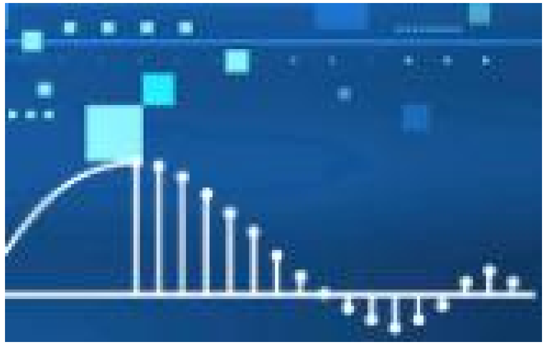
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 二 章

Contents

离散时间系统变换域分析

系统函数与频率响应

- 离散时间傅里叶变换
- Z变换及反变换
- 系统函数与频率响应
- LTI系统幅相特性分析

- 1.1 信号
  - 六大信号
  - 九大运算
- 1.2 系统
  - 五大类
- 1.3 LTI系统
  - 卷积
- 1.4 差分方程

- 2.1 DTFT
- 2.2 Z变换
- 2.3 LTI
  - 系统函数(稳定、因果)
  - 频率响应
    - 频率定义
    - 特征函数
    - 滤波
    - 幅度、相位

？？？

2.3 LTI 系统函数和频率响应

- 2.3.1 系统函数
  - 定义
  - 因果稳定性考察
  - 差分方程
- 2.3.2 频率响应
  - 定义
  - 特征函数
  - 零、极点对频率响应的影响

2.3.1 LTI的系统函数

- 一、 系统函数定义
- LTI系统可以由其单位冲激响应来完整表示，即：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

- H(z)描述了系统输入输出之间的关系，称之为传递函数或系统函数。

二、 系统函数与因果、稳定性的关系

- 线性时不变系统稳定的充分必要条件是：冲激响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \xrightarrow{|z|=1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

- 如果系统函数的收敛域包括单位圆，则系统是稳定的，反之亦成立；即系统的频率响应存在且连续。
- **LTI**因果稳定的充分必要条件是：$|z| \geq 1$ ，收敛域必须包括单位圆及单位圆外的所有区域，系统函数的全部极点必须在单位圆内部。

例题1

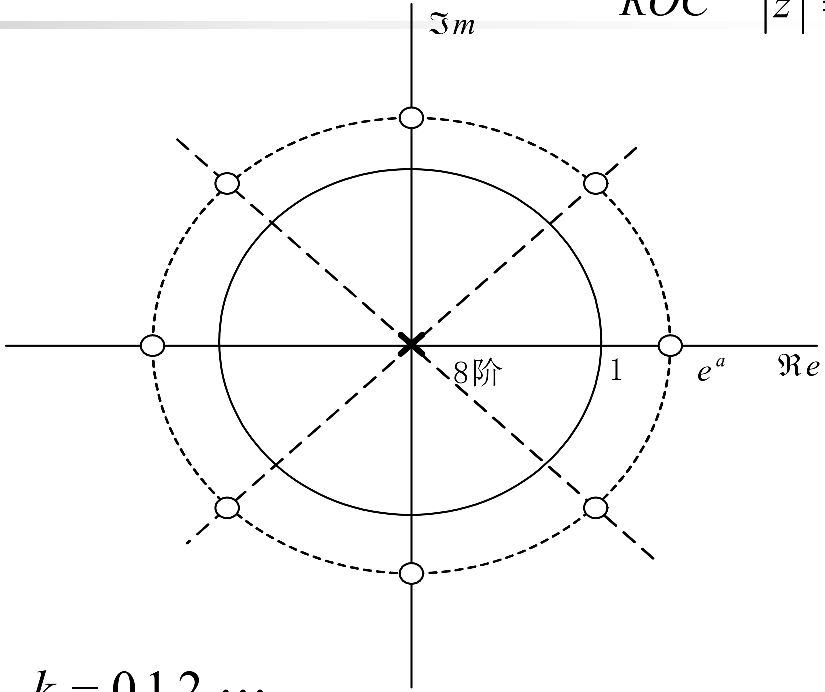
- 设序列x(n)是LTI系统在输入为s(n)时的输出,系统可以可由下面差分方程描述：

$$x[n] = s[n] - e^{8a} s[n-8] \qquad a > 0$$

- 1）求系统函数$H_1(z)$，并画出它的零极点分布图，指出相应的收敛域
- 2)设计一个LTI系统$H_2(z)$，要求可以利用x(n) 恢复s(n)，求该系统的系统函数并讨论其因果性和稳定性。
- 3)求出所有可能的单位冲激响应$h_2(n)$

解： 1） $H_1(z)=\dfrac{X(z)}{S(z)}=1-e^{8a}z^{-8}$ $c_k=e^{(8a+i2k\pi)/8}=e^{(a+ik\pi/4)}$

ROC $|z|\neq 0$



- 2） $H_2(z)=H_1^{-1}(z)=\dfrac{1}{1-e^{8a}z^{-8}}$
- 收敛域的选择有两种可能：
- （i） $|z|<e^a$，此时$H_2(z)$ 稳定，非因果。
- （ii） $|z|>e^a$，此时$H_2(z)$ 不稳定，但因果
- 3） $H_2^{'}(z)=\dfrac{1}{1-e^{8a}z^{-1}}$ $H_2(z)=H'_2(z^8)$

$$h_2^{'}[n]=\left(e^{8a}\right)^n u[n] \quad |z|>e^{8a}$$

$$h_2^{1}[n]=\begin{cases}(e^a)^n u[\frac{n}{8}] & n=8k \quad k=0,1,2,\cdots\\ 0 & else\end{cases}$$

$$h_2^{'}[n]=-\left(e^{8a}\right)^n u[-n-1] \quad |z|<e^{8a}$$

$$h_2^{2}[n]=\begin{cases}-(e^a)^n u[-\frac{n}{8}-1] & n=8k \quad k=0,1,2,\cdots\\ 0 & else\end{cases}$$

三、系统函数与差分方程的关系

- 零状态时为LTI系统

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

$$\Downarrow$$

- 系统函数为： $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

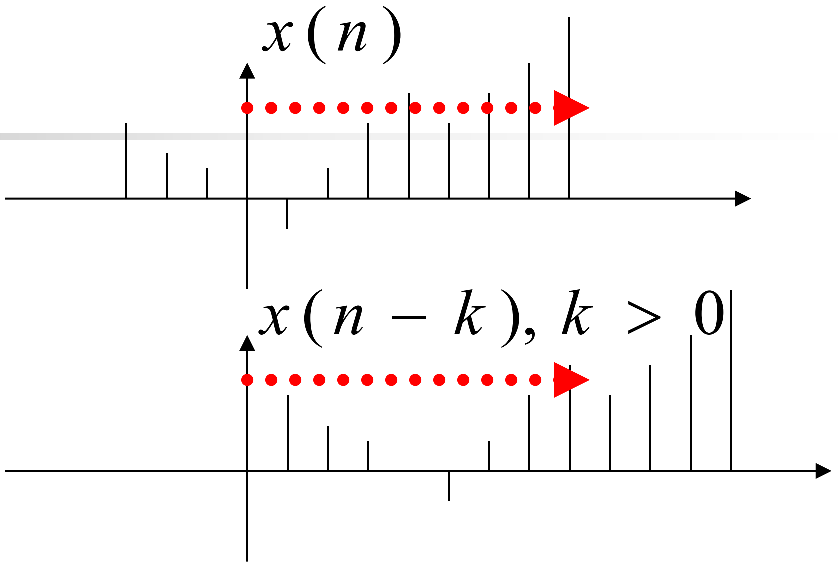
- 差分方程和系统函数系数对应；
- 仅由差分方程得来的系统函数并没有给定收敛域，因而可代表不同系统；
  - 差分方程并不唯一确定一个LTI系统的单位抽样响应,需要有相应的边界条件；
- 系统函数仅描述了系统在零状态下的情况，即可以用于解决零状态的常系数线性差分方程，对于非零状态则无法解决

