

Aufgabenseminar Himmelsmechanik

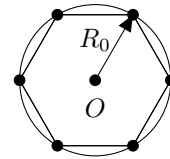
pankratius.github.io/rolf

Gravitationskraft $\mathbf{F} = \frac{mMG}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$; Gravitationspotential $U(r) = -\frac{mMG}{r}$; Gesamtenergie auf einer elliptischen Flugbahn $E = \frac{mMG}{2a}$; Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$; für Punkt auf Ellipse bleibt Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant, Runge-Lenz-Vektor $\varepsilon = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{v}}{GM} + \hat{\mathbf{r}} = \text{const.}$
Kepler I: Bewegung von HK auf Kegelschnitten, Brennpunkt im Schwerpunkt; Kepler II: Radiusvektor überschreitet gleiche Flächen in gleichen Zeiten; Kepler III: für zwei Bahnen gilt $T^2/T^2 = a_1^3/a_2^3$

wichtige Größen: Abstand von Schwerpunkt (r), Gravitationskraft (\mathbf{F}), Gravitationspotential ($U(r)$), Energie ($E(r)$), Drehimpuls (\mathbf{L}), Umlaufzeit (T), große Halbachse (a), kleine Halbachse (b), Masse eines Körpers im gegebenen Gravitationsfeld (m), Masse des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers (M), Gravitationskonstante (G)

Aufgabe 1 (Polygon)

Wir betrachten ein regelmäßiges n -Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse m sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhängigkeit von n) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?



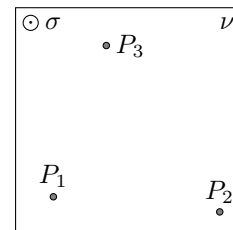
Aufgabe 2 (Ballistische Rakete)

Eine Rakete wird vom Nordpol der Erde (Radius r) mit der ersten kosmischen Geschwindigkeit gestartet, sodass sie am Äquator landet.

1. Wie groß ist die große Halbachse a der Flugbahn?
2. Was ist der größte Abstand h der Rakete von der Erdoberfläche?
3. Wie lang ist die Flugzeit T der Rakete?

Aufgabe 3 (Starrer Körper)

Drei (nicht-kolineare) Massen m_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) an Punkten P_i wechselwirken ausschließlich über durch ihre Gravitationskraft. Die durch die drei Punkte aufgespannte Ebene sei ν , und die dazu senkrecht stehende Rotationsachse σ . Welche Bedingungen müssen die drei Seitenlängen des Dreiecks $\Delta P_1 P_2 P_3$ erfüllen, so dass dieses sich nicht verändert, also wie ein starrer Körper um σ rotiert?



Aufgabe 4 (Komet)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn um die Sonne. Im sonnennächsten Punkt beträgt sein Abstand von der Sonne $r_e/3$, wobei r_e der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn ist. Alle anderen Wechselwirkungen als die mit der Sonne vernachlässigend, wie lang ist die Zeit τ , die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet?