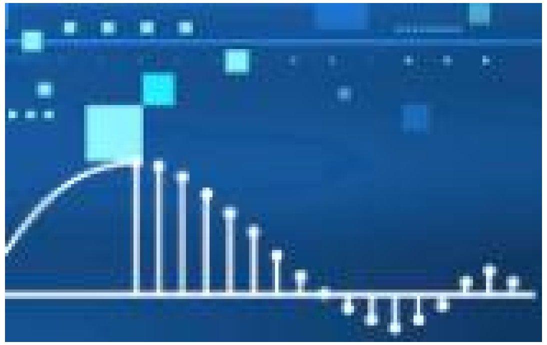
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 四 章

Contents

离散傅里叶变换及快速算法

DFT快速算法

- 离散傅里叶级数
- 频域采样与重构
- 离散傅里叶变换
- **DFT快速算法**
- DFT的工程应用

Tukey,John Wilder
美国科学院院士
艺术科学院院士

◆DFT到底有多“坑”?

◆如何提高运算效率?

DFT存在的问题及改进

- **N**点有限长序列，其**DFT**变换对为：
- $$DFT:\ X(k)=\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\right)R_N(k)$$

$$IDFT:\ x(n)=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right)R_N(n)$$

- 可以看出，变换与反变换的差别仅在于指数符号和常数乘因子**1/N**。实际上：

$$IDFT\left[X(k)\right]=\frac{1}{N}\overline{DFT\,[X^*(k)]}$$

- 因而我们只讨论**DFT**正变换的运算量，反变换的运算量是完全相同的。

DFT直接计算的运算量

$$DFT: \quad X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

- 一般来说 $x(n)$ 和 W_N^{nk} 都是复数，
- 每一个$X(k)$值的计算，需要**N**次复数乘法以及（**N-1**）次复数加法，
- 完成整个**DFT**运算总需要 N^2次复数乘法和**N**（**N-1**）次复数加法。

- 复数运算实际上是由实数运算来完成的，如：

$$AB = (a + jc)(b + jd) = (ab - cd) + j(ad + bc)$$

$$A + B = (a + jc) + (b + jd) = (a + b) + j(c + d)$$

  - 一次复数乘法需用：
    - 四次实数乘法
    - 二次实数加法；
  - 一次复数加法则需：
    - 二次实数加法。
- 整个**DFT**运算总共需要：
  - **$4N^2$**次实数乘法
  - $2N^2 + 2N(N-1) = 2N(2N-1)$ 次实数加法。

特例：

- 上述统计与实际的运算次数有少许出入，某些因子不能按照一般的复数来计算运算量,如：

$$\pm 1 \quad \pm j \quad W_N^0 = 1 \quad W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{N/4} = -j$$

  - 当**N**很大时，这种特例很小。
  - 直接计算**DFT**运算量是很可观的：
    - **N=8**时，**DFT**需**64**次复乘，
    - **N=1024**时，**DFT**所需复乘为**1 048 576**次，
- 对实时性很强的信号处理来说，对硬件的计算速度要求是太高了。为了实用的需要，需要改进**DFT**的计算方法，减少运算次数。

变换基底的特性

如何才能减少运算量？仔细观察DFT的运算就可看出，其变换系数的具有如下特性：W_N^{nk}

（1）W_N^{nk} 的对称性 $\left(W_N^{nk}\right)^* = W_N^{-nk}$

（2）W_N^{nk} 的周期性 $W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$

（3）W_N^{nk} 的可约性 $W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}$ $W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$

$$W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk}$$

$$W_N^{N/2} = -1 \qquad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

问 题 及 思 路

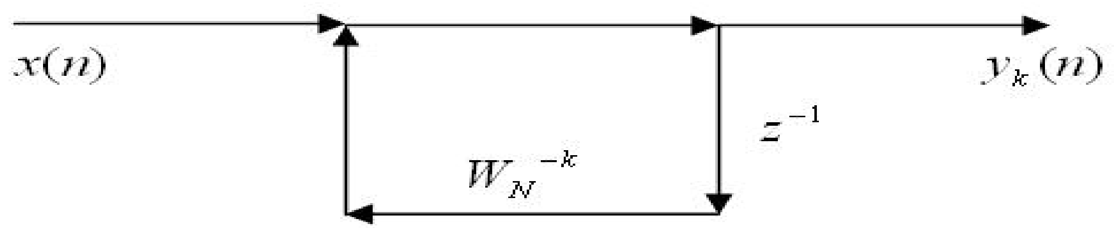
DFT存在的问题	改进的可行性	
运算量正比于序列长度平方N^2	长序列分解成短序列	$(\frac{N}{2})^2+(\frac{N}{2})^2=\frac{N^2}{2}<N^2$
变换基 $W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ 为复数，复运算	可约性、周期性、对称性可合并运算； $W_N^{nk}=W_{N/m}^{nk/m}=W_{mN}^{mnk}$ $W_N^{nk}=W_N^{n(k+N)}=W_N^{(n+N)k}$ $W_N^{-nk}=W_N^{n(N-k)}=W_N^{(N-n)k}=\left(W_N^{nk}\right)^*$	还有少量实因子 $W_N^0=-1$ $W_N^{N/4}=j$ $W_N^{N/2}=-1$ $W_N^{3N/4}=-j$

- （1）利用 W_N^{nk} 的对称性，合并DFT运算中某些项，并且可以计算反变换；
- （2）由于DFT的运算量是与 N^2 成正比，利用 W_N^{nk} 周期性和可约性将长序的DFT分解为短序列的DFT。

- FFT基本可以分成两大类
  - 按时间抽取(DIT,Decimation-in-time）
  - 按频率抽取(DIF,Decimation-in-frequency）。

戈　泽　尔　算　法

- 利用复变换基 W_N^{nk} 的周期性、对称性减少运算量的典型例子
- 利用卷积计算频域



- 用于单离散频点或少数任意离散频点场合（如DTMF辨识）的有效计算

DFT变形为卷积

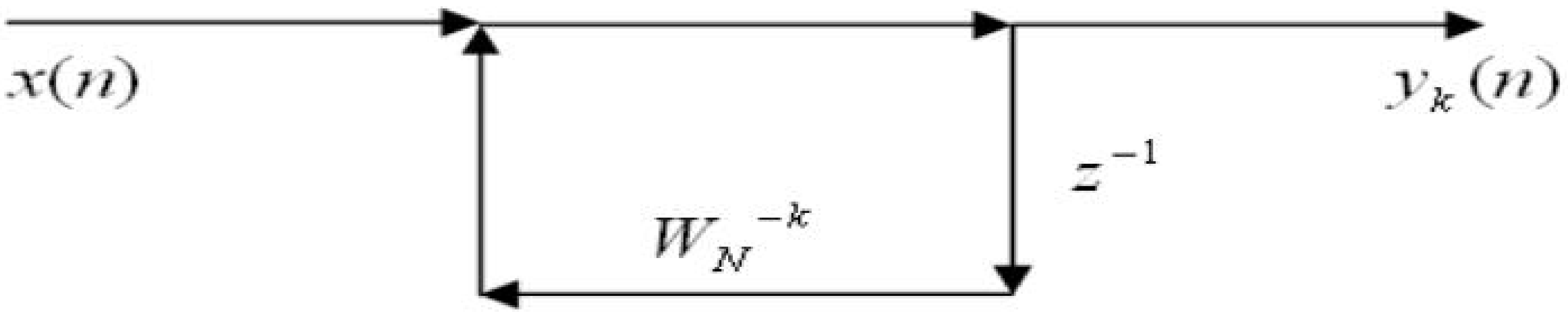
$$X(k)=\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{kr}=W_N^{-kN}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{kr}=\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n)=x(n)*W_N^{-kn}u(n)\overset{x(n)\text{为有限长}}{=}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{-k(n-r)}u(n-r)$$

$$y_k(n)\big|_{n=N}=\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{-k(N-r)}u(N-r)=\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{-k(N-r)}=X(k)$$

推论：避免计算和存储 W_N^{kn}

- 如果构造冲击响应h(n)为 $h(n)=W_N^{-kn}u(n)$ 的系统，则该系统对有限长输入在 $n=N$ 时刻的响应即为 $X(k)$。

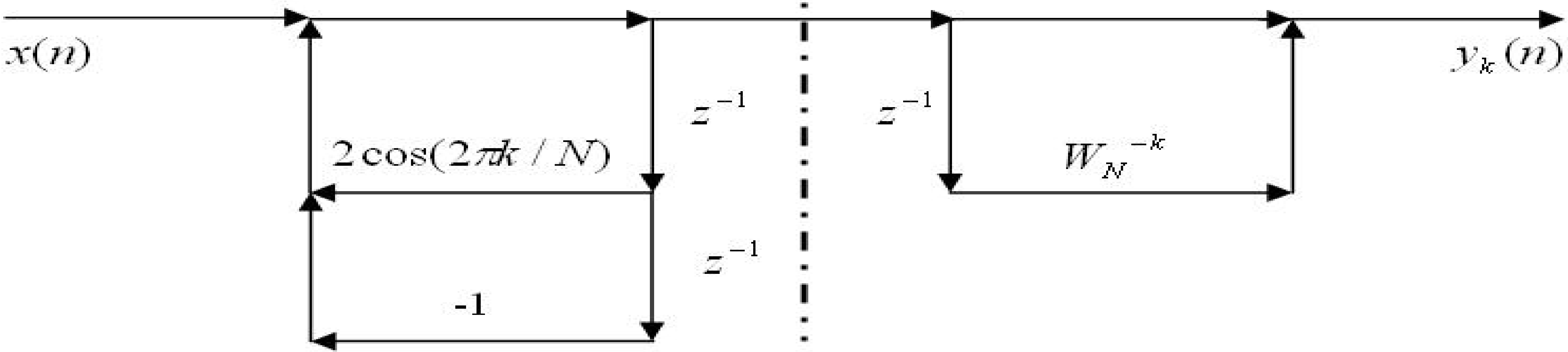


运算量减半

- 立足于上面用**卷积实现DFT**的方法，通过变形将上面的运算量减小一半。

$$H_k(z)=\frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1}{(1-W_N^{-k}z^{-1})(1-W_N^{k}z^{-1})}*(1-W_N^{k}z^{-1})$$

$$=\frac{1}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}}*(1-W_N^{k}z^{-1})$$



戈泽尔算法特点

- 利用迭代实现了复因子的计算
- 如果输入序列是复数，由于系数是实数并且-1不必作乘法运算，所以计算一个X(K)只需要2N次实数乘法和4N次实数加法。
- 戈泽尔算法还有另外一个优点是只需要将前馈环节中的复因子取共轭就可以计算X(N-K)，可以将运算量再次减半。

- 戈泽尔算法虽然比直接运算有效的多，但是无论如何变形，其运算量将仍然正比于N^2。

基2-FFT的定义及特点

■基2-FFT定义：

I. 序列长度为2^L，如不满足可补0 -----适合递归分解

II. 序列长度每次减半进行DFT快算运算 --分解出特殊基

$$W_N^{N/2} = -1 \qquad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

III. 序列分解的最小单元长度为2 -----------无复数运算

$$W_2^0 = 1 \qquad W_2^1 = -1$$

■两大类：

- 时间抽取(DIT)的基2-FFT： （库利-图基，1965）
- 频域抽取(DIF)的基2-FFT： （桑德-图基，1966）

DFT时域奇偶抽取的数学推演

- FFT背景介绍
- 基2-FFT定义及特点
- **时域抽取的基2-FFT**
- 频域抽取的基2-FFT
- 线性调频-Z变换

$$N = 2^L$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

时域奇偶分组

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k}$$

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) \\ x_2(r) = x(2r+1) \end{cases}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_N^{2rk}$$

旋转因子

利用复指数
基底的可约性

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk}$$

$$\begin{cases} X_1(k) = DFT[x_1(n)] \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)] \end{cases}$$

N/2点DFT

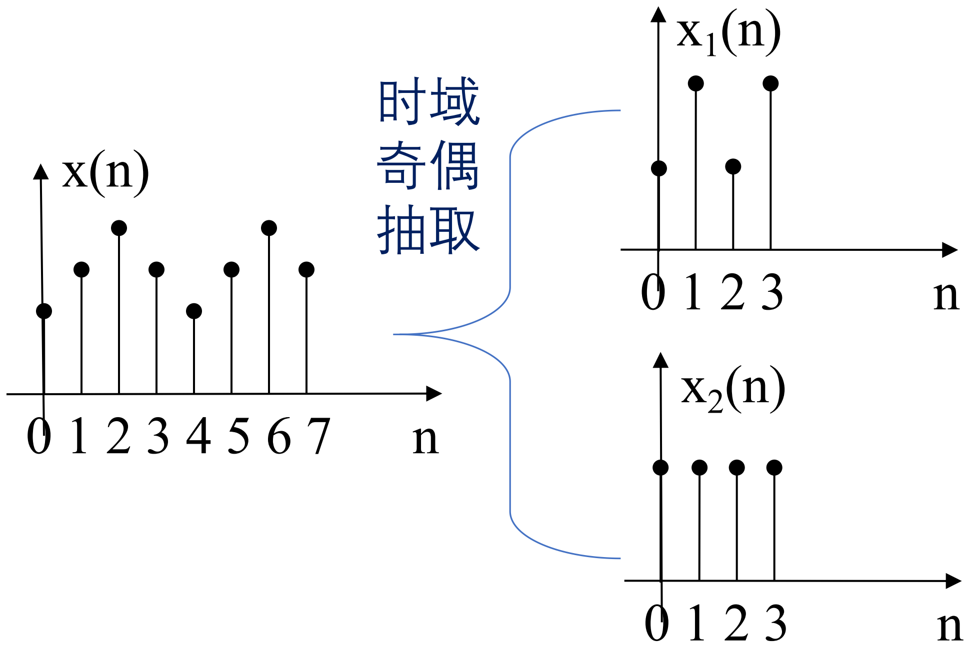
$$= X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

k需周期性拓展

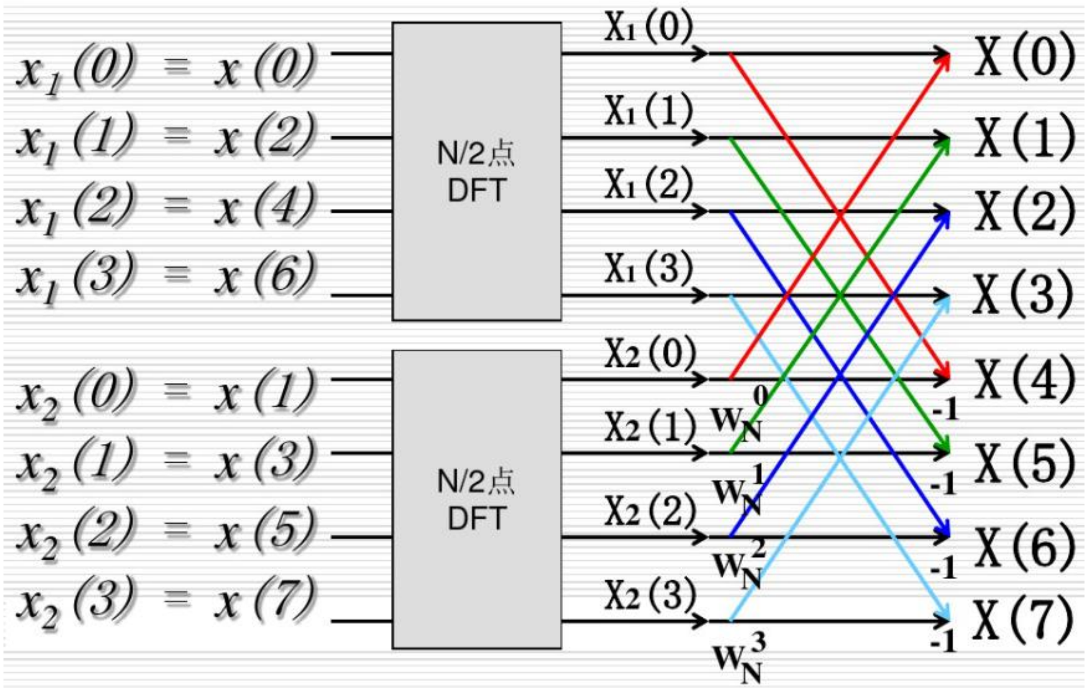
$$X_1\left(\frac{N}{2}+k\right) = X_1(k)$$

$$X_2\left(\frac{N}{2}+k\right) = X_2(k)$$

DFT时域抽取的物理解释



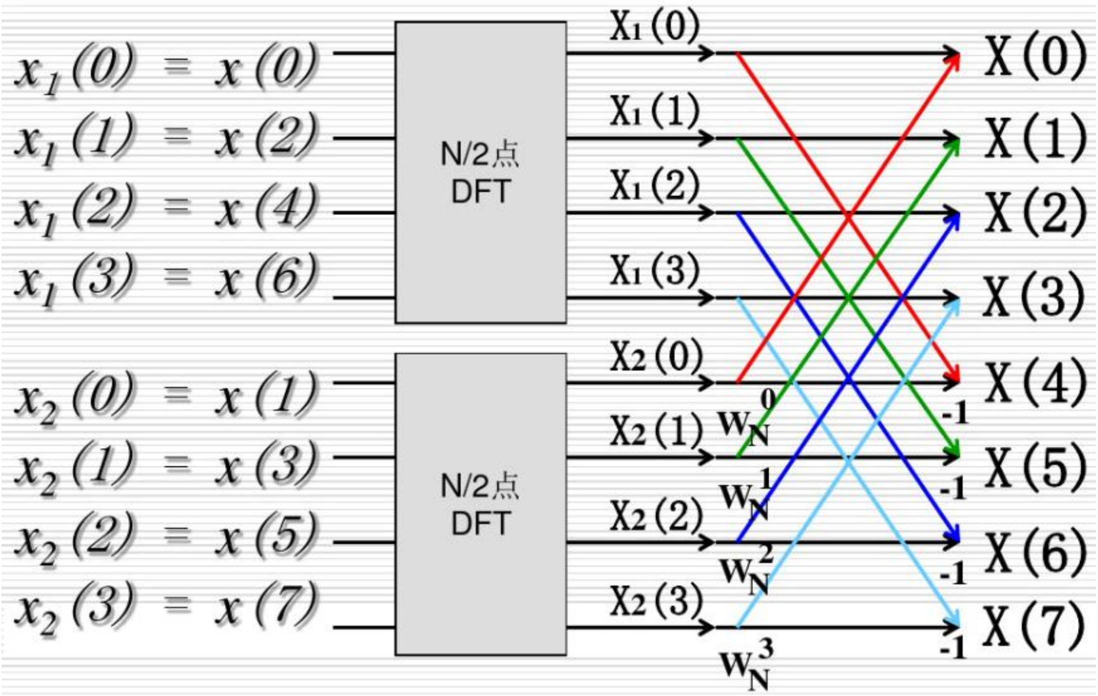
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$



时域分解

频域组合

一次分解后的**基本蝶形**及**运算量**



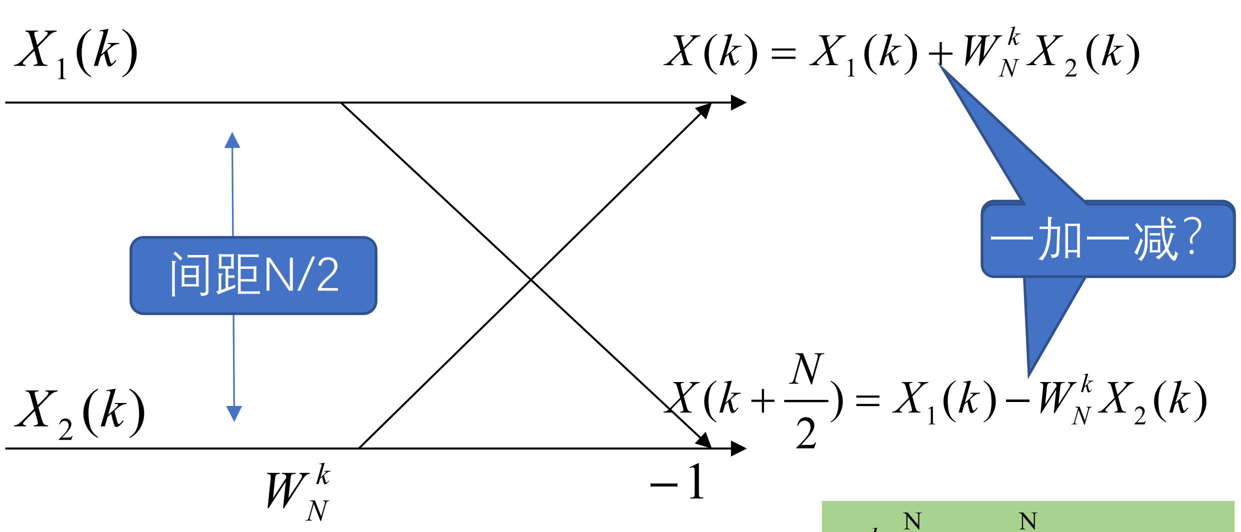
运算量	分解前	分解后
复乘次数	N^2	$2\times(N/2)^2+N/2=N(N+1)/2\approx N^2/2$
复加次数	N^2-N	$2*N/2*(N/2-1)+N=N^2/2$

按照上述方法依次分解下去…

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$

$$X_1\left(\frac{N}{2}+k\right)=X_1(k)$$

$$X_2\left(\frac{N}{2}+k\right)=X_2(k)$$

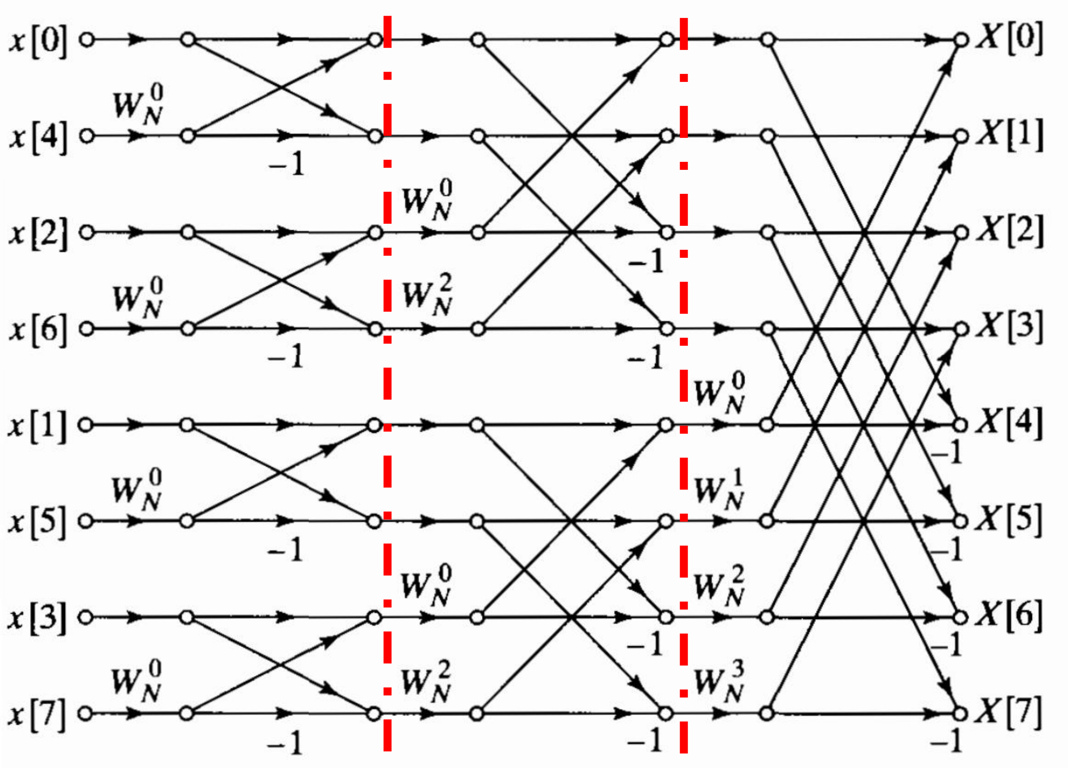


$$W_N^{k+\frac{N}{2}}=W_N^{\frac{N}{2}}W_N^k=-W_N^k$$

蝶形单元：旋转因子在前，加减在后

运算量：一次复乘，两次复加

DIT分解的最终蝶形结构及运算量



运算量	分解前	分解后
复乘	N^2	$L*N/2=\log_2^N*N/2$
复加	N^2-N	$L*N=\log_2^N*N$

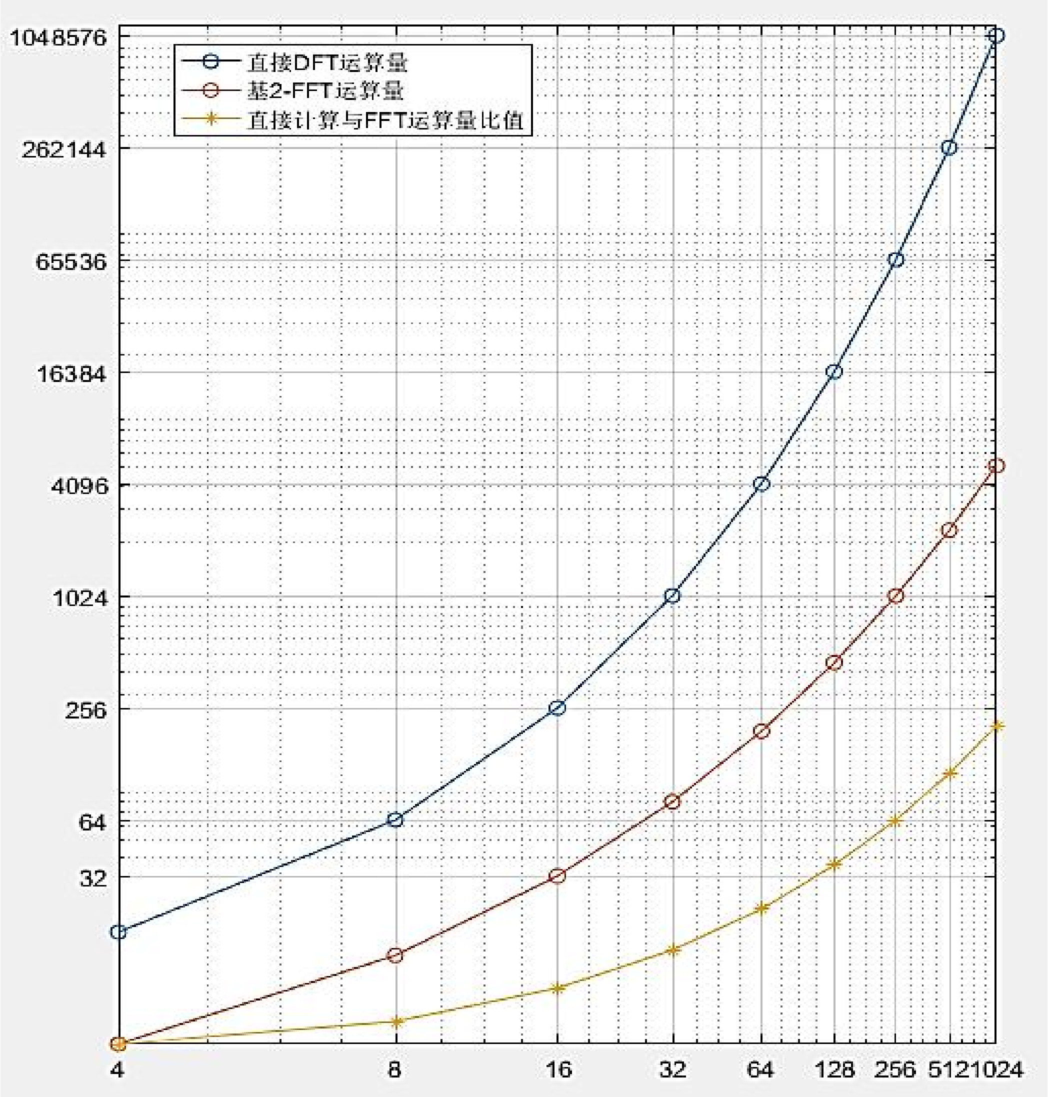
DIT蝶形特点

- 共有L级蝶形，每级有N/2个蝶形；
- 同址运算（原位运算）；
- 倒位序寻址；

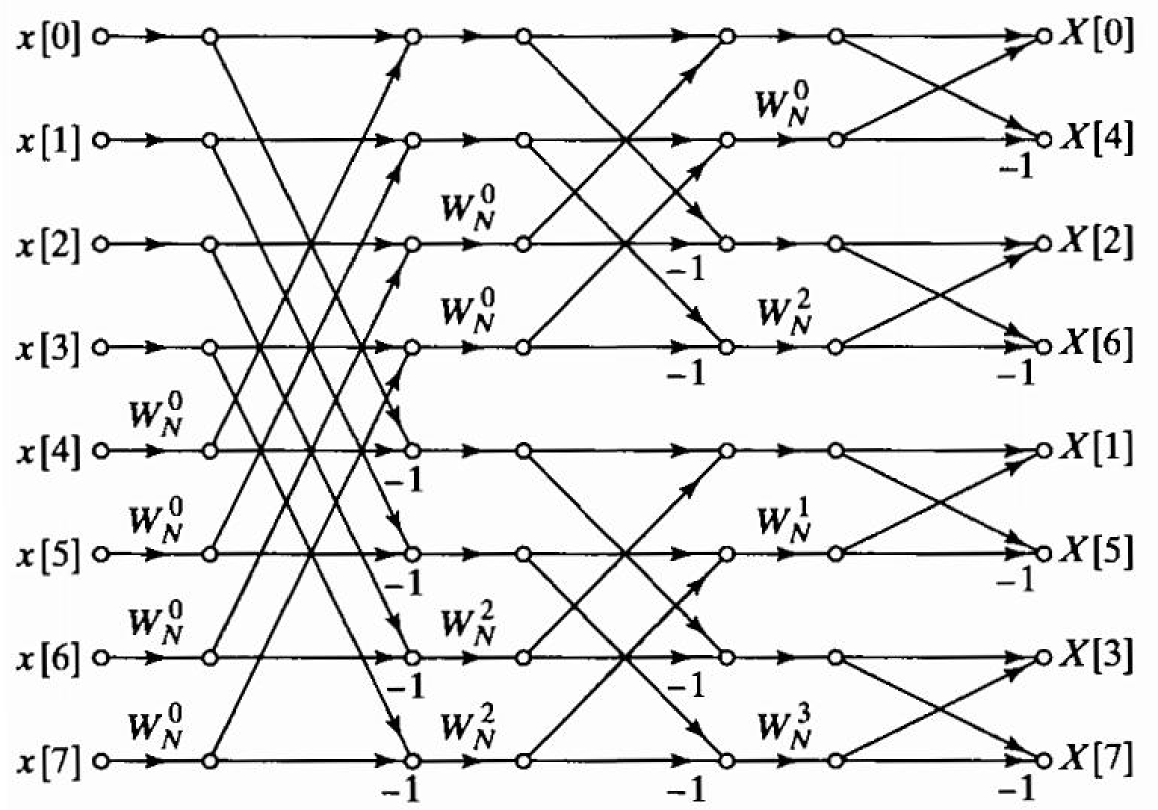
自然顺序 n	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序数 $\hat{n}$
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

基2-FFT与直接DFT复乘运算量对比

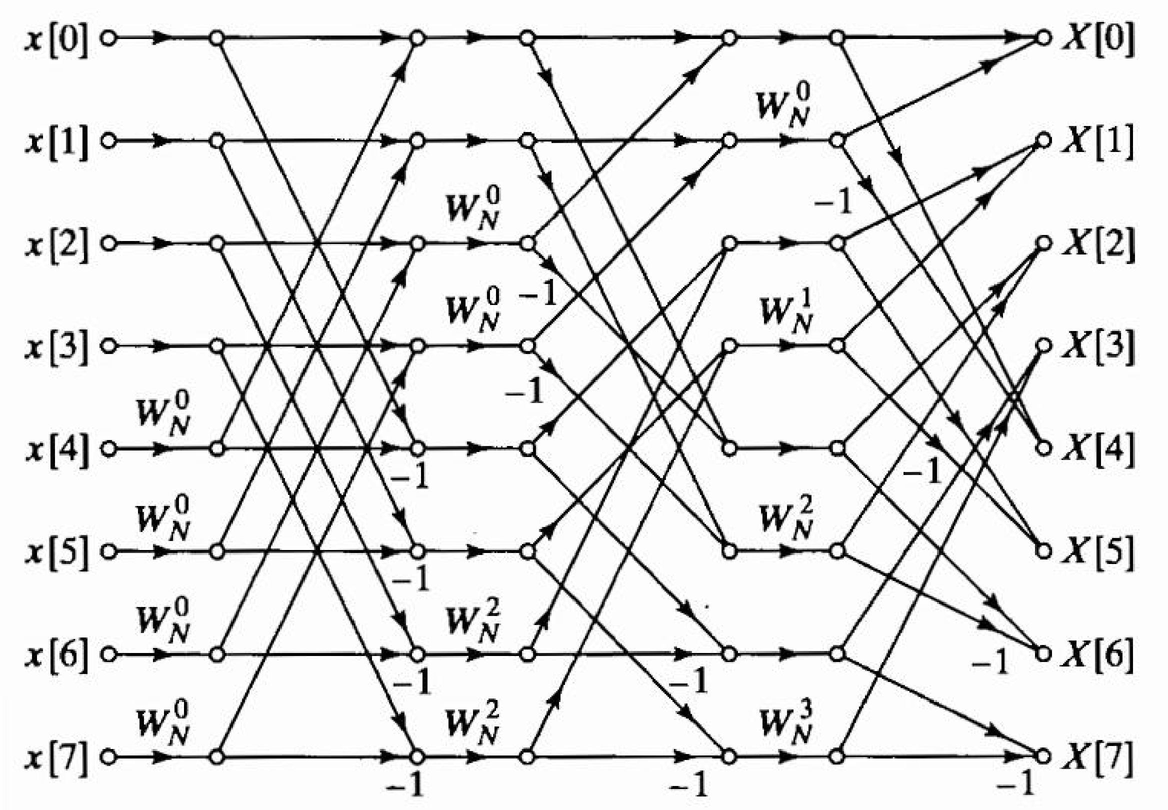
运算量 / 序列长度N	直接DFT N^2	基2-FFT $\frac{N}{2}\log_2^N$	运算量之比
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64.0
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8



