Aufgabenserie 3 - Sommerspaß

Abgabe: 17. August

Diesmal gibt es vier Aufgaben, dafür auch zwei statt nur einem Monat. ROLF wünscht viel Spass in den Sommerferien.
Die Aufgaben sollten bis zum **17. August** bearbeitet werden. Die Lösungen schickt ihr entweder an physikrolf@gmail.com. Jede Aufgabe hat eine bestimmte Anzahl an erreichbaren Punkten. Wie viele das sind, müsst ihr raten. Versucht, die Lösungen so genau wie möglich aufzuschreiben. Für besonders schnelle/gute/witzige Lösungen kann es Bonuspunkte geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`.

Aufgabe 1 (fauler Grasshüpfer)

Ein fauler Grasshüpfer möchte über einen Baumstumpf mit Radius $r = 20$ cm springen.
Wie groß ist die dafür mindestens benötigte Geschwindigkeit, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann?

***** **Lösung 1** (*P. Gnädig*)

Bei minimaler Anfangsgeschwindigkeit sollte die Grashüpferbahn den Baumstamm in genau zwei Punkten symmetrisch zur Achse um den Baumstumpf berühren, und damit ihren Scheitelpunkt direkt auf dieser Achse haben, wie in Abbildung 1.1 gezeigt ist.
Es ist jetzt am einfachsten, wenn man zuerst die Bewegung des Grashüpfers von B nach B^* betrachtet. Die Geschwindigkeit des Grashüpfers in B nennen wir v_2, und den Winkel, den die Grashüpfergeschwindigkeit mit dem Boden macht θ.
Dann wissen wir, dass die Wurfweite s_w dieses schrägen Wurfes gegeben ist durch

$$s_w = \frac{2v_2^2 \sin\theta \cos\theta}{g}. \tag{1.1}$$

Geometrisch interpretiert muss diese Wurfweite s_w genau die Strecke zwischen B und B^* sein. Wir versuchen jetzt, $\overline{BB^*}$ durch bekannte Parameter auszudrücken.
Dazu macht es Sinn, wenn wir uns den Winkel

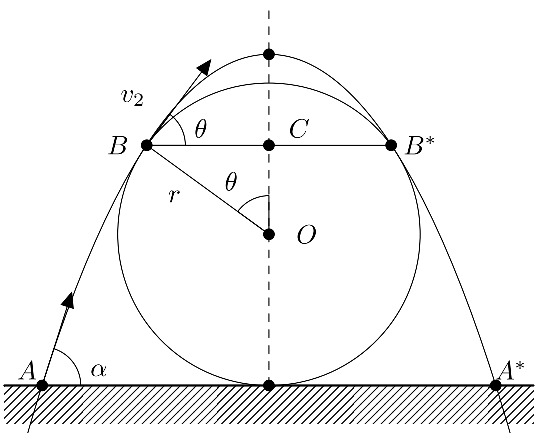
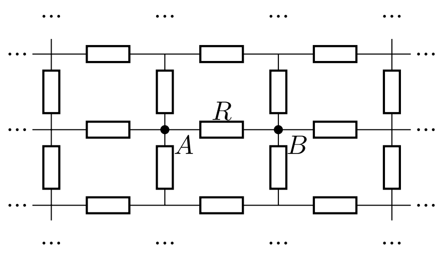


Abbildung 1.1: Skizze der Grashüpferbahn

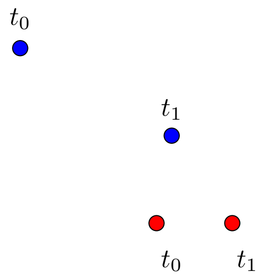
Aufgabe 2 (Widerstandsnetzwerk)

Alle Kanten in dem unendlich großen Widerstandsnetz (siehe Abbildung) haben den Widerstand R. Wie groß ist der Widerstand zwischen A und B?



Aufgabe 3 (Stoßaufnahme)

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Positionen von zwei Körpern zum Zeitpunkt t_0 und t_1. Die Körper sind sehr klein, und bewegen sich reibungsfrei auf einem Tisch.
Der rote Körper hat eine Masse, die dreimal so groß ist wie die des blauen.
Bestimme in der Abbildung (in größerer Form auch auf der nächsten Seite) die Bewegungsrichtungen der beiden Körper, nachdem sie zusammengestoßen sind. Nimm dazu an, dass beide Körpermittelpunkte zum Zeitpunkt des Stoßes auf der Gerade der Bewegungsrichtung des roten Körpers liegen.

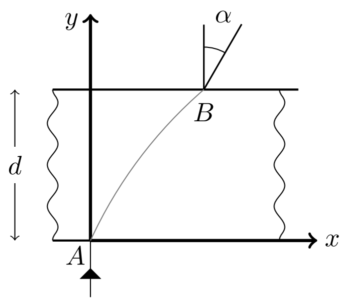


Aufgabe 4 (Variabler Brechungsindex)

Gegeben ist eine planparalle Platte. Ihre Brechzahl ändert sich nach der Gleichung

$$n\left(x\right) = \frac{n_a}{1 - \frac{x}{q}}, \tag{4.1}$$

wobei $n_a = 1.2$ die Brechzahl im Punkt A, und $q = 0.13$ cm eine Konstante ist.
Im Punkt A ($x_a = 0$) fällt senkrecht zur Platte ein Lichtstrahl ein. Dieser verlässt die Platte im Punkt B unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zur ursprünglichen Richtung. Bestimme den Brechungsindex des Materials im Punkt B und die Dicke der Platte d.



**** **Lösung 4** (*IPhO 1974*)

Wir rechnen zuerst den Brechungsindex des Materials im Punkt B aus. Dazu hilft uns das Brechungsgesetz. Allgemein gilt für einen Strahl, der aus einem Material mit Brechungsindex n_1 unter einem Winkel α_1 zum Lot auf einen Übergang zu einem Material mit Brechungsindex n_2 trifft

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,$$

wobei α_2 der entsprechende Ausfallswinkel ist.
Wir können uns das Material mit dem sich änderten Brechungsindex so vorstellen, als sei es aus sehr vielen kleinen Schichten mit Brechungsindex n_i aufgebaut. Da jeweils das Brechungsgesetz gilt, muss also für zwei direkt hintereinader liegende Schichten gelten:

$$n_{i-1} \sin\alpha_{i-1} = n_i \sin\alpha_i.$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage, dass $n \sin\alpha := c$ entlang des gesamten Materials konstant bleiben muss.
Damit können wir jetzt den Brechungsindex im Punkt B ausrechnen. Weil das Licht senkrecht eintrifft, ist

$$c = n_a \sin 90° = n_a. \tag{4.2}$$

Gleichzeitig gilt für die Brechung am Punkt B

$$\sin\alpha = n_B \sin\left(90° - \beta\right) = n_B \cos\beta, \tag{4.3}$$

wobei β_b der Einfallswinkel im Punkt B ist. Mit dem trigonmetrische Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) und $c = n_B \sin\beta_B$ kann man (4.3) umstellen zu

$$\sin\alpha = n_b\sqrt{1-\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - n_b^2\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_b^2 - c^2} \stackrel{(4.2)}{=} \sqrt{n_b^2 - n_a^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow n_b = \sqrt{\sin^2\alpha + n_a^2} = 1.3.} \tag{4.4}$$

Wir können jetzt die Form des Lichstrahls ausrechnen, und damit d berechnen. Das geht über mehrere Methoden.
Bei der ersten denkt man ein bisschen nach. Dazu betrachtet man den Einfallswinkel $\beta(x)$ bei dem Übergang zwischen zwei gedachten Schichten an der Stelle x. Für diesen gilt mit (4.2) und (4.1)

$$\sin\beta(x) = \frac{c}{n(x)} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{n_a}{n(x)} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{q-x}{q}. \tag{4.5}$$

Wir betrachten nun den Kreis k um den Punkt O, welcher die Koordinaten $(q, 0)$ hat. Die Tangente an diesen Kreis an der Stelle x schließt mit dem Kreis genau den Winkel $\sin\beta(x)$ ein, wie man im Dreieck $\Delta OCC'$ sehen kann. Weil der Strahl auch wenn er in das Material kommt tangential zu diesem Kreis verläuft, muss er innerhalb des Materials entlag dieser Kreisbahn verlaufen.
Gleichzeitig können wir die x-Koordinate von B einfach durch Umstellen von (4.1) finden

$$n_b = \frac{n_a}{1-\frac{x}{q}} \Rightarrow x_B = q\left(1 - \frac{n_a}{n_b}\right) = 1 \text{ cm}. \tag{4.6}$$

Damit können wir jetzt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta BB'O$ die Dicke d ausrechnen

$$\boxed{d = \sqrt{q^2 - (q-x_b)^2} = 5 \text{ cm}.} \tag{4.7}$$

Mann kann nachdenken auch durch Ableiten ersetzen. Mit $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ können wir aus (4.5) den Anstieg der Funktion $y(x)$ für den Lichstrahl bestimmen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta = \frac{q-x}{\sqrt{q^2-(q-x)^2}}.$$

Das ist eine separierbare Differentialgleichung, die wir integrieren können

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{q-x}{\sqrt{q^2-(q-x)^2}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow y(x) = \sqrt{q^2-(q-x)^2} + c \tag{4.8}$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c = 0$. (4.8) ist aber nur die Gleichung für einen Halbkreis in positiver y-Richtung um $(q, 0)$. Damit kann d genauso wie in (4.7) ausgerechnet werden.