

Neue Aufgaben

18. Januar 2017

Aufgabe 1 (Widerstandswürfel)

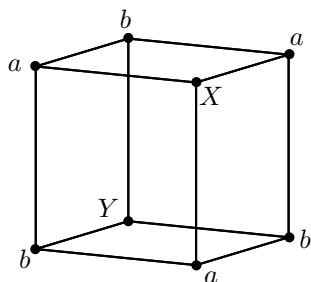
Gegeben ist ein Würfel, wobei jede der Kanten einen Widerstand von $R = 1 \Omega$ hat. Wie groß ist der Widerstand entlang einer Raumdiagonale?

Lösung 1 (Jaan Kalda)

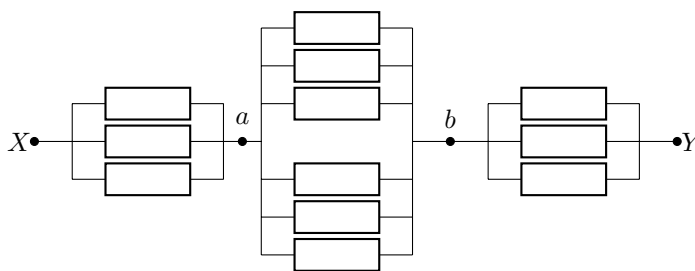
Wir wollen den Widerstand zwischen den Punkten X und Y bestimmen, also entlang der Raumdiagonale (siehe Abb. 1a). Weil die Raumdiagonale eine Symmetrieachse ist, sollte das Problem symmetrisch sein, und deswegen eine recht einfache Lösung haben.

Um die zu finden, schauen wir uns die Punkte a und b an, die jeweils den gleichen Abstand von X und Y haben. Diese müssen jeweils auf dem gleichen Potential liegen. Um zu sehen, warum das so ist, stellen wir uns vor, dass der Strom I aus dem Punkt X in die drei Punkte a fließt. Weil alle drei Punkte gleich weit von X entfernt sind (bzw. zwischen jedem Punkt a und X jeweils der Widerstand R ist), muss sich der Strom gleichmäßig aufteilen. Gleichzeitig ist aber jeder Punkt a mit zwei Punkten b verbunden ist, muss sich auch hier der Strom gleichmäßig aufteilen. Also müssen alle Punkte a auf dem gleichen Potential liegen, und auch alle Punkte b auf einem anderen selben Potential.

Damit können wir einen neuen Stromkreis zeichnen, in dem es nur einen Punkt a und nur einen Punkt b gibt, siehe Abb. 1b. Dieser ist eine einfache Schaltung von Widerständen, die alle den Wert R haben. Werten wir die einzelnen Parallelschaltungen aus, so trägt die erste einen Wert von $\frac{R}{3}$ bei, und die zweite einen Wert von $\frac{R}{6}$ und die dritte wieder $\frac{R}{3}$. Der Gesamtwiderstand ergibt sich aus der Reihenschaltung der drei, also $R_g = 2 \cdot \frac{R}{3} + \frac{R}{6} = \frac{5R}{6}$.



(a) Skizze des Würfels



(b) vereinfachtes Schaltbild

Abbildung 1: Schaltskizzen zum Aufbau

Aufgabe 2 (Widerstandsstrecke)

Bestimme den Widerstand zwischen den Punkten A und B



Lösung 2 (IPhO 1996)

Um die Aufgabe einfach lösen zu können, muss man wissen, dass wenn zwei Punkte nur durch einen Draht verbunden sind, sie auf dem gleichen Potential liegen müssen. Das liegt einfach daran, dass über ihnen keine Spannung abfallen kann, weil nichts da ist, an dem Spannung abfallen könnte¹

Wir nennen diese Punkte A , B und C (siehe Abb.2a). Jetzt kann man einfach einen Stromkreis zeichnen, in dem es nur noch die Punkte A , B und C gibt. Dafür ist es hilfreich, wenn man die Widerstände nummeriert, sodass man sich nicht vertut. Wenn wir uns 2a anschauen, dann stellen wir zuerst fest, dass A mit C durch die Widerstände 1 und 2 verbunden ist, A mit B durch 3 und B mit C durch die Widerstände 4 und 5.

