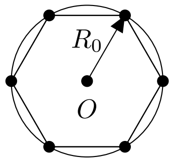
# Aufgabenseminar Himmelsmechanik

pankratius.github.io/rolf

Gravitationskraft $\mathbf{F} = \frac{mMG}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$; Gravitationspotential $U(r) = -\frac{mMG}{r}$; Gesamtenergie auf einer elliptischen Flugbahn $E = \frac{mMG}{2a}$; Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$; für Punkt auf Ellipse bleibt Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant, Runge-Lenz-Vektor $\varepsilon = \frac{\mathbf{L}\times\mathbf{v}}{GmM} + \hat{\mathbf{r}} = \text{const.}$
Kepler I: Bewegung von HK auf Kegelschnitten, Brennpunkt im Schwerpunkt; Kepler II: Radiusvektor überschreitet gleiche Flächen in gleichen Zeiten; Kepler III: für zwei Bahnen gilt $T^2/T^2 = a_1^2/a_2^3$

---

wichtige Größen: Abstand von Schwerpunkt ($r$), Gravitationskraft($\mathbf{F}$), Gravitationspotential ($U(r)$), Energie ($E(r)$), Drehimpuls ($\mathbf{L}$), Betrag des Drehimpulses ($\ell$), Umlaufzeit ($T$), große Halbachse ($a$), kleine Halbachse ($b$), Masse eines Körpers im gegebenen Gravitationsfeld ($m$), Masse des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers ($M$), Gravitationskonstante ($G$)
Wo es sinnvoll ist, ersetzen wir $GM$ durch eine neue Konstante, $\Gamma$




**Aufgabe 1** (Polygon)

Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse $m$ sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhänigkeit von $n$) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?

** **Lösung 1** (*P. Gnädig*)

Aus Symmetriegründen heben sich die nicht-radialen Teile der wirkenden Gravitationskräfte auf, sodass alle $n$ Massen sich zum Mittelpunkt des Polygons, $O$, bewegen. Dabei muss die polygonform erhalten bleiben. Weil die Abhängigkeit Körperabstand-Gravitationskraft aber nicht-linear ist, ist die Bewegung nicht gleichmäßig beschleunigt. Vielmehr sollte die Beschleunigung größer werden, je geringer der Körperabstand ist.
Um nun die Zeit $T$ auszurechnen, bis die Körper im Punkt $O$ kollidieren, kann man zuerst die Kraft auf eine der Massen $m$ ausrechnen. Diese ist gegeben durch die Summe der Radialteile aller Gravitationskräfte der anderen $n-1$ Körper, also, wenn der Radius des Polygons gerade $R$ ist,

$$F = Gm\sum_{i=1}^{n-1}\frac{m\sin\left(\frac{\pi}{i}\right)}{\left(2R\sin\left(\frac{\pi}{i}\right)\right)^2} = \frac{Gm}{R^2}\cdot\underbrace{\frac{m}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}}_{:=M_n}. \tag{1.1}$$

Die Kraft ist also so, als würde sich der Körper im Gravitationsfeld eines stationären Körpers mit der Masse $M_n = \frac{m}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}$ bewegen.
Diese Bewegung kann man jetzt als Bewegung entlang einer Ellipse ohne kleiner Halbachse, und mit großer Halbachse $\frac{R_0}{2}$ auffassen. Die Zeit, die dann bis zum Zusammensturz benötigt wird, entspricht genau der halben Periode $T_e/2$.
Diese kann man über das dritte Keplersche Gesetz aus der entsprechenden Periode $T_k$ für eine Kreisbahn mit Radius $R_0$ ausrechen, wobei $F_g = F_{rad}$ benutzt wird:

$$\frac{GmM_n}{R_0^2} = mR\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T_k}\right)^2}_{=\omega^2} \Rightarrow T_k = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3}{GM_n}}. \tag{1.2}$$

Mit dem dritten Keplerschen Gesetz folgt dann

$$\boxed{\left(\frac{T_e}{T_k}\right)^2 = \left(\frac{R_0/2}{R_0}\right)^3 \Rightarrow T_e = \pi\sqrt{\frac{R_0^3}{8GM_n}}.} \tag{1.3}$$

**Aufgabe 2** (Ballistische Rakete)

Eine Rakete wird vom Nordpol der Erde (Radius $R$, Masse $M$) mit der ersten kosmischen† Geschwindigkeit gestartet, sodass sie am Äquator landet.

