань окрашена всеми тремя указанными цветами. При бросании тетраэдра, он падает на поверхность одной из своих граней. Определим три случайных события. Если на грани, на которую упал тетраэдр, имеется синяя краска, то будем говорить, что наступило событие S; если зелёная, то событие Z; если красная, то событие K.

Вероятности этих событий и их произведений принимают следующие значения

$$P(S) = P(Z) = P(K) = \frac{1}{2}, \quad P(SZ) = P(SK) = P(ZK) = \frac{1}{4}, \quad P(SZK) = \frac{1}{4},$$

откуда следует, что рассматриваемые события попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

Действительно, в силу равенств

$$P(SZ) = P(S)P(Z), \qquad P(SK) = P(S)P(K), \qquad P(ZK) = P(Z)P(K)$$

можно говорить, что рассматриваемые события попарно независимы. А в силу неравенства

$$P(SZK) \neq P(S)P(Z)P(K)$$

можно признать, что эти три события не являются независимыми в совокупности.

1.10. Формула полной вероятности и формула Байеса

Выведем теперь две важнейшие формулы теории вероятностей.

Формула полной вероятности

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа попарно несовместных событий, A – некоторое случайное событие.

Будем полагать, что известны следующие вероятности:

а) $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ – так называемые априорные вероятности событий H_i;

б) $P(A|H_1), P(A|H_2), ..., P(A|H_n)$ – условные вероятности события A при условии, что наступили события H_i.

Требуется найти безусловную (полную) вероятность $P(A)$ случайного события A.

Такой ситуации иногда дают следующую интерпретацию. События $H_1, H_2, ..., H_n$ называют гипотезами относительно тех условий, при которых может наступить (или не наступить) событие A, при этом полагают известными вероятности реализаций этих условий, то есть – вероятности $P(H_i)$, а также считаются известными вероятности наступления события A в условиях гипотезы H_i, то есть – условные вероятности $P(A|H_i)$. Ставится задача определения безусловной (полной) вероятности $P(A)$ случайного события A.

Вывод формулы для этой вероятности достаточно прост.

Так как $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$, то

$$P(A) = P\left\{\sum_{i=1}^{n} AH_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A\,|\,H_i)P(H_i)\,.$$

Это равенство и носит название **формулы полной вероятности.**

В теории вероятностей и её приложениях достаточно широко применяется эта формула, а также её различные модификации.

Формула полной вероятности для условных вероятностей

Пусть в тех же условиях задано также случайное событие B, и требуется найти условную вероятность $P(A|B)$. Аналогично получим

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{P(B)}\sum_{i=1}^{n}P(ABH_i)=\frac{1}{P(B)}\sum_{i=1}^{n}P(A|BH_i)P(BH_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A|BH_i)\frac{P(BH_i)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{n}P(A|BH_i)P(H_i|B).$$

Таким образом, если известны условные вероятности $P(H_i|B)$ и $P(A|BH_i)$, то имеет место равенство

$$P(A|B)=\sum_{i=1}^{n}P(A|BH_i)P(H_i|B),$$

которое будем называть **формулой полной вероятности для условных вероятностей.**

Формула полной вероятности в интегральной форме

В приложениях достаточно часто применяется формула полной вероятности в интегральной форме, которую получим для одного частного случая.

Пусть на отрезке [0, 1] наудачу выбирается точка. Вероятность того, что эта точка окажется в интервале $(x, x+\Delta x)$ составляет

$$\int_{x}^{x+\Delta x}f_1(y)dy=f_1(x)\Delta x+o(\Delta x),\qquad f_1(x)\geq 0,\ \int_0^1 f_1(x)dx=1.$$

Из этого же отрезка выбирается также и вторая точка. Вероятность того, что она окажется левее точки x, составляет $F_2(x)$, здесь $F_2(x)$ неубывающая неотрицательная функция, такая, что $F_2(1)=1$.

Требуется найти вероятность того, что вторая, наудачу выбираемая, точка окажется левее первой.

Для решения этой задачи обозначим A – случайное событие, заключающееся в том, что вторая точка окажется левее первой.

Гипотеза $H(x_i)$ заключается в том, что первая выбираемая точка попадает в интервал (x_i, x_{i+1}), где $0=x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{i+1}=1$.

Тогда вероятность гипотезы $H(x_i)$ составляет

$$P(H(x_i)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(y)dy = f_1(x_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i),$$

а условная вероятность $P(A \mid H(x_i))$ равна

$$P(A \mid H(x_i)) = F_2(x_i) + o(\Delta x_i).$$

Следовательно, можно записать

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H(x_i))P(H(x_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_2(x_i) f_1(x_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i) \underset{\Delta \to 0}{\to} \int_0^1 F_2(x) f_1(x)dx,$$

где $\Delta = \max\limits_i \Delta x_i$.

Таким образом, в рассматриваемом случае, **формула полной вероятности в интегральной форме** имеет вид

$$P(A) = \int_0^1 F_2(x) f_1(x)dx.$$

В следующей главе будет рассмотрен ещё один вариант формулы полной вероятности применительно к числовым характеристикам случайных величин.

Теперь получим ещё одну из важнейших формул теории вероятностей.

Формула Байеса

Рассмотрим следующую задачу. Пусть известно, что в результате опыта наступило событие A. Как изменится в этой ситуации вероятность гипотез H_i, то есть какова **апостериорная** вероятность $P(H_i|A)$ гипотезы H_i при условии, что наступило событие A?

Очевидно, что

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{P(A)},$$

поэтому, применяя формулу полной вероятности, получим равенство

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid H_k)P(H_k)},$$

которое называется **формулой Байеса.**

Формула Байеса является основной для целого раздела прикладной теории вероятностей – теории статистических решений.

1.11. Схема Бернулли. Теорема об опытах. Биномиальное распределение

Схема Бернулли заключается в следующем. Проводится серия из n опытов. Предполагается, что выполнены условия:

а) опыты независимы, то есть исход одного опыта не влияет на исход другого опыта;

б) в каждом опыте может наступить (или не наступить) некоторое случайное событие A, но вероятность $P(A) = p$ этого события одна и та же в каждом опыте.

Требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из n опытов событие A наступит ровно m раз.

Теорема (об опытах). В схеме Бернулли вероятность $P_n(m)$ определяется равенством

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где число сочетаний C_n^m определяется как

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Доказательство. Для доказательства обозначим:

A_i – событие, заключающееся в том, что в i-м опыте событие A наступает.

$B_n(m)$ – событие, заключающееся в том, что в серии из n опытов событие A наступит ровно m раз.

Тогда можно записать следующее разложение:

$$B_n(m) = A_1 A_2 \ldots A_m \bar{A}_{m+1} \bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n + \bar{A}_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \bar{A}_{m+2} \ldots A_n + \ldots .$$

Отметим, что слагаемые в этой сумме попарно несовместные случайные события, поэтому

$$P\{B_n(m)\} = P\{A_1 A_2 \ldots A_m \bar{A}_{m+1} \bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n\} + P\{\bar{A}_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n\} + \ldots .$$

В силу независимости опытов эту вероятность можно переписать в виде

$$P\{B_n(m)\} = p^m(1-p)^{n-m} + p^m(1-p)^{n-m} + \dots .$$

Очевидно, что число слагаемых в этой сумме равно C_n^m, поэтому выполняется равенство

$$P_n(m) = P\{B_n(m)\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} .$$

Теорема доказана.

Совокупность по всем $m = 0, 1, 2, \dots, n$ вероятностей $P_n(m)$ называется **биномиальным распределением вероятностей.**

Это первое распределение вероятностей, с которым мы познакомились. В этой главе будут приведены ещё три распределения вероятностей, а в следующей главе различные распределения вероятностей будут рассмотрены более подробно.

Для биномиального распределения вероятностей найдём то значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение. Это значение $m = m^*$ называется наивероятнейшим числом успехов.

Рассмотрим отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n!p^{m+1}(1-p)^{n-m-1}}{(m+1)!(n-m-1)!}\frac{m!(n-m)!}{n!p^m(1-p)^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1}\frac{p}{1-p} .$$

Найдём те значения m, при которых это отношение будет больше единицы.

Так как $$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 ,$$

следовательно $$np - mp > m + 1 - mp - p ,$$

поэтому $$m < np + (p-1) .$$

Итак, при $m < np + (p-1)$ выполняется неравенство $P_n(m+1) > P_n(m)$.

Очевидно, что при $m > np + (p-1)$ будет наоборот $P_n(m+1) < P_n(m)$.

Следовательно, максимальное значение вероятность $P_n(m)$ принимает при

$$m = m^* = [np + (p-1)] + 1 .$$

Левее этого значения вероятности $P_n(m)$ монотонно возрастают с ростом m, а правее – убывают.

1.12. Формулы Муавра – Лапласа. Гауссовское распределение

Несмотря на внешнюю простоту формулы для $P_n(m)$, применять её целесообразно лишь при небольших значениях n и m в связи с необходимостью вычисления значений факториалов.

Поэтому для достаточно больших значений n применяют другую формулу, которую даёт локальная теорема Муавра – Лапласа.

Локальная предельная теорема Муавра – Лапласа

Теорема. В условиях схемы Бернулли обозначим

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

тогда в любом конечном интервале $a < x < b$ имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Доказательство. Для сокращения записи обозначим $1 - p = q$ и применим формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} e^{Q_n} \sqrt{2\pi n},$$

где $|Q_n| < 1/(12n)$.

Из равенства $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ следует, что

$$m = np + x\sqrt{npq}, \quad n - m = nq - x\sqrt{npq},$$

поэтому можно записать

$$P_n(m) = \frac{n! p^m q^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{n^n e^{-n} e^{Q_n} \sqrt{2\pi n} p^m q^{n-m}}{m^m e^{-m} e^{Q_m} \sqrt{2\pi m} \cdot (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)} e^{Q_{n-m}} \sqrt{2\pi(n-m)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} e^{Q_n - Q_m - Q_{n-m}} \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n^2pq}{m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}e^{Q_n-Q_m-Q_{n-m}}.$$

Так как при $n\to\infty$, фиксированных x и p $m\to\infty$, $n-m\to\infty$, то

$$Q_n-Q_m-Q_{n-m}\to 0,$$

поэтому

$$\exp\{Q_n-Q_m-Q_{n-m}\}\underset{n\to\infty}{\to}1.$$

Далее

$$\frac{n^2pq}{m(n-m)}=\frac{n^2pq}{\{np+x\sqrt{npq}\}\{nq-x\sqrt{npq}\}}=\frac{1}{\left\{1+x\sqrt{\dfrac{q}{np}}\right\}\left\{1-x\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right\}}\underset{n\to\infty}{\to}1.$$

Далее рассмотрим величину

$$z=\left(\frac{m}{np}\right)^m\left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m},$$

для которой

$$\ln z=m\ln\left(\frac{m}{np}\right)+(n-m)\ln\left(\frac{n-m}{nq}\right)=$$

$$=\left(np+x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+\left(nq-x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Разложим логарифмы в ряды Тейлора:

$$\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)=x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2}{2}\frac{q}{np}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)=-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2}{2}\frac{p}{nq}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Тогда можно записать

$$\ln z = \left(np + x\sqrt{npq}\right)\left\{x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\frac{q}{np} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} +$$

$$+\left(nq - x\sqrt{npq}\right)\left\{-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= x\sqrt{npq} - \frac{x^2}{2}q + x^2 q - x\sqrt{npq} - \frac{x^2}{2}p + x^2 p + O\left(n^{-1/2}\right) = \frac{x^2}{2} + O\left(n^{-1/2}\right).$$

Поэтому при $n \to \infty$ $\ln z \to x^2/2$, следовательно,

$$\left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{np(1-p)} \cdot P_n(m) = p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Теорема доказана.

Будем говорить, что функция $p(x)$ определяет **гауссовское**, или **нормальное**, распределение вероятностей.

В приложениях полученную формулу применяют при достаточно больших значениях n в следующем виде:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right\}.$$

Это приближение тем точнее, чем больше n и p ближе к 1/2.

Интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа

Для нахождения значения вероятностей вида $P\{m_1 < m < m_2\}$ при заданных m_1 и m_2 и достаточно больших значениях n применяется другая формула, определяемая следующей теоремой.

Теорема. В условиях схемы Бернулли выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где
$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

называется функцией Лапласа.

Функция Лапласа также определяет **нормальное**, или **гауссовское**, распределение вероятностей.

При достаточно больших значениях n можно записать

$$P\{m_1 < m < m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Эту теорему мы не будем доказывать, так как в третьей главе её доказательство получается как частный случай гораздо более общей теоремы.

1.13. Теорема Пуассона. Распределение Пуассона

В условиях схемы Бернулли будем полагать, что n принимает достаточно большие значения, а значения вероятности p близки к нулю, то есть необходимо получить предельную формулу для $P_n(m)$ при выполнении двух предельных условий $n \to \infty$ и $p \to 0$.

Для того чтобы сформулировать такую теорему, необходимо рассмотреть так называемую **схему серий опытов**.

Пусть дана последовательность серий опытов: в первой серии единственный опыт и вероятность успеха – p_1; во второй серии два опыта и вероятность успеха в каждом из них – p_2; в третьей серии три опыта и вероятность успеха – p_3; в n-й серии n опытов и вероятность успеха в каждом из них – p_n.

Обозначим $np_n = a_n$. Будем полагать, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема (Пуассона). В схеме серий, при выполнении условия

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Совокупность вероятностей $P(m)$ при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ называется **распределением Пуассона.**

Доказательство. В силу равенства $np_n = a_n$, можно записать $p_n = a_n/n$, поэтому

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}(a_n/n)^m (1-a_n/n)^{n-m} =$$

$$= \frac{a_n^m}{m!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}(1-a_n/n)^{-m}(1-a_n/n)^n .$$

Так как выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n/n)^{-m} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n/n)^n = e^{-a},$$

то можно записать

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m) = P(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} .$$

Теорема доказана.

1.14. Случайные потоки однородных событий

Распределение Пуассона находит самое широкое применение в теории случайных потоков однородных событий.

Случайным потоком однородных событий называется ось времени, на которой в случайные моменты возникают некоторые однородные (одинаковые) события.

Отметим, что в теории потоков термин **событие** имеет смысл, существенно отличающийся от смысла понятия **случайного события** в теории вероятностей.

Будем полагать, что относительно моментов наступления событий рассматриваемого потока выполнены следующие условия:

1. События наступают **независимо** друг от друга, то есть наступление какого-либо события не влияет на наступление других событий.

2. На бесконечно малом интервале времени продолжительности Δt событие может наступить с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, а два и более событий наступают с вероятностью $o(\Delta t)$. Это свойство потоков называется **ординарностью** потока.

3. Параметр λ, который называется **интенсивностью потока**, не зависит от времени. Это свойство потоков называется **стационарностью потока.**

Поток, удовлетворяющий всем трём свойствам – независимости, ординарности и стационарности, называется **пуассоновским потоком**.

Обозначим $P_t(m)$ вероятность того, что на интервале времени продолжительности t наступит ровно m событий.

Для нахождения этой вероятности разделим рассматриваемый интервал времени на достаточно большое число n частей длительности t/n. Тогда в силу ординарности потока, при $n \gg 1$, на каждом отрезке может наступить не более одного события, а каждый отрезок можно рассматривать как опыт, в котором может наступить или не наступить случайное событие – появление однородного события рассматриваемого потока. Вероятность этого случайного события составляет $p_n = \lambda\Delta t/n + o(n^{-1})$. Тогда выполнены все условия теоремы Пуассона, поэтому для вероятности $P_t(m)$, в силу условия

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\lambda t/n + o(n^{-1})\right) = \lambda t,$$

можно записать равенство

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\exp\{-\lambda t\},$$

которое определяет распределение Пуассона для числа событий, наступивших в пуассоновском потоке за время t.

1.15. Полиномиальная схема. Полиномиальное распределение

В качестве обобщения схемы Бернулли, когда в каждом опыте возможно только два исхода – успех (наступление события A) или неудача (не наступление события A), рассматривается полиномиальная схема.

Аналогично схеме Бернулли (биномиальной схеме) в полиномиальной схеме также рассматривается серия из n независимых опытов, но в каждом из них возможно наступление одного из K событий

$A_1, A_2, ..., A_K$, образующих полную группу попарно несовместных событий с вероятностями $p_k = P(A_k)$ в одном опыте.

Требуется найти вероятность $P_n(m_1, m_2, ..., m_K)$ того, что в серии из n опытов событие A_1 наступит m_1 раз, событие A_2 наступит m_2 раз и так далее, наконец, событие A_K наступит m_K раз. Естественно, что выполняется равенство $m_1 + m_2 +...+ m_K = n$.

Проделав выкладки, аналогичные приведённым для схемы Бернулли, нетрудно показать, что выполняется равенство

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_K) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_K!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_K^{m_K}.$$

Совокупность вероятностей $P_n(m_1, m_2, ..., m_K)$ для всех возможных целых неотрицательных значений аргументов $m_1, m_2, ..., m_K$, удовлетворяющих условию $m_1 + m_2 +...+ m_K = n$, называется **полиномиальным распределением.**

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В этой главе рассмотрим следующее важнейшее понятие теории вероятностей, а именно понятие **случайной величины**.

2.1. Случайные величины (неформальное описание)

До сих пор рассматривалась ситуация, когда результатом опыта являлось наступление или не наступление некоторого события. Другим, гораздо более распространённым вариантом, является тот случай, когда в результате опыта наблюдается некоторое число.

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта принимает какое-то значение, но:

а) заранее нельзя предсказать, какое именно значение примет эта величина в результате опыта;

б) от опыта к опыту это значение, вообще говоря, меняется.

Выполним более формальное описание понятия случайной величины.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, где элементарные события ω – это возможные исходы опыта, в результате которого наблюдается какое-то число, следовательно, случайная величина является некоторым правилом, по которому каждому $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие число.

Такое правило в математике называется функцией, поэтому можно сказать, что случайной величиной является **функция** $\xi(\omega)$, определённая на пространстве элементарных событий Ω и принимающая свои значения в пространстве R действительных чисел.

Так же как и в теории случайных событий не всякое множество является случайным событием, в теории случайных величин не всякая функция является случайной величиной.

2.2. Функции и отображения

Пусть даны два пространства Ω и R. Функцией f называется правило, которое каждому элементу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие число $r = f(\omega) \in R$.

Пусть A некоторое подмножество из Ω, тогда множество

$$B = \{ r : r = f(\omega), \omega \in A\} = f(A)$$

называется **образом** множества A.

Пусть B некоторое подмножество из R, тогда множество

$$A = \{ \omega : f(\omega) \in B\} = f^{-1}(B)$$

называется **прообразом** множества B, а правило $f^{-1}(B)$ называется **обратным отображением.** Прообраз $\omega = f^{-1}(r)$, $r \in R$, называется **обратной функцией.**

Пусть задан класс F' подмножеств B из R, тогда класс F подмножеств A из Ω

$$F = \left\{ A : A = f^{-1}(B), B \in F' \right\}$$

называется прообразом класса F'.

Теорема. Обратное отображение перестановочно со всеми теоретико-множественными операциями, то есть

$$f^{-1}\left(\bigcup_t B_t\right) = \bigcup_t f^{-1}(B_t),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_t B_t\right) = \bigcap_t f^{-1}(B_t),$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

Следствие. Прообраз σ-алгебры есть так же σ-алгебра.

2.3. Борелевская прямая

Рассмотрим множество R действительных чисел. На этой числовой прямой могут быть отрезки четырёх типов: $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b). Символом $\langle a,b \rangle$ обозначается любой из этих отрезков, при этом числа a и b могут быть конечными или бесконечными для открытой границы.

Борелевской σ-алгеброй называется класс $\boldsymbol{B}$ множеств из R, которые получены из отрезков $\langle a,b\rangle$ применением к ним конечного или счётного числа теоретико-множественных операций. Пара $\{R, \boldsymbol{B}\}$ называется **борелевской прямой.**

Теорема. Любой из отрезков $\langle a,b\rangle$ может быть получен из отрезков $(-\infty, b)$ применением к ним конечного или счётного числа теоретико-множественных операций.

Доказательство. Действительно

$$[a,b)=(-\infty,b)\setminus(-\infty,a),$$

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(-\infty,b)\setminus(-\infty,a+1/n)\},$$

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{(-\infty,b+1/n)\setminus(-\infty,a)\},$$

$$(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{(-\infty,b+1/n)\setminus(-\infty,a+1/m)\}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Любые отрезки $\langle a,b\rangle$, а также любые множества, которые получены из отрезков вида $\langle a_i,b_i\rangle$ применением к ним конечного или счётного числа теоретико-множественных операций, являются борелевскими множествами, то есть элементами борелевской σ-алгебры $\boldsymbol{B}$.

2.4. Аксиоматическое определение случайных величин, их основные свойства

Пусть заданы вероятностное пространство $\{\Omega,F,P\}$ и борелевская прямая $\{R,\boldsymbol{B}\}$.

Функция $\xi(\omega)$, отображающая Ω в R, называется **случайной величиной**, если σ-алгебра F является прообразом борелевской σ-алгебры $\boldsymbol{B}$, то есть для любого борелевского множества $B\in\boldsymbol{B}$ множество

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in F$$

является измеримым. При этом функция $\xi(\omega)$ также называется **измеримой.**

Таким образом, случайная величина $\xi(\omega)$ должна не только отображать Ω в R, но также отображать F в $\boldsymbol{B}$. Это дополнительное требование и ограничивает класс функций $\xi(\omega)$, которые называются случайными величинами.

Функция $f(x)$ действительной переменной x, отображающая $\{R,\boldsymbol{B}\}$ в $\{R,\boldsymbol{B}\}$, называется **измеримой по Борелю** или **борелевской функцией.**

Теорема (критерий измеримости). Для того чтобы функция $\xi(\omega)$ была случайной величиной (измеримой функцией), необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырёх условий для любого действительного x:

1. $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$;
2. $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in F$;
3. $\{\omega : \xi(\omega) > x\} \in F$;
4. $\{\omega : \xi(\omega) \ge x\} \in F$.

Теперь перечислим **основные свойства случайных величин**:

1. Функция $\xi(\omega) \equiv c$ является случайной величиной.
2. Если $\xi(\omega)$ – случайная величина, то $\eta(\xi) = a\xi(\omega) + b$ также является случайной величиной.
3. Квадрат случайной величины также является случайной величиной.
4. Модуль случайной величины также является случайной величиной.
5. Сумма случайных величин также является случайной величиной.
6. Разность случайных величин также является случайной величиной.
7. Произведение случайных величин также является случайной величиной.
8. Если $\xi(\omega)$ – случайная величина такая, что $\xi(\omega) \neq 0$, то $1/\xi(\omega)$ также является случайной величиной.
9. Если $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, ...,$ – случайные величины, то $\max\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ и $\min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, а также $\sup\limits_n\{\xi_n\}$ и $\inf\limits_n\{\xi_n\}$ тоже являются случайными величинами.
10. Верхний и нижний пределы последовательности случайных величин также являются случайными величинами.
11. Предел последовательности случайных величин, если он существует, также является случайной величиной.
12. Борелевская функция от случайной величины также является случайной величиной.

Доказательство этих свойств основано на определении случайной величины и критерии измеримости.

2.5. Функция распределения вероятностей значений случайной величины

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ и на нём задана некоторая случайная величина $\xi = \xi(\omega)$. В дальнейшем, как правило, аргумент ω будем опускать и случайную величину $\xi(\omega)$ обозначать ξ.

Для любой случайной величины ξ, согласно критерию измеримости для любого действительного x, множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, поэтому существует функция

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} \equiv P\{\xi < x\},$$

которая называется **функцией распределения вероятностей значений случайной величины ξ.**

Функция распределения является основной и самой полной характеристикой любой случайной величины.

Свойства функции распределения.

1. $F_\xi(-\infty) = 0$.

Действительно, случайное событие $\{\omega: \xi(\omega) < -\infty\} = \varnothing$, то есть является невозможным, поэтому

$$F_\xi(-\infty) = P(\varnothing) = 0.$$

2. **Условие нормировки** для функции распределения:

$$F_\xi(\infty) = 1.$$

Действительно, случайное событие $\{\omega: \xi(\omega) < \infty\} = \Omega$, то есть является достоверным, поэтому

$$F_\xi(\infty) = P(\Omega) = 1.$$

3. Функция распределения $F_\xi(x)$ является неубывающей функцией своего аргумента x.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$, тогда

$$\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_2\},$$

и поэтому

$$F_\xi(x_1) = P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\} = F_\xi(x_2).$$

4. Функция распределения $F_\xi(x)$ является непрерывной слева функцией.

Действительно, пусть $x_n \uparrow x$. Тогда $(-\infty, x_n) \uparrow (-\infty, x)$, и поэтому

$$\{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \uparrow \{\omega : \xi(\omega) < x\},$$

следовательно,

$$\lim_{x_n \uparrow x} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to\infty} P\{\xi(\omega) < x_n\} = P\left\{\lim_{n\to\infty}\{\omega : \xi(\omega) < x_n\}\right\} =$$
$$= P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = F_\xi(x).$$

5. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Действительно, так как $[a,b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$, то

$$\{\omega : a \le \xi < b\} = \{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\} = B \setminus A,$$

и $A \subset B$, тогда по свойствам вероятностей запишем

$$P\{a \le \xi < b\} = P\{B \setminus A\} = P(B) - P(A) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Дискретные случайные величины

Пусть случайная величина ξ принимает свои значения из дискретного (конечного или счётного) набора значений $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то есть

$$P\{\xi = x_i\} = p_i,$$

тогда эта случайная величина называется **дискретной**, а таблица вида

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

называется **рядом распределения вероятностей** значений дискретной случайной величины ξ.

Примерами дискретных случайных величин являются **биномиальная** и **пуассоновская** случайные величины $\xi = m$, ряды распределения вероятностей которых были приведены в предыдущей главе:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0,1,2,\ldots,n,$$

$$P(m) = \frac{a^m}{m!}\exp\{-a\}, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Другими примерами дискретных случайных величин могут служить **равномерно распределённая** дискретная случайная величина ξ, для которой

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а также случайная величина $\xi = m$, **распределённая по геометрическому закону,** для которой

$$p_m = P\{\xi = m\} = (1-\rho)\rho^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Достаточно очевидно, что функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины является неубывающей кусочно-постоянной функцией, с величинами скачков p_i в точках x_i. При этом выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

которое называется **условием нормировки.**

Очевидно, что для дискретной случайной величины ряд распределения вероятностей и функция распределения вероятностей эквивалентны в том смысле, что взаимно однозначно определяют друг друга, но на практике гораздо удобнее применять ряд распределения для анализа дискретной случайной величины.

2.6. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины

Очевидно, что для дискретных случайных величин функции распределения разрывны и не дифференцируемы.

Теперь рассмотрим альтернативный класс случайных величин, для которых функции распределения $F(x)$ непрерывны и дифференцируемы, то есть имеют производную $F'(x)$. Такие случайные величины будем называть **непрерывными.**

Для непрерывных случайных величин достаточно удобной является следующая характеристика, эквивалентная функции распределения.

Для непрерывной случайной величины ξ существует функция

$$p_\xi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\xi(x+\Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = F'_\xi(x),$$

которая называется **плотностью распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины ξ.**

В дальнейшем будем опускать символ ξ в обозначениях $p_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$ для плотности и функции распределения.

Свойства плотности распределения

1. $p(x) = F'(x), \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy$.

2. $p(x) \ge 0$.

Это свойство плотности вытекает из того, что функция распределения – неубывающая функция, поэтому её производная – неотрицательная функция.

3. Для плотности распределения вероятностей выполняется **условие нормировки**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y)dy = 1,$$

которое следует из свойства 1 для плотности и условия нормировки для функции распределения, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y)dy = F(\infty) = 1.$$

4. $P\{a \le \xi < b\} = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$.

Действительно, в силу свойств функции распределения и свойства 1 для плотности, можно записать

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx.$$

Приведём плотности распределения вероятностей значений некоторых непрерывных случайных величин.

1. **Нормально распределённая (гауссовская)** случайная величина с параметрами a и σ^2

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Это распределение, при $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, было получено в локальной предельной теореме Муавра – Лапласа в предыдущей главе. Такая случайная величина называется **стандартной нормально распределённой** случайной величиной. Её функция распределения вероятностей имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

и называется интегралом вероятностей или функцией Лапласа.

Практически в любой книге по теории вероятностей имеются подробные таблицы значений этой функции для значений аргумента $x \in [0,4]$, а для $x > 4$ при вычислении значений функции Лапласа применяют конечную сумму асимптотического ряда

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left\{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6} + \cdots\right\}.$$

Очевидно, что функция распределения $F_\xi(x)$ нормально распределённой случайной величины ξ с параметрами a и σ^2 достаточно просто выражается через функцию Лапласа:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

2. **Экспоненциально распределённая** случайная величина с параметром λ:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Отметим, что функция распределения этой случайной величины в нуле непрерывна, но не дифференцируема, поэтому плотность распределения $p(x)$ в нуле не определена. Экспоненциально распределённые случайные величины обладают некоторыми весьма полезными в приложениях свойствами, которые будут рассмотрены ниже.

3. Непрерывная случайная величина, **равномерно распределённая** в интервале $[a,b]$:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ 1/(b-a), & a<x<b, \\ 0, & x>b, \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a, \\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b, \\ 1, & x\ge b. \end{cases}$$

Здесь, аналогично предыдущему случаю, функция распределения $F(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$ непрерывна, но не дифференцируема, поэтому плотность распределения $p(x)$ в этих точках не определена.

4. **Распределение Коши**:

$$p(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}, \qquad F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

В прикладной теории вероятностей, в частности в математической статистике, рассматриваются и другие распределения случайных величин.

2.7. Многомерные случайные величины

Рассмотрим теперь случай, когда результатом опыта являются n чисел, то есть

$$\forall\omega\in\Omega\to\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}.$$

Такую совокупность функций $\xi(\omega)=\{\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega)\}$ будем называть **n-мерной случайной величиной**, или **случайным вектором**, если рассматриваемая n-мерная функция измерима.

В n-мерном пространстве R^n, аналогично 1-мерному пространству R, определим борелевскую σ-алгебру $\boldsymbol{B}$. Пусть n-мерная функция ξ отображает вероятностное пространство $\{\Omega,F,P\}$ в борелевское n-мерное пространство $\{R^n, \boldsymbol{B}\}$ таким образом, что σ-алгебра F является прообразом борелевской σ-алгебры $\boldsymbol{B}$, тогда эта n-мерная функция измерима и называется **случайным вектором.**

Для случайного вектора функция распределения определяется равенством

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\ldots,\xi_n<x_n\}.$$

Эта функция является основной характеристикой случайного вектора. Всё, что можно сказать о случайном векторе, заключено в его функции распределения.

Свойства функции распределения случайного вектора

1. Функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ случайного вектора ξ является неубывающей по каждому из своих аргументов.

Действительно, пусть, например, $x_1' < x_1''$, тогда

$$\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1', \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \subset$$
$$\subset \{\omega : \xi_1(\omega) < x_1'', \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\},$$

поэтому

$$F(x_1', x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1', \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} \le$$
$$\le P\{\xi_1 < x_1'', \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} = F(x_1'', x_2, \dots, x_n).$$

2. $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0.$$

Действительно, случайное событие

$$\{\omega : \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_i < -\infty, \dots, \xi_n < x_n\} = \varnothing,$$

то есть является невозможным, поэтому

$$F(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n) = P\{\varnothing\} = 0.$$

3. **Условие нормировки** для функции распределения случайного вектора

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1.$$

Действительно, случайное событие

$$\{\omega : \xi_1(\omega) < \infty, \xi_2(\omega) < \infty, \dots, \xi_n(\omega) < \infty\} = \Omega,$$

то есть является достоверным, поэтому

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = P\{\Omega\} = 1.$$

4. **Свойство согласованности; маргинальные распределения.**

Распределение любой группы компонент $\xi' = \left\{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}\right\}$ случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ согласовано таким образом, что

$$F_{\xi'}\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\right) = F_{\xi}\left(\infty, x_{i_1}, \infty, x_{i_2}, \dots, \infty, x_{i_m}, \infty\right),$$

то есть «лишние» аргументы x_i функции распределения $F_\xi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ вектора ξ необходимо положить равными бесконечности.