用于非零状态的单边Z变换

- 系统函数无法处理非零状态下的系统响应
  - 假设系统零状态，采用**双边Z变换**。
- 为了解决上述问题，将对双边Z变换进行变形，构成**单边Z变换**,如下：

$$X^{+}(z)=Z^{+}[x(n)]=Z[x(n)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

其时移特性如下：



$$Z^{+}[x(n-k)]$$

$$= Z[x(n-k)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k}X^{+}(z)$$

$$= x(-k) + x[-(k-1)]z^{-1} + x[-(k-2)]z^{-2} + \ldots + x(-1)z^{-(k-1)} + z^{-k}X^{+}(z)$$

例题2：求解差分方程

$$y(n)-\frac{3}{2}y(n-1)+\frac{1}{2}y(n-2)=x(n),\quad n\geq 0$$

- 其中： $x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
- 初始条件为： $y(-1)=4,\ y(-2)=10$
-
- 解：对差分方程两边同时进行单边Z变换，得到：

$$Y^+(z)-\frac{3}{2}[y(-1)+z^{-1}Y^+(z)]+\frac{1}{2}[y(-2)+y(-1)z^{-1}+z^{-2}Y^+(z)]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

- 将初始条件代入后可得：

$$Y^{+}(z)[1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\boxed{(1-2z^{-1})}$$

- 所以：

$$Y^{+}(z)=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+(1-2z^{-1})}{[1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}]}=\underbrace{\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{[1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}]}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{\boxed{(1-2z^{-1})}}{[1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}]}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-z^{-1}}}_{\text{齐次解}}+\underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{特解}}=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{暂态解}}+\frac{\frac{2}{3}}{\underbrace{1-z^{-1}}_{\text{稳态解}}}$$

2.3.2 频率响应

- 由DTFT卷积和性质

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) / X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$$

$$grd\,[H(e^{j\omega})] = -\frac{d\arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

- 1、单位圆上的系统函数是频率响应。
- 2、传递函数存在，频率响应未必存在；
- 3、任意信号通过**LTI**系统不会产生新频率分量。

一、LTI特征函数

- 设LTI输入的复指数序列为：

$$x(n) = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \qquad -\infty < n < +\infty$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0 (n-m)+\phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m}$$

$$= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0})$$

1、输出信号与输入为同频信号，
2、输出信号幅度受频率响应的幅值加权，
3、输出信号相位为输入信号的“相位”与系统相位响应之和

频谱及频率的再解释

- 信号的频率分量（DTFT再解释）

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

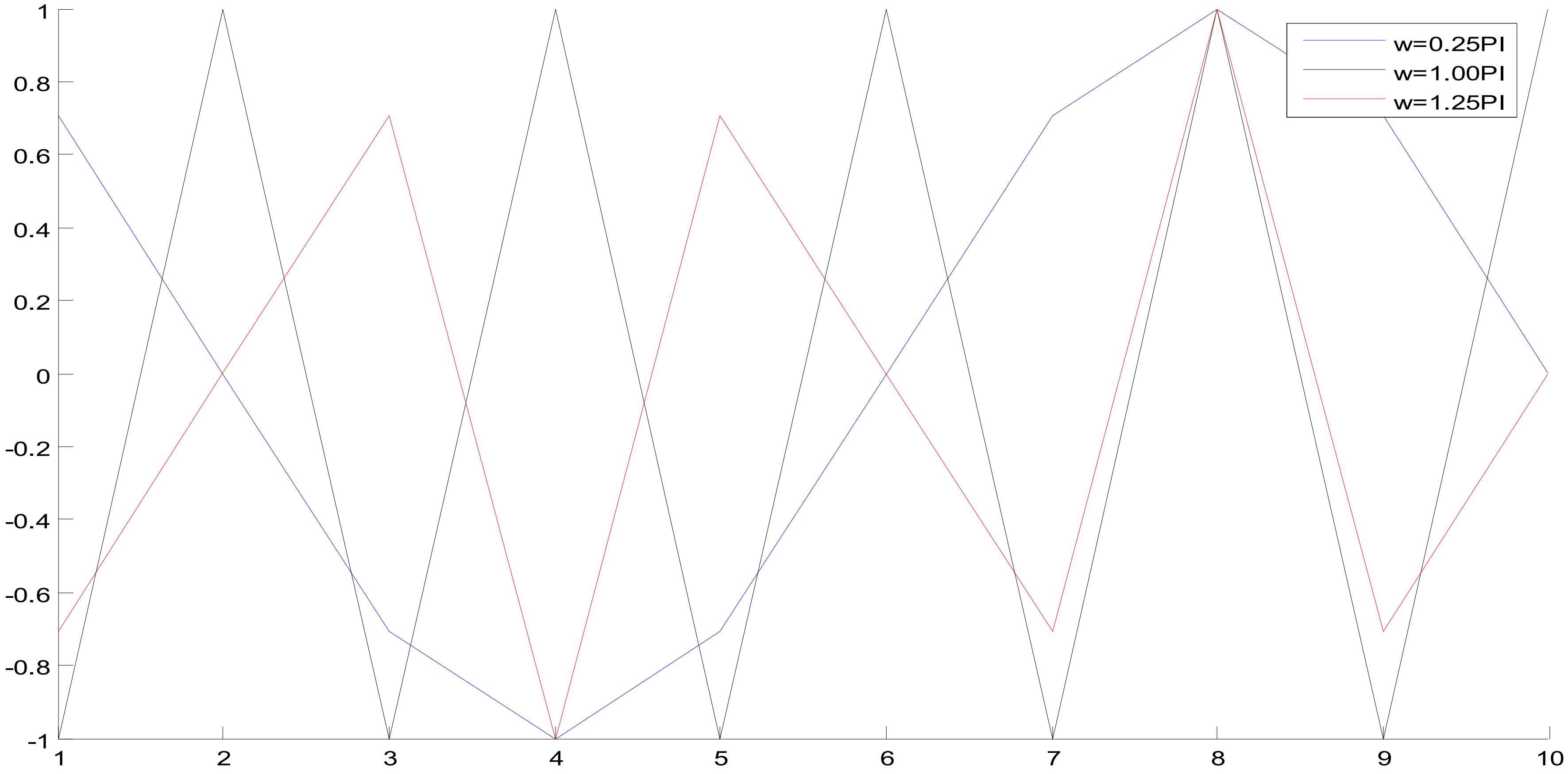
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{[X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega]}{2\pi}e^{jk\Delta\omega n}$$

$$y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(e^{jk\Delta\omega})H(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{[X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega e^{jk\Delta\omega n}]}{2\pi}H(e^{jk\Delta\omega})$$

- 1、输入信号可看作在频域上分段划分的许多个复指数分量信号
- 2、系统响应是系统对输入信号的每一个复指数分量响应之和

数字频率概念及最高频率



输入为正、余弦信号

- 设

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A[e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}]}{2}$$

- 由复信号的情况，则得系统的输出为：

$$y(n) = \frac{A}{2}[e^{j(\omega_0 n+\phi)}H(e^{j\omega_0}) + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}H(e^{-j\omega_0})]$$

$$y(n)=\frac{A}{2}[e^{j(\omega_0 n+\phi)}H(e^{j\omega_0})+e^{-j(\omega_0 n+\phi)}H(e^{-j\omega_0})]$$