†Das ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper eine stabile Kreisbahn um die Erde haben kann.

1. Wie groß ist die große Halbachse $a$ der Flugbahn?
2. Was ist der größte Abstand $h$ der Rakete von der Erdoberfläche?
3. Wie lang ist die Flugzeit $T$ der Rakete?

*** **Lösung 2** (*J. Kaalda*)

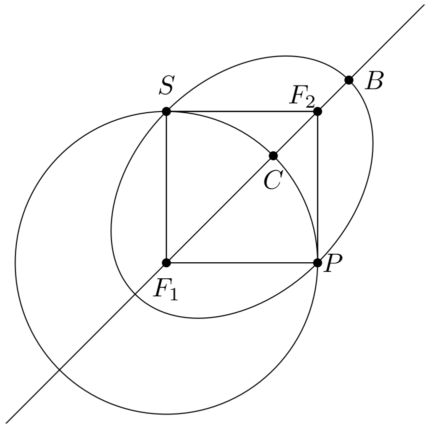
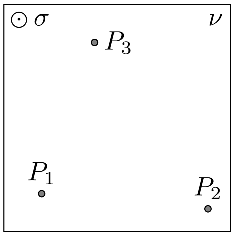



Abbildung 2.1: Skizze der Flugbahn

1. Die erste kosmische Geschwindigkeit $v_0$ kann man am einfachsten durch das Gleichsetzen von Radial- und Gravitationskraft errechnen
$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\Gamma}{R}}.$$
Die Gesamtenergie beim Abschuss ist damit gegeben durch
$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\Gamma m}{R} = -\frac{\Gamma m}{2R}$$
Damit können wir die große Halbachse $a$ ausrechnen, weil wir ja wissen, wie die beiden zusammenhängen
$$\boxed{E = -\frac{\Gamma m}{2a} = -\frac{\Gamma m}{2R} \Rightarrow a = R.} \tag{2.1}$$
Das kann man sich auch daran überlegen, dass die Gesamtenergie bei gegebener Geschwindigkeit unabhängig von der Ausrichtung beim Starten nur vom Abstand zum Erdmittelpunkt abhängen darf, und damit die große Halbachse, die nur von der Energie abhängt, nur $R$ sein kann.
2. Wir wissen, dass einer der beiden Brennpunkte $F_1$ der Erdmittelpunkt sein muss (1. Keplersches Gesetz). Die Distanz des anderen Brennpunkts vom Erdmittelpunkt finden wir über die Ellipseandefinition. Für alle Punkte $P$ auf dem Ellipsenumfang gilt für die Abstände von den Brennpunkten $F_1$ und $F_2$
$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a, \tag{2.2}$$
wobei $a$ die große Halbachse ist, die wir ja in (2.1) ausgerechnet haben.
Aus Symmetriegründen müssen die beiden Brennpunkte nun auf einer Breite von $\frac{\pi}{4}$ liegen. Betrachten wir jetzt noch den Startpunkt $S$, so ist offensichtlich $\overline{F_1S} = R$. Da aber $R = a$ gilt, ist ebenfalls $\overline{F_2S} = a$. Die beiden Brennpunkte sind also durch die entsprechenden Eckpunkte eines Quadrats mit Seitenlänge $R$ gegeben.
Jetzt kommt nur noch elementare Geometrie, siehe Abbildung 2.1. Wir wissen, dass die Höhe $h$ gegeben ist durch
$$h = \overline{CB} = \overline{F_1B} - \overline{F_1C} = \overline{F_1B} - R. \tag{2.3}$$
Gleichzeitig ist aus Symmetriegründen $\overline{F_1B} = R + \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$. Das können wir wiederum als $\overline{F_1F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ über die Diagonale im Quadrat ausdrücken.
Setzen wir den ganzen Spaß jetzt in (2.3) ein, kommen wir schlußendlich auf
$$\boxed{h = \frac{\sqrt{2}}{2}R.} \tag{2.4}$$

