

**Lösung 3.2.** i) Sei  $a \in L$  algebraisch über  $Z$ . Dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Z$ , so dass für

$$p := \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \in Z[X]$$

$p(z) = 0$  gilt, und insbesondere ist  $z$  algebraisch über

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Da  $\lambda_i \in Z$  gilt, sind sie algebraisch über  $K$ , weil  $Z/K$  eine algebraische Erweiterung ist. Betrachte nun die Körpererweiterung

$$\begin{array}{c} K(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z) \\ | \\ K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ | \\ K \end{array}$$

Aus Satz 3.7 folgt, dass  $K(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z)/K$  eine algebraische Erweiterung von  $K$  ist, und damit, dass  $z$  algebraisch über  $K$  ist.

ii) Angenommen  $L/K$  ist algebraisch. Indem man Elemente aus  $Z$  als Elemente aus  $L$  auffasst, sind sie schon algebraisch über  $K$ . Indem man Elemente aus  $K$  als Elemente aus  $Z$  auffasst, erhält man, dass  $L/Z$  algebraisch ist.

Angenommen,  $L/K$  und  $L/Z$  sind algebraisch. Also  $L/K$  ist nach i) auch algebraisch, indem man die Argumentation für jedes Element durchführt.

**Lösung 3.3.** i) Da  $E/K$  endlich ist, gibt es endlich viele Elemente  $e_1, \dots, e_n \in E$ , so dass  $E = K(e_1, \dots, e_n)$  ist, wobei  $e_1, \dots, e_n$  algebraisch über  $K$ , und damit auch über  $F$ , sind. Nach Satz 3.7. ist dann  $F(e_1, \dots, e_n)/F$  eine endliche Erweiterung. Weil  $E.F$  ein Zwischenkörper dieser Erweiterung ist, und damit ein  $F$ -Unterraum von  $F(e_1, \dots, e_n)$ , ist  $\dim_F E.F < \infty$ .

ii) Es gilt  $E.F = F(E)$ . Wenn  $E/K$  algebraisch ist, dann ist jedes Element aus  $E$  algebraisch über  $F$ , weil  $K \subseteq F$  gilt. Damit folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.9.

iii) Angenommen,  $E/K$  und  $F/K$  sind endlich. Aus i) folgt, dass dann  $E.F/F$  endlich ist. Für die Körpererweiterung

$$\begin{array}{c} E.F \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array}$$

folgt dann aus der Gradformel, dass

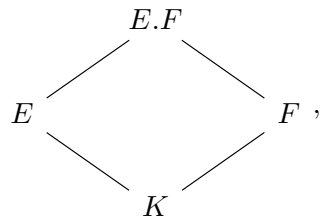
$$[E.F : K] = [F.K] \cdot [E.F : F]$$

gilt, also insbesondere, dass

$$[E.F : K] < \infty.$$

Angenommen,  $E.F/K$  ist endlich. Weil  $E \subset E.F$  und  $F \subset E.F$  insbesondere Untervektorräume sind, folgt die Aussage.

iv) Betrachte die Körpererweiterungen



dann sind  $E$  bzw.  $F$  Zwischenkörper der Erweiterung  $E.F/K$ . Angenommen,  $E/K$  ist algebraisch und  $F/K$  ist algebraisch. Dann folgt aus ii), dass  $E.F/F$  algebraisch ist, damit aus 2ii), dass auch  $E.F/K$  algebraisch ist. Angenommen,  $E.F/K$  ist algebraisch. Weil  $E$  und  $F$  Zwischenkörper dieser Erweiterung sind, gilt die Aussage insbesondere für diese beiden.