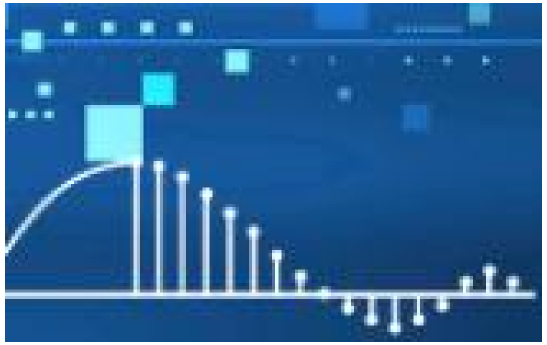
北京航空航天大學

BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 三 章

Contents

信号采样与重构

一 理想采样和重构

二 连续信号离散处理

三 抽取与内插

四 离散处理的工程问题

采样与重构的重要性

- 虽然自然界中存在离散时间信号，但是最常见的还是连续时间信号。
  - 采样（离散化）
- 连续时间信号的处理分析往往经由对之采样后的离散时间序列处理完成的。
  - 计算（连续信号离散化处理）
- 利用离散处理后的结果往往需要在连续域表达出来，便于接收和理解
  - 重构（连续化）

本章要解决的问题（三点一线）

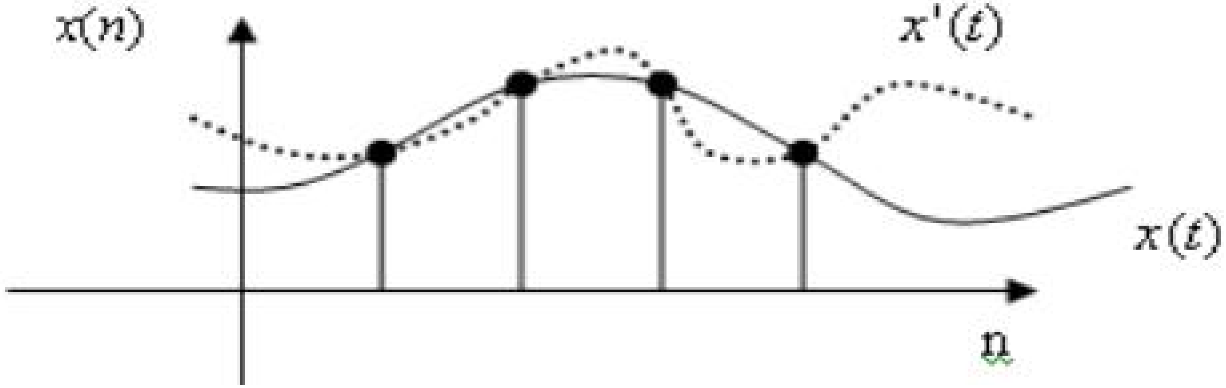
- 1、数字频率和模拟频率之间对应关系：时域采样导致了信号频域发生了何种变化？
- 2、采样定理：采样后信号是否包含了连续信号的所有信息？如何无失真恢复原始信号？采样的信号是否包含冗余信息？是否可以进行速率的变化？
- 3、离散处理如何等效模拟LTI:用于实际连续信号的处理应用？如何提高信号处理的性能？

- **学习方法**：学会用频谱图方法分析理解各环节对信号的作用

理想周期采样与重构

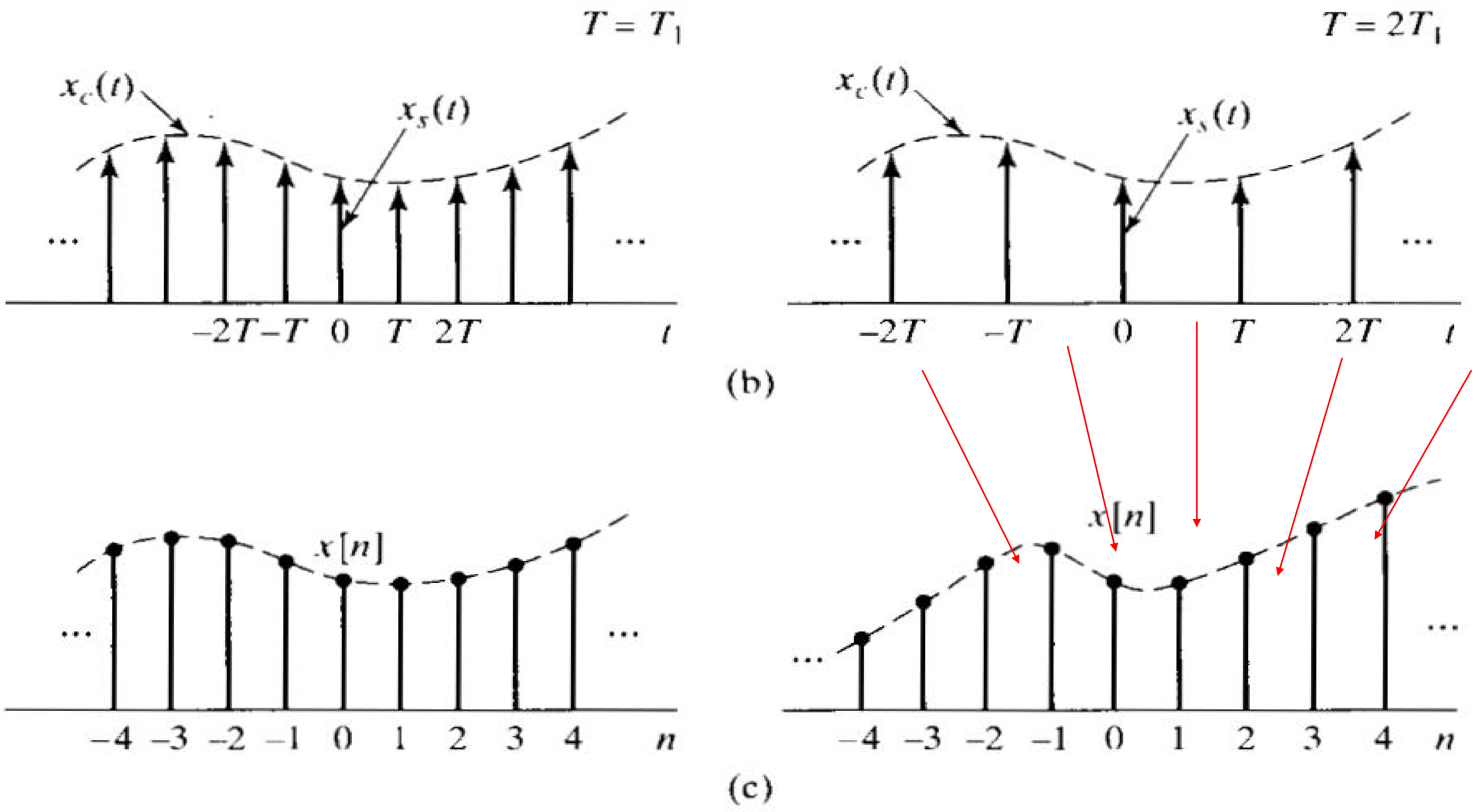
理想周期采样与重构
连续信号离散处理
抽取与内插
离散处理的工程问题

- 采样一般是不可逆的



- 为保证采样不丢失信息，该做何约束?

一个连续时间信号两种采样



正弦信号的采样

$$x_c(t) = \cos(\Omega t), \qquad x(n) = x_c(t)\big|_{t=nT}$$

$$\Omega = 2\pi * 10; \qquad
\begin{array}{lll}
T_1 = 0.01\,s & x(n) = \cos(0.2\pi * n) & \omega = 0.2\pi \\
T_1 = 0.02\,s & x(n) = \cos(0.4\pi * n) & \omega = 0.4\pi \\
T_3 = 0.05\,s & x(n) = \cos(1.0\pi * n) & \omega = 1.0\pi \\
T_4 = 0.10\,s & x(n) = \cos(2\pi * n) & \omega = 0 \\
T_5 = 0.12\,s & x(n) = \cos(2.4\pi * n) & \omega = 0.4\pi
\end{array}$$

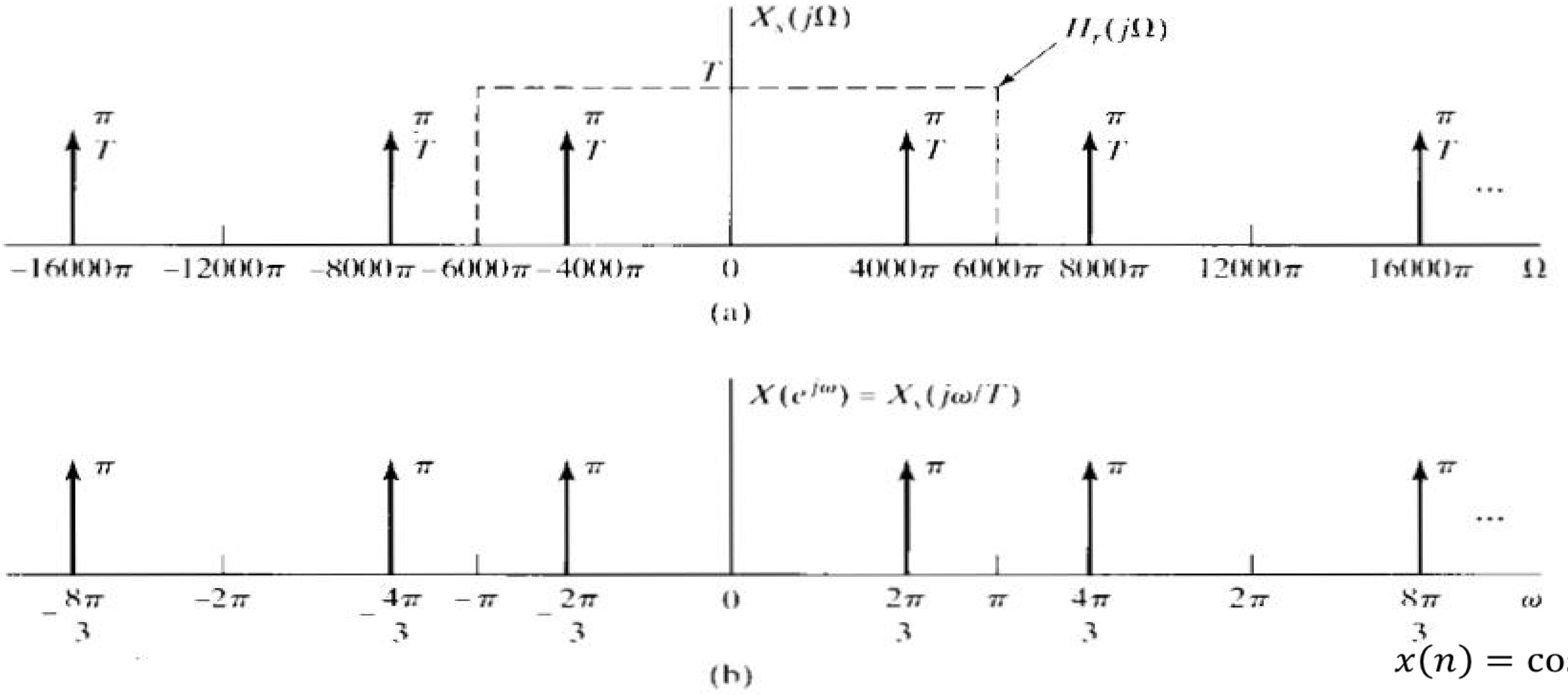
$$T = 0.01; \qquad
\begin{array}{lll}
\Omega_1 = 2\pi * 10 & x(n) = \cos(0.2\pi * n) & \omega = 0.2\pi \\
\Omega_2 = 2\pi * 20 & x(n) = \cos(0.4\pi * n) & \omega = 0.4\pi \\
\Omega_3 = 2\pi * 50 & x(n) = \cos(1.0\pi * n) & \omega = 1.0\pi \\
\Omega_4 = 2\pi * 100 & x(n) = \cos(2\pi * n) & \omega = 0 \\
\Omega_5 = 2\pi * 120 & x(n) = \cos(2.4\pi * n) & \omega = 0.4\pi
\end{array}$$

例题1 无混叠采样

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

$$T = \frac{1}{6000}$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$

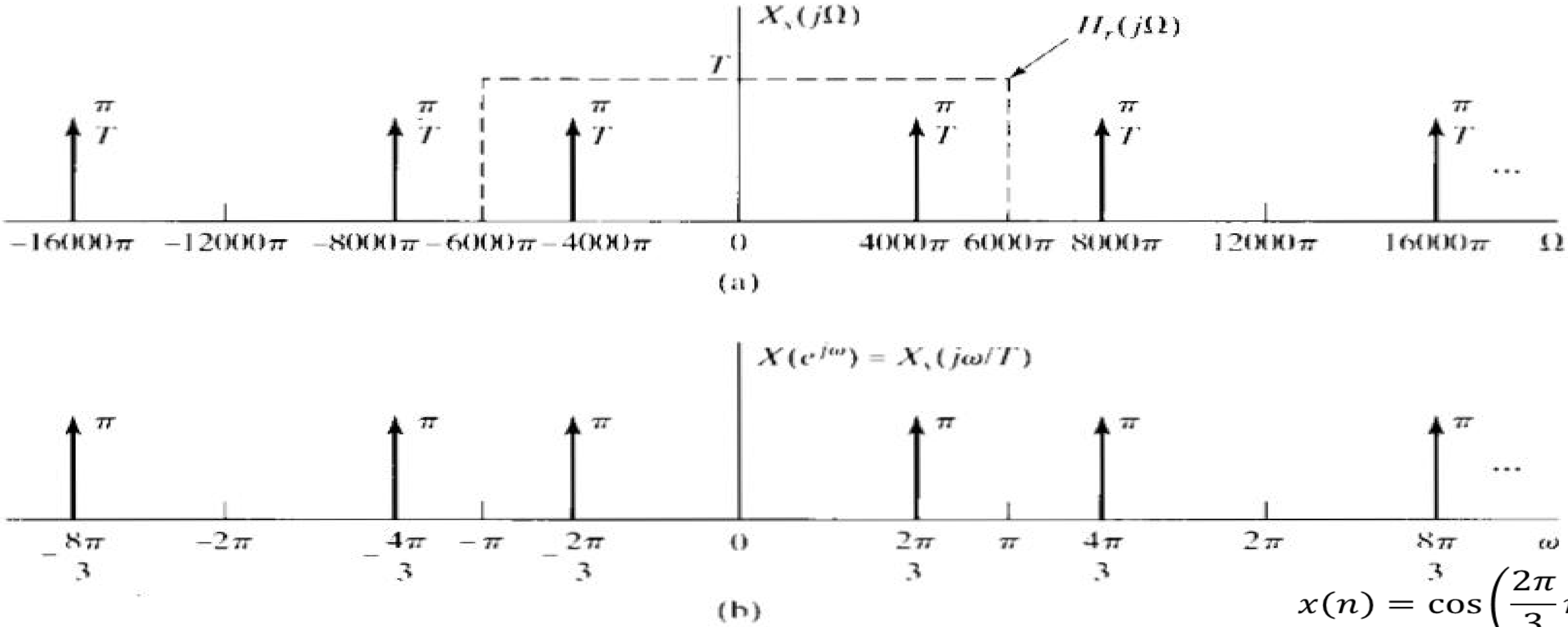


$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_c(t) = \cos(16000\pi t)$$

例题2 混叠采样

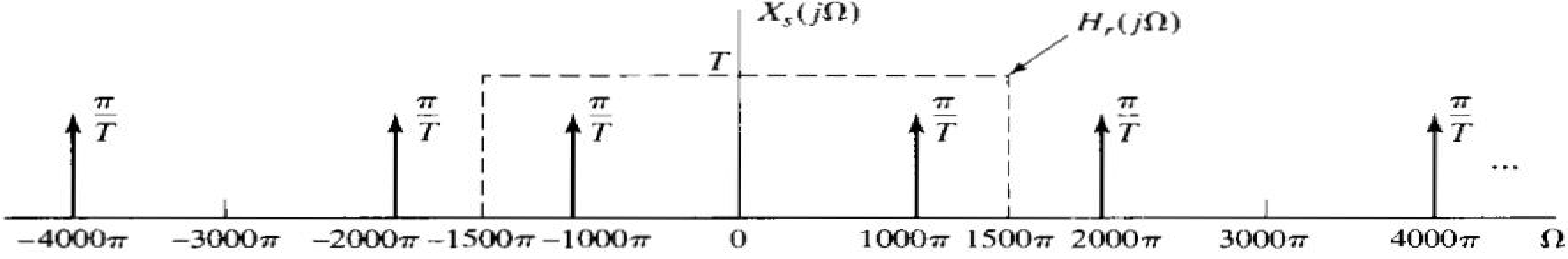


$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

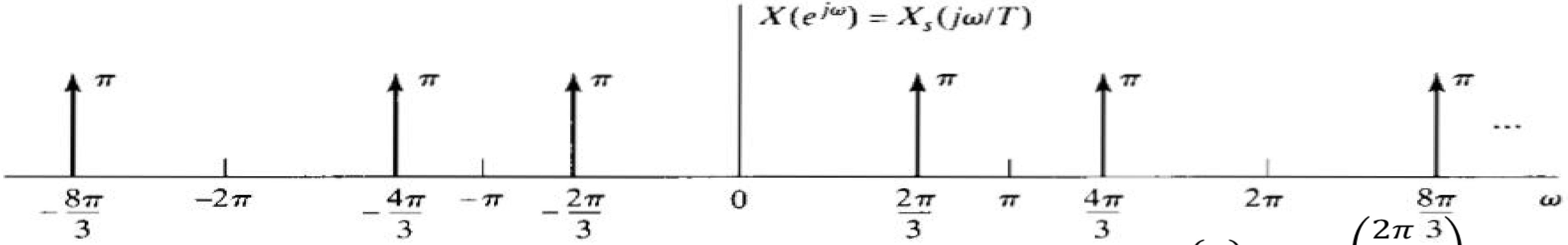
$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

例题3 混叠采样

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$
$$T = \frac{1}{1500}$$
$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$



(a)

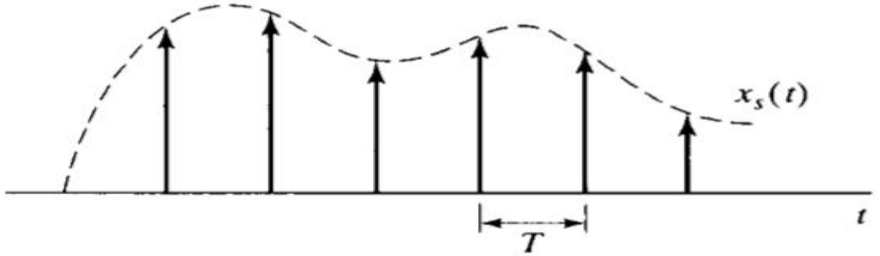


(b)

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

3.1.1 理想周期采样



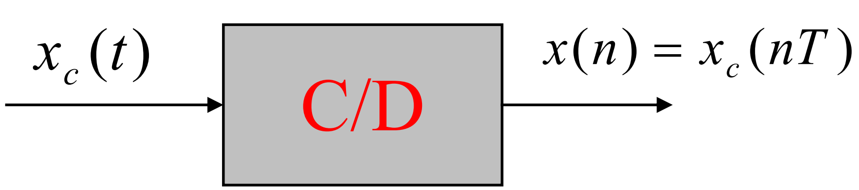
- 典型的周期采样为冲激脉冲采样，亦称理想采样：

$$x_s(t)=x_c(t)*s(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

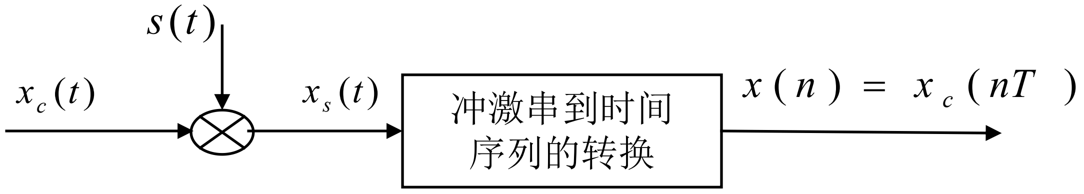
$$s(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