3. Die Zeit, die für die Flugbahn berechnet wird, können wir durch eine Kombination des zweiten und dritten keplerschen Gesetzes errechnen.
Zuerst wissen wir aus dem dritten keplerschen Gesetz das die Zeit für die gesamte Ellipsenbahn (würde die Rakete nicht am Äquator in die Erde rammen) gegeben ist durch die Umlaufzeit auf der äquivalenten Kreisbahn, weil ja beide die gleiche große Halbachse $a$ haben. Die Umlaufzeit für die gesammte Ellipse beträgt also
$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\Gamma}}. \tag{2.5}$$
Jetzt können wir den Flächensatz nehmen. Wir wissen, dass der Vektor zwischen dem Koordinatenursprung (und damit $F_1$) und der Rakete in gleichen Zeiten gleiche Flächen überschreitet.
Der Flächeninhalt der Ellipse ist gegeben durch $A = \pi ab$, wobei $b$ die kleine Halbachse ist. In unserem Fall ist $b = \frac{1}{2} \cdot \overline{PS} = \frac{\sqrt{2}}{4}R$. Dementsprechend ist $A = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}R^2$.
Der Flächeninhalt des Teilstücks ist jetzt der der halben Ellipse plus dem des Dreiecks $\Delta F_1PS$. Das hat aber einfach den Flächeninhalt $\frac{R^2}{2}$, sodass der Gesamtflächeninhalt des tatsächlich überflogenen Sektors gegeben ist durch $A_s = \frac{R^2}{2}\left(\pi\sqrt{2}+1\right)$.
Nach dem zweiten keplerschen Gesetz gilt somit letztendlich für die Flugzeit $\tau$
$$\boxed{\frac{A}{T} = \frac{A_s}{\tau} \Rightarrow \tau = T \cdot \frac{A_s}{A} = \left(2\sqrt{2}+\pi\right)\sqrt{\frac{R}{\Gamma}}.} \tag{2.6}$$

**Aufgabe 3** (Starrer Körper)




Drei (nicht-kolineare) Massen $m_i$ $(i \in \{1,2,3\})$ an Punkten $P_i$ wechselwirken ausschließlich über durch ihre Gravitationskraft. Die durch diese drei Punkte aufgespannte Ebene sei $\nu$, und die dazu senkrecht stehende Rotationsachse $\sigma$. Welche Bedingungen müssen die drei Seitenlängen des Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$ erfüllen, sodass dieses sich nicht verändert, also wie ein starrer Körper um $\sigma$ rotiert?

**Aufgabe 4** (Komet)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn um die Sonne. Im sonnennächsten Punkt beträgt sein Abstand von der Sonne $r_e/3$, wobei $r_e$ der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn ist. Alle anderen Wechselwirkungen als die mit der Sonne vernachlässigendend, wie lang ist die Zeit $\tau$, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet?
Es ist
$$\int \frac{x}{\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{3}(x+2a)\sqrt{x-a} \tag{4.1}$$
für $x > a$ (Warum?).

*** **Lösung 4** (*Auswahlwettbewerb IPhO 2007, 3. Runde*)

Wir wissen, dass parabolische Bahnen zu einer Gesamtorbitenergie von $E = 0$ korrespondieren
$$0 = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\Gamma}{r}. \tag{4.2}$$
Hier bezeichnet $\varphi$ den Drehwinkel. Gleichzeitig wissen wir auch, dass der Betrag des Drehimpulses $\ell := |\mathbf{L}| = mr^2\dot{\varphi}$ konstant ist. Damit können wir die Winkelgeschwindigkeit durch $r$ und $\ell$ ausdrücken, und können die Energie nur in Abhängigkeit von $r$ und seinen Ableitungen darstellen
$$0 = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{2}\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 - \frac{\Gamma}{r} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2m^2r^2} - \frac{\Gamma}{r}. \tag{4.3}$$
Das ist jetzt nur noch eine Differentialgleichung in $r(t)$, die wir zu lösen versuchen können. Bevor wir das machen, können wir noch schnell, auch mit (4.3) den Drehimpuls ausrechnen, weil wir wissen, dass im Perihel $\dot{r} = 0$ gilt, und $r = \frac{r_e}{3}$:
$$0 = \frac{\ell^2}{2m^2r^2} - \frac{\Gamma}{r} \Rightarrow \ell = m\sqrt{\frac{2}{3}\Gamma r}. \tag{4.4}$$

Jetzt müssen wir wirklich nur noch die Differentialgleichung lösen. Wir stellen erstmal nach $\dot{r}$ um, bevor wir dann die Variablen trennen:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{r} - \frac{\ell^2}{2m^2r^2}} = \pm\sqrt{2\Gamma}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{r_e}{3r^2}}.$$

Mit $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ können wir jetzt einfach den Physiker-Umstell-Trick machen, und die Symmetrie des Problems nehmen, um uns über Vorzeichen keine Gedanken mehr machen zu müssen

$$\int_0^\tau dt = \frac{2}{\sqrt{2\Gamma}} \int_{\frac{r_e}{3}}^{r_e} \frac{r}{\sqrt{r - \frac{r_e}{3}}}\, dr.$$

Das Integral (4.1) ist zufällig das, was wir hier brauchen, und kommen so am Ende auf

$$\boxed{\tau = \frac{20}{9} \cdot \sqrt{\frac{R^3}{3\Gamma}}.}$$

**Aufgabe 5** (Betrands Theorem)
Wir betrachten ein Potential der Form

$$U\left(r\right) = -\frac{k}{n},\ n \neq 0,\ k \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Zeige, dass die einzigen Werte für $n$, für die ein Körper, der sich in diesem Potential bewegt, einen gebundenen und geschlossenen Orbit haben kann, $n = 1$ und $n = -2$ sind.
Dafür kannst du benutzen, dass in einem solchen Feld der Orbit durch die Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2} \cdot \frac{d}{du}\left(U\left({}^1\!/_u\right)\right) \tag{5.2}$$

beschrieben wird, wobei $u := \frac{1}{r}$ und $\theta$ der Drehwinkel ist.

**Aufgabe 6** (Gravity Gradient Stabilization)
Wir betrachten einen Satelliten, der aus zwei Punktmassen $m_1$ und $m_2$ besteht, die durch einen massenlosen Strick der Länge $\ell$ verbunden sind.
Dieser Satellit befindet sich auf einer Kreisbahn um die Erde mit Radius $R$. Dabei zeigt er die Tendenz, sich aufzurichten, und um die sich einstellende Ruhelage zu oszillieren.
Bestimme die Frequenz $f$ dieser Schwingung.

**** **Lösung 6** (*Auswahlwettbewerb IPhO 2013, 3. Runde*)

**Aufgabe 7** (Periheldrehung)
Wir betrachten ein Gravitationsfeld, was vom normalen Keplerschen um eine sehr kleine Pertubation $\delta U\left(r\right)$ abweicht:

$$U^\dagger\left(r\right) = U\left(r\right) + \delta U\left(r\right) = U\left(r\right) + \frac{\beta}{r^2} \tag{7.1}$$

Das führt dazu, dass die elliptische Bahn, auf der der Körper sich bewegt, nicht mehr geschlossen ist, sondern sich die Periapsis bei jeder Umdrehung um einen kleinen Winkel $\delta\varphi$ verschiebt.
Bestimme $\delta\varphi$ in Abhängigkeit von den ursprünglichen Bahnparametern und $\beta$.