Действительно, пусть $\xi' = \{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1}\}$, тогда

$$F_{\xi'}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2,\dots,\xi_{n-1} < x_{n-1}\} =$$

$$= P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2,\dots,\xi_{n-1} < x_{n-1}, \xi < \infty\} = F_\xi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\infty).$$

Распределение любой группы ξ' компонент вектора ξ, полученного из распределения этого вектора, называется **маргинальным распределением.**

Таким образом, зная функцию распределения n-мерного случайного вектора, можно найти функцию распределения вектора меньшей размерности, составленного из каких-либо компонент исходного n-мерного вектора.

Примером распределения N-мерного вектора дискретных случайных величин $\xi = \{m_1,m_2,\dots,m_N\}$ может служить **полиномиальное распределение**, полученное в предыдущей главе:

$$P_n(m_1,m_2,\dots,m_N) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_N^{m_N}.$$

Среди многомерных случайных величин особенно часто на практике встречаются непрерывные случайные величины, которые, главным образом, характеризуются своей плотностью распределения вероятностей.

В пространстве R^n выделим некоторую ограниченную область A, содержащую точку $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Непрерывная многомерная случайная величина ξ, характеризуется тем, что для неё существует функция

$$p(x_1,x_2,\dots,x_n) = \lim_{A\to x} \frac{P\{\xi \in A\}}{\mathrm{mes}(A)},$$

где область A стягивается в точку $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$. Функция $p(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется **плотностью распределения вероятностей значений непрерывной многомерной случайной величины** $\xi = \{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$.

Как уже сказано выше, непрерывные многомерные случайные величины, прежде всего, характеризуются своей плотностью распределения.

Свойства плотности распределения непрерывных многомерных случайных величин

1. $p(x_1,x_2,\dots,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}$,

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}dy_1\int_{-\infty}^{x_2}dy_2\dots\int_{-\infty}^{x_n}dy_n p(y_1,y_2,\dots,y_n).$$

2. $p(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0$.
3. **Условие нормировки**

$$\int_{-\infty}^{\infty}dy_1\int_{-\infty}^{\infty}dy_2\dots\int_{-\infty}^{\infty}dy_n p(y_1,y_2,\dots,y_n)=1.$$

4. $P\{\xi\in A\}=\int\int_{x\in A}\dots\int p(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n$.
5. **Условие согласованности**

$$p_{\xi'}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)dx_n,$$

то есть, чтобы найти плотность распределения вектора ξ', составленного из каких-либо компонент вектора ξ, необходимо плотность распределения вектора ξ проинтегрировать по «лишним» аргументам, в рассмотренном случае по аргументу x_n.

Доказательство этих свойств плотности следует из её определения и свойств функции распределения вероятностей.

В приложениях теории вероятностей иногда встречаются многомерные случайные величины, часть компонент которых являются дискретными, а остальные компоненты являются непрерывными случайными величинами. Такие многомерные случайные величины будем называть **смешанными.**

В частности, рассмотрим двумерную случайную величину $\{\xi,\eta\}$, компонента ξ которой принимает свои значения из дискретного множества $\{x_1,x_2,\dots\}$, а компонента η является непрерывной случайной величиной. Распределение вероятностей такой двумерной смешанной случайной величины удобно определять в виде функции

$$F(n,y)=P\{\xi=x_n,\eta<y\},$$

которая по дискретному аргументу n имеет смысл ряда распределения вероятностей, а по непрерывному аргументу y – смысл функции распределения.

Функцию

$$f(n,y)=\frac{\partial F(n,y)}{\partial y}$$

также будем называть распределением вероятностей двумерной смешанной случайной величины $\{\xi,\eta\}$, но эта функция по аргументу y имеет смысл плотности распределения вероятностей.

Маргинальное распределение вероятностей $F(n,\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(n,y)dy$ компоненты ξ является рядом распределения вероятностей её значений, а маргинальные распределения $\sum\limits_n F(n,y)$ и $\sum\limits_n f(n,y)$ являются соответственно функцией и плотностью распределения вероятностей значений непрерывной компоненты η.

2.8. Условные законы распределения

Предельные условные законы распределения для одномерных случайных величин

Для случайной величины ξ запишем следующую условную функцию распределения:

$$P\{\xi<x\,|\,a\le\xi\le b\}=\frac{P\{\xi<x,a\le\xi\le b\}}{P\{a\le\xi\le b\}}=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{P\{a\le\xi\le x\}}{P\{a\le\xi\le b\}}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Пусть ξ является нормально распределённой случайной величиной с параметрами m и σ^2, а переменная $x\in[a,b]$, тогда

$$\frac{P\{\,a\le\xi\le x\}}{P\{\,a\le\xi\le b\}}=\frac{\int\limits_a^x \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}{\int\limits_a^b \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}.$$

Рассмотрим предел этого выражения при $\sigma \to \infty$. Нетрудно показать, что выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{P\{a \le \xi \le x\}}{P\{a \le \xi \le b\}} = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\int\limits_a^x \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}{\int\limits_a^b \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy} = \frac{\int\limits_a^x dy}{\int\limits_a^b dy} = \frac{x-a}{b-a},$$

то есть предельное условное распределение в этом случае является **равномерным**.

Пусть $a = 0$, а $b = \infty$, тогда условное распределение можно записать в виде

$$P\{\xi < x \mid \xi \ge 0\} = \frac{P\{\xi < x, \xi \ge 0\}}{P\{\xi \ge 0\}} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{P\{0 \le \xi < x\}}{P\{\xi \ge 0\}}, & x \ge 0, \end{cases}$$

где
$$\frac{P\{0 \le \xi < x\}}{P\{\xi \ge 0\}} = \frac{\int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}{\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}.$$

Рассмотрим предел этого выражения при выполнении предельных условий $m \to -\infty$, а $\sigma \to \infty$ таким образом, что $m/\sigma^2 \to -\lambda$. Нетрудно показать, что выполняется равенство

$$\lim_{\substack{m\to-\infty \\ \sigma\to\infty \\ \frac{m}{\sigma^2}\to-\lambda}} \frac{\int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}{\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy} = 1 - \exp\{-\lambda x\},$$

то есть предельное условное распределение в этом случае является **экспоненциальным**.

Условные законы распределения для двумерных случайных величин

Далее рассмотрим двумерную случайную величину $\{\xi, \eta\}$ с функцией распределения $F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$.

Условную функцию распределения случайной величины ξ при условии, что известно то значение y, которое приняла случайная величина η, обозначим следующим образом:

$$F_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = P\{\xi < x\,|\,\eta = y\}.$$

Найдём явное выражение для этой функции. Особенностью рассматриваемой условной вероятности является то, что вероятность события $\{\omega : \eta(\omega) = y\}$, наступление которого требуется условием, равна нулю для непрерывной случайной величины η, поэтому поступим следующим образом.

Условную функцию распределения $F_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = P\{\,\xi < x\,|\,\eta = y\}$ найдём как предел вида

$$F_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = P\{\xi < x\,|\,\eta = y\} = \lim_{\Delta y\to 0} P\{\xi < x\,|\,y \le \eta < y + \Delta y\} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{P\{\xi < x, y \le \eta < y + \Delta y\}}{P\{y \le \eta < y + \Delta y\}} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{F_{\xi\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\xi\eta}(x, y)}{F_{\eta}(y + \Delta y) - F_{\eta}(y)}.$$

Деля числитель и знаменатель этой дроби на Δy и выполнив здесь предельный переход при $\Delta y \to \infty$, получим равенство

$$F_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F_{\eta}(y)}{\partial y} = \frac{1}{p_{\eta}(y)} \frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial y}.$$

Таким образом, явное выражение для условной функции распределения $F_{\xi|\eta}(x\,|\,y)$ имеет вид

$$F_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \frac{1}{p_{\eta}(y)} \frac{\partial F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial y}.$$

Аналогично вводится понятие условной плотности распределения вероятностей значений случайной величины ξ при условии выполнения равенства $\eta = y$:

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \frac{\partial F_{\xi|\eta}(x\,|\,y)}{\partial x} = \frac{1}{p_{\eta}(y)} \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)}.$$

Записав маргинальную плотность распределения вероятностей величины η

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dx,$$

окончательно получаем

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dx}.$$

Аналогично можно записать

$$p_{\eta|\xi}(y \mid x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}.$$

Эти формулы можно представить в другом виде:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\eta|\xi}(y \mid x)p_\xi(x) = p_{\xi|\eta}(x \mid y)p_\eta(y),$$

что аналогично **теореме умножения** вероятностей.

Независимые случайные величины

Случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = p_\xi(x), \qquad p_{\eta|\xi}(y \mid x) = p_\eta(y),$$

а следовательно, выполняется равенство

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y).$$

В общем случае компоненты случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ называются **независимыми,** если для его функции распределения выполняется равенство

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i),$$

для непрерывных случайных величин выполняется также равенство для плотности распределения вероятностей

$$p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{\xi_i}(x_i).$$

2.9. Преобразование случайных величин

Общая постановка задачи преобразования случайных величин имеет следующий вид.

Пусть задан случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ с функцией распределения $F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим случайные величины

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_m = f_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где $f_1, f_2, \dots, f_m$ – заданные борелевские функции.

Требуется найти распределение вероятностей значений случайного вектора $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$.

В этом параграфе для краткости случайные величины ξ_i будем называть «старыми», а величины η_j – «новыми».

Преобразование одномерной случайной величины

Рассмотрение общей задачи начнём с одномерного случая, когда имеется одномерная случайная величина ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$ и рассматривается случайная величина $\eta = f(\xi)$. Требуется найти её плотность распределения.

Для функции распределения величины η запишем

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{f(\xi) < y\}.$$

Рассмотрим варианты.

А. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая функция, тогда уравнение $y = f(x)$ можно разрешить и записать обратную функцию $x = g(y)$, которая также является монотонно возрастающей, поэтому запишем

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{f(\xi) < y\} = P\{\xi < g(y)\} = F_\xi(g(y)).$$

Дифференцируя это соотношение, получим вид плотности распределения величины η

$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))g'(y).$$

Б. Пусть $f(x)$ – монотонно убывающая функция, тогда обратная функция $g(y)$ также монотонно убывающая, поэтому запишем

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{f(\xi) < y\} = P\{\xi > g(y)\} = 1 - F_\xi(g(y)).$$

Дифференцируя это соотношение, получим вид плотности распределения величины η

$$p_\eta(y) = -p_\xi(g(y))\,g'(y).$$

Объединяя варианты А и Б, запишем

$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|.$$

В. Пусть теперь $y = f(x)$ – произвольная функция, тогда уравнение $y = f(x)$ может иметь несколько корней, которые обозначим

$$x_1 = g_1(y) < x_2 = g_2(y) < \cdots < x_k = g_k(y),$$

при этом будем полагать, что $f(x) < y$ на интервалах (x_1,x_2), (x_3,x_4),..., тогда можно записать

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{f(\xi) < y\} =$$
$$= P\left\{\sum_i \{\omega : g_{2i-1}(y) < \xi(\omega) < g_{2i}(y)\}\right\} = \sum_i P\{g_{2i-1}(y) < \xi < g_{2i}(y)\} =$$
$$= \sum_i \{F_\xi(g_{2i}(y)) - F_\xi(g_{2i-1}(y))\} = \sum_j (-1)^j F_\xi\left(g_j(y)\right).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$p_\eta(y) = \sum_j p_\xi\left(g_j(y)\right)(-1)^j g'_j(y).$$

Так как при $x \in (x_{2i-1}, x_{2i})$ функция $f(x) < y$, то $f(x)$ убывает в точке $x = x_{2i-1}$ и возрастает в точке $x = x_{2i}$, поэтому обратная функция $g_{2i-1}(y)$ убывает, а обратная функция $g_{2i}(y)$ возрастает, тогда $(-1)^j g'_j(y) > 0$, следовательно, для плотности распределения $p_\eta(y)$ можно записать

$$p_\eta(y) = \sum_j p_\xi\left(g_j(y)\right)\left|g'_j(y)\right|.$$

Преобразование многомерных случайных величин при $m = n$

Пусть при $m = n$ функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ формируют взаимно однозначное отображение векторов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в векторы $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, тогда существует однозначное обратное отображение

$$x_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

поэтому компоненты вектора ξ можно записать в виде

$$\xi_i = g_i(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Теперь найдём явный вид плотности распределения вероятностей случайного вектора η.

В пространстве векторов y выберем некоторую точку $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и бесконечно малую окрестность S_y этой точки. В силу взаимной однозначности рассматриваемых отображений точке y будет соответствовать точка x, а окрестности S_y будет соответствовать окрестность S_x в пространстве векторов x, тогда

$$\left\{\omega : \eta(\omega) \in S_y\right\} = \left\{\omega : \xi(\omega) \in S_x\right\},$$

поэтому

$$P\left\{\eta \in S_y\right\} = p_\eta(y_1, y_2, \dots, y_n)\,\mathrm{mes}(S_y) = P\left\{\xi \in S_x\right\} =$$

$$= p_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{mes}(S_x) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y))\,\mathrm{mes}(S_x).$$

Отсюда получаем

$$p_\eta(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y)) \frac{\mathrm{mes}(S_x)}{\mathrm{mes}(S_y)}.$$

Известно, что отношение объёмов бесконечно малых областей при взаимно однозначном отображении определяется якобианом этого преобразования

$$\frac{\mathrm{mes}(S_x)}{\mathrm{mes}(S_y)} = \left|\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}\right|,$$

поэтому получаем окончательную формулу

$$p_\eta(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \dots, g(y)_n) \left|\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}\right|$$

для плотности распределения вероятностей значений вектора η.

Преобразование случайных величин при $m < n$

Пусть теперь количество новых случайных величин η_i меньше числа старых случайных величин, то есть

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_m = f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

где $m < n$, тогда введём дополнительные случайные величины

$$\eta_{m+1} = f_{m+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_n = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

таким образом, чтобы составленное отображение было взаимно-однозначным.

Далее, применив процедуру предыдущего случая, найдём плотность распределения n-мерного вектора

$$\eta' = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots, \eta_n\},$$

в котором $n - m$ последних компонент являются дополнительными.

В силу условия согласованности плотность распределения вероятностей m-мерного вектора η имеет вид

$$p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta'}(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) dy_{m+1} \ldots dy_n .$$

Рассмотрим применение этой процедуры для определения плотности распределения вероятностей суммы и частного компонент двумерного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ с заданной плотностью $p_\xi(x_1, x_2)$, а также его модуля.

Распределение суммы случайных величин

Пусть

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 .$$

Определим дополнительную случайную величину

$$\eta_2 = \xi_2 .$$

Следовательно, получено отображение

$$y_1 = x_1 + x_2 = f_1(x_1, x_2),$$
$$y_2 = x_2 = f_2(x_1, x_2),$$

обратное для которого имеет вид

$$x_1 = y_1 - y_2 = g_1(y_1, y_2),$$
$$x_2 = y_2 = g_2(y_1, y_2),$$

и поэтому якобиан преобразования составляет

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

так что $$p_{\eta'}(y_1, y_2) = p_{\xi}(y_1 - y_2, y_2).$$

Применяя условие согласованности, найдём плотность распределения суммы двух случайных величин

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y_1 - y_2, y_2) dy_2 .$$

Заметим, что составленный здесь интеграл называется **свёрткой функции** $p_\xi(y_1, y_2)$.

Если компоненты ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность распределения суммы выглядит следующим образом:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y_1 - y_2) p_{\xi_2}(y_2) dy_2 .$$

Этот интеграл также называется **свёрткой функций** $p_{\xi_1}(y_1)$ **и** $p_{\xi_2}(y_2)$.

Распределение частного случайных величин

Пусть $$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Определим дополнительную случайную величину

$$\eta_2 = \xi_2 .$$

Следовательно, получим отображение

$$y_1 = x_1 / x_2 = f_1(x_1, x_2),$$
$$y_2 = x_2 = f_2(x_1, x_2),$$

обратное для которого имеет вид

$$x_1 = y_1 y_2 = g_1(y_1, y_2),$$

$$x_2 = y_2 = g_2(y_1, y_2).$$

Якобиан преобразования в этом случае

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} y_2 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} = y_2,$$

так что $$p_{\eta'}(y_1, y_2) = p_\xi(y_1 y_2, y_2)|y_2|.$$

Тогда, применяя условие согласованности, найдём плотность распределения частного двух случайных величин

$$p_{\xi_1/\xi_2}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1 y_2, y_2)|y_2| dy_2.$$

Распределение модуля случайного вектора

Пусть $$\eta_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Дополнительную случайную величину η_2 определим таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\xi_1 = \eta_1 \cos\eta_2 = g_1(\eta_1, \eta_2),$$

$$\xi_2 = \eta_1 \sin\eta_2 = g_2(\eta_1, \eta_2).$$

Здесь без определения прямого преобразования сразу записано обратное преобразование старых случайных величин ξ_1, ξ_2 через новые η_1, η_2, поэтому якобиан преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -y_1 \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{bmatrix} = y_1 \left\{ \cos^2 y_2 + \sin^2 y_2 \right\} = y_1,$$

следовательно,

$$p_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(y_1, y_2) = p_\xi(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2)|y_1|.$$

Так как $y_1 \geq 0$, а $0 \leq y_2 \leq 2\pi$, то

$$p_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(y_1) = |y_1| \int_0^{2\pi} p_\xi(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2) dy_2.$$

2.10. Интеграл Лебега от случайной величины по вероятностной мере

Для дальнейшего изложения теории вероятностей необходимо уточнить теорию интегралов Лебега от случайных величин по вероятностной мере.

Известно, что определённым интегралом Римана называется предел интегральной суммы, в которой выполняется разбиение области определения подынтегральной функции (области интегрирования).

Интеграл Лебега от случайной величины определим аналогично как предел интегральной суммы, но эту сумму будем определять разбиением области значений интегрируемой величины.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, определённая на нём случайная величина $\xi(\omega)$ и некоторое случайное событие $A \in F$.

Пусть n – некоторое целое число, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Определим случайные события

$$A_m = \left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\}.$$

Составим следующую сумму:

$$S_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} P\{A_m \cap A\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} P\left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\},$$

которую будем называть интегральной суммой Лебега.

Если при $n \to \infty$ существует предел последовательности интегральных сумм S_n, то значение этого предела будем называть **интегралом Лебега от случайной величины ξ на случайном событии A по вероятностной мере P**:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} P\left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\}\right\} = \int_A \xi(\omega) dP(\xi).$$

Если $A = \Omega$, то соответствующий интеграл будем называть **интегралом Лебега от случайной величины по вероятностной мере.**

Все свойства интеграла Лебега вытекают из свойств сумм и пределов. В частности:

1. Если k – неслучайная величина, то

$$\int_A k \cdot \xi(\omega) dP(\omega) = k \int_A \xi(\omega) dP(\omega).$$

2. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int_A \{\xi(\omega)+\eta(\omega)\}\,dP(\omega)=\int_A \xi(\omega)dP(\omega)+\int_A \eta(\omega)dP(\omega).$$

3. Если $\xi(\omega)\le\eta(\omega)$, то

$$\int_A \xi(\omega)dP(\omega)\le\int_A \eta(\omega)dP(\omega).$$

В частности, если $m\le\xi(\omega)\le M$, то

$$m\cdot P(A)\le\int_A \xi(\omega)dP(\omega)\le M\cdot P(A).$$

4. Для модулей выполняется неравенство

$$\left|\int_A \xi(\omega)dP(\omega)\right|\le\int_A |\xi(\omega)|\,dP(\omega).$$

2.11. Интеграл Стилтьеса

Пусть на интервале $[a,b]$ определены.

1. Непрерывная функция $f(x)$.

2. Монотонно неубывающая, положительная и ограниченная сверху функция $F(x)$, например функция распределения некоторой случайной величины.

Разделим отрезок $[a,b]$ на части точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

и на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1})$ произвольным образом выберем точку $\xi_i\in[x_i, x_{i+1})$. Составим интегральную сумму

$$S(\Delta)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[F(x_{i+1})-F(x_i)],$$

и пусть $\Delta=\max\limits_i(x_{i+1}-x_i)$.

Если при $\Delta\to 0$ существует предел интегральной суммы $S=S(\Delta)$ и этот предел не зависит от способа разбиения отрезка на части и выбора точек ξ_i, то такой предел называется **интегралом Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $F(x)$ на интервале $[a, b]$** и обозначается

$$\lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \int_a^b f(x)\,dF(x).$$

Здесь $dF(x)$ вообще говоря не является дифференциалом функции $F(x)$.

Очевидно, что свойства интеграла Стилтьеса аналогичны свойствам интеграла Римана и вытекают из свойств сумм и пределов.

Вычисление интеграла Стилтьеса

Аналогично функциям распределения функции $F(x)$ будем рассматривать либо разрывные, кусочно-постоянные, либо непрерывные и дифференцируемые.

А. Пусть у функции $F(x)$ существует производная $F'(x)$, тогда по формуле Лагранжа приращение функции можно записать в виде

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\bar{\xi}_i)\Delta x_i,$$

где $\bar{\xi}_i \in [x_i, x_{i+1})$.

Так как предел интегральной суммы не зависит от выбора точки ξ_i, то можно полагать, что $\xi_i = \bar{\xi}_i$, поэтому интегральная сумма имеет вид

$$S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{\xi}_i)F'(\bar{\xi}_i)\Delta x_i,$$

и, следовательно, выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{\xi}_i)F'(\bar{\xi}_i)\Delta x_i\right\} = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx.$$

То есть интеграл Стилтьеса в этом случае можно находить, применяя интеграл Римана.

Б. Пусть функция $F(x)$ постоянна на интервалах $[x_j^*, x_{j+1}^*)$, где $x_{j+1}^* - x_j^* \geq c > 0$, а в точках x_j^* имеет разрывы величиной p_j. Тогда интегральная сумма, при достаточно малом значении $\Delta < c$, примет вид

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right] = \sum_j f(x_j^*)p_j.$$

Так как $$F(x_{i+1}) - F(x_i) = \begin{cases} 0, & \forall j, x_j^* \notin [x_i, x_{i+1}), \\ p_j, & \exists j, x_j^* \in [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

то интеграл Стилтьеса определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_j f(x_j^*)p_j .$$

То есть интеграл Стилтьеса в этом случае можно находить, применяя суммирование конечного числа слагаемых.

Теорема. Если существуют интеграл Лебега

$$\int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$$

и интеграл Стилтьеса $$\int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x),$$

где $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$, то выполняется равенство этих интегралов:

$$\int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x).$$

Доказательство. Действительно

$$\int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{n}P\left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{n}\left[F_\xi\left(\frac{m+1}{n}\right) - F_\xi\left(\frac{m}{n}\right)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x).$$

Теорема доказана.

Доказана и более общая теорема.

Теорема. Если для борелевской функции $f(x)$, случайной величины $\xi(\omega)$, её функции распределения $F_\xi(x)$ и вероятностной меры $P(\omega)$ существуют интегралы

$$\int_\Omega f(\xi(\omega))dP(\omega) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_\xi(x),$$

то выполняется равенство этих интегралов, то есть

$$\int_\Omega f(\xi(\omega))dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_\xi(x).$$

2.12. Числовые характеристики случайных величин

Как уже говорилось выше, самой полной характеристикой, самым подробным описанием случайной величины является её функция распределения, а также ряд распределения для дискретных и плотность распределения для непрерывных случайных величин.

Но эти описания являются функциональными, поэтому достаточно сложными для экспериментальной оценки, в этом случае даже простейшие преобразования случайных величин (например сложение) приводят к достаточно сложным формулам.

Следовательно, возникает необходимость более простого описания случайных величин, которое будет хотя и не полным, но достаточно простым и отражающим основные особенности этих величин.

Такое описание дают **числовые характеристики** случайных величин, которых достаточно много, поэтому рассмотрим лишь основные из них.

Среди числовых характеристик выделяют три основные группы: **характеристики положения, характеристики разброса и характеристики связи.**

Характеристики положения определяют некоторое среднее числовое значение случайной величины, в окрестности которого наиболее часто встречается большинство её значений.

Характеристики разброса определяют величину, меру разброса, отклонения значений случайной величины от её среднего значения.

Характеристики связи определяют силу зависимости случайных величин, то есть как значение некоторой случайной величины влияет на значения других случайных величин.

Далее приступим к рассмотрению таких характеристик.

2.13. Математическое ожидание

Наиболее важной среди характеристик положения является, числовая характеристика случайной величины, которая называется **математическим ожиданием.**

Пусть заданы: вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, случайная величина $\xi(\omega)$ со своей функцией распределения $F_\xi(x)$ и борелевская функция $f(x)$, тогда **математическим ожиданием величины** $\eta = f(\xi)$ называется число $M\{f(\xi)\}$, определяемое равенством

$$M\{f(\xi)\} = \int_{\Omega} f(\xi(\omega))dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi}(x).$$

В частности, **математическим ожиданием случайной величины** $\xi(\omega)$ называется число

$$M\{\xi(\omega)\} = \int_{\Omega} \xi(\omega)dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_{\xi}(x).$$

Вычисление математического ожидания определяется способами вычисления интеграла Стилтьеса.

Для непрерывных случайных величин, когда существует плотность распределения $p(x) = F'(x)$ непрерывной случайной величины ξ, получим

$$M\{f(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx,$$

$$M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Для дискретных случайных величин, когда задан ряд распределения $\{x_i, p_i\}$ дискретной случайной величины ξ, запишем

$$M\{f(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) = \sum_{i} f(x_i)p_i,$$

$$M\{\xi\} = \sum_{i} x_i p_i.$$

Для случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, заданного функцией распределения $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и борелевской функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для математического ожидания запишем интеграл Лебега

$$M\{f(\xi)\} = M\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\} = \int_{\Omega} f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))dP(\omega),$$

который равен многомерному интегралу Стилтьеса

$$\int_{\Omega} f(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))\,dP(\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)F(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n),$$

а этот многомерный интеграл Стилтьеса для непрерывных случайных величин при заданной плотности распределения

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n},$$

так же как одномерный, определяется интегралом Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)F(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1 dx_2\ldots dx_n.$$

Для многомерных дискретных случайных величин многомерный интеграл Стилтьеса определяется многомерной суммой.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание детерминированной величины равно её значению.

Действительно,

$$M\{c\} = \int_{\Omega} c\,dP(\omega) = c\int_{\Omega} dP(\omega) = cP(\Omega) = c.$$

2. Детерминированный множитель можно выносить из под знака математического ожидания.

Действительно,

$$M\{c\xi\} = \int_{\Omega} c\xi(\omega)\,dP(\omega) = c\int_{\Omega} \xi(\omega)\,dP(\omega) = cM\{\xi\}.$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Действительно,

$$M\{\xi+\eta\} = \int\limits_{\Omega}\{\xi(\omega)+\eta(\omega)\}\,dP(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)dP(\omega) + \int\limits_{\Omega}\eta(\omega)dP(\omega) = M\{\xi\} + M\{\eta\}.$$

4. Математическое ожидание произведения **независимых** случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Действительно, применяя интеграл Стилтьеса для нахождения математического ожидания и принимая во внимание то, что для случайного вектора с независимыми компонентами функция распределения равна произведению функций распределения его компонент, получим

$$M\{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1x_2\ldots x_n)F(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_i dF_{\xi_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n}M\{\xi_i\}.$$

Определены и другие характеристики положения случайных величин, например медиана $\mathrm{Me}\{\xi\}$, а для непрерывных величин – также мода $\mathrm{Mo}\{\xi\}$.

Медианой случайной величины ξ называется число, определяемое равенством

$$P\{\xi < \mathrm{Me}\{\xi\}\} = P\{\xi > \mathrm{Me}\{\xi\}\},$$

которое применяется тогда, когда для случайной величины ξ не существует математического ожидания.

Модой непрерывной случайной величины называется то значение аргумента плотности распределения, при котором плотность достигает максимума.

Полезной числовой характеристикой непрерывных случайных величин являются квантили.

Квантилем порядка p называется корень $x = x_p$ уравнения

$$F(x) = p.$$

Очевидно, что квантиль порядка 1/2 является медианой.

Существуют и другие характеристики положения случайных величин.

2.14. Дисперсия

Теперь рассмотрим характеристики разброса значений случайных величин, важнейшей из которых является дисперсия.

Дисперсией – $D\{\xi\}$ случайной величины ξ – называется число, определяемое равенством

$$D\{\xi\} = M\left\{ (\xi - M\{\xi\})^2 \right\},$$

которое имеет размерность квадрата от размерности самой случайной величины, поэтому часто в качестве характеристики разброса применяют **среднеквадратическое отклонение** $\sigma\{\xi\}$:

$$\sigma\{\xi\} = \sqrt{D\{\xi\}}.$$

Для неотрицательных случайных величин полезной характеристикой является **коэффициент вариации**

$$v\{\xi\} = \frac{\sigma\{\xi\}}{M\{\xi\}}.$$

Вычисление дисперсии определяется способами вычисления математического ожидания

$$D\{\xi\} = M\left\{ (\xi - M\{\xi\})^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ x - M\{\xi\}\}^2 \, dF_\xi(x),$$

поэтому для непрерывных случайных величин можно записать

$$D\{\xi\} = M\left\{ (\xi - M\{\xi\})^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ x - M\{\xi\}\}^2 \, dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ x - M\{\xi\}\}^2 \, p(x)dx,$$

а для дискретных случайных величин получим

$$D\{\xi\} = M\left\{ (\xi - M\{\xi\})^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ x - M\{\xi\}\}^2 \, dF_\xi(x) = \sum_i \{ x_i - M\{\xi\}\}^2 \, p_i .$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия детерминированной величины равна нулю.

Действительно,

$$D\{c\} = M\left\{ (c - M\{c\})^2 \right\} = M\left\{ (c - c)^2 \right\} = M\{0\} = 0 .$$

С другой стороны, если для случайной величины ξ её дисперсия равна нолю, то есть

$$D\{\xi\} = 0,$$

то говорят, что **случайная величина ξ равна своему математическому ожиданию в среднем квадратическом**. В частности, если её математическое ожидание равно нулю, то эта **случайная величина равна нулю в среднем квадратическом.**

2. Неслучайный множитель можно выносить из под знака дисперсии, возведя его в квадрат, то есть

$$D\{c\xi\} = c^2 D\{\xi\}.$$

Действительно,

$$D\{c\xi\} = M\left\{(c\xi - M\{c\xi\})^2\right\} = M\left\{(c\xi - cM\{\xi\})^2\right\} =$$
$$= c^2 M\left\{(\xi - M\{\xi\})^2\right\} = c^2 D\{\xi\}.$$

3. Для независимых случайных величин дисперсия суммы и дисперсия разности равна сумме дисперсий, то есть

$$D\{\xi \pm \eta\} = D\xi + D\eta.$$

Действительно,

$$D\{\xi \pm \eta\} = M\left\{(\xi \pm \eta - M\{\xi \pm \eta\})^2\right\} =$$
$$= M\left\{(\xi - M\xi)^2 + (\eta - M\eta)^2 \pm 2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right\} =$$
$$= M\left\{(\xi - M\xi)^2\right\} + M\left\{(\eta - M\eta)^2\right\} \pm 2M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\} =$$
$$= D\xi + D\eta \pm 2M\{\xi - M\xi\}M\{\eta - M\eta\} = D\xi + D\eta.$$

4. Для дисперсии имеет место равенство

$$D\xi = M\{\xi^2\} - \{M\xi\}^2.$$

Действительно,

$$D\xi = M\left\{(\xi - M\xi)^2\right\} =$$
$$= M\left\{\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right\} = M\left\{\xi^2\right\} - 2(M\xi)(M\xi) + (M\xi)^2 =$$
$$= M\left\{\xi^2\right\} - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\left\{\xi^2\right\} - \{M\xi\}^2.$$

Для вычисления дисперсии этой формулой пользуются гораздо чаще, чем исходной, так как она оказывается проще. Здесь величина

$$M\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$$

является одной из целого класса характеристик случайных величин.

2.15. Моменты случайных величин

И математическое ожидание, и дисперсия являются представителями большой группы характеристик, имеющих название **моментов случайных величин.**

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется число

$$m_k = M\left\{ \xi^k \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется число

$$\mu_k = M\left\{ (\xi - M\xi)^k \right\} = M\left\{ (\xi - m_1)^k \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k \, dF(x).$$

В частности,

$$M\xi = m_1, \quad D\xi = \mu_2.$$

Между начальными и центральными моментами существуют соотношения, которые легко получить следующим образом:

$$\mu_k = M\left\{(\xi - m_1)^k\right\} = M\left\{\sum_{i=0}^{k} C_k^i \xi^i (-m_1)^{k-i}\right\} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i m_i m_1^{k-i},$$

то есть центральные моменты k-го порядка μ_k определяются всеми начальными моментами m_i порядка i, $\forall 0 \le i \le k$. Здесь $m_0 = 1$.

