第一章 离散时间系统变换域分析

1.1 离散时间傅里叶变换

内容提要

- ❏ 离散时间傅里叶变换
- ❏ DTFT 性质与定理
- ❏ 基本序列 DTFT

定义 1.1 (离散时间傅里叶变换) DTFT/ 离散时间傅立叶变换[1]，应用与非周期信号以及傅里叶频谱的关系。

正变换：

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换：

$$\mathrm{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

DTFT 将离散的序列变换到了一个连续的函数，对于非周期序列可以收敛，是一个关于 ω 的周期函数。

在 MATLAB 中，`sinc(x)` 表示 $\sin(x)/x$

在反变换中，隐藏了关于信号分解的含义：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega \end{aligned}$$

其中关于 n 的只有一项，将频谱的面积乘以对应离散时刻的分量。

1.1.1 基本序列的 DTFT

单位冲激序列：

$$\delta(n) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} 1$$

单位常数序列：

$$1 \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

单位阶跃序列：

$$u(n) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

[1] DFT 是离散傅里叶变换，切勿混淆

单位指数序列：

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

矩形窗序列：

$$G_N(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$

理想低通滤波器，截止频率为 ω_c

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{Bmatrix} e^{-j\omega\alpha}, -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, -\pi < \omega < -\omega_c \text{ or } \omega_c < \omega < \pi \end{Bmatrix}$$

反变换：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} \mathrm{d}\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\omega_c(n-\alpha)}$$

1.1.2 DTFT 主要性质以及定理

- 线性
- 时序频移导致频域调制：n 在频域只是一个相位系数
- 时域调制导致频域平移
- 时域反褶导致频域反褶
- 时域共轭导致频域共轭以及反褶
- 时域相乘形成频域卷积：

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

- 时域卷积导致频域相乘：

$$x(n) \otimes h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})H(e^{i\omega})$$

- 线性保泛变换/帕塞瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega|$$

1.1.3 DTFT 对称性

定义 1.2 (对称序列) 共轭对称序列：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

共轭反对称序列：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

虚实部以及幅相满足：

$\operatorname{Re}[x_e(n)]=\operatorname{Re}[x_e(-n)]$

$\operatorname{Im}[x_e(n)]=-\operatorname{Im}[x_e(-n)]$

$\operatorname{Re}[x_o(n)]=-\operatorname{Re}[x_o(-n)]$

$\operatorname{Im}[x_o(n)]=\operatorname{Im}[x_o(-n)]$

$$\begin{aligned}&|x_e(n)|=|x_e(-n)|\\&\operatorname{Arg}[x_e(n)]=-\operatorname{Arg}[x_e(-n)]\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&|x_o(n)|=|x_o(-n)|\\&\operatorname{Arg}[x_o(n)]=\pi-\operatorname{Arg}[x_o(-n)]\end{aligned}\tag{1.2}$$

进行引申，可以将一个序列进行分解，得到一个对称以及一个反对称序列：

$$\begin{aligned}&x(n)=x_e(n)+x_o(n)\\&x_e(n)=\tfrac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]\\&x_o(n)=\tfrac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]\end{aligned}\tag{1.3}$$

对应的频谱：

$$\begin{aligned}&X\left(e^{j\omega}\right)=X_e\left(e^{j\omega}\right)+X_o\left(e^{j\omega}\right)\\&X_e\left(e^{j\omega}\right)=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]\\&X_o\left(e^{j\omega}\right)=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&\text{DTFT}[\ x_e(n)]=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=\operatorname{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]\\&\text{DTFT}[x_o(n)]=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=j\operatorname{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]\end{aligned}\tag{1.5}$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

1.2 Z 变换及其反变换

定义 1.3 (z 变换)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

称 $x(n)$ 为 $x(n)$ 的 Z 变换，可以记为：

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$$

注意，幂级数收敛时变换才有意义，需要标注收敛域。

由于存在衰减，可以变换的范围比 DTFT 更大，存在 Z 变换不一定存在 DTFT 。

Z 变换的充分必要条件是级数绝对可和。

1.2.1 收敛域

对于有限长的序列，只要每一项有界，那么级数收敛，且至少包括有限的 z 平面（不包括 $z = 0$）。对与和原点关系进行判断。

右边序列（向右趋近无穷），存在一个最小的收敛半径，半径之外全部收敛。无左半轴分量，为因果序列。

左边序列，存在一个最大的半径，之内全部收敛。无右半轴分量，为反因果序列。

双边序列若收敛，必在环状区域收敛。

需要注意，不同的序列其 Z 变换的数学表达式可以完全一致。因此需要给出对应的收敛区间。

1.2.2 性质

- 线性：时域不重合时收敛域为交集，其他情况可能消减零极点产生扩大现象。
- 序列移位
- 尺度变化
- 线性加权/Z 域求导

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \tag{1.6}$$

$$Z\left[n^m x(n)\right] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \tag{1.7}$$

- 共轭序列
- 序列反褶

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1} \tag{1.8}$$

- 初值定理（因果序列）：

$$\text{for } x(n) = x(n)u(n) \text{ get } \lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

- 终值定理：

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

- 时域卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$Y(z) = \mathscr{Z}[y(n)] = X(z)H(z)$$

- Z 域复卷积

$$
\begin{aligned}
&y(n) = x(n)h(n) \\
&Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})H(v)v^{-1}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X)v_H(\frac{z}{v})v^{-1}\mathrm{d}v \\
&\quad\quad \text{where } R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+}
\end{aligned}
$$

- 周期卷积：将复卷积转换为数学形式明显的形式（围线积分半径固定）

$$
\begin{aligned}
&v = \rho e^{j\theta}, z = re^{j\omega} \\
Y(re^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c H(\rho e^{j\theta})X(\frac{r}{\rho}e^{j(\omega-\theta)})\frac{\mathrm{d}(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

- 帕塞瓦尔定理

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega
$$

1.2.3 Z 反变换

定义 1.4 (Z 反变换) 从给定的 Z 变换及其收敛域中还原处原始序列的过程叫做 Z 反变换。

$$
x(n) = \mathscr{Z}^{-1}[X(z)]
$$

实质是求 $X(z)$ 的幂级数展开，通常使用长除法，部分分式，留数（危险积分法）。

部分分式法（重点）

在实际应用中，根据极点进行分解，一般 $X(z)$ 是 z 的有理分式也就是

$$
X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \text{ where A and B are polynomials}
$$

那么可以展开为

$$
X(z) = \sum_i X_i(z)
$$

$$
x(n) = \sum_i \mathscr{Z}^{-1}[X_i(z)]
$$

1.3 系统函数与频率相应

LTI 系统可以由其单位冲激相应完整表示，$H(z)$ 称为传递函数或者系统函数，描述了线性时不变系统的特点：

$$
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}
$$

1.3.1 系统函数和因果性与稳定性

线性时不变系统稳定的充要条件是冲激响应绝对可和，也就是收敛域包括单位圆：

$$\sum |h(-n)| = \sum |h(-n)z^{-n}| < \infty$$

系统因果的充要条件是开放收敛域，即为 $|z| \geq 1$ ，极点全部在单位圆内部。

但是系统函数不能处理非零状态的系统响应，要引入单边 Z 变换进行处理。

1.3.2 频率响应

根据 DTFT 开展，得到

- 单位圆上系统函数是频率响应
- 传递函数存在，但是频率响应可能存在
- LTI 不产生新的频率分量

LTI 系统对输入信号可以看作是对一段频率划分的多个复指数分量信号，是对每个分量响应的和。

数字频率存在天花板.

除比例常数 K 以外，系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

1.3.3 幅度响应

原点处的零极点对幅度无影响，并可以考虑峰谷点以及零极点，远离零极点则会平缓。

1.3.4 相位响应

是对特定的频率进行相位变换。

原点处零极点分别对应超前与滞后。靠近单位圆的零极点会造成较大的群延迟。远离零极点的区域会比较平坦。

1.4 有理 LTI 系统幅相特性

典型的 LTI 系统有，其作用是，

有理系统的幅相特性存在响应的制约。幅度特性已知，那么相位特性仅有有限选择；零极点个数与阶数和相位特性已知，那么也只有有限的幅度特性也是有限选择。若是在最小相位[2]中，一一对应。

[2]最小相位指的是在零极点均在单位圆内，对幅度造成的波动最小

1.4.1 幅度特性约束下的系统函数

给定了频率响应的幅度平方特性下：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = H(z)H^*(\frac{1}{z^*}) = C(z), \text{ where } z = e^{j\omega}$$

两部分在 $j\omega$ 的视角共轭，而在 z 的角度是在单位圆内外分布的，零极点以单位圆的镜像映射。

为了使得差分方程为实系数，那么零极点是共轭对或者实数。

1.4.2 全通系统

若系统对所有的频率分量的幅度响应均为非零恒定值，则该系统即为全通系统。那么零极点是镜像映射。

幅度特性不变，因此需要了解其相位特性。

应用：相位均衡器；因果稳定系统的分解分解为全通与最小相位系统的级联；对非稳定系统，可以保证幅度特性不变.

1.4.3 最小相位系统

在幅度特性之外需要确定相位特性，零极点全在单位圆内，以及单位圆外的零点[3]映射。

特征：最快响应！

- 最小相位延迟
- 最小群延迟
- 最小能量延迟

乘以全通因子后，能量一定会滞后。

1.4.4 逆系统与失真补偿

逆系统：与原系统级联结果为 1： $H_i(z) = 1/H(e^{j\omega})$ 。最小相位系统存在一个因果稳定的逆系统的系统。

若一个信号已经被某个不合要求的频率响应的 LTI 系统所失真，那么可以用一个补偿系统来处理这个失真了的信号。此时幅度失真和相位失真不可能被同时补偿；幅度失真可以利用其最小相位因子完全补偿。

[3]没有极点，是因为这是 LTI 系统