Aufgabenserie 7

Lösungen könnt ihr an physikrolf@gmail.com schicken. Neue Aufgaben wird es dann vermutlich wieder Mitte Mai geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`.

Aufgabe 1 (Seilkraft)

Gegeben sei ein Pendel der Länge ℓ mit maximalem Auslenkungswinkel A, wobei $A \ll 1$. Für den Auslenkungswinkel $\theta(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ gilt

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) \tag{1.1a}$$

$$\omega(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,, \tag{1.1b}$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ die Kreisfrequenz der Schwingung ist.
Bestimme näherungsweise (besser als mg!) die durchschnittliche Spannung im Faden während eines Umlaufs.

*** **Lösung 1** (*Morin - Classical Mechanics*)

Sei F_s die Spannkraft im Seil. Dann ergibt Gleichung für das radiale Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} &F_s(t) = m\omega(t)^2\ell + mg\cos\theta(t) \\ \implies\ &F_s(t) = m\left(-A\omega_0\sin(\omega_0 t)\right)^2\ell + mg\cos\left(A\cos(\omega_0 t)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Da wir nur kleine Auslenkungen betrachten, können wir die Taylor-Näherung des Cosinus für kleine Winkel betrachten, $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Damit können wir $\cos(A\cos(\omega_0 t))$ nähern zu

$$\cos\left(A\cdot\cos(\omega_0 t)\right) \approx 1 - \frac{1}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t).$$

Damit können (1.2) umformen zu

$$F_s(t) \approx mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) + mg\left(1 - \frac{1}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t)\right)$$

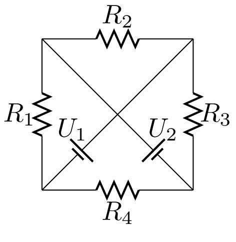
Gleichzeitig können wir jetzt den Ausdruck für ω_0 aus der Aufgabenstellung einsetzen, und erhalten schlussendlich

$$\boxed{F_s(t) \approx mg + mgA^2\left(\sin^2(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t)\right).}$$

Wir sehen nun, dass wir $F_s(t)$ besser als mg abschätzen können, es gibt ja noch den zweiten Term in der Summe. Den Durchschnitt können wir jetzt über ein Integral ausrrechnen, wobei wir die Substitution $x := \omega_0 t$ nehmen können

$$\begin{aligned} \overline{F_s} &= mg + mgA^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos^2(x)\ dx \\ &\boxed{= mg + \frac{mgA^2}{4}.} \end{aligned}$$

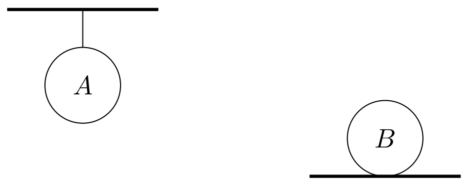
Aufgabe 2 (Widestandsquadrat)



In dem abgebildeten Stromkreis seien die Diagonalverbindungen nicht miteinander verbunden und es gelte $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 =: R$ und $U_1 = U_2 =: U$.
Wie groß sind die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4 durch die jeweiligen Widerstände?

Aufgabe 3 (Wärmezufuhr)

Die homogenen Kugeln A und B seien komplet identisch und haben die gleiche Anfangstemperatur. Die Kugel A hängt an einem Faden von einer Decke, und die Kugel B liegt auf einer horizontalen Ebene.
Nun wird beiden Kugeln die gleiche Menge Energie in Form von Wärme hinzugefügt, wobei sämtliche Verluste an die Umgebung vernachlässigbar seien. Wie verhalten sich die Endtemperaturen der beiden Kugeln danach?



**** **Lösung 3** (*1. IPhO 1967*)

Durch die Wärmezufuhr dehnen sich die Kugeln aus. Gehen wir davon aus, dass die Kugel die Wärme langsam und aus allen Richtungen gleichmäßig verteilt zugeführt bekommt, können wir davon ausgehen, dass sich die Kugel auch gleichmäßig ausdehnt. Das bedeutet aber, dass sie ihre Form weiterhin beibehält.†
Dadurch verschiebt sich nun aber der Kugelschwerpunkt. Es kann sich jedoch der Schwerpunkt der Kugel A nur nach unten verschieben, und der Schwerpunkt der Kugel B nur nach oben.
Verschiebt sich der Kugelschwerpunkt ändert sich auch die potentielle Energie im Gravitationsfeld der Erde. Im Fall der Kugel A verschiebt sich der Schwerpunkt nach unten. Das bedeutet aber, dass die potentielle Energie der Kugel geringer wird.
Gleichzeitig verschiebt sich der Schwerpunkt der Kugel B weiter nach oben. Dadurch erhöht sich aber die potentielle Energie der Kugel.
Bei der Bewegung von Kugel A kann diese „verlorene“ potentielle Energie aber nicht einfach verschwinden, und bei der Kugel B muss die „gewonnen“ potentielle Energie irgendwo herkommen.
An dieser Stelle kann man ein Energieerhaltungsargument machen, oder, wenn man genauer seien möchte, den *1. Hauptsatz der Thermodynamik* verwenden. Wenn wir mit Q die Wärme bezeichnen, die einer Kugel zugeführt wird, mit U die in der Kugel gespeicherte Energie und mit W die Arbeit, die die

†Vermutlich ist dies eine Folge der Rotationssymetrie der Anordnung und der gleichmäßigen Wärmezufuhr.