- 物理模型　　　　数学模型

$$x(n)=x_c(nT)$$



A/D器件是理想C / D转换器的工程近似。



调制器+序列的转换

xc(nT)是连续冲激串的冲激面积，它除了在整倍数T时刻以外都为零，包含有物理时间的概念；

x(n)是以整数变量n给出的，引入了时间归一化，x(n)没有任何采样率的信息。

3.1.2、采样的频域表示

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

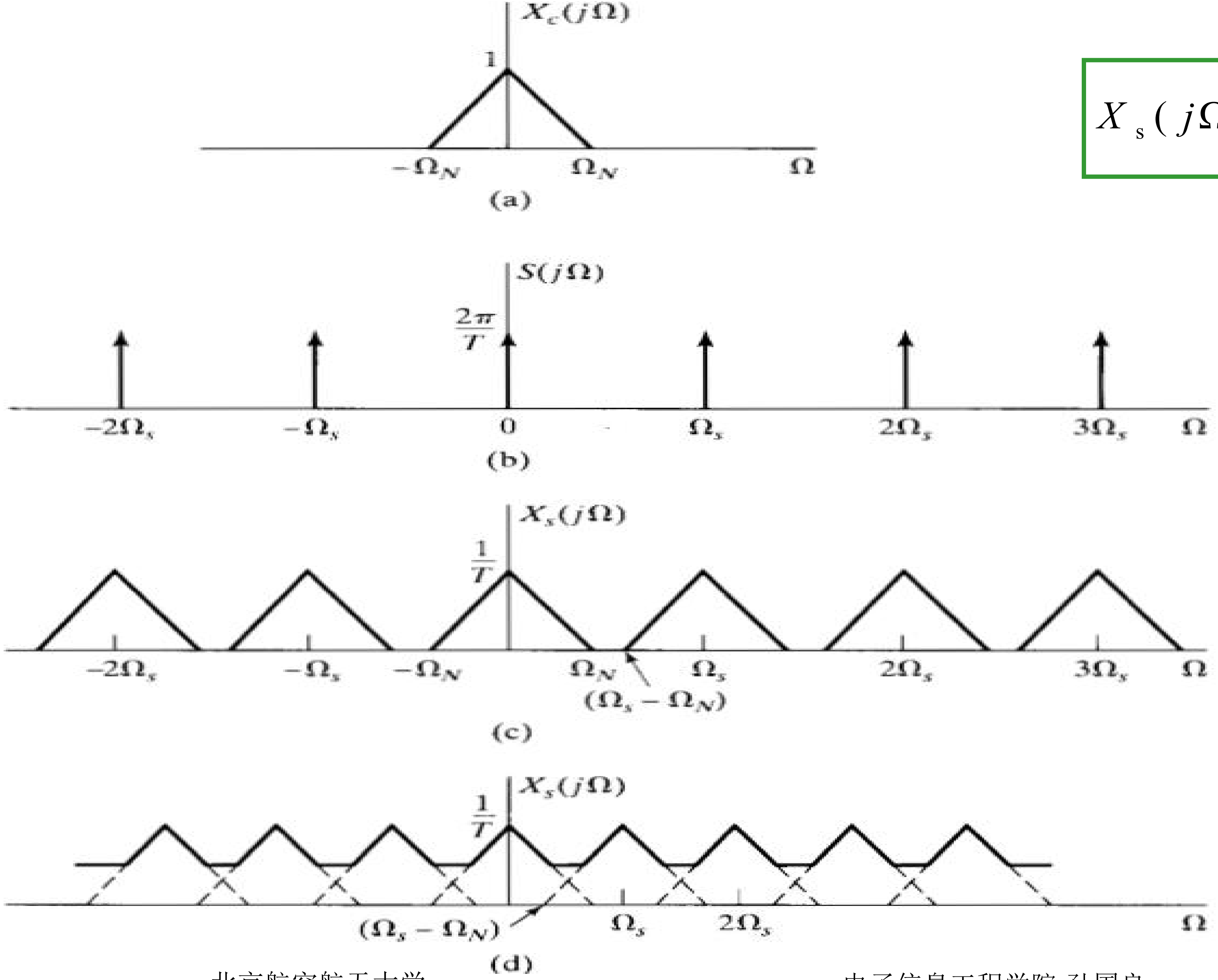
$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - n\Omega_0)$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = 1/T$$

$$\boxed{\begin{aligned} Xs(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} Xc(\Omega) * S(\Omega) \\ &= \frac{1}{T} Xc(\Omega) * \sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - n\Omega_0) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} Xc(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned}}$$



$$\boxed{X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_c(j\Omega-jk\Omega_s)}$$

采样后信号傅里叶变换是由被采样信号的傅里叶变换按整数倍的采样频率移位叠加起来得到，即周期性延拓。

x(n)频谱与x(t)频谱的关系

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)] e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\Omega T)n}$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)}$$

$$X(j\omega)\big|_{\omega=\Omega T} = X_s(j\Omega)$$

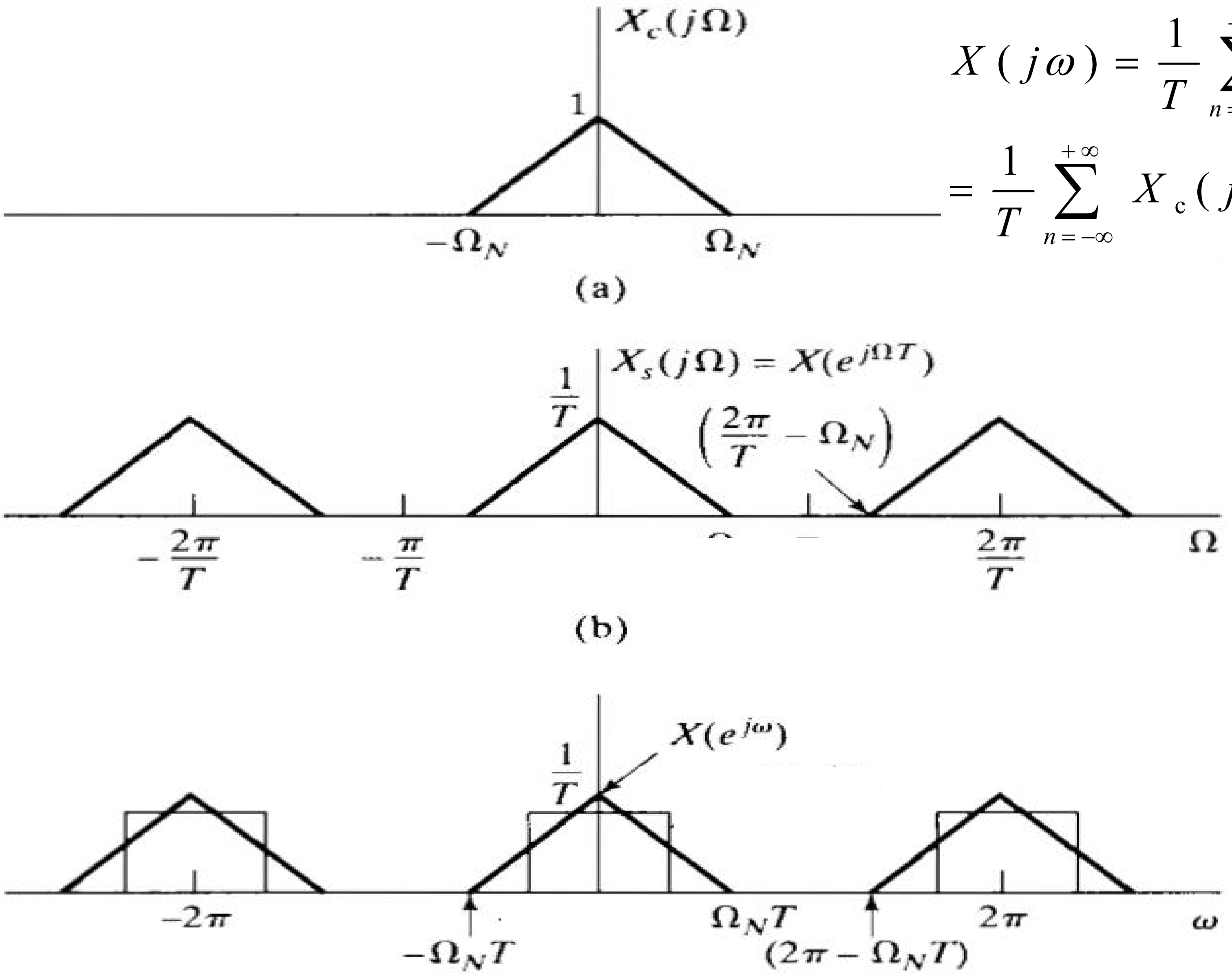
$$X(j\omega) = X_s(j\Omega)\big|_{\Omega=\omega/T}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})\big|_{\Omega=\omega/T}$$

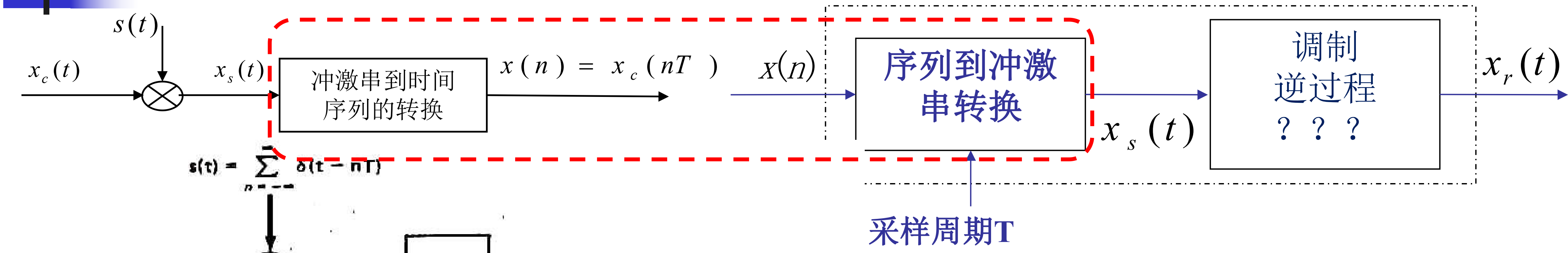
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{(\omega - 2k\pi)}{T})$$

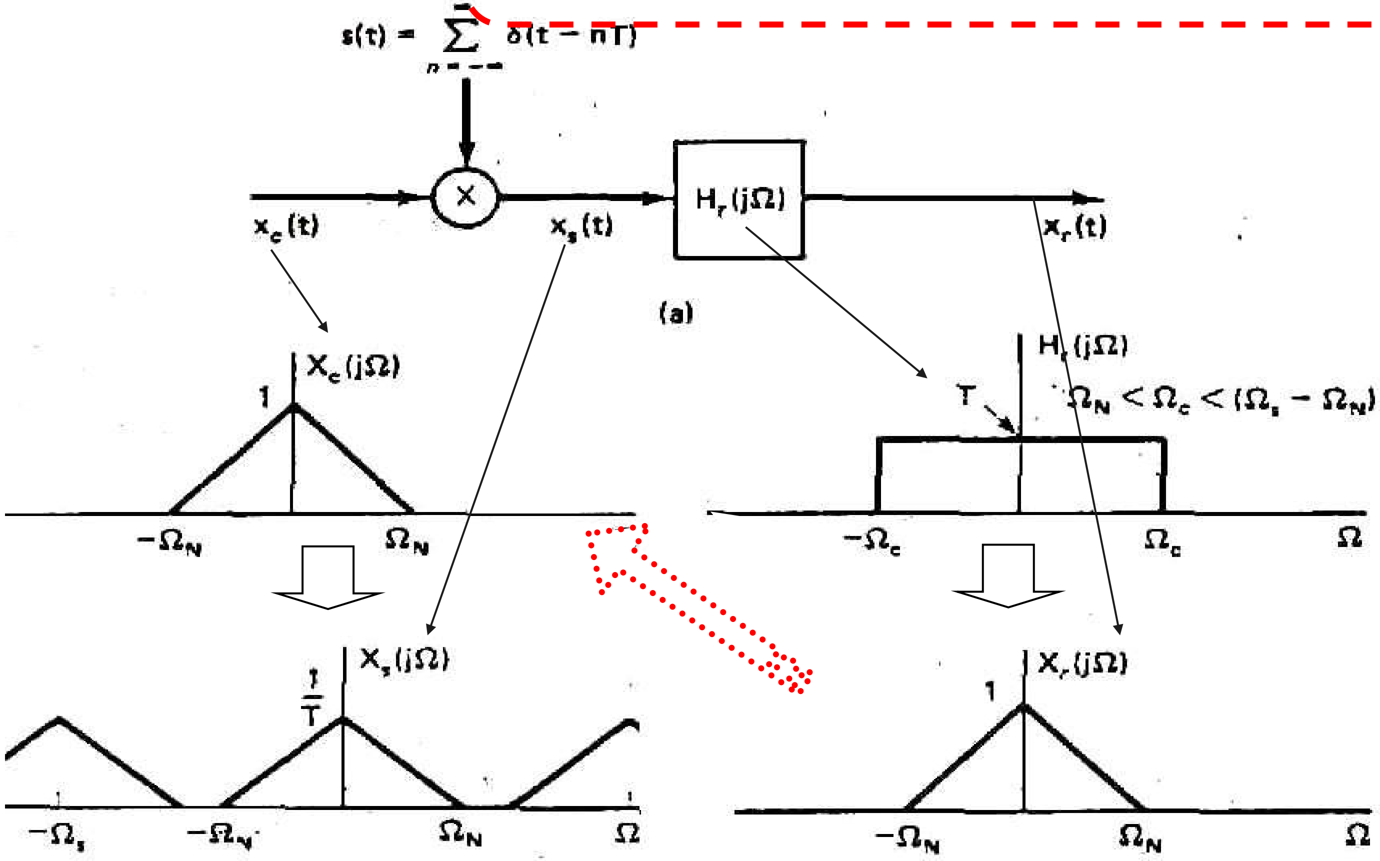
$$X(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_c(j\Omega-j\frac{2\pi k}{T})|_{\Omega=\omega/T}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_c(j\frac{(\omega-2k\pi)}{T})$$

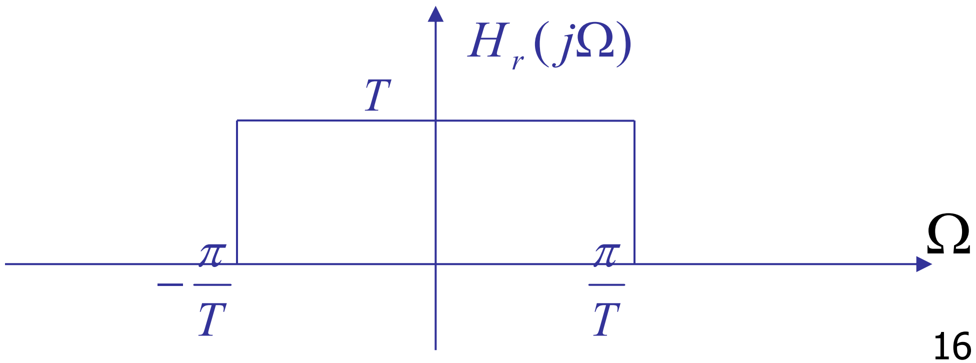


3.1.3 信号重构

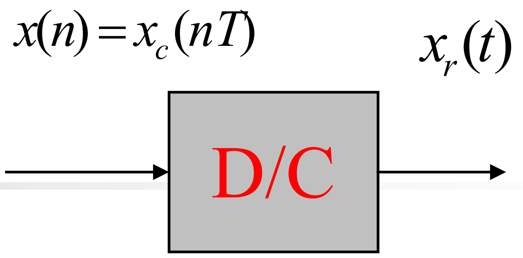


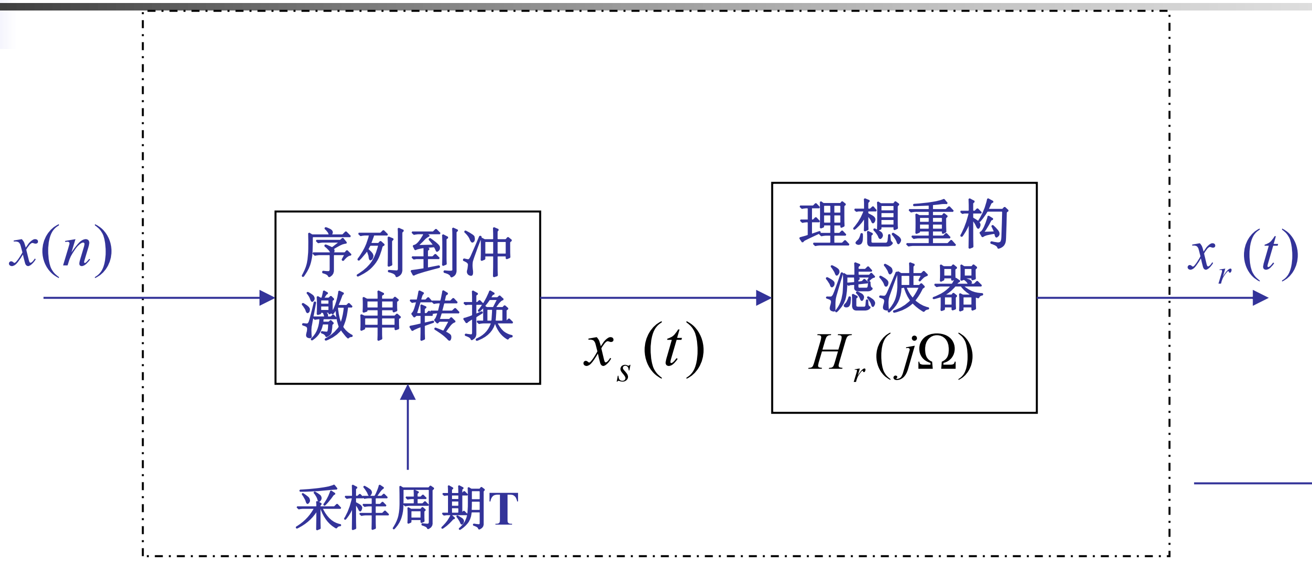


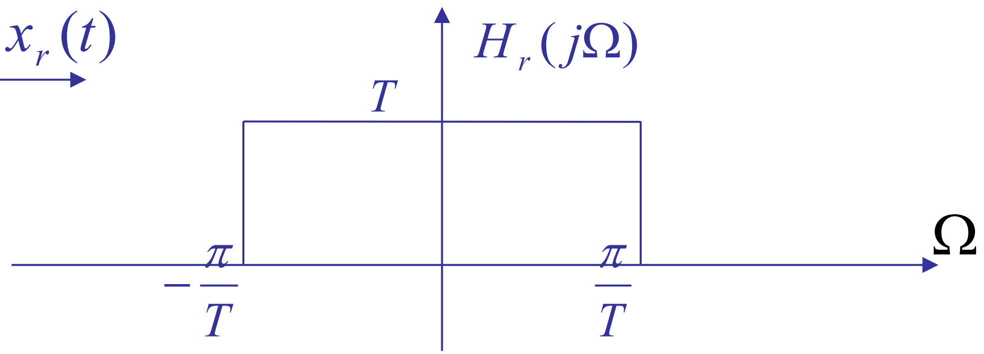
- 采样的第二步和重构的第一步湮灭合并



信号的重构系统物理和数学模型

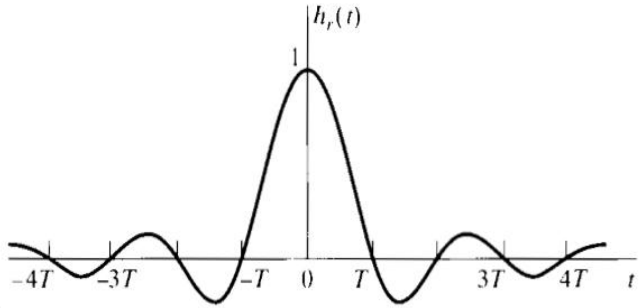






$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T} = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$

理想重构滤波器 $h_r(t) = \dfrac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}$



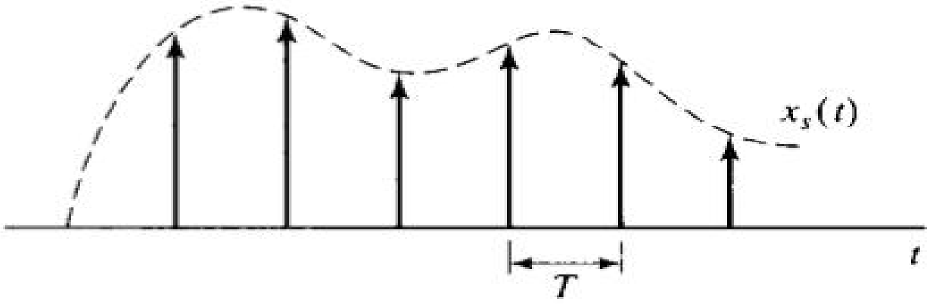
- 增益为T(用以补偿采样损耗)，截止频率为 Ω_c，通常选取 $\frac{\Omega_s}{2}$。

$$x_r(t) = x_s(t) \otimes h_r(t)$$

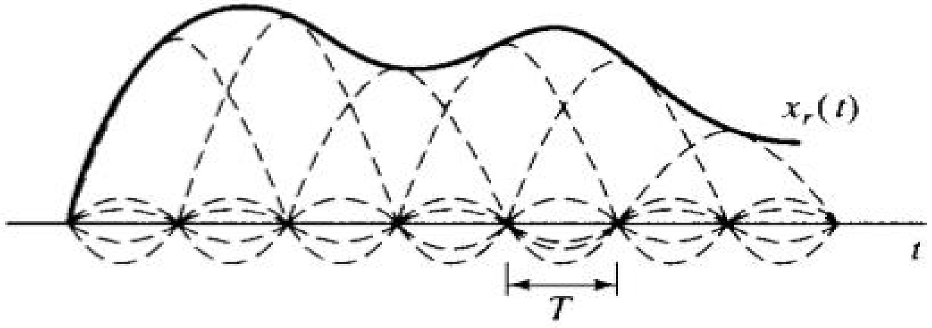
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t - nT) \otimes h_r(t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$



(b)



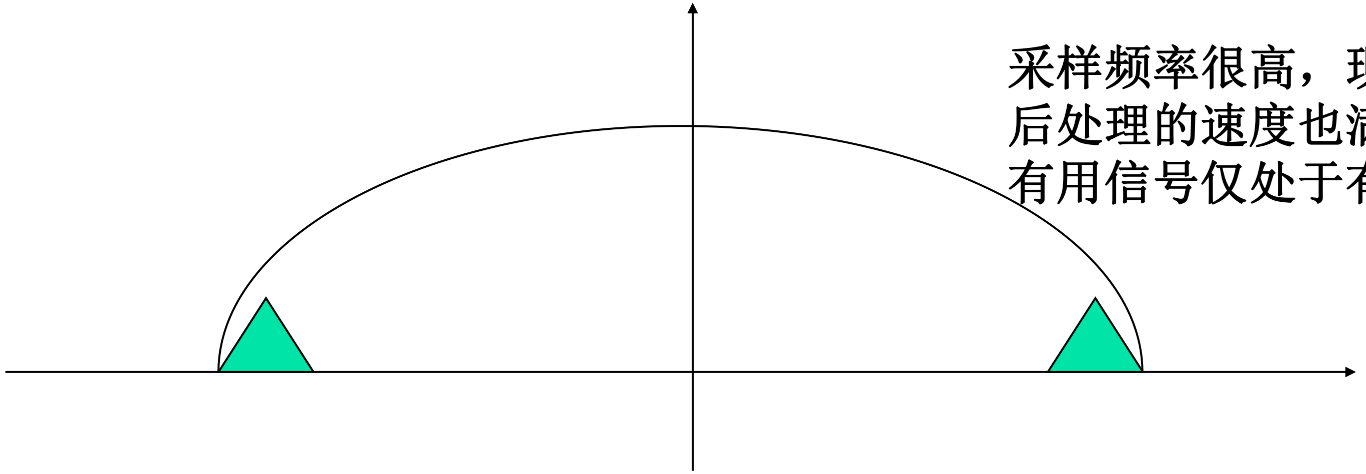
- ✓ 理想重构信号在各采样点上与原连续信号相同，并且与采样速率无关。
- ✓ 如果采样没有发生频谱混叠，则采样重构后的信号在采样点以外无失真；若发生混叠，则采样点之间的信号将发生失真。

奈奎斯特低通采样定理

- 若实信号$x_c(t)$是频段带限信号，$0\sim f_h$，则该信号的带宽为$B=f_h$。
- 对该信号以采样率$f_s>=2B$的速率进行采样，则采样后的离散时间序列x(n)可以无失真的恢复原始信号。

奈氏带通采样定理

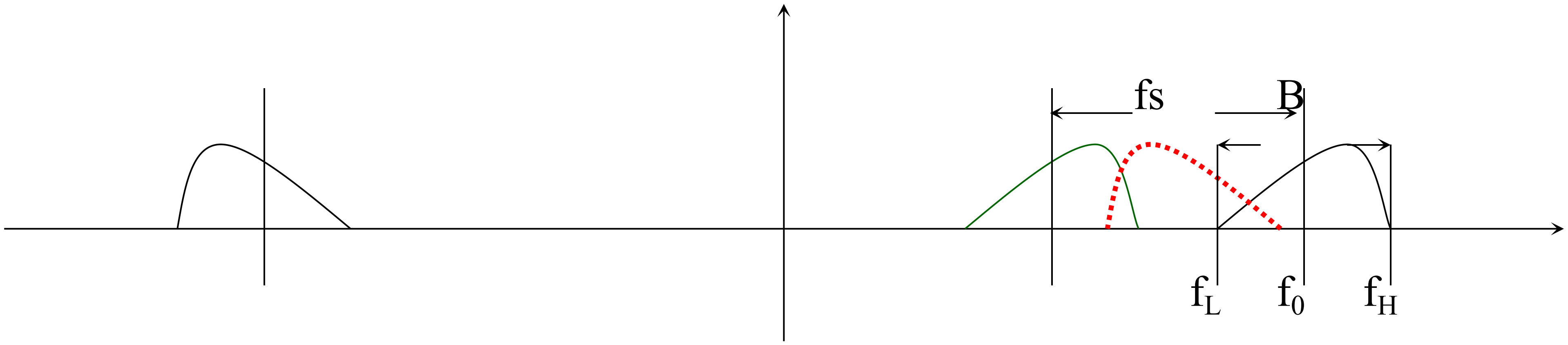
- 奈氏低通采样定理只讨论了基带信号的采样问题
- 如果信号的频率分布在某一有限的频带上时，那么该如何对这样的带限信号进行采样呢?



采样频率很高，现实中很难实现；
后处理的速度也满足不了要求；
有用信号仅处于有限频段，资源浪费

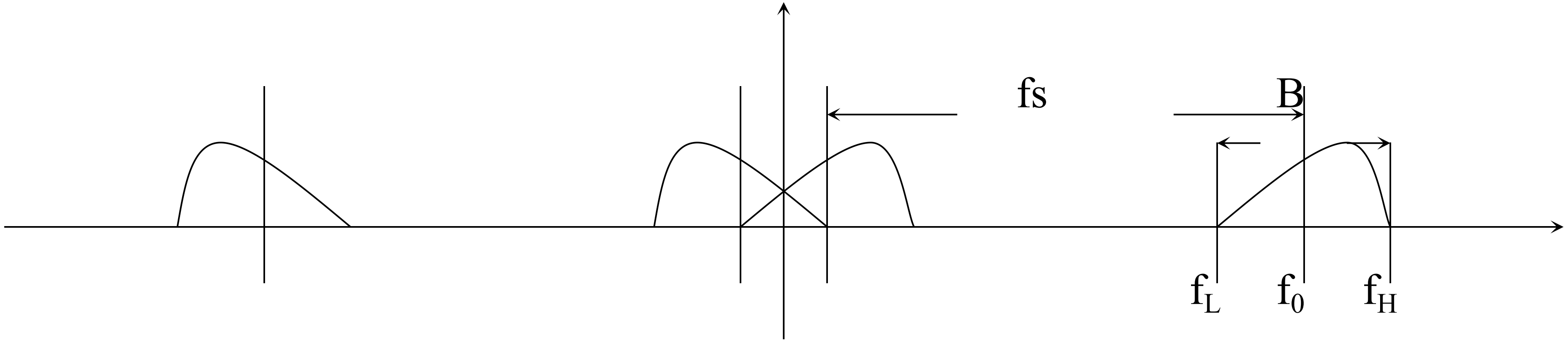
讨论：

- **1、当$f_s < 2B$时**

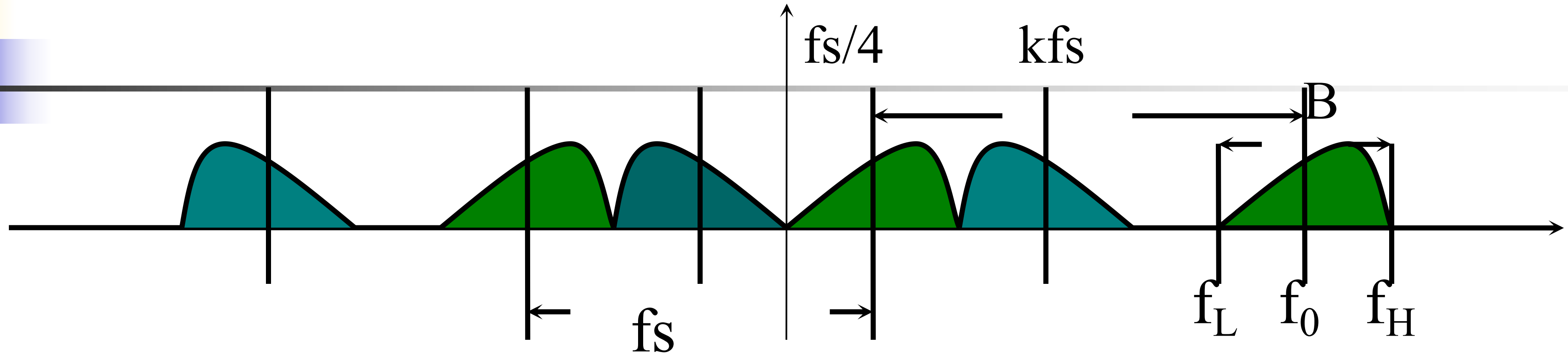


信号频谱必然混叠，无法恢复原始信号

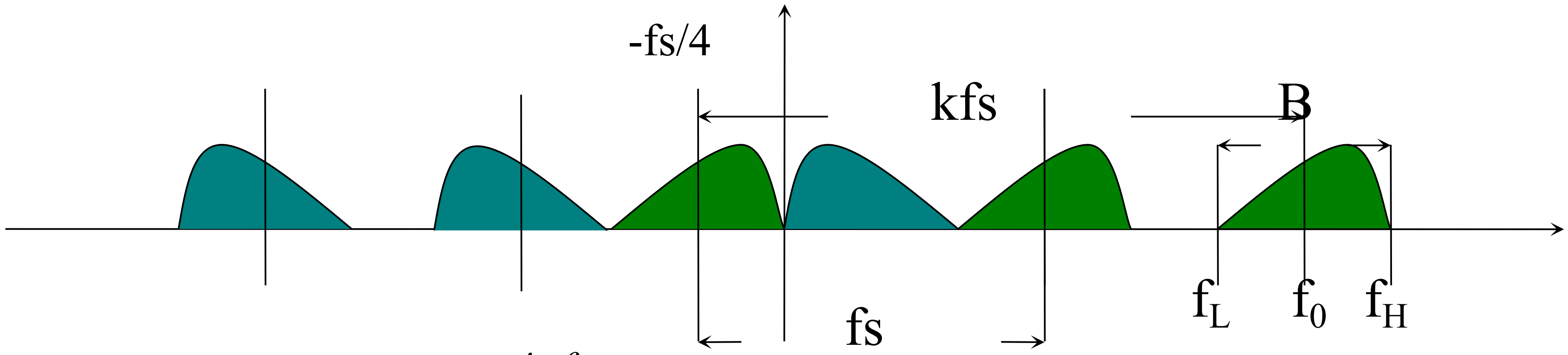
- **2、当$f_s \geq 2B$时**



1、不一定能够由采样后的信号恢复原始信号
2、实信号频谱区间是正负对称的，从而其搬移之后的频谱亦是正负对称的，要使其频谱不发生混叠，只能符合以下的两种情况



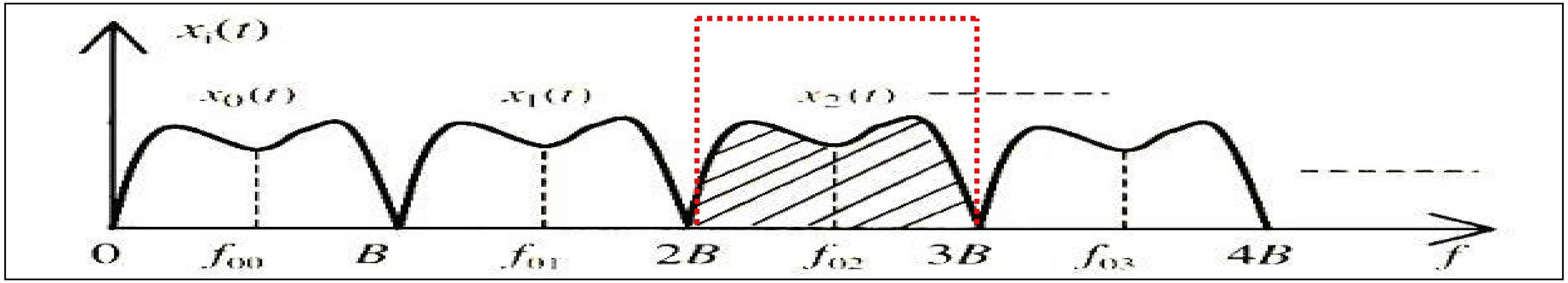
a) $\dfrac{f_s}{4} = f_0 - k * f_s \leftrightarrow f_s = \dfrac{4f_0}{4k+1}$



b) $\dfrac{f_s}{4} = f_0 + k * f_s \leftrightarrow f_s = \dfrac{4f_0}{4k-1}$

奈氏带通采样定理（欠采样）

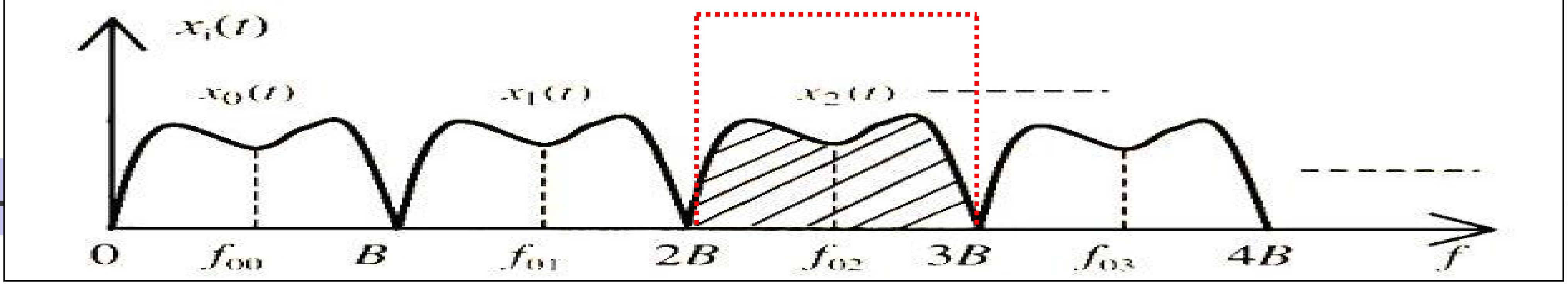
- 当 $f_s \geq 2B$ 时，若采样率满足 $f_s = \frac{4f_0}{2n+1}$（n=0,1,2…）
- 则可以无失真的从采样信号中恢复原始信号
  - 特例1：当 $f_0 = f_H/2$，$B = f_H$，n=0，f_s 即为奈氏低通采样速率。



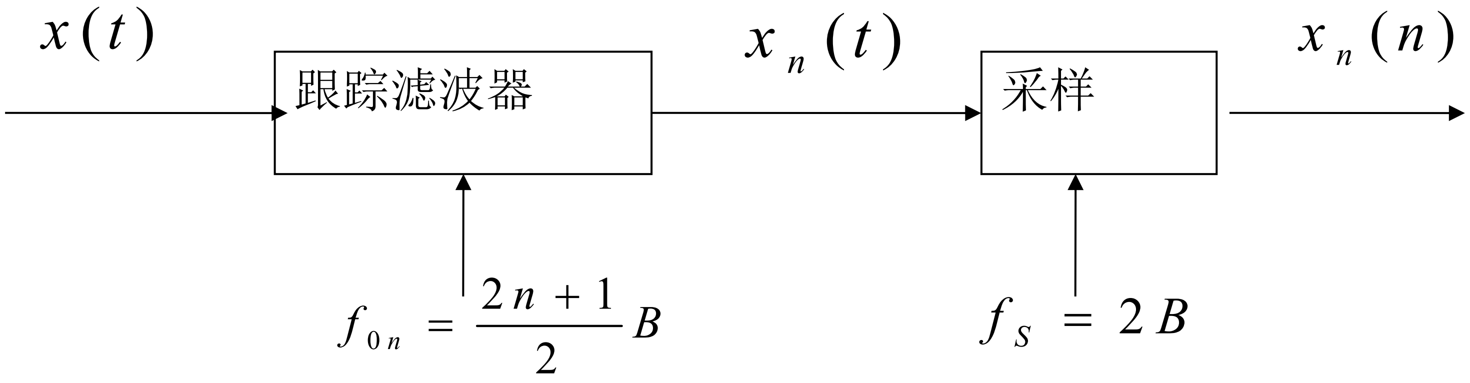
  - 特例2：

$$f_s = \frac{4f_0}{2n+1} = 2B \Rightarrow f_0 = \frac{(2n+1)B}{2}$$

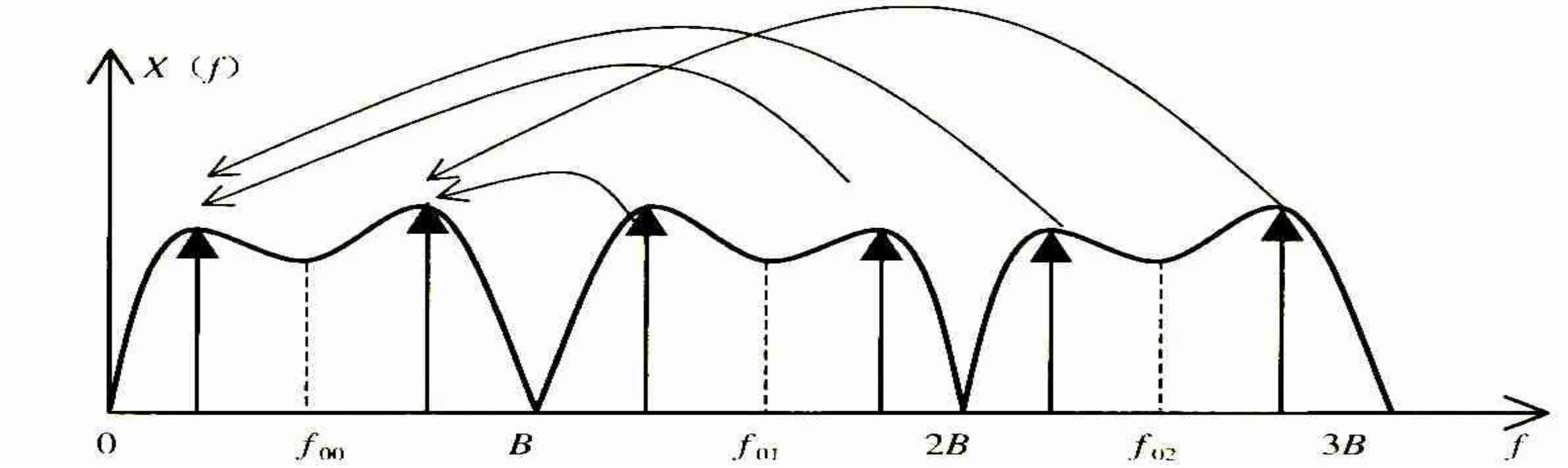
若要用最低采样速率即两倍带宽对信号进行采样，其信号中心频率必须满足信号最高(或最低)频率是带宽整数倍。



- 任何一个中心频率为 f_{on} (n=0，1，2，3，…),带宽为B的带通信号均可以用同样的采样频率 $f_s = 2B$ 对信号进行采样，均能准确地表示或者重新恢复出位于不同频段(中心频率不同)的原信号。
  - 前提：只允许在其中的一个频带上存在信号，而不允许在不同的频带上同时存在信号。



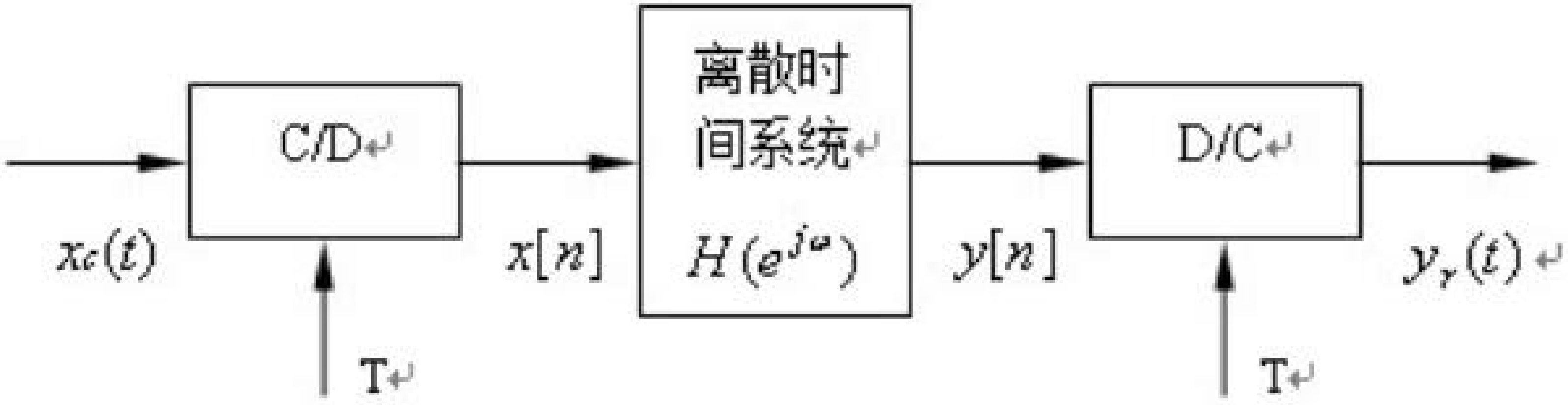
  - 如果抗混叠滤波器滤波器理想的话，采用同一采样速率就能实现对全频域信号进行数字化，然后用软件方法进行解调分析，这正是软件无线电的根本出发点。



- 带通采样把位于不同频带的信号都用位于**(0，B)**上相同的基带信号来表示，但是：
  - 奇数通带上的高频分量对应基带上的低频分量，奇数通带上的低频分量对应基带上的高频。
  - 偶数频带与采样后的数字基带谱是高、低频率分量一一对应的。

连续信号离散化处理

理想周期采样与重构
连续信号离散处理
抽取与内插
离散处理的工程问题

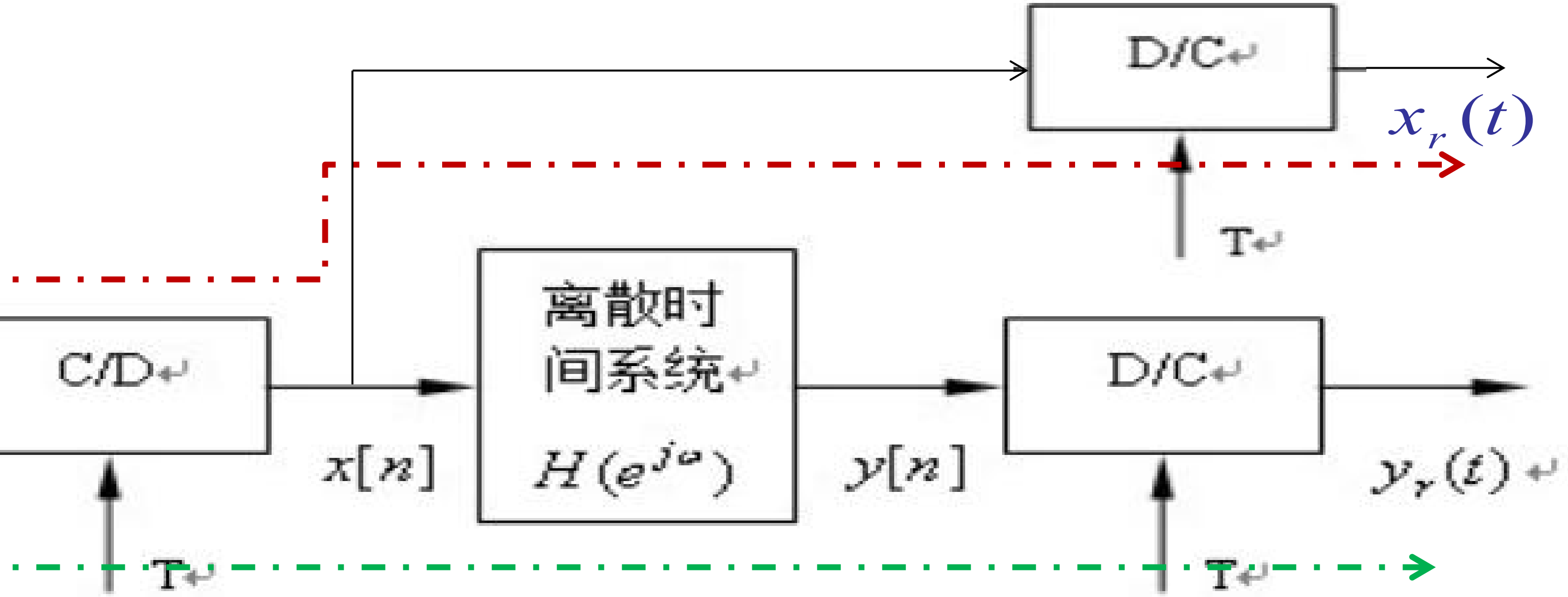


- 离散系统大都用来处理连续时间信号
- 离散化处理可否等效为模拟LTI？条件是什么？

离散与连续LTI系统的等效关系

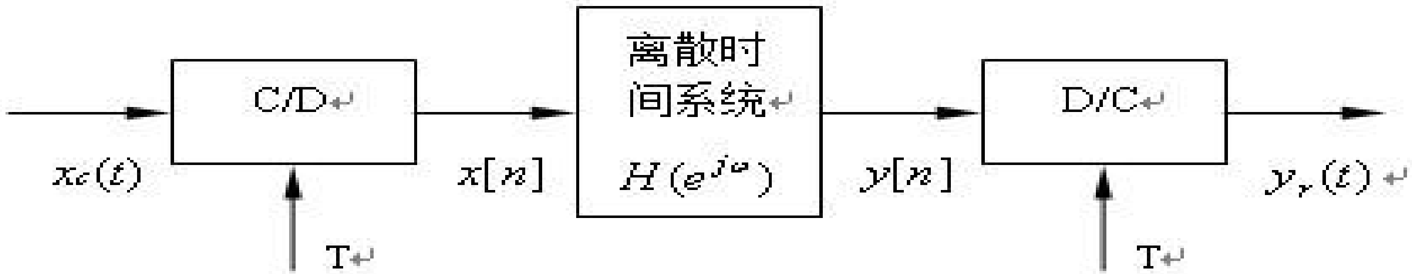
- 离散处理与模拟LTI的等效

$$X_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)X_s(j\Omega)=H_r(j\Omega)X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}$$



- 信号重构
- 离散处理

$$Y_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega)=H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}$$



$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T}$$

- 假设离散时间系统是LTI $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})$$

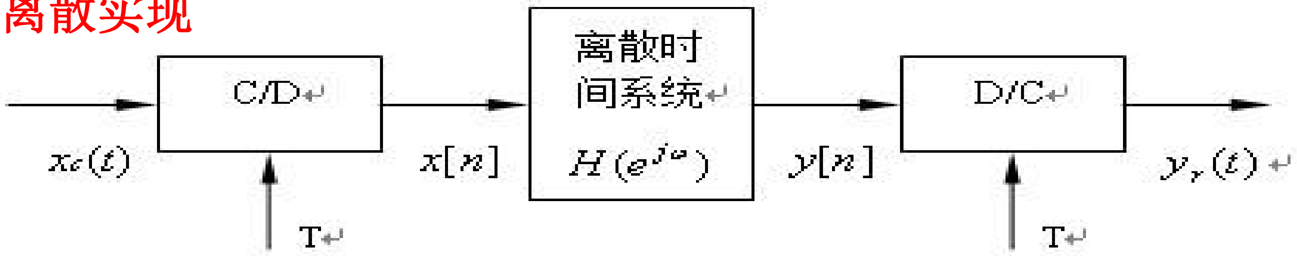
$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

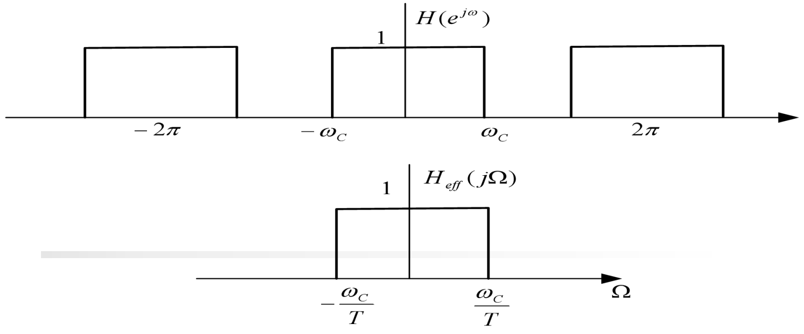
- 输入是带限的，
- 采样率满足奈奎斯特定理
- 在C/D中即使有混叠发生，只要H(ejw)不通过这些混叠的分量，结论仍正确

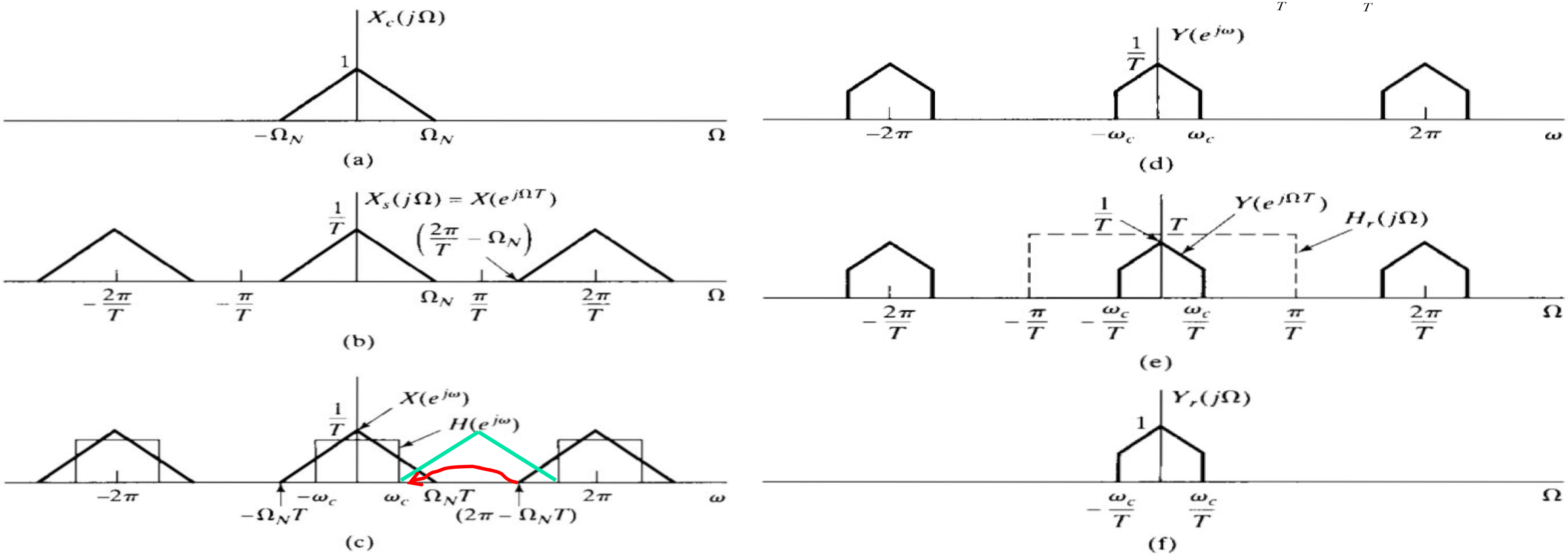
$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega)$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

连续低通滤波的离散实现







$$\Omega_N T < \omega_c \qquad (2\pi-\Omega_N T) > \Omega_N T$$

$$(2\pi-\Omega_N T) > \omega_c$$

1、带限输入，并且满足采样定理整个系统将表现为一个线性时不变连续时间系统

2、截止频率既依赖wc，又与T有关。当利用固定的离散时间低通滤波器而改变采样周期T时，就能实现具有可变截止频率的连续时间低通滤波器

微分器的离散实现与等效

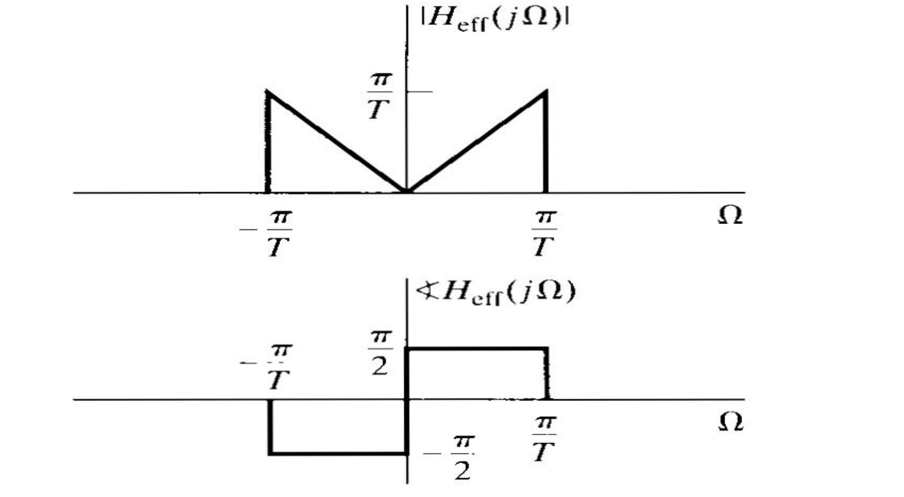
$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)], \qquad H_c(j\Omega) = j\Omega.$$

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases}$$

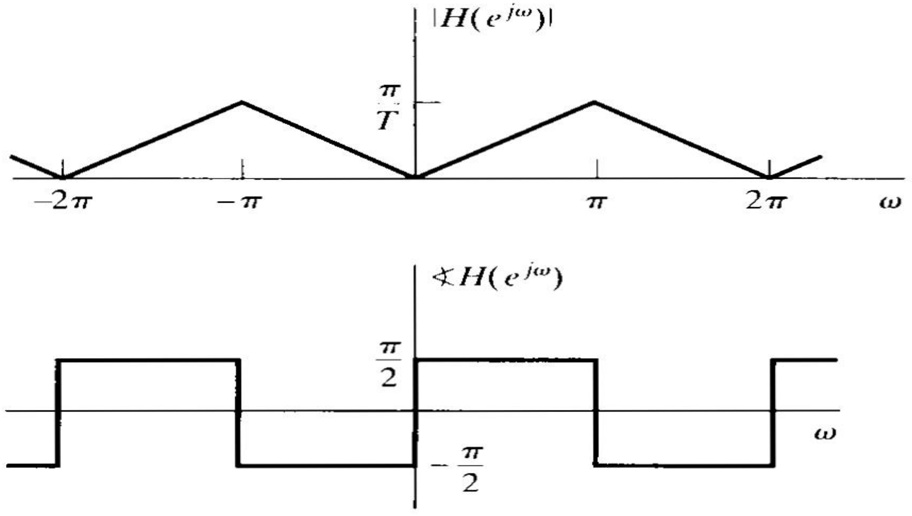
$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \qquad |\omega| < \pi,$$

