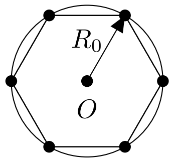
Aufgabenseminar Himmelsmechanik

pankratius.github.io/rolf

Gravitationskraft $\mathbf{F} = \frac{mMG}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$; Gravitationspotential $U(r) = -\frac{mMG}{r}$; Gesamtenergie auf einer elliptischen Flugbahn $E = \frac{mMG}{2a}$; Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$; für Punkt auf Ellipse bleibt Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant, Runge-Lenz-Vektor $\varepsilon = \frac{\mathbf{L}\times\mathbf{v}}{GmM} + \hat{\mathbf{r}} = \text{const.}$
Kepler I: Bewegung von HK auf Kegelschnitten, Brennpunkt im Schwerpunkt; Kepler II: Radiusvektor überschreitet gleiche Flächen in gleichen Zeiten; Kepler III: für zwei Bahnen gilt ${}^{T^2}/_{T^2} = {}^{a_1^2}/_{a_2^3}$

---

wichtige Größen: Abstand von Schwerpunkt (r), Gravitationskraft$(\mathbf{F})$, Gravitationspotential $(U(r))$, Energie $(E(r))$, Drehimpuls $(\mathbf{L})$, Umlaufzeit (T), große Halbachse (a), kleine Halbachse (b), Masse eines Körpers im gegebenen Gravitationsfeld (m), Masse des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers (M), Gravitationskonstante (G)
Wo es sinnvoll ist, ersetzen wir GM durch eine neue Konstante, Γ



Aufgabe 1 (Polygon)

Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, bei dem an jeder Ecke eine Masse m sitzt. Wie bewegt sich das System, wenn nur die Gravitationskraft zwischen den Körpern wirkt? Wie viel Zeit (in Abhänigkeit von n) vergeht, bis das System seinen Endzustand erreicht hat?

** **Lösung 1** (*P. Gnädig*)

Aus Symmetriegründen heben sich die nicht-radialen Teile der wirkenden Gravitationskräfte auf, sodass alle n Massen sich zum Mittelpunkt des Polygons, O, bewegen. Dabei muss die polygonform erhalten bleiben. Weil die Abhängigkeit Körperabstand-Gravitationskraft aber nicht-linear ist, ist die Bewegung nicht gleichmäßig beschleunigt. Vielmehr sollte die Beschleunigung größer werden, je geringer der Körperabstand ist.
Um nun die Zeit T auszurechnen, bis die Körper im Punkt O kollidieren, kann man zuerst die Kraft auf eine der Massen m ausrechnen. Diese ist gegeben durch die Summe der Radialteile aller Gravitationskräfte der anderen $n-1$ Körper, also, wenn der Radius des Polygons gerade R ist,

$$F = Gm \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m \sin\left(\frac{\pi}{i}\right)}{\left(2R\sin\left(\frac{\pi}{i}\right)\right)^2} = \frac{Gm}{R^2} \cdot \underbrace{\frac{m}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}}_{:=M_n}. \tag{1.1}$$

Die Kraft ist also so, als würde sich der Körper im Gravitationsfeld eines stationären Körpers mit der Masse $M_n = \frac{m}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{i}}$ bewegen.
Diese Bewegung kann man jetzt als Bewegung entlang einer Ellipse ohne kleiner Halbachse, und mit großer Halbachse $\frac{R_0}{2}$ auffassen. Die Zeit, die dann bis zum Zusammensturz benötigt wird, entspricht genau der halben Periode ${}^{T_e}/_2$.
Diese kann man über das dritte Keplersche Gesetz aus der entsprechenden Periode T_k für eine Kreisbahn mit Radius R_0 ausrechen, wobei $F_g = F_{rad}$ benutzt wird:

$$\frac{GmM_n}{R_0^2} = mR\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T_k}\right)^2}_{=\omega^2} \Rightarrow T_k = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3}{GM_n}}. \tag{1.2}$$

Mit dem dritten Keplerschen Gesetz folgt dann

$$\boxed{\left(\frac{T_e}{T_k}\right)^2 = \left(\frac{{}^{R_0}/_2}{R_0}\right)^3 \Rightarrow T_e = \pi\sqrt{\frac{R_0^3}{8GM_n}}.} \tag{1.3}$$

Aufgabe 2 (Ballistische Rakete)

Eine Rakete wird vom Nordpol der Erde (Radius R, Masse M) mit der ersten kosmischen[†] Geschwindigkeit gestartet, sodass sie am Äquator landet.

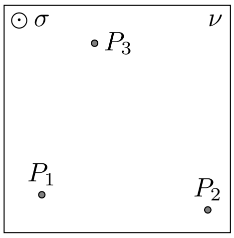
[†]Das ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper eine stabile Kreisbahn um die Erde haben kann.

1. Wie groß ist die große Halbachse a der Flugbahn?
2. Was ist der größte Abstand h der Rakete von der Erdoberfläche?
3. Wie lang ist die Flugzeit T der Rakete?

*** **Lösung 2** (*J. Kaalda*)

1. Die erste kosmische Geschwindigkeit v_0 kann man am einfachsten durch das Gleichsetzen von Radial- und Gravitationskraft errechnen
$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\Gamma}{R}}.$$
Die Gesamtenergie beim Abschuss ist damit gegeben durch
$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\Gamma m}{R} = -\frac{\Gamma m}{2R}$$
Damit können wir die große Halbachse a ausrechnen, weil wir ja wissen, wie die beiden zusammenhängen
$$\boxed{E = -\frac{\Gamma m}{2a} = -\frac{\Gamma m}{2R} \Rightarrow a = R.} \tag{2.1}$$
Das kann man sich auch daran überlegen, dass die Gesamtenergie bei gegebener Geschwindigkeit unabhängig von der Ausrichtung beim Starten nur vom Abstand zum Erdmittelpunkt abhängen darf, und damit die große Halbachse, die nur von der Energie abhängt, nur R sein kann.
2. Wir wissen, dass einer der beiden Brennpunkte der Erdmittelpunkt sein muss (1. Keplersches Gesetz).

Aufgabe 3 (Starrer Körper)



Drei (nicht-kolineare) Massen m_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) an Punkten P_i wechselwirken ausschließlich über durch ihre Gravitationskraft. Die durch die drei Punkte aufgespannte Ebene sei ν, und die dazu senkrecht stehende Rotationsachse σ. Welche Bedingungen müssen die drei Seitenlängen des Dreiecks $\Delta P_1 P_2 P_3$ erfüllen, sodass dieses sich nicht verändert, also wie ein starrer Körper um σ rotiert?

Aufgabe 4 (Komet)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn um die Sonne. Im sonnennächsten Punkt beträgt sein Abstand von der Sonne $r_e/3$, wobei r_e der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn ist. Alle anderen Wechselwirkungen als die mit der Sonne vernachlässigendend, wie lang ist die Zeit τ, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn befindet?

Aufgabe 5 (Gravity Gradient Stabilization)

Wir betrachten einen Satelliten, der aus zwei Punktmassen m_1 und m_2 besteht, die durch einen massenlosen Strick der Länge ℓ verbunden sind.
Dieser Satellit befindet sich auf einer Kreisbahn um die Erde mit Radius R. Dabei zeigt er die Tendenz, sich aufzurichten, und um die sich einstellende Ruhelage zu oszillieren.
Bestimme die Frequenz f dieser Schwingung.

Aufgabe 6 (Parallellandung)

Wir betrachten eine Rakete die von der Erde gestartet wird, und deren Geschwindigkeitsvektor bei der Landung parallel zum Geschwindigkeitsvektor beim Start war. Der Start- und Landepunkt schließen einen Winkel ϑ mit dem Erdmittelpunkt ein. Fliegt die Rakete direkt über der Erde in einer Kreisbahn, dann benötigt sie dafür die Zeit T_0.
Wie lange benötigt die Rakete für diesen besonderen Flug, und wie groß ist dabei die maximale Höhe, die sie erreichen kann?

Aufgabe 7 (Periheldrehung)

Wir betrachten ein Gravitationsfeld, was vom normalen Keplerschen um eine sehr kleine Pertubation $\delta U(r)$ abweicht:
$$U^\dagger(r) = U(r) + \delta U(r) = U(r) + \frac{\beta}{r^2} \tag{7.1}$$

Das führt dazu, dass die elliptische Bahn, auf der der Körper sich bewegt, nicht mehr geschlossen ist, sondern sich die Periapsis bei jeder Umdrehung um einen kleinen Winkel $\delta\varphi$ verschiebt.
Bestimme $\delta\varphi$ in Abhängigkeit von den ursprünglichen Bahnparametern und β.