Einführung in die Algebra

Vorlesungsmitschriften im Wintersemester 2018/19

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Diese Vorlesungsmitschriften werden in der Vorlesung *Einführung in die Algebra* von Prof. Jan Schröer im Wintersemester 2018/19 an der Universität Bonn angefertigt.

Wir versuchen, diese immer unter `https://pankratius.github.io` zu aktualisieren.

1.1 Reelle und komplexe Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Für $z \in \mathbb{C}$ heißen die Nullstellen von $X^n - z \in \mathbb{C}[X]$ die n-ten **Wurzeln** von z. Sei $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $w \geq 0$ mit $w^n = r$. Wir schreiben $\sqrt[n]{r} := w$.

Sei $z = r\exp(i\alpha)$ mit $r \geq 0$ reell und $\alpha \in [0, 2\pi)$ eine komplexe Zahl. Setze

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{r}\exp(i\alpha/n),$$

und definiere $\sqrt[2]{z} =: \sqrt{z}$. Definiere weiterhin

$$\zeta_n := \exp(2\pi i/n).$$

Die Menge der ζ_n^j für $0 \leq j \leq n-1$ heißen n-te **Einheitswurzeln**. Dies sind gerade die Nullstellen von $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1.2 Formeln für Nullstellen vom Grad $n \leq 4$

c.f. Formeln von Cardano und Ferrari.

1.3 Körpererweiterungen

Definition 1.3.1. Sei L ein Körper. Eine Teilmenge $K \subseteq L$ heißt **Teilkörper** von L, falls gilt

i) $0, 1 \in K$

ii) $a + b \in K,\ ab \in K$ für alle $a, b \in K$

iii) $-a \in K$ für alle $a \in K$

iv) $a^{-1} \in K$ für alle $a \in K^\times$

Durch Einschränkung der Addition und Multiplikation ist K wieder ein Körper. In diesem Fall heißt das Tupel $L/K := (K, L)$ eine **Körpererweiterung**. Wir dafür auch $K \subset L$ und sagen, dass L eine Körpererweiterung von K ist.

Lemma 1.3.2. *Sei L ein Körper, I eine Indexmenge und K_i ein Teilkörper für alle $i \in I$. Dann ist*

$$K := \bigcap_{i \in I} K_i$$

wieder ein Teilkörper.

Beweis. Wir rechnen schnell die Eigenschaften nach:

i) Es gilt $0, 1 \in K_i$ für alle i, also auch $0, 1 \in K$.

ii) Seien $a, b \in K_i$ für alle i. Dann ist auch $a + b$ und ab in K_i für alle i, weil die K_i jeweils Teilkörper sind. Also auch $a + b, ab \in K$.

iii) genauso.

iv) genauso.

□

Definition 1.3.3. Sei L ein Körper, $M \subseteq L$ eine Teilmenge. Dann ist

$$(M) := \bigcap_{M \subseteq F \subseteq L} F,$$

mit F Teilkörper, der von M **erzeugte Teilkörper** .
Sei L/K eine Körpererweiterung und $M \subseteq L$ eine Teilmenge von L. Definiere

$$K(M) := (K \cup M) \subset L.$$

$K(M)$ entsteht an K durch **Adjungtion** von M.

Beispiel 1.3.4. Betrachte $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ und

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Für $M = x_1, ..., x_n \subset L$ endlich schreibt man vereinfacht auch

$$K(M) =: K(x_1, ..., x_n).$$

Definition 1.3.5. L/K ist **einfach** , falls es ein $x \in L$ gibt mit $K(x) = L$.

Definition 1.3.6. Für $M = \{0, 1\}$ heißt $P := (M)$ der **Primkörper** von L. Jeder Teilkörper von L enthält p

Beispiel 1.3.7. Der Primkörper von $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}$.

1.4 Auflösbarkeit durch Radikale

Definition 1.4.1. L/K ist eine **Radikalerweiterung** von L falls gilt:

i) es gibt $x_1, ..., x_n \in L$ mit $K(x_1, ..., x_n) = L$

ii) Es gibt $r_1, ..., r_n \in \mathbb{N}_1$ mit $x_1^{r_1} \in K$ und $x_i^{r_i} \in K(x_1, ..., x_{i-1})$ für $2 \leq i \leq n$.

Wir sagen: „L entsteht aus K durch sukzessive Adjungtion von Wurzeln“.

Definition 1.4.2. $f \in K[X]$ ist **durch Radikale auflösbar**, falls es eine Radikalerweiterung L/K gibt, so dass f eine Nullstelle in L hat.

Theorem 1.4.3 (Cadano und Ferrari)**.** *Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg f \leq 4$. Dann ist f auflösbar.*

Ein Ziel der Vorlesung wird es sein, zu verstehen, wann $f \in \mathbb{Q}[X]$ durch Radikale auflösbar ist.

Ein weiteres Ziel der Vorlesung wird es sein, die klassischen Konstruktionsprobleme zu untersuchen.

Identifiziere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Gegeben sei nun $M \subset \mathbb{C}$ mit $|M| \geq 2$. Definiere

i) $G(M) :=$ {affine Geraden G in $\mathbb{R}^2$ mit $|G \cap M| \geq 2$}

ii) $C(M) :=$ {reelle Kreise C in $\mathbb{R}^2$mit: Mittlepunkt von $C \in M$ und Radius von $C = ||z_1 - z_2||, z_1, z_2 \in M$}

Durch folgende Operation erhalten wir wieder komplexe Zahlen:

- $(ZL1)$: Schnitt zweier Geraden aus $G(M)$
- $(ZL2)$: Schnitt einer Gerade aus $G(M)$ und eines Kreises aus $C(M)$
- $(ZL3)$: Schnitt zweier Kreise aus $C(M)$.

Setze

$ZL(M) := \{z \in \mathbb{C} \mid z \in M$ oder z entsteht aus Mdurch Anwendung von $(ZL1, (ZL2), (ZL3)\}$.

Definiere jetzt

$$M_0 := M, M_{i+1} := ZL(M_i) \text{ und } M_\infty := \bigcup_{i \geq 0} M_i.$$

Die Elemente von M_∞ heißen die von M durch Zirkel und Lineal **konstruierbare Punkte**.

Lemma 2.0.1. $M_\infty = ZL(M_\infty)$.

Ende Vorlesung 1