Aufgabenserie 1

Abgabe: 19. Mai 2017

Die Aufgaben sollten bis zum **19. Mai** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr an physikrolf@gmail.com. Jede Aufgabe hat eine bestimmte Anzahl an erreichbaren Punkten. Wie viele das sind, müsst ihr raten. Versucht, die Lösungen so genau wie möglich aufzuschreiben. Für besonders schnelle/gute/witzige Lösungen kann es Bonuspunkte geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`

Aufgabe 1 (Eisenbahnwaggon)

Ein Eisenbahnwaggon der Masse $m_1 = 37$ t rollt reibungsfrei auf einem Bahngleis und stößt mit einem anderen Waggon zusammen. Beide verkuppeln sich und rollen zusammen weiter. Dabei geben sie 35% der anfangs vorhandenen kinetischen Energie als Wärme ab. Wie groß ist die Masse m_2 des zweiten Waggons?

** **Lösung 1** (*4. Runde IPhO 2017, Kurzaufgabe*)

Da keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Impuls erhalten.
Gleichzeitig bleibt die Gesamtenergie erhalten,

$$E_{kin,v} = E_{kin,n} + E_w. \tag{1.1}$$

Hierbei ist $E_{kin,v}$ die kinetische Energie vor dem Stoß, $E_{kin,n}$ die kinetische Energie nach dem Stoß, und E_w die abgegebene Wärmeenergie. Es ist gegeben, dass $E_w = \eta \cdot E_{kin,v}$ gilt, wobei $\eta = 0.35$ gilt. Um die Impulserhaltung zu benutzten kann man entweder die kinetische Energie durch die Impulse oder aber durch die Geschwindigkeiten ausdrücken.
Drückt man die kinetische Energie durch die Impulse aus, so ist im Allgemeinen $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$. Da der Impulserhalten bleibt, gilt $p := p_v = p_n =$ konst.. Damit lässt sich die Energieerhaltung schreiben als

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + \eta \cdot \frac{p^2}{2m_1}, \tag{1.2}$$

da nach dem Stoß nur noch ein „Waggon" der Masse $m_1 + m_2$ da ist. Division durch p^2 auf beiden Seiten führt auf

$$\frac{1}{2m_1} = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\eta}{2m_1}. \tag{1.3}$$

Diese Gleichung erhält nur noch die bekannten Größen m_1 und η, sowie die unbekannte Größe m_2. Subtrahieren von $\frac{\eta}{2m_1}$, multiplizieren mit 2 und anschließendes Bilden des Reziproken führt auf

$$\boxed{\frac{1}{m_1}(1-\eta) = \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_2 = m_1\left(\frac{1}{1-\eta} - 1\right) \approx 20 \text{ t.}}$$

Das gleiche kann man auch mit den Geschwindigkeiten machen. Hier hat die Energieerhaltung die Form

$$m_1 \frac{v_v^2}{2} = (m_1 + m_2)\frac{v_n^2}{2} + m_1 \eta \cdot \frac{v_v^2}{2}. \tag{1.4}$$

Explizit ausgeschrieben besagt die Impulserhaltung, dass

$$m_1 v_v = (m_1 + m_2) v_n \Rightarrow v_n = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_v \tag{1.5}$$

gilt. Einsetzen von (1.5) in (1.4) führt auf

$$m_1 \frac{v_v^2}{2} = (m_1 + m_2)\frac{v_v^2 m_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} + m_1 \eta \cdot \frac{v_v^2}{2}.$$

Dividieren durch $m_1^2 v_v^2$ führt auf

$$\frac{1}{2m_1} = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\eta}{2m_1}. \tag{1.6}$$

Die Bedingung, die die Massen erfüllen müssen, wenn wir Geschwindigkeiten betrachten (Gleichung (1.6)) entspricht also genau der, die erfüllt sein muss, wenn wir Impulse betrachten (Gleichung (1.3)). Das sollte auch so sein.

Aufgabe 2 (Zwei Linsenpositionen)

Versucht man, einen Gegenstand mit einer Sammellinse auf eine im festen Abstand a positionierte Fläche scharf abzubilden, stellt man fest, dass das für zwei unterschiedliche Linsenpositionen möglich ist.
Betrachte einen Aufbau, bei dem $a = 120$ m gilt. Das Verhältnis der Bildgrößen beträgt $\frac{1}{9}$. Wie groß ist die Brennweite der verwendeten Linse?

