Analysis mit Physik üben II

physikrolf@gmail.com, `pankratius.github.io/rolf`

Wir verwenden die Physikkonvention, eine zeitliche Ableitung als Punkt darzustellen; $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\left(t\right)\right)$.

Aufgabe 1 (Hubbles "Konstante")

Man geht davon aus, dass der Radius $R\left(t\right), t \geq 0$ des Universums drei Bedingungen gehorcht

$$R\left(0\right) = 0 \tag{1.1a}$$

$$\dot{R} > 0 \; t > 0 \tag{1.1b}$$

$$\ddot{R} > 0 \; t > 0. \tag{1.1c}$$

Die Hubble-Funktion $H\left(t\right)$ ist definiert als

$$H\left(t\right) = \frac{\dot{R}}{R}. \tag{1.2}$$

1. Man hat beobachtet, dass $H\left(t\right) = \frac{a}{t}$, wobei a eine Konstante ist. Berechne daraus einen Ausdruck für $R\left(t\right)$. Welche Werte darf a haben, damit die Bedinungen (1.1) weiter erfüllt bleiben?
2. Ist es möglich, dass $H\left(t\right) = \frac{b}{t^2}$, wobei b eine Konstante ist? Vergleiche dazu mit den Bedingungen (1.1).

Aufgabe 2 (Schneemann)

Ein Schneemann besteht aus zwei Schneebällen, mit Radii R, $2R$ und $3R$.
Jetzt fängt der Schneemann an, zu schmelzen. Finde, mit geeigneten Annahmen, das Verhältnins von Anfangsvolumen zum Volumen zu dem Zeitpunkt, an dem sich die Gesamthöhe des Schneemanns halbiert hat.

Aufgabe 3 (Schneepflug)

Zwei identische Schneepflüge räumen die gleiche Straße. Der erste startet eine Zeit t_1 nach dem es mit scheinen anfing, der zweite vom gleichen Punkt nach einer Zeit $t_2 - t_1$.
Der Schnee fällt so, dass sich die Höhe der Schneedecke mit einer kontanten Rate k vergrößert.
Die Geschwindigkeit einer Schneeraupe ist $v\left(t\right) = ak/z\left(t\right)$, wobei $z\left(t\right)$ die momentante Schneehöhe angibt, und a eine Konstante ist.
Jeder Schneepflug räumt den gesamten Schnee. Zeige, dass die Zeit t, zu der der zweite Schneepflug eine Distanz $x_2\left(t\right)$ zurückgelegt hat, die Gleichung

$$a\frac{dt}{dx_2} = t - t_1 e^{\left(x_2/a\right)} \tag{3.1}$$

erfüllt.
Bestimme mit (3.1) die Zeit, bis die beiden Schneepflüge kollidieren.