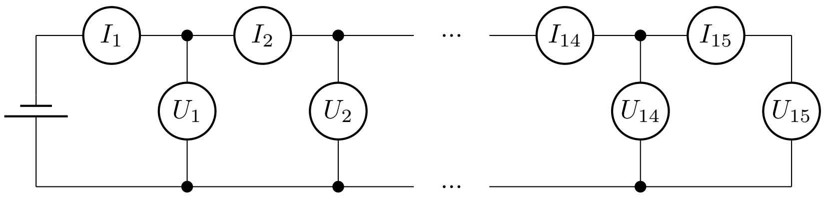
Aufgabenserie 5

Abgabe: 30. November

Die Aufgaben sollten bis zum **30. Novermber** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr an physikrolf@gmail.com.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`.

Aufgabe 1 (Viele Voltmeter)

In der abgebildeten Schaltung sind 15 identische Voltmeter und 15 unterschiedliche Ampermeter verbaut, und an eine Batterie angeschlossen.
Das erste Voltmeter zeigt eine Spannung von $U_1 = 9$ V an, das erste Ampermeter einen Strom von $I_1 = 2.9$ mA und das zweite einen Strom von $I_2 = 2.6$ mA. Wie groß ist die Summe der Spannungen U_Σ, die die anderen Voltmeter anzeigen?



*** **Lösung 1** (*EstPhO 2003*)

Offensichtlich sind die Bauteile nicht ideal, sonst würden die Ampermeter alle das gleiche anzeigen.
Wir können also zuerst den Innenwiderstand R_{innen} der Voltmeter aussrechnen. Dazu betrachten wir das erste Voltmeter, mit $U_1 = 9$ V. Der Strom durch dieses ist nach dem Knotensatz genau $i_1 = I_1 - I_2 = 0.3$ mA (Der Strom, der nicht durch das zweite Ampermeter fließt, muss durch den Widerstand fließen). Also beträgt der Innenwiderstand $R_{innen} = \frac{U_1}{i_1} = \frac{9\text{ V}}{0.3\text{ mA}} = 30\text{ k}\Omega$.
Weil die Voltmeter alle identisch sind, können wir für alle Voltmeter mit diesem Wert rechnen.
Das gleiche Verfahren kann man jetzt für die verbleibenden 14 Voltmeter anwenden. Die Spannung, die das $j-$te Voltmeter anzeigt, ist gerade $U_j = R_{innen} \cdot i_j$, wobei i_j der Strom durch dieses Voltmeter ist. Der gesuchte Wert beträgt also $U_\Sigma = \sum_{j=2}^{15} R_{innnen} i_j = R_{innen} \sum_{j=2}^{15} i_j$.
Nach dem Knotensatz muss der Strom, der aus der Spannungsquelle fließt, auch wieder in die Spannungsquelle rein fließen. Der Strom, der in Spannungsquelle reinfließt, ist aber genau die Summe der Ströme, die durch die Voltmeter fließt. Gleichzeitig ist es aber genau der Strom, der durch das Ampermeter I_1 fließt. Also gilt $I_1 = \sum_{j=1}^{15} i_j \Leftrightarrow I_1 - i_1 = \sum_{j=2}^{15} i_j$.
$I_1 - i_1$ ist aber genau der Strom, der im Ampermeter I_2 angezeigt wird. Also ist

$$\boxed{U_\Sigma = R_{innen} \cdot I_2 = \frac{I_1 - I_2}{I_1} \cdot U_1 = 78\text{ V}.}$$

Aufgabe 2 (Schwimmende Glasschale)

Eine dünnwandige, ideal wärmeleitende zylindrische Glasschale der Höhe $H = 15$ cm schwimmt mit dem Boden nach unten auf einer Wasseroberfläche, und taucht dabei bis zur Hälfte in das Wasser ein.
Bestimme, wie tief die Glasschale eintaucht, wenn man sie umdreht, und ins Wasser tut. Berechne außerdem, wie tief man sie ins Wasser tauchen muss, damit sie nicht mehr schwimmt, sondern untergeht.
Die Wasserdichte ist $\rho = 1000\ {}^{kg}/_{\text{m}^3}$ und der äußere Luftdruck beträgt $p_0 = 101325$ Pa.
Die eingeschlossene Luft kann man näherungsweise als ein sog. *ideales Gas* betrachten. Für ein solches gilt in diesem Fall die *ideale Gasgleichung*, die besagt, dass das Verhältnis $\frac{pV}{T}$ die ganze Zeit konstant bleibt. Dabei ist p der Druck der Luft in dem Gefäß, V das Volumen der eingeschlossenen Luft und T die Temperatur. Gleichzeitig kann angenommen werden, dass sich die Lufttemperatur während des Umdrehens nicht ändert.

