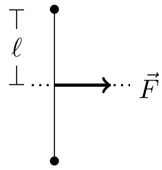
Aufgabenserie 6

Lösungen könnt ihr an physikrolf@gmail.com schicken. Neue Aufgaben wird es dann wieder Anfang April geben.
Die aktuellen Aufgaben sowie alle alten Aufgabenserien mit Lösungen findet ihr auch auf `pankratius.github.io/rolf`.

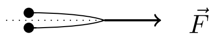
Aufgabe 1 (Zwei Pucks)



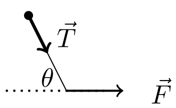
Ein masseloser Faden der Länge 2ℓ verbindet zwei Hockeypucks, die auf einer reibungsfreien Eisfläche liegen.
Jemand zieht mit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ an der Mitte des Seils, wobei die Kraft senkrecht angreift. Nach einer gewissen Zeit stoßen die beiden Pucks komplett inelastisch zusammen. Wie viel Energie geht bei dem Stoß verloren?

*** **Lösung 1** (*David Morin - Classical Mechanics*)

Sei A das in der Aufgabenstellung gegebene System. Wir wollen nun erst einmal ein wesentlich einfacheres System B betrachten. In diesem sind die beiden Pucks bereits zusammen gestoßen, und werden nur noch mit konstanter Kraft F entlang der Geraden gezogen:



Auf jeden der beiden Pucks wirkt hier eine Kraft $F_{(B,p)} = 1/2 \cdot F$ in x-Richtung.
Tut sie dies während der Bewegung entlang einer Strecke der Länge d, so ist die Arbeit, die entlang dieses Weges an dem System B geleistet wird, einfach nur $W_B = Fd$.
Interessant wird es, wenn wir versuchen, auf eine ähnlich einfache Art das System A aus der Aufgabenstellung zu betrachten.
Dazu bemerken wir zuerst, dass die Kraft $F_{(A,p),x}$ die auf einen der beiden Pucks in x-Richtung wirkt, auch $F_{(A,p),x} = 1/2 \cdot F = F_{(B,p),x}$ ist. Das bedeutet aber, dass ein Puck im System A in x-Richtung genau die gleiche Beschleunigung erfährt wie ein Puck im System B.
Wir können jetzt annehmen, dass man zum Zeitpunkt $t = 0$ sowohl im System A als auch im System B anfängt, an dem Seil zu ziehen. Dann bedeutet aber die Beobachtung, dass die Strecke, die ein Puck in x-Richtung nach einer Zeit t zurückgelegt hat, in System A und in System B gleich lang ist. Gleichzeitig heißt das, dass die beiden Systeme *nach* der Kollision nicht mehr unterscheidbar sind. Damit ist dann aber auch die Energie beider Systeme *nach dem Stoß* im System A gleich groß.
Sei nun d die Strecke, die ein Puck im System A zurück legt, bis er mit dem anderen zusammenstößt. Dann wurde an dem Seil über eine Strecke der Länge $d+\ell$ an den Pucks mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen. Dabei müssen wir ℓ addieren, weil der Abstand zwischen dem Angriffspunkt der Kraft und den Pucks bei der Kollision gerade ℓ ist. Also ist die Arbeit, die *direkt vor* der Kollision an System A verrichtet wurde, genau $W_A = F(d + \ell)$.
Zum gleichen Zeitpunkt wurden die Pucks in System B aber nur entlang einer Strecke der Länge d gezogen, da sie sich ja in B nur entlang der x-Achse bewegen. Also ist die Arbeit, die in dieser Zeit an System B verrichtet wurde, gerade $W_b = Fd$.
Bei solchen Aufgaben kann man die Zeit, die eine Kollision benötigt, eigentlich immer vernachlässigen. Nach unserer obigen Überlegung bedeutet das aber, dass die Energie im System A, die *nach* dem Stoß verbleibt, gerade $E'_A = W_B$ sein muss.
Die Differenz, $\boxed{W = W_A - E'_A = F\ell}$, ist nun gerade die Energie, die *während* des Stoßes verloren gegangen seien muss.
Alternativ kann man auch einfach rechnen. Betrachte dazu die Spannkraft $\vec{T}$, die auf einen Puck wirkt, in Abhängigkeit des Winkels θ: Dann gilt $T = \frac{F}{2\cos\theta}$. Die davon in y-Richtung wirkende Komponente ist



dementsprechend

$$T_y = -T\sin\theta = -\frac{1}{2} \cdot F \cdot \tan\theta. \tag{1.1}$$

Darüber können wir nun integrieren, um die Arbeit $W_{y,1}$ zu errechnen, die in y-Richtung an dem einen Puck geleistet wurde:

$$\begin{aligned} W_{y,1} = \int_{\ell}^{0} \frac{-F\tan\theta}{2}\, dy &\overset{*}{=} -\frac{F\ell}{2}\int_{\pi/2}^{0} \sin\theta \; d\theta \\ &= \frac{F\ell}{2} \cdot \cos\theta\Big|_{\pi/2}^{0} \\ &= \frac{F\ell}{2}, \end{aligned}$$

wobei in $*$ die Substitution $dy = \ell \sin\theta$ genutzt wurde.
Da die Kraft nun aber auf beide Pucks wirkt, und wir annehmen können, dass die Pucks nur über die Schnurr miteinander wechselwirken, beträgt die gesamte in y-Richtung geleistete Arbeit gerade

$$\boxed{W_y = 2W_{y,1} = F\ell}$$

Diese Arbeit ist aber gerade die Energie, die bei dem Stoß verloren geht.
Es kommt also bei beiden Ansätzen das gleiche Ergebnis raus - nett.

Aufgabe 2 (Lichtband)

Eine Lichtquelle in Form eines dünnen Bandes der Länge $\ell = 10$ cm liegt auf der optischen Achse einer dünnen Sammellinse der Brennweite $f = 5$ cm und dem Durchmesser $d = 1$ cm. Der minimale Abstand der Lichtquelle zur Sammellinse beträgt 10 cm. Wie groß ist der minimale Durchmesser des entstehenden Lichtflecks, den die Lichtquelle auf einem senkrecht zur optischen Achse stehenden, verschiebbaren Schirm erzeugt?

Aufgabe 3 (Tunnel)

Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit v und einer Leistung P durch einen langen zylindrischen Tunnel, dessen halbkreisförmige Öffnung einen Durchmesser d hat.
Die Anfangstemperatur im Tunnel beträgt T_0, der Luftdruck ist p_0, die molare Masse von Luft ist M. Während der Durchfahrt bleibt der Druck im Tunnel näherungsweise konstant. Dann ist die molare Wärmekapazität von Luft durch C_p gegeben.
Welche Temperatur hat die Luft im Tunnel nach der Zugdurchfahrt?
Hinweis: Wie schon auf dem letzten Blatt kann die Luft auch in dieser Aufgabe als ideales Gas angenommen werden. Das heißt insbesondere auch, dass die Gleichung $pV = nRT$ für die Luft erfüllt ist.
Dabei ist p der Gasdruck, V das Volumen, n die Stoffmenge und T die Temperatur der Luft. R ist die sog. ideelle Gaskonstante. Für zweiatomige Gase wie Luft gilt in guter Näherung $C_P = 7/2 \cdot R$.