DIT基2-FFT的其他流图形式



输入正位序输出倒位序



输入正位序输出正位序

DIT基本蝶形本质特征：旋转因子在前，加减在后

DFT频域奇偶抽取的数学推演

$$N = 2^L$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

按K的奇偶性分解为越来越短的序列

时域前后分组

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{\left(\frac{N}{2}+n\right)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2}\right] W_N^{nk}$$

利用复指数基底的可约性

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + \underline{(-1)^k}\, x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] . W_N^{nk}$$

频域按k奇偶分

$$X(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+(-1)^k x(n+\frac{N}{2})].W_N^{nk}$$

- 令 $\left.\begin{aligned} k &= 2r \\ k &= 2r+1 \end{aligned}\right\} r=0,1,\ \ ,\ \frac{N}{2}-1$
-
- 则：

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})].W_N^{n2r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})].W_{N/2}^{nr}$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})].W_N^{n(2r+1)}$$

$$=\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})].W_N^{n}\}W_{N/2}^{nr}$$

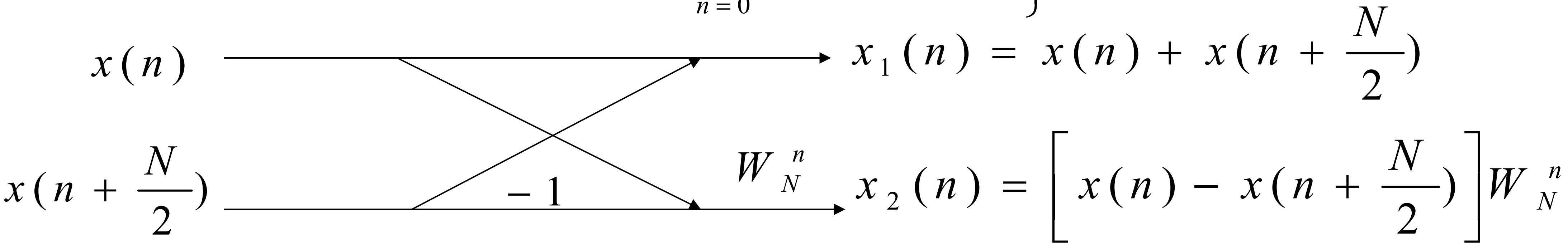
DIF运算关系的基本蝶形

- 令

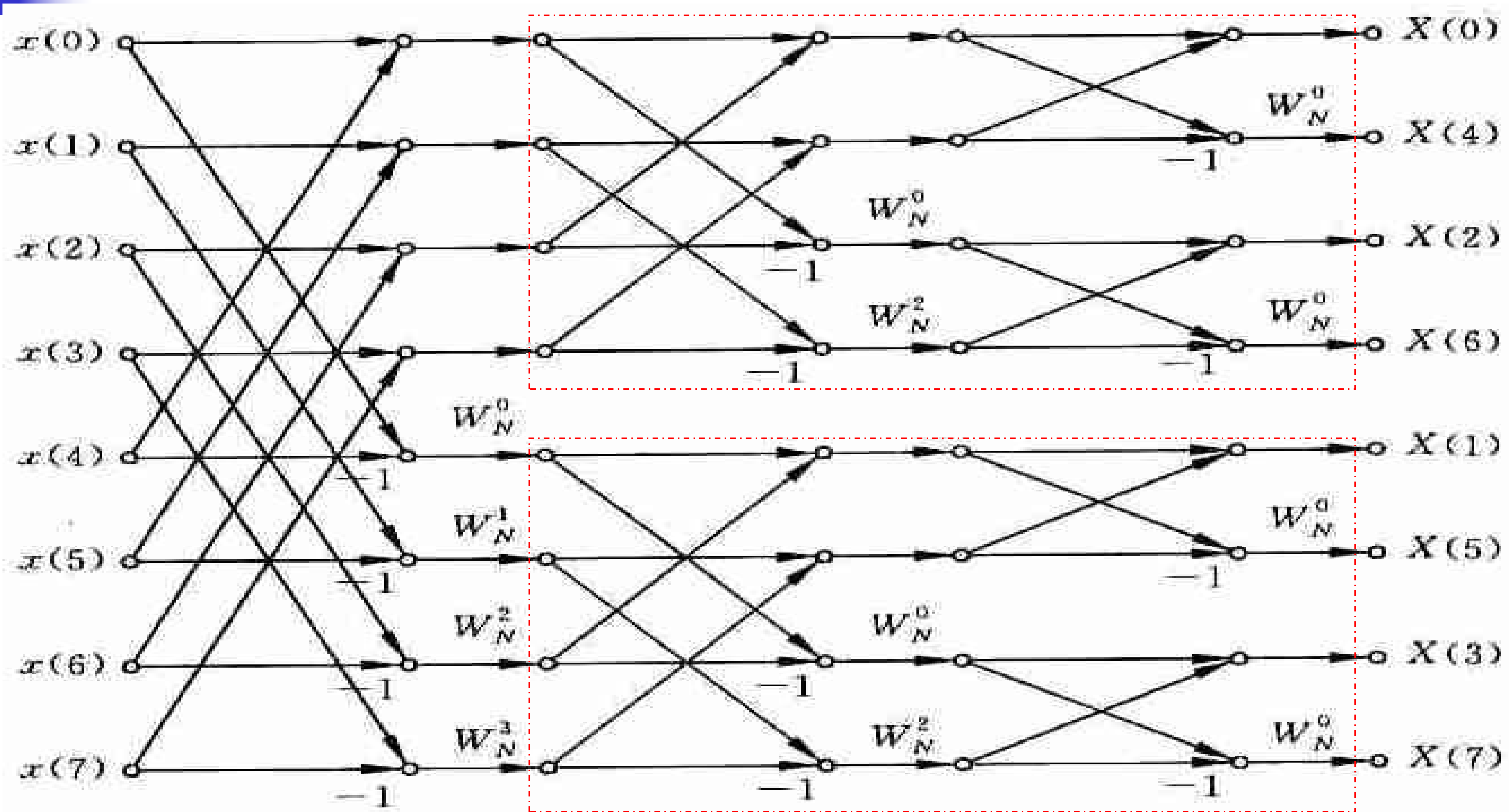
$$\left.\begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^n \end{aligned}\right\} n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

- 则：

$$\left.\begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\ X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} \end{aligned}\right\} r = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

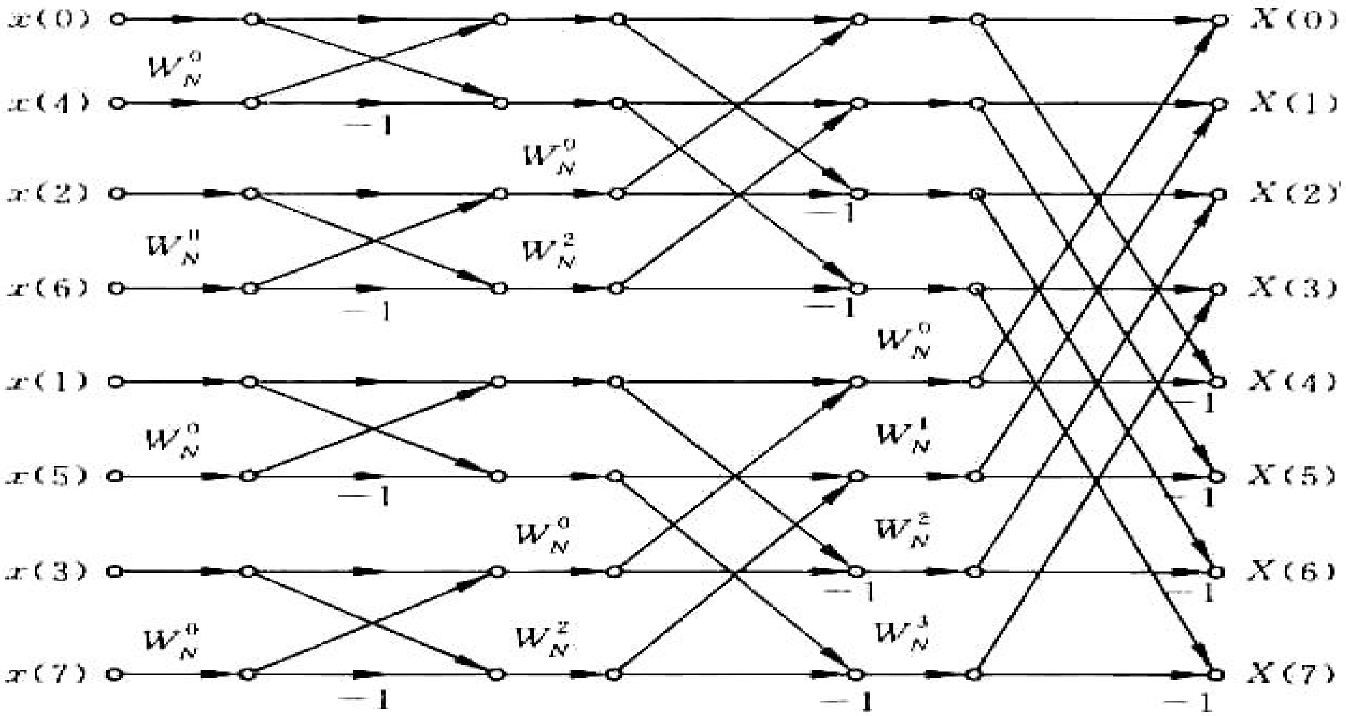


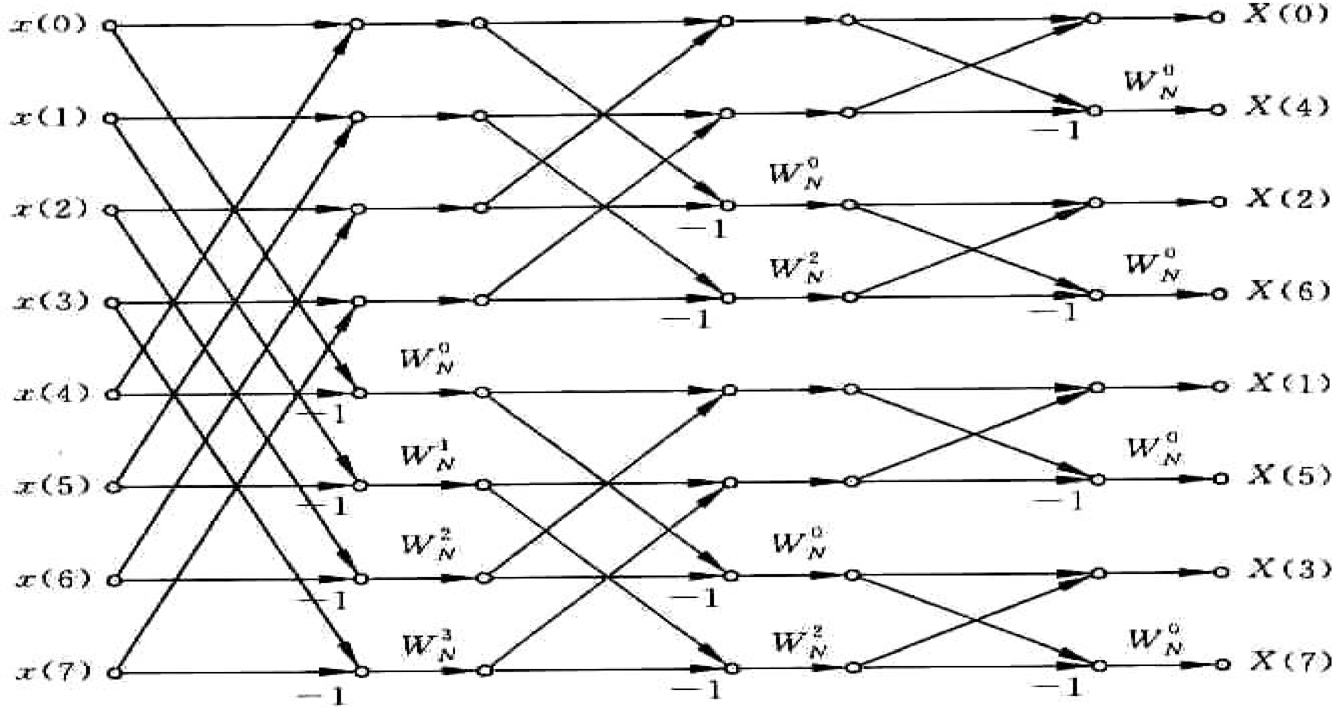
N=8点DIF FFT结构



DIT与DIF的本质区别

- 形式上区别是：**DIF**输入是自然顺序，输出是倒位序的，与**DIT**正好相反。
  - **DIF与DIT**都可将输入或输出按照要求进行重排。
- 实质性区别是：**DIF**与**DIT**的基本蝶形不同。



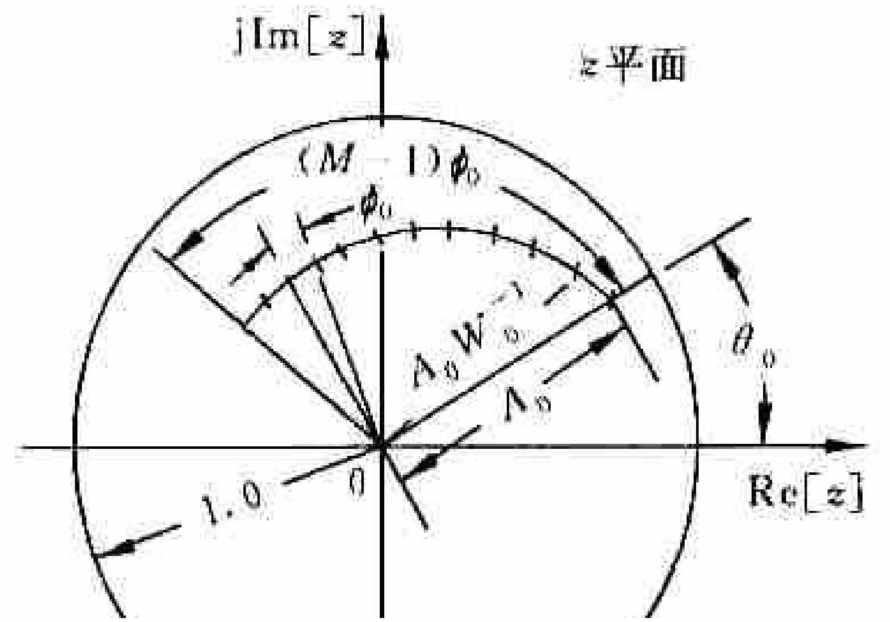


线性调频-Z变换

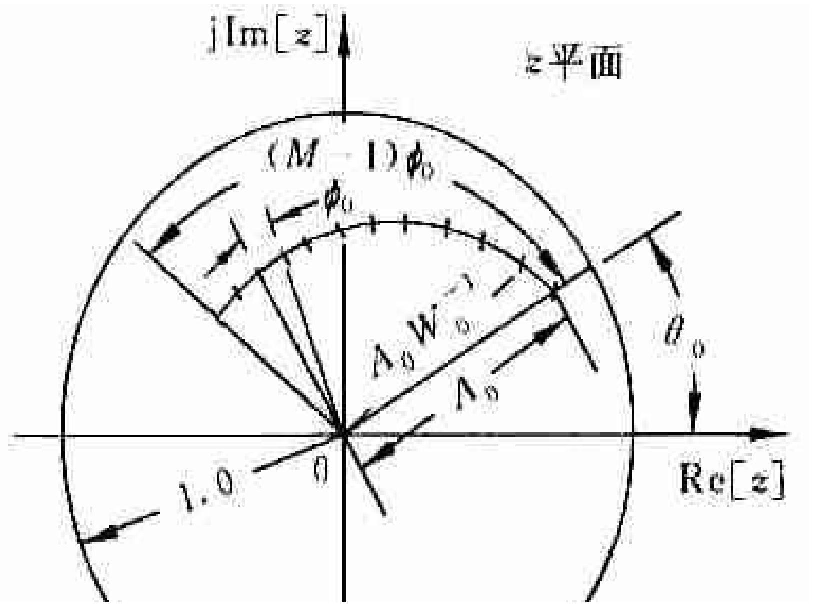
- 戈泽尔算法
- 基2-FFT定义及特点
- 时域抽取的基2-FFT
- 频域抽取的基2-FFT
- 线性调频-Z变换

■对非单位圆上的抽样感兴趣，如语音信号处理中往往需要知道极点所在处的复频率，如果极点位置离单位圆较远，只利用单位圆上的频谱，就很难知道极点所在处的复频率。

■z变换采用螺线抽样就适应于这些需要，称为线性调频z变换(CZT,Chirp-Z)



一、算法原理



- 已知 $x(n)(0 \le n \le N-1)$
- Z变换为：$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$
- 为适应z可以沿Z平面更一般的路径取值，沿z平面上的一段螺线作等分角的M点抽样，z的这些抽样点z_k为：

$$A=A_0 e^{j\theta_0}$$

$$W=W_0 e^{-j\phi_0}$$

$$z_k=AW^{-k},\quad k=0,1,\cdots,M-1$$

$$z_k=A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\phi_0}=A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0+k\phi_0)}$$

CZT的快速算法

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk},\quad 0\le k\le M-1$$

- 直接计算这一公式，与直接计算**DFT**相似，总共算出**M**个抽样点，需要**NM次复数乘法**与（**N-1**）**M**次复数加法，当**N**，**M**较大时，运算量将很大。

布鲁斯坦等式

- 采用布鲁斯坦（**Bluestein**）提出的等式，可以将以上运算转换为卷积和形式，进而采用**FFT**算法，提高运算速度。
- 布鲁斯坦所提出的等式为：

$$nk = \frac{1}{2}\left[n^2 + k^2 - (k-n)^2\right]$$

- 由此可得：

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}}$$

$$= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

CZT 转变为卷积和

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}W^{\frac{k^2}{2}}$$

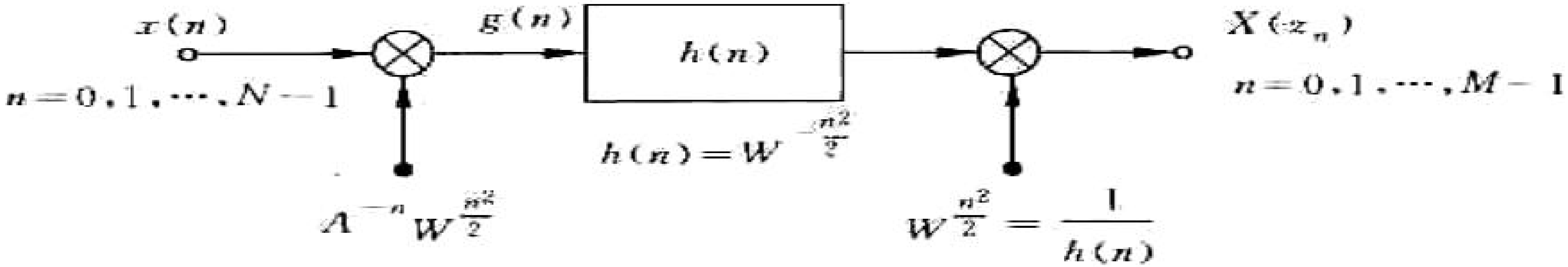
$$=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}\right]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}$$

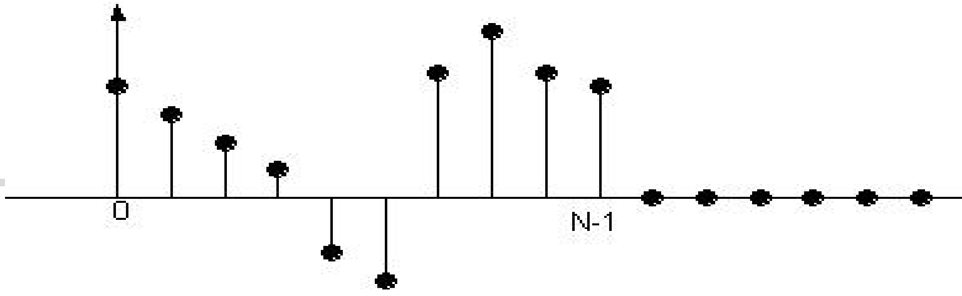
Chirp signal

$$g(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

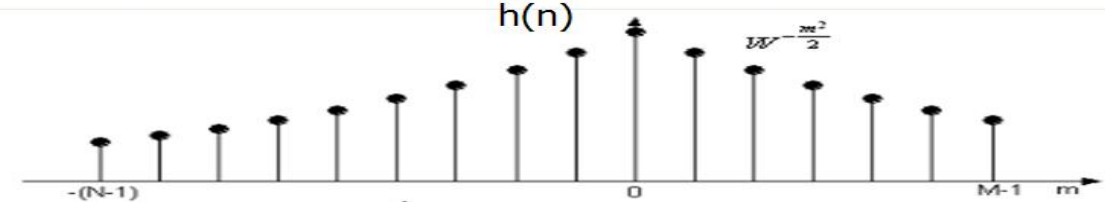
$$X(z_k)=\frac{1}{h(k)}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}g(n)h(k-n),\quad k=0,1,\cdots,M-1$$



二、CZT快速计算



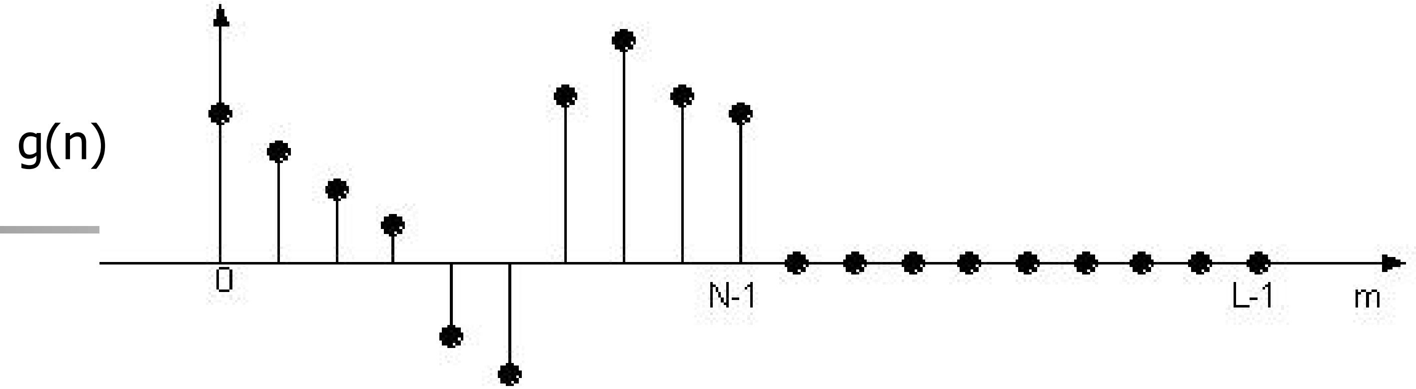
$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$$



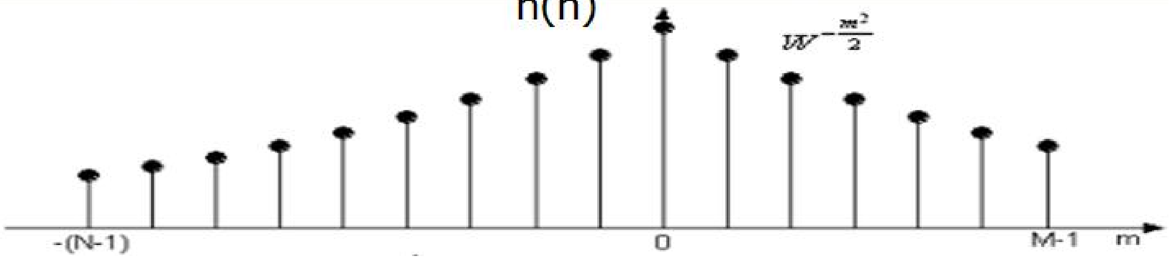
$$g(n) = x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

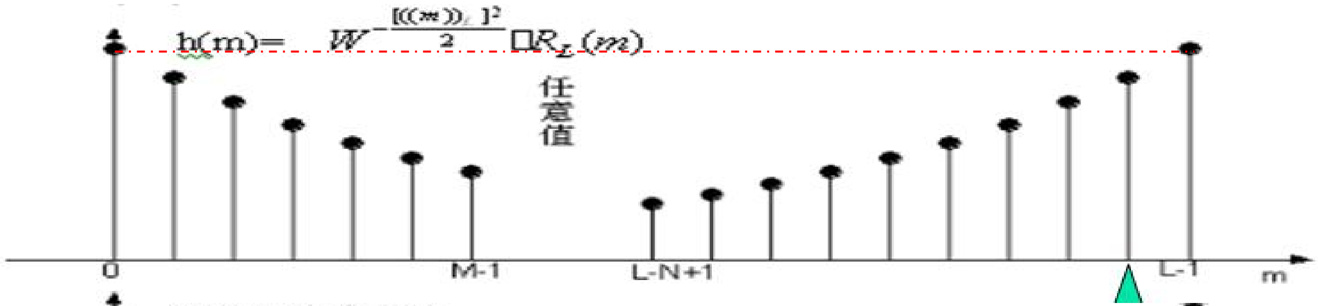
$$X(z_k) = \frac{1}{h(\mathrm{k})} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n), \quad k = 0,1,\cdots,M-1$$

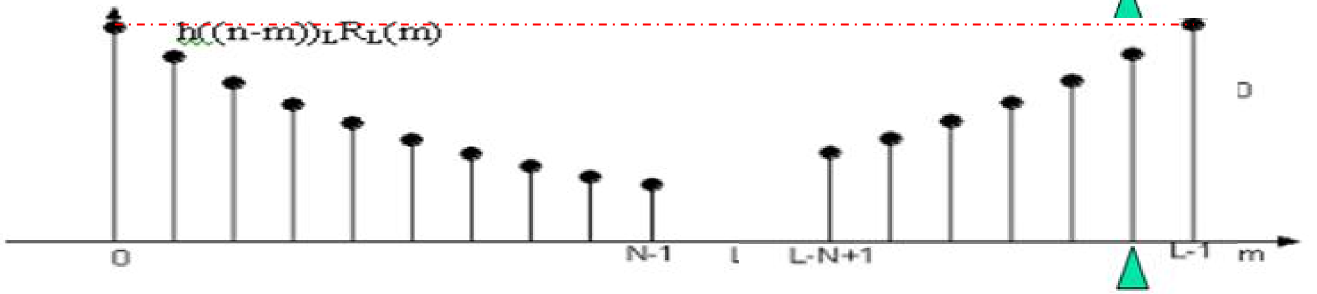
- 线性系统**h(n)**是非因果的。
  - **当n取值为0到N-1，k取值为0，1…，M-1时，则 h(n)的定义区间为** $[-N+1, M-1]$

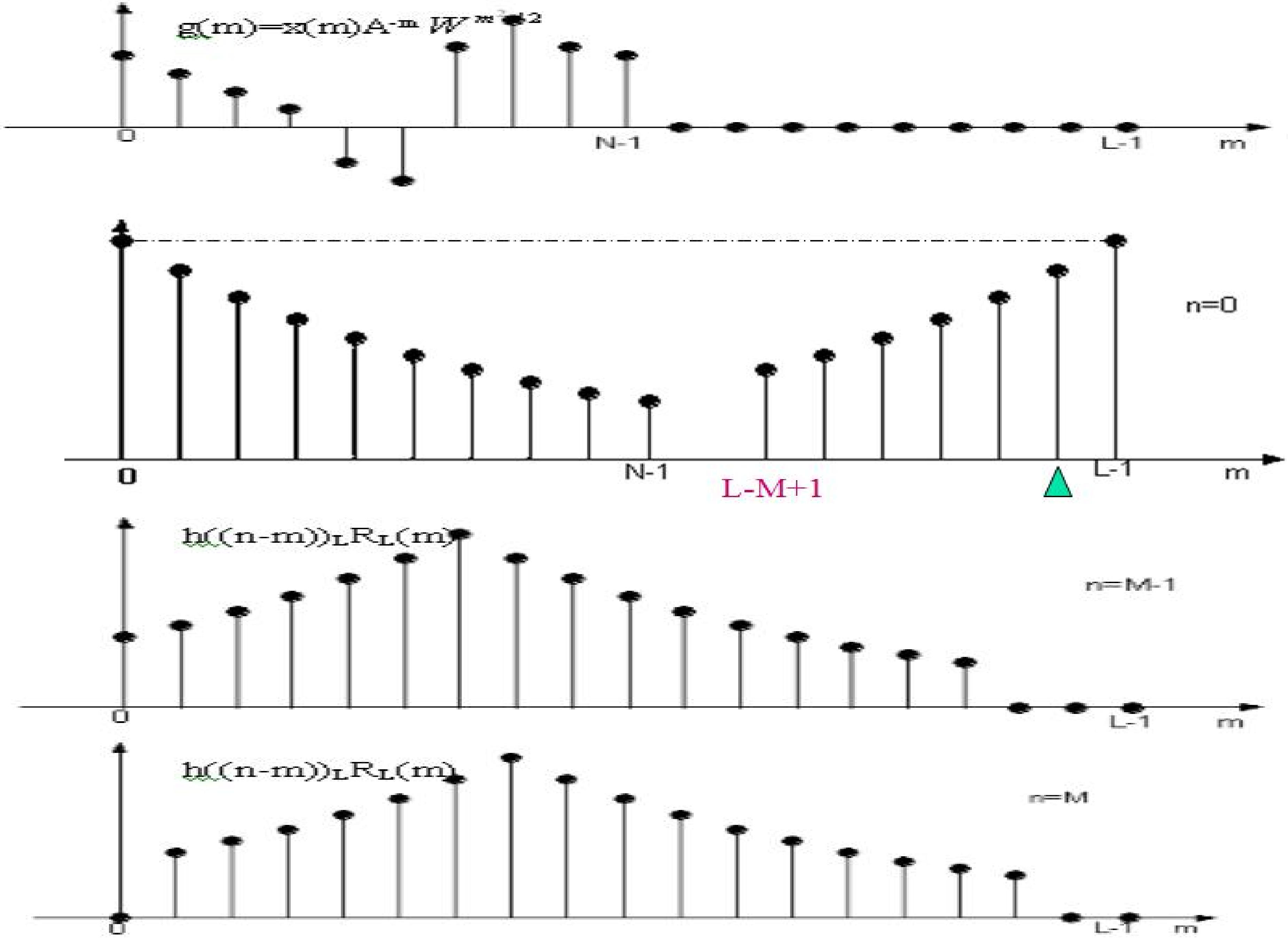


- **g(n)** 长度为**N,h(n)**长度为**N+M-1.**所以**g(n)*h(n)**的点数为**2N+M-2**
- 圆周卷积代替线性卷积不产生混叠失真的条件是圆周卷积点数大于或等于**2N+M-2**
- 但我们只需要前**M**个值，对其他值是否有混叠失真并不感兴趣，这样有可能将圆周卷积的点数缩减到最小为**N+M-1**。









g(m)=x(m)A^-m W^m²/2
0
N-1
L-1
m
0
N-1
L-M+1
L-1
m
n=0
h((n-m))LRL(m)
n=M-1
0
L-1
m
h((n-m))LRL(m)
n=M
0
L-1
m

CZT快速运算的实现步骤：

- 1）选择整数L≥N+M-1
- 2）g(n)补零成L点序列
- 3）利用FFT法求L点DFT
- 4）形成L点h(n)序列
- 5）利用FFT法求L点DFT

$$g(n)=\begin{cases} A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}x(n), & 0\le n\le N-1 \\ 0, & N\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$G(r)=\sum_{n=0}^{N-1}g(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0\le r\le L-1$$

$$h(n)=\begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}}, & 0\le n\le M-1 \\ 0(\text{或任意值}), & M\le n\le L-N \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}, & L-N+1\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$H(r)=\sum_{n=0}^{L-1}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}rn}, \quad 0\le r\le L-1$$

- 6）将H(r)和G(r)相乘得Q(r)=H(r)G(r),
- 7）求Q(r)的L点IDFT，其中前M个值为CZT数值
- 8）最后求$X(z_k)$: $X(z_k)=q(k)/h(k), \quad 0\le k\le M-1$

作业：

- 9.6
- 9.7
- 9.14
- 9.17
- 9.26
- 9.27
- 9.19
- 9.21
- 9.28
- 9.48

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn