



Aufgabenserie 2

Abgabe: 19. Juni

Die Aufgaben sollten bis zum **19. Juni** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr an physikrolf@gmail.com. Jede Aufgabe hat eine bestimmte Anzahl an erreichbaren Punkten. Wie viele das sind, müsst ihr raten. Versucht, die Lösungen so genau wie möglich aufzuschreiben. Für besonders schnelle/gute/witzige Lösungen kann es Bonuspunkte geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf [pankratius.github.io/rolf](https://github.com/pankratius.github.io/rolf)

Aufgabe 1 (Widerstandswürfel)

Ein n -dimensionaler Hyperwürfel ist die Verallgemeinerung eines Würfels auf n Dimensionen. Seine Konstruktion kann man sich so vorstellen, dass ein $n - 1$ -dimensionaler Hyperwürfel im n -dimensionalen Raum parallelverschoben wird, und man das daraus entstandene Volumen betrachtet.

Ein solcher n -dimensionaler Hyperwürfel hat 2^n Eckpunkte und $n2^{n-1}$ Seitenkanten.

Wir betrachten nun einen n -dimensionalen Hyperwürfel ($n \geq 1$), bei dem alle Seitenkanten einen Widerstand von r haben. Zeige, dass der Widerstand zwischen zwei benachbarten Eckpunkten

$$R = \frac{2 - 2^{1-n}}{n} r = \frac{2^n - 1}{n2^{n-1}} r \quad (1.1)$$

beträgt. Überlege dir an einem n deiner Wahl, dass das Ergebnis dort sinnvoll ist.

***** Lösung 1 (Max Marienhagen)

Diese Aufgabe kann sehr schön einfach und elegant mithilfe des Superpositionsprinzips gelöst werden.

Wir betrachten dazu zwei benachbarte Ecken des Würfels - nennen wir sie A und B . Nun schauen wir uns zwei Fälle an:

1. Ein Strom I wird in Ecke A eingespeist. Die Spannungen an allen Ecken des Hyperwürfels werden so eingestellt, dass an jeder Ecke außer A derselbe Strom aus dem Würfel fließt. Da es 2^n Ecken gibt und der ausfließende Strom insgesamt wieder I sein muss, fließt also an jeder Ecke außer A der Strom $\frac{I}{2^n - 1}$ aus dem Würfel.

Im n -dimensionalen Hyperwürfel hat jede Ecke n direkt benachbarte Ecken. (Weil der Hyperwürfel durch $n - 1$ Parallelverschiebungen aus dem eindimensionalen Hyperwürfel entsteht und bei jeder Parallelverschiebung eine benachbarte Ecke hinzukommt.) Das heißt, dass von der Ecke A n Widerstände abgehen. Durch jeden dieser Widerstände fließt aus Symmetriegründen ein Strom $\frac{I}{n}$ von A weg.

2. An jeder Ecke außer B wird ein Strom $\frac{I}{2^n - 1}$ in den Hyperwürfel eingespeist. Bei Ecke B fließt ein Strom I aus dem Würfel heraus. Aus Symmetriegründen fließt durch die n direkt an B anliegenden Widerstände ein Strom von jeweils $\frac{I}{n}$.

Jetzt betrachten wir die Superposition beider Fälle. Das heißt, wir addieren für jede Ecke das dort anliegende Potenzial im ersten und zweiten Fall. Für jeden Widerstand addieren wir (vorzeichenbehaftet) die im ersten und zweiten Fall durchfließenden Ströme¹.

Schauen wir uns zunächst alle Ecken, außer A und B an. Im ersten Fall verlässt ein Strom $\frac{I}{2^n - 1}$ aus dem Hyperwürfel heraus. Im zweiten Fall fließt an jeder dieser Ecken genau derselbe Strom in den Hyperwürfel hinein. Das heißt, dass in der Superposition an all diesen Ecken kein Strom in den Würfel rein oder aus ihm raus fließt.

Nun schauen wir uns Ecke A an: Im ersten Fall fließt der Strom I dort in den Würfel, im zweiten Fall der Strom $\frac{I}{2^n - 1}$. In der Superposition fließt also an der Ecke A ein Strom von $I + \frac{I}{2^n - 1}$ in den Hyperwürfel herein. Aus Ecke B fließt nach einer ganz ähnlichen Argumentation genau derselbe Strom heraus (muss ja auch so sein, weil wir gerade gesehen haben, dass bei allen anderen Ecken kein Strom rein- oder rausgeht). Dieser Strom ist also auch der Gesamtstrom, der von A nach B fließt.

Als nächstes sehen wir uns den Widerstand zwischen A und B an. Im ersten und im zweiten Fall fließt ein Strom von $\frac{I}{n}$ durch ihn. In beiden Fälle geht der Strom in die gleiche Richtung (von A zu B). Das heißt, in der Superposition fließt ein Strom von $2\frac{I}{n}$ durch diesen Widerstand von A zu B . Nach der Definition des Widerstands², ist die an diesem Widerstand abfallende Spannung deshalb $U = r \cdot 2\frac{I}{n}$. Diese Spannung ist

¹Das darf man machen, weil die Ohmschen Gesetze linear sind.

² $R = \frac{U}{I}$. Aber das solltet ihr eigentlich auch selber wissen...

also gleich der Potenzialdifferenz zwischen A und B . Jetzt können wir die Definition des Widerstandes gleich nochmal benutzen! Denn nun kennen wir den gesamten Strom, der von A nach B fließt ($I + \frac{I}{2^{n-1}}$) und die Spannungsdifferenz zwischen A und B ($r \cdot 2 \frac{I}{n}$). Dann gilt also:

$$R = \frac{r \cdot 2 \frac{I}{n}}{I + \frac{I}{2^{n-1}}} = \frac{r \cdot 2 \frac{I}{n}}{I + \frac{I}{2^{n-1}}} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = \frac{(2^n - 1) \cdot \frac{2r}{n}}{2^n - 1 + 1} = \frac{2(2^n - 1)}{n \cdot 2^n} r = \frac{2(2^n - 1)}{n \cdot 2 \cdot 2^{n-1}} r = \frac{2^n - 1}{n 2^{n-1}} r$$

Das ist das gesuchte Ergebnis.

Übrigens kann man solche Superpositionstricks sehr oft bei allen möglichen Aufgaben mit Widerstandsnetzen oder Ähnlichem anwenden und sie so enorm vereinfachen.

Aufgabe 2 (Wärmetauscher)

Die durch Wärmeleitung übertragene Wärmeleistung zwischen zwei parallelen Wänden kann näherungsweise durch die Gleichung

$$P = \lambda A \frac{T_a - T_b}{d} \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Dabei ist A die Fläche, durch die Wärme strömt, d der Abstand zwischen den beiden Wänden und λ eine Konstante, die vom Material zwischen den beiden Wänden abhängt (die sog. Wärmeleitfähigkeit). T_a ist die Temperatur der wärmeren Wandoberfläche und T_b die der kälteren Wandoberfläche.

Ein Wärmetauscher ist ein Gerät, dass Wärme von einer warmen Flüssigkeit zu einer kälteren Flüssigkeit überträgt (Abb. 2.1). Dabei fließt warme Flüssigkeit (rot) mit einer Geschwindigkeit v von rechts nach links, und kalte Flüssigkeit (blau) mit einer Geschwindigkeit von v von links nach rechts. Die Dichte der Flüssigkeiten ist ρ und die Wärmekapazität c . Beide befinden sich in Röhren der Höhe h (h ist sehr klein). Die beiden Flüssigkeiten sind durch eine Metallwand (grau) der Dicke d mit der Wärmeleitfähigkeit λ getrennt. Die Temperaturdifferenz zwischen der einfließenden warmen Flüssigkeit und der einfließenden kalten Flüssigkeit beträgt ΔT_e .

Bestimme die Temperaturdifferenz zwischen der abgekühlten, ausfließenden warmen Flüssigkeit und der aufgewärmten, ausfließenden kalten Flüssigkeit, ΔT_a . Nimm dafür an, dass die Temperaturdifferenz ΔT zwischen warmer und kalter Flüssigkeit entlang der Wand konstant bleibt.

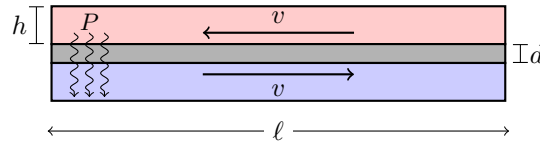


Abbildung 2.1: Ein Wärmetauscher

**** Lösung 2 (US IPhO Auswahlwettbewerb, Halbfinale 2013)

Die warme (rote) Flüssigkeit strömt mit einer Temperatur $T_{w,e}$ in den Wärmetauscher und verlässt ihn mit einer Temperatur $T_{w,a}$. Diese Temperaturänderung ΔT_w kommt durch den Wärmeaustausch mit der Leistung P aus (2.1). Diese ist definiert als die Wärmezufuhr pro gegebener Zeiteinheit, also $P = \frac{Q}{t}$. Die Zeit t , in der hier die warme Flüssigkeit Wärme abgibt, ist genau die Zeit, die gebraucht wird, um die Röhre des Wärmetauschers zu durchlaufen, also $t = \frac{\ell}{v}$. In dieser Zeit fließt eine Masse von $m = \rho V = \rho A h$ durch den Wärmetauscher, wobei A genau die Fläche ist, über die die Wärmeübertragung stattfindet. Die Temperaturänderung ΔT_w kann also über die abgegebene Leistung berechnet werden zu

$$P = -\frac{Q}{t} = \frac{mc\Delta T_w}{t} \Rightarrow \Delta T_w = -\frac{Pt}{mc} \stackrel{(2.1)}{=} \underbrace{\frac{\lambda A \Delta T}{d}}_{=P} \cdot \underbrace{\frac{\ell}{v}}_{=t} \cdot \underbrace{\frac{1}{\rho c A h}}_{=\frac{1}{mc}} = -\frac{\lambda \Delta T \ell}{d v \rho c h}. \quad (2.2)$$

Da wir die Temperatur der ausfließenden warmen Flüssigkeit $T_{w,a}$ auch durch die der einfließenden kalten Flüssigkeit $T_{k,e}$ und die (konstante) Temperaturdifferenz zwischen den beiden Wänden ΔT ausdrücken können, ist

$$\Delta T_w = T_{w,a} - T_{w,e} = T_{k,e} + \Delta T - T_{w,e} = \Delta T - \Delta T_e, \quad (2.3)$$

wobei ΔT_e die Temperaturdifferenz der einfließenden Flüssigkeiten ist. Wir können (2.2) und (2.3) gleichsetzen, und so die Temperaturdifferenz zwischen den Wänden bestimmen

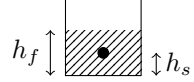
$$-\frac{\lambda \Delta T \ell}{d v \rho c h} = \Delta T - \Delta T_e \Rightarrow \Delta T \left(1 + \frac{\lambda \ell}{d v \rho c h}\right) = \Delta T_e \Rightarrow \Delta T = \Delta T_e \left(1 + \frac{\lambda \ell}{d v \rho c h}\right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Durch ΔT können wir jetzt die gesuchte Temperaturdifferenz zwischen den ausfließenden Flüssigkeiten ΔT_a finden. Es ist

$$\Delta T_a = T_{w,a} - T_{k,a} = T_{k,e} + \Delta T - (T_{w,e} - \Delta T) = 2\Delta T - \Delta T_e = \Delta T_e \left(\frac{2}{1 + \frac{\lambda \ell}{\nu \rho c h}} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Aufgabe 3 (Büchse)

Bestimme die Position des Schwerpunkts h_s einer gefüllten zylinderförmigen Büchse in Abhängigkeit der Füllhöhe h_f und der relevanten Parameter. Nimm dafür an, dass die Büchse eine gleichmäßige Massenverteilung hat.



* Lösung 3 (nach 3. Runde IPhO, 2011)

Weil die Büchse eine gleichmäßige Massenverteilung hat, und wir auch annehmen können, dass die Flüssigkeit eine gleichmäßige Dichte hat, muss das System rotationssymmetrisch um die senkrechte Achse durch den Deckel und den Boden sein. Das heißt aber nichts anderes, als dass eine Drehung der Büchse um diese Achse keine messbaren Unterschiede hervorbringen kann, weshalb der Schwerpunkt in auf dieser Achse liegen muss. Wäre das nämlich nicht so, gäbe es eine Möglichkeit, festzustellen, wie die Büchse um diese Achse gedreht wurden ist, welche es aber wegen der Rotationssymmetrie nicht geben darf.

Die Höhe des Schwerpunkts kann man nun am Einfachsten über die Definitionsgleichung bestimmen. Dafür stellen wir uns das System zusammengesetzt aus der Flüssigkeit und der Büchse vor. Der Schwerpunkt der Büchse liegt bei $h_{Sp,b} = \frac{h_b}{2}$, wobei h_b die Höhe der Büchse ist, und der der Flüssigkeit liegt bei $h_{Sp,f} = \frac{h_f}{2}$. Die Höhe h des Gesamtschwerpunkts (relativ zum Boden der Büchse) ist gegeben durch

$$h = \frac{m_b h_{Sp,b} + m_f h_{Sp,f}}{m_b + m_f}, \quad (3.1)$$

wobei $m_b = \rho_b h_b$ die Masse der Büchse ist, und $m_f = \rho_f h_f$ die Masse der Flüssigkeit. Setzt man diese beiden Ausdrücke in (3.1) ein, so erhält man schlußendlich

$$h_s = \frac{h_b^2 \rho_b + h_f^2 \rho_f}{2(\rho_f h_f + \rho_b h_b)}$$