Der neue Stromkreis sieht dann so aus, wie in Abb.2b gezeigt. Hier können wir jetzt mit den ganz normalen Regeln für Reihen- und Parallelschaltungen arbeiten. Die Widerstände 4 und 5 sind parallel

¹Außer natürlich der Draht selber. Aber in fast allen Aufgaben geht man davon aus, dass Drähte widerstandsfrei sind. Wenn das nicht so ist, sollte es auch angegeben sein.

geschaltet, die Widerstände 1 und 2 auch, und die Ersatzwiderstände für diese beiden Parallelschaltungen sind gemeinsam in Reihe parallel zu dem Widerstand 3 geschaltet. Damit ist der Gesamtwiderstand

$$\frac{1}{R_{AB}} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{W_{ds.3}} + \overbrace{\frac{1}{\underbrace{\frac{R}{2}}_{1||2} + \underbrace{\frac{R}{2}}_{4||5}}}^{W_{ds. \text{ parallel zu 3}}} \Rightarrow R_{AB} = \frac{R}{2} = 0.5 \, \Omega,$$

wobei mit einem Einzelwiderstand von $R = 1 \, \Omega$ gerechnet wurde, wie in der Skizze zur Aufgabenstellung gezeigt.

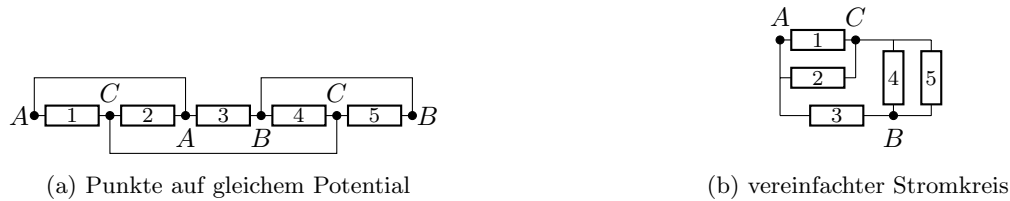
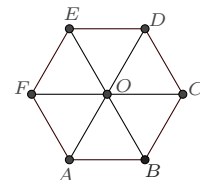


Abbildung 2: Skizzen zum Aufbau

Aufgabe 3 (Widerstandssechsecks)

Die nebenstehende Abbildung zeigt ein regelmäßiges Sechseck. Jede Seite des Sechseck hat den Widerstand $R = 1 \, \Omega$. Zudem ist jeder Eckpunkt des Sechsecks mit dem Mittelpunkt des O verbunden, wobei jedes Verbindungsstück ebenfalls den Widerstand $R = 1 \, \Omega$.



Berechne den Widerstand zwischen den Punkten A und O .

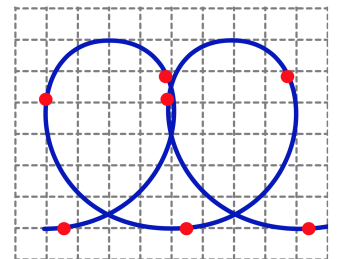
Aufgabe 4 (Rotierende Scheibe)

Die Abbildung zeigt ein Photo einer sich fortbewegenden, rotierenden Scheibe, welches mit langer Belichtungszeit aufgenommen wurde.

Die Spur wurde durch eine blaue Lampe beschrieben, welche durchgängliche leuchtet. Gleichzeitig blinkt die Lampe jede Zehntelsekunde einmal rot auf.

Die Lampe ist in einem Abstand von $a = 4.5 \, \text{cm}$ vom Scheibenmittelpunkt montiert.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Scheibenmittelpunkts?



Lösung 4 (Jaan Kalda)

Es fällt auf, dass sich die blaue Bahn nach dem mittleren Punkt unten die Bewegung der Scheibe anscheinend wiederholt. Da bis dahin die Lampe genau drei Mal geblinkt hat, hat die Scheibe diese Strecke also in einer Zeit von

$$T = 3t = 0.3 \, \text{sec} \quad (4.1)$$

zurückgelegt, wobei $t = 0.1 \, \text{sec}$ die Zeit ist, die zwischen dem Aufblinken der roten Lampe vergeht.

Diese von der Scheibe zurückgelegte Strecke entspricht in etwa 4 Skaleneinheiten auf dem Bild. Gleichzeitig ist der Abstand zwischen dem untersten Punkt der blauen Bahn, und damit der untersten Position der Lampe, und dem obersten Teil der blauen Bahn, und damit der obersten Position der Lampe, 6 Skaleneinheiten lang. Aber der Abstand zwischen der obersten und der untersten Position der blauen Lampe entspricht genau $2a = 9 \, \text{cm}$. Also ist eine Skaleneinheit genau $1.5 \, \text{cm}$ lang. Somit ist die zurückgelegte Strecke $s = 6 \, \text{cm}$. Für die Geschwindigkeit ergibt sich, mit (4.1)

$$v = \frac{s}{T} = \frac{6 \, \text{cm}}{0.3 \, \text{sec}} = 20 \, \frac{\text{cm}}{\text{sec}}. \quad (4.2)$$

Aufgabe 5 (Temperaturunabhängiger Widerstand)

Wir betrachten zwei Materialien A und B , mit spezifischem Widerstand ρ_A und ρ_B , die beide die gleiche

Fläche haben. Die Temperaturkoeffizienten der beiden Widerstände sind α_A und α_B , und geben an, um wieviel sich der Widerstand bei einer Temperaturänderung ΔT ändert. Es ist $\alpha_A < 0$ und $\alpha_B > 0$. In welchem Längenverhältnis müssen die Längen der beiden Widerstände ℓ_A und ℓ_B stehen, damit der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung der beiden bei einer Temperaturänderung ΔT konstant bleibt?

Lösung 5 (*Alte IPhO-Aufgabe*)

Wenn die Temperaturänderung ΔT nicht zu groß ist, kann man den neuen Widerstand R nach dieser Temperaturänderung aus dem alten Widerstand R_0 ausrechnen mit

$$R(\Delta T) = R_0 + \alpha \Delta T R_0 = R_0 (1 + \alpha \Delta T), \quad (5.1)$$

wobei α der Temperaturkoeffizient ist.

Gleichzeit ist der Widerstand R eines Körpers der Länge ℓ , der Fläche A und dem spezifischen Widerstand ρ

$$R = \frac{\rho \ell}{A}. \quad (5.2)$$

Die zwei gegebenen Widerstände R_A und R_B sind in Reihe geschaltet, also ist der Gesamtwiderstand R_g

$$R_g = R_A + R_B = \frac{1}{A} (\rho_A \ell_A + \rho_B \ell_B) \quad (5.3)$$

Wenn wir annehmen, dass die Temperaturänderung so klein ist, dass sich die Länge der Widerstände nicht ändert, können wir (5.1) genauso für den spezifischen Widerstand schreiben

$$\rho(\Delta T) = \rho_0 + \alpha \Delta T \rho_0 = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (5.4)$$

Schreiben wir diesen Ausdruck nun für R_A und R_B , so erhalten wir als Gesamtwiderstand in Abhängigkeit von der Temperatur aus (5.3)

$$\tilde{R}_g(\Delta T) = \frac{1}{A} [(\rho_A + \rho_A \alpha_A \Delta T) \ell_A + (\rho_B + \rho_B \alpha_B \Delta T) \ell_B].$$

Ausklammern Terme führt auf

$$\tilde{R}_g(\Delta T) = \underbrace{\frac{1}{A} [\rho_A \ell_A + \rho_B \ell_B]}_{=R_g \text{ aus (5.3)}} + \frac{\Delta T}{A} (\rho_A \alpha_A \ell_A + \rho_B \alpha_B \ell_B). \quad (5.5)$$

Der erste Term ist genau der Gesamtwiderstand R_g aus (5.3) vor der Temperaturänderung. Der zweite Term ist ein Produkt aus ΔT und einem anderen Faktor. Damit der Gesamtwiderstand \tilde{R}_g also unabhängig von der Temperaturänderung ΔT immer genau R_g ist, muss der Faktor nach ΔT null sein, da dieser ganze Term dann keinen Einfluss hat. Also ist

$$\boxed{\rho_A \alpha_A \ell_A + \rho_B \alpha_B \ell_B = 0 \Rightarrow \frac{\ell_A}{\ell_B} = -\frac{\rho_B \alpha_B}{\rho_A \alpha_A}}. \quad (5.6)$$

Das Minuszeichen muss da sein, da α_A auch negativ sein soll, und das Längenverhältnis nicht negativ sein sollte.