- 假设 $h(n)$是实序列，则 $H(e^{j\omega})$ 满足共轭对称条件，幅度 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 为偶对称，相角 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 为奇对称。所以有：

$$y(n)=\frac{A}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right|[e^{j(\omega_0 n+\phi)}e^{j\arg[H(e^{j\omega_0})]}+e^{-j(\omega_0 n+\phi)}e^{-j\arg[H(e^{j\omega_0})]}]$$

$$=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\frac{[e^{j(\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})])}+e^{-j(\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})])}]}{2}$$

$$=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})]\}$$

- 例题3：LTI系统由零状态的差分方程描述:
  y(n)-2y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)
- 若输入x(n)=cos(0.3n)+sin(1.4n),请求系统输出y(n)

- 例题4：LTI系统频率响应为：$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\omega - 1 & |\omega| < 0.5\pi \\ 0 & else \end{cases}$
- 若输入x(n)=cos(0.3πn)+sin(1.4πn),请求系统输出y(n)

二、系统零极点与频率响应的关系

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}} \qquad H(z)=K\frac{\prod_{m=0}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N}(1-d_k z^{-1})}=K\cdot z^{N-M}\frac{\prod_{m=0}^{M}(z-c_m)}{\prod_{n=0}^{N}(z-d_k)}$$

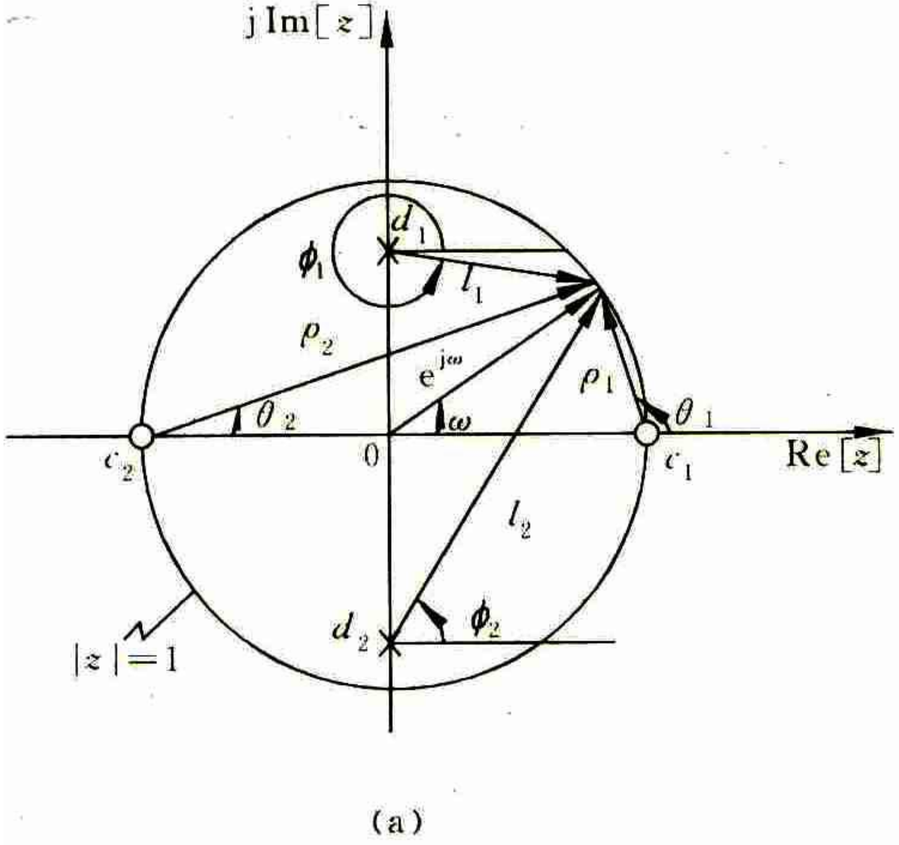
- 式中 c_m 是系统的零点，d_k 是系统的极点，它们都由差分方程的系数 a_k 和 b_m 决定。
- 除比例常数**K**以外，系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

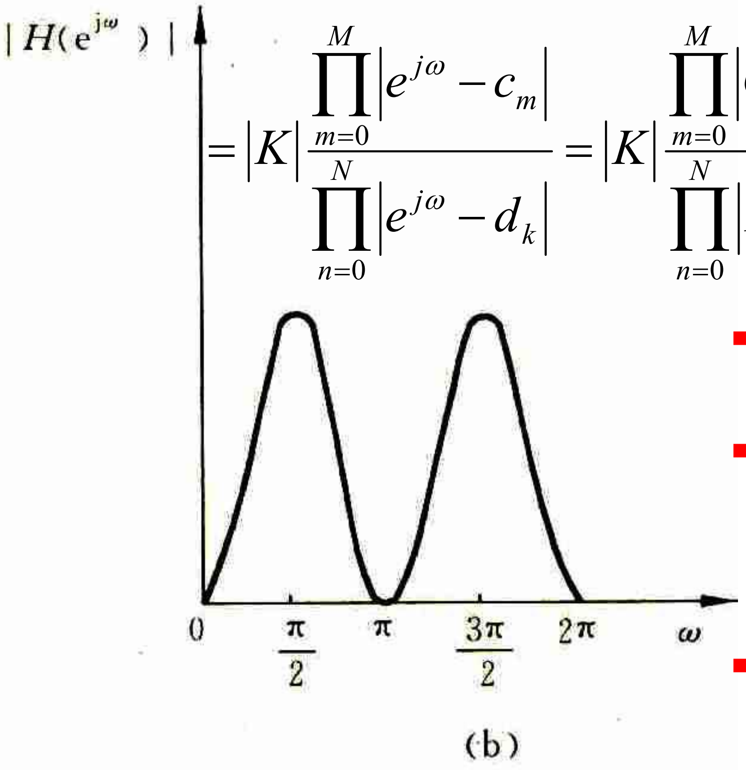
幅度响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = K \cdot e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=0}^{M}(e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{n=0}^{N}(e^{j\omega} - d_k)}$$

$$|H(e^{j\omega})|$$

$$= |K| \frac{\prod_{m=0}^{M}|e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{n=0}^{N}|e^{j\omega} - d_k|} = |K| \frac{\prod_{m=0}^{M}|\vec{C}_m|}{\prod_{n=0}^{N}|\vec{D}_k|}$$





- 原点处的零、极点对幅度响应无任何影响。
- 经过单位圆上的一个零点，幅度响应就变为零，经过靠近单位圆的零点则会出现谷点；
- 经过单位圆附近的极点时幅度响应就会出现峰点
- 远离极点和零点的区域幅度特性会比较平坦

相位响应

$$
\begin{aligned}
&\arg[H(e^{j\omega})] \\
&= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^{M} \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{n=0}^{N} \arg[e^{j\omega} - d_k] \\
&= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^{M} \arg[\vec{C}_m] - \sum_{n=0}^{N} \arg[\vec{D}_k] \\
&= \arg[K] + \sum_{m=0}^{M} \{\arg[\vec{C}_m] - \omega\} - \sum_{n=0}^{N} \{\arg[\vec{D}_k] - \omega\}
\end{aligned}
$$

- 原点处的零、极点对相位响应为线性作用，极点为正群延迟（滞后），零点为负群延迟（超前）。
- 靠近单位圆的零点和极点会造成相位的剧烈变化，导致较大的群延迟；
- 远离极点和零点的区域相位特性会比较平坦
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零。

一阶差分系统

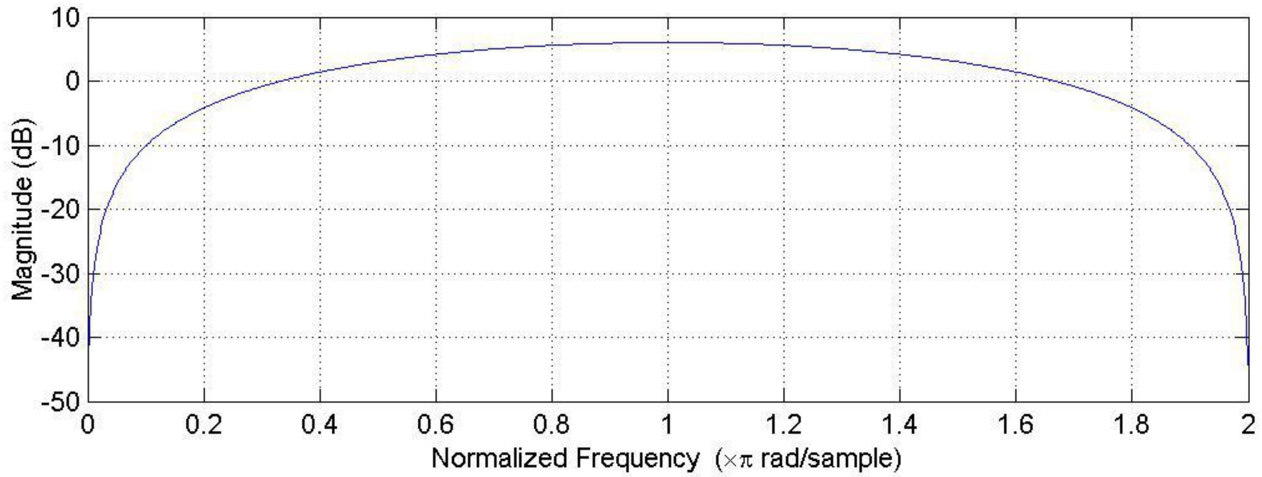
$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

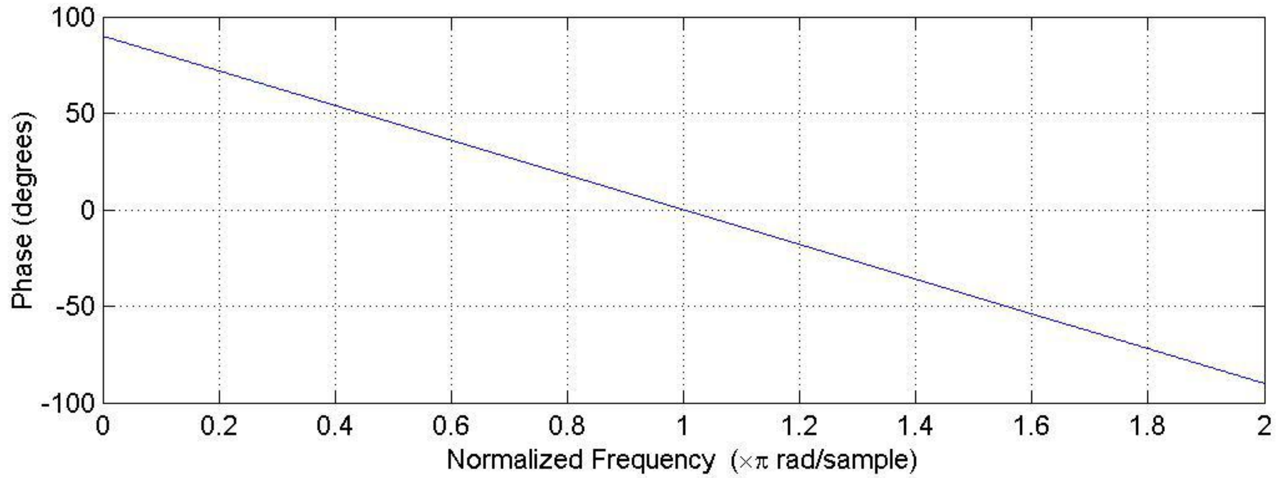
$$H(e^{j\omega}) = F(h[n])$$

$$= 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos\omega + j\sin\omega$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = 2 - 2\cos\omega$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c\tan\frac{\omega}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$



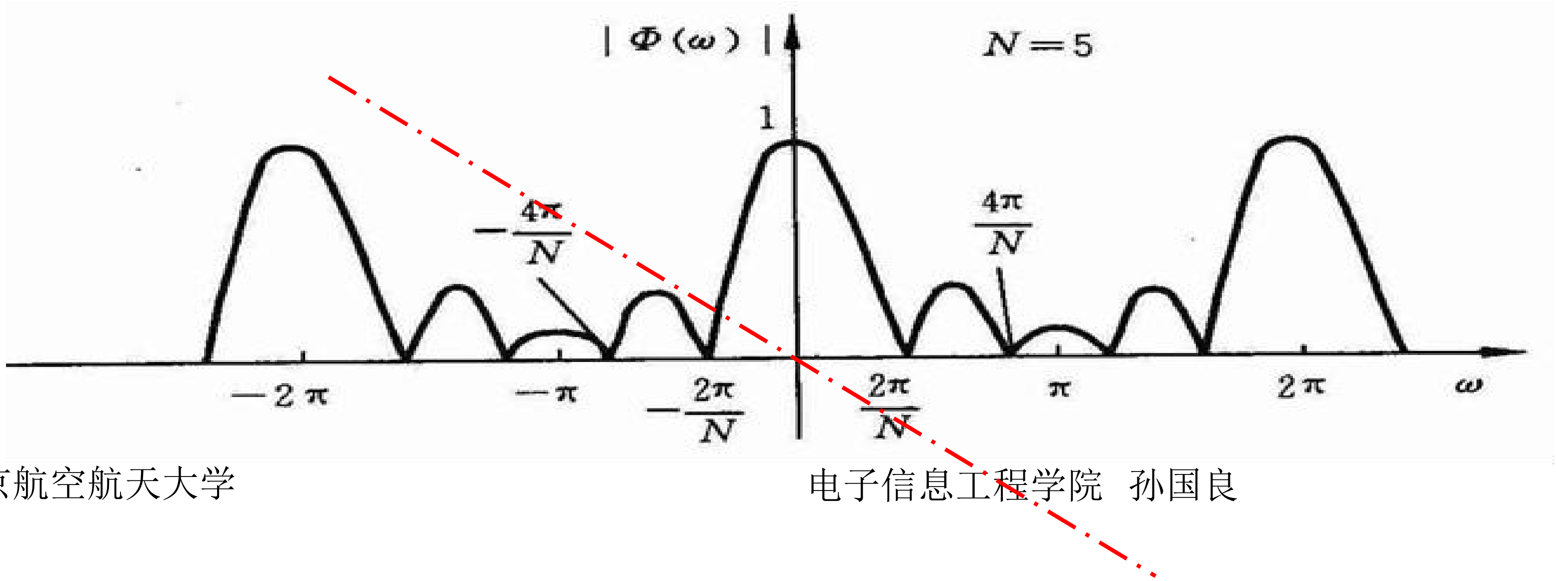


滑动平均滤波器

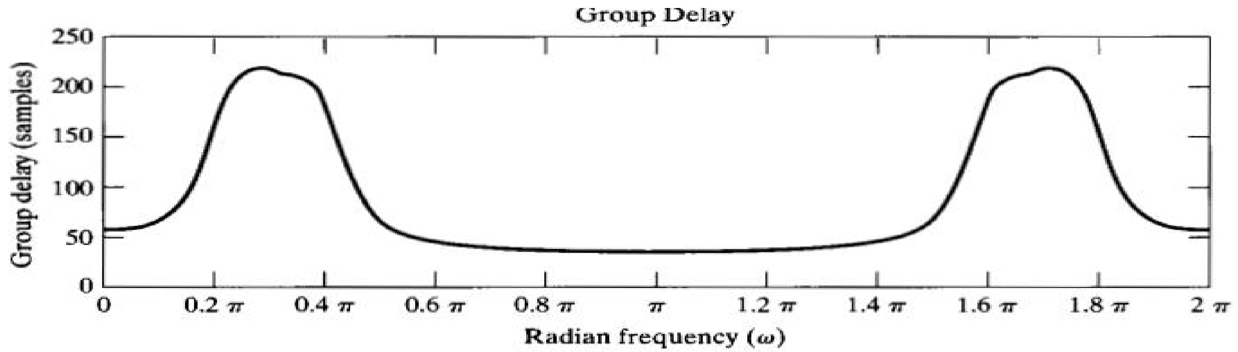
$$y(n)=\frac{1}{5}\sum_{m=0}^{4}x(n-m)$$

- h(n)=u(n)-u(n-5);

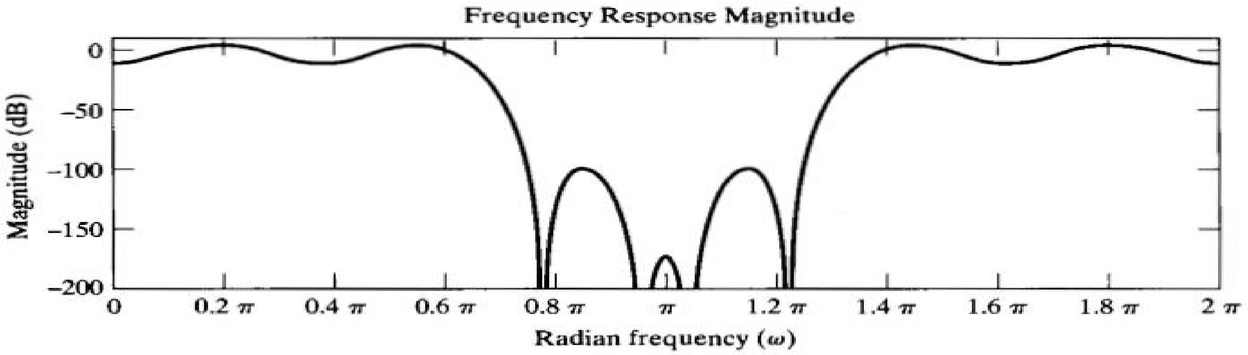
$$W_R(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-jwn}=e^{-jw(\frac{N-1}{2})}\frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$



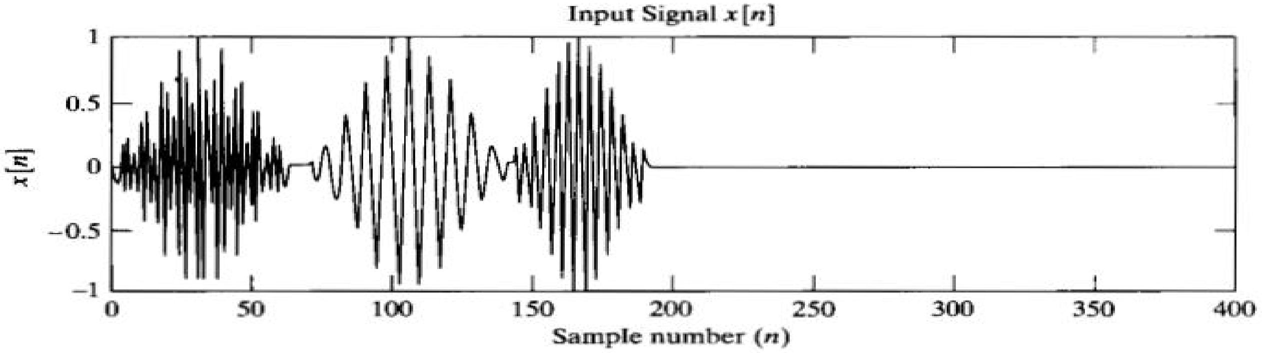
增益和群延迟的理解



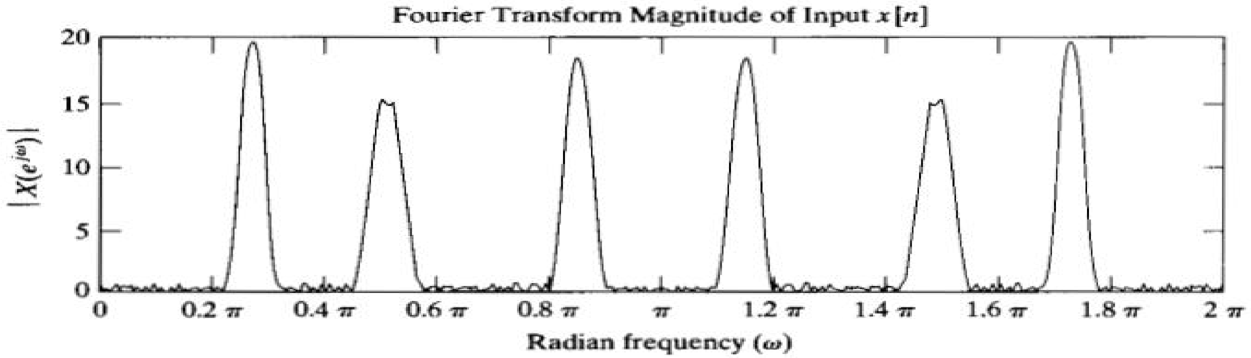
(a)

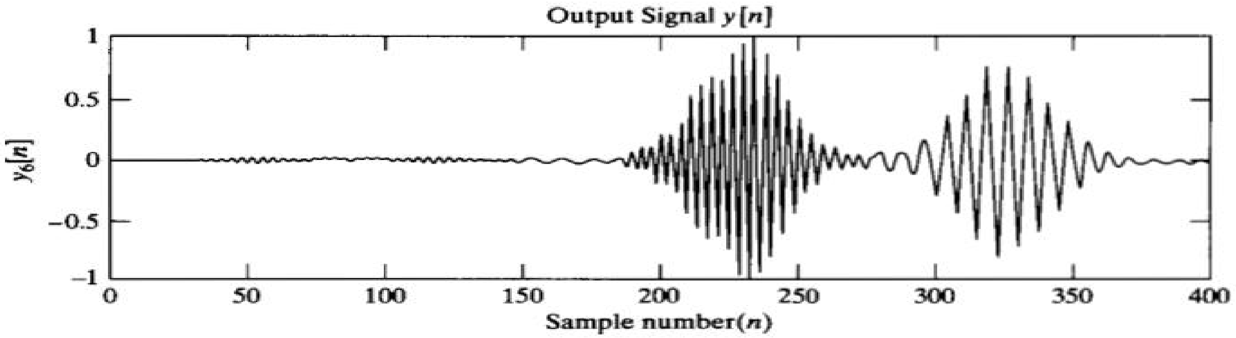


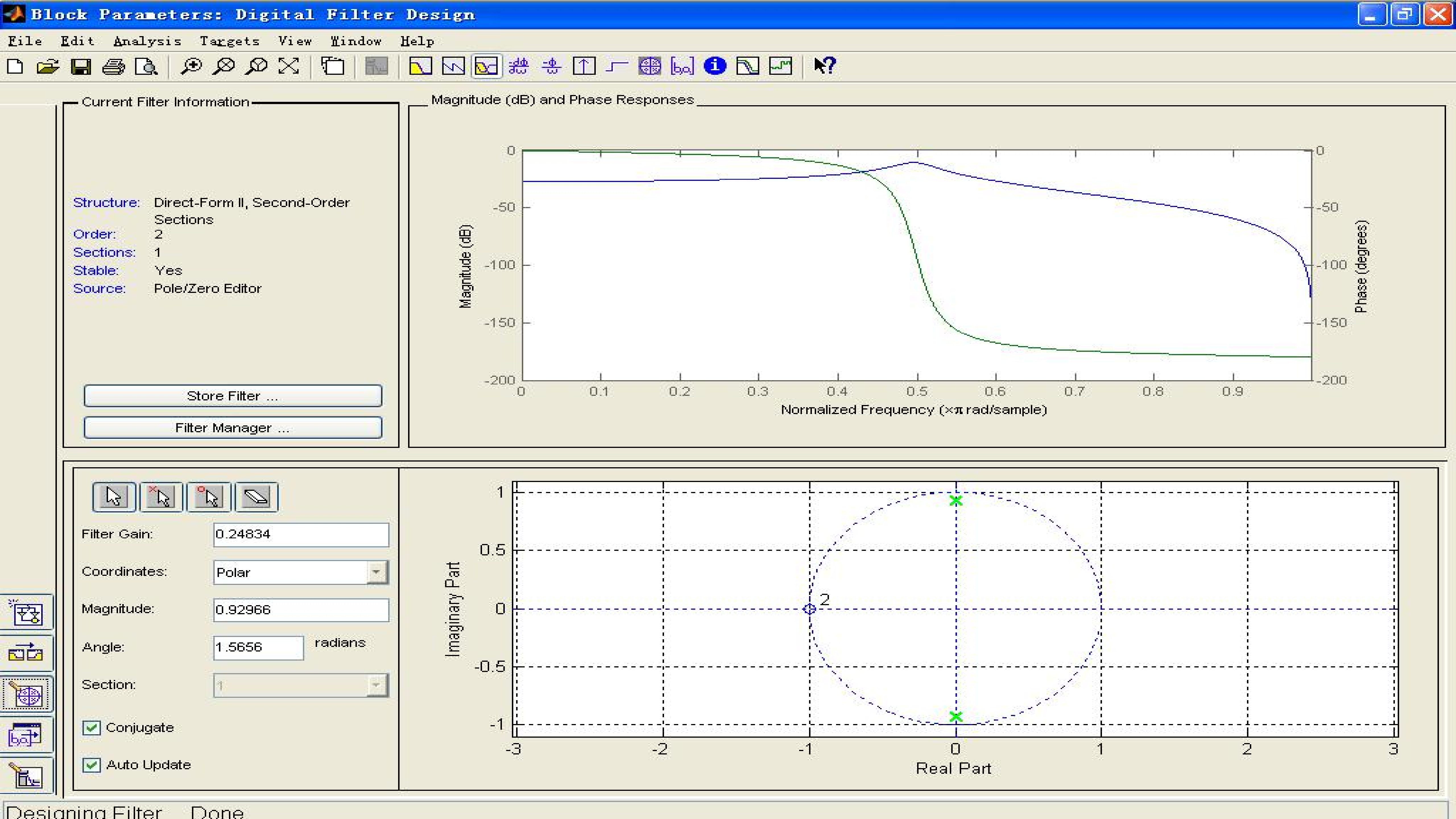
(b)

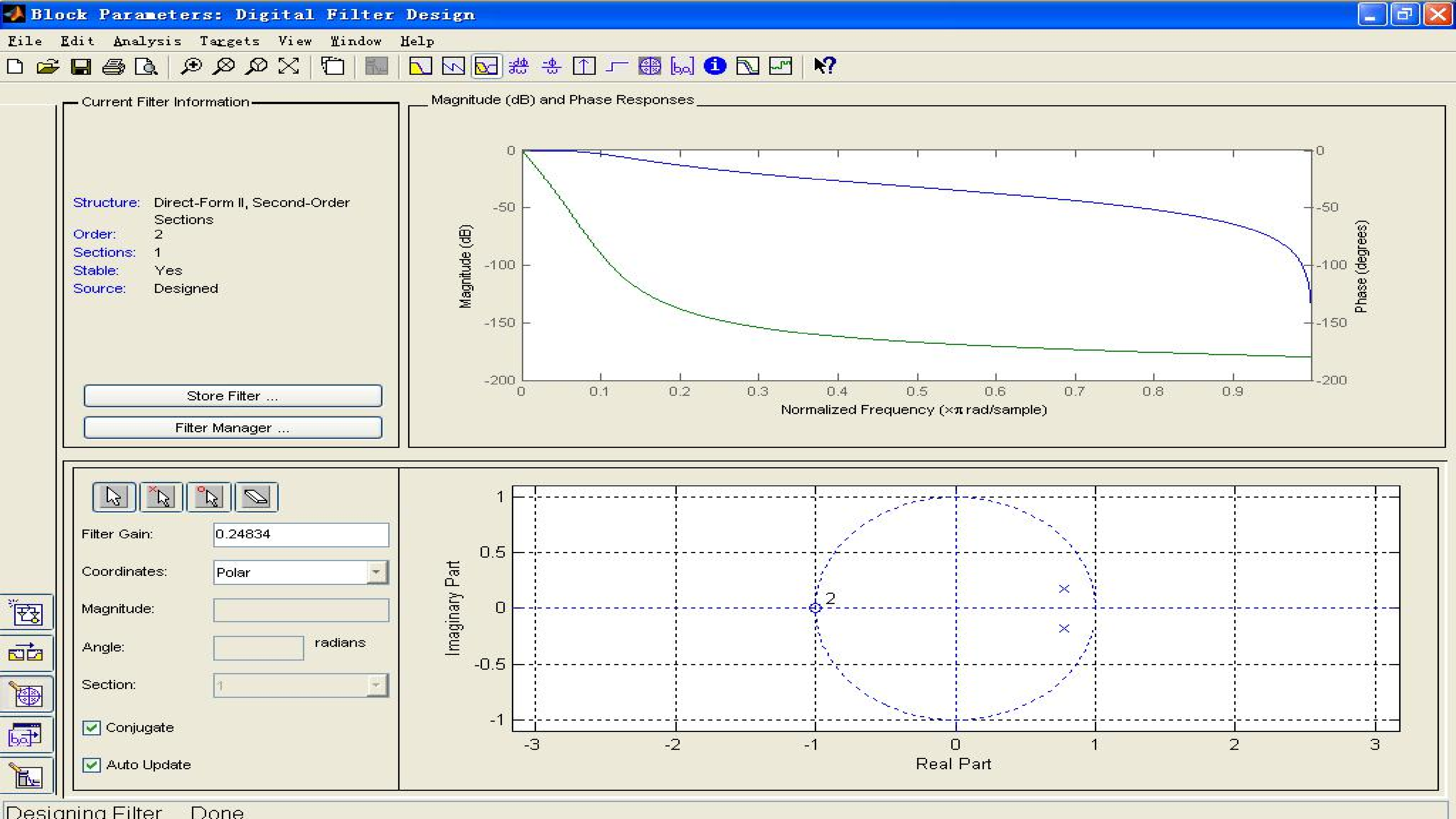


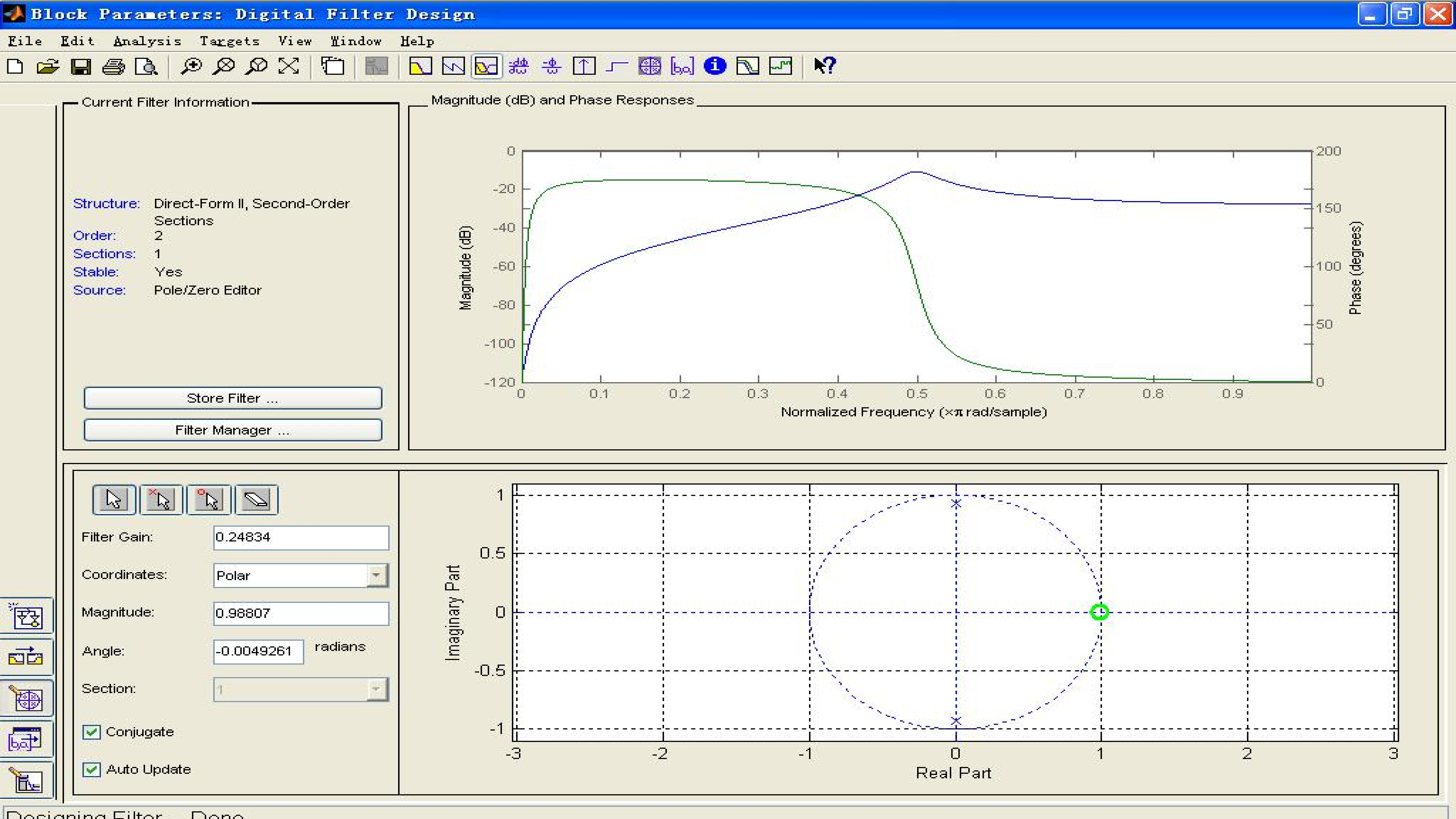
(a)

