Aufgabe 1 (Rekursives Widerstandsnetz)
Gegeben sei das unten abgebildete Widerstandsnetz, welches jeweils genau n parallele Seiten in den äußeren Umrandungen hat. Jeder Kantenwiderstand beträgt r.

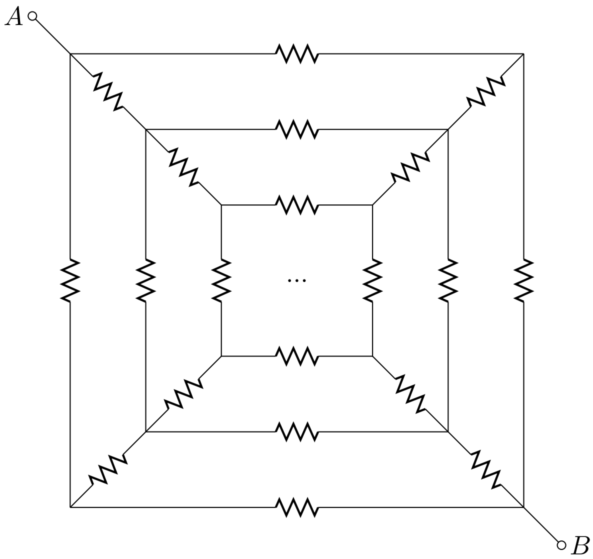


Abbildung 1.1: Widerstandsnetz mit $n = 3$

~~Berechne den Widerstand zwischen den Punkten A und B in Abhängigkeit der Tiefe n.~~ Berechne den Widerstand zwischen den Punkten A und B für ein unendlich großes Widerstandnetz.

Lösung 1 (*Kurzaufgabe?*)
Der Stromkreis ist spiegelsymmetrisch zur Achse durch A und B. Also liegen Punkte, die durch Spiegelung

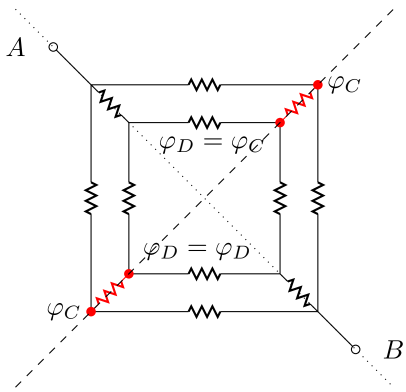
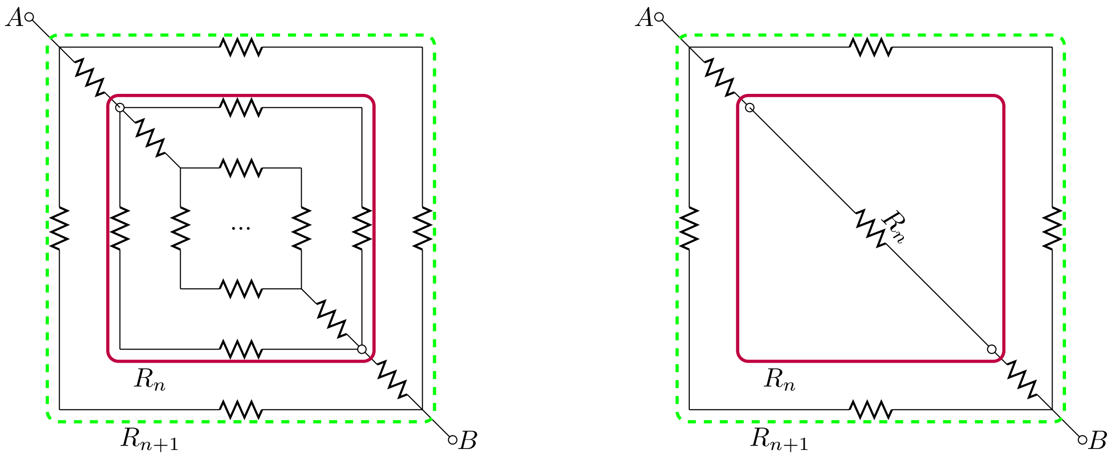


Abbildung 1.2: Spiegelsymmetrie im Stromkreis

an dieser Achse in einander übergehen auf dem gleichen Potenzial.
Daraus folgt insbesondere, dass Punkte, die auf der Gerade senkrecht zu der durch A und B liegen, alle das gleiche Potential haben. Die jeweils anliegenden Kantenwiderstände können also getrennt werden.
Damit vereinfacht sich der in Abbildung 1.1 gezeigte Stromkreis zu dem in Abbildung 1.2. In Abildung 1.3a sieht man gut, wie sich der Stromkreis der Tiefe $n+1$ aus dem der Tiefe n erzeugen lässt. Dazu wird an die Ecken des Stromkreises der Tiefe n auf der Symmetrieachse jeweils ein Widerstand R angelegt, und der Stromkreis dann durch ein äußeres Widerstandsquadrat mit den Punkten A und B verbunden.
Wenn wir den Ersatzwiderstand des Stromkreises der Tiefe n mit R_n bezeichnen, dann ergibt sich ein Stromkreis, wie in Abbildung 1.3b gezeigt. Dieser ist aber eine einfache Kombination aus Reihen und Parallelschaltungen, weswegen wir für den Ersatzwiderstand bei einer Tiefe $n+1$ schreiben können

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{R_n + 2r} + \frac{1}{R} \implies R_{n+1} = \frac{R\,(2r + R_n)}{3r + R_n}. \tag{1.1}$$

Damit der Widerstand bei der Tiefe n eindeutig bestimmt ist, müssen wir noch R_1 angeben, was in diesem Fall $R_1 = R$ ist.



(a) vereinfachter Stromkreis der Tiefe $n+1$

(b) Ersatzschaltung für Tiefe von $n+1$

Abbildung 1.3: vereinfachte Stromkreise

Im Grenzfall einer unendlichen Tiefe ist $R_n = R_{n+1} =: \tilde{R}$, weil das Entfernen einer Widerstandsebene den Gesamtwiderstand nicht ändern sollte.
Damit ergibt (1.1)

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \frac{r\left(2r+\tilde{R}\right)}{3r+\tilde{R}} \\
\Leftrightarrow 3r\tilde{R}+\tilde{R}^2 &= 2r^2 + R\tilde{R} \\
\Leftrightarrow 0 &= \tilde{R}^2 + 2r\tilde{R} - 2r^2 \\
&\boxed{\implies \tilde{R} = r\left(\sqrt{3}-1\right).}
\end{aligned}$$

Die negative Lösung kann ausgeschlossen werden, weil Widerstände nicht negativ sind.

Bemerkung:
Es scheint, als ließe sich die Konvergenz der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ am Besten durch ein explizietes Lösen der Rekursionsgleichung zeigen. Definiere dazu $S_n := 2r + R_n \Leftrightarrow S_n - 2r = R_n$. Einsetzen in (1.1) führt auf

$$S_{n+1} - 2r = r\frac{S_n}{S_n + r} = \frac{S_n}{1 + {}^{S_n}/_r}. \tag{1.2}$$

Definiere $T_n := 1 + \frac{S_n}{r} \Leftrightarrow r\,(T_n - 1) = S_n$. Einsetzen in (1.2) führt auf

$$\begin{aligned}
r\,(T_{n+1}-1) - 2r &= \frac{r\,(T_n-1)}{T_n} \\
\Leftrightarrow T_{n+1} - 3 &= \frac{T_n - 1}{T_n} = 1 - \frac{1}{T_n} \\
\Leftrightarrow T_{n+1} &= 4 - \frac{1}{T_n}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Wir versuchen nun, (1.3) auf eine Form zu bringen, die wir Lösen können. Betrachte dazu eine Folge[†] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Einsetzen in (1.3) führt auf

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 4 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0. \tag{1.4}$$

Diese Gleichung kann durch den Ansatz $x_n = a \cdot \lambda^n$ gelöst werden ($a \neq 0$), und sollte zwei Lösungen für λ liefern. Die allgemeine Lösung ist dann eine Superposition der beiden. [‡] Einsetzen des Ansatzes führt auf

[†] Brand, Louis: „A sequence defined by a difference equation", American Mathematical Monthly 62, September 1955, S.489-492

[‡] K.F.Riley, M.P. Hobson, S.J.Bence: „Mathematical Methods for Physics and Engineering", Cambridge University Press, S.499

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{3}$. Also ist

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \left(2-\sqrt{3}\right)^n + c_2 \left(2+\sqrt{3}\right)^n \\ \Rightarrow T_n &= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^n} \\ \Leftrightarrow R_n &= r \left[\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^n} - 3 \right], \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, o.B.d.A $c_1 \neq 0$, $c' := {}^{c_2}/_{c_1}$.
Wir können nun den Grenzwert $\tilde{R}$ für $n \to \infty$ berechnen:

$$\begin{aligned} R_n &= r \left[\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n + c' \left(2+\sqrt{3}\right)^n} - 3 \right] \\ &= r \left[\frac{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n + c' \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n + c' \left(2+\sqrt{3}\right)} - 3 \right] \\ &= r \left[\frac{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n + c' \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n + c'} - 3 \right] \\ \Rightarrow \tilde{R} = \lim_{n\to\infty} R_n &= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n + c' \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n + c'} - 3 \right] \end{aligned}$$

Weil $0 < \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} < 1$, ist $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n = 0$, und damit

$$\boxed{\tilde{R} = \lim_{n\to\infty} R_n = r \cdot \frac{c' \left(2+\sqrt{3}\right)}{c'} - 3 = r \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right).}$$

Bewertungsvorschlag:
Das mathematische korrekte Begründen der Konvergenz sollte man vermutlich nicht von den Teilnehmern erwarten. Es kann wohl eine kurze Begründung ausreichend sein.

	Punkte
Erkennen der Spiegelsymmetrie	0.5
Vereinfachen des Stromkreises	0.5
Aufstellen der rekursiven Darstellung (1.1)	1
(kurze) Begründung der Konvergenz	0.25
Feststellung, dass im Grenzfall $R_{n+1} = R_n$ gilt	0.25
Bestimmung des Grenwiderstands $\tilde{R}$	1
Gesamtpunktzahl:	3.5