Harmonische Schwingungen

Aaron Wild
(physikrolf@asgspez.de)

Bewegungen auf Kreisbahnen

Dreht sich bspw. eine Kreisscheibe um eine Achse durch den Mittelpunkt, so haben Punkte mit unterschiedlichem Abstand r vom Mittelpunkt unterschiedliche Geschwindigkeiten v, da die weiter außen liegenden Punkte bei einer Umdrehung eine größere Strecke s zurücklegen müssen.
Wir definineren die Winkelgeschwindigkeit als Änderung des Winkels φ pro gegebene Zeiteinheit

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \left(= \frac{d\varphi}{dt} \right). \tag{1}$$

Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit nennen wir α

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \left(\frac{d\omega}{dt} \right). \tag{2}$$

Da (**im Bogenmaß**) $s = \varphi r$ gilt, ist

$$v = \omega r. \tag{3}$$

Wir können ω also auch als Proportionalitätsfaktor zwischen r und v sehen.

Radialkraft

Soll sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegen, wobei der Geschwindigkeitsvektor seine Richtung ständig ändert, muss nach den newtonschen Axiomen auf ihn eine Kraft wirken. Diese ist gegeben durch

$$F_r = m a_r = -\frac{mv^2}{r} = -m\omega^2 r. \tag{4}$$

Diese Kraft zeigt immer zum Kreismittelpunkt. Es kann sich dabei um Zugkräfte in einem Seil oder die Gravitation handeln.

Harmonische Schwingungen am Kreis

Projektion der Vertikalbewegung

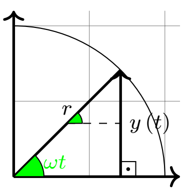

Abbildung 1: Berechnung der $y-$Koordinate bei der Kreisbewegung

Wir betrachten die Bewegung eines Körpers mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Nach (**??**) gilt für den Drehwinkel $\varphi = \omega t$. Nun soll die Höhe y des Körpers über dem Boden analysiert werden. Da das Dreieck aus r und y mit dem Winkel $\varphi = \omega t$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse r und Gegenkathete y ist (vgl. Abb. **??**), gilt

$$\sin\varphi = \frac{y(t)}{r} \Rightarrow y(t) = r \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\omega t \tag{5}$$

Kraft bei der harmonischen Schwingung

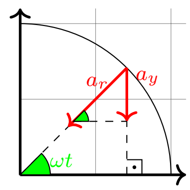

Abbildung 2: Beschleunigungen bei der Kreisbewegung

Wir bestimmen die $y-$Komponente der Beschleunigung a_r, die auf den Körper wirkt. Das Dreieck mit den Seiten y und r ist dem Dreieck aus a_r und a_y ähnlich (vgl. Abb.**??**), da sie beide den rechten Winkel und den Winkel ωt haben (Parallelverschiebung). Aus (**??**) und (**??**) können wir a_y in Abhängigkeit von y bestimmen

$$a_y = \sin\omega t \cdot a_r = -\frac{y}{r} \cdot \omega^2 r = -\omega^2 y. \tag{6}$$

Wann immer wir für die Beschleunigung, und damit für die Kraft, einen Ausdruck der Form (**??**) haben, sprechen wir von einer HARMONISCHEN SCHWINGUNG, und erhalten eine Lösung für $y(t)$ in der Form (**??**).
Da $\sin\omega t$ eine Periode von $T = \frac{2\pi}{\omega}$ hat, kann so auch die Schwingungsdauer eines Systems der Form (**??**) bestimmt werden.

Beispiel: Federschwinger

Für eine Feder gilt das Hooksche Gesetz, $F = m a_x = -Dx$, wobei x die Auslenkung von der Ruhelage ist. Der Vergleich mit (**??**) zeigt, das $\omega^2 = \frac{D}{m}$ ist, und damit für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ gilt.

Aufgaben

Aufgabe 1 (Kugel und Kopf)
Jemand hält ein leichtes Seil der Länge $\ell = 8$ m über seinen Kopf, an dessen Ende sich eine Kugel der Masse $m = 2$ kg befindet, und wirbelt es kreisförmig. Die Kugel soll eine Geschwindigkeit von 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ haben.

a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Kugel?

b) Welche Kräfte und Gegenkräfte wirken wo, und wie groß sind sie?

Aufgabe 2 (Coladose)
Ein Zylinder mit Radius R ist mit Wasser gefüllt. Darein wird eine Dose mit Radius r $(r < R)$ getan, sodaß sie schwimmt. Man bestimme die Masse m der Dose in Abhängigkeit von r, R und der Schwingungsdauer bei kleinen Auslenkungen T[1].

Aufgabe 3 (Loch im Boden)
Der Nordpol und der Südpol werden miteinander verbunden. Jemand springt am Nordpol in den Tunnel. Wie lange dauert es, bis er am Südpol hinaus kommt? Der Erdradius beträgt R, und die Dichte der Erde ist ρ. *Tipp: Die Kraft, die auf einen Körper der Masse m im Abstand r von dem Erdkern wirkt, ist $F = -G\frac{mM(r)}{r^2}$, wobei M die Masse der Kugel mit dem Radius r $(r < R)$ ist. G ist eine Konstante.*

Aufgabe 4 (ISS)
Welche Geschwindigkeit hat die ISS, wenn sie sich auf einer Höhe von $r = 419.18$ km über der Erde im kreisförmigen Orbit befindet?

[1] Harmonische Schwingungen treten meist nur bei *kleinen* Auslenkungen aus. Bei dem Federschwinger gilt bspw. bei zu großen Auslenkungen das Hooksche Gesetz nicht mehr.