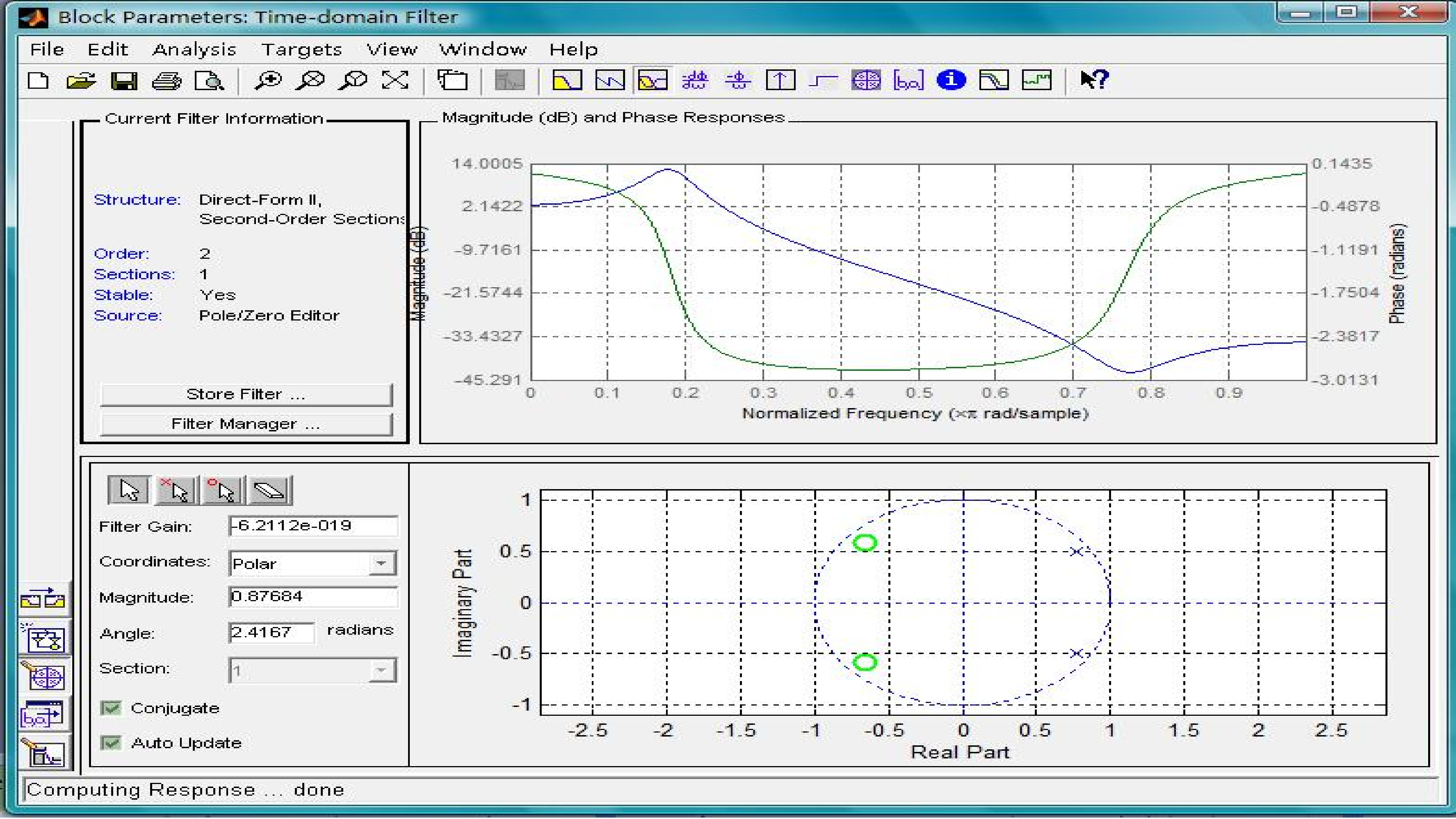




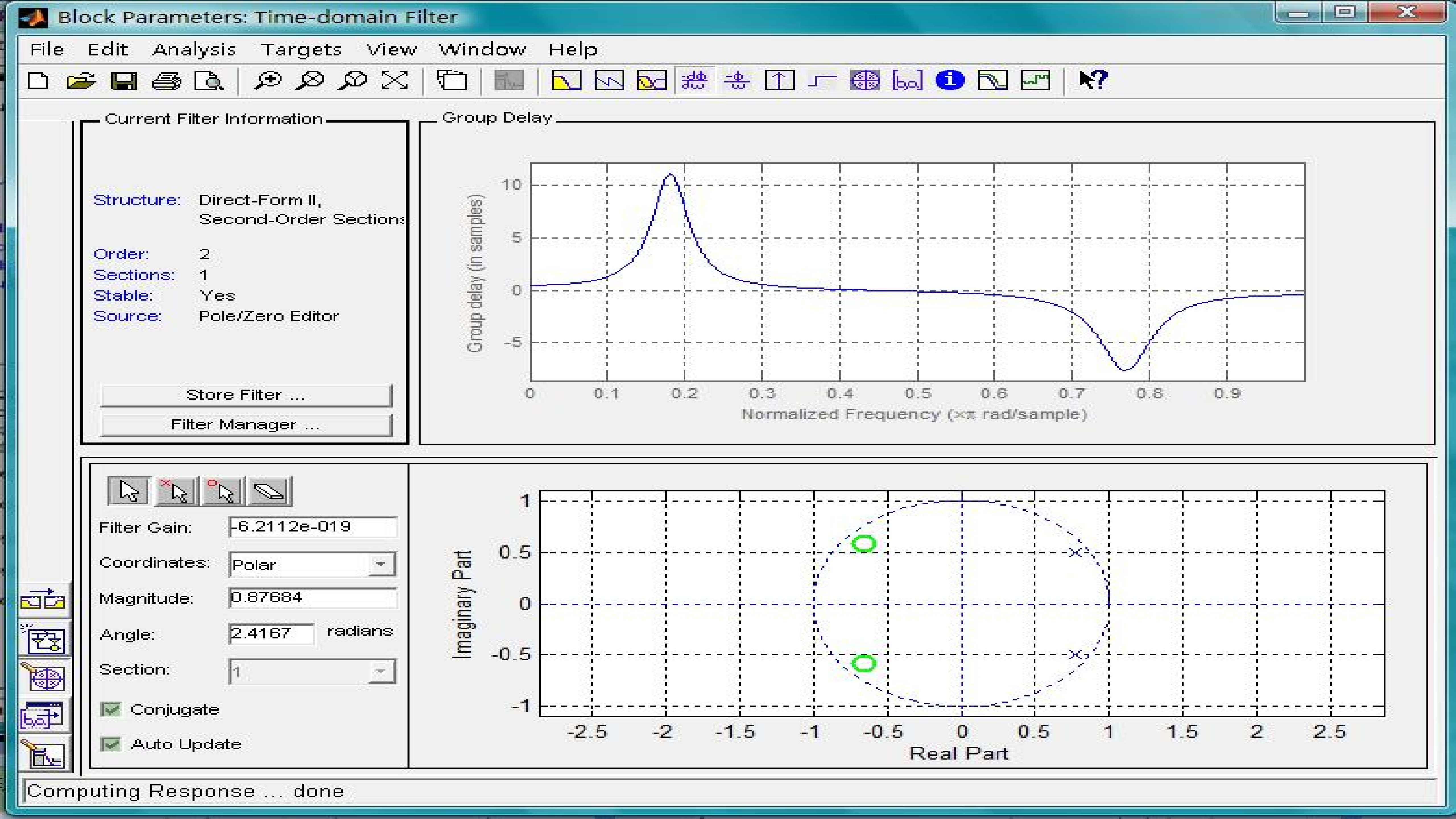

Block Parameters: Digital Filter Design
File Edit Analysis Targets View Window Help
Current Filter Information
Structure: Direct-Form II, Second-Order Sections
Order: 2
Sections: 1
Stable: Yes
Source: Pole/Zero Editor
Store Filter ...
Filter Manager ...
Magnitude (dB) and Phase Responses
Magnitude (dB)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
0 -50 -100 -150 -200
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
Filter Gain: 0.24834
Coordinates: Polar
Magnitude: 0.92966
Angle: 1.5656 radians
Section: 1
Conjugate
Auto Update
Imaginary Part
Real Part
1 0.5 0 -0.5 -1
-3 -2 -1 0 1 2 3
2
Designing Filter ... Done


Block Parameters: Digital Filter Design
File Edit Analysis Targets View Window Help
Current Filter Information
Structure: Direct-Form II, Second-Order Sections
Order: 2
Sections: 1
Stable: Yes
Source: Designed
Store Filter ...
Filter Manager ...
Magnitude (dB) and Phase Responses
Magnitude (dB)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Filter Gain: 0.24834
Coordinates: Polar
Magnitude:
Angle: radians
Section: 1
Conjugate
Auto Update
Imaginary Part
Real Part
Designing Filter ... Done


Block Parameters: Digital Filter Design
File Edit Analysis Targets View Window Help
Current Filter Information
Structure: Direct-Form II, Second-Order Sections
Order: 2
Sections: 1
Stable: Yes
Source: Pole/Zero Editor
Store Filter ...
Filter Manager ...
Magnitude (dB) and Phase Responses
Magnitude (dB)
Phase (degrees)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Filter Gain: 0.24834
Coordinates: Polar
Magnitude: 0.98807
Angle: -0.0049261 radians
Section: 1
Conjugate
Auto Update
Imaginary Part
Real Part
Designing Filter ... Done



Block Parameters: Time-domain Filter
File Edit Analysis Targets View Window Help
Current Filter Information
Structure: Direct-Form II, Second-Order Sections
Order: 2
Sections: 1
Stable: Yes
Source: Pole/Zero Editor
Store Filter ...
Filter Manager ...
Magnitude (dB) and Phase Responses
14.0005
2.1422
-9.7161
-21.5744
-33.4327
-45.291
0.1435
-0.4878
-1.1191
-1.7504
-2.3817
-3.0131
Magnitude (dB)
Phase (radians)
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Filter Gain: -6.2112e-019
Coordinates: Polar
Magnitude: 0.87684
Angle: 2.4167 radians
Section: 1
Conjugate
Auto Update
1
0.5
0
-0.5
-1
Imaginary Part
-2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5
Real Part
Computing Response ... done



Block Parameters: Time-domain Filter
File Edit Analysis Targets View Window Help
Current Filter Information
Structure: Direct-Form II, Second-Order Sections
Order: 2
Sections: 1
Stable: Yes
Source: Pole/Zero Editor
Store Filter ...
Filter Manager ...
Group Delay
Group delay (in samples)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Filter Gain: -6.2112e-019
Coordinates: Polar
Magnitude: 0.87684
Angle: 2.4167 radians
Section: 1
Conjugate
Auto Update
Imaginary Part
Real Part
Computing Response ... done

总结：

- 系统函数
  - 前提 LTI
  - 因果稳定性的约束
  - 与差分方程的关系
- 频率响应
  - 稳定的LTI
  - 对输入信号的作用
    - 频谱分量
    - 特征函数
    - 增益和相位及群延迟
  - 与零极点的关系
    - 幅度与零极点
    - 相位与零极点

作业

- 2.32
- 2.33
- 2.42

- 3.40
- 3.41
- 5.1　5.4　5.12

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn