Lösung 3.2. i) Sei $a \in L$ algebraisch über Z. Dann gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in Z$, so dass für

$$p := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \in Z[X]$$

$p(z) = 0$ gilt, und insbesondere ist z algebraisch über

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Da $\lambda_i \in Z$ gilt, sind sie algebraisch über K, weil Z/K eine algebraische Erweiterung ist. Betrachte nun die Körpererweiterung

$$\begin{array}{c} K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, z) \\ | \\ K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n,) \\ | \\ K \end{array}$$

Aus Satz 3.7 folgt, dass $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, z)/K$ eine algebraische Erweiterung von K ist, und damit, dass z algebraisch über K ist.

ii) Angenommen L/K ist algebraisch. Indem man Elemente aus Z als Elemente aus L auffässt, sind sie schon algebraisch über K. Indem man Elemente aus K als Elemente aus Z auffässt, erhält man, dass L/Z algebraisch ist.

Angenommen, L/K und L/Z sind algebraisch. Also L/K ist nach i) auch algebraisch, indem man die Argumentation für jedes Element durchführt.

Lösung 3.3. i) Da E/K endlich ist, gibt es endlich viele Elemente $e_1, ..., e_n \in E$, so dass $E = K(e_1, ...e_{,n})$ ist, wobei $e_1, ..., e_n$ algebraisch über K, und damit auch über F, sind. Nach Satz 3.7. ist dann $F(e_1, ..., e_n)/F$ eine endliche Erweiterung. Weil $E.F$ ein Zwischenkörper dieser Erweiterung ist, und damit ein F-Unterraum von $F(e_1, ..., e_n)$, ist $\dim_F E.F < \infty$.

ii) Es gilt $E.F = F(E)$. Wenn E/K algebraisch ist, dann ist jedes Element aus E algebraisch über F, weil $K \subseteq F$ gilt. Damit folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.9.

iii) Angenommen, E/K und F/K sind endlich. Aus i) folgt, dass dann $E.F/F$ endlich ist. Für die Körpererweiterung

$$\begin{array}{c} E.F \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array}$$

folgt dann aus der Gradformel, dass

$$[E.F : K] = [F.K] \cdot [E.F : F]$$

gilt, also insbesondere, dass

$$[E.F : K] < \infty.$$

Angenonmmen, $E.F/K$ ist endlich. Weil $E \subset E.F$ und $F \subset E.F$ insbesondere Untervektorräume sind, folgt die Aussage.

iv) Betrachte die Körpererweiterungen

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & E.F & \\ E \arrow[ur] & & F \arrow[ul] \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

dann sind E bzw. F Zwischenkörper der Erweiterung $E.F/K$. Angenommen, E/K ist algebraisch und F/K ist algebraisch. Dann folgt aus ii), dass $E.F/F$ algebraisch ist,damit aus 2ii), dass auch $E.F/K$ algebraisch ist. Angenommen, $E.F/K$ ist algebraisch. Weil E und F Zwischenkörper dieser Erweiterung sind, gilt die Aussage insbesondere für diese beiden.