Einführung in die Algebra

Vorlesungsmitschriften im Wintersemester 2018/19

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Diese Vorlesungsmitschriften werden in der Vorlesung *Einführung in die Algebra* von Prof. Jan Schröer im Wintersemester 2018/19 an der Universität Bonn angefertigt.

Wir versuchen, diese immer unter https://pankratius.github.io/Vorlesungen/ bei GitHub zu aktualisieren.

Wir planen, folgende Literatur zu verwenden: Aluffi [**aluffi**],Bosch [**bosch**]

1.1 Satz von Picard-Lindelöff

Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir suchen ein $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ so dass $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(t) = F(t, \gamma(t))\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.1. 1. Sei A eine $d \times d$-Matrix. Sei $F : M_{d\times d}(\mathbb{K}) \to M_{d\times d}(\mathbb{K})$ mit $F(B) = A$. Anfangswertproblem $U' = F(U)$ und $U_0 = 1_{\mathbb{R}^d}$. Kennen eindeutige Lösung: $U(t) = \exp(t \cdot A)$.

2. Sei $d = 1$ und $F(x) = x$ und $\gamma' = \gamma$. Dann ist $\gamma(t) = \exp(t)x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Sei $d = 2$ und $F(x) = x$ und $\gamma' = \gamma$. Dann ist $\gamma(t) = \exp(t)x_0$.

Annahme: $F_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sei stetig. Dann soll gelten

1. $|F(t, 0)| \leq C$
2. $|F(t, x) - F(t, y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$.

für ein $C > 0$.
Genügt F 2., so heißt F **Lipschitz-stetig** bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$ mit Lipschitzkonstanten C.

Satz 1.1.2 (Picard-Lindelöf)**.** *F genüge der Annahme. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert genau ein $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, das differenzierbar ist und für das $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wenn γ stetig ist, dann ist auch $t \to (t, \gamma(t)))$ stetig, da die Komponenten stetig sind. Weiterhin ist auch $t \to F(t, \gamma(t))$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Da $\gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$, folgt, dass γ stetig differenzierbar ist.

Behauptung: Es gilt

$$\gamma(0) = x_0,\ \gamma'(t) = F(t, \gamma(t)) \Longleftrightarrow \gamma(t) = x_0 + \int_0^t F(t, \gamma(t))\ dt,$$

weil Hauptsatz.

Es reicht also zu zeigen, dass $\gamma(t) = x_0 + \int_0^t F(t, \gamma(t))\ dt$ genau eine stetige Lösung hat. $C_b(\mathbb{R}, (R)^d)$ ist ein Banachraum. Betrachte $T : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, definiert durch

$$Tf(t) = \exp(-2C|t|)x_0 + \int_0^t e^{-2C|t|} F(s, e^{2c|s|} f(s))\ ds$$

Wohldefiniertheit:

$$T(0)(t) = e^{-2C|t|}x_0 + \int_0^t e^{-2C|t|}F(s,0)\ ds$$

$$\left\| e^{-2C|t|}x_0 \right\|_{C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)} = \sup\left\{ e^{-2C|t|}|x_0| \mid t \in \mathbb{R}\right\} = |x_0|$$

$$\implies \left| \int_0^t e^{-2C|t|}F(s,0) \right| \leq e^{-2C|t|} \cdot \left| \int_0^t | \underbrace{F(s,0)}_{\leq C, \text{ nach } 1} |\ ds \right|$$

$$\leq e^{-2C|t|}$$

Gleichzeitig ist

$$\sup\left\{ e^{-2C|t|}\ C|t| \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{ e^{-2|t|}\ C|t| \mid t \in \mathbb{R}\right\} \leq \infty$$

Also ist $T(0) \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$.
Seien $f, g \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$(T(f) - T(g))(t) = \int_0^t e^{-2C|t|}(F(s, e^{2C|s|}f(s)) - F(s, e^{2C|s|}g(s))\ ds.$$

Sei $t > 0$. Dann ist nach dem Lemma

$$|(T(f) - T(g))(t)| \leq \int_0^t e^{-2Ct} \left| F(s, e^{2Cs}f(s)) - F(s, e^{2Cs}g(s)) \right|\ ds$$

Nach Annahme 2 gilt

$$\leq \int_0^t e^{-2Ct}C \left| e^{2Cs}f(s) - e^{2Cs}g(s) \right|\ ds = \int_0^t e^{-2C(t-s)}C|f(s) - g(s)|\ ds$$

$$\leq C \int_0^t e^{-2C(t-s)} \|f - g\|_{C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)}\ ds$$

$$= \|f - g\|_{C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)} \int_0^t Ce^{2C(t-s)}\ ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \|f - g\|_{C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)}$$

Also ist $T(f)(t) = (T(f)(t) - T(0)(t)) + T(0)(t)$ wohldefiniert.
Weiters ist T eine Kontraktion mit $\theta = 1/2$. Nach dem Satz von Banach existiert nun genau ein $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ mit $f = T(f)$.

$$f = T(f) \iff f(t) = e^{-2C|t|}x_0 + \int_0^t e^{-2C|t|}F(s, e^{2Cs}f(s))\ ds$$

$$f = T(f) \iff \gamma(t) = e^{2C|t|}f(t)$$

genügt

$$\gamma(t) = x_0 + \int_0^t F(s, \gamma(s))\ ds.$$

Damit haben wir eine Lösung konstruiert.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Problem: Sei γ ein Lösung. Ist dann $e^{-2C|t|}\gamma(t) =: f(t)$ in $C_{\mathbb{R},\mathbb{R}^d}$?
Beobachtung: Wir können Konstruktion auch über $C_b([-t_0,t_0],\mathbb{R}^d)$ für $t_0 > 0$ durchführen. Dann ist aber $e^{-2C|t|}\gamma(t)\big|_{[-t_0,t_0]} \in C_b([-t_0,t_0],\mathbb{R}^d)$. Dann gibt uns der Satz von Banach die Eindeutigkeit. $\square$

Beispiel 1.1.3. Sei $A \in M_{d\times d}(\mathbb{K})$ und $\dot{B} = AB$, mit $B(0) = 1_{\mathbb{R}^d}$. Betrachte die Iteration

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1_{\mathbb{R}^d},\ B(t) = 1_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t A \cdot B(s)\ ds \\
&B_{j+1} = 1_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t AB_j(s)\ ds \\
&B_1 = 1_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t A\ ds = 1_{\mathbb{R}^d} + tA \\
&B_2 = 1_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t A(1+sA)\ ds = 1 + tA + t^2/2A^2 \\
&\implies B_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(tA)^j \to \exp(tA)
\end{aligned}$$

A.1 some useful stuff from one of the exercise sheets