Zwei-Körper-Probleme

Aaron Wild*
(Stand: 8. Oktober 2018)

Dies sind leicht erweiterte Notizen zu einem Vortrag zum Thema Zwei-Körper-Probleme, den ich während des Orpheus-Seminar an der Uni Kassel im Oktober 2018 gehalten habe. Sie werden vermutlich mit der Zeit ausführlicher werden. Die aktuelle Version ist immer auf meiner Website `pankratius.github.io` zu finden. Über Verbesserungsvorschläge per Mail bin ich sehr dankbar.

INHALTSVERZEICHNIS

I. BEWEGUNG IM ZENTRALKRAFTFELD

Mit genügend vielen Einschränkungen versteht man das klassische Zweikörperproblem, wenn man die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \tag{I.1}$$

mit $m \in \mathbb{R}^{>0}$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ versteht.

A. Potential der Bewegungsgleichung

Wenn man die Gleichung (I.1) sehr lange anschaut, dann stellt man fest, dass man die rechte Seite als Gradient schreiben kann. Betrachtet man nämlich die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}|},$$

dann stellt man fest, dass gilt

$$\nabla\phi = -\frac{k}{m}\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{k}{m}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Wir können also (I.1) schreiben als

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi \tag{I.2}$$

Wir nennen ϕ das *Potential* der Gleichung (I.1).

B. Energie und Impulserhaltung

Für jede Lösung $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von (I.1) betrachten wir die Funktion

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{2}m\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle + m\phi(\mathbf{x}(t)).$$

Wir nennen E die *Energie* der Bewegung. Wir rechnen jetzt nach, dass E zeitlich konstant ist. Dazu nutzten wir, dass wir die Bewegungsgleichung auch in der Form schreiben können.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle\right) + \frac{d}{dt}\left(m\phi(\mathbf{x}(t))\right)\\ &= m\langle \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\rangle + m\langle \nabla\phi, \dot{\mathbf{x}}\rangle\\ &= m\langle \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}} + \nabla\phi\rangle\\ &\overset{(\mathrm{I\,B})}{=} m\langle \dot{\mathbf{x}}, -\nabla\phi + \nabla\phi\rangle\\ &= m\langle \dot{\mathbf{x}}, 0\rangle = 0\end{aligned}$$

Weiterhin betrachten wir die Funktion

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto m\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right).$$

Wir nennen $\mathbf{L}$ den *Drehimpuls* der Bewegung. Auch $\mathbf{L}$ ist zetilich konstant. Dazu nutzen wir aus, dass für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\lambda\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} &= m\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right)\\ &= m\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t}\right)\\ &= m\left(\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}}\right)\\ &\overset{(\mathrm{I.1})}{=} m\left(0 + \mathbf{x} \times \frac{-k}{m|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

II. EINSCHRÄNKUNG DER BEWEGUNG IN DIE EBENE

Das der Drehimpuls zeitlich konstant ist, erlaubt es uns, die Bewegung auf die Betrachtung in der Ebene einzuschränken. Dazu nehmen wir an, dass für die z-Komponenten der Anfangswerte

$$\mathbf{x}_{0,3} = \dot{\mathbf{x}}_{0,3} = 0$$

* wild@uni-bonn.de

gilt, und das $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ linear unabhängig sind. Für die Komponenten des Drehimpulses gilt jetzt

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = m(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) &= m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2 \\ x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3 \\ x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da aber $\mathbf{L} = \text{const.}$ gilt, ist

$$\mathbf{L} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{0,1}\dot{x}_{0,2} - x_{0,2}\dot{x}_{0,1} \end{pmatrix}$$

Also steht der Drehimpulsvektor senkrecht auf der von $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ aufgespannten Ebene. Wir definieren weiterhin

$$L := m(x_{0,1}\dot{x}_{0,2} - x_{0,2}\dot{x}_{0,1}).$$

Weiterhin gilt

$$\langle \mathbf{L}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{L}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0,$$

so dass sowohl $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ die ganze Zeit senkrecht auf $\mathbf{L}$ stehen, also die Bewegung die ganze Zeit in der x-y-Ebene stattfindet. Diese Erkenntnis ist extrem wichtig, und stellt eine unglaublich nützliche Einschränkung der Bewegung dar.