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \dfrac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases}$$

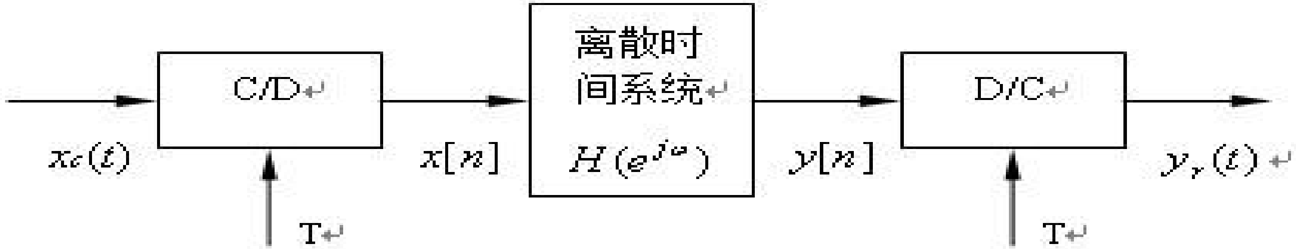


(a)



(b)

余弦信号经过微分系统



$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) \text{ with } \Omega_0 < \pi / T.$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) \quad \omega_0 = \Omega_0 T < \pi$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \qquad |\omega| < \pi,$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$= \frac{j\omega}{T}[\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]$$

$$y[n] = -\frac{\omega_0}{T}\sin(\omega_0 n)$$

$$= \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega + \omega_0), \qquad |\omega| \leq \pi.$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = TY(e^{j\Omega T})$$

$$= T\left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T - \Omega_0 T) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T + \Omega_0 T)\right]$$

$$= T\left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\frac{1}{T}\delta(\Omega - \Omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\frac{1}{T}\delta(\Omega + \Omega_0)\right]$$

$$= j\Omega_0\pi\delta(\Omega - \Omega_0) - j\Omega_0\pi\delta(\Omega + \Omega_0).$$

$$y_r(t) = j\Omega_0\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} - j\Omega_0\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}$$

$$= -\Omega_0\sin(\Omega_0 t),$$

余弦通过差分系统

$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n]) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos\omega + j\sin\omega$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = 2 - 2\cos\omega$$

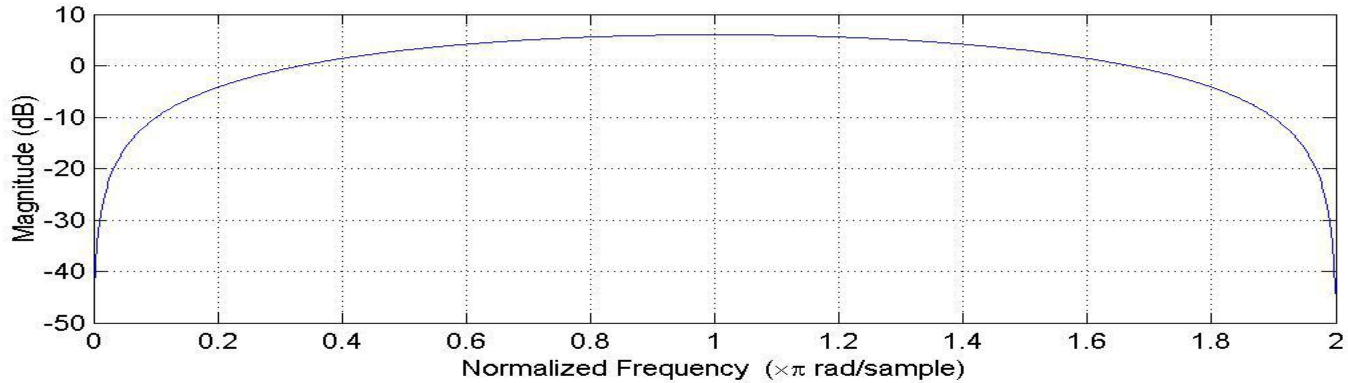
$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c\tan\frac{\omega}{2})$$

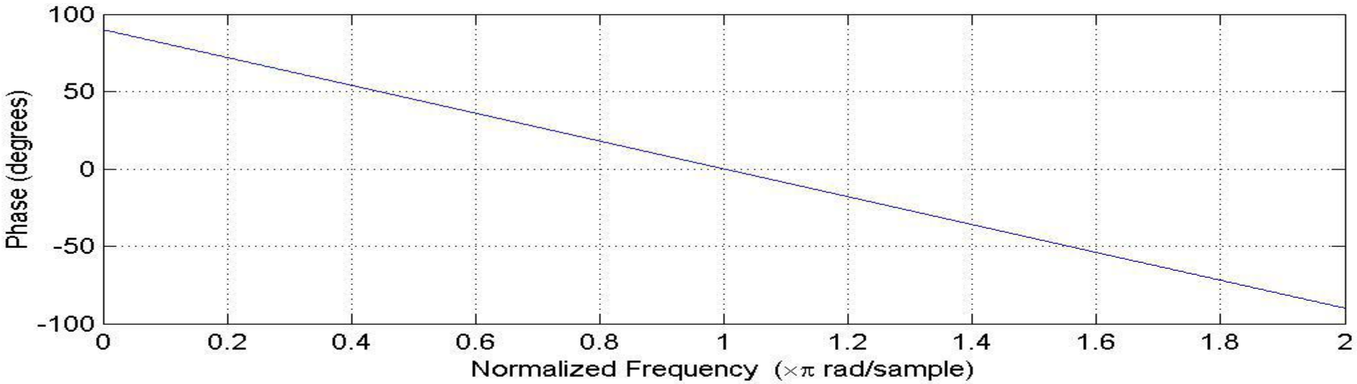
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

$$y[n]$$

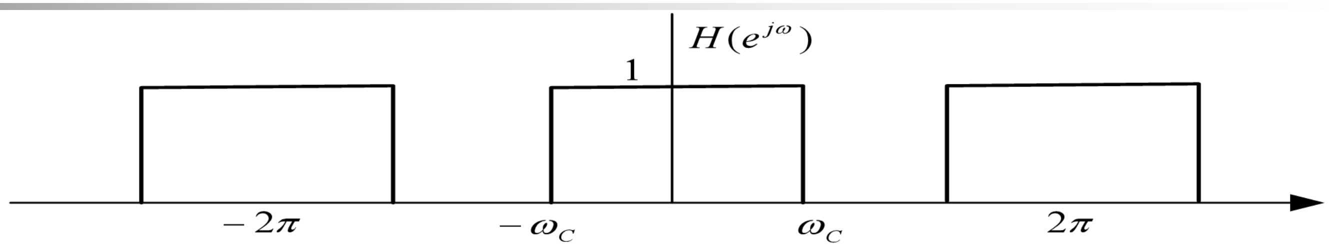
$$= \cos(\omega_0 n) - \cos(\omega_0(n-1))$$

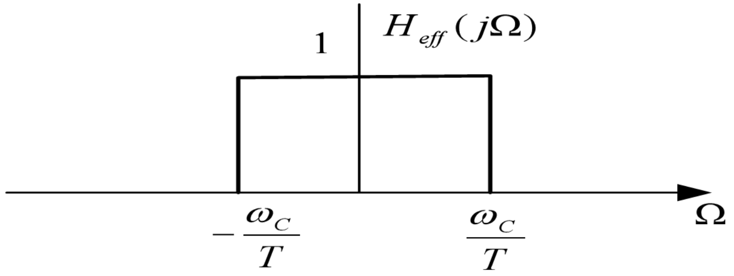
$$= -2\sin\frac{\omega_0}{2}\sin(\omega_0 n - \frac{\omega_0}{2})$$





冲激响应不变法
设计数字低通滤波器的由来





$$\Omega_c = \omega_c / T < \pi / T$$

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \le \Omega_c. \end{cases}$$

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}.$$

$$h[n] = T h_c(nT) = T\frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

冲激响应不变法

- 目的：
  - 使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟滤波器单位冲激响应的采样，即：

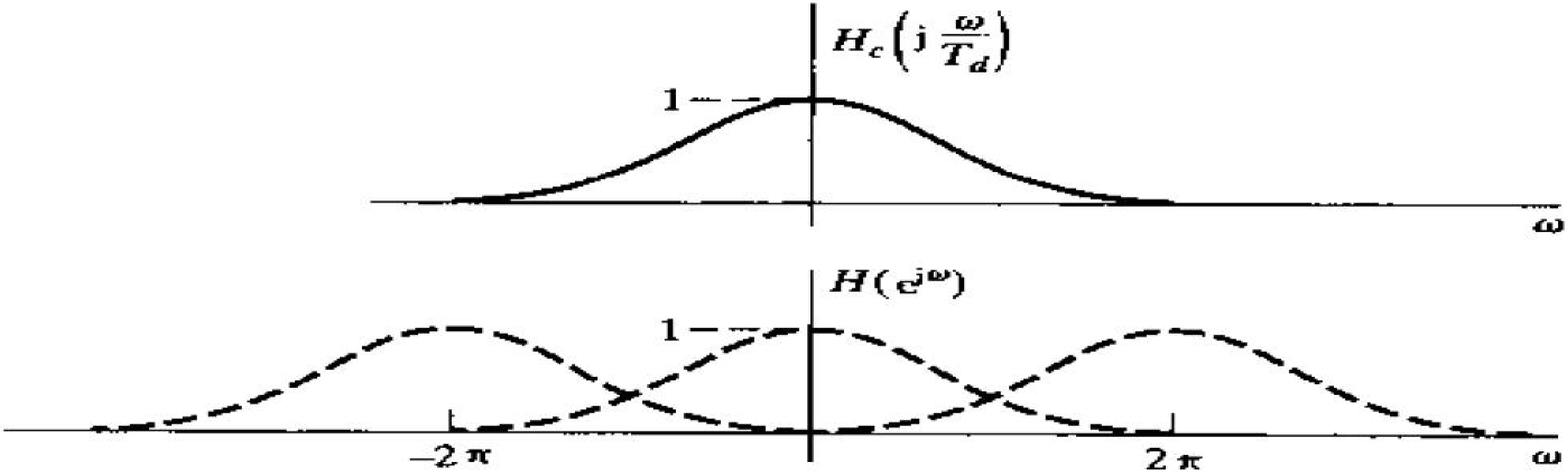
$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$$

- 利用上述关系找到模拟滤波器对应的离散时间系统函数

$$H_a(s) -> H(z)$$

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - j\frac{2\pi k}{T})$$

冲激响应不变法的混叠现象



1、提高采样频率将减小混叠

2、阶跃响应不变法也可以减小混叠

作业

- 4.2
- 4.3
- 4.4
- 4.5

- 4.8
- 4.20

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn