Aufgabenserie 3 - Sommerspaß

Abgabe: 17. August

Diesmal gibt es vier Aufgaben, dafür auch zwei statt nur einem Monat. ROLF wünscht viel Spass in den Sommerferien.
Die Aufgaben sollten bis zum **17. August** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr an physikrolf@gmail.com. Jede Aufgabe hat eine bestimmte Anzahl an erreichbaren Punkten. Wie viele das sind, müsst ihr raten. Versucht, die Lösungen so genau wie möglich aufzuschreiben. Für besonders schnelle/gute/witzige Lösungen kann es Bonuspunkte geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`.

Aufgabe 1 (fauler Grashüpfer)

Ein fauler Grashüpfer möchte über einen Baumstumpf mit Radius $r = 20$ cm springen.
Wie groß ist die dafür mindestens benötigte Geschwindigkeit, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann?

***** **Lösung 1** (*P. Gnädig*)

Bei minimaler Anfangsgeschwindigkeit sollte die Grashüpferbahn den Baumstamm in genau zwei Punkten symmetrisch zur Achse um den Baumstumpf berühren, und damit ihren Scheitelpunkt direkt auf dieser Achse haben, wie in Abbildung 1.1 gezeigt ist. Dass die Bahn symmetrisch zur Symmetrieachse des Baums ist, liegt daran, dass sie reversibel sein sollte. Das bedeutet, dass es keinen Unterschied machen sollte, ob der Grashüpfer links oder rechts vom Baum losspringt, weshalb die Bahn symmetrisch sein muss. Es ist jetzt am

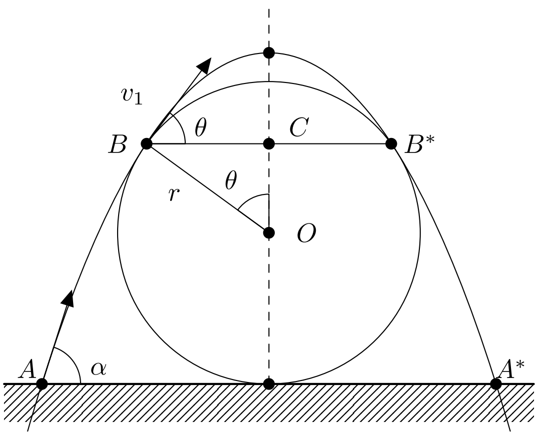


Abbildung 1.1: Skizze der Grashüpferbahn

einfachsten, wenn man zuerst die Bewegung des Grashüpfers von B nach B^* betrachtet. Die Geschwindigkeit des Grashüpfers in B nennen wir v_1, und den Winkel, den die Grashüpfergeschwindigkeit mit dem Boden macht θ.
Dann wissen wir, dass die Wurfweite s_w dieses schrägen Wurfes gegeben ist durch

$$s_w = \frac{2v_1^2 \sin\theta \cos\theta}{g}. \tag{1.1}$$

Geometrisch interpretiert muss diese Wurfweite s_w genau die Strecke zwischen B und B^* sein. Wir versuchen jetzt, $\overline{BB^*}$ durch bekannte Parameter auszudrücken.
Dazu macht es Sinn, wenn wir uns den Winkel $\angle COB$ anschauen. Wir wissen nämlich, dass die Geschwindigkeit (genauer: der Geschwindigkeits*vektor*) tangiential zur Bahn sein muss, der Geschwindigkeitsvektor steht also senkrecht auf der Strecke $\overline{OB}$. Gleichzeitig ist das Dreieck ΔBOC ein rechtwinkliges, mit dem rechten Winkel $\angle BCO$. Damit ist also $\angle BOC = 180° - 90° - \angle CBO = 90° - (90° - \theta) = \theta$.
Jetzt können wir noch eine zweite Bedingung für s_w aufstellen, allerdings in Abhängigkeit von θ und r. Das ist gut, weil wir dann einfach (1.1) nehmen können, um v_1 auszurechen. Die Bedingung ist einfach, dass s_w tatsächlich der Strecke $\overline{BB^*}$ entspricht. Es ist $\overline{BB^*} = 2\overline{BC}$.
Die Strecke $\overline{BC}$ können wir trigonometrisch durch θ im Dreieck ΔBOC ausrechnen. Dieses hat nämlich die Hypothenuse r, und der Winkel θ hat die Gegenkathete $\overline{BC}$. Also ist $\overline{BC} = r \cdot \sin\theta$. Damit haben wir jetzt

die zweite Bedingung für s_w,

$$s_w = \overline{BB^*} = 2\overline{BC} = 2r \cdot \sin\theta. \tag{1.2}$$

Setzten wir (1.1) und (1.2) gleich, kommen wir auf

$$\frac{2v_1^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = 2r \cdot \sin\theta \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}. \tag{1.3}$$

Wir können jetzt die Energieerhaltung benutzten, um daraus die tatsächliche Anfangsgeschwindigkeit v_0 auszurechnen.
Dazu brauchen wir aber noch die Höhe h_B von Punkt B überhalb des Bodens. Auch die können wir wieder durch θ ausrechnen. Die Höhe setzt sich nämlich zusammen aus der Höhe des Kreismittelpunkts O über dem Boden (also dem Radius r) und der Strecke $\overline{OC}$. Die ist aber gerade die Ankathete zu θ im Dreieck ΔBOC, sodass wir schreiben können $h_b = r + r\cos\theta = r \cdot (1 + \cos\theta)$.
Die Energieerhaltung setzt nun die kinetische Energie am Punkt A mit der Summe aus potentieller und kinetischer Energie in B gleich, also

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v_1^2}{2} + mgh_B \Rightarrow v_0^2 = \underbrace{\frac{rg}{\cos\theta}}_{\text{aus (1.3)}} + 2g\underbrace{r\,(1+\cos\theta)}_{=h_B} = 2rg \cdot \left(1 + \frac{1}{2\cos\theta} + \cos\theta\right), \tag{1.4}$$

wobei m die Masse des Grashüpfers ist, die aber keine Rolle spielen sollte.
Um den niedrigst möglichen Wert für v_0 zu finden, reicht es, denn niedrigst möglichen Wert für v_0^2 zu finden. Mit (1.4) geht das jetzt auf zwei unterschiedliche Wege. Für den einen kann man einfach ableiten und dann die Ableitung null setzten:

$$\frac{dv_0^2}{d\theta} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} + 2\cos\theta\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -2\sin\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 45°. \tag{1.5}$$

Hierbei wurde im ersten Schritt ausgenutzt, dass der erste Term in der Summe, aus der sich v_0 ergibt, nicht von θ abhängt, und somit für die Ableitung nicht relevant ist. Gleichzeitig kann der Faktor rg gekürzt werden, weil $\frac{0}{rg} = 0$ gilt. Für die Ableitung von $\frac{1}{\cos\theta}$ kann man am einfachsten die Kettenregel nehmen. Das einfache Ergebnis für θ am Ende liegt daran, dass wir wissen, das $\theta > 0$ und $\theta < 90°$ sein muss.
Wenn man nicht ableiten kann, ist das aber nicht schlimm. Hier hilft die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}, \tag{1.6}$$

wobei man den linken Term arithmetisches Mittel (oft auch nur Durchschnitt) nennt, und den rechten geometrisches Mittel. Wir können jetzt den interessanten Term, also $2\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$ schreiben als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta} + 4\cos\theta\right). \tag{1.7}$$

In (1.7) haben wir den Term aber nur als arithmetisches Mittel zweier Terme ausgedrückt. Das muss aber immer mindestens genauso groß sein, wie das geometrische Mittel der beiden Teile, also

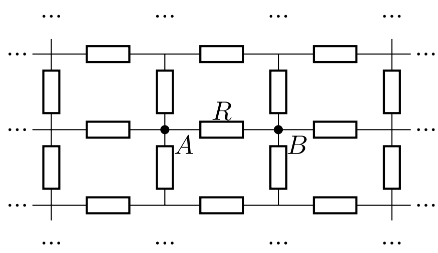
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta} + 4\cos\theta\right) \geq \sqrt[2]{\frac{2}{\cos\theta} \cdot 4\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1.8}$$

Denn kleinstmöglichen Wert für v_0 erhalten wir dann, wenn hier die Gleichheit gilt, weil ja den kleinstmöglichen Wert für die Summe aus (1.4) darstellt. Stellen wir die Gleichung (1.8) nach θ um, so erhalten wir übrigens wieder $\theta = 45°$.
Setzt man das jetzt in (1.4) ein, kommt man am Ende auf

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gr\left(1 + \sqrt{2}\right)} \approx 3.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.}$$

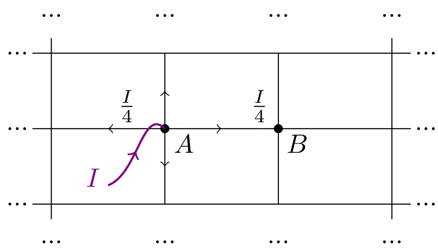
Aufgabe 2 (Widerstandsnetzwerk)

Alle Kanten in dem unendlich großen Widerstandsnetz (siehe Abbildung) haben den Widerstand R. Wie groß ist der Widerstand zwischen A und B?

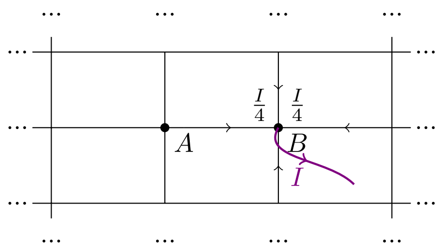


**** **Lösung 2** (*P. Gnädig*)

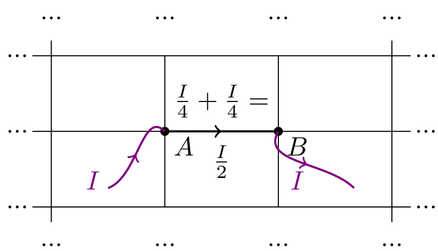
Diese Aufgabe kann man wieder mit dem Superpositionsprinzip lösen (siehe Serie 2). Wir betrachten dazu zuerst den Fall, dass in den Punkt A von irgendwo her ein Strom I fließt. Weil das Netz unendlich groß ist, und alle Widerstandskanten den gleichen Widerstand R haben, gibt es keine bevorzugte Fließrichtung für den Strom. Da nach der ersten Kirchhoffschen Regel (Knotensatz) aber der Strom, der in einen Punkt reinfließt, auch wieder rausfließen muss, fließt in jeder der vier an den Punkt A angrenzenden Kanten jetzt ein Strom von $\frac{I}{4}$:



Hierbei wurden die Widerstände nicht mehr eingezeichnet, um die Übersichtlichkeit zu erhalten.
Wir betrachten nun den anderen Fall, in dem es uns irgendwie gelingt, dass aus dem Punkt B ein Strom von I rausfließt. Weil es wieder keine bevorzugte Richtung für den Ursprung des Stroms gibt, der über B aus dem Netz fließt, muss (wieder nach dem Knotensatz) in jeder der vier angrenzenden Kanten ein Strom von $\frac{I}{4}$ fließen:



Jetzt kommt der Superpositionstrick zum Einsatz. Wir „addieren" (also überlagern) einfach die beiden Fälle, die wir uns eben ganz einfach anschauen konnten, und hoffen, dass etwas sinnvolles dabei heraus kommt.
In diesem Fall heißt das, dass wir uns ein Stromnetzwerk anschauen, in dem in Punkt A ein Strom I reinfließt, und aus Punkt B ein Strom I rausfließt. Das klingt genau nach dem, was wir haben wollen, wenn wir den Widerstand zwischen A und B rausfinden wollen.
Die Ströme aus den beiden einfachen Fällen addieren sich hier einfach, sodass zwischen A und B ein Strom von $\frac{I}{4} + \frac{I}{4} = \frac{I}{2}$ fließt:

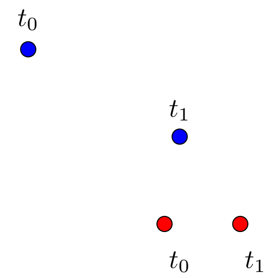


Die Ströme durch die anderen Kanten können jetzt nicht mehr einfach bestimmt werden, aber die interessieren uns auch nicht wirklich.

Durch den Widerstand R zwischen A und B fließt nun also ein Strom von $\frac{I}{2}$. Nach dem Ohmschen Gesetz entspricht das einem Spannungsabfall von $U_{AB} = R \cdot \frac{I}{2}$ **zwischen A und B.**
Der gesuchte Widerstand R_{AB} zwischen A und B ergibt sich jetzt nicht nur durch den direkt geschalteten Widerstand R, sondern auch durch all die anderen angrenzenden Widerstände. Wir können ihn aber durch den Spannungsabfall ausrechnen, den wir gerade ausgerechnet haben. Denn wen zwischen A und B ein Strom I fließt ($\frac{I}{2}$ durch die direkte Verbindung, und der Rest irgendwie anders durch das Widerstandnetz), und der Spannungsabfall zwischen A und B gerade $R \cdot \frac{I}{2}$ beträgt, ist der Ersatzwiderstand zwischen A und B nach dem Ohmschen Gesetz gegeben durch $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{R \cdot \frac{I}{2}}{I} = \frac{R}{2}$.

Aufgabe 3 (Stoßaufnahme)

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Positionen von zwei Körpern zum Zeitpunkt t_0 und t_1. Die Körper sind sehr klein, und bewegen sich reibungsfrei auf einem Tisch.
Der rote Körper hat eine Masse, die dreimal so groß ist wie die des blauen.
Bestimme in der Abbildung (in größerer Form auch auf der nächsten Seite) die Bewegungsrichtungen der beiden Körper, nachdem sie zusammengestoßen sind. Nimm dazu an, dass beide Körpermittelpunkte zum Zeitpunkt des Stoßes auf der Gerade der Bewegungsrichtung des roten Körpers liegen.

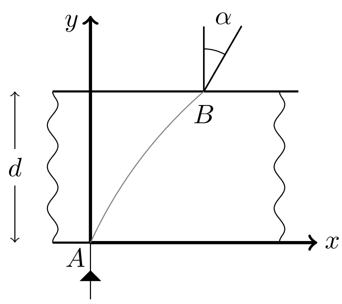


Aufgabe 4 (Variabler Brechungsindex)

Gegeben ist eine planparalle Platte. Ihre Brechzahl ändert sich nach der Gleichung

$$n(x) = \frac{n_a}{1 - \frac{x}{q}}, \tag{4.1}$$

wobei $n_a = 1.2$ die Brechzahl im Punkt A, und $q = 0.13$ cm eine Konstante ist.
Im Punkt A ($x_a = 0$) fällt senkrecht zur Platte ein Lichstrahl ein. Dieser verlässt die Platte im Punkt B unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zur ursprünglichen Richtung. Bestimme den Brechungsindex des Materials im Punkt B und die Dicke der Platte d.



**** **Lösung 4** (*IPhO 1974*)

Wir rechnen zuerst den Brechungsindex des Materials im Punkt B aus. Dazu hilft uns das Brechungsgesetz. Allgemein gilt für einen Strahl, der aus einem Material mit Brechungsindex n_1 unter einem Winkel α_1 zum Lot auf einen Übergang zu einem Material mit Brechungsindex n_2 trifft

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,$$

wobei α_2 der entsprechende Ausfallswinkel ist.
Wir können uns das Material mit dem sich änderten Brechungsindex so vorstellen, als sei es aus sehr vielen kleinen Schichten mit Brechungsindex n_i aufgebaut. Da jeweils das Brechungsgesetz gilt, muss also für zwei direkt hintereinader liegende Schichten gelten:

$$n_{i-1} \sin\alpha_{i-1} = n_i \sin\alpha_i.$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage, dass $n \sin\alpha := c$ entlang des gesamten Materials konstant bleiben muss.
Damit können wir jetzt den Brechungsindex im Punkt B ausrechnen. Weil das Licht senkrecht eintrifft, ist

$$c = n_a \sin 90° = n_a. \tag{4.2}$$

Gleichzeitig gilt für die Brechung am Punkt B

$$\sin\alpha = n_B \sin(90° - \beta) = n_B \cos\beta, \tag{4.3}$$

wobei β_b der Einfallswinkel im Punkt B ist. Mit dem trigonmetrische Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) und $c = n_B \sin\beta_B$ kann man (4.3) umstellen zu

$$\sin\alpha = n_b\sqrt{1-\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - n_b^2\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - c^2} \overset{(4.2)}{=} \sqrt{n_b^2 - n_a^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow n_b = \sqrt{\sin^2\alpha + n_a^2} = 1.3.} \tag{4.4}$$

Wir können jetzt die Form des Lichstrahls ausrechnen, und damit d berechnen. Das geht über mehrere Methoden.
Bei der ersten denkt man ein bisschen nach. Dazu betrachtet man den Einfallswinkel $\beta(x)$ bei dem Übergang zwischen zwei gedachten Schichten an der Stelle x. Für diesen gilt mit (4.2) und (4.1)

$$\sin\beta(x) = \frac{c}{n(x)} \overset{(4.2)}{=} \frac{n_a}{n(x)} \overset{(4.1)}{=} \frac{q-x}{q}. \tag{4.5}$$

Wir betrachten nun den Kreis k um den Punkt O, welcher die Koordinaten $(q,0)$ hat. Die Tangente an diesen Kreis an der Stelle x schließt mit dem Kreis genau den Winkel $\sin\beta(x)$ ein, wie man im Dreieck $\Delta OCC'$ sehen kann. Weil der Strahl auch wenn er in das Material kommt tangential zu diesem Kreis verläuft, muss er innerhalb des Materials entlag dieser Kreisbahn verlaufen.
Gleichzeitig können wir die x-Koordinate von B einfach durch Umstellen von (4.1) finden

$$n_b = \frac{n_a}{1-\frac{x}{q}} \Rightarrow x_B = q\left(1 - \frac{n_a}{n_b}\right) = 1 \text{ cm}. \tag{4.6}$$

Damit können wir jetzt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta BB'O$ die Dicke d ausrechnen

$$\boxed{d = \sqrt{q^2 - (q-x_b)^2} = 5 \text{ cm}.} \tag{4.7}$$

Mann kann nachdenken auch durch Ableiten ersetzen. Mit $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ können wir aus (4.5) den Anstieg der Funktion $y(x)$ für den Lichtstrahl bestimmen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta = \frac{q-x}{\sqrt{q^2-(q-x)^2}}.$$

Das ist eine separierbare Differentialgleichung, die wir integrieren können

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{q-x}{\sqrt{q^2-(q-x)^2}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow y(x) = \sqrt{q^2-(q-x)^2} + c \tag{4.8}$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c = 0$. (4.8) ist aber nur die Gleichung für einen Halbkreis in positiver y-Richtung um $(q,0)$. Damit kann d genauso wie in (4.7) ausgerechnet werden.