Analysis mit Physik üben III

physikrolf@gmail.com, `pankratius.github.io/rolf`

Wir verwenden die Physikkonvention, eine zeitliche Ableitung als Punkt darzustellen; $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t))$.

Aufgabe 1 (Hubbles "Konstante")

Man geht davon aus, dass der Radius $R(t), t \geq 0$ des Universums drei Bedingungen gehorcht

$$R(0) = 0 \tag{1.1a}$$

$$\dot{R} > 0, \ t > 0 \tag{1.1b}$$

$$\ddot{R} > 0, \ t > 0. \tag{1.1c}$$

Die Hubble-Funktion $H(t)$ ist definiert als

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}, \ t > 0. \tag{1.2}$$

1. Man hat beobachtet, dass $H(t) = \frac{a}{t}$, wobei a eine Konstante ist. Berechne daraus einen Ausdruck für $R(t)$. Welche Werte darf a haben, damit die Bedinungen (1.1) weiter erfüllt bleiben?
2. Ist es möglich, dass $H(t) = \frac{b}{t^2}$, wobei b eine Konstante ist? Vergleiche dazu mit den Bedingungen (1.1).

Aufgabe 2 (Schneemann)

Ein Schneemann besteht aus zwei Schneebällen, mit Radii $2R$ und $3R$.
Jetzt fängt der Schneemann an, zu schmelzen. Finde, mit geeigneten Annahmen, das Verhältnins von Anfangsvolumen zum Volumen an dem Zeitpunkt, an dem sich die Gesamthöhe des Schneemanns halbiert hat.

Aufgabe 3 (Schneepflug)

Zwei identische Schneepflüge räumen die gleiche Straße. Der erste startet eine Zeit t_1 nach dem es mit scheinen anfing, der zweite vom gleichen Punkt nach einer Zeit $t_2 - t_1$.
Der Schnee fällt so, dass sich die Höhe der Schneedecke mit einer kontanten Rate k vergrößert.
Die Geschwindigkeit einer Schneeraupe ist $v(t) = ak/z(t)$, wobei $z(t)$ die momentante Schneehöhe angibt, und a eine Konstante ist.
Jeder Schneepflug räumt den gesamten Schnee. Zeige, dass die Zeit t, zu der der zweite Schneepflug eine Distanz $x_2(t)$ zurückgelegt hat, die Gleichung

$$a\frac{dt}{dx_2} = t - t_1 e^{(x_2/a)} \tag{3.1}$$

erfüllt.
Bestimme mit (3.1) die Zeit, bis die beiden Schneepflüge kollidieren.