

# Einführung in die Grundlagen der Numerik

*Vorlesungsmitschriften im Wintersemester 2018/19*

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>1</b>
1.1	Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	1



## VORWORT

---

Diese Vorlesungsmitschriften werden in der Vorlesung *Einführung in die Grundlagen der Numerik* von Prof. Ira Neitzel im Wintersemester 2018/19 an der Universität Bonn angefertigt.

Wir versuchen, diese immer unter <https://pankratius.github.io> zu aktualisieren.



## 1. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

---

### 1.1 Orthogonalisierungsverfahren

Betrachte  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , wobei  $A$  schlecht konditioniert sein kann. Wir wollen ein Gleichungssystem der Form  $Ax = b$ , mit  $b \in^n$  gegeben, lösen. Dazu suchen wir eine Orthogonalmatrix  $Q \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  und eine obere Dreiecksmatrix  $R \in n$  mit  $A = QR$ . Dann erhalten wir das äquivalente Problem

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b.$$

#### 1.1.1 Eigenschaften orthogonaler Matrizen

**Lemma 1.1.1.** Sei  $Q \in \text{O}_m(\mathbb{R})$  orthogonal. Dann ist auch  $Q^T$  orthogonal und es gilt

$$Qx = Q^T x = x$$

*Beweis.* Es gilt

$$Qx^2 = x^T Q^T Qx = x^T x = x.$$

Genauso für  $Q^T$ . □

**Lemma 1.1.2.** Sei  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  regulär und  $Q \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  orthogonal. Dann gilt

$$\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$$

*Beweis.* Die Matrixnorm  $A$  ist durch die euklidische Norm induziert, i.e.

$$A = \max_{x \neq 0} \frac{Ax}{x}.$$

Also folgt aus lemma 1.1.1, dass  $(QA) = (A)$  gilt.

Betrachte jetzt

$$A^{-1}Q^T = \max_{x \neq 0} \frac{A^{-1}Q^T x}{x} = \max_{x \neq 0} \frac{A^{-1}Q^T x}{Q^T x} \stackrel{y:=Q^T x}{=} \max_{y \neq 0} \frac{A^{-1}}{y} = A^{-1}$$

□

Also ist für das LGS  $Rx = Q^T b : \kappa_2(R) = \kappa_2(A)$ . Also hat sich die Kondition des Problems nicht verschlechtert.

1.1.2 Anwendung: Lineare Ausgleichsgeraden Betrachte für gegebenes  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} Ax - b.$$

Dieses Problem ist äquivalent zur Optimierung von  $Ax - b^2$ .

Seien nun  $m$  Tupel  $(y_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$  ( $1 \leq i \leq m$ ) gegeben. Gesucht ist diejenige affine Gerade  $c + dy$  in  $\mathbb{R}^2$ , so dass die Summe der Quadrate der Punkte von der Gerade minimal ist. Wir erhalten also das Optimierungsproblem

$$\min_{(c,d) \in \mathbb{R}^2} \left( \sum_{i=1}^m (c + dy_i - f_i)^2 \right) = \min_{(c,d) \in \mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Betrachte allgemeiner das Polynom

$$p(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^k.$$

Gesucht sind jetzt die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  mit

$$\sum_{j=1}^m (p(y_j) - f_j)^2$$

ist minimal. Schreibe dies ebenfalls als Optimierungsproblem:

$$\min_{a_0, \dots, a_{n-1}} \begin{pmatrix} y_1^0 & \dots & y_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m^0 & \dots & y_m^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}^2.$$

---

Ende Vorlesung 1

---