Aufgabenseminar Himmelsmechanik

`pankratius.github.io/rolf`

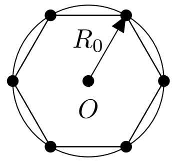
Gravitationskraft $\mathbf{F} = \frac{mMG}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$; Gravitationspotential $U(r) = -\frac{mMG}{r}$; Gesamtenergie auf einer elliptischen Flugbahn $E = \frac{mMG}{2a}$; Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$; für Punkt auf Ellipse bleibt Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant, Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m^2 GM\hat{\mathbf{r}} = \text{const.}$
Kepler I: Bewegung von HK auf Kegelschnitten ($r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, mit $p = \ell^2/\Gamma m^2$ und $\varepsilon^2 = 1 + 2E^2\ell^2/\Gamma^2 m^3$), Brennpunkt im Schwerpunkt; Kepler II: Radiusvektor überschreitet gleiche Flächen in gleichen Zeiten; Kepler III: für zwei Bahnen gilt $T_1^2/T_2^2 = a_1^2/a_2^3$

---

wichtige Größen: Abstand von Schwerpunkt (r), Gravitationskraft ($\mathbf{F}$), Gravitationspotential ($U(r)$), Energie ($E(r)$), Drehimpuls ($\mathbf{L}$), Betrag des Drehimpulses (ℓ), Umlaufzeit (T), große Halbachse (a), kleine Halbachse (b), Masse eines Körpers im gegebenen Gravitationsfeld (m), Masse des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers (M), Gravitationskonstante (G)
Wo es sinnvoll ist, ersetzen wir GM durch eine neue Konstante, Γ

Taylor-Näherung: $f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}|_{x=x_0}(x - x_0)$ für $x \approx x_0$.

Aufgabe 1 (Polygon)



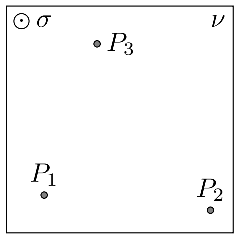
Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse m sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhänigkeit von n) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?

Aufgabe 2 (Ballistische Rakete)

Eine Rakete wird vom Nordpol der Erde (Radius R, Masse M) mit der ersten kosmischen Geschwindigkeit[†] gestartet, sodass sie am Äquator landet.

1. Wie groß ist die große Halbachse a der Flugbahn?
2. Was ist der größte Abstand h der Rakete von der Erdoberfläche?
3. Wie lang ist die Flugzeit T der Rakete?

Aufgabe 3 (Starrer Körper)



Drei (nicht-kolineare) Massen m_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) an Punkten P_i wechselwirken ausschließlich gravitativ. Die durch diese drei Punkte aufgespannte Ebene sei ν, und die dazu senkrecht stehende Rotationsachse σ. Welche Bedingungen müssen die drei Seitenlängen des Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$ ($a_{1,2}$; $a_{1,3}$; $a_{2,3}$) erfüllen, sodass dieses sich nicht verändert, also wie ein starrer Körper um σ rotiert?

Aufgabe 4 (Komet)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn um die Sonne. Im sonnennächsten Punkt beträgt sein Abstand von der Sonne $r_e/3$, wobei r_e der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn ist. Alle anderen Wechselwirkungen als die mit der Sonne vernachlässigend, wie lang ist die Zeit τ, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet?
Tipp:

$$\forall x, a \in \mathbb{R}^+, x > a : \int \frac{x}{\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{3}(x + 2a)\sqrt{x-a} + C. \tag{4.1}$$

Aufgabe 5 (Gravity Gradient Stabilization)

Wir betrachten einen Satelliten, der aus zwei Punktmassen m_1 und m_2 besteht, die durch einen massenlosen Strick der Länge s verbunden sind.
Dieser Satellit befindet sich auf einer Kreisbahn um die Erde mit Radius R. Dabei zeigt er die Tendenz, sich aufzurichten, und um die sich einstellende Ruhelage zu oszillieren.
Bestimme die Frequenz f dieser Schwingung.

Aufgabe 6 (Periheldrehung)

[†] Das ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper eine stabile Kreisbahn über der Erdoberfläche haben kann.

Wir betrachten ein Gravitationsfeld, was vom normalen Keplerschen um eine sehr kleine Pertubation $\delta U(r)$ abweicht:

$$U^{\dagger}(r) = U(r) + \delta U(r) = U(r) + \frac{\beta}{r^2} \tag{6.1}$$

Das führt dazu, dass die elliptische Bahn, auf der ein Körper sich bewegt, nicht mehr geschlossen ist, sondern sich die Periapsis bei jeder Umdrehung um einen kleinen Winkel $\delta\varphi$ verschiebt.
Bestimme $\delta\varphi$ in Abhängigkeit von den ursprünglichen Bahnparametern und β.
Dabei kann ohne Beweis genutzt werden, dass bei einer solchen Änderung des Potentials der Drehimpulsvektor weiterhin konstant ist[†].

Aufgabe 7 (Schwarzschildmetrik)
Die Bewegung eines Teilchens in der Schwarzschildmetrik[‡] kann durch ein effektives Potential der Form

$$\tilde{U}(r) = \frac{mc^2}{2}\left(-\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3}\right). \tag{7.1}$$

beschrieben werden. Dabei ist $r_s := \frac{2\Gamma}{c^2}$ der sog. *Schwarzschildradius* und $a := \frac{\ell}{mc}$ eine Referenzlänge.
Die Gesamtenergie ist dann einfach

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \tilde{U}(r). \tag{7.2}$$

Finde die Radii, bei denen kreisförmige Orbits um den Zentralkörper möglich sind, sowie den Abstand r_{isco} vom Zentralkörper, an dem der letzte stabile kreisförmige Orbit möglich ist. Dabei kann genutzt werden, dass für gewöhnlich $\frac{r_s}{a} \ll 1$ gilt.

[†] Das kann man bspw. schön über den Hamiltonformalismus zeigen.
[‡] Allgemein-relativistische Beschreibung der Gravitationswirkung eines ruhenden, sphärisch-symmetrischen Körpers.