*** **Lösung 2** (*Lucas Rettenmeier, Orpheus e.V.*)

Die Wasserschale soll, wenn man sie wie beschrieben mit der Öffnung nach oben ins Wasser stellt, schwimmen. Also müssen Gewichtskraft F_g und Auftriebskraft F_a gleich sein,

$$mg = \frac{1}{2} V g \rho, \tag{2.1}$$

wobei m die Masse der Schale ist und V das Gesamtvolumen.
Dreht man die Schale jetzt um, dringt Wasser ein. Es muss aber wieder das Gleichgewicht von Gewichtskraft und Auftriebskraft gelten. Dafür ist erneut das verdrängte Volumen relevant. Um das Auszurechnen, brauchen wir die Eindringtiefe der Schale in das Wasser h und die Wasserhöhe im Glas x. Dann gilt

$$mg = \frac{V}{H}(h-x)\,g\rho. \tag{2.2}$$

Gleichsetzen von (2.1) und (2.2) führt auf

$$\frac{1}{2}Vg\rho = \frac{V}{H}(h-x)\,g\rho \Rightarrow h-x = \frac{H}{2} \tag{2.3}$$

Wir können jetzt die ideale Gasgleichung verwenden, um den weitere Informationen über die Höhe des Wasserstandes im Glas, der durch den Druck im Glas bestimmt wird, zu erhalten.
Dazu können wir annehmen, dass sich die Temperatur beim Umdrehen nicht ändert, weil die Aufgabenstellung sagt, dass alles ideal wärmeleitend ist.
Vor dem Umdrehen betrug das Volumen der Luft im Glas genau V, und der Druck entsprach dem äußeren Luftdruck p_0.
Nach dem Umdrehen beträgt das Volumen der Luft im Glas genau $V \cdot \frac{H-h}{H}$, da das der Teil ist, der nicht mit Wasser gefüllt ist. Der Druck entspricht der Summe des äußeren Luftdrucks p_0 und des Schweredrucks durch die Wassersäule der Höhe $h-x$, also $p_0 + \rho g(h-x)$. Setzt man alles in die ideale Gasgleichung ein, dann kommt man auf

$$\frac{p_0 V}{T} = \frac{(p_0 + \rho g(h-x))\, V \cdot \frac{H-h}{H}}{T}. \tag{2.4}$$

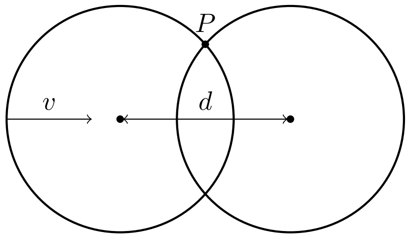
Wir können jetzt das Ergebnis aus (2.3) für $h-x$ einsetzen, und die entstehende Gleichung dann nach der neuen Eintauchtiefe h lösen

$$\boxed{p_0 = \left(p_0 + \frac{\rho g H}{2}\right)\frac{H-h}{H} \Rightarrow h = H\left(\frac{3}{2} - \frac{2p_0}{2p_0 + \rho g H}\right) \approx 7.6 \text{ cm.}} \tag{2.5}$$

Damit die Schale nicht mehr auftaucht, sondern bis zum Boden sinkt, muss das enthaltene Luftvolumen bis auf einen Wert kleiner als $\frac{V}{2}$ komprimiert werden.
Es ergibt sich also für diese Tiefe

$$\boxed{\frac{H}{2} + \frac{p_0}{\rho g} \approx 10 \text{ m}}$$

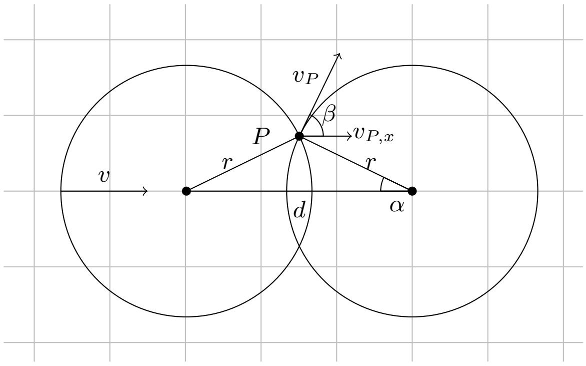
Aufgabe 3 (Kreisbewegung)



Wir betrachten zwei Kreisringe mit Radius r. Einer ist in Ruhe, der andere bewegt sich mit der Geschwindigkeit v entlang der Verbindungslinie beider Kreismittelpunkte auf ihn zu.
Bestimme, wie die Geschwindigkeit des oberen Schnittpunkts der beiden Kreise, P, vom Abstand der Mittelpunkte, d, abhängt.

*** **Lösung 3** (*J. Kaalda*)

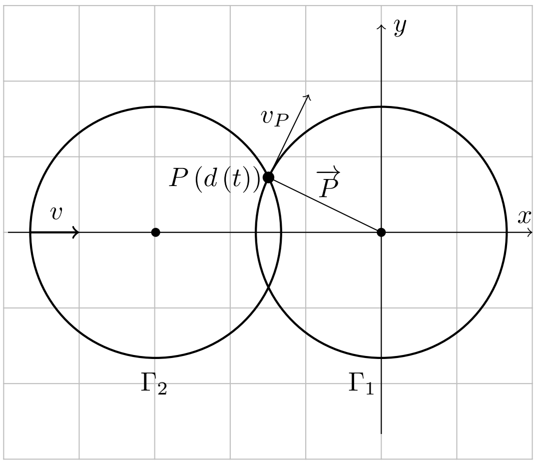
Bezeichne mit Γ_1 den ruhenden Kreis, und mit Γ_2 den sich bewegendenen Kreis.
Die Lösung dieser Aufgabe kann sowohl elementargeometrisch, als auch in einem brachialen Analysisansatz gelöst werden.
Elementargeometrisch geht das so:
Wir können uns zuerst überlegen, wie groß die x-Komponente der Geschwindigkeit des Punktes P, $v_{P,x}$, ist. Dazu betrachten wir ein Bezugssystem, welches sich mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ mitbewegt. In diesem ruht der Punkt P. Also ist $v_{P,x} = \frac{v}{2}$.
Damit können wir v_p ausrechnen. Es ist $v_p = \frac{v_{P,x}}{\cos\beta}$. Gleichzeitig ist $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow v_p = \frac{v_{P,x}}{\sin\alpha}$.
Der Winkel α ist aber durch das Dreieck zwischen P und den beiden Kreismittelpunkten eindeutig bestimmt. Hier ist $\cos\alpha = \frac{d}{2r}$.
Wir können nun noch $\sin(\arccos(x))$ bestimmen. Hierfür hilft uns der trigonometrische Pythagoras, $\sin^2 x +$



$\cos^2 x = 1$. Also ist $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
Damit ergibt sich für v_p

$$\begin{aligned} v_P &= \frac{v_{P,x}}{\sin\alpha} = \frac{v_{P,x}}{\sin\left(\arccos\left(\frac{d}{2r}\right)\right)} \\ &= \frac{v}{2}\cdot\frac{1}{\sin\left(\arccos\left(\frac{d}{2r}\right)\right)} \\ &= \frac{v}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{d^2}{4r^2}}} \\ &\boxed{= \frac{v}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{d^2}{4r^2-d^2}}.} \end{aligned}$$

Mit Analysis geht das so:



Wir betrachten die Situation aus einem Koordinatensystem welches im Mittelpunkt von Γ_1 ruht.
Die Punkte $(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1})$ bzw. $(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2})$, die auf den Kreisen Γ_1 bzw. Γ_2 liegen, müssen nun die entsprechenden Kreisgleichungen erfüllen, die einfach nur besagen, dass auf dem Kreisumfang der Abstand zum Kreismittelpunkt konstant r sein muss:

$$x_{\Gamma_1}^2 + y_{\Gamma_1}^2 = r^2 \text{ und } (x_{\Gamma_2} + d(t))^2 + y_{\Gamma_2}^2 = r^2. \tag{3.1}$$

Dabei definieren wir den Abstand, wie üblich, positiv, also $d(t) > 0$.
Der Punkt P soll nun auf beiden Kreisen liegen. Es gilt dann also $x_{\Gamma_1} = x_{\Gamma_2} =: x_p$ und $y_{\Gamma_1} = y_{\Gamma_2} =: y_p$. Die so entstehende Gleichung kann man jetzt gut nach x_p auflösen:

$$y_p^2 = r^2 - x^2 = r^2 - (x+d)$$

$$\Leftrightarrow 2xd + d^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-d}{2}. \tag{3.2}$$

Das hätte man sich auch ander überlegen können.
Wir betrachten jetzt den oberen Schnittpunkt. Das stellt keine Einschränkung da, weil seine Geschwindigkeit

gleich der des unteren Punktes sein sollte.
Dann gilt für die y-Koordinate y_p des Punktes P

$$y_P = \sqrt{r^2 - x_p^2} = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}. \tag{3.3}$$

Damit können wir den Ortsvektor des Punktes P, $\overrightarrow{P}$, schreiben als

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d/2 \\ \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Dabei ist hier $\overrightarrow{P}$ als Funktion von d gegeben, $\overrightarrow{P}(d)$. Der Abstand d ist aber selber nochmal eine Funktion der Zeit, $d = d(t)$.
Die gesuchte Geschwindigkeit des Punktes P ist jetzt der Betrag der (komponentenweise) Ableitung von $\overrightarrow{P}$ nach der Zeit, also $v_P = \left|\frac{d\overrightarrow{P}}{dt}\right|$. Mit der Kettenregel ergibt sich dann

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{P}(d)}{dd} \cdot \frac{dd(t)}{dt}.$$

Da gilt $\frac{dd(t)}{dt} = -v$ ergibt sich

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = -v \cdot \frac{d\overrightarrow{P}(d)}{dd}. \tag{3.5}$$

Wenn wir die Ableitung jetzt auswerten, kommen wir auf

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = v \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{d}{2\sqrt{4r^2-d^2}} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Den Betrag von $\frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$ finden wir jetzt ganz einfach mit dem Satz des Pythagoras,

$$\boxed{v_p = \left| v \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{d}{2\sqrt{4r^2-d^2}} \end{pmatrix} \right| = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2 - d^2}}.} \tag{3.7}$$