С другой стороны, имеем

$$m_k = M\left\{ \xi^k \right\} = M\left\{ [\,(\xi - m_1) + m_1]^k \right\} =$$

$$= M\left\{ \sum_{i=0}^{k} C_k^i (\xi - m_1)^i m_1^{k-i} \right\} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu_i m_1^{k-i},$$

то есть начальные моменты k-го порядка m_k определяются начальным моментом первого порядка m_1 и всеми центральными моментами порядка i $\forall 0 \le i \le k$. Здесь $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$.

В практических исследованиях моменты порядка выше четвёртого применяются достаточно редко.

2.16. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции

Последняя группа характеристик, которая будет рассмотрена – это характеристики связи, зависимости случайных величин друг от друга.

Пусть даны две случайные величины ξ и η. Наиболее полно зависимость между ними определяется условными функциями распределения $F_{\xi|\eta}(x,y)$ и $F_{\eta|\xi}(y,x)$. Однако это достаточно сложное и мало наглядное описание, поэтому часто применяют другие функциональные характеристики связи.

Кривые регрессии

Найдём следующие значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta}(x \mid y) = M\{\xi \mid \eta = y\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y dF_{\eta|\xi}(y \mid x) = M\{\eta \mid \xi = x\},$$

которые называются условными математическими ожиданиями.

С другой стороны, равенства

$$y = M\{\eta \mid \xi = x\},$$
$$x = M\{\xi \mid \eta = y\}$$

определяют некоторые кривые, которые в теории вероятностей называются **кривыми регрессии.**

Их смысл определяется интерпретацией математического ожидания как среднего значения случайной величины при условии, что задано значение другой величины.

Однако описание зависимости случайных величин кривыми регрессии также является функциональным, то есть достаточно сложным, поэтому возникает необходимость дальнейшего упрощения этого описания какой-либо числовой характеристикой.

Коэффициент корреляции

Определим числовую характеристику связи случайных величин следующим образом.

Величину

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)F(dx,dy)$$

будем называть **ковариацией** случайных величин ξ и η.

Число

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\xi)}$$

называется **коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η.**

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не больше единицы.

Действительно, очевидно, что выполняется неравенство

$$\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)}\right)^2 \ge 0,$$

тогда

$$0 \le M\left\{\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)}\right)^2\right\} =$$

$$= M\left\{\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)}\right)^2 \pm 2\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)}\right)\left(\frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)}\right) + \left(\frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{M\left\{(\xi - M\xi)^2\right\}}{\sigma^2(\xi)} \pm 2\frac{M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\}}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} + \frac{M\left\{(\eta - M\eta)^2\right\}}{\sigma^2(\eta)} =$$

$$= 1 \pm 2\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} + 1 = 2\left(1 \pm r_{\xi\eta}\right) \ge 0.$$

Но из неравенства $1 \pm r_{\xi\eta} \ge 0$ следует, что $|r_{\xi\eta}| \le 1$.

2. Если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi\eta} = 0$.

Действительно, для независимых случайных величин ξ и η выполняется равенство

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\} = M\{\xi - M\xi\}M\{\eta - M\eta\} = 0,$$

поэтому

$$r_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = 0 .$$

3. Если $\eta = a\xi + b$, то $r_{\xi\eta} = \pm 1$.

Действительно,

$$M\eta = M\{a\xi + b\} = aM\xi + b,$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\{(\xi - M\xi)(a\xi + b - aM\xi - b)\} = aD\xi,$$

$$D\eta = M\left\{(\eta - M\eta)^2\right\} = M\left\{(a\xi + b - aM\xi - b)^2\right\} = a^2 D\xi,$$

поэтому

$$r_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{aD\xi}{\sqrt{D\xi \cdot a^2 D\xi}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1 .$$

4. Если $r_{\xi\eta} = \pm 1$, то в среднем квадратическом выполняется равенство

$$\eta = a\xi + b,$$

где неслучайные числа a и b определены ниже.

Выше было показано, что

$$M\left\{\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)}\right)^2\right\} = 2(1 \pm r_{\xi\eta}),$$

поэтому, если $r = 1$, то, выбирая в этом равенстве знак $-$, а если $r = -1$, то, выбирая знак $+$, получим, что в среднем квадратическом выполняется равенство

$$\frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)} - r\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\eta - M\eta}{\sigma(\eta)} = r\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)},$$

тогда

$$\eta = r\frac{\xi - M\xi}{\sigma(\xi)}\sigma(\eta) + M\eta = \left\{r\frac{\sigma(\eta)}{\sigma(\xi)}\right\}\xi + \left\{M\eta - r\frac{\sigma(\eta)}{\sigma(\xi)}M\xi\right\} = a\xi + b .$$

5. Можно привести пример такой нелинейной зависимости случайных величин ξ и η, для которых $r_{\xi\eta} = 0$.

Действительно, пусть ξ такая случайная величина, для которой

$$M\xi = 0 \quad \text{и} \; M\{\xi^3\} = 0,$$

а случайная величина $\eta = \xi^2$, то есть эти величины функционально зависимы.

Но тогда

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\left\{\xi\cdot\left(\xi^2 - M\xi^2\right)\right\} = M\left\{\xi^3 - \xi M\xi^2\right\} =$$
$$= M\xi^3 - M\xi\cdot M\xi^2 = 0,$$

следовательно, $r_{\xi\eta} = 0$.

Коэффициент корреляции интерпретируют как меру (силу) линейной зависимости случайных величин.

2.17. Производящая и характеристическая функции

Полезным инструментом исследования случайных величин являются производящая и характеристическая функции.

Производящие функции

Для целочисленной дискретной случайной величины ξ, принимающей значения $\xi = 0, 1, 2, ...,$ **производящей функцией** называется функция аргумента z, определяемая равенством

$$g(z) = M\left\{z^{\xi}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k .$$

В частности, для пуассоновской случайной величины получим

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!}\exp\{-a\} = \exp\{-a\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(za)^k}{k!} = \exp\{(z-1)a\}.$$

А для геометрически распределённой случайной величины

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-\rho)\rho^k = \frac{1-\rho}{1-z\rho}.$$

Свойства производящих функций:

1. Для производящей функции имеют место равенства

$$g(1)=1,$$

$$g'(z)\big|_{z=1}=M\xi=m_1,$$

$$g''(z)\big|_{z=1}=M\{\xi(\xi-1)\}=M\xi^2-M\xi=m_2-m_1,$$

$$g'''(z)\big|_{z=1}=M\{\xi(\xi-1)(\xi-2)\}=M\xi^3-3M\xi^2+2M\xi=m_3-3m_2+2m_1,$$

....

Факториальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина

$$\nu_k=M\{\xi(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-(k-1))\}=g^{(k)}(z)\big|_{z=1}.$$

2. Производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их производящих функций:

$$g_{\xi+\eta}(z)=g_\xi(z)g_\eta(z).$$

Действительно,

$$g_{\xi+\eta}(z)=M\left\{z^{\xi+\eta}\right\}=M\left\{z^\xi\cdot z^\eta\right\}=M\left\{z^\xi\right\}\cdot M\left\{z^\eta\right\}=g_\xi(z)g_\eta(z).$$

Характеристические функции для неотрицательных случайных величин

Для неотрицательных случайных величин **характеристической функцией** называется функция аргумента u, определяемая равенством

$$g(u)=M\left\{e^{-u\xi}\right\}=\int_0^\infty \exp\{-ux\}\,dF(x).$$

В частности, для экспоненциально распределённой с параметром λ случайной величины ξ получим

$$g(u)=\int_0^\infty \exp\{-ux\}\,p(x)dx=\int_0^\infty \exp\{-ux\}\,\lambda\exp\{-\lambda x\}\,dx=\frac{\lambda}{u+\lambda}.$$

Свойства характеристических функций:

1. Для характеристической функции имеют место равенства

$$g(0)=1,$$

$$g'(u)|_{u=0}=-M\xi=-m_1,$$

$$g''(u)|_{u=0}=M\xi^2=m_2,$$

$$g'''(u)|_{u=0}=-M\xi^3=-m_3,$$

....

$$g^{(k)}(u)\Big|_{u=0}=(-1)^k M\xi^k=(-1)^k m_k.$$

2. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

Действительно,

$$g_{\xi+\eta}(u)=M\left\{e^{-u(\xi+\eta)}\right\}=M\left\{e^{-u\xi}e^{-u\eta}\right\}=$$
$$=M\left\{e^{-u\xi}\right\}\cdot M\left\{e^{-u\eta}\right\}=g_\xi(u)g_\eta(u).$$

Характеристические функции для произвольных случайных величин

Для произвольной случайной величины ξ **характеристической функцией** называется функция вида

$$g(u)=M\left\{e^{iu\xi}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iux\}\,dF(x),$$

где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Свойства этих характеристических функций аналогичны свойствам, рассмотренных выше характеристических функций для неотрицательных случайных величин.

Свойство 1. Характеристическая функция $g(u)$ является непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям $g(0) = 1$ и $|g(u)| \leq 1$.

Свойство 2. Если $\eta = a\xi + b$, то $g_\eta(u) = e^{ibu}g_\xi(u)$.

Свойство 3. Если случайные величины ξ и η независимы, то характеристическая функция суммы $\zeta = \xi + \eta$ равна произведению их характеристических функций, то есть

$$g_\zeta(u) = g_\xi(u) g_\eta(u).$$

Свойство 4. Если $M\{\xi^n\} = m_n < \infty$, то

$$M\{\xi^n\} = m_n = \frac{1}{i^n} \frac{d^n g(u)}{du^n}\bigg|_{u=0}.$$

Найдём характеристическую функцию для нормально распределённой с параметрами a и σ случайной величины, которая определяется плотностью распределения вида

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Для этой случайной величины можно записать

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iux\}\, p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} + iux\right\} dx.$$

В этом интеграле выполним замену переменной интегрирования

$$\frac{x-a}{\sigma} = z, \quad x = \sigma z + a,$$

получим

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2} + iu(\sigma z + a)\right\} d(\sigma z + a) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{iua\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2 - 2iu\sigma z}{2}\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{iua\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(z - iu\sigma)^2 - (iu\sigma)^2}{2}\right\} dz =$$

$$= \exp\left\{iua + \frac{(iu\sigma)^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z - iu\sigma)^2}{2}\right\} dz =$$

$$= \exp\left\{iua - u^2\frac{\sigma^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(z)dz.$$

Здесь $p_1(z)$ – плотность нормально распределённой с параметрами $iu\sigma$ и 1 случайной величины, поэтому в силу условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(z)dz = 1,$$

а следовательно, характеристическая функция имеет вид

$$g(u) = \exp\left\{iua - u^2\frac{\sigma^2}{2}\right\}.$$

2.18. Геометрически и экспоненциально распределённые случайные величины

Будем говорить, что случайная величина ξ обладает **свойством отсутствия последействия**, если выполняется равенство

$$P\{\xi \ge x_0 + x | \xi \ge x_0\} = P\{\xi \ge x\}.$$

Это свойство интерпретируется следующими примерами.

Пусть продолжительность работоспособности некоторого радиоэлектронного устройства является величиной случайной, обладающей указанным свойством, тогда остаточное время его работы не зависит от времени, в течение которого это устройство уже проработало.

Если бы продолжительность жизни человека, являясь величиной случайной, обладало бы этим свойством, то продолжительность дожития не зависела бы от текущего возраста человека.

Покажем, что этим свойством обладают случайные величины, распределённые по геометрическому и экспоненциальному законам.

Действительно, для случайной величины ξ, распределённой по геометрическому закону, имеем

$$P\{\xi \ge i_0 + i | \xi \ge i_0\} = \frac{P\{\xi \ge i_0 + i, \xi \ge i_0\}}{P\{\xi \ge i_0\}} = \frac{P\{\xi \ge i_0 + i\}}{P\{\xi \ge i_0\}} =$$

$$= \sum_{j=i_0+i}^{\infty} (1-\rho)\rho^j \Big/ \sum_{j=i_0}^{\infty} (1-\rho)\rho^j = \left\{(1-\rho)\frac{\rho^{i_0+i}}{1-\rho}\right\} \Big/ \left\{(1-\rho)\frac{\rho^{i_0}}{1-\rho}\right\} = \rho^i =$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} (1-\rho)\rho^j = P\{\xi \ge i\}.$$

Аналогично для случайной величины ξ, распределённой по экспоненциальному закону, получим

$$P\{\xi \ge x_0 + x | \xi \ge x_0\} = \frac{P\{\xi \ge x_0 + x, \xi \ge x_0\}}{P\{\xi \ge x_0\}} = \frac{P\{\xi \ge x_0 + x\}}{P\{\xi \ge x_0\}} =$$

$$= \int\limits_{x_0+x}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\}\, dy \Bigg/ \int\limits_{x_0}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\}\, dy = \frac{\exp\{-\lambda(x_0 + x)\}}{\exp\{-\lambda x_0\}} = \exp\{-\lambda x\} =$$

$$= \int\limits_{x}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\}\, dy = P\{\xi \ge x\}.$$

Эти случайные величины обладают ещё одним достаточно полезным свойством.

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, распределённые по геометрическому закону с параметрами соответственно ρ_1 и ρ_2, тогда случайная величина, определяемая равенством

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\},$$

также имеет геометрическое распределение с параметром

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2.$$

Действительно, можно записать

$$P\{\eta \ge i\} = P\{\min(\xi_1, \xi_2) \ge i\} = P\{\xi_1 \ge i, \xi_2 \ge i\} = P\{\xi_1 \ge i\} \cdot P\{\xi_2 \ge i\} =$$

$$= \rho_1^i \cdot \rho_2^i = (\rho_1 \cdot \rho_2)^i = \rho^i = \sum_{j=i}^{\infty} (1-\rho)\rho^j = 1 - F_1(i),$$

где $F_1(i)$ – функция распределения случайной величины, распределённой по геометрическому закону с параметром ρ.

Для независимых случайных величин, распределённых по экспоненциальному закону с параметрами соответственно λ_1 и λ_2, можно также утверждать, что случайная величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Действительно, можно записать

$$P\{\eta \ge x\} = P\{\min(\xi_1, \xi_2) \ge x\} = P\{\xi_1 \ge x, \xi_2 \ge x\} = P\{\xi_1 \ge x\} \cdot P\{\xi_2 \ge x\} =$$

$$= \exp\{-\lambda_1 x\} \cdot \exp\{-\lambda_2 x\} = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)x\} = \exp\{-\lambda x\} = 1 - F_2(x),$$

где $F_2(x)$ – функция распределения случайной величины, распределённой по экспоненциальному закону с параметром λ.

2.19. Условные математические ожидания. Формула полной вероятности для математических ожиданий

Понятие условного математического ожидания было использовано при определении кривых регрессии, уравнения которых имели вид

$$y = y(x) = M\{\eta \mid \xi = x\},$$
$$x = x(y) = M\{\xi \mid \eta = y\}.$$

Здесь условные математические ожидания являются детерминированными функциями детерминированных аргументов.

В этом параграфе рассмотрим альтернативный подход к понятию условного математического ожидания, которое позволит рассматривать условные математические ожидания как случайные величины, и для математических ожиданий будет получена формула, аналогичная формуле полной вероятности.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, на котором определены все рассматриваемые случайные события и случайные величины.

Пусть B – некоторое случайное событие, тогда условной функцией распределения значений случайной величины ξ при условии, что наступило событие B, называется

$$F_\xi(x \mid B) = P\{\xi < x \mid B\}.$$

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии, что наступило событие B, будем называть величину, определяемую равенством

$$M\{\xi \mid B\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x \mid B).$$

Пусть H_i – полная группа попарно несовместных событий и A – некоторое случайное событие. Ранее была получена формула полной вероятности для случайного события A:

$$P(A) = \sum_i P\{A \mid H_i\} P(H_i).$$

Формула полной вероятности для функции распределения

Пусть случайное событие A имеет вид

$$A = \{\omega : \xi(\omega) < x\},$$

тогда

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(A) = \sum_i P\{A \mid H_i\} P(H_i) =$$
$$= \sum_i P\{\xi < x \mid H_i\} P(H_i) = \sum_i F_\xi(x \mid H_i) P(H_i).$$

Равенство

$$F_\xi(x) = \sum_i F_\xi(x \mid H_i) P(H_i)$$

будем называть **формулой полной вероятности для функций распределения.**

Формула полной вероятности для математического ожидания

Применяя предыдущую формулу, можно записать

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\left\{\sum_i F_\xi(x \mid H_i) P(H_i)\right\} =$$
$$= \sum_i \left\{\int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x \mid H_i)\right\} P(H_i) = \sum_i M\{\xi \mid H_i\} P(H_i).$$

Равенство

$$M\xi = \sum_i M\{\xi \mid H_i\} P(H_i)$$

будем называть **формулой полной вероятности для математических ожиданий.**

Пусть η – дискретная случайная величина, определяемая рядом распределения $\{y_i, p_i\}$.

Гипотезы H_i определим равенствами

$$H_i = \{\omega : \eta(\omega) = y_i\},$$

тогда совокупность условных математических ожиданий $M\{\xi|H_i\}$ можно записать в виде

$$M\{\xi \mid H_i\} = M\{\xi \mid \eta = y_i\} = M\{\xi \mid \eta\}.$$

Здесь величина $M\{\xi|\eta\}$ принимает различные значения – $M\{\xi|\eta=y_i\}$ для различных значений случайной величины $\eta=y_i$, следовательно, являясь функций величины η, сама является дискретной случайной величиной, определяемой рядом распределения $\{M\{\xi|\eta=y_i\}, p_i = P(\eta=y_i)\}$.

Формулу полной вероятности для математических ожиданий

$$M\xi = \sum_i M\{\xi \mid H_i\} P(H_i)$$

перепишем в виде

$$M\xi = \sum_i M\{\xi \mid \eta = y_i\} P(\eta = y_i).$$

Так как рассматриваемая сумма по определению является математическим ожиданием дискретной случайной величины $M\{\xi|\eta\}$, то формулу полной вероятности для математических ожиданий можно также записать в виде

$$M\xi = M_\eta\left\{M_\xi(\xi \mid \eta)\right\},$$

где индексы η и ξ при символах M – математического ожидания – указывают на то распределение, по которому следует выполнять усреднение.

Глава 3

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В этой главе будут рассмотрены последовательности случайных величин, различные типы их сходимостей, а также предельные теоремы теории вероятностей.

3.1. Типы сходимостей последовательностей случайных величин

В теории вероятностей определены различные типы сходимостей для последовательностей случайных величин $\{\xi_n\}$. Важнейшие из них – это сходимость почти наверное, сходимость по вероятности, сходимость в среднем, сходимость по распределению.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ и на этом пространстве заданы все случайные величины последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$

Сходимость почти наверное

Говорят, что некоторое свойство выполняется почти наверное, если оно выполняется с вероятностью единица (или, что то же самое, не выполняется с вероятностью ноль).

Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ почти наверное, что обозначается

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \text{ или } \xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \xi,$$

если

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1,$$

или, что то же самое,

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\right\} = 0.$$

Здесь сходимость почти наверное означает следующее

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall n>N \qquad P\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}=1.$$

Сходимость по вероятности

Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ по вероятности, что обозначается

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\xi_n=\xi,\ \text{или}\ \ \xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi,$$

если $\qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} P\{\omega:|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon\}=1.$

Здесь сходимость по вероятности означает следующее:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \delta>0\ \ \exists N\ \ \forall n>N \qquad P\{\omega:|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon\}>1-\delta.$$

Сходимость в среднем

Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ в среднем порядка $p>0$, если

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{|\xi_n-\xi|^p\right\}=0.$$

Сходимость в среднем порядка 2 называется сходимостью в среднем квадратическом (обозначают $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}} \xi$ или $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\xi_n=\xi$).

Сходимость по распределению

Пусть $F_n(x)$ – функция распределения случайной величины ξ_n, а $F(x)$ – функция распределения величины ξ.

Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ по распределению (обозначают $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\to}} \xi$), если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

в каждой точке x, в которой функция $F(x)$ непрерывна.

Неравенство Чебышева

Для любых $\varepsilon>0$ и $p>0$ имеет место неравенство

$$P\{|\eta(\omega)|>\varepsilon\}\le\frac{M|\eta(\omega)|^p}{\varepsilon^p}.$$

Действительно,

$$P\{|\eta(\omega)| > \varepsilon\} = \int\limits_{\{\omega:|\eta(\omega)|>\varepsilon\}} dP(\omega) \le \int\limits_{\{\omega:|\eta(\omega)|>\varepsilon\}} \frac{|\eta(\omega)|^p}{\varepsilon^p} dP(\omega) \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} \frac{|\eta(\omega)|^p}{\varepsilon^p} dP(\omega) = \frac{1}{\varepsilon^p} M\left\{|\eta(\omega)|^p\right\}.$$

Соотношения между различными типами сходимостей

Теорема. Из сходимости почти наверное последовательности случайных величин ξ_n к величине ξ следует её сходимость по вероятности.

Доказательство. Действительно из неравенства

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1$$

следует неравенство

$$\forall\varepsilon > 0 \ \delta > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad P\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} > 1 - \delta.$$

Теорема доказана.

Теорема. Из сходимости в среднем последовательности случайных величин ξ_n к величине ξ следует её сходимость по вероятности.

Доказательство. Из неравенства Чебышева следует, что $\forall\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\{\,|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^p} M\left\{\,|\xi_n - \xi|^p\right\},$$

а из сходимости в среднем получается, что

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{\,|\xi_n - \xi|^p\right\} = 0,$$

следовательно

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |\,\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\,| < \varepsilon\} = 1,$$

то есть рассматриваемая последовательность случайных величин сходится по вероятности.

Теорема доказана.

Теорема. Из сходимости по вероятности последовательности случайных величин ξ_n к величине ξ следует её сходимость по распределению.

Доказательство. Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, то есть $\forall\varepsilon>0\ \delta>0\ \exists N\ \forall n>N$, выполняется неравенство $P\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}>1-\delta$.

Поэтому для любого x можно записать

$$\{\omega:\xi_n(\omega)<x\}\subset\{\omega:\xi<x+\varepsilon\}\bigcup\{\omega:|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\},$$

следовательно,

$$F_n(x)=P\{\xi_n<x\}\le P\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}+P\{\xi<x+\varepsilon\}<\delta+F(x+\varepsilon).$$

С другой стороны,

$$F(x-\varepsilon)=P\{\xi<x-\varepsilon\}\le P\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}+P\{\xi_n<x\}<\delta+F_n(x),$$

то есть

$$F_n(x)>F(x-\varepsilon)-\delta,$$

поэтому для любых ε и δ выполняется двойное неравенство

$$F(x-\varepsilon)-\delta<F_n(x)<\delta+F(x+\varepsilon).$$

В силу произвольности ε и δ, устремляя их к нулю, при этом, естественно, $N\to\infty$, то есть рассматривая предельный переход при $n\to\infty$, получим равенство

$$F(x)\le\lim_{n\to\infty}F_n(x)\le F(x+0),$$

следовательно, в точках непрерывности функции $F(x)$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x).$$

Теорема доказана.

Подытоживая эти теоремы, можно нарисовать следующую схему:

Значительная часть исследований в теории вероятностей посвящена выяснению условий, при выполнении которых имеет место тот или иной тип сходимости последовательности случайных величин. Эти условия формулируются в виде предельных теорем теории вероятностей, среди которых выделяют четыре основных группы теорем, получивших условные названия: закона больших чисел, центральной предельной теоремы, усиленного закона больших чисел и центральной предельной проблемы.

Классификация предельных теорем по типу сходимости

Группа теорем, посвящённая сходимости по вероятности, объединяется названием «закон больших чисел». Здесь, как правило, имеет место сходимость к некоторому среднему значению (детерминированной величине).

Группа теорем, посвящённая сходимости по распределению к нормально распределённой случайной величине, объединяется под названием «центральная предельная теорема».

Закон больших чисел, в котором рассматривается сходимость почти наверное получила название «усиленный закон больших чисел».

Наконец, группа теорем, посвящённых сходимости в схеме серий, аналогично предельной теореме Пуассона, к случайным величинам с так называемыми безгранично делимыми законами распределения, получила название «центральной предельной проблемы».

Рассмотрение предельных теорем начнём с центральной предельной теоремы, где достаточно полезной является теорема о сходимости последовательностей функций распределения и характеристических функций, которую здесь сформулируем без доказательства.

Теорема. Пусть последовательность функций распределения $F_n(x)$ сходится к функции распределения $F(x)$ в каждой точке её непрерывности. Тогда последовательность соответствующих характеристических функций $g_n(u)$ сходится к характеристической функции $g(u)$, которая соответствует функции распределения $F(x)$.

Наоборот, если последовательность характеристических функций $g_n(u)$ сходится к характеристической функции $g(u)$, тогда последовательность соответствующих функций распределения $F_n(x)$ сходится к функции распределения $F(x)$, соответствующей характеристической функции $g(u)$.

3.2. Центральная предельная теорема

Среди всех предельных теорем, рассматривающих сходимость по распределению, особое место занимают теоремы, определяющие условия сходимости к нормально распределённым случайным величинам. Как указано выше, множество таких теорем объединяют под названием «центральная предельная теорема».

Если резюмировать результаты этих теорем, то качественно картина выглядит следующим образом. Пусть имеется некоторое явление, определяемое величиной x. На него накладывается большое число n случайных факторов, которые дают аддитивные добавки ξ_i к величине x, так что её наблюдаемые значения составляют значения случайной величины

$$\eta_n = x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где случайные величины ξ_i удовлетворяют следующим двум условиям:

1. Эти величины в некотором смысле равномерно малы, то есть среди ξ_i нет какого-то доминирующего слагаемого, которое определяло бы главным образом значения величины η_n.

2. Величины ξ_i не зависят либо слабо зависят друг от друга.

При соответствующих более точных формулировках этих условий, налагаемых на величины ξ_i, центральная предельная теорема утверждает, что последовательность случайных величин η_n при $n \to \infty$ по распределению сходится к нормально распределённой случайной величине.

Так как ограничения, при которых верна центральная предельная теорема, довольно часто выполняются на практике, то аппроксимация результатов наблюдений значениями нормально распределённой случайной величины достаточно адекватна реальной действительности.

Перейдём теперь к более точным формулировкам.

Центральная предельная теорема в простейшей форме

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые, одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием $M\{\xi_i\} = a$, дисперсией $D\{\xi_i\} = \sigma^2$ и конечным третьим моментом. Тогда для последовательности функций распределения $H_n(x)$ случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = \Phi(x),$$

то есть последовательность случайных величин η_n сходится по распределению к стандартной нормально распределённой случайной величине.

Доказательство. Рассмотрим последовательность характеристических функций

$$g_n(u) = M\{\exp(iu\eta_n)\}$$

случайных величин η_n.

Применяя свойства характеристических функций и определение случайной величины η_n, можно записать

$$\ln g_n(u) = \ln M\left\{\exp\left(iu\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-na}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\} = \ln M\left\{\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\} =$$

$$= n\ln M\left\{\exp\left(iu\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\} = n\ln M\left\{1+iu\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}+\frac{1}{2}\left(iu\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= n\ln\left\{1+iuM\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}+\frac{1}{2}M\left(iu\frac{\xi_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} = n\ln\left\{1-\frac{u^2}{2n}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= n\left\{-\frac{u^2}{2n}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} = -\frac{u^2}{2}+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

следовательно,

$$g_n(u) = \exp\cdot \qquad -O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда следует, что при $n\to\infty$ последовательность характеристических функций $g_n(u)$ сходится к характеристической функции

$$g(u) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}$$

стандартной нормально распределённой случайной величины. Следовательно, в силу теоремы о сходимости последовательностей характеристических функций имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = \Phi(x).$$

Теорема доказана.

Теперь как частный случай покажем справедливость интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

Теорема (интегральная теорема Муавра – Лапласа). В условиях схемы Бернулли выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Обозначим ξ_i – число успехов в i-м испытании схемы Бернулли. Здесь случайные величины ξ_i стохастически независимы, одинаково распределены и для них выполняются равенства

$$M\{\xi_i\} = M\left\{\xi_i^2\right\} = M\left\{\xi_i^3\right\} = p, \quad D\{\xi_i\} = p - p^2 = p(1-p) = pq,$$

$$m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

следовательно, выполнены все условия предыдущей теоремы, поэтому последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

по распределению сходится к стандартной нормально распределённой случайной величине, а следовательно, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим более общий случай.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые случайные величины с функциями распределения $F_n(x)$, математическими ожиданиями $M\{\xi_n\} = a_n$ и дисперсиями $D\{\xi_n\} = b_n^2$.

Обозначив

$$B_n^2 = D\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} D\{\xi_k\} = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

рассмотрим случайные величины

$$\eta_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}.$$

Здесь

$$\xi_{kn} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n},$$

поэтому выполняются равенства

$$M\{\xi_{kn}\} = 0, \quad D\{\xi_{kn}\} = \frac{b_k^2}{B_n^2}.$$

Важнейшим условием сходимости последовательности случайных величин к нормально распределённой случайной величине является условие Линдеберга. Рассмотрим это условие.

Условие Линдеберга

Условием Линдеберга для последовательности случайных величин ξ_n называется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) = 0, \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

Выясним смысл условия Линдеберга.

Оценим вероятность того, что $\max\limits_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| > \varepsilon B_n$. Можно записать

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| > \varepsilon B_n\right\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\{\omega : |\xi_k(\omega) - a_k| > \varepsilon B_n\}\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P\{\omega : |\xi_k(\omega) - a_k| > \varepsilon B_n\} = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} dF_k(x) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\right\}.$$

При выполнении условия Линдеберга рассматриваемая вероятность является бесконечно малой величиной при $n\to\infty$, что интерпретируется как равномерная малость слагаемых $\xi_{kn} = (\xi_k - a_k)/B_n$.

Рассмотрим также отношение b_k/B_n. Можно записать

$$\frac{b_k^2}{B_n^2}=\frac{1}{B_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_k)^2\,dF_k(x)=$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\int_{|x-a_k|\le\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)+\frac{1}{B_n^2}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\le$$

$$\le\varepsilon^2+\frac{1}{B_n^2}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x),$$

поэтому при выполнении условия Линдеберга

$$\max_{1\le k\le n}D\{\xi_{kn}\}=\max_{1\le k\le n}\frac{b_k^2}{B_n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

что также интерпретируется как равномерная малость величин ξ_{kn}.

Теперь докажем центральную предельную теорему в форме Линдеберга.

Центральная предельная теорема в форме Линдеберга

Теорема Линдеберга. Пусть $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$ – независимые случайные величины, удовлетворяющие условию Линдеберга. Тогда для последовательности функций распределения $H_n(x)$ случайных величин

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-a_k}{B_n}$$

имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}H_n(x)=\Phi(x)$,

то есть последовательность случайных величин η_n сходится по распределению к стандартной нормально распределённой случайной величине.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы будем применять следующие неравенства:

$$\left|e^{ix}-1\right|\le|x|,$$

$$\left|e^{ix}-1-ix\right|\le x^2/2,$$

$$\left|e^{ix}-1-ix+x^2/2\right|\le|x|^3/6,$$

$$\left|e^{ix}-1-ix+x^2/2\right|\le x^2,$$

$$|\ln(1+x)-x|\le x^2,(|x|<1/2).$$

Будем рассматривать четыре этапа доказательства.

Этап 1. Обозначим $F_{kn}(x)$ – функцию распределения случайной величины ξ_{kn}, тогда $g_{kn}(u) = M\{\exp(iu\xi_{kn})\}$ – её характеристическая функция.

На этом этапе покажем, что равномерно по k

$$g_{kn}(u) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Здесь $M\{\xi_{kn}\} = 0,\ D\{\xi_{kn}\} = b_k^2 / B_n^2$, поэтому

$$|g_{kn}(u) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_{kn}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dF_{kn}(x) - iu \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{kn}(x) \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{iux} - 1 - iux \right| dF_{kn}(x) \le \frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{kn}(x) = \frac{u^2}{2} D\{\xi_{kn}\} = \frac{u^2}{2}\frac{b_k^2}{B_n^2}.$$

Следовательно, при выполнении условия Линдеберга, в силу выше доказанного свойства дисперсии величины ξ_{kn}, можно записать

$$\max_{1\le k\le n} |g_{kn}(u) - 1| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Этап 2. На этом этапе покажем, что для всех u из интервала $|u| \le T < \infty$

$$\left| \ln M\{\exp(iu\eta_n)\} - \sum_{k=1}^{n} (g_{kn}(u) - 1) \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Так как

$$\ln M\{\exp(iu\eta_n)\} = \sum_{k=1}^{n} \ln M\{\exp(iu\xi_{kn})\} = \sum_{k=1}^{n} \ln g_{kn}(u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\{1 + (g_{kn}(u) - 1)\} = \sum_{k=1}^{n} \{g_{kn}(u) - 1\} + R_n,$$

где

$$|R_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \{\ln\{1 + (g_{kn}(u) - 1)\} - \{g_{kn}(u) - 1\}\} \right| \le \sum_{k=1}^{n} (g_{kn}(u) - 1)^2 \le$$

$$\le \max_{1\le k\le n} |g_{kn}(u) - 1| \cdot \sum_{k=1}^{n} |g_{kn}(u) - 1| \le \max_{1\le k\le n} |g_{kn}(u) - 1| \cdot \frac{u^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{B_n^2} \le$$

$$\le \frac{T^2}{2} \max_{1\le k\le n} |g_{kn}(u) - 1|,$$

следовательно, $$|R_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Здесь $$R_n = \ln M\{\exp(iu\eta_n)\} - \sum_{k=1}^{n}(g_{kn}(u)-1).$$

Этап 3. На этом этапе покажем, что
$$\sum_{k=1}^{n}(g_{kn}(u)-1) \underset{n\to\infty}{\to} -\frac{u^2}{2}.$$

Действительно,
$$\sum_{k=1}^{n}(g_{kn}(u)-1) = \sum_{k=1}^{n}\left\{M\left(e^{iu\xi_{kn}}\right)-1\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{M\left(1+iu\xi_{kn}-\frac{u^2}{2}\xi_{kn}^2\right)-1+\rho_{kn}\right\} =$$
$$= -\frac{u^2}{2}\sum_{k=1}^{n}D\{\xi_{kn}\} + \sum_{k=1}^{n}\rho_{kn} = -\frac{u^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{B_n^2} + \sum_{k=1}^{n}\rho_{kn} = -\frac{u^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\rho_{kn}.$$

Покажем, что $$\rho_n = \sum_{k=1}^{n}\rho_{kn} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Действительно,
$$|\rho_{kn}| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{iux}-1-iux+\frac{u^2x^2}{2}\right\}dF_{kn}(x)\right| \le$$
$$\le \int_{|x|\le\varepsilon}\left|e^{iux}-1-iux+\frac{u^2x^2}{2}\right|dF_{kn}(x) + \int_{|x|>\varepsilon}\left|e^{iux}-1-iux+\frac{u^2x^2}{2}\right|dF_{kn}(x) \le$$
$$\le \frac{|u|^3}{6}\int_{|x|\le\varepsilon}|x|^3\,dF_{kn}(x) + u^2\int_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{kn}(x) \le \frac{|u|^3}{6}\varepsilon\int_{|x|\le\varepsilon}x^2dF_{kn}(x) + u^2\int_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{kn}(x) \le$$
$$\le \frac{|u|^3}{6}\varepsilon\frac{b_k^2}{B_n^2} + u^2\int_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{kn}(x),$$

поэтому $$|\rho_n| \le \frac{T^3}{6}\varepsilon + T^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{kn}(x).$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{kn}(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\{\omega:|\xi_{kn}(\omega)|>\varepsilon\}}\xi_{kn}^2(\omega)dP(\omega)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\{\omega:|\xi_k(\omega)-a_k|>\varepsilon B_n\}}\frac{(\xi_k(\omega)-a_k)^2}{B_n^2}dP(\omega)=$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x),$$

поэтому

$$|\rho_n|\le\frac{T^3}{6}\varepsilon+T^2\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x),$$

тогда в силу произвольного выбора ε, конечности величины T, а также условия Линдеберга можно записать

$$|\rho_n|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Этап 4. В силу этапов 2 и 3 можно записать

$$\lim_{n\to\infty}\left|\ln M\{\exp(iu\eta_n)\}-\sum_{k=1}^{n}\{g_{kn}(u)-1\}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\ln M\{\exp(iu\eta_n)\}+\frac{u^2}{2}\right|=0,$$

следовательно, для последовательности характеристических функций $M\{e^{iu\eta_n}\}$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}M\{\exp(iu\eta_n)\}=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\},$$

поэтому для последовательности функций распределения $H_n(x)$ случайных величин η_n можно записать

$$\lim_{n\to\infty}H_n(x)=\Phi(x).$$

Теорема доказана.

Проверить выполнение условия Линдеберга иногда бывает достаточно сложно, поэтому Ляпуновым предложено другое условие, из которого вытекает условие Линдеберга.

Условие Ляпунова

Пусть существует такое $\delta > 0$, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M\left\{\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta}\right\} = 0\,,$$

тогда выполняется условие Линдеберга.

Действительно,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) \le \frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\frac{|x-a_k|^{\delta}}{\varepsilon^{\delta}B_n^{\delta}}\,dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\delta}}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|}|x-a_k|^{2+\delta}\,dF_k(x) \le \frac{1}{\varepsilon^{\delta}}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M\left\{\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta}\right\},$$

откуда очевидно следует, что если выполнено условие Ляпунова, то выполняется и условие Линдеберга.

Теорема Ляпунова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые случайные величины, удовлетворяющие условию Ляпунова. Тогда для последовательности функций распределения $H_n(x)$ случайных величин

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_{kn} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a_k}{B_n}$$

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = \Phi(x)\,,$$

то есть последовательность случайных величин η_n сходится по распределению к стандартной нормально распределённой случайной величине.

Доказательство. Оно очевидно следует из того, что если выполнено условие Ляпунова, то выполняется условие Линдеберга, а следовательно, справедлива центральная предельная теорема в форме Линдеберга.

Теорема доказана.

Также имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией $b^2 = D\{\xi_n\}$, тогда для последовательности функций распределения $H_n(x)$ случайных величин

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{kn} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - a_k}{B_n}$$

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = \Phi(x),$$

то есть последовательность случайных величин η_n сходится по распределению к стандартной нормально распределённой случайной величине.

Доказательство. В этом случае

$$B_n^2 = nb^2,$$

следовательно,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} (x-a_k)^2\, dF_k(x) = \frac{1}{nb^2} n \int\limits_{|x-a|>\varepsilon b\sqrt{n}} (x-a)^2\, dF(x) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \int\limits_{|x-a|>\varepsilon b\sqrt{n}} (x-a)^2\, dF(x).$$

Здесь

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|x-a|>\varepsilon b\sqrt{n}} (x-a)^2\, dF(x) = 0$$

как остаток сходящегося несобственного интеграла.

Теорема доказана.

3.3. Закон больших чисел

Группа теорем, устанавливающих условия сходимости по вероятности к некоторому среднему значению, объединяются под общим названием «закон больших чисел». Здесь будут рассмотрены лишь три наиболее простые, но достаточно полезные в приложенях теоремы.

Теорема (Чебышева). Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые случайные величины с конечными первыми моментами $M\{\xi_n\} = a_n < \infty$ и равномерно ограниченными дисперсиями $D\{\xi_n\} \le C < \infty$, тогда выполняется равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k),$$

тогда

$$M\{\eta_n\} = 0,$$

$$D\{\eta_n\} = D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\{\xi_k\} \le \frac{1}{n^2}nC = \frac{C}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

то есть последовательность случайных величин η_n сходится к нулю в среднем квадратическом, а следовательно, сходится и по вероятности.

Теорема доказана.

Теорема. Если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины с конечными первыми и вторыми моментами $M\{\xi_n\} = a < \infty$, тогда выполняется равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} a,$$

то есть среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к их математическому ожиданию.

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидно следует из теоремы Чебышева, так как дисперсии одинаково распределённых случайных величин совпадают, следовательно они равномерно ограничены.

Теорема доказана.

Теорема Бернулли. В условиях схемы Бернулли выполняется равенство

$$\frac{m}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} p.$$

Доказательство. Записав число успехов m в виде суммы

$$m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где ξ_k – число успехов в k-м опыте, получаем условия предыдущей теоремы, следовательно, верна сформулированная теорема.

Теорема доказана.

В сформулированных теоремах доказана сходимость не только по вероятности, но также более сильная сходимость в среднем квадратическом. Рассмотрим условия сходимости почти наверное.

3.4. Усиленный закон больших чисел

Совокупность теорем, определяющих условия сходимости почти наверное к некоторым средним значениям носит общее название усиленного закона больших чисел. Таких теорем достаточно много, поэтому рассмотрим те из них, которые наиболее полезны в приложениях.

Основой для доказательства таких теорем является так называемый **закон нуля и единицы (лемма Бореля – Кантелли)**. Если для последовательности случайных событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

то

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} A_n\right\} = 0.$$

Если эти события независимы и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$

то

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} A_n\right\} = 1.$$

Доказательство. 1. Так как

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n,$$

то

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} A_n\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty} B_n\right\} = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} \le \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right\} = 0$$

как предел остаточной суммы сходящегося ряда.

2. В силу неравенства $1 - x \le e^{-x}$ можно записать

$$P(\overline{B}_n) = P\left\{\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right\} = P\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right\} = \prod_{k=n}^{\infty} P(\overline{A}_k) =$$

$$= \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \le e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0,$$

так как остаточная сумма расходящегося ряда равна бесконечности.

Из этого равенства получим

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B}_n) = 1,$$

следовательно,

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} A_n\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty} B_n\right\} = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1.$$

Лемма доказана.

По определению случайное событие $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ наступает тогда, когда наступает бесконечное число событий A_n из заданной последовательности, поэтому, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то в последовательности может наступить лишь конечное число событий, следовательно, существует такое N, что для всех $n \ge N$ события A_n не наступают.

Теорема. Если для последовательности случайных величин ξ_n существует такое $k \ge 1$ и такая случайная величина ξ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left\{|\xi_n - \xi|^k\right\} < \infty,$$

тогда

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi.$$

Доказательство. Обозначим случайное событие

$$A_n = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon\},$$

тогда в силу условия теоремы, а также по неравенству Чебышева запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\left\{|\xi_n - \xi|^k\right\}}{\varepsilon^k} < \infty,$$

следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существует такое N, что для всех $n \ge N$ выполняются неравенства $|\xi_n - \xi| < \varepsilon$.

Это, как указано выше, и означает, что последовательность случайных величин ξ_n сходится почти наверное к случайной величине ξ.

Теорема доказана.

Для применения этой теоремы, как правило, выбирают $k = 4$, так как ряд из вторых моментов обычно расходится, а ряд из абсолютных третьих моментов вычислять достаточно сложно.

Для доказательства более глубоких теорем приведём сначала вспомогательные результаты в том виде, в котором они будут применены ниже.

Лемма Кронекера. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$, то последовательность

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Неравенство Гаека – Реньи. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ – независимые случайные величины с $M\eta_k = 0$ и $D\eta_k = \sigma_k^2$, тогда для $m < n$ и произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left\{\max_{m\le k\le n} \frac{1}{k}\left|\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k^2}\right\}.$$

Теорема Колмогорова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – независимые случайные величины с $M\xi_n = a_n$ и $D\xi_n = \sigma_n^2$. Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 / n^2 < \infty,$$

то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \underset{n\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} 0.$$

Доказательство. В неравенстве Гаека – Реньи положим $\eta_k = \xi_k - M\xi_k$, тогда выполнены все условия этого неравенства и можно записать

$$P\left\{\max_{m\le k\le n} \frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - a_i)\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k^2}\right\}.$$

Устремляя $n \to \infty$, получим

$$P\left\{\max_{k\ge m} \frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - a_i)\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sigma_k^2}{k^2}\right\}.$$

Заметим, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sigma_k^2}{k^2} = 0$$

как остаток сходящегося ряда.

Далее, в силу леммы Кронекера, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2/n^2$ следует, что

$$\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2=\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}k^2\left(\frac{\sigma_k^2}{k^2}\right)\underset{m\to\infty}{\to}0.$$

Поэтому выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty}P\left\{\max_{k\ge m}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-a_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=0.$$

Обозначим случайное событие

$$A_k=\left\{\omega:\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i(\omega)-a_i)\right|\ge\varepsilon\right\}.$$

Достаточно очевидно, что

$$\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k=\left\{\omega:\max_{k\ge m}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i(\omega)-a_i)\right|\ge\varepsilon\right\}.$$

Так как последовательность случайных событий $\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k$ монотонно убывает с ростом m, то

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}A_n\right\}=P\left\{\lim_{m\to\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k\right\}=\lim_{m\to\infty}P\left\{\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k\right\}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}P\left\{\max_{k\ge m}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i(\omega)-a_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=0.$$

Это означает, что с вероятностью единица может наступить лишь конечное число событий A_k из рассматриваемой последовательности, а остальные события не наступают, то есть наступают противоположные им события. Следовательно, для всякого $\varepsilon>0$ с вероятностью единица существует такое N, что для всех $k>N$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-a_i)\right|<\varepsilon,$$

а это и означает, что рассматриваемая последовательность сходится почти наверное, то есть

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - a_i) \underset{k\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Колмогорова (для одинаково распределённых случайных величин). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с $M\xi_n = a$ и конечными дисперсиями, тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} a,$$

то есть последовательность средних арифметических почти наверное (с вероятностью единица) сходится к математическому ожиданию.

Доказательство. Сформулированная теорема доказана методом усечений без ограничений на дисперсии случайных величин, а для случайных величин с ограниченной дисперсией является следствием предыдущей теоремы, так как выполняются все условия теоремы Колмогорова, в том числе и сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2} = D\xi_n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема Бореля. В условиях схемы Бернулли выполняется равенство

$$\frac{m}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} p.$$

Доказательство. Записав число успехов m в виде суммы

$$m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

независимых и одинаково распределённых случайных величин ξ_k – числа успехов в k-м опыте, получим выполнение всех условий предыдущей теоремы, поэтому справедливо утверждение сформулированной теоремы Бореля.

Теорема доказана.

Эта теорема в некотором смысле замыкает круг, который начался статистическим определением вероятности, опирающимся на экспериментальный факт сходимости частоты m/n к некоторой величине P, которая называлась вероятностью успеха – наступления рассматриваемого события в каждом опыте. В результате доказательства теоремы Бореля эти экспериментальные результаты получили теоретическое обоснование.

ЧАСТЬ 2
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Определение и описание случайного процесса

Случайные процессы являются удобной математической моделью функций времени, значения которых случайные величины. Например: число звонков, поступающих в единицу времени на телефонную станцию, являясь случайной величиной, зависит от времени суток; расход электроэнергии в единицу времени – тоже функция времени со случайными значениями; координаты броуновской частицы меняются со временем и принимают случайные значения. То есть можно сказать, что случайный процесс – это однопараметрическое семейство случайных величин, зависящих от значений параметра, имеющего смысл времени. Для более строгого определения случайного процесса вспомним определение случайной величины.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$. Случайная величина $\xi(\omega)$ – это измеримая функция, отображающая это вероятностное пространство на борелевскую прямую $\{R, B\}$.

Рассмотрим теперь функцию, зависящую от двух аргументов $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$.

Функцию $\xi(\omega, t)$ называют **случайным процессом**, если при $\forall t \in T$ она является измеримой функцией аргумента ω.

Как видно из этого определения, при фиксированном значении параметра t функция $\xi_t(\omega)$ является случайной величиной, которую будем называть **сечением случайного процесса** в момент времени t. Если зафиксируем некоторое элементарное событие ω, то получим неслучайную функцию времени $\xi_\omega(t)$, которую будем называть **реализацией случайного процесса**. Совокупность всех реализаций случайного процесса называется **ансамблем реализаций**.

В дальнейшем случайный процесс $\xi(\omega,t)$ будем обозначать $\xi(t)$, где аргумент t имеет смысл времени.

Рассмотрим сечение случайного процесса в момент $t_1 - \xi(t_1)$. Функцию

$$F(x_1,t_1) = P\{\xi(t_1) < x_1\}$$

будем называть одномерной функцией распределения случайного процесса в момент времени t_1.

Если зафиксируем два значения моментов времени t_1 и t_2, то функцию

$$F(x_1,t_1,x_2,t_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\}$$

будем называть двумерной функцией распределения случайного процесса.

Для n сечений случайного процесса функция

$$F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1,\dots,\xi(t_n) < x_n\} \tag{1.1}$$

называется **n-мерной функцией распределения случайного процесса.**

Будем считать, что случайный процесс $\xi(t)$ задан, если задано семейство функций распределений (1.1) для $\forall n$. Отметим, что функция $F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называются **условиями согласованности:**

$$F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n) = F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n,\infty,t_{n+1},\dots,\infty,t_{n+p}), \tag{1.2}$$

$$F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n) = F(x_{i_1},t_{i_1},\dots,x_{i_n},t_{i_n}), \tag{1.3}$$

где $i_1,i_2,\dots,i_n$ – любая перестановка индексов $1,2,\dots,n$ для $\forall n$. Теперь можно сформулировать ещё одно определение случайного процесса.

Случайным процессом $\xi(t)$, заданным на множестве $T\,(t \in T)$ называется семейство распределений (1.1), удовлетворяющих **условиям согласованности** (1.2) и (1.3). Набор функций $F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n)$ для

$n=1,2,\ldots$ называют **конечномерным распределением** случайного процесса.

Явное выражение конечномерных функций распределения случайного процесса часто бывает неудобным для применения. Поэтому иногда случайный процесс задают плотностью распределения или характеристической функцией.

Если $p(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)$ является n-мерной плотностью распределения, то

$$F(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n}p(y_1,t_1,\ldots,y_n,t_n)\,dy_n\ldots dy_1\,,\quad \forall n.$$

При этом условие согласованности (1.2) примет вид

$$p(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(y_1,t_1,\ldots,y_n,t_n,y_{n+1},t_{n+1},\ldots,y_{n+p},t_{n+p})\,dy_{n+p}\ldots dy_{n+1}.$$

Характеристическая функция конечномерного распределения случайного процесса определяется как для многомерных случайных величин:

$$g(u_1,t_1,\ldots,u_n,t_n)=M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)u_k\right)\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}x_ku_k\right\}p(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{1.4}$$

До сих пор шла речь об описании одного случайного процесса. При решении многих задач приходится иметь дело с несколькими случайными процессами. Для задания, например, двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяется $(n+m)$-мерная функция распределения:

$$F(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n,y_1,t_1',\ldots,y_m,t_m')=$$

$$=P\{\xi(t_1)<x_1,\ldots,\xi(t_n)<x_n,\eta(t_1')<y_1,\ldots,\eta(t_m')<y_m\}. \tag{1.5}$$

Эта функция распределения в общем случае не обладает свойством симметрии относительно всех перестановок аргументов.

1.2. Статистические средние характеристики случайных процессов

Как уже указывалось выше, конечномерные распределения дают исчерпывающую характеристику случайного процесса. Однако во многих случаях представляют интерес более сжатые характеристики распределения, отражающие основные свойства случайного процесса. Роль таких характеристик случайных процессов играют моментные функции или статистические средние.

Средним значением случайного процесса $\xi(t)$ (статистическим средним) $m_\xi(t)$ называется математическое ожидание сечения случайного процесса в момент времени t, которое обозначается

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t). \qquad (1.6)$$

Оно определяется одномерной функцией распределения $F(x,t)$ и в общем случае является функцией времени.

Дисперсией случайного процесса $\xi(t)$ называется дисперсия сечения случайного процесса в момент времени t, которая тоже определяется одномерным распределением

$$D_\xi(t) = M\left\{\left(\xi(t) - m_\xi(t)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_\xi(t)\right)^2 dF(x,t). \qquad (1.7)$$

Функцией корреляции случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2:

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF(x_1,t_1,x_2,t_2). \qquad (1.8)$$

Она определяется двумерной функцией распределения $F(x_1,t_1,x_2,t_2)$ и в общем случае зависит от двух аргументов – t_1 и t_2. Эту функцию $R_\xi(t_1,t_2)$ называют также **функцией автокорреляции.**

Функцией ковариации случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения центрированных сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2

$$K(t_1,t_2) = \mathrm{cov}(\xi(\mathrm{t}_1),\xi(t_2)) = M\{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\}.$$

При $t_1 = t_2 = t$ функция ковариации совпадает с дисперсией $D_\xi(t)$ случайного процесса

$$K(t,t) = D_\xi(t) = \sigma_\xi^{\ 2}(t).$$

Величину

$$r(t_1,t_2) = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)} = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)K_\xi(t_2,t_2)}}$$

называют **коэффициентом корреляции случайного процесса**, или нормированной функцией ковариации. В общем случае коэффициент корреляции является мерой линейной зависимости двух сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ случайного процесса, то есть он показывает, с какой точностью одна из случайных величин $\xi(t_1)$ может быть линейно выражена через другую $\xi(t_2)$.

Для двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вводится понятие **взаимной функции корреляции**, или **функции кросс-корреляции**:

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M\{\ \xi(t_1)\eta(t_2)\}. \qquad (1.9)$$

Совместная корреляционная функция двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяется как матричная функция

$$\begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(t_1,t_2) & R_{\xi\eta}(t_1,t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1,t_2) & R_{\eta\eta}(t_1,t_2) \end{bmatrix},$$

все элементы которой определены выше.

1.3. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс $\xi(t)$ называется **стационарным в узком смысле**, или **строго стационарным**, если его конечномерная функция распределения инвариантна относительно сдвига всех моментов времени t_i, $i = 1,\dots, n$, на одну и ту же величину τ:

$$F(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n) = F(x_1,t_1+\tau,\dots,x_n,t_n+\tau),$$

$$p(x_1,t_1,\dots,x_n,t_n) = p(x_1,t_1+\tau,\dots,x_n,t_n+\tau), \forall\tau,\ n = 1,2,\dots . \qquad (1.10)$$

Другими словами, статистические (вероятностные) свойства стационарного случайного процесса не зависят от начала наблюдения.

При $n = 1$ из условия стационарности (1.10) следует

$$p(x,t) = p(x,t+\tau).$$

Полагая $t = -\tau$, получим

$$p(x,t) = p(x),$$

то есть одномерное распределение стационарного случайного процесса не зависит от времени. А одномерное распределение определяет среднее значение и дисперсию случайного процесса, следовательно, для строго стационарного случайного процесса среднее и дисперсия не зависят от времени:

$$m_\xi(t) = m_\xi = \text{const},$$

$$D_\xi(t) = \sigma^2 = \text{const}. \qquad (1.11)$$

При $n = 2$, из условия стационарности (1.10), получим равенство

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2) = p(x_1,t_1+\tau,x_2,t_2+\tau),$$

полагая в котором $\tau = -t_1$, запишем

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2) = p(x_1,x_2,t_2-t_1),$$

то есть двумерное распределение зависит лишь от разности моментов времени, следовательно, функция корреляции стационарного случайного процесса зависит только от одного аргумента:

$$R_\xi(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 p(x_1,t_1,x_2,t_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 p(x_1,x_2,t_2-t_1)dx_1dx_2 = R_\xi(t_2-t_1). \qquad (1.12)$$

Случайный процесс называется **стационарным в широком смысле**, если его среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит лишь от разности моментов времени.

Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, но, как будет показано ниже, для гауссовских процессов верно и обратное утверждение.

1.4. Эргодические случайные процессы

Для стационарных случайных процессов кроме средних статистических характеристик вводятся ещё характеристики, средние по времени.

Выберем k-ю реализацию $\xi^{(k)}(t)$ случайного процесса и будем наблюдать её в течение времени $2T$. Рассмотрим среднее по времени значение этой реализации:

$$\left\langle \xi^{(k)} \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)dt = \tilde{m}_\xi . \qquad (1.13)$$

Здесь символ $\langle\,\rangle$ обозначает усреднение по времени, в отличие от символа математического ожидания M – усреднения по распределению, или статистического усреднения. Это **среднее по времени** можно рассматривать как постоянную составляющую случайного процесса $\xi(t)$. Аналогично можно определить **усреднённую по времени функцию корреляции**:

$$\tilde{R}_\xi(\tau) = \left\langle \xi^{(k)}(t)\xi^{(k)}(t+\tau) \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\xi^{(k)}(t+\tau)dt . \qquad (1.14)$$

Заметим, что не для любого стационарного случайного процесса приведённые средние по времени характеристики имеют конечные значения. Но даже если такие характеристики существуют, то они могут быть различны для разных реализаций случайного процесса. Исключение составляют эргодические процессы, для которых эти характеристики одинаковы для всех реализаций и, кроме того, совпадают с соответствующими статистическими средними.

Случайный процесс будем называть **эргодическим**, если любая его статистическая характеристика равна соответствующей характеристике, полученной усреднением по времени одной единственной реализации.

Из эквивалентности двух способов усреднения эргодического случайного процесса по распределению и по времени следует, что нет необходимости изучать свойства всего ансамбля реализаций, но достаточно одной реализации для определения всех характеристик рассматриваемого процесса.

Необходимыми и достаточными условиями эргодичности случайного процесса являются: **строгая стационарность** и так называемая **метрическая транзитивность**, состоящая в том, что любая часть ансамбля реализаций случайного процесса, вероятностная мера которого отлична от 0 или 1, уже не является строго стационарным случайным процессом.

Рассмотрим пример строго стационарного, но неэргодического процесса. Пусть $\xi(t) = \eta(t) + \zeta$, где $\eta(t)$ – эргодический случайный процесс, а ζ – некоторая случайная величина. Очевидно, процесс $\xi(t)$ является строго стационарным, но его средние по времени характеристики различны для различных реализаций, поэтому такой случайный процесс будет неэргодическим.

Итак, если случайный процесс эргодический, то любая его реализация определяет свойства всего ансамбля, и поэтому результат усреднения по времени, выполненный по одной реализации, совпадает с соответствующей статистической характеристикой процесса, то есть

$$m_\xi(t) = \tilde{m}_\xi,$$

$$R_\xi(\tau) = \tilde{R}_\xi(\tau). \tag{1.15}$$

Можно ввести и другие средние по времени характеристики эргодического процесса. Так, среднее время пребывания процесса ниже уровня x совпадает с вероятностью того, что значения случайного процесса в любой момент времени меньше, чем x, то есть

$$\tilde{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C\left(x - \xi^{(k)}(t)\right) dt = P\{\xi(t) < x\}, \tag{1.16}$$

здесь
$$C(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

Одномерная характеристическая функция определяется как среднее по времени значение величины $\exp\left\{ i\xi^{(k)}(t)u \right\}$, то есть в виде

$$\tilde{g}_\xi(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\left\{ i\xi^{(k)}(t)u \right\} dt. \tag{1.17}$$

Основное преимущество средних по времени характеристик состоит в том, что для их вычисления требуется наблюдение за одной единственной реализацией, чем чаще всего и располагает исследователь. Поэтому формулы (1.13), (1.14). (1.16), (1.17) используются для экспериментального определения основных характеристик случайного процесса.

1.5. Функция корреляции и её свойства

Перечислим основные свойства функции корреляции $R_\xi(t_1,t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$.

1. Функция корреляции является симметричной функцией своих аргументов:

$$R(t_1,t_2)=R(t_2,t_1). \tag{1.18}$$

Это следует непосредственно из определения. Для стационарных процессов функция корреляции – чётная функция:

$$R(\tau)=R(t_2-t_1)=R(t_1-t_2)=R(-\tau). \tag{1.19}$$

2. Для корреляционной функции выполняется неравенство

$$|R(t_1,t_2)|\le\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}. \tag{1.20}$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$M^2\{\xi\eta\}\le M\left\{\xi^2\right\}M\left\{\eta^2\right\},$$

которое вытекает из следующих рассуждений.

Так как при любом значении параметра α выполняется неравенство

$$M\left\{(\alpha\xi+\eta)^2\right\}\ge 0,$$

то можно записать

$$M\left\{(\alpha\xi+\eta)^2\right\}=M\left\{\alpha^2\xi^2+2\alpha\xi\eta+\eta^2\right\}=\alpha^2M\xi^2+2\alpha M\xi\eta+M\eta^2\ge 0,$$

следовательно, дискриминант этого квадратного трёхчлена неположительный, поэтому

$$\{M(\xi\eta)\}^2-M\xi^2M\eta^2\le 0,$$

откуда следует неравенство Коши – Буняковского, а также неравенство (1.20).

Для стационарных случайных процессов это неравенство означает, что в нуле функция корреляции достигает наибольшего значения, так как

$$R(t_1,t_1)=R(t_2,t_2)=R(0),$$

а следовательно:

$$|R(\tau)|\le R(0). \tag{1.21}$$

3. Если для стационарного случайного процесса при $\tau \to \infty$ случайные величины $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ стохастически независимы, то

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = \lim_{\tau\to\infty} M\xi(t)M\xi(t+\tau) = m_\xi^2 = R(\infty),$$

тогда среднее значение процесса можно выразить через его функцию корреляции:

$$m_\xi = \sqrt{R(\infty)}.$$

Далее, используя определение дисперсии процесса, запишем

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) - m_\xi^2 = R_\xi(0) - R_\xi(\infty). \quad (1.22)$$

Таким образом, среднее значение и дисперсию стационарного случайного процесса можно найти, если известна его функция корреляции.

4. Функция корреляции случайного процесса является положительно определённой, то есть для $\forall n$ и произвольных действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k} R_\xi(t_j, t_k)\lambda_j\lambda_k = M\left\{\sum_{j,k} \xi(t_j)\xi(t_k)\lambda_j\lambda_k\right\} = M\left\{\sum_k \xi(t_k)\lambda_k\right\}^2 \geq 0.$$

5. Пусть $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)$, тогда

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i \neq j} R_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2). \quad (1.23)$$

Таким образом, корреляционная функция суммы случайных процессов равна сумме корреляционных функций слагаемых плюс сумме всех взаимных корреляционных функций этих слагаемых. Для некоррелированных слагаемых с нулевыми средними значениями имеем

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2). \quad (1.24)$$

Наряду с корреляционной функцией для стационарных случайных процессов широко используется так называемая спектральная плотность $s_\xi(\omega)$, которая определяется следующим образом:

$$s_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau \quad (1.25)$$

и иногда интерпретируется как средняя мощность гармонической составляющей частоты ω электрического сигнала $\xi(t)$.

Глава 2

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Сходимость в среднем квадратическом

Понятие сходимости, интегрируемости, дифференцируемости случайных процессов отличается от соответствующих понятий в математическом анализе. Наиболее удобно и просто ввести эти понятия для процессов, удовлетворяющих условию $M\{\xi^2(t)\} < \infty$, которые называют процессами второго порядка, или гильбертовыми процессами. Физически это условие означает, что процесс $\xi(t)$ имеет конечную мощность, что выполнимо для всех реальных процессов.

Сформулируем основные типы сходимостей для последовательностей случайных процессов. Пусть последовательность случайных процессов $\xi_s(t)$ зависит от некоторого параметра s, множество значений которого, вообще говоря, произвольное.

Говорят, что последовательность случайных процессов $\xi_s(t)$ **сходится к процессу** $\xi(t)$ **по вероятности** при $s \to s_0$, если

$$\lim_{s \to s_0} P\{\,|\,\xi_s(t) - \xi(t)| > \varepsilon\} = 0,$$

что обозначается, как и в теории вероятностей

$$\xi_s(t) \underset{s \to s_0}{\overset{P}{\to}} \xi(t). \tag{2.1}$$

Говорят, что последовательность случайных процессов $\xi_s(t)$ **сходится к процессу** $\xi(t)$ **в среднем квадратическом** при $s \to s_0$, если

$$\lim_{s \to s_0} M\left\{(\xi_s(t) - \xi(t))^2\right\} = 0. \tag{2.2}$$

Обозначение этого типа сходимости то же самое, что и раньше:

$$\xi_s(t) \underset{s \to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}} \xi(t) \quad \text{или} \quad \underset{s \to s_0}{\text{l.i.m.}}\, \xi_s(t) = \xi(t).$$

Напомним, что сходимость в среднем квадратическом более сильная, чем сходимость по вероятности. На её изучении и остановимся ниже.

Лемма. Если

$$\xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\to} \xi(t) \quad \text{и} \quad \eta_s(t) \underset{s\to s_0}{\to} \eta(t),$$

то

$$M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2)\} \underset{s,s'\to s_0}{\to} M\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим $M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2) - \xi(t_1)\eta(t_2)\}$, которое перепишем в виде

$$M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2) - \xi(t_1)\eta(t_2)\} =$$
$$= M\{(\xi_s - \xi)(\eta_{s'} - \eta)\} + M\{(\xi_s - \xi)\eta\} + M\{\xi(\eta_{s'} - \eta)\}.$$

Далее для всех трёх слагаемых воспользуемся неравенством Коши – Буняковского (1.20). Для первого слагаемого получим

$$M^2\{(\xi_s - \xi)(\eta_{s'} - \eta)\} \le M\left\{(\xi_s - \xi)^2\right\} M\left\{(\eta_{s'} - \eta)^2\right\}.$$

По условию леммы и определению сходимости в среднем квадратическом каждый сомножитель в правой части этого неравенства сходится к нулю при $s, s'\to s_0$, поэтому его левая часть также сходится к нулю.

Для второго слагаемого аналогично запишем

$$M^2\{(\xi_s - \xi)\eta\} \le M\left\{(\xi_s - \xi)^2\right\} M\left\{\eta^2\right\}.$$

Здесь по условию леммы первый сомножитель в правой части сходится к нулю, а второй сомножитель является конечной величиной в силу того, что рассматриваются процессы второго порядка, поэтому и левая часть этого неравенства также сходится к нулю.

Аналогично можно показать, что и последнее слагаемое сходится к нулю. Тогда окончательно имеем доказываемое утверждение

$$M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2) - \xi(t_1)\eta(t_2)\} \underset{s,s'\to s_0}{\to} 0.$$

Лемма доказана.

На основании леммы докажем **критерий сходимости в среднем квадратическом.**

Теорема. Для того чтобы $\xi_s(t) \overset{\text{ср.кв.}}{\underset{s\to s_0}{\to}} \xi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при $s\to s_0$ и $s'\to s_0$ существовал и был конечен предел

$$\lim_{s,s'\to s_0} M\{\,\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} = A < \infty\,. \tag{2.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow}} \xi(t)$. В качестве $\eta_{s'}(t)$ возьмём последовательность $\xi_{s'}(t)$, которая сходится к процессу $\xi(t)$, тогда по лемме имеем

$$M\{\xi_s(t)\eta_{s'}(t)\} = M\{\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} \underset{s,s'\to s_0}{\longrightarrow} M\left\{\xi^2(t)\right\} < \infty\,.$$

Достаточность. Пусть при $s,s' \to s_0$ существует конечный предел

$$\lim_{s,s'\to s_0} M\{\,\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} = A < \infty\,.$$

Тогда

$$M\left\{(\xi_s(t)-\xi_{s'}(t))^2\right\} =$$

$$= M\left\{\xi_s^2(t)\right\} + M\left\{\xi_{s'}^2(t)\right\} - 2M\{\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} \to A + A - 2A = 0,$$

то есть последовательность $\xi_s(t)$ сходится.

Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы $\xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow}} \eta$, необходимо и достаточно

$$\lim_{s,s'\to s_0} M\{\,\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} = M\left\{\eta^2\right\}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначив $\xi_s(t) = \xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow}} \eta$, $\eta_{s'}(t) = \xi_{s'}(t) \underset{s\to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow}} \eta$, из предыдущих леммы и теоремы имеем равенство (2.5), тем самым следствие доказано.

Рассмотрим далее понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов в среднем квадратическом.

2.2. Непрерывность случайных процессов

Непрерывность случайных процессов определяется по-разному, в зависимости от выбранного типа сходимости.

Сходимость по вероятности определяет стохастическую непрерывность процесса. Это самый слабый вид сходимости.

Случайный процесс $\xi(t)$ **называется стохастически непрерывным** в точке t_0, если

$$\lim_{s\to 0} P\{\,|\,\xi(t_0+s)-\xi(t_0)|>\varepsilon\}=0\,.$$

Стохастическая непрерывность процесса относится к свойствам, однозначно определяемым его двумерным распределением. С этим свойством встретимся при изучении марковских процессов.

Случайный процесс $\xi(t)$ **называется непрерывным в среднем квадратическом** в точке t_0, если

$$\xi(t_0+s)\underset{s\to 0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}}\xi(t_0)\,.$$

Из непрерывности в среднем квадратическом в точке t следует стохастическая непрерывность процесса в этой точке. Действительно, из неравенства Чебышева следует

$$P\{\,|\,\xi(t+s)-\xi(t)|>\varepsilon\}\le\frac{M\left\{(\xi(t+s)-\xi(t))^2\right\}}{\varepsilon^2}\,.$$

Обратное утверждение, как уже указывалось ранее, в общем случае неверно.

Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратическом не означает, что реализации случайного процесса непрерывны. Примером является непрерывный в среднем квадратическом процесс Пуассона, реализации которого кусочно-постоянны, следовательно – разрывны.

Теорема. Для того чтобы процесс $\xi(t)$ был непрерывным в среднем квадратическом в точке t, необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $R(t_1,t_2)$ была непрерывна в точке $t_1 = t_2 = t$.

Доказательство. Обозначим $\xi_s(t) = \xi(t + s)$. Тогда по критерию сходимости в среднем квадратическом имеем

$$M\{\,\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\}=M\{\,\xi(t+s)\xi(t+s')\}=R(t+s,t+s')\underset{s,s'\to 0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}}R(t,t)\,. \quad (2.6)$$

А это, в свою очередь, есть не что иное, как условие непрерывности функции корреляции $R(t_1,t_2)$ в точке $t_1 = t_2 = t$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для того чтобы стационарный случайный процесс был непрерывным в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $R(\tau)$ была непрерывна в точке $\tau = 0$.

Доказательство этого утверждения очевидно следует из сформулированной теоремы.

Следствие 2. Если $R(t,t)$ непрерывна для $\forall t\in T$, то $R(t_1,t_2)$ непрерывна для $\forall t_1,t_2\in T$, то есть из непрерывности функции корреляции при совпадающих аргументах следует её непрерывность для произвольных значений её аргументов.

Доказательство. Так как $R(t_1,t_1)$ и $R(t_2,t_2)$ непрерывны, то по критерию сходимости

$$\xi(t_1+s)\underset{s\to 0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}}\xi(t_1)\ ,\quad \xi(t_2+s')\underset{s'\to 0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}}\xi(t_2)\ .$$

Тогда по лемме имеем

$$M\{\,\xi(t_1+s)\xi(t_2+s')\}=R(t_1+s,t_2+s')\underset{s,s'\to 0}{\to}R(t_1,t_2)\,.$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Для стационарного случайного процесса из непрерывности $R(\tau)$ в точке $\tau = 0$ следует её непрерывность для $\forall\tau$.

Доказательство вытекает из следствия 2.

2.3. Дифференцирование случайных процессов

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ **дифференцируем в среднем квадратическом** в точке t, если существует

$$\xi'(t)=\underset{s\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{\xi(t+s)-\xi(t)}{s}\ .$$

Случайная функция $\xi'(t)$ **называется среднеквадратической производной** процесса $\xi(t)$ в точке t.

Теорема. Для того чтобы случайный процесс $\xi(t)$ имел производную в среднем квадратическом в точке t, необходимо и достаточно, чтобы существовала $\dfrac{\partial^2 R(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$ в точке $t_1 = t_2 = t$.

Доказательство. Через $\xi_s(t)$ обозначим последовательность вида

$$\xi_s(t)=\frac{\xi(t+s)-\xi(t)}{s}\ .$$

Тогда по критерию сходимости для существования производной $\xi'(t)$

необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{s,s'\to 0} M\left\{\frac{\xi(t+s)-\xi(t)}{s}\frac{\xi(t+s')-\xi(t)}{s'}\right\}=$$

$$=\lim_{s,s'\to 0}\frac{R(t+s,t+s')-R(t+s,t)-R(t,t+s')+R(t,t)}{ss'},$$

который равен $\partial^2 R(t_1,t_2)/\partial t_1\partial t_2$ при $t_1=t_2=t$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для того чтобы стационарный случайный процесс имел производную в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы существовала в нуле вторая производная $R''(0)$ от корреляционной функции $R(\tau)$.

Доказательство вытекает из свойств стационарного процесса и предыдущей теоремы.

Следствие 2. Если для всех $t\in T$ существует вторая смешанная производная от корреляционной функции при совпадающих аргументах $\left.\partial^2 R(t_1,t_2)/\partial t_1\partial t_2\right|_{t_1=t_2}$, то существуют

$$\frac{\partial R(t_1,t_2)}{\partial t_1},\quad \frac{\partial R(t_1,t_2)}{\partial t_2},\quad \frac{\partial^2 R(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

при всех t_1, $t_2\in T$, то есть существуют первые и вторая смешанная производные при несовпадающих значениях аргументов. При этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} R_{\xi'}(t_1,t_2)&=\frac{\partial^2 R(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2},\\ R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)&=\frac{\partial R(t_1,t_2)}{\partial t_1},\\ R_{\xi\xi'}(t_1,t_2)&=\frac{\partial R(t_1,t_2)}{\partial t_2}. \end{aligned}\tag{2.7}$$

Доказательство. Действительно, существование $\left.\partial^2 R(t_1,t_2)/\partial t_1\partial t_2\right|_{t_1=t_2}$ означает существование $\xi'(t)$. Повторяя доказательство следствия 2 теоремы о непрерывности, нетрудно показать, что вторая смешанная производная от корреляционной функции существует и при различных значениях её аргументов.

Обозначая

$$\xi_s(t_1) = \frac{\xi(t_1 + s) - \xi(t_1)}{s}, \qquad \eta_s(t_2) = \xi(t_2),$$

по лемме получим, что существует предел

$$\lim_{s\to 0} M\left\{\frac{\xi(t_1 + s) - \xi(t_1)}{s}\xi(t_2)\right\} = \lim_{s\to 0}\frac{R(t_1 + s, t_2) - R(t_1, t_2)}{s} = \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1},$$

который доказывает второе равенство в (2.7).

Аналогично доказывается существования другой частной производной первого порядка, а также выполнение остальных равенств в (2.7), что доказывает утверждение данного следствия.

Следствие 3. Если для стационарного случайного процесса существует $R''(0)$, то для всех τ существуют $R'(\tau)$ и $R''(\tau)$. При этом выполняются равенства

$$R_{\xi'}(\tau) = R''_{\xi}(\tau), \qquad R_{\xi\xi'}(\tau) = R'_{\xi}(\tau).$$

Очевидность этого утверждения не вызывает сомнения.

2.4. Интегрирование случайных процессов. Закон больших чисел

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ и неслучайная функция $f(t)$ заданы на интервале $[0,T]$. Разобьём этот интервал на n частей точками $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ так, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$, и обозначим $D = \max\limits_{1\le i\le n}|t_i - t_{i-1}|$.

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ **интегрируем в среднем квадратическом**, если существует и конечен предел

$$\underset{D\to 0}{\text{l.i.m.}}\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] = \int_0^T \xi(t)df(t). \tag{2.8}$$

Теорема. Для того чтобы случайный процесс $\xi(t)$ был интегрируем в среднем квадратическом, необходимо и достаточно существование интеграла от его функции корреляции

$$\int_0^T\int_0^T R(t_1, t_2)df(t_1)df(t_2) < \infty,$$

который понимается в смысле Стилтьеса.

Доказательство. Обозначим

$$\xi_D = \sum_{i=1}^{n} \xi(t_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})],$$

и пусть $D' = \max|t'_j - t'_{j-1}|$ соответствует другому разбиению интервала $[0,T]$. Тогда по критерию сходимости для существования интеграла (2.8) необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{D,D'\to 0} M\{\xi_D \xi_{D'}\} = \lim_{D,D'\to 0} M\left\{\sum_{i,j} \xi(t_i)\xi(t_j)[f(t_i) - f(t_{i-1})]\left[f(t'_j) - f(t'_{j-1})\right]\right\} =$$

$$= \lim_{D,D'\to 0} \sum_{i,j} R(t_i, t'_j)[f(t_i) - f(t_{i-1})]\left[f(t'_j) - f(t'_{j-1})\right] = \int_0^T\int_0^T R(t,t')df(t)df(t').$$

Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда $f(t) = t$. **Несобственным интегралом в среднем квадратическом**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)dt \quad \text{или} \quad \int_a^{\infty} \xi(t)dt$$

будем называть предел

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \xi(t)dt \quad \text{или} \quad \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_a^N \xi(t)dt.$$

Для того чтобы интегралы существовали, необходимо и достаточно существование пределов

$$\lim_{N,N'\to\infty} \int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} R(t,t')dtdt' \quad \text{или} \quad \lim_{N,N'\to\infty} \int_a^N\int_a^{N'} R(t,t')dtdt'.$$

Далее будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ **удовлетворяет закону больших чисел,** если

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt - M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt\right\} \underset{T\to\infty}{\overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow}} 0.$$

Теорема. (Биркгофа – Хинчина). Если $\xi(t)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс, то он удовлетворяет закону больших чисел

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt \underset{T\to\infty}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}} M\{\xi(t)\} = m_\xi \tag{2.9}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} K(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = 0, \tag{2.10}$$

где $K(\tau) = \operatorname{cov}\{\xi(t)\xi(t+\tau)\}$.

Доказательство. Определим процесс $\zeta(t) = \xi(t) - M\{\xi(t)\}$. Тогда нужно доказать, что

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)dt\right\} = 0.$$

Для существования этого предела, в силу равенства (2.5) и критерия интегрируемости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное равенство

$$\lim_{T,T'\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{T'}\int_0^T\int_0^{T'} R_\zeta(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0. \tag{2.11}$$

Можно заметить, что

$$\left|\int_0^T\int_0^{T'} R(t_1,t_2)dt_1dt_2\right|^2 \le \int_0^T\int_0^T R(t_1,t_2)dt_1dt_2 \int_0^{T'}\int_0^{T'} R(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

поэтому (2.11) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\zeta(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0. \tag{2.12}$$

Так как $\xi(t)$ – стационарный процесс, то его функция ковариации $K_\xi(t_1,t_2)$ зависит лишь от разности моментов времени

$$K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_2-t_1) = R_\zeta(t_1,t_2) = R_\zeta(t_2-t_1).$$

Следовательно, равенство (2.12) примет вид

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_\xi(t_2-t_1)dt_1dt_2 = 0,$$

откуда после замены переменных и интегрирования получаем равенство (2.10).

Теорема доказана.

2.5. Разложение случайных процессов по ортогональным функциям

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(t_1,t_2)$ задан на интервале $[0,T]$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^T R(t,s)\varphi(s)ds = \lambda\varphi(t), \tag{2.13}$$

называемое однородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Из теории интегральных уравнений известно, что его решение существует только при счётном наборе значений $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ параметра λ, называемых собственными числами уравнения Фредгольма. Решение $\varphi_i(t)$ уравнения (2.13), соответствующее собственному числу λ_i, называется собственной функцией ядра $R(t,s)$. Известно, что собственные функции можно полагать ортонормированными, то есть

$$\int_0^T \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta_{mn}, \tag{2.14}$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Так как ядро уравнения (2.13) есть функция корреляции $R(t,s)$, которая является положительно определённой, то все $\lambda_i > 0$, и по теореме Мерсера ядро может быть представлено в виде ряда по собственным функциям

$$R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\varphi_n(s). \tag{2.15}$$

Теорема. Случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(t,s)$ можно представить в виде суммы ряда

$$\xi(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(t),$$

где
$$\xi_k = \int_0^T \xi(t)\varphi_k(t)dt$$

– некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной собственному числу λ_k.

Доказательство. Рассмотрим свойства случайных величин ξ_k.

$$M\{\xi_k\} = M\left\{\int_0^T \xi(t)\varphi_k(t)dt\right\} = \int_0^T M\{\xi(t)\}\varphi_k(t)dt = 0,$$

так как $M\{\xi(t)\} = 0$. Найдём корреляционный момент

$$M\{\xi_k\xi_l\} = M\left\{\int_0^T\int_0^T \xi(t_1)\xi(t_2)\varphi_k(t_1)\varphi_l(t_2)dt_1dt_2\right\} =$$

$$= \int_0^T \varphi_k(t_1)\int_0^T R(t_1,t_2)\varphi_l(t_2)dt_2dt_1.$$

В силу уравнения (2.13) и условия (2.14) получим

$$M\{\xi_k\xi_l\} = \lambda_l\int_0^T \varphi_k(t_1)\varphi_l(t_1)dt_1 = \lambda_{lk}\delta_{kl}\ .$$

Отсюда видно, что случайные величины некоррелированы и имеют дисперсию, равную соответствующему собственному числу λ_{lk}.

Найдём ещё

$$M\{\xi(t)\xi_k\} = M\left\{\xi(t)\int_0^T \xi(s)\varphi_k(s)ds\right\} = \int_0^T R(t,s)\varphi_k(s)ds = \lambda_k\varphi_k(t)\,.$$

Докажем теперь основное утверждение теоремы. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{\left(\xi(t) - \sum_{k=1}^n \xi_k\varphi_k(t)\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{R(t,t) - 2\sum_{k=1}^n M[\xi(t)\xi_k]\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_k^2(t)\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{R(t,t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_k^2(t)\right\}.$$

Но последнее выражение в силу теоремы Мерсера равно нулю.

Теорема доказана.

Можно показать, что это разложение является единственным разложением случайного процесса в ряд по ортогональным функциям с некоррелированными коэффициентами.

Основное достоинство этого разложения заключается в том, что вместо случайного процесса $\xi(t)$ (однопараметрического семейства зависимых случайных величин) можно рассматривать не более чем счётную последовательность некоррелированных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$

Глава 3

ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

3.1. Многомерное нормальное распределение

Важную роль во многих прикладных задачах играют случайные процессы, конечномерное распределение которых является гауссовским. Такие процессы возникают тогда, когда складывается большое число слабозависимых случайных процессов примерно одинаковой мощности. В этом случае, как будет показано ниже, с увеличением числа слагаемых сумма сходится к гауссовскому случайному процессу независимо от того, как распределены отдельные слагаемые. Остановимся на изучении многомерного нормального распределения.

Рассмотрим n-мерную случайную величину или случайный вектор $X^T = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Введём обозначение $a^T = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – вектор математических ожиданий; $K = [K_{ij}]$ – матрица ковариаций, где $K_{ij} = M\{(x_i - a_i)(x_j - a_j)\}$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Здесь $(\ )^T$ – знак транспонирования.

Многомерная случайная величина X называется гауссовской, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det K)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij}^{-1} (x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\}$$

или в матричном виде

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - a)^T K^{-1} (X - a)\right\}. \qquad (3.1)$$

Иногда удобнее пользоваться характеристической функцией, которая в данном случае имеет вид

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right)\right\} = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} a_k u_k - \frac{1}{2}\sum_{k,j} K_{kj} u_k u_j\right\}$$

или, применяя матричные обозначения, характеристическую функцию запишем следующим образом

$$g(u)=\exp\left\{ia^T u-\frac{1}{2}u^T Ku\right\}, \tag{3.2}$$

где $u^T=\{u_1,u_2,...,u_n\}$.

Рассмотрим частные случаи формулы (3.1).

Одномерное распределение. Для $n = 1$, обозначая $\sigma^2 = K_{11}$, получим

$$K_{11}^{-1}=\frac{1}{\sigma^2},\quad \det K=\sigma^2,$$

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Двумерное нормальное распределение. Для $n = 2$, обозначим

$$K_{11}=\sigma_1^2,\quad K_{12}=K_{21}=r\sigma_1\sigma_2,\quad K_{22}=\sigma_2^2,$$

тогда

$$K=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix},\qquad \det K=\left(1-r^2\right)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

При этом матрица, обратная ковариационной, примет вид

$$K^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\left(1-r^2\right)\sigma_1^2} & -\dfrac{r}{\left(1-r^2\right)\sigma_1\sigma_2}\\ -\dfrac{r}{\left(1-r^2\right)\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\left(1-r^2\right)\sigma_2^2}\end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

где r – коэффициент корреляции между случайными величинами x_1 и x_2.

Рассмотрим **основные свойства многомерных нормальных случайных величин.**

1. Сумма независимых гауссовских векторов является гауссовским вектором.

Доказательство. Имеем n-мерный случайный вектор X с характеристической функцией

$$g_1(u) = \exp\left\{ia_1^T u - \frac{1}{2}u^T K_1 u\right\}$$

и n-мерный случайный вектор Y с характеристической функцией

$$g_2(u) = \exp\left\{ia_2^T u - \frac{1}{2}u^T K_2 u\right\}.$$

Так как характеристическая функция суммы независимых случайных величин X и Y равна произведению их характеристических функций, то

$$g_3(u) = \exp\left\{i(a_1^T + a_2^T)u - \frac{1}{2}u^T (K_1 + K_2)u\right\}$$

или

$$g_3(u) = \exp\left\{ia_3^T u - \frac{1}{2}u^T K_3 u\right\},$$

то есть вектор $Z = X + Y$ распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $a_3 = a_1 + a_2$ и матрицей ковариаций $K_3 = K_1 + K_2$.

Свойство доказано.

2. Линейное преобразование гауссовского случайного вектора есть тоже гауссовский вектор.

Доказательство. Имеем n-мерный вектор X, который переходит в m-мерный вектор Y с помощью линейного преобразования, заданного матрицей $A = [A_{jk}]$, $j = 1,2,...,m$, $k = 1,2,...,n$:

$$Y = AX$$

или

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k, \quad j = 1,2,...,m.$$

Вектор X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и матрицей ковариаций K, то есть его характеристическая функция имеет вид (3.2).

Найдём характеристическую функцию вектора Y. По определению

$$g_Y(u) = M\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{m} u_j y_j\right)\right\} = M\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k\right)\right\} =$$

$$= M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{m} A_{jk} u_j\right)\right\} = g_X(A^T u) = g_X(u^T A).$$

Подставляя сюда выражение для $g_X(u)$, получим

$$g_Y(u) = \exp\left\{ia^T A^T u - \frac{1}{2}u^T AKA^T u\right\} = \exp\left\{ia_Y^T u - \frac{1}{2}u^T K_Y u\right\},$$

где $a_Y = Aa$ и $K_Y = AKA^T$. Отсюда видно, что m-мерный вектор Y – гауссовский вектор с математическим ожиданием a_Y и матрицей ковариаций K_Y.

Свойство доказано.

3. Совместное распределение любой группы компонент n-мерного гауссовского вектора также является гауссовким.

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего свойства. Действительно, пусть

$$Y = \left\{ x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \right\},$$

где $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_m \le n$, тогда выберем матрицу A размерности $m \times n$, определяющую линейное преобразование в следующем виде: каждая строка матицы A содержит единственный элемент, равный единице, а остальные элементы строки равны нулю. На k-й строке единица расположена в i_k-м столбце. Очевидно, что выполняется равенство

$$Y = AX,$$

тогда в силу свойства 2 вектор Y является гауссовским.

Свойство доказано.

4. Если случайный вектор $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n \}$ – гауссовский и случайные векторы $X' = \{ x_1, \dots, x_m \}$ и $X'' = \{ x_{m+1}, \dots, x_n \}$ некоррелированы по каждой паре своих компонент, то X' и X'' – стохастически независимые гауссовские векторы.

Доказательство. Гауссовость этих векторов следует из предыдущего свойства. Покажем, что они стохастически независимы.

В силу некоррелированности векторов X' и X'' матрица ковариаций K вектора X имеет вид

$$K=\begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{bmatrix},$$

где K' и K'' – ковариационные матрицы векторов X' и X''. Обозначим

$$V_1^T=\{u_1,\ldots,u_m\},\quad V_2^T=\{u_{m+1},\ldots,u_n\},\quad u^T=\left\{V_1^T,V_2^T\right\},\quad a^T=\left\{a_1^T,a_2^T\right\},$$

где a_1 и a_2 – математические ожидания векторов X' и X''. Тогда

$$g(u)=\exp\left\{i\left(a_1^T,a_2^T\right)\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(V_1^T,V_2^T\right)\begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{bmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Выполнив несложные преобразования, получим

$$g_X(u)=\exp\left\{i\left(a_1^TV_1+a_2^TV_2\right)-\frac{1}{2}\left(V_1^TK'V_1+V_2^TK''V_2\right)\right\}=g_{X'}(V_1)g_{X''}(V_2),$$

где $g_{X'}(V_1)$ и $g_{X''}(V_2)$ – характеристические функции векторов X' и X''.

Свойство доказано.

5. Пусть $X(\alpha)$ – последовательность по α гауссовских векторов с параметрами $\{m(\alpha), K(\alpha)\}$.

Если $\quad m(\alpha)\underset{\alpha\to\alpha_0}{\to} m \quad$ и $\quad K(\alpha)\underset{\alpha\to\alpha_0}{\to} K,$

то последовательность распределений этих векторов сходится к гауссовскому распределению с параметрами $\{m,K\}$.

Это утверждение очевидно, так как характеристическая функция гауссовского распределения зависит лишь от вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций.

3.2. Гауссовский случайный процесс

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ задан n сечениями $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$, для которых известны математические ожидания $M\{\xi(t_i)\}=a(t_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, и матрица ковариаций $K=[K(t_i,t_j)]$, $i,j=1,2,\ldots,n$, где

$$K(t_i,t_j)=M\left\{(\xi(t_i)-a(t_i))\left(\xi(t_j)-a(t_j)\right)\right\}.$$

Случайный процесс называется **гауссовским, или нормальным,** если его n-мерная плотность распределения является гауссовской (3.1). Все свойства гауссовских процессов вытекают из свойств многомерных нормальных случайных величин. Перечислим их в приложении к случайным процессам и сформулируем дополнительные.

1. Гауссовский процесс стационарный в широком смысле является стационарным и в узком смысле. Обратное утверждение, как уже указывалось ранее, справедливо для любых случайных процессов.

Доказательство. Справедливость этого утверждения вытекает из вида плотности распределения и определения стационарности. Действительно, чтобы случайный процесс был стационарным в узком смысле, необходимо выполнение условия

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2,\ldots,x_n,t_n) = p(x_1,t_1+\tau,x_2,t_2+\tau,\ldots,x_n,t_n+\tau)\,,\ \forall n,\tau\,.$$

Для процесса стационарного в широком смысле верны соотношения

$$m_\xi(t) = a = \text{const},\qquad K_\xi(t_i,t_j) = K_\xi(t_j - t_i)\,. \tag{3.3}$$

Для гауссовского случайного процесса многомерная плотность распределения зависит только от математических ожиданий сечений и матрицы ковариаций, тогда в силу (3.3) можно записать

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2,\ldots,x_n,t_n) = \Phi\big(a,K(t_j - t_i)\big),\qquad i,j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Отсюда следует, что при переходе к моментам времени $t_i + \tau$ плотность распределения для гауссовского процесса не изменится.

Свойство доказано.

2. Коэффициенты разложения гауссовского случайного процесса в ряд по ортогональным функциям являются **независимыми нормальными** случайными величинами.

Это утверждение очевидно следует из свойств 2 и 4 многомерных нормальных случайных величин и того, что коэффициенты разложения в ряд некоррелированы.

3. **Центральная предельная теорема для случайных процессов.**

Пусть дана последовательность сумм случайных процессов

$$\eta_n(t) = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n_k}(t),\qquad n = 1,2,\ldots\,,$$

и выполнены следующие условия:

а) при фиксированном n случайные величины $\alpha_{n_1}(t_1),\alpha_{n_2}(t_2),\ldots,$ $\alpha_{n_{m_n}}(t_{m_n})$ взаимно независимы при любых $t_1,t_2,\ldots,t_{m_n}$ и имеют конечные моменты второго порядка, при этом

$$M\left\{\alpha_{n_k}(t)\right\} = 0,\quad M\left\{\alpha^2_{n_k}(t)\right\} = b^2_{n_k}(t)\,;$$

б) при $n \to \infty$ корреляционная функция

$$R_n(t_1,t_2) = M\{\eta_n(t_1)\eta_n(t_2)\}$$

сходится к некоторому пределу $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(t_1,t_2) = R(t_1,t_2)$;

в) сумма $\eta_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{m_n} \alpha_{n_k}(t)$ при каждом t удовлетворяет условию Линдеберга, то есть

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{m_n} \int\limits_{|x|\ge\tau B_n} x^2 dF_{n_k}(x,t) \underset{m_n\to\infty}{\to} 0,$$

где $F_{n_k}(x,t)$ – функция распределения случайной величины $\alpha_{n_k}(t)$;

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{m_n} b_{n_k}(t) = R_n(t,t).$$

Тогда последовательность случайных процессов $\eta_n(t)$ при $n \to \infty$ сходится к гауссовскому случайному процессу с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(t_1,t_2)$.

Сформулированная теорема непосредственно следует из центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных векторов.

4. Стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией вида $K_\xi(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$ называется **белым гауссовским шумом.**

Отметим, что сечения этого процесса стохастически независимы, а дисперсия равна бесконечности. Очевидно, что такие модели неадекватны реальным процессам, тем не менее они довольно часто применяются на практике.

3.3. Винеровский случайный процесс

Кроме процессов с независимыми сечениями, примером которых является белый гауссовкий шум, особый интерес представляют процессы с независимыми приращениями. Остановимся на таких процессах. Так как приращения

$$\xi(t_2) - \xi(t_1),\ \xi(t_3) - \xi(t_2),\ \ldots,\ \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

для моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ процесса $\xi(t)$ независимы, то конечномерное распределение примет вид

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2,\dots,x_n,t_n)=$$
$$=p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\times\dots\times p(x_2,t_2|x_1,t_1)\,p(x_1,t_1). \tag{3.4}$$

Случайный процесс $w(t)$ будем называть **винеровским гауссовским**, если его приращения независимы и подчиняются нормальному распределению с характеристиками

$$M\{\,\xi(t_i)-\xi(t_{i-1})\}=0,\quad M\left\{(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))^2\right\}=\sigma^2\,|\,t_i-t_{i-1}|,$$

и с вероятностью 1 выполняется начальное условие $\xi(t_1)=x_1$, где x_1 – детерминированная величина.

Многомерное распределение винеровского процесса имеет вид

$$p(x_1,t_1,x_2,t_2,\cdots,x_n,t_n)=\delta(x_1)\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi|\,t_i-t_{i-1}|}}\exp\left\{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2\sigma^2\,|\,t_i-t_{i-1}|}\right\}. \tag{3.5}$$

Здесь первый сомножитель $\delta(x_1)$ является плотностью распределения детерминированной величины x_1.

Покажем, что производная винеровского процесса является белым гауссовским шумом. Очевидно, что $w'(t)$ является гауссовским процессом с нулевым математическим ожиданием. Найдём его корреляционную функцию.

Нетрудно показать, что корреляционная функция винеровского процесса имеет вид

$$R_w(t_1,t_2)=\sigma^2\min\{\,t_1,t_2\,\}\,,$$

поэтому в силу равенства (2.7) можно записать

$$R_{w'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2\sigma^2\min\{\,t_1,t_2\}}{\partial t_1\partial t_2}=\sigma^2\delta(t_2-t_1)=\sigma^2\delta(\tau)\,,$$

где $\tau=t_2-t_1$.

Тем самым показано, что производная винеровского процесса имеет корреляционную функцию, совпадающую с функцией корреляции белого гауссовского шума.

Отметим также, что винеровский процесс является математической моделью броуновского движения частиц, перемещающихся под влиянием случайных ударов молекул жидкости.

Глава 4

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ЦЕПИ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Определение марковского процесса

Марковские процессы, или процессы без последействия, являются удобной математической моделью для многих реальных процессов. Представим себе систему, которая может находится в различных состояниях, и пусть её функционирование во времени носит стохастический характер, то есть состояние системы в момент времени t в общем случае не определяется однозначно её состояниями в предыдущие моменты $s < t$. Следовательно, процесс изменения во времени состояний этой системы можно описать некоторым случайным процессом $\xi(t)$, заданным на интервале $[0,T]$ и принимающим значения из множества X.

Пусть в моменты времени $t_1 < t_2 < ...< t_n$ заданы сечения $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$ случайного процесса $\xi(t)$. Для момента времени $t_{n+1} > t_n$ рассмотрим сечение $\xi(t_{n+1})$ и условную функцию распределения

$$P\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} | \xi(t_n) = x_n, \dots, \xi(t_1) = x_1\} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1}, \xi(t_n) = x_n, \dots, \xi(t_1) = x_1\}}{P\{\xi(t_n) = x_n, \dots, \xi(t_1) = x_1\}}. \qquad (4.1)$$

Интерпретируя $t_1,..., t_{n-1}$ как моменты времени в прошлом, t_n – настоящий (текущий) момент времени, а t_{n+1} – будущий момент времени, говорят, что эта условная функция распределения характеризует функционирование системы в будущем, если известно её функционирование в прошлом и настоящее (текущее) состояние системы.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если его условная функция распределения (4.1) не зависит от значений процесса в прошлые моменты времени $t_1,..., t_{n-1}$, а определяется лишь значением $\xi(t_n) = x_n$ в настоящий момент времени t_n, то есть выполняется равенство

$$P\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} | \xi(t_n) = x_n, \cdots, \xi(t_1) = x_1\} = P\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} | \xi(t_n) = x_n\}. \qquad (4.2)$$

Равенство (4.2) интерпретируют как указание на то, что для марковского процесса **будущее не зависит от прошлого при известном настоящем.**

Условная функция распределения

$$P\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} | \xi(t_n) = x_n\} = F(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1})$$

называется **марковской переходной функцией**.

Аналогично (4.2) для условной плотности распределения записывают равенство

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n, \ldots, x_1, t_1) = p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n), \qquad (4.3)$$

а условную плотность распределения

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n) = p(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1})$$

называют вероятностью перехода системы из состояния x_n в состояние x_{n+1} на интервале времени $[t_n, t_{n+1}]$.

Многомерную плотность распределения, в силу равенства (4.3), можно записать в виде

$$p(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) = p(x_1, t_1) p(x_1, t_1; x_2, t_2) \ldots p(x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n). \qquad (4.4)$$

Отсюда видно, что начальное распределение $p(x_1,t_1)$ и вероятности переходов $p(x_{n-1},t_{n-1}; x_n,t_n)$ полностью определяют марковский процесс.

Вероятности переходов удовлетворяют двум основным соотношениям.

1. Условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1}) dx_{n+1} = 1, \qquad F(x_n, t_n; \infty, t_{n+1}) = 1.$$

2. **Уравнению Чепмена – Колмогорова.** Это уравнение является определяющим в методах исследования марковских процессов и имеет весьма широкий спектр представлений, один из вариантов которого можно получить следующим образом. Проинтегрируем (4.4) по некоторому промежуточному значению x_i, например по x_2, получим

$$p(x_1, t_1, x_3, t_3, \ldots, x_n, t_n) =$$
$$= p(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2) p(x_2, t_2; x_3, t_3) dx_2 \ldots p(x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n),$$

в котором левую часть запишем в виде (4.4), и, выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$p(x_1,t_1;x_3,t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,t_1;x_2,t_2)p(x_2,t_2;x_3,t_3)dx_2\,, \tag{4.5}$$

которое называется **уравнением Чепмена – Колмогорова**.

Все марковские процессы можно разделить на классы в зависимости от структуры множества X – значений случайного процесса $\xi(t)$ и интервала времени наблюдения T.

Если множество X – дискретное, то есть конечное или счётное, то процесс $\xi(t)$ называется **цепью Маркова**. При этом, если T – дискретное, то процесс называется **цепью Маркова с дискретным временем**, а если T – непрерывное, то есть система может менять свои состояния в произвольные моменты времени, то процесс называется **цепью Маркова с непрерывным временем.**

Если оба множества X и T непрерывные, то процесс называется **непрерывным марковским процессом.** Наиболее важным классом таких процессов является множество **диффузионных процессов.** В частности, рассмотренный ранее винеровский процесс.

4.2. Цепи Маркова с дискретным временем. Определение и классификация состояний

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ изменения во времени состояний некоторой системы принимает целочисленные значения $i = 1,2,...$ из множества X конечного или счётного, то есть $\xi(t) = i$, $\xi(t') = j$. Переходы из одного состояния в другое происходят через равные промежутки времени $|t' - t| = 1$, которые будем называть шагом.

Условные вероятности

$$P\{\xi(t+1) = j \,|\, \xi(t) = i\} = p_{ij}(t), \quad i,j \in X\,,$$

образуют **матрицу вероятностей переходов** из одного состояния в другое в момент времени t.

Если вероятности переходов $p_{ij}(t)$ не зависят от момента времени t $p_{ij}(t) = p_{ij}$, то цепь Маркова называется **однородной** с матрицей вероятностей переходов за один шаг

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix},$$

где s – число состояний системы (число возможных значений цепи Маркова) – конечное или счётное. Элементы этой матрицы $p_{ij} \geq 0$ и удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, s.$$

Такую матрицу называют **стохастической**, или **марковской.**

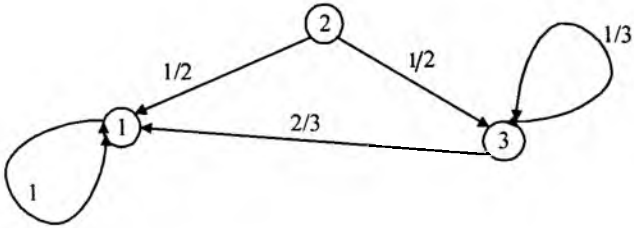
Набор вероятностей $Q = \{q(1), q(2), \ldots, q(s)\}$ называется **начальным распределением**, оно определяет состояние системы в начальный момент времени.

Цепь Маркова с дискретным временем полностью определяется начальным распределением Q и матрицей P вероятностей переходов за один шаг.

В некоторых случаях для описания цепи удобнее использовать **граф вероятностей переходов**, вершины которого обозначают возможные состояния системы, стрелки от одной вершины к другой указывают возможные переходы между состояниями, а число над стрелкой задаёт вероятность такого перехода. Например: $X = \{1, 2, 3\}$, матрица вероятностей переходов, имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

тогда граф вероятностей переходов выглядит следующим образом:



В дополнение к одношаговым вероятностям переходов интересно рассмотреть вероятности переходов из одного состояния в другое за произвольное число шагов. В силу уравнения Чепмена – Колмогорова для цепей Маркова, то есть для марковских процессов с дискретным множеством состояний, эти вероятности удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$p_{ij}(n+1)=\sum_{k=1}^{s}p_{ik}(n)p_{kj}\ , \qquad (4.6)$$

которые нетрудно получить, применяя формулу полной вероятности.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что система за $(n+1)$ шагов перейдёт из состояния i в состояние j, через H_k – событие, состоящее в том, что за n шагов система перейдёт из состояния i в состояние k, тогда в силу формулы полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{s}P(A|H_k)P(H_k)\,,$$

обозначив

$$P(A)=p_{ij}(n+1),\quad P(H_k)=p_{ik}(n),\quad P(A|H_k)=p_{kj}\ ,$$

можно записать равенство, совпадающее с (4.6).

Аналогично можно получить уравнение Чепмена – Колмогорова для произвольного числа шагов $n+m$ в виде

$$p_{ij}(n+m)=\sum_{k=1}^{s}p_{ik}(n)p_{kj}(m)\,, \qquad (4.7)$$

которое позволяет определять вероятности переходов из одного состояния в другое за произвольное число шагов. Этими формулами удобнее пользоваться, записав их в матричном виде. Так, равенство (4.6) при $n=1$ в матричной форме имеет вид

$$P(2)=PP=P^2\,,$$

тогда равенство (4.7) примет вид

$$P(n+m)=P^nP^m=P^{n+m}\,. \qquad (4.8)$$

Заметим, что матрицы $P(n)$ тоже стохастические $\forall n$.

Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем

Состояние i называется **несущественным**, если существует такое состояние j, в которое система может перейти за конечное число шагов n, но не может вернуться в i-е состояние ни за какое число шагов, то есть

$$p_{ij}(n)>0,\quad p_{ji}(m)=0\quad \forall m\,. \qquad (4.9)$$

Все остальные состояния называются существенными.

Состояния i и j называются **сообщающимися** ($i \leftrightarrow j$), если существуют n и m такие, что

$$p_{ij}(n) > 0, \quad p_{ji}(m) > 0.$$

Очевидно, что из соотношений $i \leftrightarrow k$ и $k \leftrightarrow j$ следует, что $i \leftrightarrow j$. В частности, если i – существенное состояние, то существует такое состояние j, что $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow i$, следовательно $i \leftrightarrow i$, то есть система когда-либо, но обязательно возвращается в существенное состояние.

Все существенные состояния можно разделить на классы, которые состоят из сообщающихся состояний и ни из одного состояния данного класса нельзя перейти в состояние другого класса. Такие классы состояний называются **неразложимыми**, или **замкнутыми**.

Проведённая классификация позволяет привести матрицу вероятностей переходов к каноническому виду. Для этого выделим замкнутые классы и перенумеруем их, отдельно выделим множество несущественных состояний. Тогда матрица P – переходных вероятностей примет вид

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k & 0 \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_k & R \end{bmatrix}.$$

Здесь P_s – матрица вероятностей переходов s-го неразложимого класса, $s = 1,2,...,k$; B_s – матрица вероятностей переходов из несущественных состояний в состояния s-го замкнутого класса; R – матрица вероятностей переходов по несущественным состояниям.

Далее рассмотрим неразложимый класс S существенных состояний. Для любого состояния $i \in S$ существует такое n, что $p_{ii}(n) > 0$.

Обозначим M_i – множество числа шагов n, для которых $p_{ii}(n) > 0$.

Наибольший общий делитель множества M_i этих чисел называется **периодом состояния i** и обозначается d_i.

Теорема (солидарности). Все состояния одного неразложимого класса имеют одинаковый период d.

Доказательство. Пусть $m \in M_i, n \in M_i$, тогда

$$p_{ii}(m+n) = \sum_{k=1}^{s} p_{ik}(m) p_{ki}(n) \geq p_{ii}(m) p_{ii}(n) > 0,$$

следовательно $m + n \in M_i$.

В математической теории чисел определена структура множества M чисел, кратных d, обладающих таким свойством, что если $m \in M, n \in M$ и их сумма $m+n \in M$, тогда существует такое число R, что $\forall r \geq R$ числа $rd \in M$.

Аналогично, для рассматриваемого множества M_i существует такое число R_i, что $\forall r \geq R_i$ числа $rd_i \in M_i$, следовательно

$$p_{ii}(rd_i) > 0.$$

Пусть $j \in S$, тогда $i \leftrightarrow j$, то есть существуют такие числа m и n, что

$$p_{ij}(m) > 0, \qquad p_{ji}(n) > 0,$$

тогда можно записать

$$p_{jj}(m+n+rd_i) \geq p_{ji}(n) p_{ii}(rd_i) p_{ij}(m) > 0,$$

откуда следует, что $m + n + rd_i$ кратно d_j, а так как

$$p_{jj}(m+n) \geq p_{ji}(n) p_{ij}(m) > 0,$$

то есть $m + n$ кратно d_j, следовательно rd_i кратно d_j для всех $r \geq R_i$, поэтому d_i кратно d_j.

Аналогично можно показать, что d_j кратно d_i, следовательно, выполняется равенство периодов состояний, то есть $d_i = d_j = d$.

Теорема доказана.

Если $d = 1$, то замкнутый класс называется **апериодическим**, или **эргодическим.**

Структура периодического замкнутого класса

Пусть $d > 1$ период замкнутого класса S. Несмотря на сложность переходов внутри класса, можно обнаружить некоторую цикличность в переходах из одной группы состояний в другую. Покажем это.

Выберем некоторое начальное состояние k и определим следующие подклассы:

$$C_0 = \{ j \in S : p_{kj}(n) > 0, n = 0 (\operatorname{mod} d) \},$$

$$C_1 = \{ j \in S : p_{kj}(n) > 0, n = 1 (\operatorname{mod} d) \},$$

....

$$C_{d-1} = \{ j \in S : p_{kj}(n) > 0, n = d-1 (\operatorname{mod} d) \}.$$

Очевидно, что $S = C_0 + C_1 +...+ C_{d-1}$. Покажем, что за один шаг система переходит из подкласса C_p в подкласс C_{p+1}, а из подкласса C_{d-1} в подкласс C_0 и так далее по этому циклу.

Пусть $i \in C_p$ и $p_{ij} > 0$. Покажем, что $j \in C_{p+1}$.

Так как $i \in C_p$, то $p_{ki}(n) > 0$ для $n = p(\bmod d)$. Тогда за число шагов $n + 1 = (p+1)(\bmod d)$ система переходит в класс C_{p+1}, то есть $p_{kj}(n+1) > 0$ и $j \in C_{p+1}$.

Подклассы C_p состояний периодического замкнутого класса S называются **циклическими подклассами.**

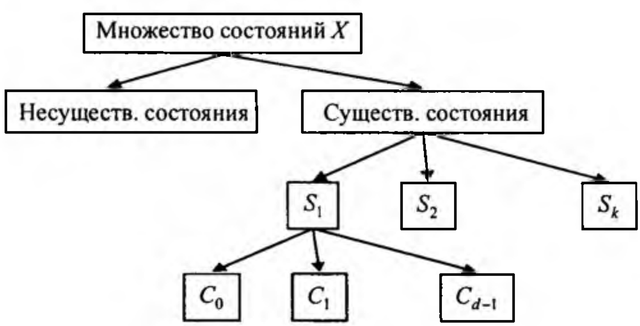
Из приведённых рассуждений видно, что матрицу вероятностей переходов периодического замкнутого класса можно представить в следующем виде:

$$P_S = \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \times & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \times \\ \times & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

в котором элементы матрицы, не равные нулю, отмечены символом $\times$.

Если в начальный момент времени система находится в состоянии подкласса C_0, то в момент времени $n = p + dr$, $r = 0, 1, 2,...$, она будет находиться в подклассе C_p. Следовательно, с каждым подклассом C_p можно связать новую марковскую цепь с матрицей вероятностей переходов $\{p_{ij}(d),\ i, j \in C_p\}$, которая будет неразложимой и апериодической. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении предельных свойств вероятностей $p_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ можно ограничиться только эргодическими классами.

В силу проведённой классификации все состояния марковской цепи можно расположить по следующее схеме:



4.3. Классификация состояний цепи Маркова по асимптотическим свойствам переходных вероятностей

Определим вероятность

$$f_i(n) = P\{\xi(n) = i | \xi(0) = i, \xi(1) \neq i, \ldots, \xi(n-1) \neq i\}$$

первого возвращения в состояние i на n-м шаге, тогда

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n)$$

можно рассматривать как вероятность того, что система, выйдя их состояния i, хотя бы один раз вернётся в него.

Если $f_i = 1$, то состояние i называется **возвратным** и **невозвратным**, если $f_i < 1$.

Теорема (солидарности). Если имеются два сообщающихся состояния и одно из них возвратное, то и второе также возвратное.

Для возвратного состояния i вероятности $f_i(n)$ образуют распределение вероятностей значений n – времени первого возвращения в i-е состояние.

Если i – возвратное состояние и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n) = \infty,$$

то состояние i называется **нулевым**, а если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n) < \infty,$$

то состояние i называется **ненулевым**, или **положительным.**

Теорема (солидарности). Если имеются два сообщающихся состояния и одно из них положительное, то и второе также положительное.

4.4. Эргодические теоремы для цепей Маркова

Теорема (основная эргодическая теорема). Рассмотрим неразложимую, непериодическую, возвратную цепь Маркова со счётным числом состояний, тогда имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ нулевое,} \\ > 0, & \text{если } i \text{ положительное.} \end{cases}$$

При этих же условиях

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ii}(n).$$

Теорема. Для неразложимой, непериодической, возвратной и положительной цепи Маркова со счётным числом состояний существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i,$$

где π_i однозначно определяются условиями: $\pi_i > 0$,

$$\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}, \tag{4.10}$$

$$\sum_i \pi_i = 1. \tag{4.11}$$

Распределение вероятностей π_i называется **финальным**, или **эргодическим,** а цепь Маркова называется **эргодической.**

Равенство (4.10) называется **уравнением Колмогорова для финальных вероятностей** эргодической цепи Маркова, а равенство (4.11) называется условием нормировки для этих вероятностей.

Финальное распределение играет определяющую роль в исследованиях эргодических цепей Маркова.

Теорема (альтернативы). Пусть для марковской цепи со счётным числом состояний существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i,$$

тогда выполняется равенство (4.10), при этом возможна одна из двух альтернатив:

Либо все $\pi_i = 0$, либо $\sum_i \pi_i = 1$.

Если $\sum_i \pi_i = 1$, то набор вероятностей π_i образует единственное **стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова.**

Если $\pi_i = 0$, то не существует стационарного распределения для рассматриваемой цепи Маркова.

Из этой теоремы следует, что стационарное и финальное распределения совпадают.

Таким образом, если цепь Маркова неразложимая, непериодическая, возвратная и положительная, то для неё существует стационарное (финальное) распределение вероятностей, которое можно найти, решив систему уравнений (4.10) – (4.11).

Проверка условий неразложимости и непериодичности цепи Маркова, как правило, достаточно тривиальна, в то время как проверка условий возвратности и положительности вызывает определённые проблемы, которые частично удаётся решить применением следующей теоремы.

Теорема Мустафы. Для того чтобы неразложимая и непериодическая цепь Маркова была эргодической, достаточно существования $\varepsilon > 0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $x(1)$, $x(2)$,..., таких, что

$$\sum_j p_{ij}x(j) \le x(i) - \varepsilon, \quad \forall i \ge i_0,$$

$$\sum_j p_{ij}x(j) < \infty, \quad \forall i < i_0.$$

При этом существует единственное стационарное распределение, которое совпадает с финальным.

Теорема (эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным числом состояний). Для неразложимой непериодической цепи Маркова с конечным числом состояний существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i,$$

не зависящие от j и удовлетворяющие условию нормировки (4.11), а также уравнению (4.10).

Таким образом, для цепей Маркова определены четыре вида распределения вероятностей: эргодическое, финальное, стационарное и произвольное нестационарное или переходное. Три первых, как показано выше, совпадают и определяются системой уравнений (4.10 – 4.11).

Рассмотрим нестационарное распределение

$$P_i(n) = P\{\xi(n) = i\}.$$

Оно определяется рекуррентным соотношением

$$P_i(0) = q_i,$$

$$P_i(n) = \sum_j P_j(n-1)p_{ji}, \tag{4.12}$$

где q_i – заданное начальное распределение вероятностей состояний цепи Маркова.

Если $P_i(n) \equiv \pi_i$ не зависит от момента времени n, то распределение π_i, как было указано выше, называется стационарным. В противном случае распределение вероятностей $P_i(n)$ называется нестационарным или переходным.

Если для однородной цепи Макова существует финальное распределение, то будем говорить, что для этой цепи существует стационарный режим функционирования.

Теорема. Если для однородной цепи Маркова начальное распределение вероятностей q_i совпадает с финальным распределением π_i, то $P_i(n) \equiv \pi_i$.

Доказательство. Так как

$$P_i(0) = \pi_i,$$

а в силу рекуррентного соотношение (4.12) и равенства (4.10) можно записать

$$P_i(n) = \sum_j P_j(n-1)p_{ji} = \sum_j \pi_j p_{ji} = \pi_i ,$$

то, следовательно, выполняется равенство

$$P_i(n) \equiv \pi_i.$$

Теорема доказана.

4.5. Некоторые вероятностно-временные характеристики цепи Маркова

Распределение вероятностей состояний цепи Маркова является наиболее важной её характеристикой. Но также представляют интерес и некоторые другие её характеристики.

Вероятность перехода цепи Маркова из несущественного состояния в замкнутый класс

Обозначим Π_{ik} вероятность перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k. Пусть T – множество несущественных состояний, тогда в силу формулы полной вероятности можно записать

$$\Pi_{ik} = \sum_{j\in T} p_{ij}\Pi_{jk} + \sum_{j\in S_k} p_{ij}P\{j\in S_k\} + \sum_{j\in X\setminus(T+S_k)} p_{ij}P\{j\in S_k\} ,$$

откуда получим равенство

$$\Pi_{ik} = \sum_{j\in T} p_{ij}\Pi_{jk} + \sum_{j\in S_k} p_{ij} ,$$

которое является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений, решение Π_{ik} которой определяет вероятности перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k.

Среднее значение времени перехода цепи Маркова из несущественного состояния в замкнутый класс

Обозначим m_{ik} – среднее значение времени перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k. В силу формулы полной вероятности для условных математических ожиданий можно записать

$$m_{ik} = \sum_{j\in S_k} p_{ij} \times 1 + \sum_{j\in T} p_{ij}(1+m_{jk}) .$$

Здесь единица, фигурирующая в правой части записанного равенства, определяется тем, что необходимо выполнить первый шаг для перехода из состояния i в состояние j. При этом можно сразу попасть в класс S_k, тогда время перехода равно единице. Если этот переход выполняется в несущественное состояние j, тогда суммарное время перехода составляет $1+m_{jk}$, где первое слагаемое, равное единице, определяет первый шаг, а второе m_{jk} – среднее значение времени перехода из состояния j в класс S_k.

Очевидно, что полученное равенство также является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений относительно m_{ik}.

Производящая функции времени выхода из множества несущественных состояний

Пусть $i\in T$, то есть состояние i – несущественное. Рассмотрим время выхода цепи Маркова из этого множества. Обозначим $\tau(n)$ длину интервала от текущего момента времени n до момента выхода цепи Маркова из множества несущественных состояний. Также обозначим

$$g_i(z) = M\left\{z^{\tau(n)} \,|\, \xi(n)=i\right\},$$

где $g_i(z)$ – производящая функция времени перехода из состояния $i\in T$ в любой замкнутый класс S_k. Аналогично вышеизложенному, в силу формулы полной вероятности для условных математических ожиданий, можно записать

$$g_i(z) = M\left\{ z^{\tau(n)} | \xi(n) = i \right\} =$$

$$= \sum_{j\in(X\setminus T)} p_{ij} M\left\{ z^1 | \xi(n+1) = j \right\} + \sum_{j\in T} p_{ij} M\left\{ z^{1+\tau(n+1)} | \xi(n+1) = j \right\} =$$

$$= \sum_{j\in(X\setminus T)} p_{ij} z + \sum_{j\in T} p_{ij} z g_j(z),$$

следовательно, производящая функция $g_i(z)$ определяется решением следующей системы уравнений:

$$g_i(z) = z\left\{ \sum_{j\in(X\setminus T)} p_{ij} + \sum_{j\in T} p_{ij} g_j(z) \right\},$$

из которой дифференцированием нетрудно получить систему уравнений для среднего значения времени выхода цепи Маркова из множества несущественных состояний, а также системы уравнений для статистических моментов более высоких порядков этого времени.

Время перехода из состояния в состояние внутри замкнутого класса

Пусть $i, j \in S$. Обозначим m_{ij} – среднее значение времени перехода из состояния i в состояние j внутри замкнутого класса S. Совершенно аналогично предыдущему запишем

$$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(1 + m_{kj}) = \sum_{k} p_{ik} + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj}. \quad (4.13)$$

Полученная неоднородная система линейных алгебраических уравнений определяет значения m_{ij}.

Систему (4.13) перепишем в виде

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k} p_{ik} m_{kj} - p_{ij} m_{jj}.$$

Домножим уравнения этой системы на π_i и просуммируем их по i, получим равенство

$$\sum_{i} \pi_i m_{ij} = \sum_{i} \pi_i + \sum_{i} \pi_i \sum_{k} p_{ik} m_{kj} - \sum_{i} \pi_i p_{ij} m_{jj} =$$

$$= 1 + \sum_{k} \left\{ \sum_{i} \pi_i p_{ik} \right\} m_{kj} - m_{jj} \sum_{i} \pi_i p_{ij}.$$

Используя (4.10), это равенство можем переписать в виде

$$\sum_i \pi_i m_{ij} = 1 + \sum_k \pi_k m_{kj} - m_{jj}\pi_j ,$$

откуда получим

$$m_{jj} = 1/\pi_j , \tag{4.14}$$

$$\pi_j = 1/m_{jj} . \tag{4.15}$$

Из равенства (4.14) следует, что среднее значение m_{jj} времени возвращения в возвратное состояние j обратно пропорционально финальной вероятности π_j, поэтому для положительных состояний, в которых $\pi_j > 0$, оно конечное, а для нулевых состояний, в которых $\pi_j = 0$, это значение бесконечное.

Распределение вероятностей времени пребывания в j-м состоянии

Обозначим ν_j – время (число тактов) пребывания системы в состоянии j. Достаточно очевидны следующие равенства:

$$P\{\nu_j = 1\} = 1 - p_{jj},$$

$$P\{\nu_j = 2\} = p_{jj}(1 - p_{jj}),$$

$$P\{\nu_j = k\} = p_{jj}^{k-1}(1 - p_{jj}),$$

то есть время пребывания системы в любом состоянии имеет геометрическое распределение с параметром равным p_{jj} – вероятности остаться в этом состоянии на следующем шаге.

Среднее значение времени пребывания в j-м состоянии составляет

$$M\{\nu_j\} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{jj}^{k-1}(1 - p_{jj}) = \frac{1}{1 - p_{jj}} .$$

Статистический смысл стационарных (финальных) вероятностей

Обозначим T_j – среднее число шагов от момента выхода из j-го состояния до момента возвращения цепи Маркова в это состояние, тогда по формуле полной вероятности можно записать

$$m_{jj} = 1 \cdot p_{jj} + (1 - p_{jj})(1 + T_j) = 1 + (1 - p_{jj})T_j ,$$

тогда, равенство (4.15) перепишем следующим образом:

$$\pi_j = \frac{1}{m_{jj}} = \frac{1}{1+(1-p_{jj})T_j} = \frac{1/(1-p_{jj})}{1/(1-p_{jj})+T_j} = \frac{M\{\nu_j\}}{M\{\nu_j\}+T_j}.$$

Здесь числитель равен среднему значению времени, проведённому системой в j-м состоянии, а знаменатель равен сумме этого значения и среднего значения длины интервала от момента выхода цепи из j-го состояния до момента возвращения в него. Следовательно, стационарные (финальные) вероятности для цепи Маркова можно интерпретировать как среднее значение доли времени, проведённого цепью в j-м состоянии.

Глава 5

ЦЕПИ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

5.1. Определение и основные свойства цепи Маркова с непрерывным временем

Продолжая изучение марковских процессов, рассмотрим цепи Маркова с непрерывным временем.

Процесс $\xi(t)$ называется **цепью Маркова с непрерывным временем**, если для любых моментов времени $s' < s < t \in T$ и любых значений $i', i, j \in X$ процесса $\xi(t)$, выполняется условие

$$P\{\xi(t) = j | \xi(s) = i, \xi(s') = i'\} = P\{\xi(t) = j | \xi(s) = i\} = p_{ij}(s,t). \quad (5.1)$$

Здесь $p_{ij}(s,t)$ – вероятность перехода из i-го состояния в j-е за промежуток времени $[s,t]$.

Если вероятность $p_{ij}(s,t)$ зависит лишь от разности моментов времени

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(\tau),$$

то цепь Маркова называется **однородной.**

Однородные цепи Маркова полностью определяются матрицей вероятностей переходов $P(t) = \{p_{ij}(t)\}$ и начальным распределением $q_i = P\{\xi(0) = i\}$. Действительно, применяя формулу полной вероятности, можно определить вероятности состояний в любой момент времени:

$$P_j(t) = \sum_i q_i p_{ij}(t).$$

Отметим свойства переходных вероятностей:

1. $p_{ij}(t) \geq 0$;
2. $\sum_j p_{ij}(t) = 1$;
3. **Уравнение Чепмена – Колмогорова** для однородных цепей Маркова с непрерывным временем

$$p_{ij}(s+t)=\sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)\,, \tag{5.2}$$

для неоднородных аналогично

$$p_{ij}(s,t)=\sum_k p_{ik}(s,s')p_{kj}(s',t), \quad \forall s<s'<t\,; \tag{5.3}$$

4. Условие стохастической непрерывности цепи Маркова

$$\lim_{\tau\to 0} p_{ij}(\tau)=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Это условие означает, что с вероятностью единица система (процесс) не изменит своего состояния за бесконечно малый промежуток времени $\tau\to 0$. Следует отметить, что стохастическая непрерывность не означает непрерывности реализаций случайного процесса. Это тем более очевидно в данном случае, так как множество значений цепи Маркова дискретно, то есть реализации разрывны, тем не менее, условие стохастической непрерывности выполнено. Происходит это потому, что разрывы каждой реализации цепи Маркова реализуются в случайные моменты времени и вероятность того, что разрыв произойдёт именно в данной точке t, равна нулю.

Сформулируем и докажем несколько теорем относительно вероятностей $p_{ij}(t)$.

Теорема 1. Для однородной цепи Маркова вероятности $p_{ij}(t)$ непрерывны по t.

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{h\to 0} p_{ij}(t+h)=\lim_{h\to 0}\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(h)=\sum_k p_{ik}(t)\lim_{h\to 0} p_{kj}(h)=p_{ij}(t)\,,$$

то есть $p_{ij}(t)$ непрерывны справа.

С другой стороны,

$$p_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(t-h)p_{kj}(h)\,.$$

Выполнив в этом равенстве предельный переход при $h\to 0$, получим

$$p_{ij}(t)=\lim_{h\to 0}\sum_k p_{ik}(t-h)p_{kj}(h)=\sum_k \lim_{h\to 0} p_{ik}(t-h)\lim_{h\to 0} p_{kj}(h)=\lim_{h\to 0} p_{ij}(t-h)\,,$$

то есть $p_{ij}(t)$ непрерывны слева, следовательно, они непрерывны.

Теорема доказана.

Теорема 2. Для $\forall i \in X$, $t > 0$ вероятность $p_{ii}(t) > 0$.

Доказательство. В силу стохастической непрерывности найдём такое $h > 0$, что для $\forall t \le h$ выполняется неравенство $p_{ii}(t) > 0$.

Пусть t произвольно. Всегда можно найти такое n, что $t/n \le h$, тогда

$$p_{ii}(t) = \sum_{\{k_\nu;\nu=1,2,\cdots,n\}} p_{ik_1}\left(\frac{t}{n}\right) p_{k_1k_2}\left(\frac{t}{n}\right) \cdots p_{k_ni}\left(\frac{t}{n}\right) \ge \left(p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если для некоторого t_0 выполняется неравенство $p_{ij}(t_0) > 0$, то и для всех $t \ge t_0$ аналогично $p_{ij}(t) > 0$.

Доказательство. Это утверждение очевидно следует из уравнения Чепмена – Колмогорова

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t - t_0) p_{kj}(t_0) \ge p_{ii}(t - t_0) p_{ij}(t_0) > 0,$$

причём строгое неравенство следует из теоремы 2.

Теорема 4. Для цепи Маркова с непрерывным временем существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} = q_{ii}(t) < 0,$$

хотя он и может быть бесконечным.

Теорема 5. Для цепи Маркова с непрерывным временем существует и конечен предел:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = q_{ij}(t) \ge 0, \quad i \ne j.$$

Величины $q_{ij}(t)$ имеют смысл интенсивности вероятности перехода из состояния i в состояние j. Эти величины называются **инфинитезимальными характеристиками** цепи Маркова с непрерывным временем.

Из определения инфинитезимальных характеристик следует, что выполняются равенства

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad i \ne j$$

$$p_{ii}(t, t + \Delta t) = 1 + q_{ii}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\sum_j q_{ij}(t) = 0. \tag{5.4}$$

5.2. Дифференциальные уравнения Колмогорова

Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова

Матрица $Q(t)$ инфинитезимальных характеристик $q_{ij}(t)$, $i, j \in X$ позволяет найти вероятности $p_{ij}(s,t)$ для любых $s < t$. Рассмотрим уравнение Чепмена – Колмогорова

$$p_{ij}(s-\Delta s,t)=\sum_k p_{ik}(s-\Delta s,s)p_{kj}(s,t).$$

Вычитая из обеих частей этого уравнения $p_{ij}(s,t)$ и деля на Δs, получим

$$\frac{1}{\Delta s}\left\{ p_{ij}(s-\Delta s,t)-p_{ij}(s,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Delta s}\left\{\sum_{k\neq i} p_{ik}(s-\Delta s,s)p_{kj}(s,t)+\left(p_{ii}(s-\Delta s,s)-1\right)p_{ij}(s,t)\right\}.$$

Выполнив здесь предельный переход при $\Delta s \to 0$, запишем

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s}=\sum_k q_{ik}(s,t)p_{kj}(s,t). \qquad (5.5)$$

Эта система уравнений называется **обратной системой дифференциальных уравнений Колмогорова.**

Для однородных цепей Маркова она примет вид

$$\frac{dp_{ij}(\tau)}{d\tau}=\sum_k q_{ik}p_{kj}(\tau). \qquad (5.6)$$

Совместно с начальными условиями

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \qquad (5.7)$$

система уравнений (5.6) однозначно определяет вероятности переходов однородной цепи Маркова.

Для неоднородных цепей Маркова краевые условия для системы (5.5) заданы на правой границе $s = t$ области изменения переменной s и определяются условием стохастической непрерывности процесса аналогично (5.7) в виде

$$p_{ij}(t,t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Обратная система уравнений применяется, главным образом, для нахождения значений функционалов от цепей Маркова следующего вида:

$$u(i,s) = M\{f(\xi(t))|\xi(s)=i\} = \sum_j f(j)p_{ij}(s,t).$$

Домножив уравнения системы (5.5) на $f(j)$ и суммируя их по j, получим равенство

$$-\frac{du(i,s)}{ds} = \sum_k q_{ik}(s)u(k,s),$$

которое является системой дифференциальных уравнений относительно значений функционала $u(i,s)$.

Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обратимся вновь к уравнению Чепмена – Колмогорова

$$p_{ij}(s,t+\Delta t) = \sum_k p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,t+\Delta t).$$

Выполнив преобразования, аналогичные предыдущим, нетрудно получить систему

$$\frac{dp_{ij}(s,t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(s,t)q_{kj}(t), \tag{5.8}$$

которая называется **прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова.** Для однородных цепей Маркова прямая система уравнений имеет вид

$$\frac{dp_{ij}(\tau)}{d\tau} = \sum_k p_{ik}(\tau)q_{kj}. \tag{5.9}$$

Если к этой системе добавить начальные условия (5.7), то переходные вероятности $p_{ij}(t)$ определяются однозначно. Если число состояний системы конечно, то решение прямой и обратной систем уравнений совпадают.

Для неоднородных цепей Маркова для системы (5.8) краевые условия заданы на левой границе области изменения переменной t и определяются условием стохастической непрерывности цепи Маркова в виде

$$p_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Прямую систему уравнений можно применять для нахождения распределения вероятностей $P_j(t) = P\{\xi(t) = j\}$ состояний системы. Пусть

$$q_i(s) = P\{\xi(s) = i\}$$

– начальное распределение вероятностей значений цепи Маркова в момент времени s, тогда по формуле полной вероятности запишем

$$P_j(t) = \sum_i q(i,s) p_{ij}(s,t),$$

поэтому, домножая уравнения системы (5.8) на $q_i(s)$ и суммируя их по i, получим равенства

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_i P_i(t) q_{ij}(t),$$

которые являются системой дифференциальных уравнений относительно вероятностей $P_i(t)$ значений цепи Маркова. Для этой системы начальные условия, определяемые в момент времени s, имеют вид

$$P_i(s) = q_i(s),$$

где $q_i(s)$ – заданное распределение вероятностей.

5.3. Финальные вероятности

Можно показать, что для однородной неразложимой цепи Маркова с конечным числом состояний существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \forall j,$$

не зависящий от i, который называется **финальной вероятностью** j-го состояния, а их совокупность **финальным распределением.**

Доказано, что в этих условиях существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = 0,$$

поэтому при $t \to \infty$ систему (5.9) можно записать в виде

$$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0. \tag{5.10}$$

Естественно, что финальное распределение удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_i \pi_i = 1. \tag{5.11}$$

Система уравнений (5.10) совместно с условием нормировки (5.11) однозначно определяют финальное распределение вероятностей.

Если вероятности состояний не зависят от t, то есть $P_j(t) \equiv P_j$, то P_j называются **стационарными вероятностями**, а их совокупность **стационарным распределением**.

Из прямой системы уравнений для стационарных вероятностей получим, что стационарное распределение определяется системой уравнений

$$\sum_i P_i q_{ij} = 0$$

и условием нормировки $$\sum_i P_i = 1,$$

совпадающими с системой (5.10) и условием (5.11); следовательно стационарное и финальное распределения совпадают.

Если для однородной цепи Маркова для системы дифференциальных уравнений в качестве начального распределения $q_i(s)$ выбрать финальное π_i, то решение $P_i(t)$ этой системы совпадает с финальным распределением, то есть для любых $t \geq s$ выполняется равенство

$$P_i(t) \equiv \pi_i.$$

5.4. Время перехода из одного состояния в другое для цепей Маркова с непрерывным временем

Пусть $T_j(t)$ – длина интервала от текущего момента t до момента попадания цепи Маркова с непрерывным временем в j-е состояние.

Обозначим $\forall i \neq j$

$$T_{ij} = M\left\{T_j(t) | \xi(t) = i\right\}.$$

Из определения (5.4) инфинитезимальных характеристик и по формуле полной вероятности можно записать

$$T_{ij} = (1 + q_{ii}\Delta t)\left(\Delta t + T_{ij}\right) + \sum_{k \neq i, j} q_{ik}\Delta t T_{kj} + o(\Delta t) =$$

$$= \Delta t + T_{ij} + \sum_{k \neq j} q_{ik}\Delta t T_{kj} + o(\Delta t),$$

откуда, выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$1 + \sum_{k \neq j} q_{ik} T_{kj} = 0, \qquad (5.12)$$

которое является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений, определяющей среднее значение T_{ij} времени перехода из i-го в j-е состояние.

Если $i=j$, то, естественно, $T_{jj}=0$, поэтому при $i=j$ определим $T_{jj}(t)$ как длину интервала от текущего момента времени t, когда $\xi(t)=j$, до момента попадания цепи Маркова в состояние j после выхода цепи из этого состояния. Тогда обозначив

$$T_{jj}=M\left\{T_{jj}(t)|\xi(t)=j\right\},$$

по формуле полной вероятности получим равенство

$$T_{jj}=\left(1+q_{jj}\Delta t\right)\left(\Delta t+T_{jj}\right)+\sum_{k\neq j}q_{jk}\Delta tT_{kj}+o(\Delta t)=$$

$$=\Delta t+T_{jj}+q_{jj}\Delta tT_{jj}+\sum_{k\neq j}q_{jk}\Delta tT_{kj}+o(\Delta t),$$

выполнив в котором несложные преобразования, запишем

$$1+q_{jj}T_{jj}+\sum_{k\neq j}q_{jk}T_{kj}=0\,. \qquad (5.13)$$

Здесь T_{kj} определяются системой (5.12), поэтому полученное равенство (5.13) однозначно определяет значение величины T_{jj}.

Статистический смысл финальных (стационарных) вероятностей

Уравнение (5.13) домножим на π_j, а уравнения системы (5.12) на π_i для всех $i\neq j$ и просуммируем полученные равенства, запишем

$$1+\sum_{i}\pi_i\sum_{k\neq j}q_{ik}T_{kj}+\pi_jq_{jj}T_{jj}=1+\sum_{k\neq j}\left\{\sum_{i}\pi_iq_{ik}\right\}T_{kj}+\pi_jq_{jj}T_{jj}=0\,.$$

Полученное равенство, в силу (5.10), перепишем в виде

$$1+\pi_jq_{jj}T_{jj}=0\,.$$

Следовательно,

$$\pi_j=-\frac{1}{q_{jj}T_{jj}}=\frac{-1/q_{jj}}{T_{jj}}\,. \qquad (5.14)$$

Здесь величина $-1/q_{jj}>0$, её смысл определим ниже, а величина T_{jj} – среднее значение длины интервала от текущего момента времени, когда цепь Маркова находится в состоянии j до момента следующего её попадания в это состояние после выхода из него, следовательно, T_{jj} равна сумме среднего значения остаточного времени пребывания цепи Маркова в j-м состоянии и среднего значения T_j – длины интервала от момента выхода цепи Маркова из этого состояния до момента возвращения в это состояние.

Время пребывания цепи Маркова в *j*-м состоянии

Пусть величина τ_j – остаточное время пребывания цепи Маркова в j-м состоянии. Обозначим её закон распределения $B_j(x) = P\{\tau_j \geq x\}$, тогда, используя марковское свойство цепи, можно записать равенство

$$B_j(x+\Delta x) = p_{jj}(\Delta x)B_j(x) =$$

$$= \left\{1 + q_{jj}\Delta x\right\} B_j(x) + o(\Delta x) = B_j(x) + q_{jj}\Delta x B_{jj}(x) + o(\Delta x),$$

выполнив в котором несложные преобразования, получим уравнение

$$B'_j(x) = q_{jj}B_j(x),$$

определяющее вид функции $B_j(x)$.

Из полученного дифференциального уравнения следует, что

$$B_j(x) = \exp\left\{q_{jj}x\right\},$$

следовательно, величина τ_j имеет экспоненциальное распределение с параметром $-q_{jj}$. В силу свойства отсутствия последействия экспоненциального распределения, полное (не остаточное) время пребывания цепи Маркова в j-м состоянии также имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром $-q_{jj}$. Среднее значение этого времени составляет $-1/q_{jj}$.

Таким образом, равенство (5.14) можно переписать в виде

$$\pi_j = \frac{-1/q_{jj}}{-1/q_{jj} + T_j},$$

следовательно, финальная (стационарная) вероятность π_j равна отношению среднего значения времени пребывания цепи Маркова в j-м состоянии к сумме этого значения и среднего значения T_j – времени возвращения в это состояние, **то есть вероятность π_j имеет смысл доли времени, проведённого цепью в состоянии j.**

5.5. Процесс размножения и гибели

Процессом размножения и гибели называется однородная цепь Маркова с непрерывным временем, принимающая значение $i = 0, 1, 2,...$, для которой за время Δt возможны переходы из состояния i лишь в соседние состояния: $i - 1$ и $i + 1$, то есть для инфинитезимальных характеристик которой выполнены следующие условия:

$$q_{ii-1} \ge 0, \quad q_{ii+1} \ge 0, \quad q_{ii} = -(q_{ii-1} + q_{ii+1}) < 0, \quad q_{ij} = 0 \quad \forall j \ne i-1, i, i+1,$$

$$q_{01} > 0, \; q_{00} = -q_{01} < 0.$$

Такие процессы достаточно адекватны многим реальным процессам в биологии, физике, социологии, демографии, экономике, теории массового обслуживания.

Для удобства обозначим

$$q_{ii-1} = \mu_i, \quad q_{ii+1} = \lambda_i,$$

тогда можно записать

$$p_{ii+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \qquad p_{ii-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t).$$

Если значение процесса интерпретировать как число заявок в некоторой системе массового обслуживания, то $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ есть вероятность поступления новой заявки в систему с i заявками, а $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ – вероятность окончания обслуживания заявки и её ухода из системы за время Δt.

Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса гибели и размножения имеют вид

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = p_{ij-1}(t)\lambda_{j-1} - p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{ij+1}(t)\mu_{j+1}, \tag{5.15}$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_i p_{i+1j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \mu_i p_{i-1j}(t). \tag{5.16}$$

Найдём стационарное распределение вероятностей значений процесса гибели и размножения.

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей π_j в этом случае примет вид

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\left(\lambda_j + \mu_j\right) + \pi_{j+1}\mu_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, \tag{5.17}$$

$$-\pi_0\lambda_0 + \pi_1\mu_1 = 0, \tag{5.18}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1. \tag{5.19}$$

Метод Хинчина

Применяя метод Хинчина, обозначим

$$z_j = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j,$$

тогда из (5.18) получим $z_1 = 0$, а из (5.17) запишем $z_j = z_{j+1}$, следовательно, $\forall j = 1, 2, \cdots$ имеет место равенство $\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j = 0$, откуда получим

$$\pi_j = \pi_{j-1}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = \pi_0\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j} = \pi_0\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

Вероятность π_0 найдём из условия нормировки (5.19):

$$\pi_0\left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\} = 1,$$

откуда получим

$$\pi_0 = 1\Big/\left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\} = \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}.$$

Здесь возможны два случая, связанные со сходимостью ряда:

1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$,

тогда стационарные вероятности существуют и равны

$$\pi_j = \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

2) $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}=\infty$,

тогда не существует стационарного распределения для рассматриваемого процесса гибели и размножения.

Процесс чистого размножения

Далее рассмотрим процесс чистого размножения, когда все $\mu_j = 0$. Для $n > i$ найдём T_{in}. Система (5.12) в этом случае имеет вид

$$1-\lambda_i T_{in}+\lambda_i T_{i+1,n}=0\,,$$

откуда получим

$$T_{in}=T_{i+1,n}+\frac{1}{\lambda_i}=\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_{i+1}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n-1}}=\sum_{k=i}^{n-1}\lambda_k\,.$$

Рассмотрим среднее значение времени перехода процесса чистого размножения в состояние с бесконечно большим номером, то есть

$$\lim_{n\to\infty}T_{in}=\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\,.$$

Здесь также возможны два случая, связанные со сходимостью ряда.

1) Если ряд $\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$ расходится, то это означает, что в состояние с бесконечно большим номером система перейдёт за бесконечно большое время. Этот случай вполне естественный.

2) Если же ряд $\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}<\infty$, то это соответствует тому, что система за конечное время переходит в состояние с бесконечно большим номером. В физике это соответствует неуправляемой цепной реакции (взрыву), а для биологических систем – явлению эпидемии.

5.6. Простейший поток и пуассоновский процесс

Случайным потоком однородных событий будем называть ось времени, на которой в случайные моменты возникают некоторые однородные (одинаковые) события.

Обозначим $m(t)$ – число событий, наступивших на интервале времени $[0,t)$, то есть за время t. И пусть для этого процесса выполнены следующие условия.

1) **Отсутствие последействия.** Число событий, наступивших на некотором интервале времени не зависит от числа событий, наступивших на других, не пересекающихся с ним интервалах, то есть процесс $m(t)$ является цепью Маркова, точнее процессом с независимыми приращениями.

2) **Стационарность потока.** Число событий, наступивших на интервале $[s,t)$, не зависит от положения этого интервала на оси времени и от значения $m(s)$ процесса $m(t)$ в момент времени $t = s$, а определяется лишь длиной $t - s$ рассматриваемого интервала времени.

Отметим, что из стационарности потока не следует стационарность случайного процесса $m(t)$, более того, этот процесс нестационарный.

3) **Ординарность потока.** Пусть $p_k(\Delta t)$ – вероятность того, что на интервале длины Δt наступит k событий. Эти вероятности определяются равенствами

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_k(\Delta t) = o(\Delta t), \quad \forall k > 1.$$

Другими словами, ординарность предполагает, что за время $\Delta t \to 0$ может наступить не более одного события, следовательно, реализации процесса $m(t)$ изменяются скачком на единицу.

Случайный поток однородных событий, удовлетворяющий всем трём свойствам: стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется **простейшим**, или **стационарным пуассоновским.**

Величина λ называется **параметром**, или **интенсивностью**, потока.

Рассмотрим процесс $m(t)$, который называется **пуассоновским** и является цепью Маркова с непрерывным временем, точнее, процессом чистого размножения. Для вероятностей

$$P_m(t) = P\{m(t) = m\}$$

система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$
$$P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t), \quad \forall m > 0.$$

Метод производящих функций

Для решения этой системы дифференциально-разностных уравнений воспользуемся методом производящих функций, обозначив

$$G(z,t)=\sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t),$$

систему уравнений Колмогорова перепишем в виде уравнения

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t}=-\lambda G(z,t)+\lambda z G(z,t)=\lambda(z-1)G(z,t).$$

Дополнив его начальным условием

$$G(z,0)=1,$$

решение $G(z,t)$ запишем в виде

$$G(z,t)=\exp\{\lambda(z-1)t\}=e^{-\lambda t}e^{z\lambda t}=\sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t},$$

откуда получим, что вероятности $P_m(t)$ имеют вид

$$P_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\exp\{-\lambda t\},$$

то есть вид пуассоновского распределения с параметром λt, что оправдывает название рассматриваемых потока и соответствующего случайного процесса.

Из свойств цепей Маркова с непрерывным временем следует, что время пребывания процесса $m(t)$ в каждом состоянии экспоненциальное с одним и тем же параметром λ, следовательно, длины интервалов между моментами наступления событий в простейшем потоке имеют то же самое экспоненциальное распределение с параметром λ.

Как уже было отмечено выше, модели простейшего потока и пуассоновского процесса имеют весьма широкую область применения для исследования реальных систем в различных предметных областях.

Глава 6

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Обобщением цепей Маркова с непрерывным временем являются полумарковские случайные процессы. Для того чтобы определить полумарковский процесс, рассмотрим альтернативный подход к описанию цепей Маркова с непрерывным временем.

6.1. Вложенные цепи Маркова

Рассмотрим однородную цепь Маркова $\xi(t)$ с непрерывным временем t, определяемую матрицей инфинитезимальных характеристик $q_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$, а также $q_{ii} = -\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} < 0$.

Пусть t_n – последовательность моментов времени, в которые происходят изменения состояний цепи Маркова $\xi(t)$. Будем полагать, что рассматриваемая цепь непрерывна справа, то есть

$$\xi(t_n + 0) = \xi(t_n).$$

На интервале $[t_n, t_{n+1})$ цепь Маркова $\xi(t)$ сохраняет постоянное значение, которое она приняла в момент времени t_n и которое изменится в момент времени t_{n+1}.

Выше было показано, что

$$B_i(x) = P\{\, t_{n+1} - t_n \geq x | \xi(t_n) = i \} = \exp\{\, q_{ii} x \},$$

то есть время пребывания однородной цепи Маркова в i-м состоянии имеет экспоненциальное распределение с параметром $-q_{ii}$.

Рассмотрим процесс с дискретным временем

$$\eta(n) = \xi(t_n).$$

Множество состояний этого процесса совпадает с множеством состояний для цепи $\xi(t)$. В силу марковского свойства цепи $\xi(t)$ процесс $\eta(n)$ является также марковским, точнее, цепью Маркова с дискретным временем по моментам t_n – изменения значений цепи $\xi(t)$, поэтому процесс $\eta(n)$ называют **вложенной цепью Маркова**.

Для цепи Маркова $\eta(n)$ с дискретным временем найдём одношаговые вероятности переходов

$$p_{ij} = P\{\eta(n+1) = j \,|\, \eta(n) = i\}.$$

Очевидно, что

$$p_{ii} = 0.$$

Пусть $i \neq j$, тогда можно записать

$$p_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} P\{\xi(t+\Delta t) = j \,|\, \xi(t) = i, \xi(t) \neq \xi(t+\Delta t)\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{\xi(t+\Delta t) = j, \xi(t) = i, \xi(t) \neq \xi(t+\Delta t)\}}{P\{\xi(t+\Delta t) \neq \xi(t), \xi(t) = i\}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{\xi(t+\Delta t) = j, \xi(t) = i\}}{P\{\xi(t+\Delta t) \neq \xi(t), \xi(t) = i\}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{\xi(t+\Delta t) = j \,|\, \xi(t) = i\} P\{\xi(t) = i\}}{P\{\xi(t+\Delta t) \neq \xi(t) \,|\, \xi(t) = i\} P\{\xi(t) = i\}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)}{-q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}.$$

Следовательно, переходные вероятности p_{ij} имеют вид

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ q_{ij} / (-q_{ii}), & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{6.1}$$

Таким образом, однородную цепь Маркова с непрерывным временем можно определить, задав её вложенную цепь Маркова, то есть задав марковскую (стохастическую) матрицу одношаговых вероятностей переходов p_{ij} и задав набор параметров $-q_{ii} > 0$, экспоненциально распределённых случайных величин, определяющих времена пребывания процесса $\xi(t)$ в i-х состояниях для всех возможных состояний i.

6.2. Определение полумарковского процесса

Рассмотрим дискретный случайный процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем, принимающий значения $\xi(t) = 1, 2, \ldots$ из конечного или счётного множества состояний.

Процесс $\xi(t)$ называется **полумарковским**, если закон изменения во времени его состояний определяется **полумарковской матрицей вероятностей переходов** с элементами

$$A_{ij}(x) = P\{\xi(t_{n+1}) = j, t_{n+1} - t_n < x | \xi(t_n) = i\}.$$

Вложенная по моментам t_n цепь $\eta(n) = \xi(t_n)$ является марковской с дискретным временем и вероятностями переходов

$$p_{ij} = A_{ij}(\infty).$$

Функции

$$A_i(x) = \sum_j A_{ij}(x) = P\{ t_{n+1} - t_n < x | \xi(t_n) = i\}$$

имеют смысл условных функций распределения времени пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии i.

Для того чтобы определить полумарковский процесс достаточно задать полумарковскую матрицу с элементами $A_{ij}(x)$ и начальное распределение $q_i(x)$.

В общем случае

$$A_{ij}(x) \neq A_{ij}(\infty)\sum_j A_{ij}(x) = p_{ij}A_i(x).$$

Если выполняется равенство

$$A_{ij}(x) = A_{ij}(\infty)\sum_j A_{ij}(x) = p_{ij}A_i(x),$$

то полумарковский процесс называется **процессом марковского восстановления.**

В частности, цепь Маркова с непрерывным временем является процессом марковского восстановления.

Исследование полумарковских процессов $\xi(t)$ выполняется либо методом вложенных цепей Маркова, либо методом дополнительной переменной, когда определяется дополнительная переменная $y(t)$, равная длине интервала от момента предыдущего изменения состояния процесса $\xi(t)$ до текущего момента времени t, тогда двумерный процесс $\{\eta(n), y(t)\}$ является марковским.

Для процессов марковского восстановления удобнее пользоваться дополнительной переменой $z(t)$, равной длине интервала от текущего момента времени t до момента следующего изменения состояния процесса $\xi(t)$. И в этом случае двумерный процесс $\{\eta(n), z(t)\}$ также является марковским, что позволяет для исследования полумарковских процессов применять теорию марковских процессов.

Глава 7

ДИФФУЗИОННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

7.1. Непрерывные марковские процессы

Рассмотрим ещё один класс марковских процессов, который характеризуется тем, что не только время, но и множество состояний этих процессов непрерывно. Такие процессы образуют класс непрерывных марковских процессов, являющихся достаточно адекватными моделями многих реальных процессов.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется **непрерывным марковским**, если для любых моментов времени $s' < s < t \in T$ и любых действительных y выполнено равенство

$$P\{\,\xi(t) < y | \xi(s) = x, \xi(s') = z\} = P\{\,\xi(t) < y | \xi(s) = x\} = F(s, x; t, y)\,. \quad (7.1)$$

Условная функция распределения $F(s,x;\, t,y)$ называется **марковской переходной функцией.**

Задание этой функции и начального распределения вероятностей состояний полностью определяет марковский процесс. Если существует производная

$$\frac{\partial F(s,x;t,y)}{\partial y} = p(s,x;t,y)\,,$$

которая называется плотностью вероятностей переходов, то для марковской переходной функции можно записать

$$F(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{y} p(s,x;t,u)du\,.$$

Очевидно, что марковская переходная функция удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых s, x, t марковская переходная функция по y является функцией распределения, то есть

$$F(s,x;t,y) \geq 0, \quad \forall y; \tag{7.2}$$

$$\lim_{y\to\infty} F(s,x;t,y) = 1; \tag{7.3}$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(s,x;t,y) = 0. \tag{7.4}$$

2. Для любых $s < u < t$ марковская переходная функция удовлетворяет уравнению Чепмена – Колмогорова

$$F(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u,z;t,y) d_z F(s,x;u,z) \tag{7.5}$$

или
$$p(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x;u,z) p(u,z;t,y) dz. \tag{7.6}$$

3. Марковская переходная функция удовлетворяет условию стохастической непрерывности

$$\lim_{t\to s+0} F(s,x;t,y) = \begin{cases} 0, & y \leq x, \\ 1, & y > x. \end{cases}$$

Это условие требует, чтобы при достаточно малом времени функционирования процесса его вероятностная мера была сосредоточена около точки, из которой стартует процесс.

Если марковская переходная функция по времени зависит только от разности моментов времени $t-s$, то процесс называется **однородным марковским процессом**

$$F(s,x;t,y) = F(x,t-s,y) = F(x,\tau,y).$$

Для однородного марковского процесса уравнение Чепмена – Колмогорова примет вид

$$F(x,s+t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z,t,y) d_z F(x,s,z)$$

или для плотности вероятностей переходов

$$p(x,s+t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,s,z) p(z,t,y) dz.$$

7.2. Определение диффузионного случайного процесса

Среди непрерывных марковских процессов наиболее важную роль играют так называемые **диффузионные случайные процессы.** Это название оправдано тем, что процессы этого класса являются достаточно адекватными математическими моделями движения частиц в процессах диффузии. Кроме того, они могут быть использованы как предельные модели для случайных процессов с дискретным множеством состояний, описывающих явления в биологии, социологии, демографии, теории массового обслуживания.

Непрерывный марковский процесс называется **диффузионным**, если его марковская переходная функция удовлетворяет следующим условиям.

1. Для $\forall\varepsilon > 0$ и любых x равномерно по $s < t$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|>\varepsilon} d_yF(s,x;t,y)=0\,. \tag{7.7}$$

Это условие требует, чтобы вероятность того, что $|\xi(t)-\xi(s)|>\varepsilon$, была бы величиной бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $|t-s|$ при $t\to s$.

2. Существуют функции $a(s,x)$ и $b(s,x)$ такие, что

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\le\varepsilon}(y-x)d_yF(s,x;t,y)=a(s,x)\,; \tag{7.8}$$

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\le\varepsilon}(y-x)^2d_yF(s,x;t,y)=b(s,x)\,. \tag{7.9}$$

Здесь функция $a(s,x)$ называется **коэффициентом переноса**, а функция $b(s,x)$ – **коэффициентом диффузии.**

3. Для любых $k > 2$

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\le\varepsilon}(y-x)^k d_yF(s,x;t,y)=0\,.$$

Для однородных диффузионных процессов коэффициенты переноса и диффузии не зависят от времени s, то есть имеют вид

$$a(s,x)=a(x),\quad b(s,x)=b(x)\,.$$

При выполнении некоторых ограничений эти коэффициенты полностью определяют рассматриваемый диффузионный процесс. Сформулируем эти ограничения при выводе **прямого** и **обратного уравнений Колмогорова**.

7.3. Обратное уравнение Колмогорова

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная функция, такая, что

$$u(s,x) = M\{\,\varphi(\xi(t))|\xi(s)=x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)d_y F(s,x;t,y)$$

имеет ограниченные непрерывные производные по x первого и второго порядка, а коэффициенты переноса $a(s,x)$ и диффузии $b(s,x)$ являются непрерывными функциями своих аргументов. Тогда $u(s,x)$ дифференцируема по s и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}, \tag{7.10}$$

а также краевому условию

$$\lim_{t\to s} u(s,x) = \varphi(x). \tag{7.11}$$

Доказательство. Краевое условие (7.11) очевидно следует из условия стохастической непрерывности марковской переходной функции $F(s,x;\,t,y)$ и свойств интеграла Стилтьеса. Действительно,

$$\lim_{t\to s} u(s,x) = \lim_{t\to s}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)d_y F(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)d_y \lim_{t\to s} F(s,x;t,y) = \varphi(x).$$

Для вывода уравнения (7.10) применим формулу полной вероятности для условных математических ожиданий

$$u(s-\Delta s,x) = M\{\,\varphi(\xi(t))|\xi(s-\Delta s)=x\} =$$

$$= M_z\{M[\,\varphi(\xi(t)|\xi(s)=z,\xi(s-\Delta s)=x]|\xi(s-\Delta s)=x\} =$$

$$= M_z\{M[\,\varphi(\xi(t))|\xi(s)=z]|\xi(s-\Delta s)=x\} = M_z\{u(s,z)|\xi(s-\Delta s)=x\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(s,z)d_z F(s-\Delta s,x;s,z).$$

Откуда получим равенство

$$u(s-\Delta s,x)=\int_{-\infty}^{\infty}u(s,z)d_zF(s-\Delta s,x;s,z),$$

вычитая из левой и правой частей которого $u(s,x)$ и деля обе части на Δs, запишем

$$\frac{u(s-\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=$$

$$=\frac{1}{\Delta s}\int_{-\infty}^{\infty}\{u(s,z)-u(s,x)\}d_zF(s-\Delta s,x;s,z)=$$

$$=\frac{1}{\Delta s}\int_{|z-x|\le\varepsilon}\{u(s,z)-u(s,x)\}d_zF(s-\Delta s,x;s,z)+$$

$$+\frac{1}{\Delta s}\int_{|z-x|>\varepsilon}\{u(s,z)-u(s,x)\}d_zF(s-\Delta s,x;s,z). \qquad (7.12)$$

В силу ограниченности функции $u(s,x)$ и свойства 1 определения диффузионного процесса второй интеграл является бесконечно малой величиной $o(\Delta s)$. В первом интеграле разность $u(s,z)-u(s,x)$ запишем в виде

$$u(s,z)-u(s,x)=(z-x)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x}+\frac{(z-x)^2}{2}\frac{\partial^2u(s,x)}{\partial x^2}+O\left((z-x)^3\right), \qquad (7.13)$$

тогда, подставляя (7.13) в равенство (7.12) и принимая во внимание свойство 3 диффузионных процессов, равенство (7.12) запишем в виде

$$\frac{u(s-\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=\frac{1}{\Delta s}\int_{|z-x|\le\varepsilon}(z-x)d_zF(s-\Delta s,x;s,z)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x}+$$

$$+\frac{1}{\Delta s}\int_{|z-x|\le\varepsilon}(z-x)^2d_zF(s-\Delta s,x;s,z)\frac{1}{2}\frac{\partial^2u(s,x)}{\partial x^2}+\frac{o(\Delta s)}{\Delta s}. \qquad (7.14)$$

При $\Delta s\to 0$, в силу определения (7.8) и (7.9) коэффициентов переноса и диффузии, существует предел правой части равенства (7.14), следовательно, существует предел и левой части этого равенства. Выполнив указанный предельный переход в (7.14), получим уравнение (7.10).

Теорема доказана.

Следствие. Марковская переходная функция $F(s,x;\, t,z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial F(s,x;t,z)}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial F(s,x;y,z)}{\partial x} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 F(s,x;t,z)}{\partial x^2}, \quad (7.15)$$

которое называется **обратным уравнением Колмогорова.**

Доказательство. Пусть

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y > z, \\ 1, & y \le z, \end{cases}$$

тогда

$$u(s,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) d_y F(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{z} d_y F(s,x;t,y) = F(s,x;t,z),$$

следовательно, в силу уравнения (7.10) марковская переходная функция $F(s,x;\, t,z)$ удовлетворяет уравнению (7.15).

Следствие доказано.

Если существует переходная плотность

$$p(s,x;t,z) = \frac{\partial F(s,x;t,z)}{\partial z},$$

то она также удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$-\frac{\partial p(s,x;t,z)}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial p(s,x;y,z)}{\partial x} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 p(s,x;t,z)}{\partial x^2}. \quad (7.16)$$

Решение этих уравнений достаточно полно определяет функционирование диффузионных процессов. Для нахождения их однозначных решений необходимо задать краевые условия, определяемые условием стохастической непрерывности в виде

$$\lim_{s \to t} F(s,x;t,z) = \begin{cases} 1, & x < z, \\ 0, & x \ge z, \end{cases}$$

для марковской переходной функции, определяемой уравнением (7.15), или в виде

$$\lim_{s \to t} p(s,x;t,z) = \delta(x - z)$$

для переходной плотности распределения, определяемой уравнением (7.16).

7.4. Прямое уравнение Колмогорова. Уравнение Фоккера – Планка

Теперь получим прямое уравнение Колмогорова, которое является сопряжённым к обратному и ещё называется уравнением Фоккера – Планка. Для вывода этого уравнения необходимо существование переходной плотности распределения, так как прямое уравнение составлено именно для переходной плотности распределения $p(s,x;\ t,y)$.

Теорема. Если для переходной плотности распределения $p(s,x;\ t,y)$ существуют производная по t, а также первая и вторая производные по y, то для любых y и всех $t > s$ переходная плотность распределения $p(s,x;\ t,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial t} = -\frac{\partial\{\,a(t,y)p(s,x;t,y)\}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\{\,b(t,y)p(s,x;t,y)\}}{\partial y^2}, \quad (7.17)$$

которое называется **прямым уравнением Колмогорова**, или **уравнением Фоккера – Планка.**

Доказательство. Обратное уравнение Колмогорова (7.10) для функции $u(t,y)$ имеет вид

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} + a(t,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y} + \frac{1}{2}b(t,y)\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2} = 0, \quad (7.18)$$

то есть функция $u(t,y)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$Au(t,y) = 0,$$

где оператор A имеет вид

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + a(t,y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}b(t,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (7.19)$$

Обозначим

$$p(t,y) = \frac{\partial P\{\xi(t) < y\}}{\partial y}$$

одномерную плотность распределения значений диффузионного процесса $\xi(t)$. Известно, что эта плотность удовлетворяет уравнению, сопряжённому к (7.18), то есть операторному уравнению вида

$$A^* p(t,y) = 0.$$

Здесь оператор A^* называется **сопряжённым** к оператору A, если для всех функций $u(t,y)$ из области определения оператора A и функций $p(t,y)$ из области определения оператора A^* выполняется равенство скалярных произведений

$$(Au,p)=\left(u,A^*p\right).$$

Скалярное произведение функций u и p определим в виде

$$(u,p)=\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)u(t,y)p(t,y)dydt,$$

где функция $R(t,y)\equiv 1$ в области $\{(t,y):0<t<T,\alpha<y<\beta\}$, а на её границе равна нулю, то есть

$$R(0,y)=R(T,y)=R(t,\alpha)=R(t,\beta)=0.$$

Тогда

$$(Au,p)=\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)Au(t,y)p(t,y)dydt=$$

$$=\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)\left\{\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}+a(t,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}+\frac{1}{2}b(t,y)\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\right\}p(t,y)dydt. \quad (7.20)$$

Выполнив здесь интегрирование по частям, получим

$$\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}p(t,y)dydt=\int_\alpha^\beta\int_0^T R(t,y)p(t,y)d_t u(t,y)dy=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{R(t,y)p(t,y)u(t,y)\Big|_{t=0}^{t=T}-\int_0^T R(t,y)u(t,y)\frac{\partial p(t,y)}{\partial t}dt\right\}=$$

$$=-\int_\alpha^\beta\int_0^T R(t,y)u(t,y)\frac{\partial p(t,y)}{\partial t}dtdy,$$

аналогично

$$\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)a(t,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}p(t,y)dydt=-\int_\alpha^\beta\int_0^T R(t,y)u(t,y)\frac{\partial\{a(t,y)p(t,y)\}}{\partial y}dtdy,$$

$$\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)b(t,y)\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}p(t,y)dydt=\int_\alpha^\beta\int_0^T R(t,y)u(t,y)\frac{\partial^2\{b(t,y)p(t,y)\}}{\partial y^2}dtdy\,.$$

Поэтому (7.20) можно записать в виде

$$(Au,p)=\int_0^T\int_\alpha^\beta R(t,y)u(t,y)\times$$

$$\times\left\{-\frac{\partial p(t,y)}{\partial t}-\frac{\partial\{a(t,y)p(t,y)\}}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\{b(t,y)p(t,y)\}}{\partial y^2}\right\}dydt=$$

$$=\left(u,A^*p\right),$$

откуда получим вид сопряжённого оператора

$$A^*=-\frac{\partial *}{\partial t}-\frac{\partial\{a(t,y)*\}}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\{b(t,y)*\}}{\partial y^2}\,.$$

Следовательно прямое уравнение Колмогорова (уравнение Фоккера – Планка) имеет вид

$$\frac{\partial p(t,y)}{\partial t}=-\frac{\partial\{a(t,y)p(t,y)\}}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\{b(t,y)p(t,y)\}}{\partial y^2}\,. \tag{7.21}$$

Определив для него начальное условие в момент времени $s<t$ в виде $p(s,y)=\delta(y-x)$, найдем, что решением $p(s,x;\,t,y)$ уравнения (7.21) будет переходная плотность распределения вероятностей, поэтому $p(s,x;\,t,y)$ удовлетворяет уравнению (7.17).

Теорема доказана.

7.5. Некоторые частные случаи уравнения Фоккера – Планка

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Фоккера – Планка.

1. Для однородного диффузионного процесса

$$a(t,y)=a(y),\qquad b(t,y)=b(y)$$

переходная плотность распределения вероятностей $p(s,x;\,t,y)$ зависит лишь от разности моментов времени, то есть имеет вид

$$p(s,x;t,y)=p(x,t-s,y)=p(x,\tau,y)\,,$$

поэтому уравнение Фоккера – Планка (7.17) примет вид

$$\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{\, a(y)p(x,\tau,y)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\, b(y)p(x,\tau,y)\} \qquad (7.22)$$

с начальным условием $p(x,0,y) = \delta(y-x)$.

Если при $\tau \to \infty$ существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty} p(x,\tau,y) = p(y),$$

не зависящий от x, то функцию $p(y)$ называют **финальной**, или **стационарной**, плотностью распределения вероятностей значений однородного диффузионного процесса.

Для стационарной плотности распределения уравнение (7.22) примет вид

$$-\frac{d}{dy}\{\, a(y)p(y)\} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\{\, b(y)p(y)\} = 0,$$

который также получается из уравнения (7.21), если положить $p(t,y) \equiv p(y)$. Решение этого уравнения не представляет труда, так как оно относится к классу обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dy}\{\, b(y)p(y)\} = 2a(y)p(y) + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная, полученная в результате интегрирования исходного уравнения.

2. Рассмотрим **диффузионный процесс авторегрессии**, для которого коэффициенты переноса и диффузии имеют вид

$$a(y) = -\alpha y, \quad b(y) = \sigma^2,$$

тогда предыдущее уравнение при $C_1 = 0$ перепишем следующим образом:

$$p'(y) = -\frac{2\alpha}{\sigma^2} y p(y).$$

Его решение, удовлетворяющее условию нормировки, запишем в виде

$$p(y) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left\{-\frac{y^2}{\alpha/\sigma^2}\right\},$$

то есть решением $p(y)$ этого уравнения является плотность нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $\alpha/2\sigma^2$.

3. **Винеровским диффузионным процессом** будем называть однородный диффузионный процесс с коэффициентами переноса и диффузии вида $a(y)=0$, $b(y)=\sigma^2$, тогда уравнение Фоккера – Планка (7.22) примет вид

$$\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,\tau,y)}{\partial y^2}.$$

Решение этого уравнения выполним **методом характеристических функций**:

$$g(u,\tau)=M\{\exp(iu\xi(s+\tau)|\xi(s)=x\}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iuy\}p(x,\tau,y)dy.$$

Домножив левую и правую части этого уравнения на e^{iuy} и проинтегрировав их по $y\in(-\infty,\infty)$, получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial \tau}dy=\frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}\frac{\partial^2 p(x,\tau,y)}{\partial y^2}dy. \tag{7.23}$$

Здесь $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial \tau}dy=\frac{\partial}{\partial \tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}p(x,\tau,y)dy=\frac{\partial g(u,\tau)}{\partial \tau},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}d\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial y}=$$

$$=e^{iuy}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial y}\Bigg|_{y=-\infty}^{y=\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial y}de^{iuy}=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial p(x,\tau,y)}{\partial y}iue^{iuy}dy=-iu\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}dp(x,\tau,y)=$$

$$=-iu\left\{e^{iuy}p(x,\tau,y)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\tau,y)de^{iuy}\right\}=$$

$$=-u^2\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\tau,y)e^{iuy}dy=-u^2g(u,\tau).$$

Поэтому равенство (7.23) можно переписать в виде

$$\frac{\partial g(u,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{\sigma^2}{2}u^2 g(u,\tau),$$

то есть в виде обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка, решение которого, удовлетворяющее начальному условию

$$g(u,0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}\delta(y-x)dy=e^{iux},$$

имеет вид
$$g(u,\tau)=\exp\left\{iux-u^2\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\},$$

то есть вид характеристической функции нормального распределения с математическим ожиданием, равным x, и дисперсией, равной $\sigma^2\tau$, следовательно, переходная плотность распределения вероятностей $p(x,\tau,y)$ имеет вид

$$p(x,\tau,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right\}.$$

7.6. Допредельная модель диффузионного процесса

Рассмотрим реальные процессы, которые достаточно хорошо описываются диффузионными случайными процессами.

Представим себе частицу, совершающую скачкообразные движения по оси X. За время Δt частица совершает скачок на величину $\pm\delta$ с вероятностью 1/2, при этом скачки выполняются независимо друг от друга. Через $\xi(T)$ обозначим координату частицы в момент времени T, через Δx_k – величину скачка частицы в k-й момент времени. Здесь $\Delta x_k=\pm\delta$ с вероятностью 1/2. Очевидно, что

$$\xi(T)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k,\quad n=\frac{T}{\Delta t}. \tag{7.24}$$

Найдём среднее значение и дисперсию положения частицы в момент времени T:

$$M\{\xi(T)\}=M\left\{\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\right\}=\sum_{k=1}^{n}M\{\Delta x_k\}=0,$$

$$D\{\xi(T)\} = D\left\{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} D\{\Delta x_k\} = \delta^2 n = \delta^2 \frac{T}{\Delta t} = T\frac{\delta^2}{\Delta t}.$$

В пределе, при $\Delta t \to 0$, $\delta \to 0$, возможны три варианта.

а) Если $\delta^2 = o(\Delta t)$, то $D\{\xi(T) \to 0\}$, а так как $M\{\xi(T)\} = 0$, то частица не меняет своего положения, оставаясь в начальной точке. Этот случай не представляет интереса.

б) Если $\Delta t = o(\delta^2)$, то $D\{\xi(T)\} \to \infty$, следовательно, положение частицы в конечный момент времени T имеет бесконечный разброс, что для реальных процессов невозможно, поэтому такой вариант рассматривать не будем.

в) Если $\delta^2 = O(\Delta t)$, то есть эти величины одного порядка малости, например $\delta^2 = B\Delta t$, где $B > 0$ – некоторая постоянная, тогда $D\{\xi(T)\} = B$. Этот вариант рассмотрим более подробно.

Рассмотрим приращения

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = \sum_{t_1/\Delta t \le k \le t_2/\Delta t} \Delta x_k ,$$

для которых можно записать

$$M\{\xi(t_2) - \xi(t_1)\} = 0,$$

$$D\{\xi(t_2) - \xi(t_1)\} = B|t_2 - t_1|.$$

Тогда в силу центральной предельной теоремы

$$p(x_2 \mid x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B|t_2 - t_1|}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2B|t_2 - t_1|}\right\},$$

и все приращения по предположению независимы. Следовательно, рассматриваемое случайное блуждание в пределе даёт винеровский процесс.

Остановимся на **особенностях траекторий винеровского процесса**. Так как при $\Delta t \to 0$ величина скачка $\delta \to 0$, то реализации винеровского процесса **непрерывны.**

С другой стороны, отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\pm\delta}{\Delta t} = \frac{\pm\sqrt{B\Delta t}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \pm\infty,$$

то есть производная не существует, поэтому говорят, что реализации винеровского процесса **недифференцируемы.**

Таким образом, случайное блуждание частицы, при достаточно малой величине скачка, можно описать винеровским процессом, то есть диффузионным процессом с коэффициентом переноса, равным нулю, и коэффициентом диффузии, равным некоторой положительной постоянной.

Более общий вариант диффузионного процесса можно получить в пределе, если полагать, что положительный скачок происходит с вероятностью $1/2 + \alpha$, а отрицательный – с вероятностью $1/2 - \alpha$. Тогда

$$M\{\Delta x\} = \alpha\delta ,$$

$$M\{\xi(T)\} = \delta\alpha n = \delta\alpha\frac{T}{\Delta t} = T\frac{\delta\alpha}{\Delta t} .$$

Так как $\delta = \sqrt{B\Delta t}$, то

$$M\{\xi(T)\} = T\frac{\alpha\sqrt{B\Delta t}}{\Delta t} .$$

Полагая, что $\alpha = A\sqrt{\Delta t}/\sqrt{B}$, получим

$$M\{\xi(T)\} = TA .$$

При этом

$$D\{\xi(T)\} = TB .$$

Нетрудно показать, что при $\Delta t \to 0$ в пределе несимметричное блуждание переходит в диффузионный процесс с коэффициентом переноса A, и коэффициентом диффузии B.

В заключение этого раздела докажем лемму.

Лемма (о винеровском процессе). Пусть $w(t)$ – винеровский процесс с нулевым коэффициентом переноса и единичным коэффициентом диффузии. Тогда для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ выполняется предельное равенство

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\{ w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2 \xrightarrow{\text{ср.кв.}} T ,$$

если $\max\limits_i |t_{i+1} - t_i| \to 0$.

Доказательство. По определению сходимости в среднем квадратическом нужно доказать, что

$$M\left\{(S_n - T)^2\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Обозначим $\eta_i = \left(w(t_{i+1}) - w(t_i)\right)^2$, тогда

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i .$$

Так как $w(t)$ – винеровский процесс, то его приращения $w(t_{i+1}) - w(t_i)$ являются нормально распределёнными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией – $|t_{i+1} - t_i|$. Тогда

$$M\{\eta_i\} = t_{i+1} - t_i ,$$

$$D\{\eta_i\} = M\left\{\eta_i^2\right\} - M^2\{\eta_i\} = M\left\{\eta_i^2\right\} - (t_{i+1} - t_i)^2 ,$$

а значение величины $M\{\eta_i^2\}$ найдём, применив равенство для чётных моментов нормальной случайной величины

$$M\left\{\xi^{2k}\right\} = (2k-1)!!\sigma^{2k} .$$

Получим

$$M\left\{\eta_i^2\right\} = M\left\{\left(w(t_{i+1}) - w(t_i)\right)^4\right\} = 3(t_{i+1} - t_i)^2 ,$$

следовательно,

$$D\{\eta_i\} = 2(t_{i+1} - t_i)^2 .$$

Тогда

$$M\{S_n\} = M\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = T ,$$

$$D\{S_n\} = D\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} D\{\eta_i\} = 2\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 .$$

Теперь можно записать

$$M\left\{(S_n - T)^2\right\} = D\{S_n\} = 2\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \le 2T \max_{0\le i<n} |t_{i+1} - t_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Лемма доказана.

Замечание (о произвольном диффузионном процессе). Если для диффузионного процесса $\xi(t)$ коэффициент диффузии – $b(x,t)$, а $f(x,t)$ – непрерывная детерминированная функция, то можно показать, что выполняется предельное равенство

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi(t_i),t_i)\left(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)^2\right)=\int_0^T f(\xi(t),t)b(\xi(t),t)dt.$$

Рассмотренные выше диффузионные процессы тесно связаны с понятием **стохастического интеграла.**

Глава 8

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

В ряде случаев важную роль играют интегралы вида

$$\int_a^b \Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t), \tag{8.1}$$

где $\Phi(x,t)$ – неслучайная функция, $\xi(t)$ – некоторый случайный процесс. Реализации процесса $\xi(t)$ в общем случае являются функциями неограниченной вариации, следовательно, этот интеграл нельзя понимать как интеграл Стилтьеса или Лебега – Стилтьеса. Если, кроме того, $\xi(t)$ – диффузионный процесс, то не ясно, как понимать $d\xi(t)$ в этом случае.

Если $\xi(t)$ – диффузионный случайный процесс, то интегралы вида (8.1) называются **стохастическими интегралами**.

Перейдём к математически корректному определению стохастических интегралов.

8.1. Стохастический интеграл в форме Ито

Разделим интервал $[a,b]$ точками $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$, и пусть $\Delta=\max\limits_i|t_{i+1}-t_i|$.

Рассмотрим сумму

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(\xi(t_i),t_i)[\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)].$$

Если при $\Delta\to0$ существует предел в среднем квадратическом

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}S_n=\underset{\Delta\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(\xi(t_i),t_i)[\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)]=\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t),$$

то он называется **стохастическим интегралом в форме Ито.**

Так как диффузионный процесс $\xi(t)$ недифференцируемый, то стохастический интеграл в форме Ито обладает особым свойством, отличающим его от интеграла Римана для детерминированных функций. Покажем это отличие на одном простом примере.

Особенность стохастического интеграла в форме Ито

Пусть $\xi(t) = w(t)$, где $w(t)$ – винеровский процесс, такой, что $w(0) = 0$, $M\{w(t)\} = 0$, $D\{w(t)\} = t$.

Рассмотрим стохастический интеграл

$$J = \int_0^T w(t)dw(t).$$

По классической формуле интегрирования получим

$$J = \frac{1}{2}w^2(t)\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{2}w^2(T).$$

С другой стороны, по определению стохастического интеграла, он равен пределу интегральной суммы. Найдём значение этого предела.

Здесь $$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} w(t_i)[w(t_{i+1}) - w(t_i)].$$

Рассмотрим

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[w(t_{i+1}) - w(t_i)]\right\}^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2 +$$

$$+2\sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}\sum_{j=0}^{i-1}\{w(t_{j+1}) - w(t_j)\} = \sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2 +$$

$$+2\sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}w(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2 + 2S_n.$$

Откуда для S_n получим равенство

$$S_n = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[w(t_{i+1}) - w(t_i)]\right\}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{w(t_{i+1}) - w(t_i)\}^2.$$

В силу определения стохастического интеграла в форме Ито и леммы о винеровском процессе из предыдущей главы можно записать

$$\int_0^T w(t)dw(t) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} S_n = \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{1}{2}T .$$

Сравнивая это выражение с выражением, полученным применением классических методов интегрирования, видим, что они отличаются на величину $T/2$ за счёт недифференцируемости реализаций винеровского процесса.

При решении прикладных задач обычно рассматривают процессы с гладкими траекториями, поэтому желательно дать такое определения стохастического интеграла, свойства которого совпадали бы со свойствами классических интегралов Римана. Таким определением является определение интеграла в форме Стратановича.

8.2. Стохастический интеграл в форме Стратоновича

Интегральную сумму стохастического интеграла (8.1) определим в симметризованном виде:

$$SS_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi\left(\frac{\xi(t_{i+1}) + \xi(t_i)}{2}, t_i\right)\left[w(t_{i+1}) - w(t_i)\right]. \tag{8.2}$$

Если при $\Delta \to 0$ существует предел в среднем квадратическом

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} SS_n = \underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} \Phi\left(\frac{\xi(t_{i+1}) + \xi(t_i)}{2}, t_i\right)\left[\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)\right] =$$

$$= S\int_a^b \Phi(\xi(t), t)\, d\xi(t),$$

то он называется **стохастическим интегралом в форме Стратоновича.**

Символ S перед интегралом отражает тот факт, что рассматривается стохастический интеграл в симметризованном виде, то есть в форме Стратоновича.

Интегралы Ито и Стратоновича достаточно просто связаны между собой.

8.3. Связь интегралов Ито и Стратоновича

Рассмотрим связь стохастических интегралов в форме Ито и в форме Стратоновича.

Пусть подынтегральная функция $\Phi(x,t)$ дифференцируема по первому аргументу. Тогда, разлагая её в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi(t_i)$, получим

$$\Phi\left(\frac{\xi(t_{i+1})+\xi(t_i)}{2},t_i\right)=\Phi\left(\xi(t_i)+\frac{\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)}{2},t_i\right)=$$
$$=\Phi(\xi(t_i),t_i)+\frac{\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\{\Phi(\xi(t_i),t_i)\}+o(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)).$$

Подставляя это разложение (8.2), запишем

$$S\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t)=$$
$$=\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t)+\frac{1}{2}\underset{\Delta\to0}{\text{l.i.m.}}\sum_{i=-}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\{\Phi(\xi(t_i),t_i)\}[\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)]^2.$$

В силу замечания о произвольном диффузионном процессе из предыдущей главы, последнее равенство можно переписать в виде

$$S\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t)=$$
$$=\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,d\xi(t)+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\partial}{\partial\xi}\{\Phi(\xi(t),t)\}\,b(\xi(t),t)\,dt. \tag{8.3}$$

Для стохастических интегралов, определённых по винеровскому процессу, это равенство имеет вид

$$S\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,dw(t)=\int_a^b\Phi(\xi(t),t)\,dw(t)+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\partial}{\partial\xi}\{\Phi(\xi(t),t)\}\,dt. \tag{8.4}$$

Рассмотрим стохастический интеграл примера из раздела 8.1 в форме Стратоновича:

$$S\int_0^T w(t)\,dw(t)=\int_0^T w(t)\,dw(t)+\frac{1}{2}\int_0^T dt=\frac{1}{2}w^2(T)-\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}w^2(T).$$

Видим, что результаты интегрирования по Стратоновичу совпадают с результатами интегрирования по Риману.

Из равенств (8.3) и (8.4) следует, что если подынтегральная функция $\Phi(\xi,t)$ не зависит от ξ, то интегралы в форме Ито и Стратановича совпадают.

При рассмотрении прикладных задач обычно применяют интеграл Стратановича, а в теоретических исследованиях применяют интеграл Ито, затем, используя равенства (8.3) и (8.4) вновь возвращаются к интегралам в симметризованном виде.

Применение интегралов Ито в теоретических исследованиях оправдано его некоторыми полезными свойствами, которые более подробно будут рассмотрены в следующей главе.

Глава 9

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. Определение стохастических дифференциальных уравнений. Свойства их решений

Многие реальные процессы определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\xi,t) + \sigma(\xi,t)\frac{d\eta}{dt}$$

или в форме дифференциалов

$$d\xi = a(\xi,t)dt + \sigma(\xi,t)d\eta\,. \tag{9.1}$$

Если $\eta(t) = w(t)$ – винеровский процесс, то уравнение (9.1) называется **стохастическим дифференциальным уравнением.** В этом случай уравнение (9.1) будем записывать в виде

$$d\xi(t) = a(\xi(t),t)dt + \sigma(\xi(t),t)dw(t)\,. \tag{9.2}$$

В силу недифференцируемости винеровского процесса необходимо определить, в каком смысле следует понимать уравнение (9.2). Это равенство будем понимать как форму записи интегрального уравнения

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\xi(\tau),\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(\xi(\tau),\tau)dw(\tau)\,, \tag{9.3}$$

где первый интеграл является интегралом в среднем квадратическом, а второй – стохастическим интегралом в форме Ито.

Покажем, что решение $\xi(t)$ стохастического дифференциального уравнения (9.2) является **диффузионным случайным процессом.**

Действительно, из (9.3) следует что распределение вероятностей значений сечения $\xi(t)$ при $t > t_0$ зависит лишь от значения $\xi(t_0)$ и не зависит от значений рассматриваемого процесса для моментов времени $s < t_0$, следовательно, процесс $\xi(t)$ – марковский.

Дифференциальное уравнение (9.2) запишем в конечных разностях:

$$\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=a(\xi(t),t)\Delta t+\sigma(\xi(t),t)\{\,w(t+\Delta t)-w(t)\}+o(\Delta t)\,. \quad (9.4)$$

Важно заметить, что случайные величины $\xi(t)$ и $\Delta w(t)=w(t+\Delta t)-w(t)$ стохастически независимы.

Проверим для процесса $\xi(t)$ выполнение свойств диффузионного процесса (7.7) – (7.9).

Из (9.4) очевидно следует, что условное распределение приращения $\Delta\xi(t)=\xi(t+\Delta t)-\xi(t)$ при условии, что $\xi(t)=x$ является гауссовским с математическим ожиданием и дисперсией вида

$$M\{\,\Delta\xi(t)|\xi(t)=x\}=a(x,t)\Delta t+o(\Delta t)\,; \quad (9.5)$$

$$D\{\Delta\xi(t)|\xi(t)=x\}=\sigma^2(x,t)\Delta t+o(\Delta t)\,. \quad (9.6)$$

Свойство (7.7) запишем в виде

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}P\{\,|\,\Delta\xi(t)|>\varepsilon|\xi(t)=x\}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x,t)\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(y-a(x,t)\Delta t)^2}{2\sigma^2(x,t)\Delta t}\right\}dy+$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x,t)\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(y-a(x,t)\Delta t)^2}{2\sigma^2(x,t)\Delta t}\right\}dy=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{A_1(\Delta t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{A_2(\Delta t)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz,$$

где $$A_1(\Delta t)=\frac{-\varepsilon-a(x,t)\Delta t}{\sigma(x,t)\sqrt{\Delta t}},\qquad A_2(\Delta t)=\frac{\varepsilon-a(x,t)\Delta t}{\sigma(x,t)\sqrt{\Delta t}}\,.$$

Нетрудно показать, что рассматриваемые пределы равны нулю, следовательно, свойство (7.7) выполнено.

Выполнение свойств (7.8) – (7.9) очевидно следует из равенств (9.5) и (9.6).

Таким образом, решение $\xi(t)$ стохастического дифференциального уравнения (9.2) является диффузионным случайным процессом с коэффициентом переноса $a(x,t)$, и коэффициентом диффузии $b(x,t)=\sigma^2(x,t)$. Очевидно, что эти коэффициенты диффузионного процесса однозначно определяются коэффициентами стохастического дифференциального уравнения.

Знание коэффициентов переноса и диффузии позволяет записать уравнение Фоккера – Планка для переходной плотности распределения вероятностей, которая однозначно определяет функционирование диффузионного случайного процесса $\xi(t)$.

Приведём примеры наиболее часто применяемых стохастических дифференциальных уравнений.

1) Арифметическое броуновское движение:

$$d\xi(t) = \mu\, dt + \sigma dw(t).$$

2) Геометрическое броуновское движение. Модель Самуэльсона:

$$d\xi(t) = \mu\xi(t)dt + \sigma\xi(t)dw(t).$$

3) Диффузионный процесс авторегрессии:

$$d\xi(t) = -\mu\,\xi(t)dt + \sigma dw(t).$$

4) Процесс, возвращающийся к среднему как квадратный корень (Mean Reverting Square Root, MRSR-процесс):

$$d\xi(t) = \mu(\alpha - \xi(t))dt + \sigma\sqrt{\xi(t)}dw(t).$$

5) Процесс Орнштейна – Уленбека:

$$d\xi(t) = \mu(\alpha - \xi(t))dt + \sigma\xi^{\gamma}(t)dw(t).$$

6) Броуновский мост:

$$d\xi(t) = \frac{\beta - \xi(t)}{T - t}dt + dw(t), \qquad \xi(0) = \alpha\,.$$

9.2. Формула дифференцирования Ито

Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс с коэффициентами переноса $a(x,t)$ и диффузии $\sigma^2(x,t)$, тогда этот процесс является решением стохастического дифференциального уравнения (9.2):

$$d\xi(t) = a(\xi(t),t)dt + \sigma(\xi(t),t)dw(t)\,.$$

Пусть $f(x,t)$ – непрерывная детерминированная функция, такая, что для неё существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\eta(t) = f(\xi(t),t). \tag{9.7}$$

Ито показал, что этот случайный процесс является диффузионным. Найдём дифференциал этого диффузионного процесса

$$d\eta(t) = df(\xi(t),t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(d\xi)^2 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial \xi}\{\, a(\xi,t)dt + \sigma(\xi,t)dw(t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\sigma^2(\xi,t)dt =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + a(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2(\xi,t)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right\}dt + \sigma(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi}dw(t),$$

то есть

$$d\eta(t) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + a(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2(\xi,t)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right\}dt + \sigma(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi}dw(t). \tag{9.8}$$

Из равенства (9.7) процесс $\xi(t)$ выразим через $\eta(t)$ и t, и это выражение подставим в (9.8). Получим коэффициенты переноса и диффузии для диффузионного случайного процесса $\eta(t)$, а равенство (9.8) запишем в виде

$$d\eta(t) = A(\eta(t),t)dt + B(\eta(t),t)dw(t), \tag{9.9}$$

где функции $A(y,t)$ и $B(y,t)$ имеют вид выражений

$$A(\eta,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + a(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma(\xi,t)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2},$$

$$B(\eta,t) = \sigma(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial \xi},$$

в которых ξ в силу равенства (9.7) выражена через η и t.

Равенства (9.8) и (9.9) будем называть **формулами дифференцирования Ито.**

Формулы дифференцирования Ито находят широкое применение для решения стохастических дифференциальных уравнений.

9.3. Решение стохастических дифференциальных уравнений

Решение стохастических дифференциальных уравнений проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 1. Процесс $\xi(t)$ арифметического броуновского движения определяется начальным условием $\xi(0)=\xi_0$ и стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi(t)=\mu dt+\sigma dw(t),$$

решение которого найдём в явном виде, применяя определение (9.3). Тогда получим

$$\xi(t)=\xi_0+\mu t+\sigma w(t).$$

Пример 2. Процесс геометрического броуновского движения аналогично определяется начальным условием $\xi(0)=\xi_0$ и стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi(t)=\mu\xi(t)dt+\sigma\xi(t)dw(t).$$

Для его решения рассмотрим процесс

$$\eta(t)=\ln\xi(t), \tag{9.10}$$

применяя к которому формулу дифференцирования Ито, получим

$$d\eta(t)=\left\{\mu\xi\frac{1}{\xi}-\frac{1}{2}(\sigma\xi)^2\frac{1}{\xi^2}\right\}dt+\sigma\xi\frac{1}{\xi}dw(t)=\left\{\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right\}dt+\sigma dw(t),$$

то есть $\eta(t)$ является процессом арифметического броуновского движения, поэтому в силу примера 1 его можно записать в виде

$$\eta(t)=\eta_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma w(t),$$

тогда в силу замены (9.10) процесс $\xi(t)$ представим в виде

$$\xi(t)=\exp\left\{\eta_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma w(t)\right\}.$$

Так как $\xi(0)=\exp\{\eta_0\}=\xi_0$, то окончательно запишем

$$\xi(t)=\xi_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma w(t)\right\}.$$

Пример 3. Для диффузионного процесса авторегрессии

$$d\xi(t) = -\mu\,\xi(t)\,dt + \sigma dw(t).$$

В этом уравнении выполним замену

$$\eta(t) = e^{\mu t}\xi(t). \tag{9.11}$$

Применяя формулу дифференцирования Ито, получим

$$d\eta(t) = \left\{\mu e^{\mu t}\xi(t) - \mu\xi(t)e^{\mu t}\right\}dt + \sigma e^{\mu t}dw(t) = \sigma e^{\mu t}dw(t),$$

следовательно,

$$\eta(t) = \eta_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu\tau}dw(\tau),$$

поэтому в силу замены (9.11) можно записать

$$\xi(t) = e^{-\mu t}\left\{\eta_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu\tau}dw(\tau)\right\} = e^{-\mu t}\left\{\xi_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu\tau}dw(\tau)\right\}.$$

Пример 4. Для процесса броуновского моста

$$d\xi(t) = \frac{\beta - \xi(t)}{T - t}dt + dw(t), \qquad \xi(0) = \alpha.$$

В этом уравнении выполним замену

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - \beta}{T - t}. \tag{9.12}$$

Применяя формулу дифференцирования Ито, получим

$$d\eta(t) = \left\{\frac{\xi(t) - \beta}{(T - t)^2} + \frac{\beta - \xi(t)}{(T - t)^2}\right\}dt + \frac{1}{T - t}dw(t) = \frac{1}{T - t}dw(t),$$

следовательно,

$$\eta(t) = \eta_0 + \int_0^t \frac{dw(\tau)}{T - \tau},$$

поэтому в силу замены (9.12) можно записать

$$\xi(t) = \beta + (T - t)\eta(t) = \beta + (T - t)\left\{\eta_0 + \int_0^t \frac{dw(\tau)}{T - \tau}\right\}. \tag{9.13}$$

Здесь
$$\xi(0) = \beta + T\eta_0 = \alpha,$$

следовательно,
$$\eta_0 = \frac{\alpha - \beta}{T},$$

поэтому в силу (9.13) можно записать

$$\xi(t) = \beta + \frac{T-t}{T}(\alpha - \beta) + (T-t)\int_0^t \frac{dw(\tau)}{T-\tau}.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию этого процесса

$$M\{\xi(t)\} = \beta + \frac{T-t}{T}(\alpha - \beta),$$

в частности получим

$$M\{\xi(0)\} = \alpha, \quad M\{\xi(T)\} = \beta, \tag{9.14}$$

$$D\{\xi(t)\} = (T-t)^2 M\left\{\left(\int_0^t \frac{1}{T-\tau} dw(\tau)\right)^2\right\} =$$

$$= (T-t)^2 M\left\{\int_0^t\int_0^t \frac{1}{(T-\tau)(T-s)} dw(\tau)dw(s)\right\}.$$

Так как приращения винеровского процесса на непересекающихся интервалах независимы, их математические ожидание равны нулю, а дисперсии равны длинам этих интервалов, то

$$M\left\{\int_0^t\int_0^t \frac{1}{(T-\tau)(T-s)} dw(\tau)dw(s)\right\} = \int_0^t \frac{1}{(T-\tau)^2} d\tau = \frac{t}{T(T-t)},$$

поэтому
$$D\{\xi(t)\} = \frac{t(T-t)}{T},$$

и в частности
$$D\{\xi(0)\} = 0, \quad D\{\xi(T)\} = 0. \tag{9.15}$$

В силу равенств (9.14) и (9.15) можно говорить, что броуновский мост соединяет в среднем квадратическом точки $\xi(0) = \alpha$ и $\xi(T) = \beta$, что оправдывает название этого диффузионного случайного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. – 174 с.
2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400 с.
3. *Боровков А.А.* Теория вероятностей: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
4. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
5. *Чжун Кай-Лай.* Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964. – 423 с.
6. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
7. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
8. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
9. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
10. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 354 с.
11. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. – М.: Сов. радио, 1965. – 256 с.
12. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005.
13. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 226 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное пособие

Назаров Анатолий Андреевич
Терпугов Александр Федорович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Редактор *Т.С. Портнова*

Дизайн, верстка *Д.В. Фортес*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 01.09.2010.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 15,8. Тираж 200 экз. Заказ № 21.

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1