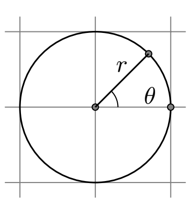
Um sie vollständig ausnutzen zu können, werden wir nun eine Koordinatentransformation durchführen, und das System in *Polarkoordinaten* beschreiben. Dazu schreiben wir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},$$

wobei

$$r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ und } \theta := \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

In diesen Koordinaten gilt jetzt



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Setzen wir dies in die Definitionen von Drehimpuls und Energie ein, dann erhalten wir

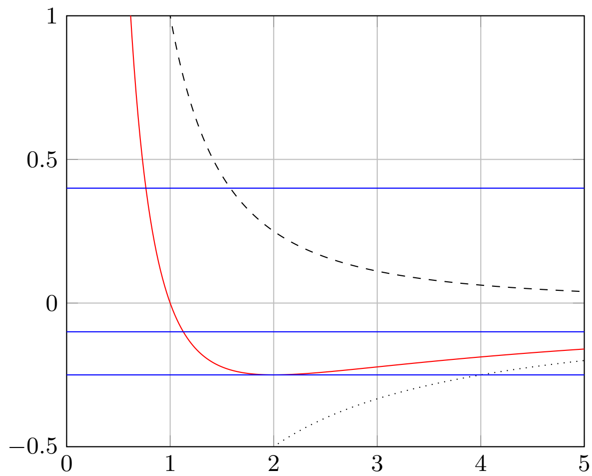
$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Aber wir können noch mehr machen. Weil wir wissen, dass L konstant ist, stellen können wir die *Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\theta}$ durch L und r ausdrücken[*]

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \implies E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}}_{=:\phi_{eff}}$$

Die Größe ϕ_{eff} nennen wir *effektives Potential* der Bewegung.
Auf einmal haben wir es erreicht, dass wir die Energie durch nur noch eine Koordinate, und nicht mehr wie anfänglich drei Koordinaten, ausdrücken können.

Wir wollen das nun nutzen, um zu verstehen, welche Werte für r jeweils möglich sind. Dazu nehmen wir für den Moment vereinfachend $k = m = 1$ an, und betrachten die Funktion $1/r^2 - 1/r$: und die Fälle $E_1 > 0$, $E_2 < 0$ sowie $E_{2^*} = -1/4$.



Fall 1: $E \geq 0$ - Unbeschränkte Bewegung Wir bezeichnen den Radius, für den $E = \phi_{eff}$ gilt, mit r_i. Dann stellen wir fest, dass das System keinen Zustand mit $r < r_i$ annehmen kann. In diesem Fall würde nämlich $\phi_{eff} > E$ gelten, und damit $\dot{r}^2 < 0$ seien müssen, was aber nicht möglich ist. Allerdings kann r beliebig groß werden, weil $\phi_{eff}(r) < \phi_{eff}(r_0)$ für alle $r > r_0$ ist. Die Bewegung muss in diesem Fall also nicht beschränkt sein.

Fall 2: $E < 0$ - beschränkte Bewegung Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} = 0,$$

und $\phi_{eff}(1) = 0$. Also muss ϕ_{eff} ein irgendwo ein Minimum annehmen. Man kann jetzt auch noch nachrrechnen, dass ϕ_{eff} auf $(0, 1/2)$ streng monoton fallend ist, und auf $(1/2, \infty)$ streng monoton wachsend. Also gibt es für gegebenes $E \in (0, 1/4)$ genau zwei Radii r_a, r_b sodass $U_{eff} = E$ gilt. Nach der gleichen Argumentation wie im Fall 1 ist aber eine Bewegung mit $U_{eff} > E$ nicht möglich, so dass in diesem Fall die Bewegung durch Kreise mit den Radii

[*] r wird nie null sein, weil aus unseren Annahmen $L \neq 0$ für alle Zeiten folgt.

r_a, r_b beschränkt ist. Wir wissen aber zum Beispiel noch nicht, ob die Bahn geschlossen oder periodisch ist.

Fall 2: $E = U_{eff,min}$ - Kreisbahn* Das lokale Minimum, und die zugehörige Extremalstelle R, von ϕ_{eff} erhalten wir, wie üblich, durch Ableiten nach r und null-setzen:

$$0 \overset{!}{=} \phi'_{eff}(R) = -\frac{L^2}{mR^3} + \frac{k}{R} \implies R = \frac{L^2}{km}$$

Findet die Bewegung bei dieser Energie statt, dann folgt aus der Überlegung für $E < 0$ aber bereits, dass hier $r_a = r_b = R$ gelten muss. Also muss r die ganze Zeit konstant R sein, also ist die Bahn durch eine Kreisbahn gegeben.

III. LENZ-RUNGE-VEKTOR

Es gibt keinen wirklich schönen Weg, die geometrische Form der Bahn zu bestimmen - man muss eigentlich immer ein doofes Interal ausrechnen. Zum Glück fällt aber irgendwie eine weitere Erhaltungsgröße vom Himmel, der *Lenz-Runge-Vektor* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Nachzurechnen, dass $\mathbf{A}$ für Lösungen von (I.1) konstant ist, dauert ein wenig.

IV. BESTIMMUNG DER BAHNFORMEN AUS DEM LENZ-RUNGE-VEKTOR

Wir stellen jetzt fest, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}, \mathbf{L} \rangle &= -mk\langle \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle \\ &= -mk\langle \mathbf{L}, \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} \rangle \\ &= -mk\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{L} \times \mathbf{L} \rangle = 0, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Identität $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} \rangle$ für beliebige $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ genutzt wurde. Also steht $\mathbf{A}$ senkrecht zu $\mathbf{L}$, liegt also insbesondere in der x_1-x_2-Ebene. Weil A konstant ist, gilt

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{A}| \cdot r \cdot \cos\theta$$

Wenn wir also $\langle \mathbf{A}, \mathbf{x} \rangle$ noch anders ausdrücken können, haben wir eine explizite Bahngleichung der Form $r = r(\theta)$ erreicht. Aber das ist nicht schwer:

$$\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} \rangle = \langle L, \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \rangle = L^2$$

Also gilt

$$\boxed{r = \frac{L^2/k}{1 + A/k \cdot \cos\theta}} \tag{IV.1}$$

Wie die Bahn jetzt aussieht ist daraus immer noch nicht wirklich ersichtlich, wir machen das aber im Anhang.

Anhang A: Äquivalente Formen der Bahngleichung

Wir betrachten die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

wobei $\varepsilon, p \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gelte. Wir formen um und quadrieren

$$\begin{aligned} & r\,(1 + \varepsilon\cos\theta) = p \\ \implies & r = p - r\varepsilon\cos\theta \\ \implies & r^2 = p^2 - 2pr\varepsilon\cos\theta + r^2\varepsilon^2\cos^2\theta \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt wieder $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$, dann erhalten wir

$$x^2(1 - e^2) + 2epx + y^2 = p^2 \tag{A.1}$$

Wir betrachten unterschiedliche Fälle

Fall 1: $\varepsilon = 0$ Wir erhalten

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es handelt sich bei der Bahn also um eine Kreisbahn.

Fall 2: $0 < \varepsilon < 1$ Wir definieren $\overline{x}$ durch Translation von x

$$\overline{x} := x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2},$$

sodass (A.1) die Form

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{A.2}$$

mit

$$a^2 := \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2},\ b^2 := \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

hat. Dabei handelt es sich um eine Ellipse. Also ist die ursprünglich Bahn ebenfalls Ellipse, die lediglich auf der x-Achse verschoben war.

Fall 3: $\varepsilon > 1$ Wir betrachten die gleiche Translation wie oben, setzen aber diesmal

$$b^2 := \frac{p^2}{e^2 - 1},$$

und erhalten bringen damit (A.1) auf die Form

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{A.3}$$

Also ist die Bahn hier durch eine auf der x-Achse verschobene Hyperbel gegeben:

Fall 4: $\varepsilon = 1$ In diesem Fall können wir die Translation

$$\overline{x} := x - \frac{p}{2}$$

betrachten. Dann erhalten wir aus (A.1)

$$y^2 + 2p\overline{x} = 0 \tag{A.4}$$

Gleichung (A.1) beschreibt also hier eine auf der x-Achse verschobene Parabel.

LITERATUR

- Konrad Königsberger. *Analysis 1*.Springer-Lehrbuch (2003)
- Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley series in physics (1980)