**** **Lösung 2** (*4. Runde IPhO 2017*)

Es entsteht einmal ein kleines Bild, und einmal ein großes Bild. Alle Variabeln, die sich auf das kleine Bild beziehen, haben einen Index 1, und alle, die sich auf das große Bild beziehen, einen Index 2.
Das in der Aufgabenstellung definierte Verhältnis definieren wir als ε^2. Dann gilt

$$\varepsilon^2 = \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{9}, \tag{2.1}$$

wobei B jeweils die Bildgröße bezeichnet. Aus der Strahlenoptik wissen wir, dass für die Gegenstandsgröße G, die Bildgröße B, die Gegenstandsweite g und die Bildweite b im Allgemeinen gilt

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \Rightarrow B = \frac{b}{g} \cdot G \Rightarrow B_1 = \frac{b_1}{g_1} \cdot G \text{ und} B_2 \ = \frac{b_2}{g_2} \cdot G.$$

Diese Ausdrücke für B_1 und B_2 kann man jetzt in (2.1) einsetzen. Da die Gegenstandsgröße für beide Bilder gleich groß ist (es wird ja immer noch der gleiche Gegenstand abgebildet), kürzt sich G, sodass wir auf

$$\varepsilon^2 = \frac{b_1}{g_1} \cdot G \cdot \frac{g_2}{b_2} \cdot \frac{1}{G} = \frac{b_1 g_2}{b_2 g_1} \tag{2.2}$$

kommen.
Diese Gleichung kann einfacherer werden, wenn man sich überlegt, wie b_1 und g_2 bzw. b_2 und g_1 im Zusammenhang stehen. Dafür kann man sich vorstellen, dass man geraden den Aufbau hat, der die scharfe Abbildung des großen Bildes liefert. Tauscht man jetzt Linse und Schirm aus, muss (weil der Strahlengang umkehrbar ist) wieder ein scharfes Bild entstehen. Das ist jetzt also das Kleine. Was man aber nur gemacht hat, ist Bildweite und Gegenstandsweite zu tauschen. Also ist $b_1 = g_2$ und $b_2 = g_1$.
Setzten wir diese beiden Ausdrücke in (2.2) ein, so kommen wir

$$\varepsilon^2 = \frac{b_1^2}{g_1^2} \Rightarrow b_1 = \varepsilon g_1. \tag{2.3}$$

Es gibt jetzt mehrere Möglichkeiten, wie man mit diesem Ergebnis weiter rechnet.
Eine davon ist, die sog. Besselgleichung zu nehmen. Diese führt neben dem Abstand von Gegenstand und Bild a auch noch den Abstand e zwischen den beiden Linsenpositionenen, bei denen die Abbildung scharf ist, ein. In unserem Fall ist das also $e = g_1 - g_2$*. Damit kann man die Brennweite f mit der Gleichung

$$f = \frac{a^2 - e^2}{4a} \tag{2.4}$$

ausrechnen.
Da die Linse dünn ist, muss $a = b_1 + g_1$ sein. Also lässt sich die Gegenstandsweite g_1 schreiben als (2.3)

$$a = g_1 + b_1 = g_1 + \varepsilon g_1 = g_1 (1 + \epsilon) \Rightarrow g_1 = \frac{a}{1 + \varepsilon}. \tag{2.5}$$

Wir können nun (2.3) und (2.4) nutzten, um e nur durch a und ε auszudrücken. Zuerst ist $g_2 = b_1$, also $e = g_1 - b_1$. Einfach einsetzen ergibt

$$e = g_1 - b_1 \overset{(2.3)}{=} g_1 - \varepsilon g_1 = g_1 (1 - \varepsilon) \overset{(2.5)}{=} a \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \tag{2.6}$$

Diesen Ausdruck können wir nun in (2.4) einsetzten

$$\boxed{f = \frac{a^2 - e^2}{4a} = a \cdot \frac{1 - \left({}^{e}/_{a}\right)^2}{4} = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2}{4} = a \cdot \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}.} \tag{2.7}$$

*Das Vorzeichen von e ist nicht wichtig, weil nur e^2 in (2.4) eingeht.

Mit $\varepsilon = \sqrt{1/9} = 1/3$ ist $f = 22.5$ m.
Das gleiche Ergebnis kann man auch mit der Abbildungsgleichung finden. Wir wissen, dass

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} \Rightarrow f = \frac{g_1 b_1}{g_1 + b_1} \tag{2.8}$$

gilt. Wir können jetzt wieder die Ausdrücke für b_1 und g_1 aus (2.3) und (2.5) einsetzen

$$\boxed{f = \frac{g_1 b_1}{g_1 + b_1} \overset{(2.3)}{=} \frac{g_1^2 \varepsilon}{g_1 + \varepsilon g_1} \overset{(2.5)}{=} a^2 \cdot \frac{\varepsilon \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}{\frac{a}{1+\varepsilon} + \varepsilon \cdot \frac{a}{1+\varepsilon}} = a \cdot \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.} \tag{2.9}$$

Es kommt also mit beiden Methoden genau das gleiche raus. Ach was!

Aufgabe 3 (Gute Ampel)

Ein Auto nähert sich auf einer Straße einer Ampel mit der Geschwindigkeit v_0. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Straße und Auto beträgt μ.
Die Ampel springt von Grün auf Gelb, wenn der Abstand Auto-Ampel gerade s_0 beträgt. Wie lang muss die Ampel gelb sein, damit der Autofahrer, unabhängig von v_0, entweder vor der Ampel zum Stehen kommt, oder aber mit konstanter Geschwindigkeit die Ampel kreuzt?

*** **Lösung 3** (*Alte IPhO-Aufgabe*)

Diese Aufgabe kann man über mehrere Wege lösen.
Am Einfachsten geht es mit der Energieerhaltung. Wenn das Auto nach zurücklegen der Strecke s_0 auf jeden Fall zum Stehen gekommen sein, muss die auf dieser Strecke aufgebrachte Reibungsarbeit E_r mindestens so groß sein, wie die kinetische Energie E_{kin} vor dem Bremsen. Damit gillt

$$E_r \geq E_{kin} \Rightarrow mg\mu s_0 \geq \frac{mv_0^2}{2}. \tag{3.1}$$

Damit man vor der Ampel bei gegebener Strecke stehen bleiben kann, muss die Geschwindigkeit so gewählt werden, dass (3.1) erfüllt ist. Durch das Wurzelziehen ändert sich die Richtung der Ungleichung nicht, sodass man höchsten mit einer Geschwindigkeit von

$$v_0 \leq \sqrt{2 s_0 g \mu} \tag{3.2}$$

vor der Ampel stehen bleiben kann.
Wenn man die Ampel bei gegebener Gelbphase ohne zu Bremsen kreuzen will, muss die Geschwindigkeit v_0 dafür groß genug sein, also

$$v_0 \geq \frac{s_0}{t_g} \tag{3.3}$$

Da ein Bremsen aber immer möglich seien soll, können wir beide Bedingungen zusammen in einer Ungleichung schreiben

$$\sqrt{2 s_0 g \mu} \geq v_0 \geq \frac{s_0}{t}. \tag{3.4}$$

Nach Aufgabenstellung soll die Zeit der Gelbphase t_g so gewählt werden, dass die Bedingung (3.4) unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Das ist der Fall, wenn

$$\boxed{\sqrt{2 s_0 g \mu} \leq \frac{s_0}{t_g} \Rightarrow t_g \geq \sqrt{\frac{s_0}{2 g \mu}}} \tag{3.5}$$

gilt.
Man kann die Aufgabe auch ohne die Energieerhaltung lösen. Dazu betrachten wir wieder beide möglichen Fälle. Wenn das Auto bremsend vor der Ampel zum stehen kommen soll, benötigt es dafür die Bremszeit

$$t_b = \frac{v_0}{g\mu}. \tag{3.6}$$

Die Bremszeit t_b darf natürlich nur so lang sein wie die Zeit der Gelbphase, also $t_b \leq t_g$.
Gleichzeitig darf der in der Zeit t_b zurückgelegte Bremsweg s_b höchsten so lang sein wie der Anfangsabstand zur Ampel s_0. Der Bremsweg beträgt

$$s_0 \geq s_b = -\frac{g\mu}{2} t_b^2 + v_0 t_b \overset{(3.6)}{=} \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow v_0 \leq \sqrt{2 s_0 g \mu}. \tag{3.7}$$

Das ist genau die gleiche Aussage wie (3.2)!
Die Argumentation für das Durchfahren bleibt hier die gleiche, (3.3) gilt also. Wir haben also diesmal drei Bedigungen,

$$v_0 \leq \sqrt{2 s_0 g \mu} \tag{3.8a}$$

$$v_0 \leq t_g g \mu \tag{3.8b}$$

$$v_0 \geq \frac{s_0}{t_g}. \tag{3.8c}$$

Das scheint eine Bedinung mehr zu sein, als wir bei dem Energieansatz gebraucht haben.
Stellen wir (3.8c) aber s_0 um, so kommen wir auf $s_0 \leq v_0 t_g$. Weil das einen untere Abschätzung für s_0