

# Aufgabenseminar Himmelsmechanik

pankratius.github.io/rolf

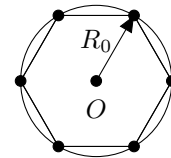
Gravitationskraft  $\mathbf{F} = \frac{mMG}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ ; Gravitationspotential  $U(r) = -\frac{mMG}{r}$ ; Gesamtenergie auf einer elliptischen Flugbahn  $E = \frac{mMG}{2a}$ ; Fläche einer Ellipse  $A = \pi ab$ ; für Punkt auf Ellipse bleibt Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant, Runge-Lenz-Vektor  $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m^2 GM \hat{\mathbf{r}} = \text{const.}$   
Kepler I: Bewegung von HK auf Kegelschnitten ( $r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ , mit  $p = \ell^2 / \Gamma m^2$  und  $\varepsilon^2 = 1 + 2E^2 \ell^2 / \Gamma^2 m^3$ ), Brennpunkt im Schwerpunkt; Kepler II: Radiusvektor überschreitet gleiche Flächen in gleichen Zeiten; Kepler III: für zwei Bahnen gilt  $T_1^2 / a_1^3 = T_2^2 / a_2^3$

wichtige Größen: Abstand von Schwerpunkt ( $r$ ), Gravitationskraft ( $\mathbf{F}$ ), Gravitationspotential ( $U(r)$ ), Energie ( $E(r)$ ), Drehimpuls ( $\mathbf{L}$ ), Betrag des Drehimpulses ( $\ell$ ), Umlaufzeit ( $T$ ), große Halbachse ( $a$ ), kleine Halbachse ( $b$ ), Masse eines Körpers im gegebenen Gravitationsfeld ( $m$ ), Masse des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers ( $M$ ), Gravitationskonstante ( $G$ )  
Wo es sinnvoll ist, ersetzen wir  $GM$  durch eine neue Konstante,  $\Gamma$

Taylor-Näherung:  $f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}|_{x=x_0} (x - x_0)$  für  $x \approx x_0$ .

## Aufgabe 1 (Polygon)

Wir betrachten ein regelmäßiges  $n$ -Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse  $m$  sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhängigkeit von  $n$ ) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?



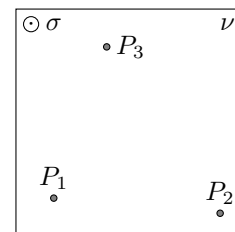
## Aufgabe 2 (Ballistische Rakete)

Eine Rakete wird vom Nordpol der Erde (Radius  $R$ , Masse  $M$ ) mit der ersten kosmischen Geschwindigkeit<sup>†</sup> gestartet, sodass sie am Äquator landet.

1. Wie groß ist die große Halbachse  $a$  der Flugbahn?
2. Was ist der größte Abstand  $h$  der Rakete von der Erdoberfläche?
3. Wie lang ist die Flugzeit  $T$  der Rakete?

## Aufgabe 3 (Starrer Körper)

Drei (nicht-kolineare) Massen  $m_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) an Punkten  $P_i$  wechselwirken ausschließlich gravitativ. Die durch diese drei Punkte aufgespannte Ebene sei  $\nu$ , und die dazu senkrecht stehende Rotationsachse  $\sigma$ . Welche Bedingungen müssen die drei Seitenlängen des Dreiecks  $\Delta P_1 P_2 P_3$  ( $a_{1,2}$ ;  $a_{1,3}$ ;  $a_{2,3}$ ) erfüllen, sodass dieses sich nicht verändert, also wie ein starrer Körper um  $\sigma$  rotiert?



## Aufgabe 4 (Komet)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn um die Sonne. Im sonnennächsten Punkt beträgt sein Abstand von der Sonne  $r_e/3$ , wobei  $r_e$  der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn ist. Alle anderen Wechselwirkungen als die mit der Sonne vernachlässigend, wie lang ist die Zeit  $\tau$ , die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet?

**Tipp:**

$$\forall x, a \in \mathbb{R}^+, x > a: \int \frac{x}{\sqrt{x-a}} dx = \frac{2}{3} (x+2a) \sqrt{x-a} + C. \quad (4.1)$$

## Aufgabe 5 (Gravity Gradient Stabilization)

Wir betrachten einen Satelliten, der aus zwei Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  besteht, die durch einen masselosen Strick der Länge  $s$  verbunden sind.

Dieser Satellit befindet sich auf einer Kreisbahn um die Erde mit Radius  $R$ . Dabei zeigt er die Tendenz, sich aufzurichten, und um die sich einstellende Ruhelage zu oszillieren.

Bestimme die Frequenz  $f$  dieser Schwingung.

<sup>†</sup>Das ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper eine stabile Kreisbahn über der Erdoberfläche haben kann.

### Aufgabe 6 (Periheldrehung)

Wir betrachten ein Gravitationsfeld, was vom normalen Keplerschen um eine sehr kleine Perturbation  $\delta U(r)$  abweicht:

$$U^\dagger(r) = U(r) + \delta U(r) = U(r) + \frac{\beta}{r^2} \quad (6.1)$$

Das führt dazu, dass die elliptische Bahn, auf der ein Körper sich bewegt, nicht mehr geschlossen ist, sondern sich die Periapsis bei jeder Umdrehung um einen kleinen Winkel  $\delta\varphi$  verschiebt.

Bestimme  $\delta\varphi$  in Abhängigkeit von den ursprünglichen Bahnparametern und  $\beta$ .

Dabei kann ohne Beweis genutzt werden, dass bei einer solchen Änderung des Potentials der Drehimpulsvektor weiterhin konstant ist.

### Aufgabe 7 (Schwarzschildmetrik)

Die Bewegung eines Teilchens in der Schwarzschildmetrik<sup>‡</sup> kann durch ein effektives Potential der Form

$$\tilde{U}(r) = \frac{mc^2}{2} \left( -\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3} \right). \quad (7.1)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $r_s := \frac{2\Gamma}{c^2}$  der sog. *Schwarzschildradius* und  $a := \frac{\ell}{mc}$  eine Referenzlänge.

Die Gesamtenergie ist dann einfach

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{U}(r). \quad (7.2)$$

Finde die Radii, bei denen kreisförmige Orbits um den Zentralkörper möglich sind, sowie den Abstand  $r_{isco}$  vom Zentralkörper, an dem der letzte stabile kreisförmige Orbit möglich ist. Dabei kann genutzt werden, dass für gewöhnlich  $\frac{r_s}{a} \ll 1$  gilt.

<sup>‡</sup>Allgemein-relativistische Beschreibung der Gravitationswirkung eines ruhenden, sphärisch-symmetrischen Körpers.