LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2019-06-07
SIGNALBEHANDLING i MULTIMEDIA, EITA50
Tid: 08.00-13.00
Sal: Victoriahallen 1, Victoriahallen 2A

Hjälpmedel: Miniräknare och en valfri formelsamling i signalbehandling eller matematik.
Allowed items: calculator, DSP and mathematical tables of formulas

Viktigt: För att underlätta rättningen: *In order to simplify the correction:*
Lös endast **en** uppgift per blad. *Only solve* ***one*** *problem per paper sheet.*
Skriv kod+personlig identifierare på **samtliga** blad.
Write your code+personal identifier on ***every*** *paper sheet.*
Påståenden **skall** motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
Statements ***must*** *be motivated by reasoning and/or equations.*
Poängen från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
The points from the tasks will be added to the examination score.
Max total poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 + 0.5 = 6.0
Max total score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 + 0.5 = 6.0
Betygsgränser: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).
Grading: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).

1. Givet en insignal x(n) och ett impulssvar h(n)
Given an input signal x(n) and an impulse response h(n)

convolution
circular
z- transform
DTFT
DFT

$$x(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 2 \quad 1],$$

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{2} \quad 3 \quad 2 \quad 1], \qquad \frac{Y(z)}{X(z)} = 2+3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}$$

a) Bestäm systemets differensekvation. (0.1p)
Determine the system's difference equation.
$y(n) = 2x(n)+3x(n-1)+2x(n-2)+x(n-3)$

$H(\omega) = 2+3e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}$

b) Bestäm systemfunktionen $H(z)$. $= 2+3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}$ (0.1p)
Determine the system function, $H(z)$.

$H(k) = 2+3e^{-j2\pi\frac{k}{32}}+2e^{-j2\pi\frac{k}{32}2}+e^{-j2\pi\frac{k}{32}3}$

c) Bestäm Fouriertransformen, $H(\omega)$, samt DFT, $H(k)$, med $N = 32$. (0.1p)
Determine the Fourier transform, $H(\omega)$, and the DFT, $H(k)$, with $N = 32$.

d) Beräkna den cirkulära faltningen mellan x och h, modulo 4. (0.1p)
Calculate the circular convolution between x and h, modulo 4. $[\underline{11} \quad 11 \quad 13 \quad 13]$

e) Beräkna utsignalen, när insignalen är $x(n)$. (0.1p)
Calculate the output signal, when the input signal is $x(n)$.
$y(n) = x(n) * h(n)$
$= [\underset{\uparrow}{2} \quad 7 \quad 12 \quad 13 \quad 9 \quad 4 \quad 1]$

Lösningar 2019-06-07

Lösning 1 a) Differensekvationen är *The difference equation is*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) => y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2) + x(n-3)$$

b) Definitionen av Z-transfomen ger *The definition of the Z transform gives*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = 2 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

c) Fouriertransformen är *The Fourier transform is*

$$H(w) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = 2 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega}$$

DFT med $N = 32$ är *The DFT with $N = 32$ is*

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j2\pi kn/N} = 2 + 3e^{-j2\pi k/32} + 2e^{-j4\pi k/32} + e^{-j6\pi k/32}$$

d) Den cirkulära faltningen modulo 4 är *The circular convolution modulo 4 is*

$$h(n) * x(n) = [\underset{\uparrow}{11} \quad 11 \quad 13 \quad 13\,].$$

e) Utsignalen ges av linjär faltning *The output signal is given by linear convolution*

$$y(n) \quad = \quad h(n) * x(n) = [\underset{\uparrow}{2} \quad 7 \quad 12 \quad 13 \quad 9 \quad 4 \quad 1\,].$$

Lösning 2 Antalet rotorblad ges av lösningen till följande ekvation
The number of rotor blades is given by the solution to the following equation

$$F_s(\frac{F_r}{F_s} \pm \frac{k}{B}) = F$$

där F_s är kamerans samplingsfrekvens, F_r är rotorns rotationsfrekvens, B antalet rotorblad, F den upplevda frekvensen och k ett heltal. Lösningen är
where F_s is the camera sampling frequency, F_r the rotor frequency, B the number of rotor blades, F the perceived frequency, and k an integer. The solution is

$$60(\frac{15}{60} - \frac{k}{B}) = 0 \quad => \quad B = 4k$$

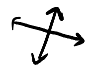
Rotorn har $4k$ blad, alltså troligen 4, 8 eller 12 blad.
The rotor has $4k$ blades, thus 4, 8, or maybe 12 blades.

