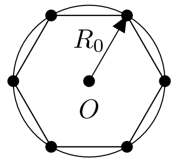
Aufgabenseminar Himmelsmechanik

physikrolf@gmail.com, pankratius.github.io/rolf



Aufgabe 1 (Polygon)

Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse m sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhänigkeit von n) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?

** **Lösung 1** (*P. Gnädig*)

Aus Symmetriegründen heben sich die nicht-radialen Teile der wirkenden Gravitationskräfte auf, sodass alle n Massen sich zum Mittelpunkt des Polygons, O, bewegen. Dabei muss die polygonform erhalten bleiben. Weil die Abhängigkeit Körperabstand-Gravitationskraft aber nicht-linear ist, ist die Bewegung nicht gleichmäßig beschleunigt. Vielmehr sollte die Beschleunigung größer werden, je geringer der Körperabstand ist.

Um nun die Zeit T auszurechnen, bis die Körper im Punkt O kollidieren, kann man zuerst die Kraft auf eine der Massen m ausrechnen. Diese ist gegeben durch die Summe der Radialteile aller Gravitationskräfte der anderen $n-1$ Körper, also, wenn der Radius des Polygons gerade R ist,

$$F = Gm \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m \sin\left(\frac{\pi}{i}\right)}{\left(2R\sin\left(\frac{\pi}{i}\right)\right)^2} = \frac{Gm}{R^2} \cdot \underbrace{\frac{m}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}}_{:=M_n}. \tag{1.1}$$

Die Kraft ist also so, als würde sich der Körper im Gravitationsfeld eines stationären Körpers mit der Masse $M_n = \frac{m}{4}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}$ bewegen.

Diese Bewegung kann man jetzt als Bewegung entlang einer Ellipse ohne kleiner Halbachse, und mit großer Halbachse $\frac{R_0}{2}$ auffassen. Die Zeit, die dann bis zum Zusammensturz benötigt wird, entspricht genau der halben Periode $T_e/2$.

Diese kann man über das dritte Keplersche Gesetz aus der entsprechenden Periode T_k für eine Kreisbahn mit Radius R_0 ausrechen, wobei $F_g = F_{rad}$ benutzt wird:

$$\frac{GmM_n}{R_0^2} = mR\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T_k}\right)^2}_{=\omega^2} \Rightarrow T_k = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3}{GM_n}}. \tag{1.2}$$

Mit dem dritten Keplerschen Gesetz folgt dann

$$\boxed{\left(\frac{T_e}{T_k}\right)^2 = \left(\frac{R_0/2}{R_0}\right)^3 \Rightarrow T_e = \pi\sqrt{\frac{R_0^3}{8GM_n}}.} \tag{1.3}$$