Einführung in die Algebra

Vorlesungsmitschriften im Wintersemester 2018/19

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Diese Vorlesungsmitschriften werden in der Vorlesung *Einführung in die Grundlagen der Numerik* von Prof. Ira Neitzel im Wintersemester 2018/19 an der Universität Bonn angefertigt.

Wir versuchen, diese immer unter `https://pankratius.github.io` zu aktualisieren.

1.1 Orthogonalisierungsverfahren

Betrachte $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, wobei A schlecht konditioniert sein kann. Wir wollen ein Gleichungssystem der Form $Ax = b$, mit $b \in^n$ gegeben, lösen. Dazu suchen wir eine Orthogonalmatrix $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in n$ mit $A = QR$. Dann erhalten wir das äquivalente Problem

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b.$$

1.1.1 Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Lemma 1.1.1. *Sei $Q \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ orthogonal. Dann ist auch Q^T orthogonal und es gilt*

$$Qx = Q^T x = x$$

Beweis. Es gilt

$$Qx^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = x.$$

Genauso für Q^T. □

Lemma 1.1.2. *Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ regulärn und $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal. Dann gilt*

$$\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$$

Beweis. Die Matrixnorm A ist durch die euklidsche Norm induziert, i.e.

$$A = \max_{x \neq 0} \frac{Ax}{x}.$$

Also folgt aus lemma 1.1.1, dass $(QA) = (A)$ gilt.
Betrachte jetzt

$$A^{-1}Q^T = \max_{x \neq 0} \frac{A^{-1}Q^T x}{x} \qquad = \max_{x \neq 0} \frac{A^{-1}Q^T x}{Q^T x} \overset{y := Q^T x}{=} \max_{y \neq 0} \frac{A^{-1}}{y} = A^{-1}$$

□

Also ist für das LGS $Rx = Q^T b : \kappa_2(R) = \kappa_2(A)$. Also hat sich die Kondition des Problems nicht verschlechtert.

*1.1.2 Anwendung:Lineare Ausgleichsgeraden*Betrachte für gegebenes $b \in^n$ und $A \in n$ das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in^n} Ax - b.$$

Dieses Problem ist äquivalent zur Optimierung von $Ax - b^2$.

Seien nun m Tupel $(y_i, f_i) \in^2$ $(1 \leq i \leq m)$ gegeben. Gesucht ist diejenige affine Gerade $c + dy$ in ^{2}, so dass die Summe der Quadrate der Punkte von der Gerade minimal ist. Wir erhalten also das Optimierungsproblem

$$\min_{(c,d) \in^2} \left(\sum_{i=1}^{m} (c + dy_i - f_i)^2 \right) = \min_{(c,d) \in^2} \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Betrachte allgemeiner das Polynom

$$p(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^k.$$

Gesucht sind jetzt die Koeffizienten $a_0, ..., a_{n-1}$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} (p(y_j) - f_j)^2$$

ist minimal. Schreibe dies ebenfalls als Optimierungsproblem:

$$\min_{a_0, \ldots, a_{n-1}} \begin{pmatrix} y_1^0 & \ldots & y_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m^0 & \ldots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}^2.$$

Ende Vorlesung 1