Om piloten ökar farten lite grand, kommer F_r att öka, och då ökar även F lite. Det kommer att se ut som om rotorn börjar snurra långsamt moturs.

assuming that the rotor has B blades,

$F = F_s\left(\frac{F_r}{F_s} \pm \frac{k}{B}\right)$

15 turns/s   60 p/s   still



Formula

sampling

2. a) En student vid Beihang University filmar en helikopter med videokamera. Helikopterns rotor gör 15 varv per sekund (motsols) och videokameran tar 60 bilder per sekund. När helikoptern startar ser rotorn på filmen ut att stå stilla.
a) A student at Lund University films a helicopter with a video camera. The helicopter rotor spins with 15 turns per second (anti clockwise). The video camera captures 60 pictures per second. When the helicopter starts, on the film, it looks like the rotor is standing still.

Hur många rotorblad kan helikopterns rotor ha?   4, 8, 12   maybe can't be more   (0.3p)
How many rotor blades can the helicopter's rotor have?   4N   N: integer

Hur ser det ut på filmen om piloten ökar rotorns hastighet, fast bara lite?   (0.1p)
How does it look on the film if the pilot increases the rotor's speed, but just a little?

It looks like that the rotor starts to spins in a very low speed.   anti clockwise

b) Om man samplar en signal som innehåller en högsta frekvens F_{max}, vilket villkor gäller för samplingsfrekvensen F_s, för att undvika vikning?   (0.1p)
b) If you sample a signal which contains a highest frequency F_{max}, which is the condition for the sampling frequency F_s, to avoid aliasing?

$F_s > 2F_{max}$

z-transform

3. Följande differensekvation är given
The following difference equation is given

$$y(n) - \frac{2}{5}y(n-1) + \frac{3}{100}y(n-2) = x(n)$$

där insignalen är $x(n) = (\frac{1}{5})^n u(n)$. Bestäm utsignalen.   (1.0)
where the input signal is $x(n) = (\frac{1}{5})^n u(n)$. Determine the output signal.

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}+\frac{3}{100}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{2}{5}z+\frac{3}{100}} = \frac{z^2}{(z-\frac{3}{10})(z-\frac{1}{10})}$

$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{5}}$ $Y(z) = \frac{z^3}{(z-\frac{1}{5})(z-\frac{3}{10})(z-\frac{1}{10})}$

$= \frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{10}} + \frac{9}{2}\frac{z}{z-\frac{3}{10}} - 4\frac{z}{z-\frac{1}{5}}$

$Y(n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{10})^n u(n) + \frac{9}{2}(\frac{3}{10})^n u(n) - 4(\frac{1}{5})^n u(n)$

notch filter

(cos z-transform)

4. Designa ett andra ordningens IIR notchfilter som tar bort frekvensen $\omega = 2\pi\frac{1}{4}$ där $\alpha = 0.9$. Ge dit svaret i form av en DTFT $H(\omega)$. Beräkna även filtrets systemfunktion $H(z)$ och impulssvar $h(n)$.   (0.4p)
Design a second-order IIR notch filter, which cancels out the frequency $\omega = 2\pi\frac{1}{4}$ where $\alpha = 0.9$. Give your answer as a DTFT $H(\omega)$. Also give the filter's system function $H(z)$ and impulse response $h(n)$.

?

Rita ett pol-nollställediagram för filtret du designat ovan.   (0.2p)
Draw a pole zero plot for the filter you designed above.

Vad är detta filters förstärkning vid frekvensen $\omega = 2\pi\frac{1}{2}$?   (0.4p)
What is this filter's amplification at the frequency $\omega = 2\pi\frac{1}{2}$?

