Aufgabenserie 3

Abgabe: 17. August

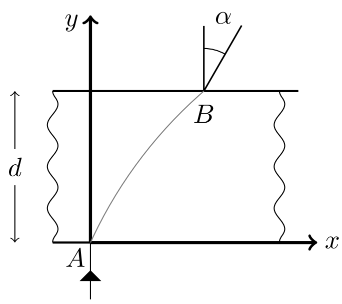
Die Aufgaben sollten bis zum **17. August** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr entweder an physikrolf@gmail.com, oder per Post an: Aaron Wild, Zum wilden Graben 26, 99425 Weimar. Jede Aufgabe hat eine bestimmte Anzahl an erreichbaren Punkten. Wie viele das sind, müsst ihr raten. Versucht, die Lösungen so genau wie möglich aufzuschreiben. Für besonders schnelle/gute/witzige Lösungen kann es Bonuspunkte geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`

Aufgabe 1 (Variabler Brechungsindex)

Gegeben ist eine planparalle Platte. Ihre Brechzahl ändert sich nach der Gleichung

$$n\left(x\right) = \frac{n_a}{1-\frac{x}{q}}, \tag{1.1}$$

wobei $n_a = 1.2$ die Brechzahl im Punkt A, und $q = 0.13$ cm eine Konstante ist.
Im Punkt A ($x_a = 0$) fällt senkrecht zur Platte ein Lichstrahl ein. Dieser verlässt die Platte im Punkt B unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zur ursprünglichen Richtung. Bestimme den Brechungsindex des Materials im Punkt B und die Dicke der Platte d.



**** **Lösung 1** (*IPhO 1974*)

Wir rechnen zuerst den Brechungsindex des Materials im Punkt B aus. Dazu hilft uns das Brechungsgesetz. Allgemein gilt für einen Strahl, der aus einem Material mit Brechungsindex n_1 unter einem Winkel α_1 zum Lot auf einen Übergang zu einem Material mit Brechungsindex n_2 trifft

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,$$

wobei α_2 der entsprechende Ausfallswinkel ist.
Wir können uns das Material mit dem sich änderten Brechungsindex so vorstellen, als sei es aus sehr vielen kleinen Schichten mit Brechungsindex n_i aufgebaut. Da jeweils das Brechungsgesetz gilt, muss also für zwei direkt hintereinader liegende Schichten gelten:

$$n_{i-1} \sin\alpha_{i-1} = n_i \sin\alpha_i.$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage, dass $n \sin\alpha := c$ entlang des gesamten Materials konstant bleiben muss.
Damit können wir jetzt den Brechungsindex im Punkt B ausrechnen. Weil das Licht senkrecht eintrifft, ist

$$c = n_a \sin 90° = n_a. \tag{1.2}$$

Gleichzeitig gilt für die Brechung am Punkt B

$$\sin\alpha = n_B \sin\left(90° - \beta\right) = n_B \cos\beta, \tag{1.3}$$

wobei β_b der Einfallswinkel im Punkt B ist. Mit dem trigonmetrische Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) und $c = n_B \sin\beta_B$ kann man (1.3) umstellen zu

$$\sin\alpha = n_b\sqrt{1-\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - n_b^2\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - c^2} \overset{(1.2)}{=} \sqrt{n_b^2 - n_a^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow n_b = \sqrt{\sin^2\alpha + n_a^2} = 1.3.} \tag{1.4}$$

Wir können jetzt die Form des Lichstrahls ausrechnen, und damit d berechnen. Das geht über mehrere Methoden.

Bei der ersten denkt man ein bisschen nach. Dazu betrachtet man den Einfallswinkel $\beta\left(x\right)$ bei dem Übergang zwischen zwei gedachten Schichten an der Stelle x. Für diesen gilt mit (1.2) und (1.1)

$$\sin\beta\left(x\right) = \frac{c}{n\left(x\right)} \overset{(1.2)}{=} \frac{n_a}{n\left(x\right)} \overset{(1.1)}{=} \frac{q-x}{q}. \tag{1.5}$$

Wir betrachten nun den Kreis k um den Punkt O, welcher die Koordinaten $(q,0)$ hat. Die Tangente an diesen Kreis an der Stelle x schließt mit dem Kreis genau den Winkel $\sin\beta\left(x\right)$ ein, wie man im Dreieck $\Delta OCC'$ sehen kann. Weil der Strahl auch wenn er in das Material kommt tangential zu diesem Kreis verläuft, muss er innerhalb des Materials entlag dieser Kreisbahn verlaufen.
Gleichzeitig können wir die x-Koordinate von B einfach durch Umstellen von (1.1) finden

$$n_b = \frac{n_a}{1-\frac{x}{q}} \Rightarrow x_B = q\left(1-\frac{n_a}{n_b}\right) = 1 \text{ cm}. \tag{1.6}$$

Damit können wir jetzt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta BB'O$ die Dicke d ausrechnen

$$\boxed{d = \sqrt{q^2-\left(q-x_b\right)^2} = 5 \text{ cm}.} \tag{1.7}$$

Mann kann nachdenken auch durch Ableiten ersetzen. Mit $\tan\left(\arcsin x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ können wir aus (1.5) den Anstieg der Funktion $y\left(x\right)$ für den Lichtstrahl bestimmen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta = \frac{q-x}{\sqrt{q^2-\left(q-x\right)^2}}.$$

Das ist eine separierbare Differentialgleichung, die wir integrieren können

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{q-x}{\sqrt{q^2-\left(q-x\right)^2}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow y\left(x\right) = \sqrt{q^2-\left(q-x\right)^2}+c \tag{1.8}$$

Aus $y\left(0\right)=0$ folgt $c=0$. (1.8) ist aber nur die Gleichung für einen Halbkreis in positiver y-Richtung um $(q,0)$. Damit kann d genauso wie in (1.7) ausgerechnet werden.