$z^{-2}\frac{z^2}{z^2+0.81}$

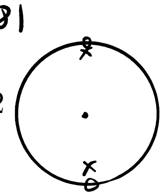
$H(z) = \frac{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}{1-2\alpha\cos(\omega_0)z^{-1}+\alpha^2z^{-2}} = \frac{1+z^{-2}}{1+0.9^2z^{-2}}$ $\frac{z^2+1}{z^2+0.81} = \frac{z^2}{z^2+0.81} + \frac{1}{z^2+0.81}$

$\frac{100}{81}\ \frac{1}{\frac{z}{\ }+1}$

$H(\omega) = \frac{1+e^{-j2\omega}}{1+0.81e^{-j2\omega}}$ $H(2\pi\frac{1}{2}) = \frac{1+e^{-j2\pi}}{1+0.81e^{-j2\pi}} = \frac{2}{1.81}$ $(0.9)^n\cos\frac{\pi}{2}n\,u(n) = \frac{z^2}{z^2+0.81}$

$\frac{100}{81}\ \frac{1}{(\frac{z}{0.9})^2+1}$

$\frac{1-az^{-1}\cos w_0}{1-2az^{-1}\cos w+az^{-2}}$



If the pilot increases the speed somewhat, F_r will increase, and then F also increases a little. The effect will be the the rotor seems to start moving slowly, anti-clockwise.

För att undvika vikning måste samplingsfrekvensen vara $F_s > 2F_{max}$
To avoid aliasing, the sampling frequency must be $F_s > 2F_{max}$

Lösning 3 Z-transformering ger
Z-transformation gives

$$Y(z) - \frac{2}{5}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{100}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{3}{100}z^{-2}}X(z)$$

Lösningen till andragradsekvationen $z^2 - \frac{2}{5}z + \frac{3}{100} = 0$ är $p_{1,2} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}$, vilket ger

The solution to the equation $z^2 - \frac{2}{5}z + \frac{3}{100} = 0$ is $p_{1,2} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}$, which gives

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{10}z^{-1})(1 - \frac{3}{10}z^{-1})}X(z)$$

Insättning av insignalens transform ger
Using the transform of the input signal gives

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{10}z^{-1})(1 - \frac{2}{10}z^{-1})(1 - \frac{3}{10}z^{-1})}$$

Partialbråksuppdelning ger
Partial fractions give

$$Y(z) = \frac{9}{2}\frac{1}{(1 - \frac{1}{10}z^{-1})} - 4\frac{1}{(1 - \frac{2}{10}z^{-1})} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1 - \frac{3}{10}z^{-1})}$$

Inverstransformering ger
Inverse transformation gives

$$y(n) = \frac{9}{2}(\frac{1}{10})^n u(n) - 4(\frac{2}{10})^n u(n) + \frac{1}{2}(\frac{3}{10})^n u(n)$$

Lösning 4 Ett notchfilter som släcker ut frekvensen $\omega = 2\pi\frac{1}{4}$ ges av
A notch filter which cancels the frequency $\omega = 2\pi\frac{1}{4}$ is given by

$$H(\omega) = \frac{(e^{j\omega} - e^{j\frac{\pi}{2}})(e^{j\omega} - e^{-j\frac{\pi}{2}})}{(e^{j\omega} - 0.9e^{j\frac{\pi}{2}})(e^{j\omega} - 0.9e^{-j\frac{\pi}{2}})}$$

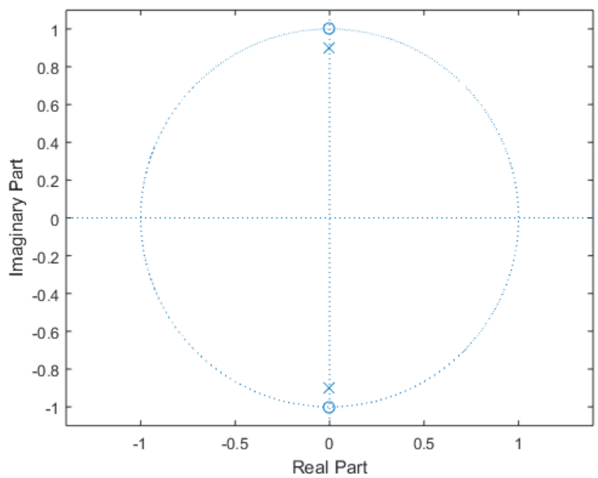
Motsvarande systemfunktion är
The corresponding system function is

$$H(z) = \frac{(z + j)(z - j)}{(z + 0.9j)(z - 0.9j)} = \frac{z^2}{z^2 + 0.81} + \frac{1}{z^2 + 0.81}$$

och impulssvaret är
and the impulse response is

$$h(n) = 0.9^n cos(2\pi\frac{1}{4})u(n) + \frac{100}{81}0.9^n cos(2\pi n\frac{1}{4})u(-n)$$

Pol-nollställediagrammet är:
The pole zero plot is



Filtrets förstärkning vid frekvensen $\omega = 2\pi\frac{1}{2}$ är
The filter's amplification at the frequency $\omega = 2\pi\frac{1}{2}$ is

$$H(-1) = \frac{(-1+j)(-1-j)}{(-1+0.9j)(-1-0.9j)} = \frac{1+1}{1+0.81} = 1.105$$

Lösning 5 Formen heter Direkt form II, Normalform eller Kanonisk form.
The form is named Direct Form II, Normal Form, or Canonical Form.

Systemfunktionen är
The system function is

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z)$$

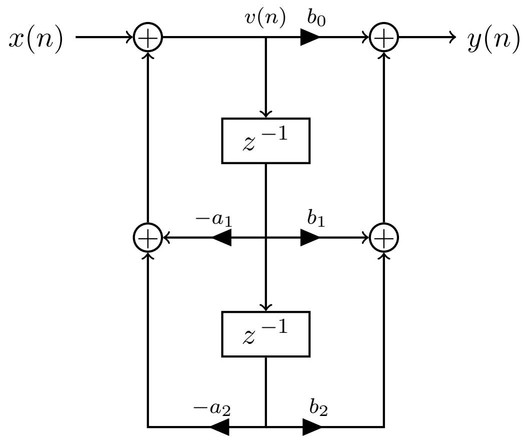
Differensekvationen för systemet är
The difference equation of the system is

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

Att ett system har ordningen k innebär att den maximala fördröjning k av antingen insignalen $x(n-k)$ eller utsignalen $y(n-k)$ är k samplingssteg i differensekvationen.
When a system is of order k, it means that the maximal delay k of either the input signal $x(n-k)$ or the output signal $y(n-k)$ is k sampling steps in the difference equation.

5. Ett system är angivet på följande form.
A system is given in the following form.

IIR/FIR system/filter design



Direct form II

Vad heter denna form? second order filter (0.1p)
What is the name of this form?

Beräkna systemfunktionen $H(z)$ för systemet. $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ (0.4p)
Calculate the system function $H(z)$ of the system.

Beräkna differensekvationen för systemet, och förutsätt att det inte finns några initialvärden skilda från noll. (0.3p)
Calculate the difference equation of the system, and assume that there are no non-zero initial conditions. $y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

Definiera och förklara vad som avgör att ett system är av en viss ordning. (0.2p)
Define and explain what decides that a system has a certain order. max delay in y or x terms

6. Vad betyder förkortningen BIBO i begrepper BIBO-stabilitet? (0.1p)
What does the acronym BIBO in the concept BIBO-stability stand for?
Bounded Input Bounded Output

stability

Definiera och förklara vad BIBO-stabilitet innebär. (0.4p)
Define and explain what BIBO stability means. if $|x(n)| \le M_x$, then $|y(n)| \le M_y$

Bevisa att ett system är BIBO-stabilt när
Prove that a system is BIBO stable when

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)\, h(n-k)| < \infty$$

(0.5p)

Lycka Till! *Good Luck!*

Lösning 6 BIBO betyder ”Bounded Input Bounded Output.”
BIBO stands for ”Bounded Input Bounded Output.”

BIBO-stabilitet innebär att om insignalen är begränsad så att alla dess värden är mindre än eller lika med ett visst värde $|x(n)| \leq M_x$ så kommer utsignalen också att vara begränsad, så att alla dess värden är mindre än eller lika med ett visst annat värde $|y(n)| \leq M_y$.

BIBO stability means that if the input signal is bounded, so that all its values are less than or equal to a specific value $|x(n)| \leq M_x$, then the output signal will also be limited, so that all of its values are less than or equal to another specific value $|y(n)| \leq M_y$.

Ett system är BIBO-stabilt om
A system is BIBO-stable if

$$|x(n)| \leq M_x \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq M_y \tag{1}$$

eller ekvivalent
or equivalently

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| && (2) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \, |x(n-k)| && (3) \\ &\leq M_x \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| && (4) \end{aligned}$$

Systemet är därför stabilt om
The system is therefore stable if

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{5}$$