

Some

Author: Pannenets.F

Date: December 12, 2020

Je reviendrai et je serai des millions. «Spartacus»

Chapter 1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

绪论

Contents

- 1、课程教材
- 2、学习方法
- 3、考核方式
- 4、教辅答疑

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



本节内容



一

数字信号理背景知识



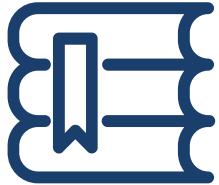
二

课程内容及脉络



三

数字处理应用实例



■课程教材

- 《离散时间信号处理》 奥本海姆
- 《数字信号处理教程》 程佩清

课程教材

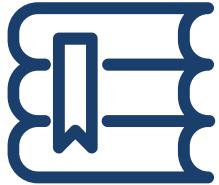
学习方法

考核方式

教辅答疑

■学习方法

- 数学抽象转化为物理概念
- 从工程角度思考理论问题



■考核方式

■过程考核: 20-30%

■期末考试: 70-80%

■教辅答疑

■教辅: 李铮、王艳萍

■地点: 新主楼F518

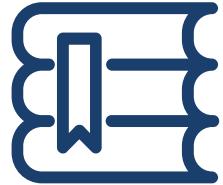
课程教材

学习方法

考核方式

教辅答疑

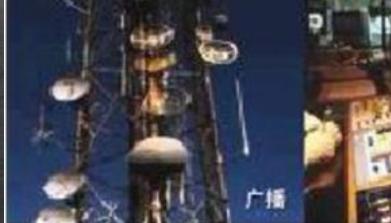
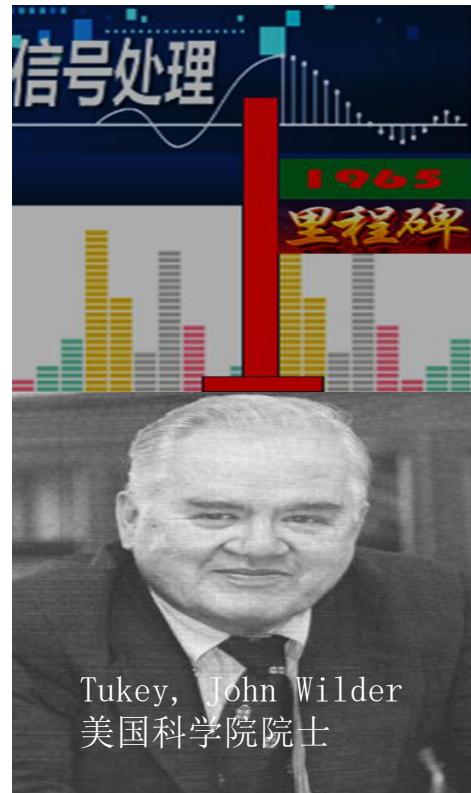
数字处理应用？？？



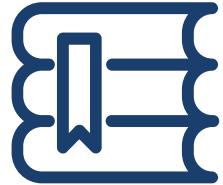
背景知识

课程内容

应用示例



关于信号



- 信号定义及作用?
 - 探测、揭示、控制
- 信号的分类?
 - 四大类
 - 两大类
 - 课程名称和教材名称? ? ?
- 信号处理的核心?
 - 表示、运算、变换
 - 滤波、压缩、特征提取



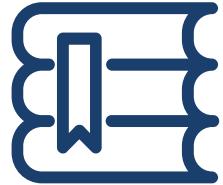
<http://forum.book.sina.com.cn/>

背景知识

课程内容

应用示例

数字处理的优点



- 精度极高
- 灵活性好
- 可靠性强
- 容易集成
- 时分复用
- 多维处理



背景知识

课程内容

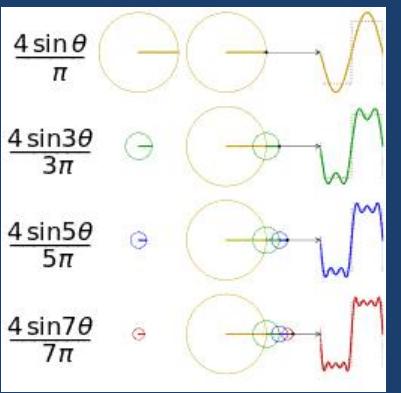
应用示例



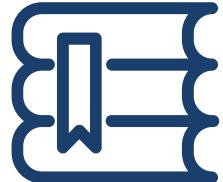
背景知识

课程内容

应用示例

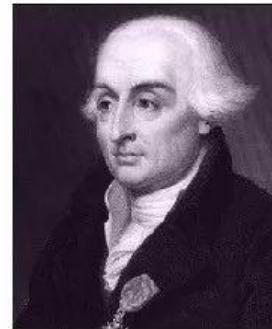


数字处理的发展

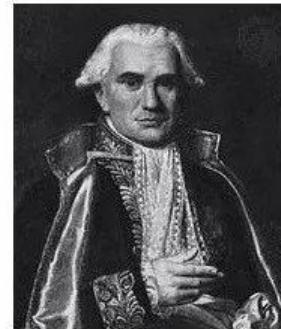


理论分析

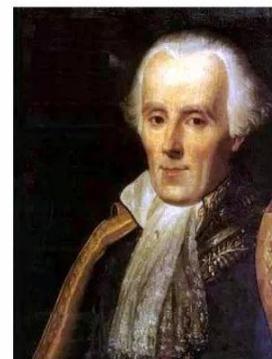
- 牛顿 1643~1727
- 拉格朗日 1736~1813
- 拉普拉斯 1749~1827
- 傅里叶 1768~1830



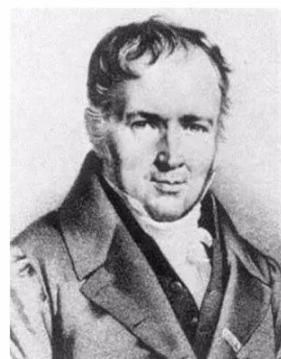
拉格朗日（左）



蒙日（右）



拉普拉斯（左）

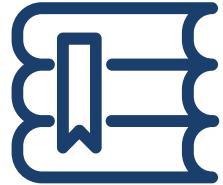


泊松（右）

工程实现（运算量）

- 库利-图基（计算数学）
- 桑德-图基

课 程 脉 络

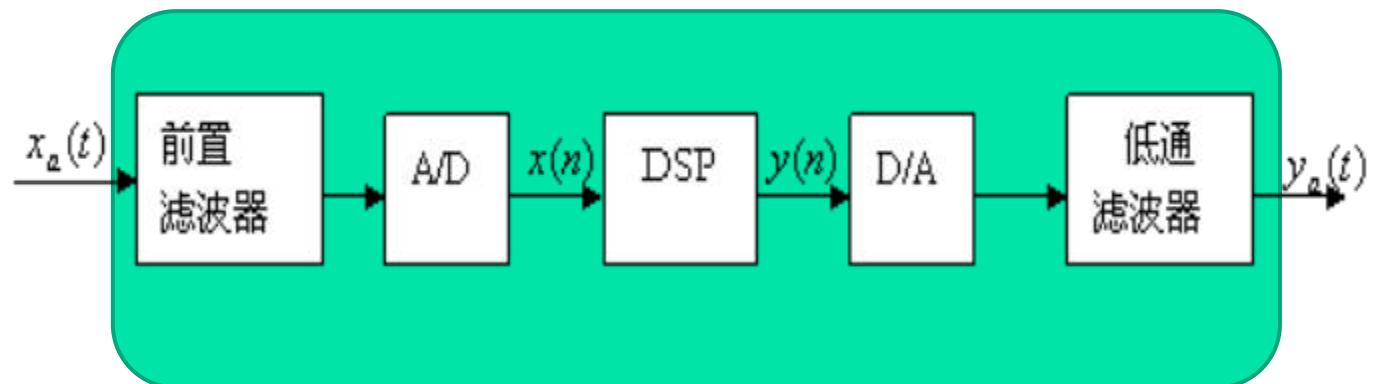


信号滤波, 谱分析

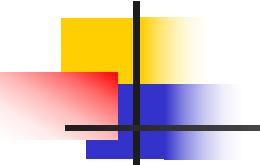
背景知识

课程内容

应用示例



工程用连续信号的离散处理结构



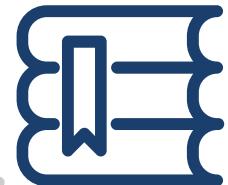
基础理论

- 第一章 离散信号与系统
 - 基本的离散时间序列
 - 离散时间系统概念、性质
 - 差分方程与离散时间系统
- 第二章 离散系统变换域分析
 - DTFT、Z变换
 - 系统行数和频率响应
 - LTI系统幅相特性分析
- 第三章 连续信号的离散处理
 - 信号采样和重构
 - 多率转换技术
 - 实际处理中需要注意的问题

工程设计

- 第四章 离散傅立叶变换及快速算法
 - 离散傅立叶变换
 - 快速算法 (FFT)
 - DFT用于系统实现及信号分析
- 第五章 数字滤波器设计
 - 系统结构
 - IIR数字滤波器设计 (时域和频域)
 - FIR数字滤波器设计 (时域和频域)

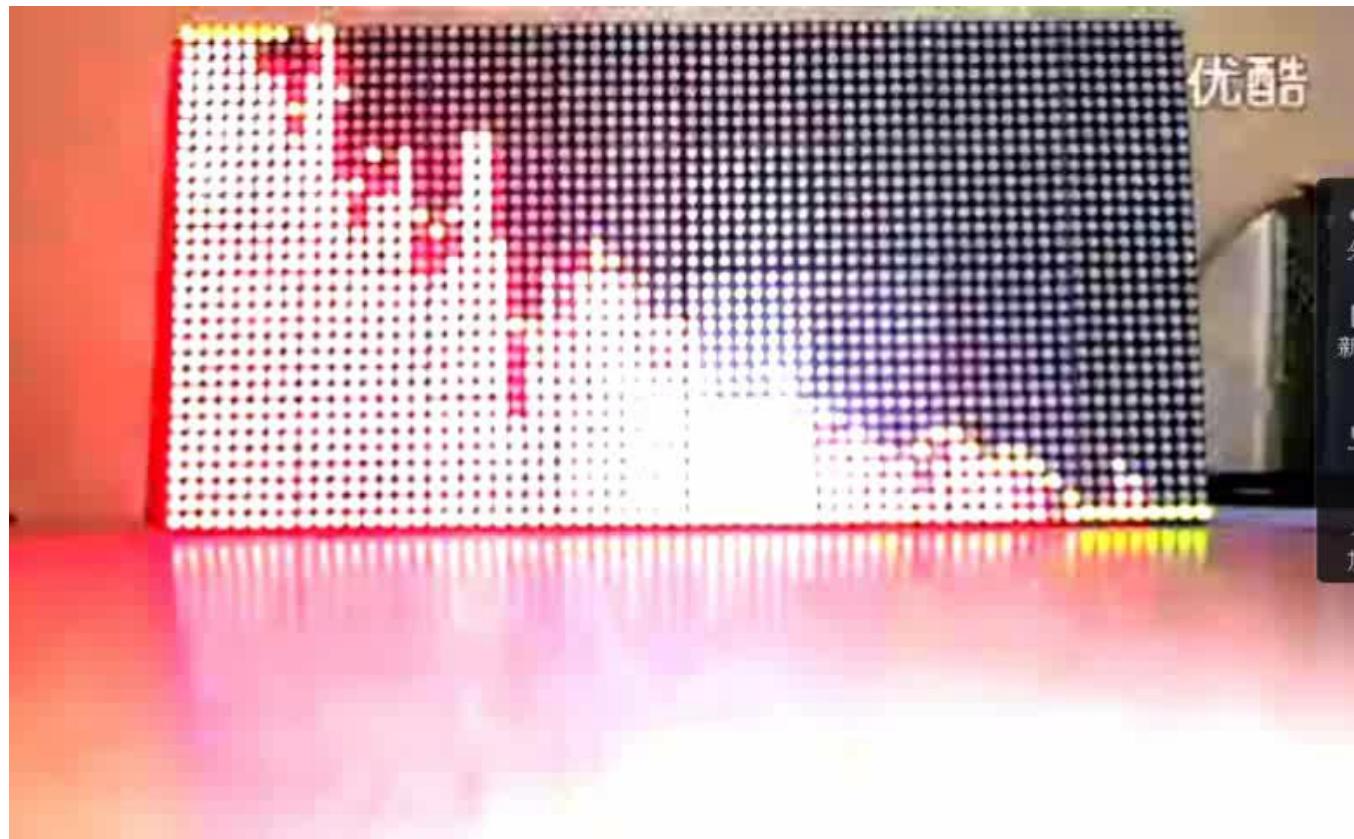
课 程 脉 络



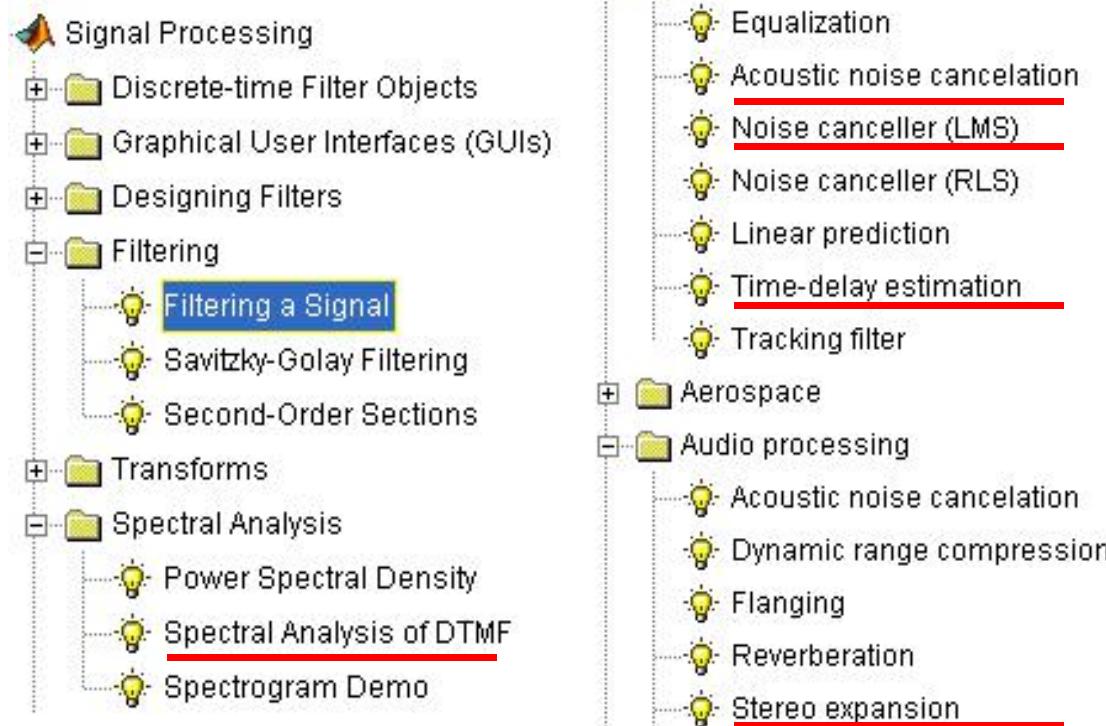
背景知识

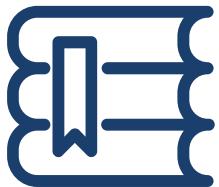
课程内容

应用示例

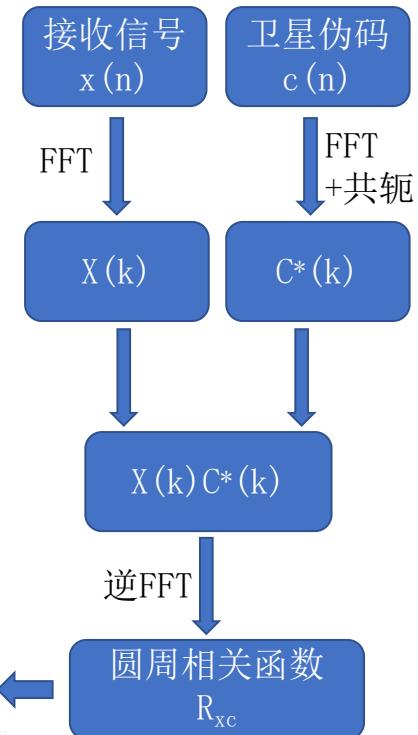
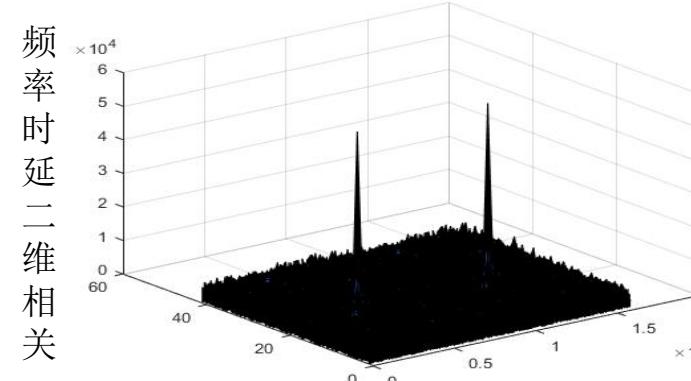
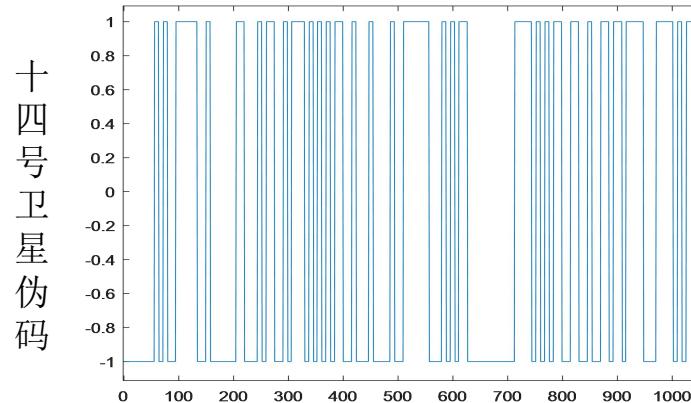
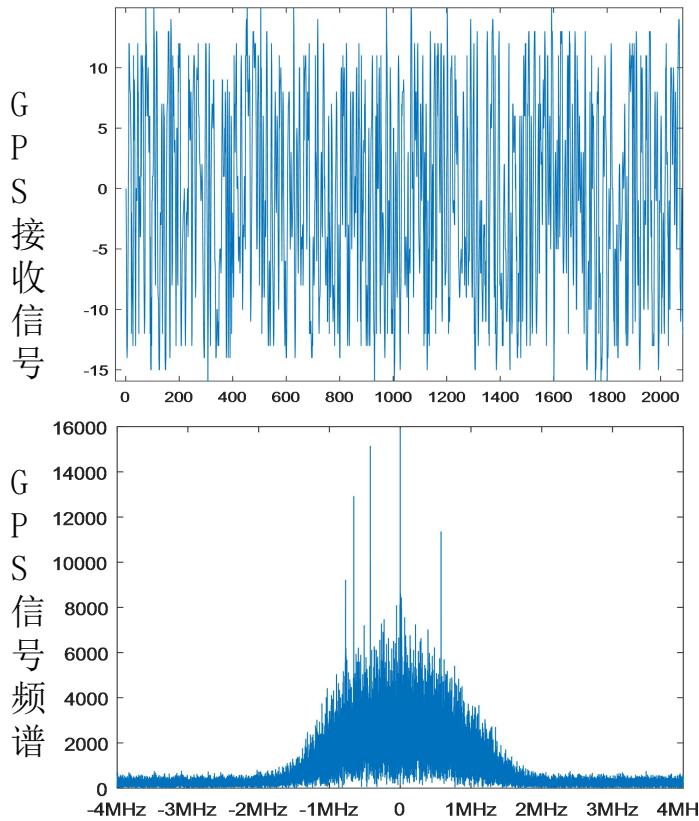


示例





FFT 用于 GPS 卫星信号捕获





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email : mrsgl@buaa.edu.cn

北京航空航天大学 孙国良

Chapter 2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第一章

Contents

离散时间信号与系统

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间信号



二

离散时间系统



三

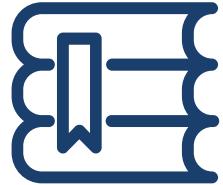
线性时不变系统



四

线性常系数差分方程

离散时间信号（序列）



- 定义？描述方式？
- 基本序列有哪些？
- 序列的运算形式？



离散时间信号

离散时间系统

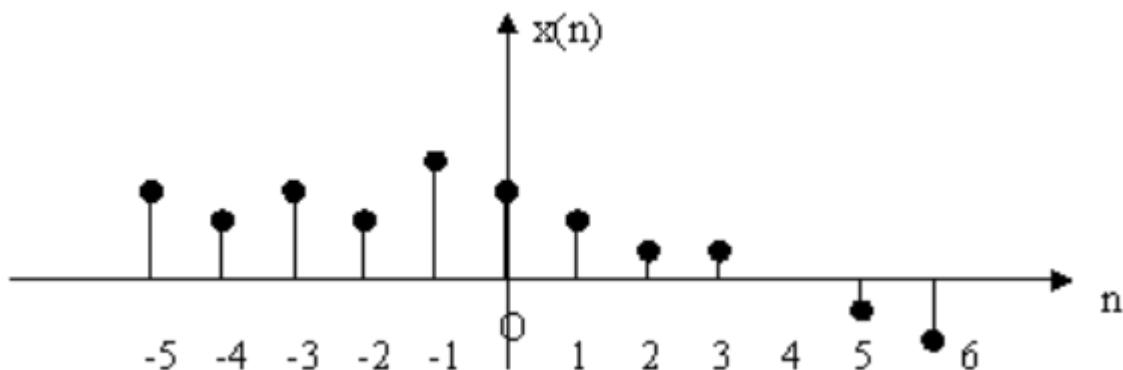
线性时不变系统

线性常系数差分方程

1.1.1 离散时间信号定义

- 仅在离散时刻点上有意义的信号或不连续瞬时刻给出函数值的函数
- 通常用集合来表示，记作：
 - $x=\{x(n)\} \leftarrow \{x_a(nT)\} \quad (-\infty < n < +\infty)$
 - 图形表达：

(i)



1.1.2 基本序列

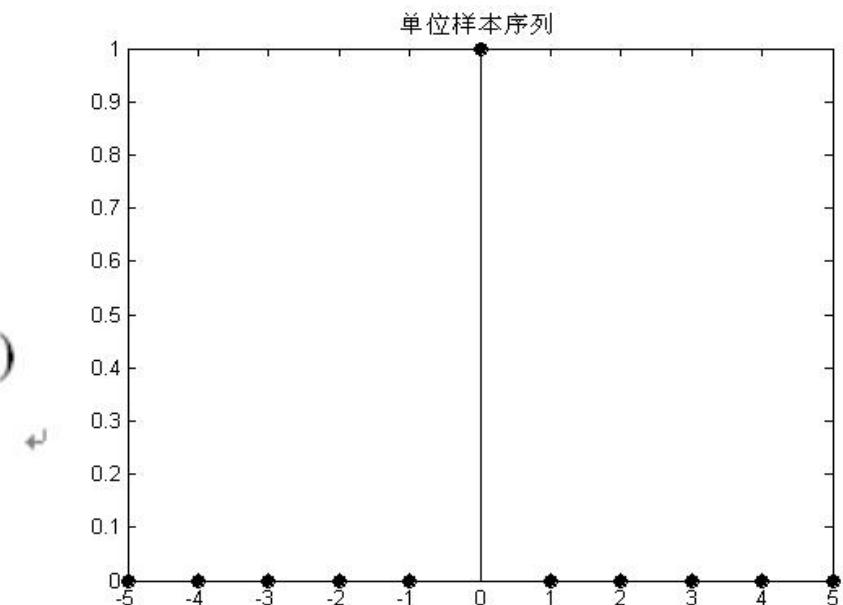
■ 1、单位冲激（抽样、样本）序列

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 0 & \cdots n \neq n_0 \\ 1 & \cdots n = n_0 \end{cases}$$

i

i

```
function[x,n]=impseq(n0,n1,n2)
n=[n1:n2];
x=[(n-n0)==0];
```



2、单位阶跃序列

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ 1 & n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)u(n - k) = \delta(n) * u(n)$$

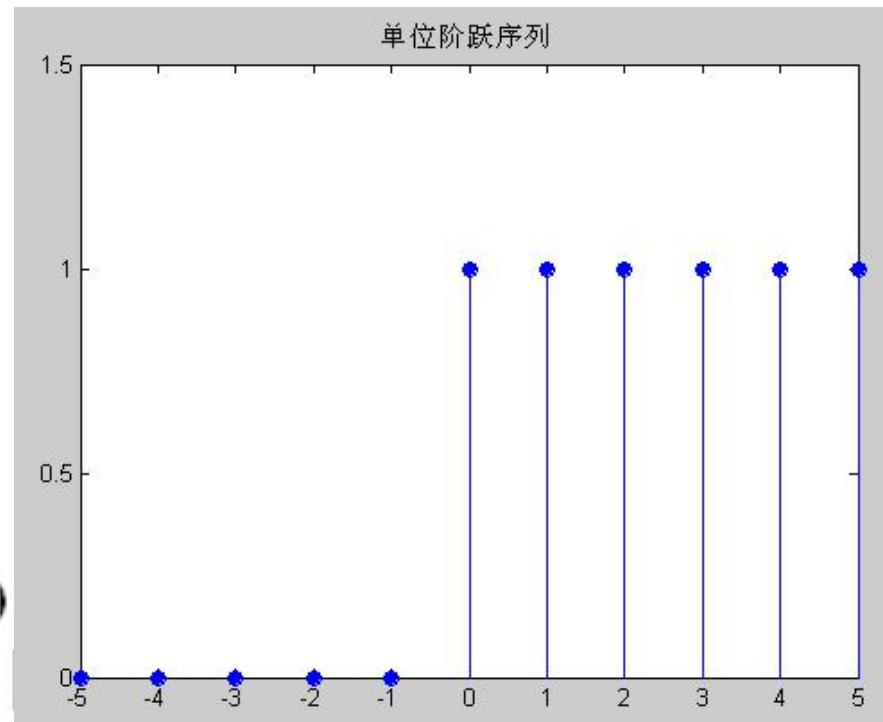
function[x,n] = stepseq(n₀,n₁,n₂)

n = [n1:n2];

x = [(n - n0) >= 0];

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



基本序列

■ 3、矩形窗序列

$$R_N(n) = G_N(n) = \begin{cases} 0 & \dots\text{其它} \\ 1 & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) = u(n) - u(n-N)$$

■ 4、正弦（三角）序列

$$x(n) = A \cos(\omega_0 * n + \theta_0)$$

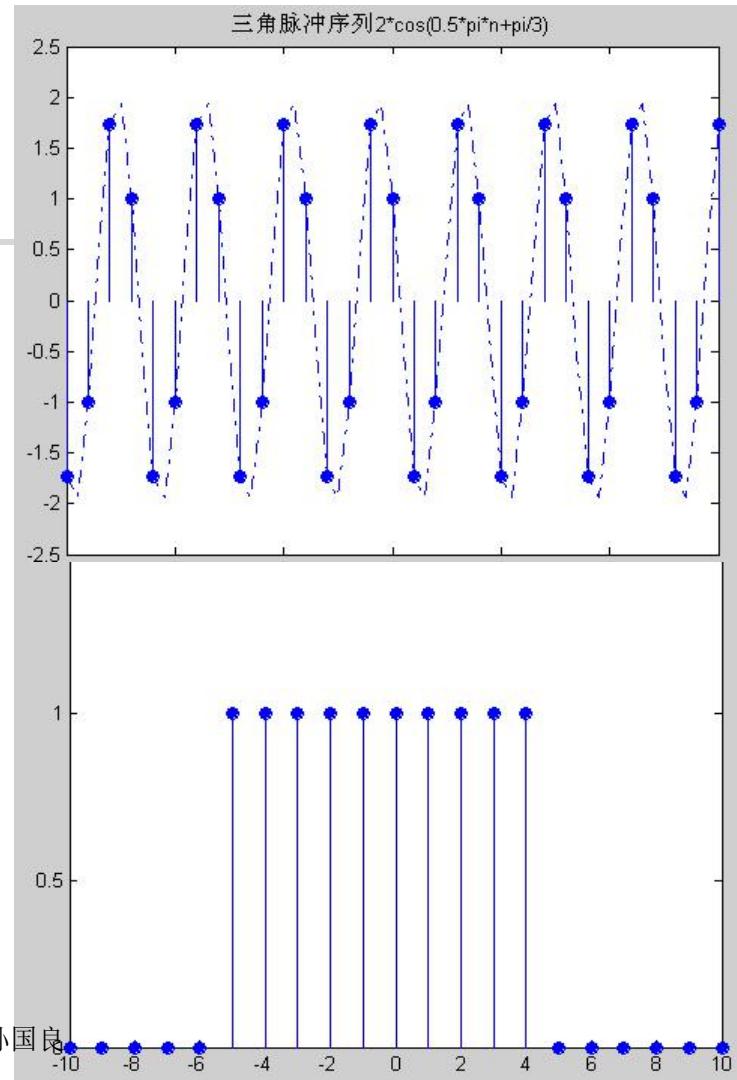
i

■ 5、指数序列

$$x(n) = A \alpha^n$$

■ 6、周期序列

$$x(n) = x(n+N)$$



关于三角序列的频率和周期

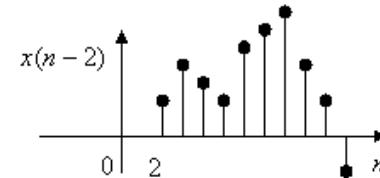
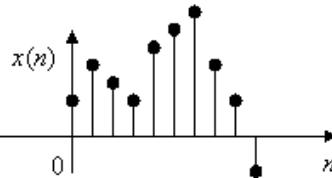
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为整数时,} & N = \frac{2\pi}{\omega_0}; \\ \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为有理数时,} & N > \frac{2\pi}{\omega_0}, N = \frac{2\pi}{\omega_0} * k = \frac{Q}{P} * k = Q \\ \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为无理数时,} & N \text{ 不存在, 为非周期序列} \end{cases}$$

- 无论N是否存在, ω_0 皆称为序列的频率。

1.1.3 序列基本运算

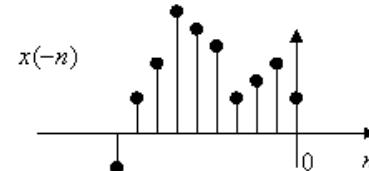
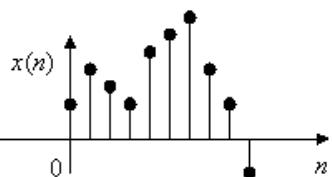
- 1、移位

$$y(n) = x(n - m)$$



- 2、翻褶

$$y(n) = x(-n)$$



- 3、和、差

$$y(n) = x_1(n) \pm x_2(n)$$

(i)

- 4、积、商

$$y(n) = x_1(n) \times \div x_2(n)$$

序列基本运算

- 5、累加 $S(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

- 6、差分

- 前向差分: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

- 后向差分: $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$



- 7、卷积和

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

例题

- 已知下面两个序列：

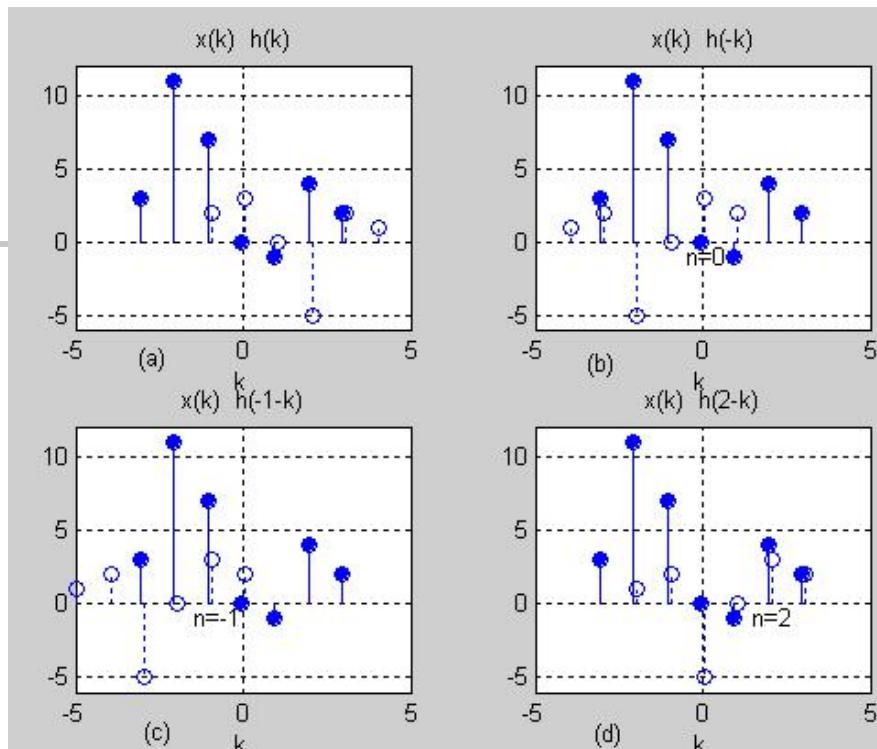
$$x(n) = [3, 11, 7, \underset{\uparrow}{0}, -1, 4, 2]; -3 \leq n \leq 3$$

$$h(n) = [2, \underset{\uparrow}{3}, 0, -5, 2, 1]; -1 \leq n \leq 4$$

- 试求卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

方法一、定义法

$$\begin{aligned} & \sum_k x(k)h(-1-k) \\ &= 3 \times (-5) + 11 \times 0 + 7 \times 3 + 0 \times 2 \\ &= 6 = y(-1) \end{aligned}$$



$$y(n) = \{6, 31, 47, 6, \underset{\uparrow}{-5}, 1, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\}$$

- 注意: $y(n)$ 的起始点（第一个非零样本）是由 $n=-3+(-1)=-4$ 给出的，而最后一点（最后一个非零样本）是由 $n=3+4=7$ 给出的。

$$x(n) = [3, 11, 7, \underset{\uparrow}{0}, -1, 4, 2]; -3 \leq n \leq 3$$

$$h(n) = [2, \underset{\uparrow}{3}, 0, -5, 2, 1]; -1 \leq n \leq 4$$

方法二：对位相乘求和法

x(n):	3	11	7	0	-1	4	2		h(n)			
	3	11	7	0	-1	4	2	1				
	6	22	14	0	-2	8	4	2				
	15	-55	-35	0	5	-20	-10	-5				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i			
9	33	21	0	-3	12	6		3				
6	22	14	0	-2	8	4		2				
y(n):	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2

$$y(n) = \{6, 31, 47, 6, -\underset{\uparrow}{51}, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\} \quad (\text{请思考 } n=0 \text{ 的定时信息如何确定?})$$

8、序列相关

- 相关是对两个序列相似程度的一种度量，在信号处理中应用广泛。
- 已知两个有限能量的实值序列 $x(n)$ 和 $y(n)$,其互相关是一个序列：

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(n - \tau) = x(n) * y(-n)$$

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x(n - \tau) = x(n) * x(-n)$$

例题

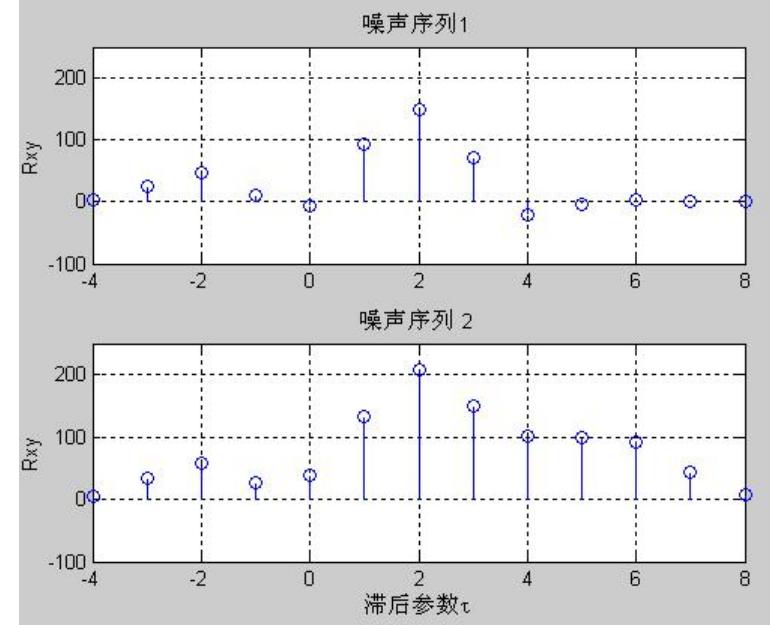
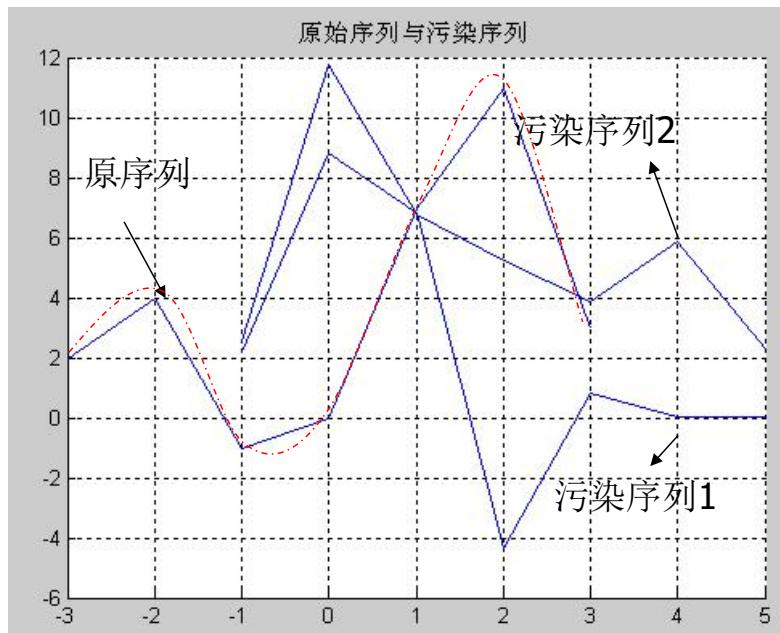
- 设 $x(n)$ 是原序列， $y(n)$ 是受到噪声污损并移位的序列：

$$x(n) = [3, 1 \underset{\uparrow}{1}, 7, 0, -1, 4, 2]$$

$$y(n) = x(n - 2) + w(n)$$

- $w(n)$ 是均值为0，方差为1的高斯随机序列。
- 计算 $y(n)$ 和 $x(n)$ 之间的互相关。

雷达信号中目标的识别与锁定



9、序列能量和功率

- 能量：

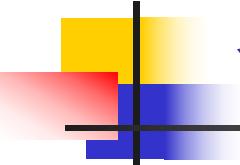
$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- 能量有限的信号称为能量信号

- 功率：

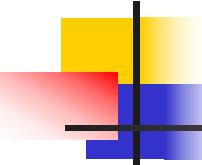
$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{-N}^{+N} |x(n)|^2$$

- 能量无限，但功率有限的信号称为功率信号



习题（第二版）

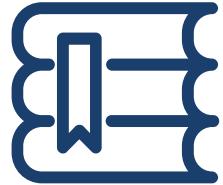
- 课后作业1:
- 2.1, 2.2, 2.3,
- 2.12, 2.21, 2.22, **2.55**



复习题

- 1、写出 $y(n)=x(n)*h(n)$ 卷积和数学表达
- 2、假设 $x(n)$ 区间是 (i, j) ， $h(n)$ 区间是 (p, q) ，给出 $y(n)$ 的区间；
- 3、假设 $x(n)=h(n)=u(n)-u(n-5)$ ，求 $y(n)$

离散时间系统



离散时间信号

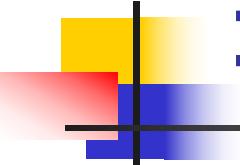
离散时间系统

线性时不变系统

线性常系数差分方程

- 系统定义?
- 描述方式?
- 基本系统有哪些?





1.2 离散时间系统

- 数学上，离散时间系统定义为一种**变换**或**算子**
 - 把输入序列按照**某种规则映射**为输出序列

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

- 注：**DFT**也可看作一种系统

1、无（有）记忆系统

- $y[n]$ 只决定于同时刻的输入 $x[n]$, 称为无记忆系统。
 - 如：纯阻性网络、组合电路等
- $y[n]$ 不仅与同时刻的输入 $x[n]$ 有关，而且与其他时刻输入序列值有关，则称该系统为有记忆系统。
 - 如容（感）抗网络，时序电路，差分/平均系统等。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n - k)$$

2、(非)线性系统

- 离散时间系统如果同时满足可加性和齐次性

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

$$T\{k * x(n)\} = k * T\{x(n)\}$$

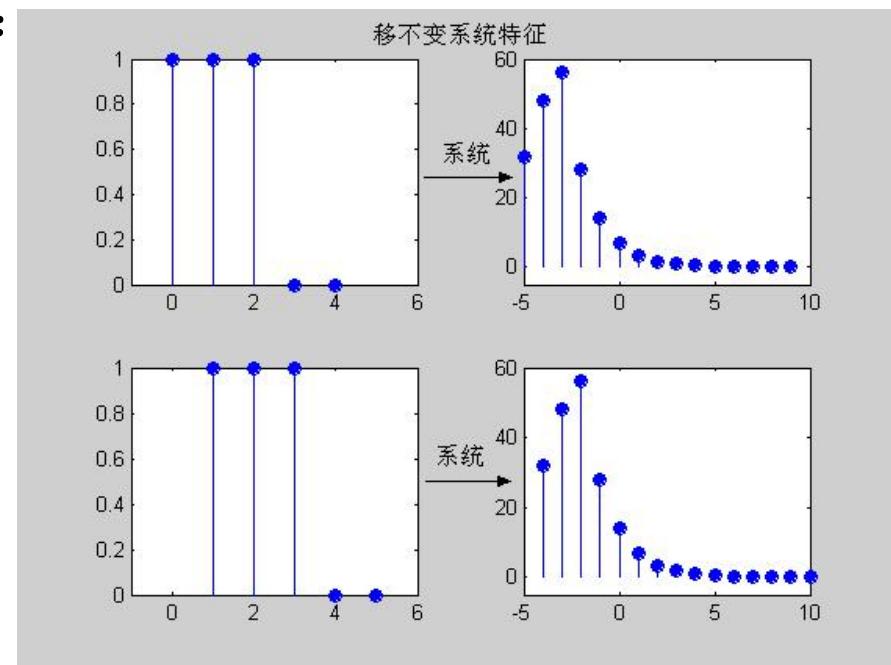
$$T\left\{\sum_i k_i * x_i(n)\right\} = \sum_i k_i * T\{x_i(n)\}$$

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$

3、时（不）变系统

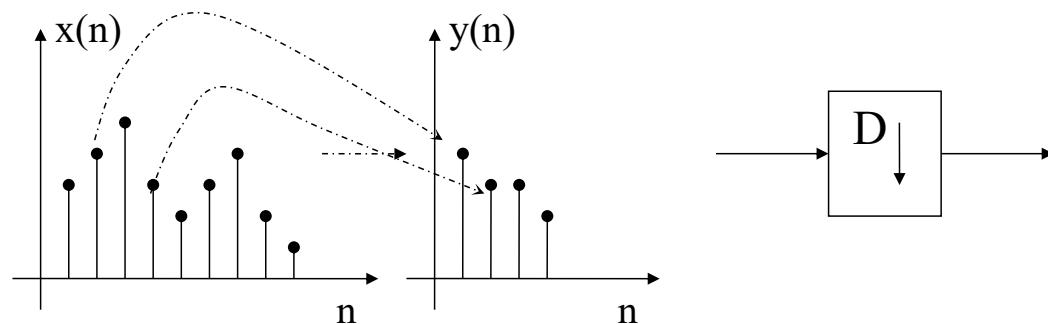
- 如果输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟，若： $T\{x(n)\} = y(n)$
- 则有：
 $T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0)$
- 称为时不变系统。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n - k)$$



例题

- 由下列关系定义的系统称为压缩器
- $y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty$ M 是一个正整数。



- 证明压缩器系统是时变系统

$$T[x(n-m)] = x(Mn-m) \neq y(n-m) = x[M(n-m)]$$

4、(非)因果系统

- 输出序列在 n_0 时刻的值仅仅取决于 $n \leq n_0$ 时刻的输入序列，则系统称为因果系统。
- 所有的实时可实现系统，也就是自然界中真实存在的系统皆为因果系统。
- 非因果系统通常是理论探讨或滞后实现，如前向差分系统即为非因果系统。

5、(非) 稳定系统

- 对任何一个**有界的输入序列**

$$|x(n)| \leq B_x < +\infty$$

- 系统的**输出序列都是有界的**,

$$|y(n)| \leq B_y < +\infty$$

- 则称系统为**BIBO**意义下的稳定系统。

-

- 现实世界中的大部分系统均为稳定系统
- 非稳定需要系统本身有无穷大的能量
- 所有的无源系统均为稳定系统，如电话，整流器等。

例题 判断系统是否是线性? 时不变?

$$T(x[n]) = g[n]x[n]$$

$$T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$$

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) \\ = g[n](\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) \\ = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned}$$

$$T(x[n - n_0]) = g[n] \cdot x[n - n_0] \neq y[n - n_0] = g[n - n_0] \cdot x[n - n_0]$$

$$T(x[n - m]) = \sum_{k=n_0}^n x[k - m] \stackrel{k'=k-m}{=} \sum_{k'=n_0-m}^{n-m} x[k'] \neq \sum_{k=n_0}^{n-m} x[k]$$

若 n_0 为负无穷, 结果为何?

例题

- 有一个系统的输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$,且满足下列差分方程:

$$y[n] = ny[n - 1] + x[n]$$

- 该系统是因果的且满足初始松弛条件, 即若 $n < n_0$,
 $x[n]=0$, 则 $y[n]=0$, $n < n_0$ 。
- (a) 若 $x(n)=\delta(n)$, 求 $y[n]$ (对全部的 n) 。
- (b) 系统是线性的吗? 试证明之。
- (c) 系统是时不变的吗? 试证明之。

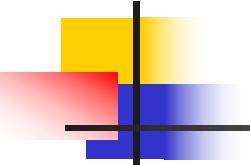
系统单位冲激响应

- 解: (a)

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- 由于: $n < 0$ $y[n] = 0$ $x(n) = \delta(n)$

$$y[0] = \delta[0] = 1 \quad y[n] = \begin{cases} 0 & n \leq 1 \\ 1 & n = 0 \\ n! & n \geq 1 \end{cases}$$


$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- (b) 因为 $y'[n] = T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = ny'[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
 $\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = n(\alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1]) + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
 $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$
 $y[n] = ny[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
- 所以 $y'[n] = y[n]$ 即: $T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

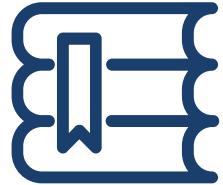
- (c) 系统输出的时移: $y[n - n_0] = (n - n_0)y[n - n_0 - 1] + x[n - n_0]$

系统输入延时后得到的输出: $y'(n) = T(x[n - n_0])$

$$y'(n) = ny'[n-1] + x[n-n_0]$$

所以: $y'(n) \neq y[n - n_0]$

线性时不变系统



离散时间信号

离散时间系统

线性时不变系统

线性常系数差分方程

- 为何典型？
- 基本性质？



1.3 线性时不变系统 (LTI)

- 既是线性系统，又是时不变系统，称为LTI系统
- 设系统单位冲击响应为： $h(n) = T\{\delta(n)\}$

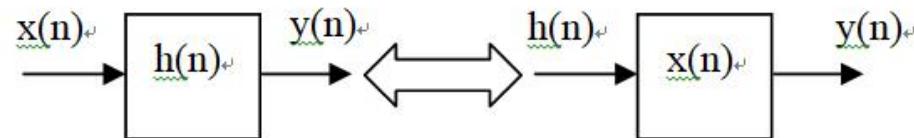
$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right\}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\} \text{(叠加性)}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \text{(时不变性)}$$

- $y(n) = x(n) * h(n)$ 质变：**充分且必要**

性质一： 交换律

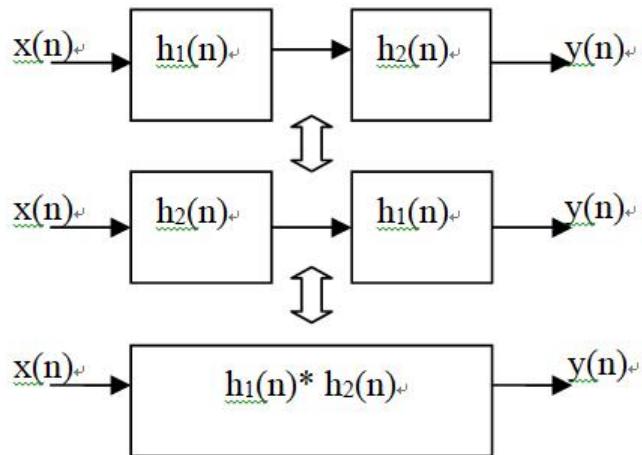


$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$\Delta y(n) = \Delta x(n) * h(n) = \Delta h(n) * x(n)$$

$$y(n-m) = x(n-m) * h(n) = h(n-m) * x(n)$$

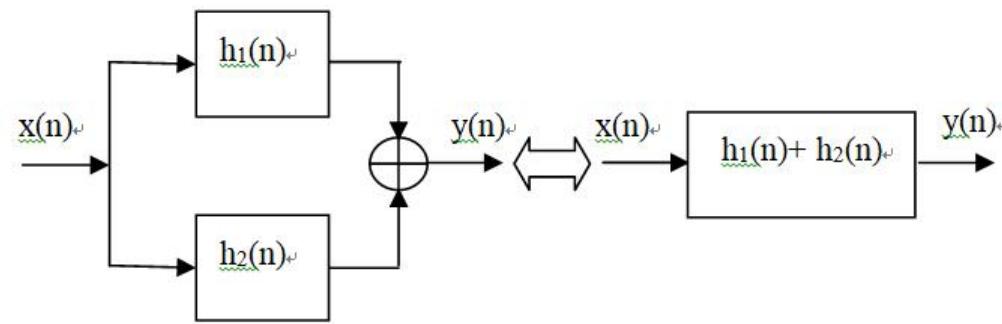
性质二：结合律



$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h_1(n) * h_2(n) \\&= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\&= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\&= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n)\end{aligned}$$

$$y(n) * u(n) = [x(n) * u(n)] * h(n) = [h(n) * u(n)] * x(n)$$

性质三：分配律



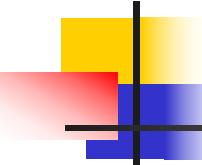
$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \\&= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]\end{aligned}$$

定理一、**LTI**系统为因果系统的充要条件是: $h(n) = h(n)u(n)$

- 充分性: 若 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 则有 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$
 $y(n)$ 仅与 $m < n$ 时的 $x(m)$ 有关, 系统因果。
- 必要性: 若系统为因果系统, 假设 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 则有:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- 假设条件下, 第二个求和式中至少有一项不为零, 即 $y(n)$ 至少和 $m > n$ 中的某一个 $x(m)$ 有关, 不符合因果系统的定义, 所以假设不成立



定理二：LTI系统为稳定系统充要条件是： $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$

- 充分性：任意有界输入 $x(n) < N$ ，得到：

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = NM < +\infty$$

所以输入有界，输出必有界

- 必要性：若系统稳定，而 $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$

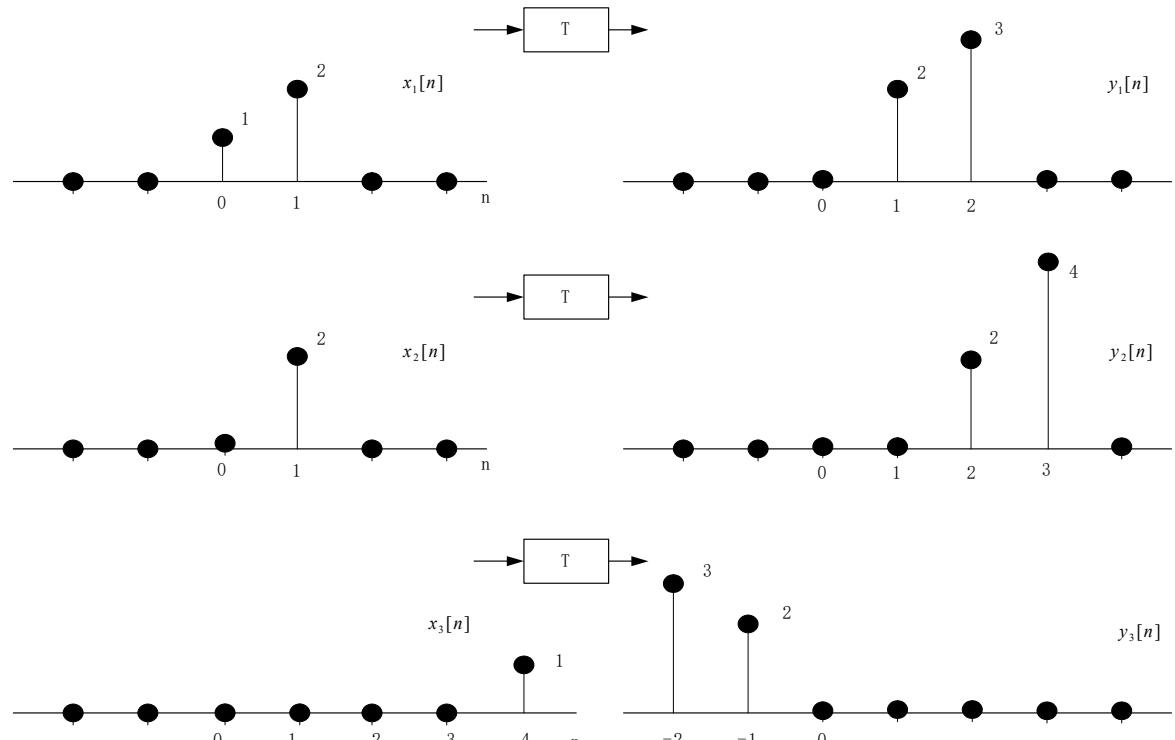
输入 $x(n) = sign(h(-n))^\infty$

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = \infty$$

不符合BIBO稳定的条件，假设不成立

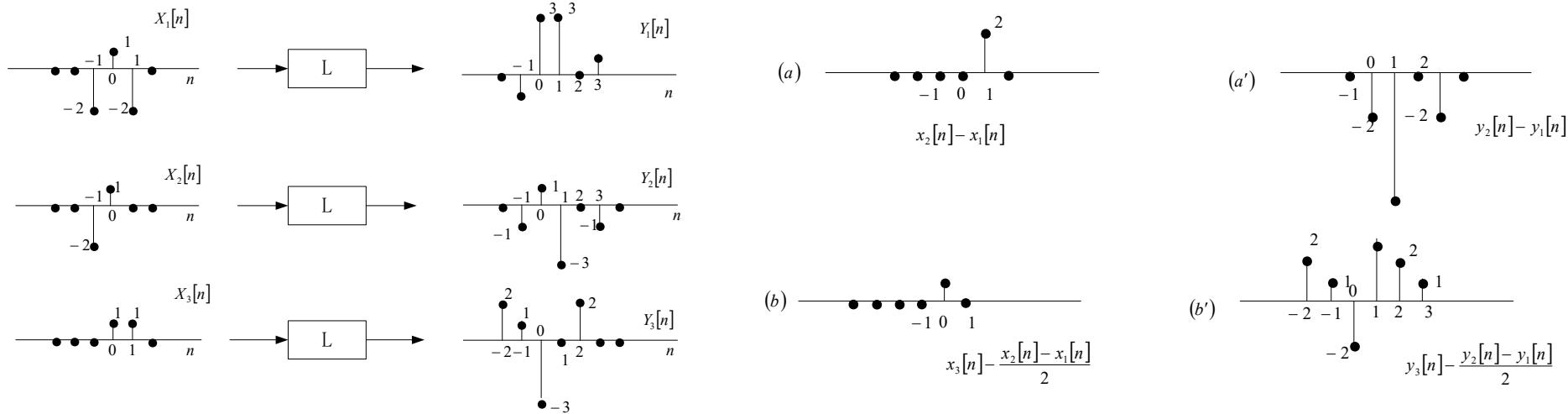
例题

- 图中T是时不变系统，输入响应如图
- (a) 确定系统是否为线性。
- (b) 系统的单位冲激响应是什么？
- (c) 对任意输入，输出能唯一确定吗？



例题

L 为线性系统，输入输出对应如图所示，问：
 (a) 系统 L 是否时不变的？
 (b) 系统的单位冲激响应是什么？

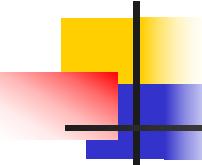


1.4 线性常系数差分方程

- 离散时间LTI系统通常由常系数线性差分方程表示：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

- **线性:**差分方程中只含输入、输出序列的一次项，不含高次项及交叉乘积项。否则为非线性方程
- **i** ■ **阶数:** $y(n)$ 的最高值和最低值之差，上述阶数为N。



求解途径

- 离散时域解法:

- 迭代法，此种方法只能给出比较形象的的不完整数值解，不容易得到闭合形式的数学描述公式。
- 时域经典解法，即求齐次解和特解，再由边界系数确定齐次解与特解的待定系数。
- 卷积和法，主要用于求解系统的零状态解。

- 变换域方法:

- 与连续系统的拉普拉斯变换法类似，采用Z变换方法来求解差分方程，在实际应用中较常用。

LCCDE与LTI的关系

- 例：常系数线性差分方程为 $y(n) - ay(n-1) = x(n)$
- (1) 若系统为松弛状态，求系统单位冲激响应；
- (2) 若系统初始状态为: $y(0) = 1$, 系统是否为LTI?

■ (1) 系统单位冲激响应

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

- 依次
$$h(0) = a * h(-1) + 1 = 0 + 1 = 1$$
 - 迭代
$$h(1) = a * h(0) + 0 = a + 0 = a$$
$$h(2) = a * h(1) + 0 = a^2 + 0 = a^2$$
$$\vdots$$
 - 求得:
$$h(n) = a * h(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$
- 由数学归纳法得到
$$h(n) = \begin{cases} a^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

(2) $y(0)=1$ 时

$$\begin{cases} x_1(n) = \delta(n) \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \quad y_1(n) = a^n * u(n)$$

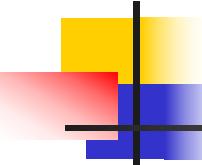
$$\begin{cases} x_2(n) = \delta(n-1) \\ y_2(0) = 1 \end{cases} \quad y_2(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$x_2(n) = x_1(n-1) \quad y_2(n) \neq y_1(n-1) \quad \text{时变}$$

$$\begin{cases} x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \\ y_3(0) = 1 \end{cases} \quad y_3(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

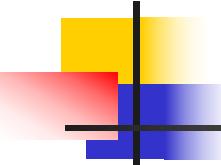
$$y_1(n) + y_2(n) = 2a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n) \quad \text{非线性}$$



LCCDE与LTI的关系

- 对上面的例子而言
 - 当边界条件为 $y(0)=1$ 时，系统是时变的；
 - 当边界条件 $y(0)=0$ 时，系统是线性但不是时不变系统；
 - 当边界条件为 $y(-1)=0$ 时，系统才是线性时不变系统。
- 常系数线性差分方程，并不一定代表线性系统，也不一定代表时不变系统。
- 边界条件决定了常系数线性差分方程和线性时不变系统之间的对应关系。只有当系统为零状态，才相当于一个线性时不变系统。

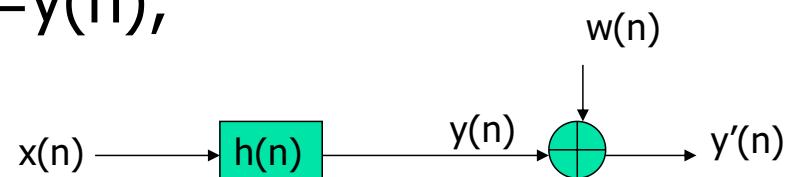


习题（第二版）

- 课后作业2:
- 2.15, 2.20, 2.25,
- 2.27, 2.42, **2.56**

思考题（反卷积用于系统辨识）

- $x(n) * h(n) = y(n);$



- 已知 $x(n), y(n)$ 条件下求 $h(n)$



谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 3

3.1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

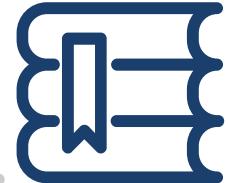
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

离散时间傅里叶变换 (DTFT)



离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

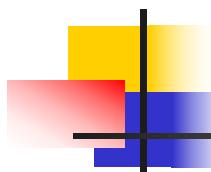
系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义？涵义？
- 基本序列的DTFT？
- DTFT的主要性质定理？

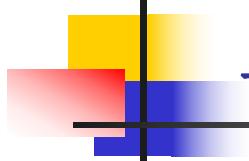


学习方法：
结论比过程重要！！！



一、DTFT及逆变换定义

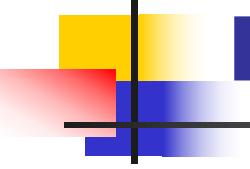
- 序列的傅立叶变换 (DTFT) 用来表示离散时间非周期信号及其傅立叶频谱之间的关系。
- 正变换: $DTFT [x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$
- 反变换: $DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$
 - 由于三角函数的周期性, 反变换积分区间可以为任何一个周期区间。



二、DTFT反变换推导

$$\begin{aligned} DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = Sa[\pi(n-k)] = \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



DTFT反变换隐藏的涵义:信号分解

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n}\end{aligned}$$

三、典型序列的傅立叶变换：

- (一) 单位冲激序列

$$DTFT [\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = x(0)e^{-j\omega 0} = 1$$

- (二) 单位常数序列

$$x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi) \rightarrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n} d\omega \\ = 1$$

- (三) 单位阶跃序列

$$DTFT [u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

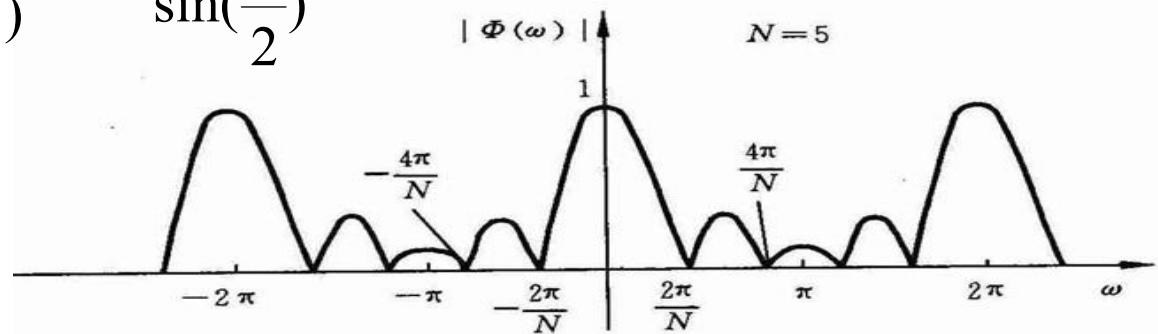
- (四) 指数序列

$$DTFT [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

矩形窗的DTFT

$$DTFT[W(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

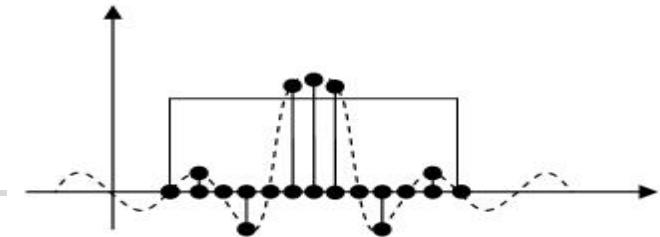
$$= \frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}} (e^{j\frac{N\omega}{2}} - e^{-j\frac{N\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$



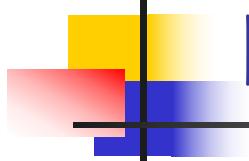
理想低通滤波器

- 截止频率为 w_c 的理想低通滤波器

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \leq w \leq w_c \\ 0 & w_c < w \leq \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$



$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin[w_c(n-\alpha)]}{w_c(n-\alpha)}$$



四、序列傅立叶变换的主要性质

- 1、线性

$$ax(n) + bh(n) \longrightarrow aX(e^{jw}) + bH(e^{jw})$$

- 2、时域平移->频域调制

$$x(n - m) \longrightarrow e^{-jwm} X(e^{jw})$$

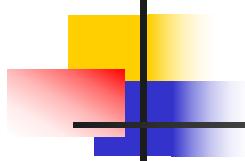
- 3、时域调制->频域平移

$$e^{jn\omega_0} x(n) \longrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$\begin{aligned} DTFT[x(-n)] &= X(e^{-j\omega}) \\ DTFT[x^*(n)] &= X^*(e^{-j\omega}) \\ DTFT[x^*(-n)] &= X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

- 4、时域翻褶

$$x(-n) \longrightarrow X(e^{-jw})$$



■ 5、时域相乘

$$x(n)h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$$

■ 6、时域卷积

$$x(n) * h(n) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

■ 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

8、DTFT的对称性

- 共轭对称序列:
- 共轭反对称序列:
- 可以证明:

$$\operatorname{Re}[x_e(n)] = \operatorname{Re}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_e(n)] = -\operatorname{Im}[x_e(-n)]$$

$$|x_e(n)| = |x_e(-n)|$$

$$\operatorname{Arg}[x_e(n)] = -\operatorname{Arg}[x_e(-n)]$$

$$x_e(n) = {x_e}^*(-n)$$

$$x_o(n) = -{x_o}^*(-n)$$

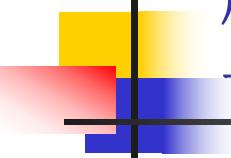
$$\operatorname{Re}[x_o(n)] = -\operatorname{Re}[x_o(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_o(n)] = \operatorname{Im}[x_o(-n)]$$

$$|x_o(n)| = |x_o(-n)|$$

$$\operatorname{Arg}[x_o(n)] = \pi - \operatorname{Arg}[x_o(-n)]$$

共轭反对称序列的性质如何？？



序列共轭分量的傅立叶变换 与序列傅立叶变换的共轭分量

$$\begin{aligned}DTFT[x(-n)] &= X(e^{-j\omega}) \\DTFT[x^*(n)] &= X^*(e^{-j\omega}) \\DTFT[x^*(-n)] &= X^*(e^{j\omega})\end{aligned}$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$DTFT[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$DTFT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

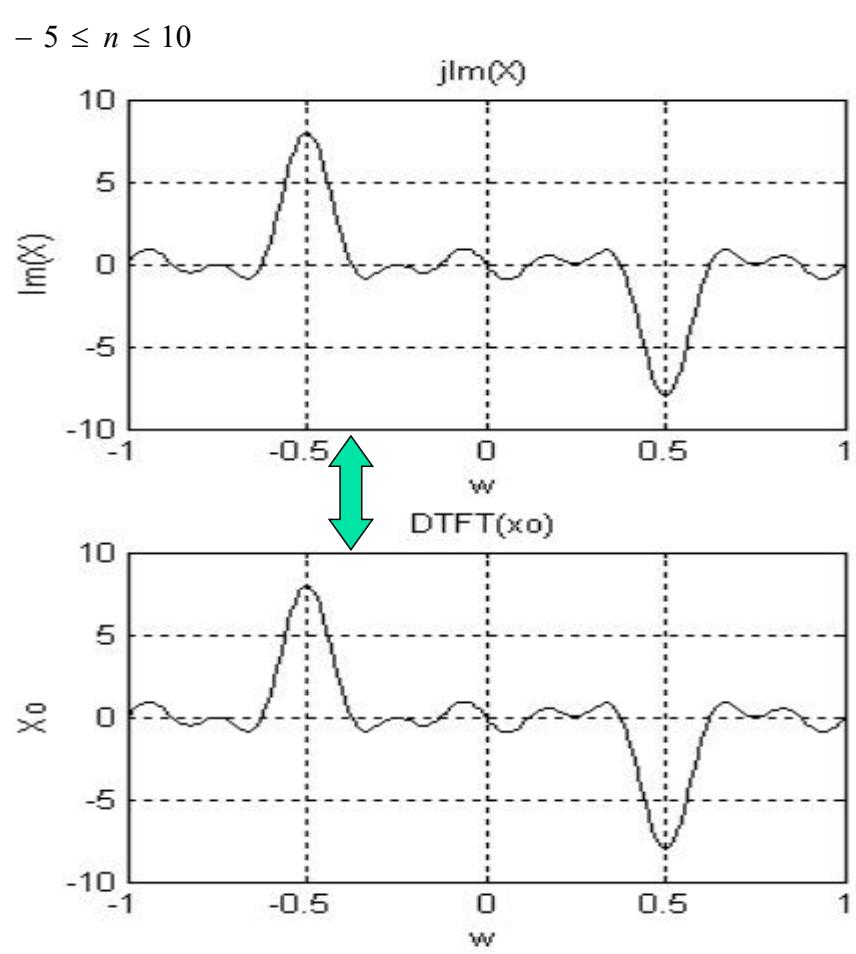
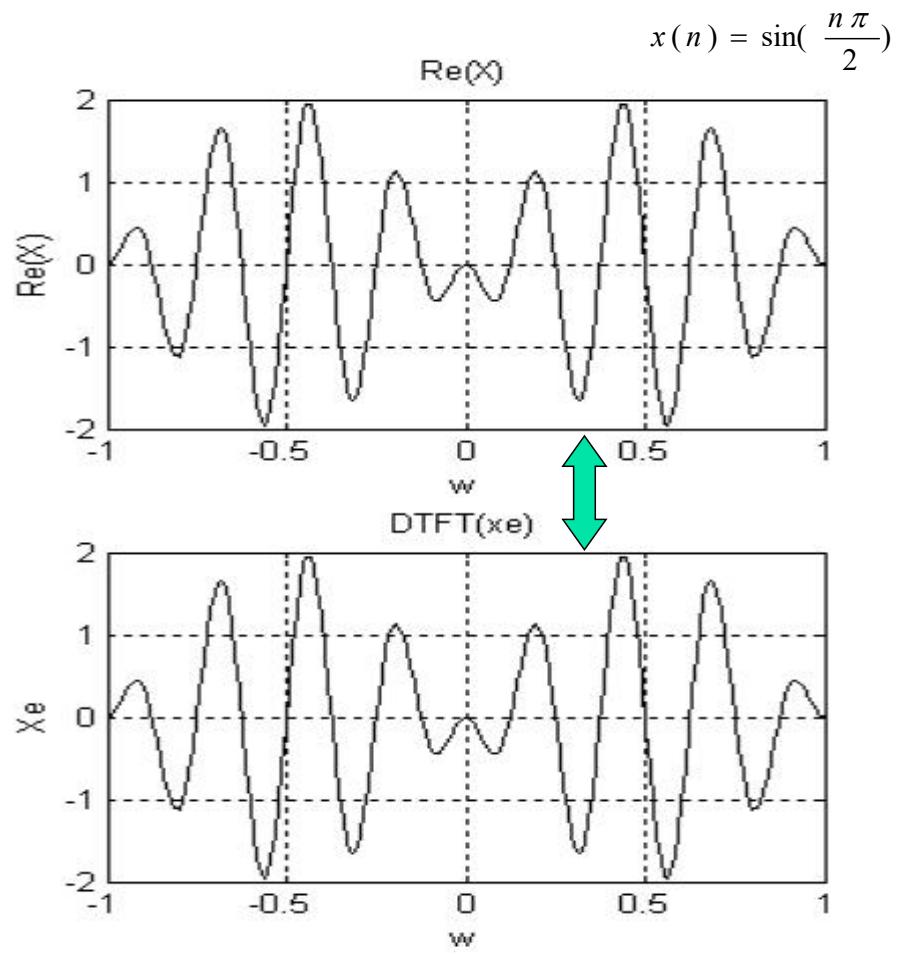
$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

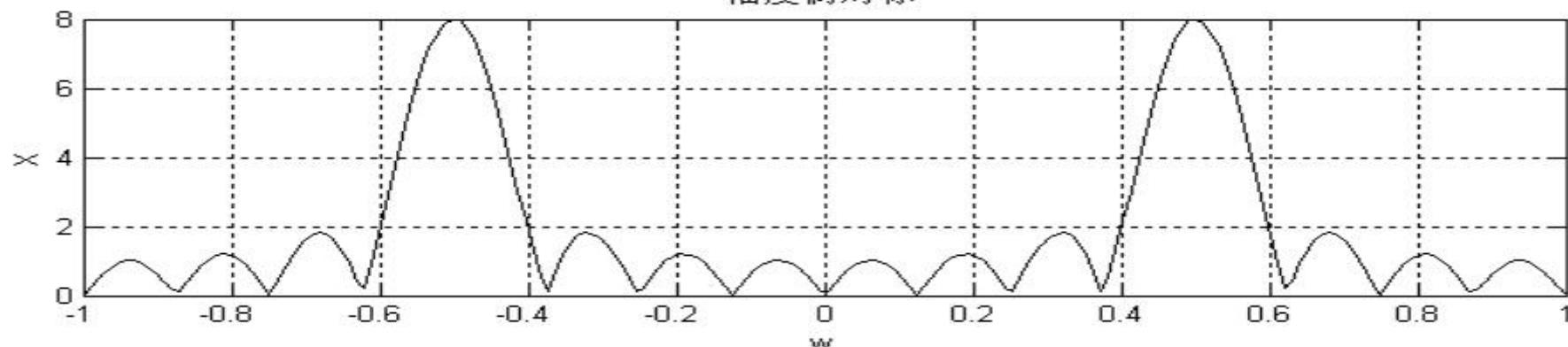
$$DTFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

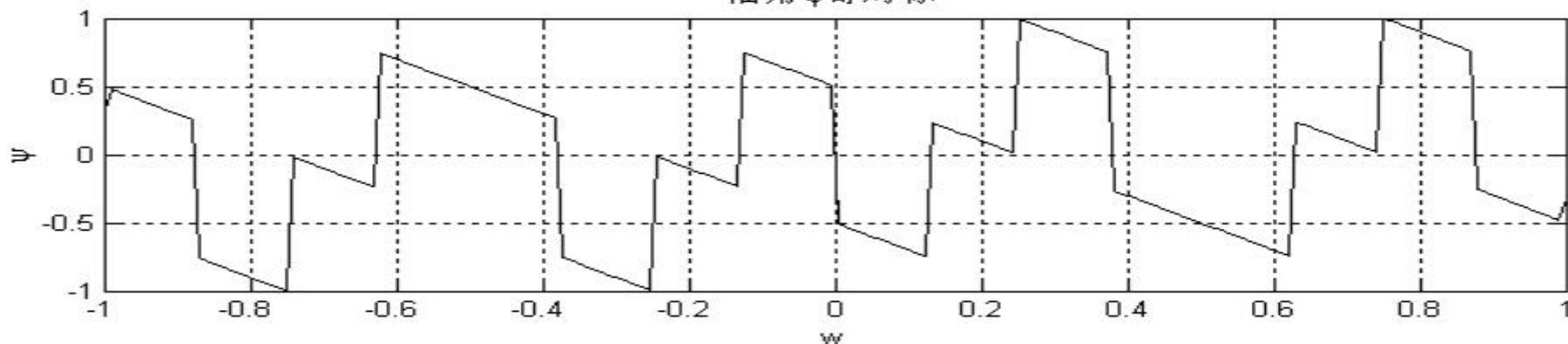
推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。



幅度偶对称



幅角 ψ 奇对称



CTFT Vs DTFT

表 1 连续时间和离散时间的典型基本信号傅立叶变换对比

连续信号 $x(t)$	CTFT $X(j\omega)$	离散信号 $x(n)$	主周期内的 DTFT $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$\delta(n - r)$	$e^{-ir\Omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi(\omega)$	$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-i\Omega}} + \pi(\Omega)$
$e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{a + i\omega}$	$a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}$
$te^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(a + i\omega)^2}$	$na^n u(n), a < 1$	$\frac{ae^{-i\Omega}}{(1 - ae^{-i\Omega})^2} = \frac{ae^{i\Omega}}{(e^{i\Omega} - a)^2}$
$\tau Sa(\frac{\tau t}{2})$	$2\pi G_\tau(\omega)$	$\frac{\Omega_c}{\pi} Sa(\Omega_c n)$	$G_{2\Omega_c}(\Omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$e^{i\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$

例题1：求和式

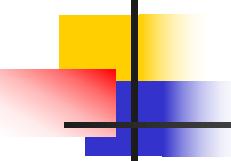
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

■ 解：

$$\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$y^*[n] = \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*(e^{-j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\therefore Y^*(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \therefore \text{左} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{10} d\omega = \frac{1}{60}$$



例题2

- 令 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 分别代替一个序列及其傅里叶变换，利用
- $X(e^{j\omega})$ 表示如下序列的傅立叶变换

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

- 解： $y_s[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + (-1)^n x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + e^{j\pi n} x[n]\}$

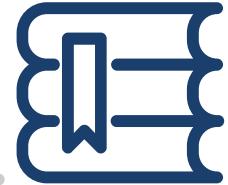
$$Y_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega - \pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n] e^{-j2n\omega}$$

例题3

- 若实序列 $x[n]$ 的DTFT为 $X(w)$, 且
- $X(0.2)=9e^{-j0.7}$;
- 1) $X(-0.2)=?$
- 2) 若 $y(n)=x(-n+2)$, 求 $Y(-0.2)$;



Z 变 换 及 反 变 换



离散时间傅里叶变换

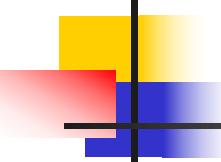
Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义
- 收敛域?
- 性质定理
- 反变换





一、Z变换定义及收敛域

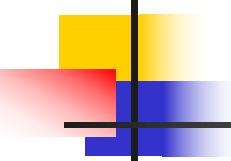
- 设序列为 $x(n)$, 则**幂级数**:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- 称为序列 $x(n)$ 的**Z变换**, 其中**z**为变量。也可记作:

$$Z[x(n)] = X(z)$$

- **幂级数收敛时, Z变换才有意义。** Z变换收敛的所有**z**值的集合称为**收敛域**。
- 在收敛域内, **Z变换处处解析**, 不含任何奇异点。



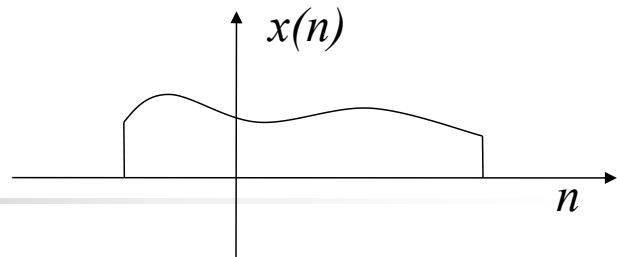
二、不同序列的收敛域

- 根据级数理论，幂级数收敛的充分且必要条件是该级数绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

- 对于不同形式的序列，其收敛域的形式亦有所不同，分类讨论如下

1、有限长序列

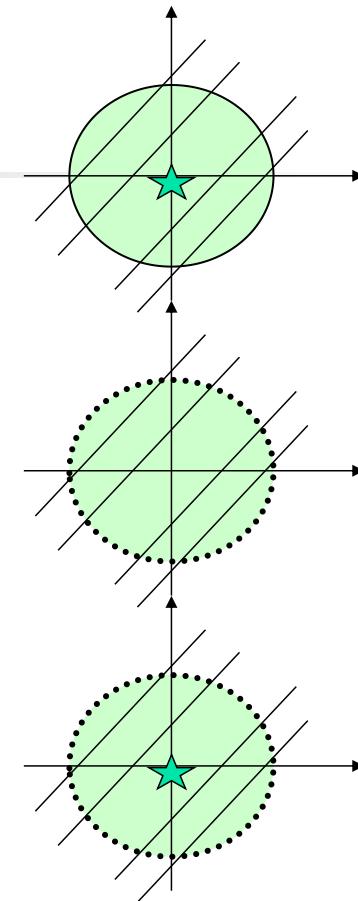


$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- $X(z)$ 为有限项级数之和，只要级数的每一项有界，则级数就是收敛的。
- 收敛域至少包括有限Z平面

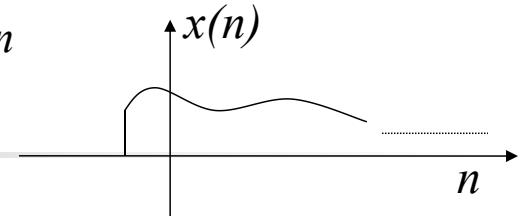
$$0 < |z| < \infty$$

- 根据区间的不同，级数有可能在原点和无穷远出现奇异点，故仍可细分为如下三种情况：
- 1)、正半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和无穷远点；
- 2)、负半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和原点；
- 3)、跨原点有限长序列，则收敛域仅为有限Z平面；



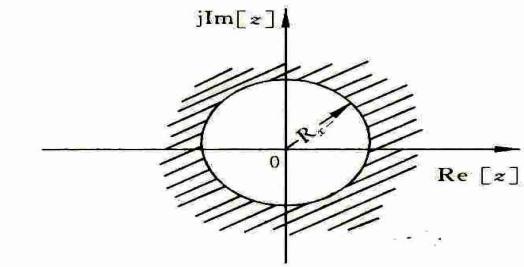
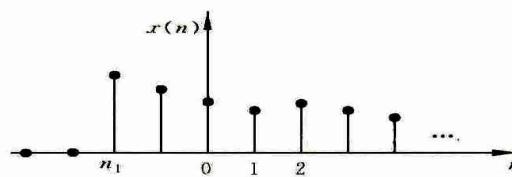
2、右边序列

$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n_1 \leq n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



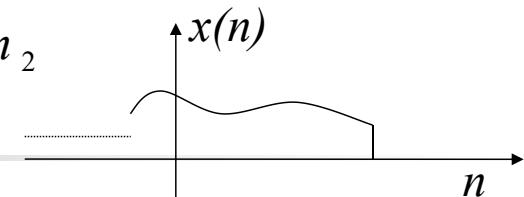
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 第一部分若存在，则为一负半轴有限长序列，其收敛域为不包括无穷远点的所有Z平面。第二部分是z的负幂级数，由阿贝尔定理可知，存在一个最小的收敛半径，在此半径外的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不为零的有限半径处向外扩张的有限Z平面；若 $n_1 \geq 0$ ，还要包括无穷远点，此时的序列为因果序列。



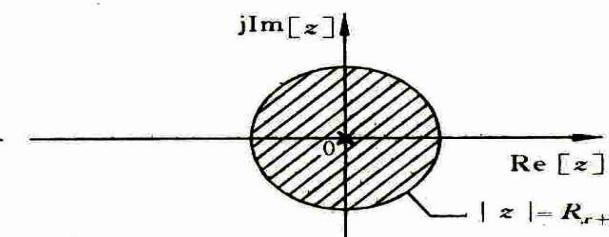
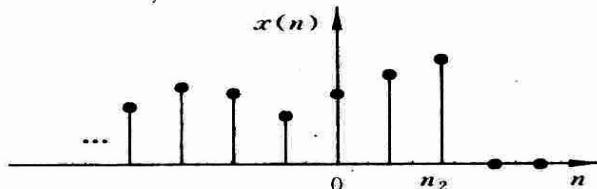
3、左边序列

$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n}$$

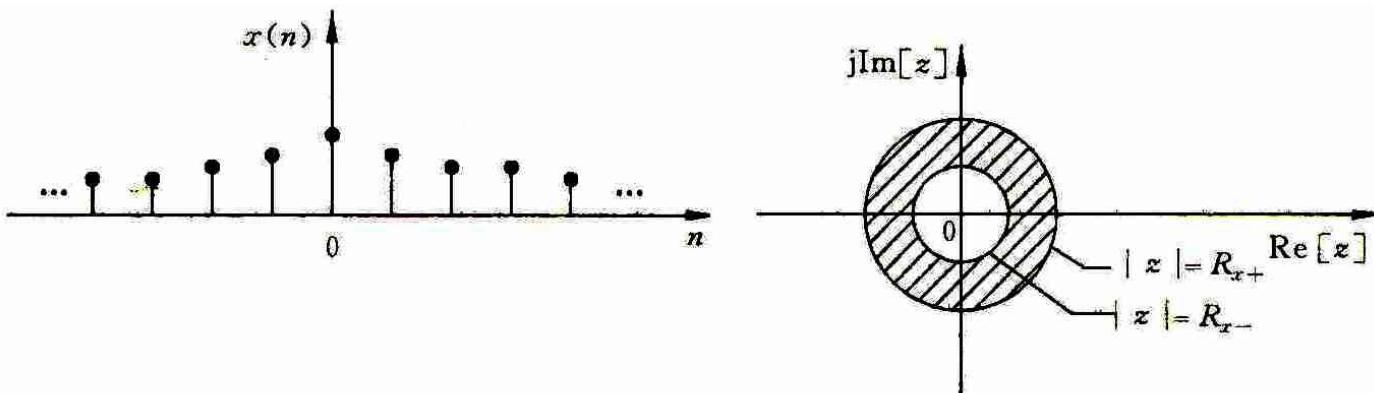
- 若第一部分存在，则为正半轴有限长序列，其收敛域为不包括原点的所有Z平面。第二部分是z的正幂级数，由阿贝尔定理知，存在一个最大的收敛半径，在此半径内的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不有限半径处向内收敛的圆形区域；在 $n_2 \leq 0$ 时（反因果序列），还包括原点。



4、双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

- 收敛域应该是正半轴序列与负半轴序列收敛域的重叠
- 若有收敛域必为环状区域，否则处处不收敛

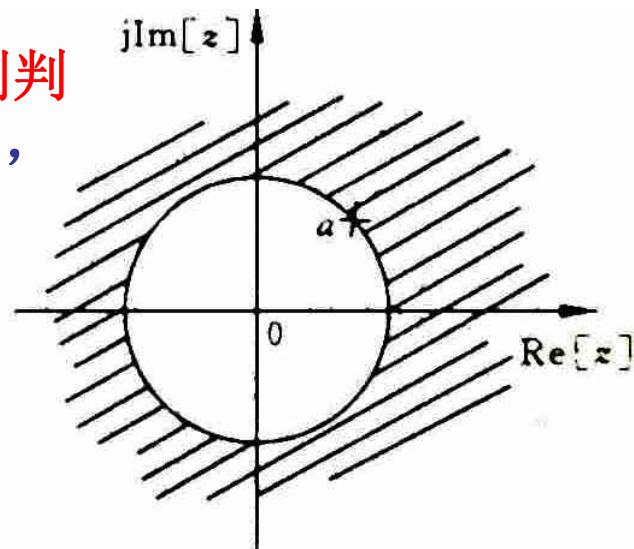


Ex: 求 $x(n) = a^n u(n)$ Z变换及收敛域。

■ 解: $Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_0^{+\infty} (az^{-1})^n$

■ 这是一个无穷项等比级数求和, 由比例判定法可知, 只有在 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时, 级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$



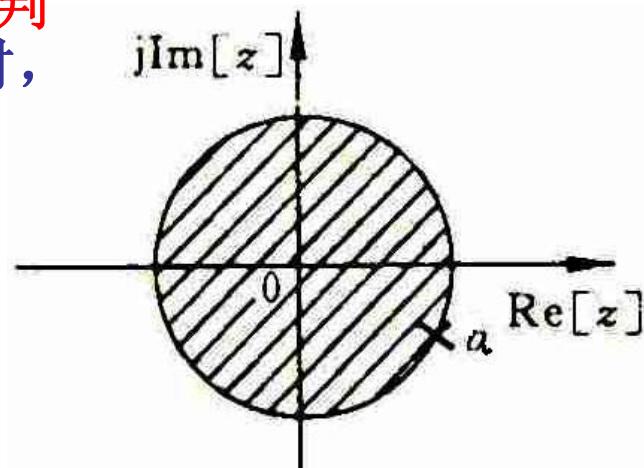
Ex: 求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

■ 解:

$$Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

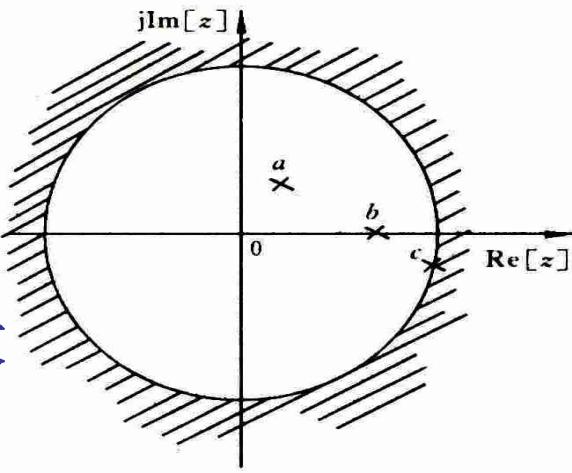
■ 这是一个无穷项等比级数求和, 由**比例判定法**可知, 只有在 $|a^{-1}z| < 1$, 即 $|z| < |a|$ 时, 级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

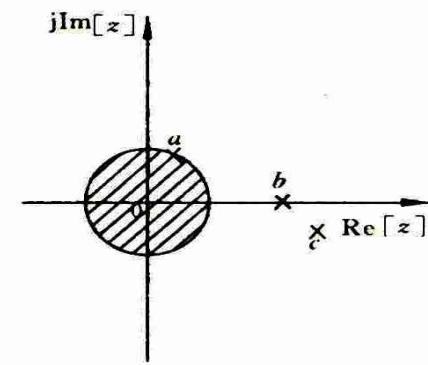


结论：

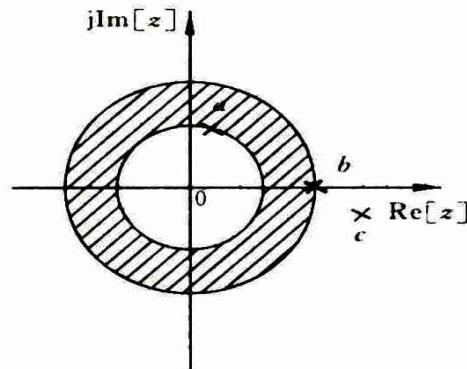
- 不同的序列其Z变换的数学表达式可以完全一致。
- 对于一个序列而言，仅仅用其Z变换来表示是不够充分的，必须同时给出其Z变换的收敛范围。
- 同一个Z变换函数，当收敛域不同时，代表时轴上性质不同的序列。



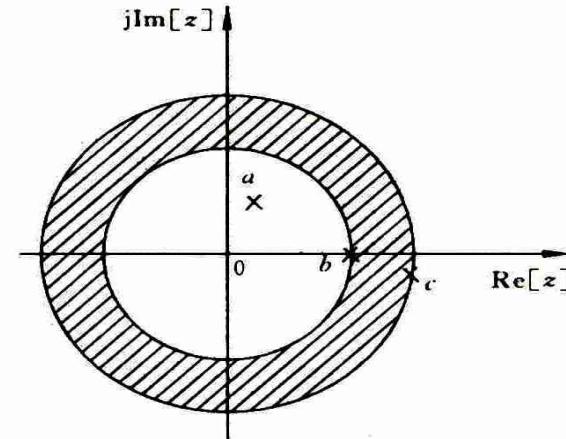
(a)



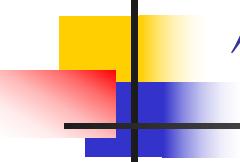
(b)



(c) 204教研室 孙国良



(d)



例题1: $X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \quad 0.5 < |z| < 2$ 求x(n)

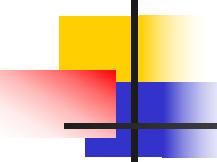
- 解: 由可知有两个一阶极点, 可展成

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_2 z^{-1}}$$

$$A_1 = \operatorname{Re} s[X(z)/z] \Big|_{z=z_1} = \frac{4}{3}, A_2 = \operatorname{Re} s[X(z)/z] \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{3}$$

- 由收敛域可知, 对应第一极点 $z_1=2$ 为反因果序列, 对应第二极点 $z_2=0.5$ 为因果序列, 所以原始序列为:

$$x(n) = -\frac{4}{3}2^n u(-n-1) - \frac{1}{3}0.5^n u(n)$$



三、Z变换性质定理

■ 1、线性

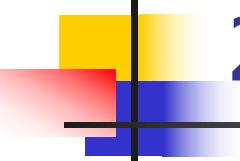
$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \quad R_- < |z| < R_+$$

■ 需要注意：

- 若参与和运算的序列在时域上不重合，则相加后的和序列的收敛域为各个序列的收敛域的交集
- 若不满足上述条件，则线性组合过程中两个序列Z变换的零、极点可能会互相抵消，导致收敛域的扩大。

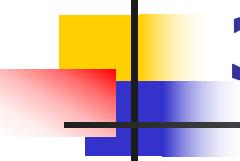


2、序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

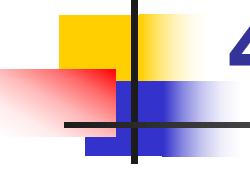
- 序列的移位仅对**有限长、单边**序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点处的是否收敛有影响。
- 对于**双边序列**，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以**收敛域不发生变化**。



3、Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

- 在尺度变换中，若a为实数，则零、极点在Z平面上沿径向运动；
 - 若a为单位复数，则零、极点在以原点为圆心的园上旋转；
 - 若a为任意复数，则零、极点既有径向伸缩，又有角度旋转。

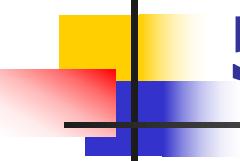


4、序列线性加权（Z域求导）

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[n^m x(n)] = (-z \frac{d}{dz})^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

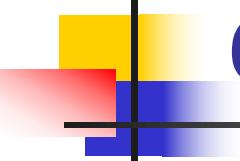
- 序列的线性加权对收敛域的影响与序列的**移位相类似**，仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域也不发生变化。



5、共轭序列

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

- 此处要注意，原序列**Z**变换极点的共轭是共轭序列**Z**变换的极点。
- 由于共轭关系仅关于**X**轴对称，不影响极点矢径的长度，
因而不改变收敛半径和收敛域。



6、序列翻褶

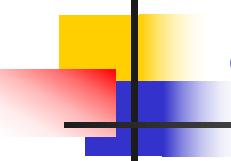
$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$$

- 序列的翻褶导致Z变换的收敛域以单位圆为基准作镜像映射

7、初值定理（因果序列）

$$x(n) = x(n)u(n) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots] \\ &= x(0) \end{aligned}$$

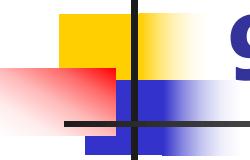


8、终值定理

- 若序列为因果序列，并且极点处于单位圆以内（若恰好在单位圆上，则最多可在 $z=1$ 处有一阶极点），则：

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) (z^{-(n-1)} - z^{-n}) \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-(n-1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{m=-1}^{+\infty} x(m+1) z^{-m} - \sum_{m=-1}^{+\infty} x(m) z^{-m} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] z^{-m} \right\} = \sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] \lim_{z \rightarrow 1} z^{-m} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots [x(n) - x(n-1)] \} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)
\end{aligned}$$



9、时域卷积和

$$Z\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

$$|z| > \text{Max}(1, R_{x-})$$

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z) \quad \max(R_{x-}, R_{h-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{h+})$$

- 若时域为卷积和，则 Z 域是相乘，乘积的收敛域是 $X(z)$ 收敛域和 $H(z)$ 收敛域的交集。

- 上述结论在两个卷积和序列无零、极点对消的情况下才成立。若出现零、极点对消，则收敛域将会扩大。
- 利用卷积和定理，可以求LTI系统的响应。

例题2

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

- 因果系统输出为：

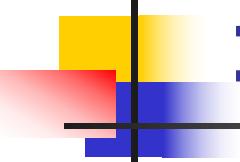
$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

- 求系统输入的X(z)
- 解：

$$\begin{aligned} \because y[n] \text{ 的 } z \text{ 变换为: } Y(z) &= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 + 0.25z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \\ &= \frac{1 + z^{-1}}{(1 + 0.25z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad 0.25 < |z| < 2 \end{aligned}$$

$$\therefore X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad |z| < 2$$

为什么?



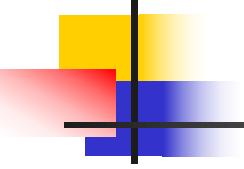
10、时域相乘（Z域复卷积）

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$
$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

$$R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+}$$



证明：

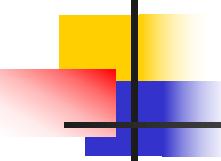
$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[x(n)h(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(v)v^{n-1}dv\right]z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)H(v)z^{-n}v^{n-1}dv\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}H(v)v^{-1}dv\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv \end{aligned}$$

周期卷积

- 为了使复卷积数学意义明显，令围线为一个以原点为圆心的圆，即： $v = \rho e^{j\theta}, z = re^{j\omega}$
- 则复卷积公式变为：

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(\rho e^{j\theta}) X\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\omega-\theta)}\right) \frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$
$$\stackrel{r=const}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- 由于积分是在 π 到 $-\pi$ 的周期上进行的，所以称为**周期卷积**。



11、帕塞瓦定理

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$R_{x-} R_{h-} < 1 < R_{x+} R_{h+}$$

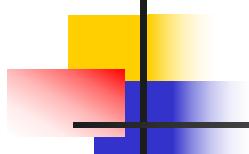
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*(v^{*-1})v^{-1}dv$$

$$Z[h^*(n)] = H^*(Z^*)$$



$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$Y(z) \Big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$



若积分围线取为单位圆，即：

$$v = e^{j\omega}$$

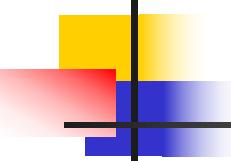
则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

再进一步，若令 $h(n) = x(n)$ ，则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

上式表明：时域中序列的能量与变换域中频谱的能量是一致的。

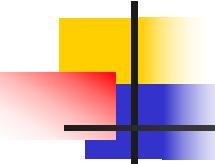


四、 Z反变换

- 从给定的**Z变换**及其**收敛域**中还原出原始序列**x(n)**, 称为**Z反变换**

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

- **Z反变换的实质是求X(z)的幂级数展开式**, 通常有三种方法: **长除法、部分分式法、留数法** (围线积分法)。



部分分式法

- 在实际应用中，一般**X(z)**是**z**的**有理分式**:

$$X(z) = B(z) / A(z)$$

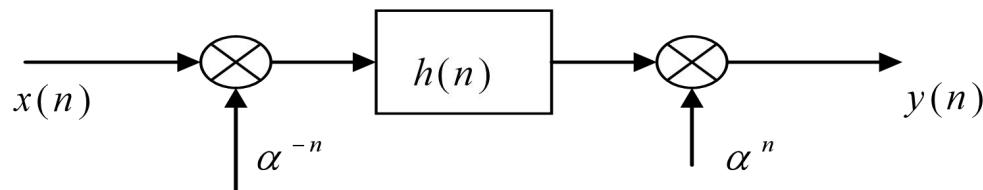
- **A(z)**及**B(z)**都是变量**z**的**实系数多项式**，并且**没有公因式**，
则可展成部分分式形式

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

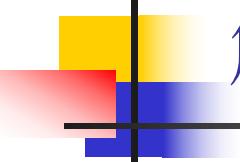
$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_i Z^{-1}[X_i(z)]$$

例题3

- 离散系统如下， $h(n)$ 为LTI系统



- 1) 整个系统是否为LTI?
- 2) 若系统是LTI的，请给出系统的单位冲激响应g(n)



解答：

$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^n = y[n]$$

■ 1) $k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \longrightarrow [k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$

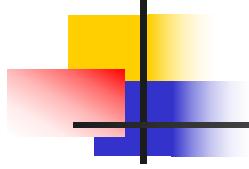
$$[k_1 x_1[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n + [k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$$
$$k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$$

$$y[n] = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$

$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$
$$= \sum_k \alpha^{n-k} x[k] h[n-k]$$

$$T\{x[n-m]\}$$
$$= (\alpha^{-n} x[n-m] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$
$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k-m] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$

$$y[n-m] = \sum_k \alpha^{n-m-k} x[k] h[n-m-k]$$


$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^n = y[n]$$

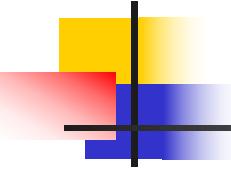
■ 2) $g[n] = \{\delta(n)\alpha^{-n} * h[n]\} * \alpha^n = h[n] * \alpha^n$

$$y[n] \cdot \alpha^{-n} = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n])$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z) \cdot H(z)$$

$$Y(z') = X(z') \cdot H\left(\frac{z'}{\alpha}\right)$$

$$g[n] = Z^{-1}[H\left(\frac{z}{\alpha}\right)] = \alpha^n h[n]$$



信号变换小结：

- 变换是从另一个维度来审视信号
- DTFT隐含有周期性，以及信号频谱分解的概念
- Z变换需要注意收敛域问题
- 卷积特性是信号变换中的主要性质
- 对称性对于实信号的变换很重要
- 结论比过程重要，但是过程要能自己走通

作业：

- 2.8
- 2.11
- 2.17
- 2.44

- 3.1(b)、(g)
- 3.3
- 3.4
- 3.6(c)
- **3.9**
- 3.28





谢 谢

授课教师：孙国良

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

3.2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

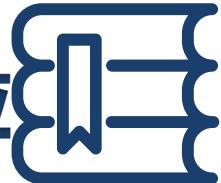
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

系统函数与频率响应



离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

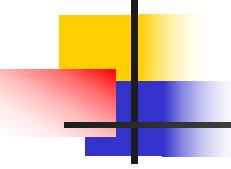
- 1.1 信号
 - 六大信号
 - 九大运算

- 2.1 DTFT
- 2.2 Z变换

- 1.2 系统
 - 五大类
- 1.3 LTI系统
 - 卷积
- 1.4 差分方程

- 2.3 LTI
 - 系统函数(稳定、因果)
 - 频率响应
 - 频率定义
 - 特征函数
 - 滤波
 - 幅度、相位

???



2.3 LTI 系统函数和频率响应

- 2.3.1 系统函数
 - 定义
 - 因果稳定性考察
 - 差分方程
- 2.3.2 频率响应
 - 定义
 - 特征函数
 - 零、极点对频率响应的影响

2.3.1 LTI的系统函数

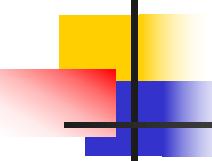
- 一、系统函数定义
- LTI系统可以由其单位冲激响应来完整表示，即：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = \downarrow X(z)H(z)$$

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

- **H(z)**描述了系统输入输出之间的关系，称之为传递函数或系统函数。

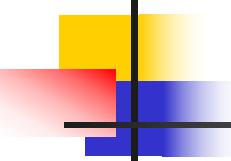


二、系统函数与因果、稳定性的关系

- 线性时不变系统稳定的充分必要条件是：冲激响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \xrightarrow{|z|=1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

- 如果系统函数的收敛域包括单位圆，则系统是稳定的，反之亦成立；即系统的频率响应存在且连续。
- LTI因果稳定的充分必要条件是： $|z| \geq 1$ ，收敛域必须包括单位圆及单位圆外的所有区域，系统函数的全部极点必须在单位圆内部。



例题1

- 设序列 $x(n)$ 是LTI系统在输入为 $s(n)$ 时的输出, 系统可以由下面差分方程描述:

$$x[n] = s[n] - e^{8a} s[n - 8] \quad a > 0$$

- 1) 求系统函数 $H_1(z)$, 并画出它的零极点分布图, 指出相应的收敛域
- 2) 设计一个LTI系统 $H_2(z)$, 要求可以利用 $x(n)$ 恢复 $s(n)$, 求该系统的系统函数并讨论其因果性和稳定性。
- 3) 求出所有可能的单位冲激响应 $h_2(n)$

解：

1)

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - e^{8a} z^{-8}$$

$$c_k = e^{(8a + i 2k\pi)/8} = e^{(a + ik\pi/4)}$$

ROC $|z| \neq 0$

2) $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-8}}$

- 收敛域的选择有两种可能：
- (i) $|z| < e^a$, 此时 $H_2(z)$ 稳定, 非因果。
- (ii) $|z| > e^a$, 此时 $H_2(z)$ 不稳定, 但因果

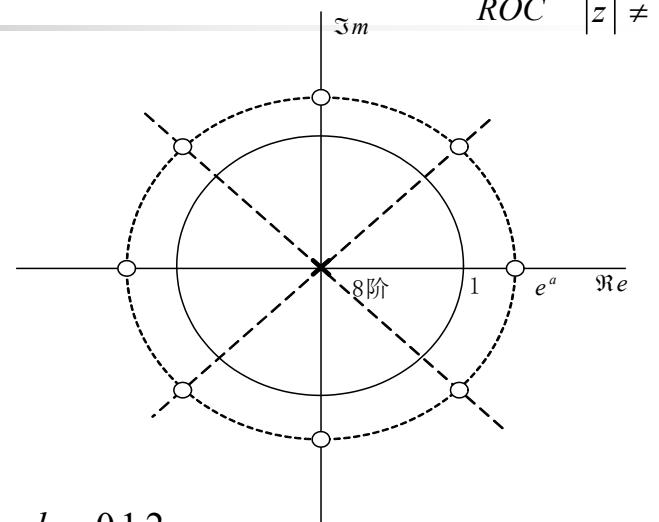
3) $H_2(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-1}}$ $H_2(z) = H'_2(z^8)$

$$h_2[n] = (e^{8a})^n u[n] \quad |z| > e^{8a}$$

$$h_2[n] = -(e^{8a})^n u[-n-1] \quad |z| < e^{8a}$$

$$h_2^1[n] = \begin{cases} (e^a)^n u[\frac{n}{8}] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$h_2^2[n] = \begin{cases} -(e^a)^n u[-\frac{n}{8} - 1] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



三、系统函数与差分方程的关系

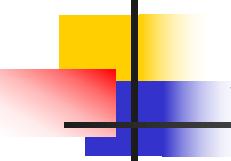
- 零状态时为**LTI**系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

- 系统函数为: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$

- 差分方程和系统函数系数对应;
- 仅由差分方程得来的**系统函数**并没有给定**收敛域**, 因而可代表不同系统;
 - **差分方程**并不唯一确定一个**LTI**系统的单位抽样响应, 需要有相应的**边界条件**;
 - **系统函数**仅描述了**系统在零状态下的情况**, 即可以用于解决零状态的常系数线性差分方程, 对于非零状态则无法解决



用于非零状态的单边Z变换

- 系统函数无法处理非零状态下的系统响应
 - 假设系统零状态，采用**双边Z变换**。
- 为了解决上述问题，将对双边Z变换进行变形，构成**单边Z变换**，如下：

$$X^+(z) = Z^+ [x(n)] = Z[x(n)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

其时移特性如下：

$$Z^+ [x(n - k)]$$

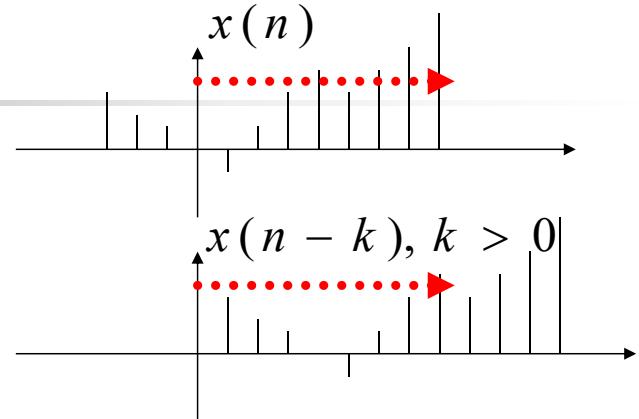
$$= Z[x(n - k)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - k)z^{-n}$$

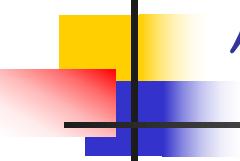
$$= \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k} X^+(z)$$

$$= x(-k) + x[-(k-1)]z^{-1} + x[-(k-2)]z^{-2} + \dots + x(-1)z^{-(k-1)} + z^{-k} X^+(z)$$





例题2：求解差分方程

$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

- 其中: $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

- 初始条件为: $y(-1) = 4, y(-2) = 10$

-

- 解: 对差分方程两边同时进行单边Z变换, 得到:

$$Y^+(z) - \frac{3}{2}[y(-1) + z^{-1}Y^+(z)] + \frac{1}{2}[y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y^+(z)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

■ 将初始条件代入后可得：

$$Y^+(z) \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})$$

■ 所以：

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]} = \underbrace{\frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{(1 - 2z^{-1})}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]}}_{\text{零输入响应}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{齐次解}} + \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}}}_{\text{特解}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{暂态解}} = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{暂态解}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{稳态解}} + \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}}}_{\text{稳态解}} \end{aligned}$$

2.3.2 频率响应

- 由DTFT卷积和性质

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

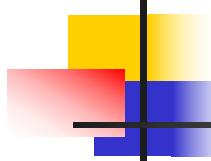
$$H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) / X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$$

$$grd[H(e^{j\omega})] = -\frac{d \arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

- 1、单位圆上的系统函数是频率响应。
- 2、传递函数存在，频率响应未必存在；
- 3、任意信号通过**LTI**系统不会产生新频率分量。



一、LTI特征函数

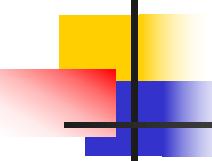
- 设LTI输入的复指数序列为：

$$x(n) = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \quad -\infty < n < +\infty$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0(n-m) + \phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\ &= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0}) \end{aligned}$$

- 1、输出信号与输入为同频信号，
- 2、输出信号幅度受频率响应的幅值加权，
- 3、输出信号相位为输入信号的“相位”与系统相位响应之和



频谱及频率的再解释

■ 信号的频率分量 (DTFT再解释)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

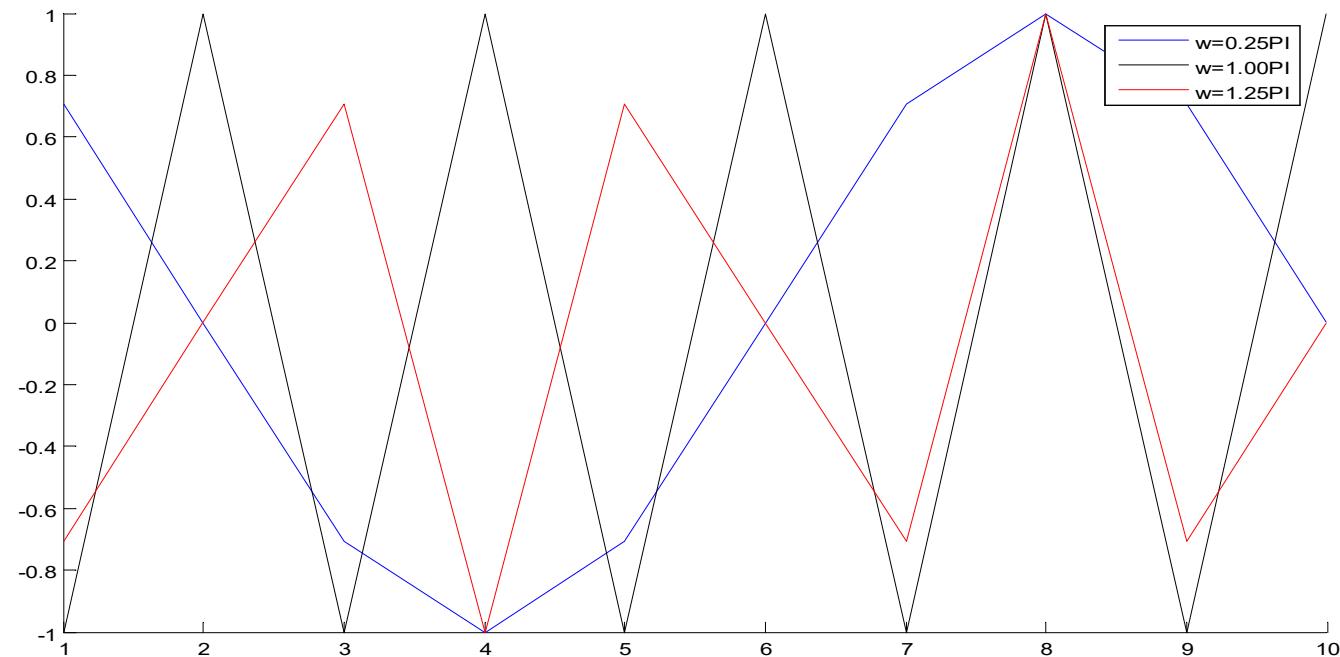
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n}$$

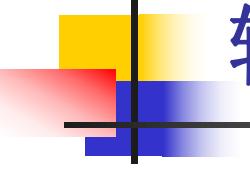
$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) H(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega] e^{jk\Delta\omega n}}{2\pi} H(e^{jk\Delta\omega})$$

- 1、输入信号可看作在频域上分段划分的许多个复指数分量信号
- 2、系统响应是系统对输入信号的每一个复指数分量响应之和

数字频率概念及最高频率





输入为正、余弦信号

- 设

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A[e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}]}{2}$$

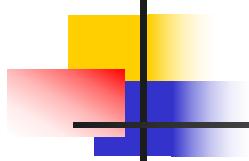
- 由复信号的情况，则得系统的输出为：

$$y(n) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{-j\omega_0})]$$

$$y(n) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{-j\omega_0})]$$

- 假设 $h(n)$ 是实序列，则 $H(e^{j\omega})$ 满足共轭对称条件，幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 为偶对称，相角 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 为奇对称。所以有：

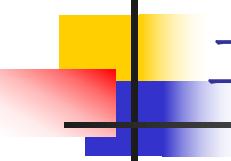
$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} \left| H(e^{j\omega_0}) \right| [e^{j(\omega_0 n + \phi)} e^{j \arg[H(e^{j\omega_0})]} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} e^{-j \arg[H(e^{j\omega_0})]}] \\ &= A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \frac{[e^{j(\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])} + e^{-j(\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])}]}{2} \\ &= A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \cos \{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\} \end{aligned}$$

- 
- 例题3: LTI系统由零状态的差分方程描述:

$$y(n)-2y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)$$

- 若输入 $x(n)=\cos(0.3n)+\sin(1.4n)$, 请求系统输出 $y(n)$

- 例题4: LTI系统频率响应为: $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\omega - 1 & |\omega| < 0.5\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- 若输入 $x(n)=\cos(0.3\pi n)+\sin(1.4\pi n)$, 请求系统输出 $y(n)$



二、系统零极点与频率响应的关系

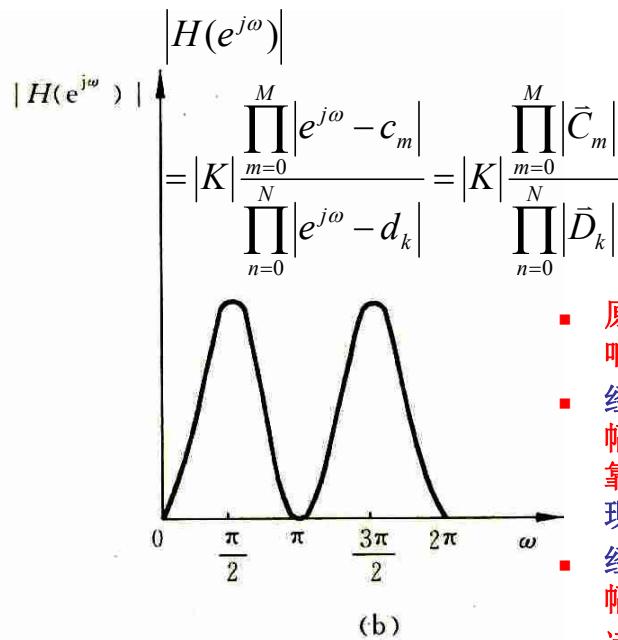
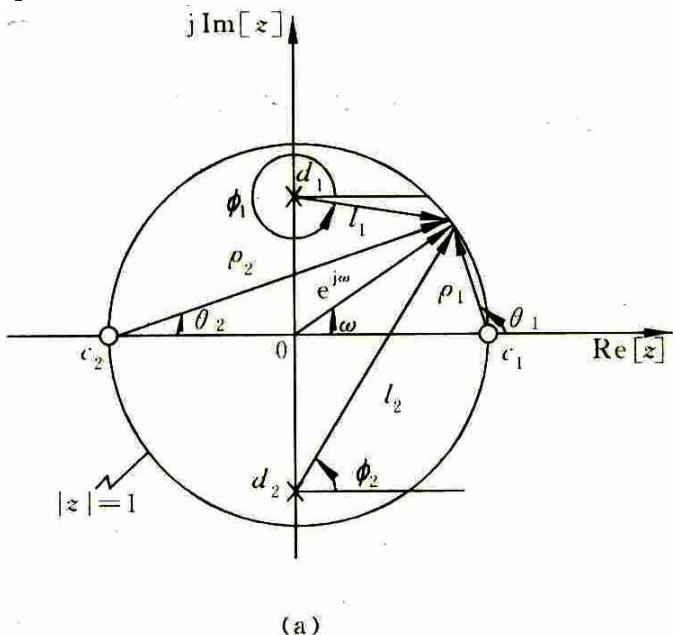
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=0}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{n=0}^N (1 - d_n z^{-1})} = K \cdot z^{N-M} \frac{\prod_{m=0}^M (z - c_m)}{\prod_{n=0}^N (z - d_n)}$$

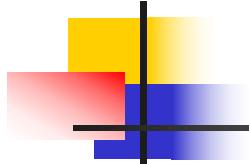
- 式中 c_m 是系统的零点, d_k 是系统的极点, 它们都由差分方程的系数 a_k 和 b_m 决定。
- 除比例常数 K 以外, 系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

幅度响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = K \cdot e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=0}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{n=0}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$



- 原点处的零、极点对幅度响应无任何影响。
- 经过单位圆上的一个零点，幅度响应就变为零，经过靠近单位圆的零点则会出现谷点；
- 经过单位圆附近的极点时幅度响应就会出现峰点
- 远离极点和零点的区域幅度特性会比较平坦



相位响应

$$\arg[H(e^{j\omega})]$$

$$= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{n=0}^N \arg[e^{j\omega} - d_n]$$

$$= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^M \arg[\bar{C}_m] - \sum_{n=0}^N \arg[\bar{D}_n]$$

$$= \arg[K] + \sum_{m=0}^M \{\arg[\bar{C}_m] - \omega\} - \sum_{n=0}^N \{\arg[\bar{D}_n] - \omega\}$$

- 原点处的零、极点对相位响应为线性作用，极点为正群延迟（滞后），零点为负群延迟（超前）。
- 靠近单位圆的零点和极点会造成相位的剧烈变化，导致较大的群延迟；
- 远离极点和零点的区域相位特性会比较平坦
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零。

一阶差分系统

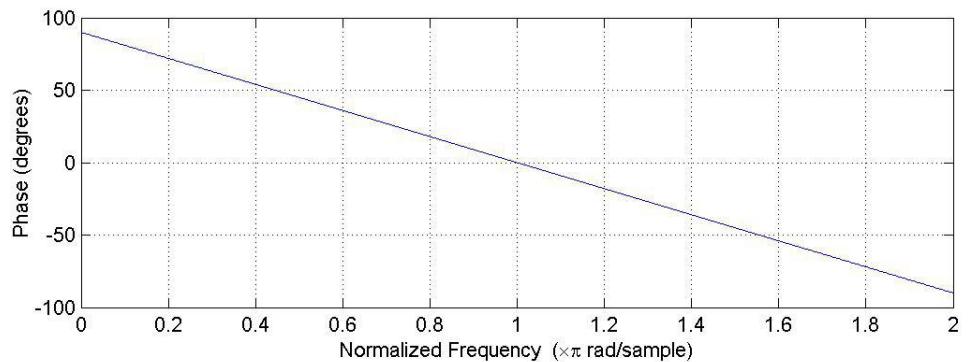
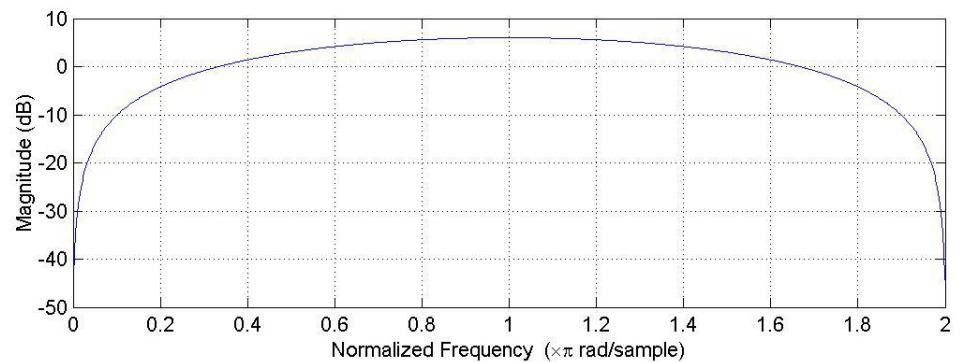
$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n])$$

$$= 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 2 - 2 \cos \omega$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c \tan \frac{\omega}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

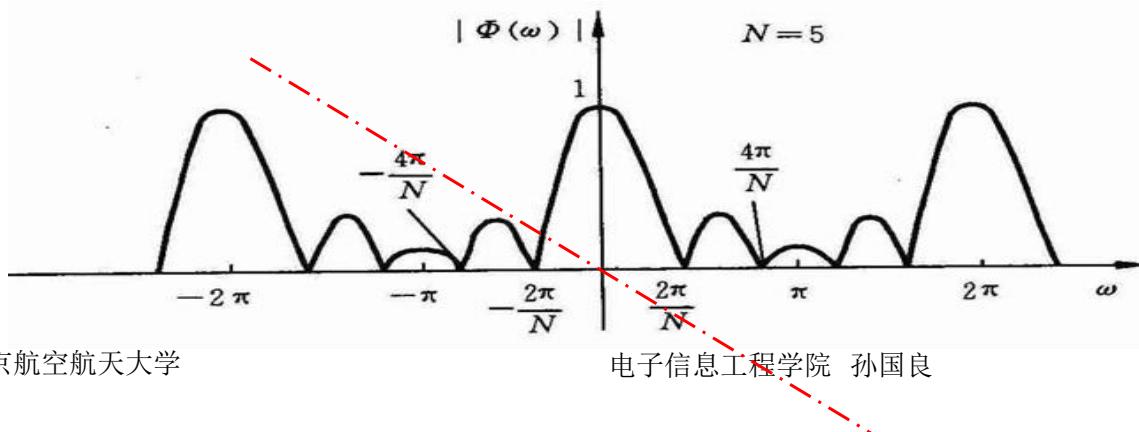


滑动平均滤波器

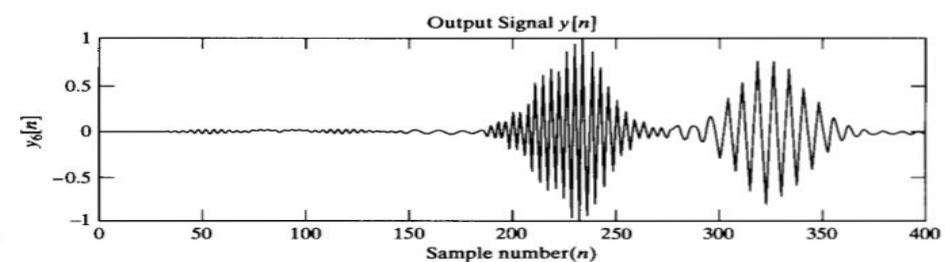
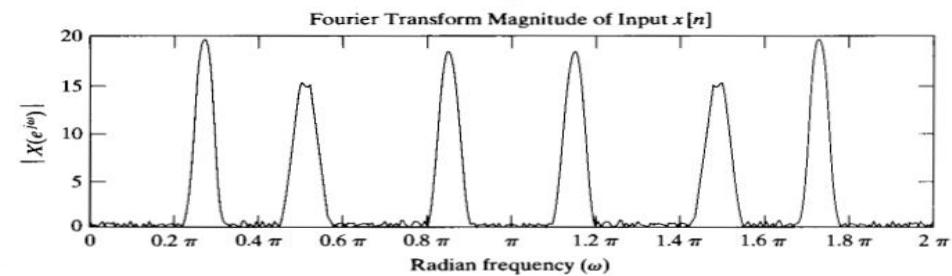
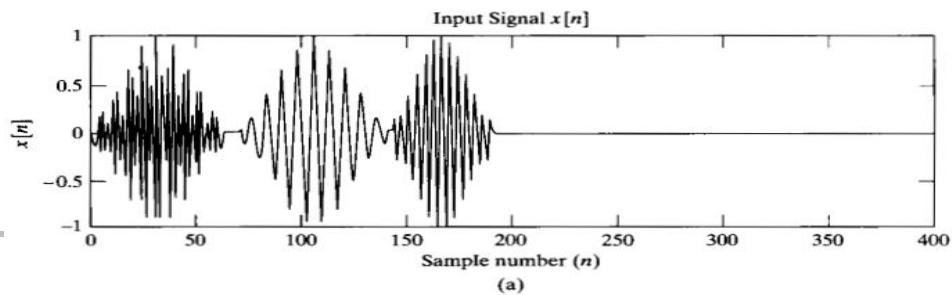
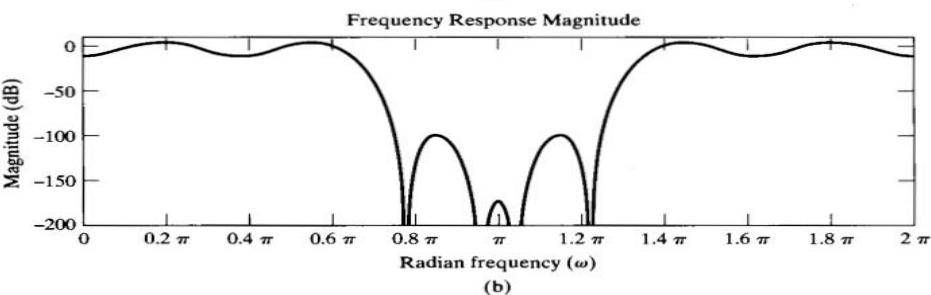
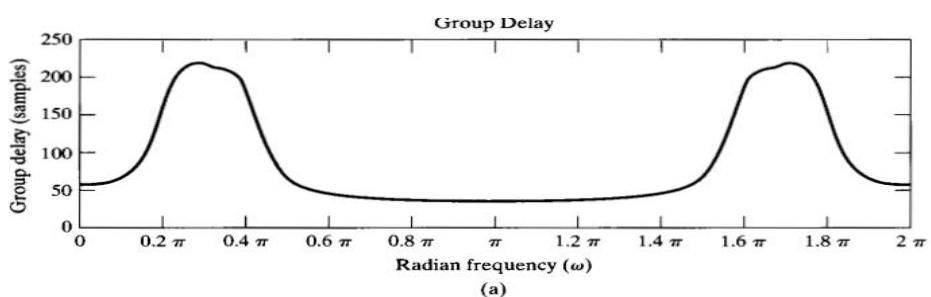
$$y(n) = \frac{1}{5} \sum_{m=0}^4 x(n-m)$$

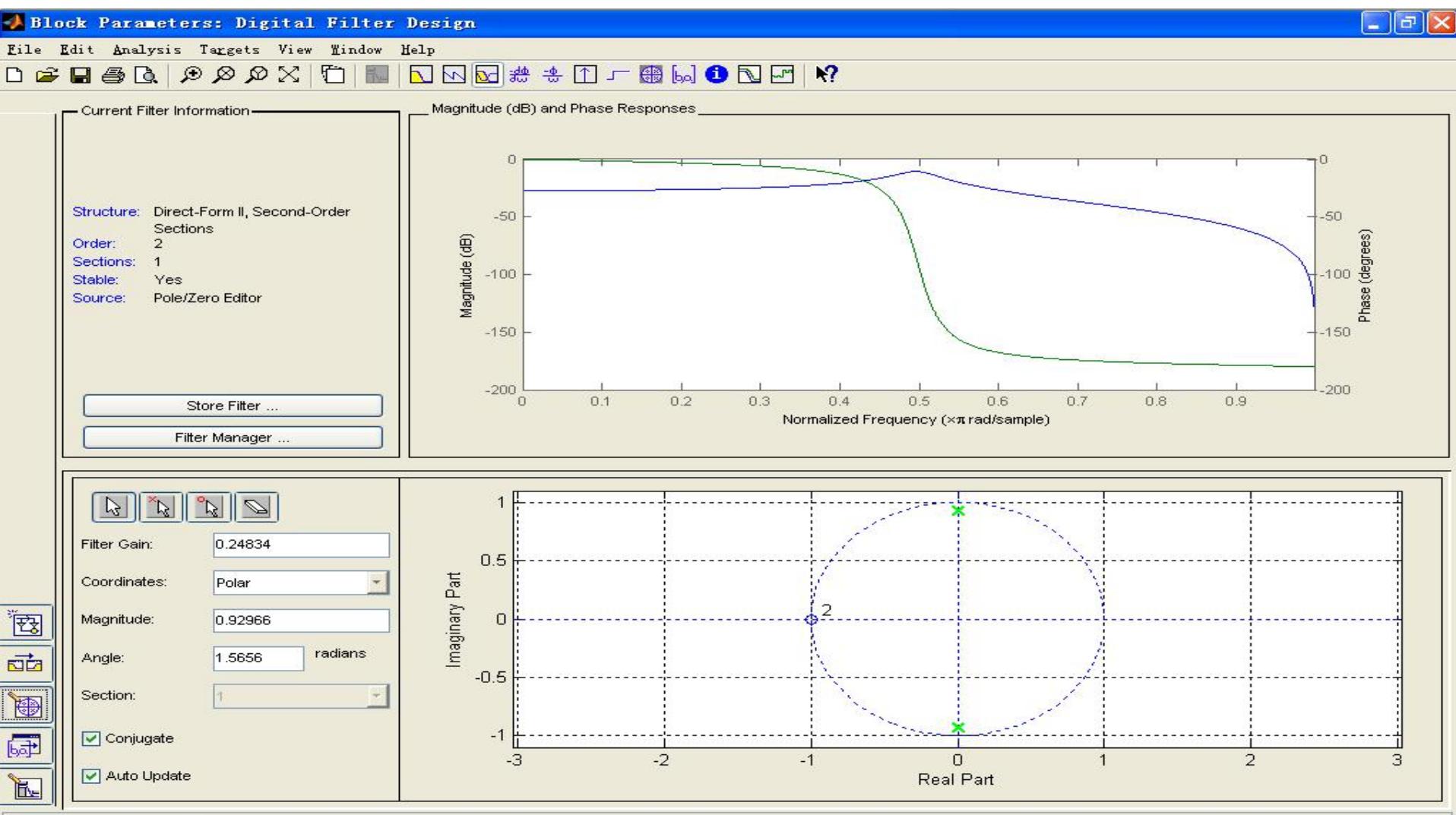
- $h(n) = u(n) - u(n-5);$

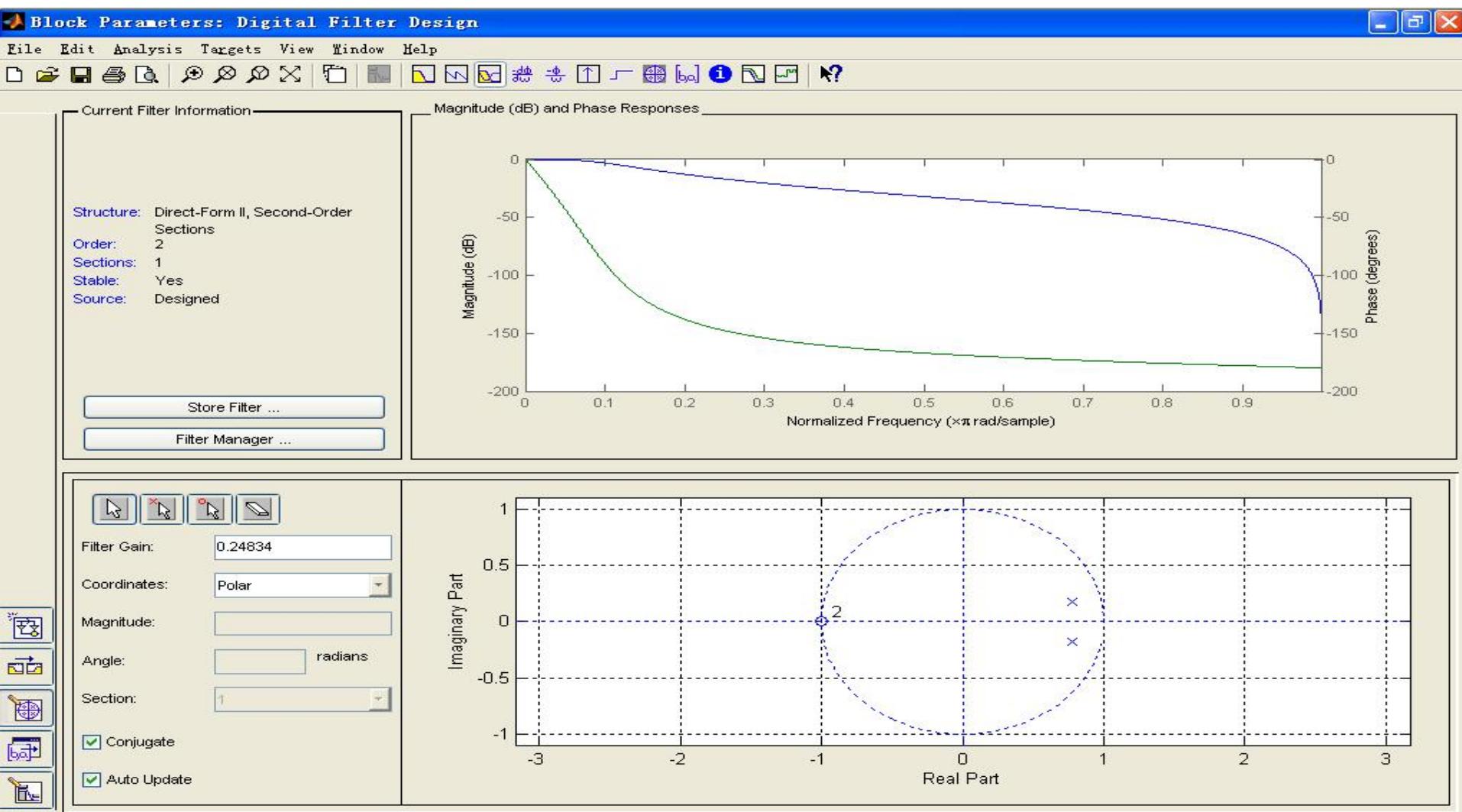
$$W_R(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = e^{-jw(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

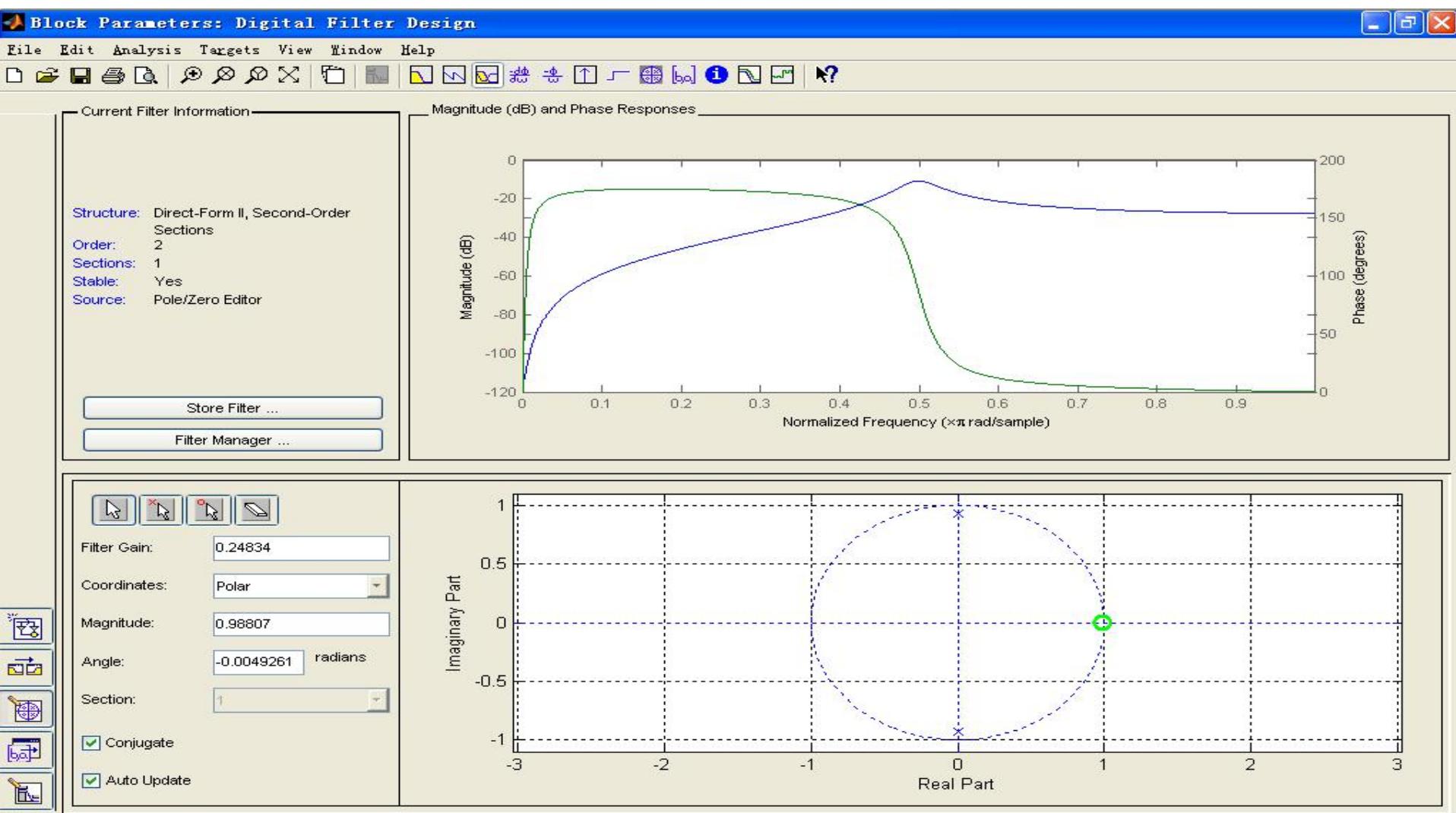


增益和群延迟的理解

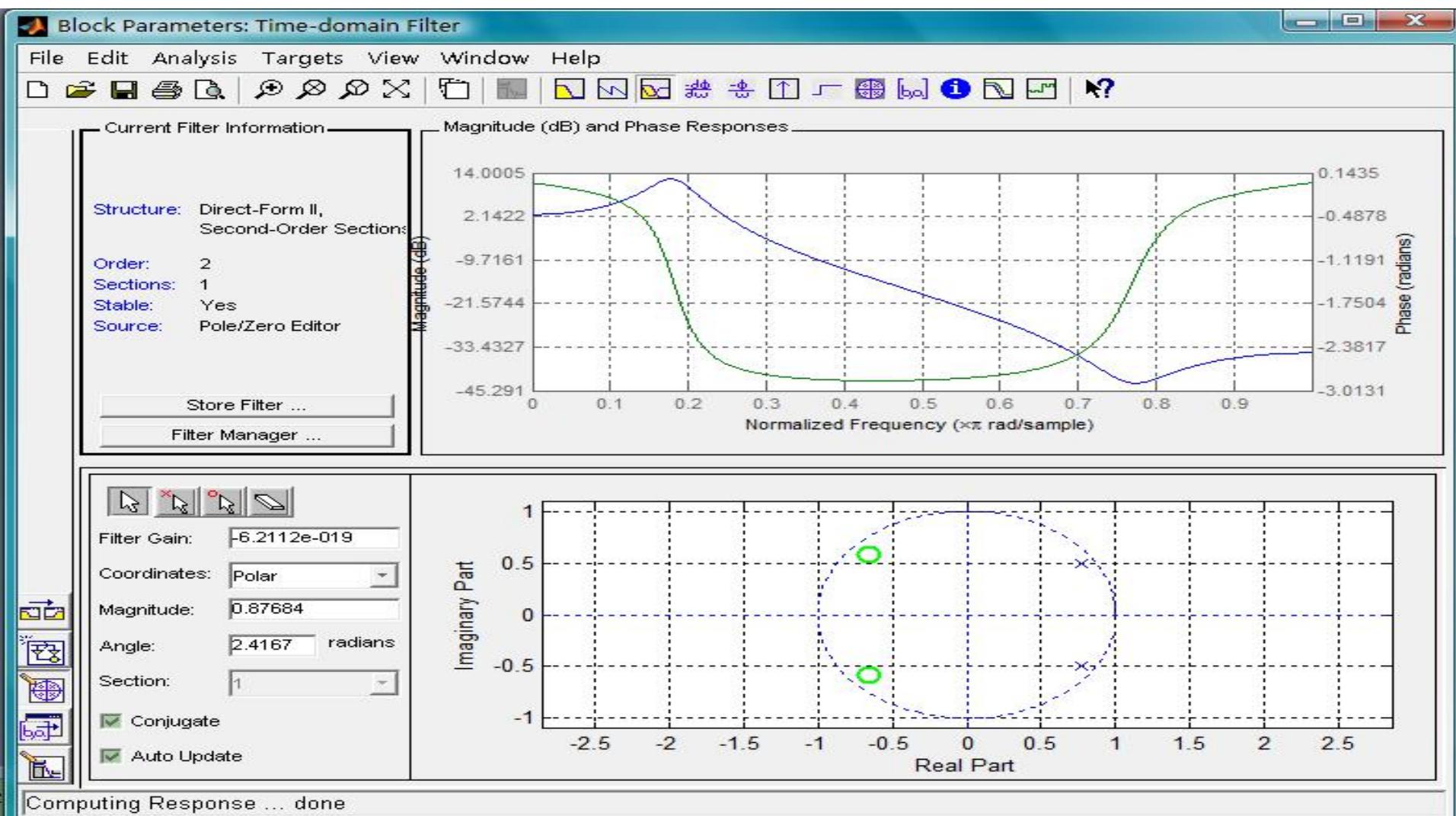


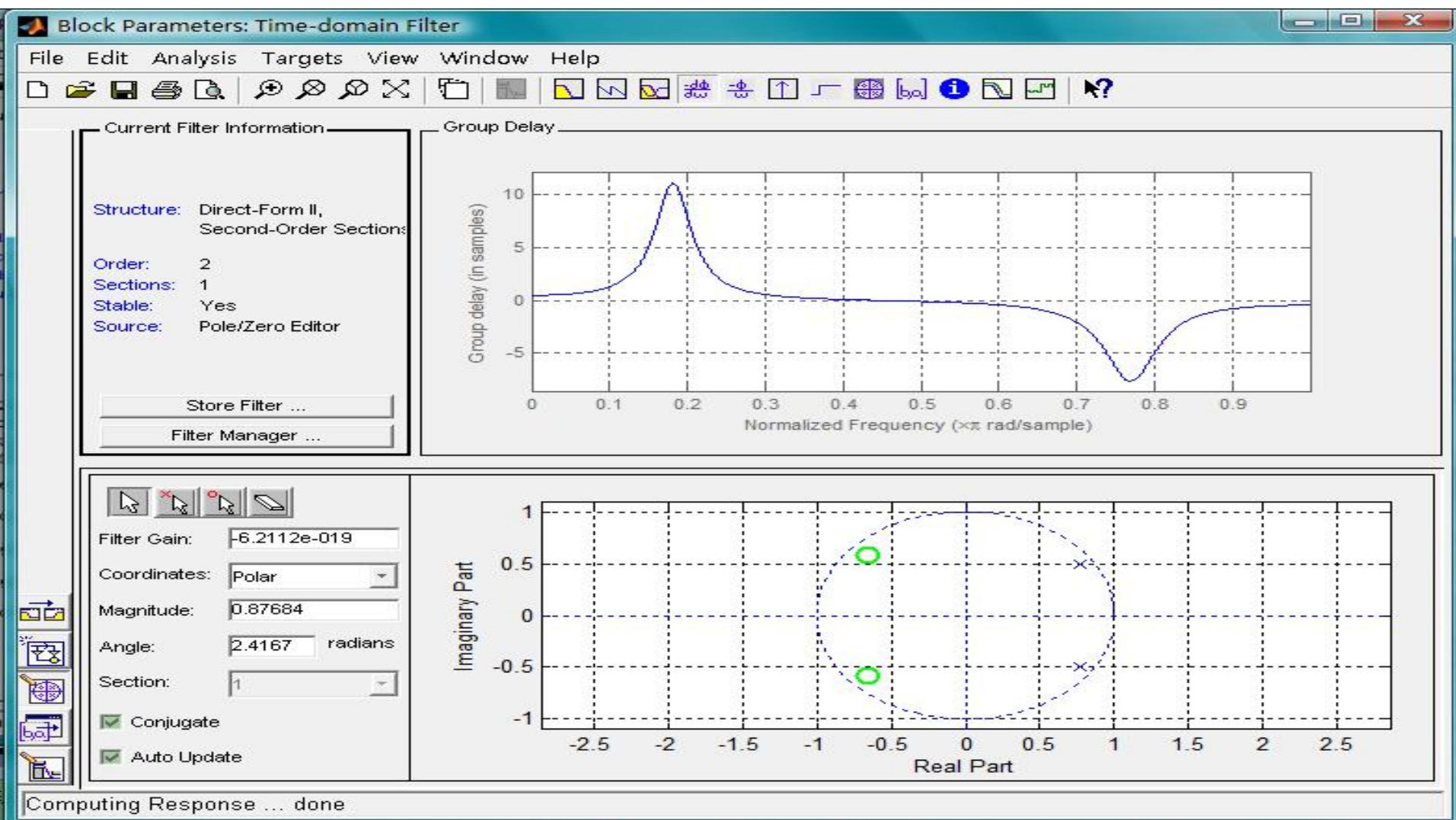


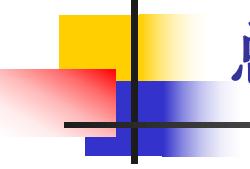




Designing Filter Done







总结：

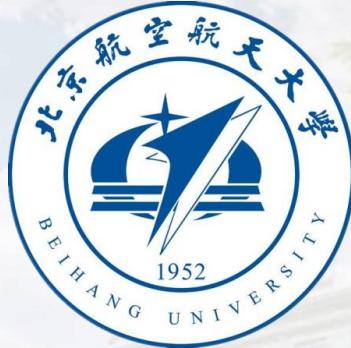
- 系统函数
 - 前提 LTI
 - 因果稳定性的约束
 - 与差分方程的关系
- 频率响应
 - 稳定的LTI
 - 对输入信号的作用
 - 频谱分量
 - 特征函数
 - 增益和相位及群延迟
 - 与零极点的关系
 - 幅度与零极点
 - 相位与零极点

作业

- 2.32
- 2.33
- 2.42

- 3.40
- 3.41
- 5.1 5.4 5.12





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

3.3



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

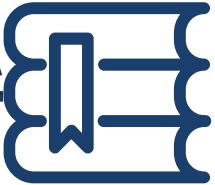
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

LTI系统幅相特性分析



- 典型频响的LTI系统有哪几类？
- 具体表现形式和作用是什么？

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 一般来说关于幅度特性的了解并没有给出任何有关相位的信息；两者独立。然而，**有理LTI系统**幅度和相位特性间存在制约

- 如果幅度特性已知，与其有关的相位特性仅有有限种选择。
- 如果零极点个数（阶数）和相位特性已知（线性相位），除了幅度加权因子外，也仅有有限可数种幅度特性可供选取。
- 在特殊条件下（如最小相位），幅度与相位特性一一对应。

离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

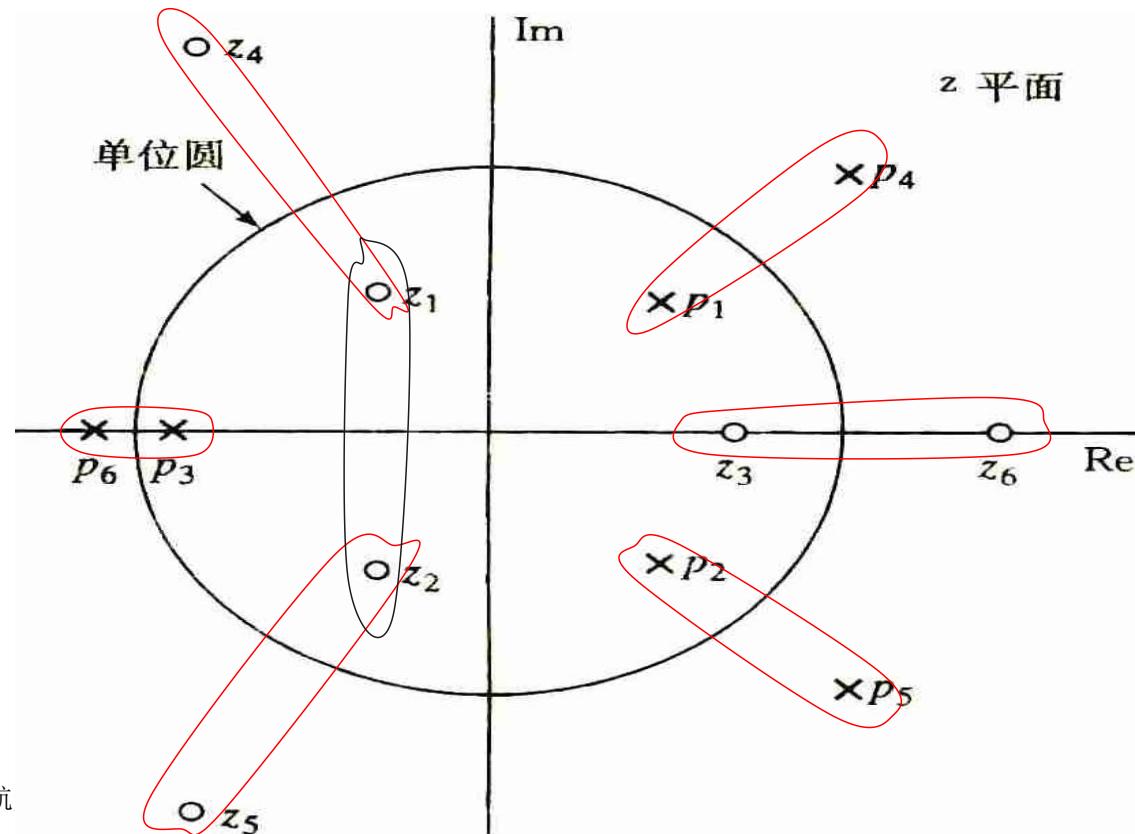
幅度特性约束下的系统函数

■ 给定频率响应的幅度平方特性下

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- 尽量使由幅度平方响应演化出来的零、极点在单位圆内外皆有
- 使得总能够选择出一个物理可实现的系统来满足幅度响应的要求。

Ex: 设由系统幅度响应所引导的 $C(z)$ 的零、极点如图所示，若系统为常实系数线性差分方程所确定的因果稳定系统，试确定其系统的零、极点。



EX: 具有相同C(z)的LTI系统

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

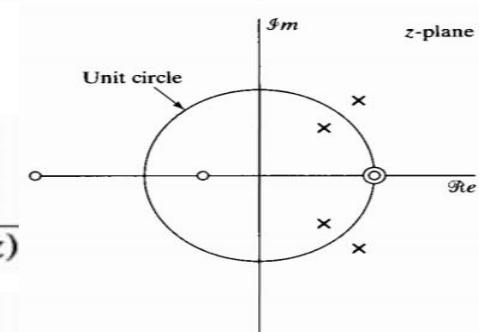
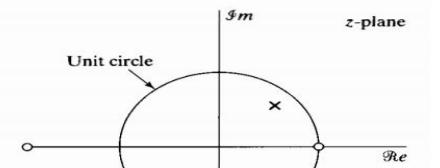
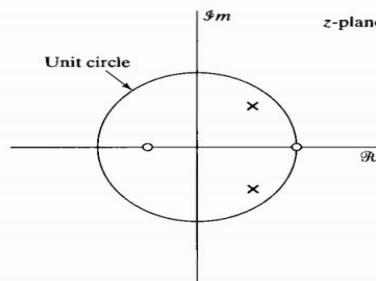
$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$

$$C_1(z) = H_1(z)H_1^*(1/z^*)$$

$$= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})2(1 - z)(1 + 0.5z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)}$$

$$C_2(z) = H_2(z)H_2^*(1/z^*)$$

$$= \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)}.$$



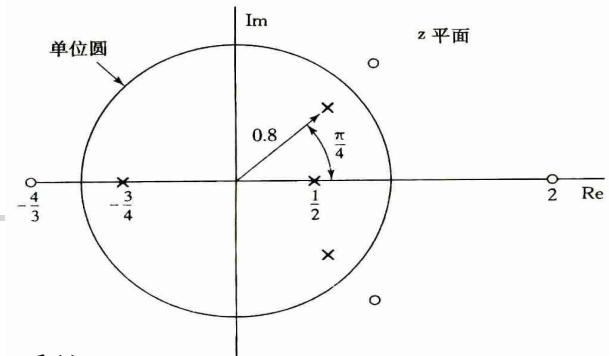
一、全通系统

- 若系统对所有的频率分量的幅度响应均为非零恒定值，则该系统即为全通系统。

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

- 幅度响应为：

$$\begin{aligned} |H_{ap}(e^{j\omega})| &= \left| H_{ap}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| e^{-j\omega} \left(\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right) \right| = \left| e^{-j\omega} \right| \left| \frac{x^*}{x} \right| = 1 \end{aligned}$$



- 通常，全通系统就是由上式扩展来的：

$$\begin{aligned}
 H_{ap}(z) &= A \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad \xrightarrow{\text{实冲激响应系统}} \\
 &= A \prod_{k=1}^{Nr} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{(N-Nr)/2} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k^* z^{-1}} = A \frac{Z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)}
 \end{aligned}$$

- $D(z)$ 为实系数多项式，所以

$$D(e^{j\omega}) = D^*(e^{-j\omega}) \quad |H_{ap}(z)|_{z=e^{j\omega}} = A(\text{const})$$

- 全通系统的零点与极点呈共轭倒数对关系。
- 全通系统是从其幅度响应特性定义，但相位响应却更重要。

相位响应

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

- 令: $a = re^{j\theta}$

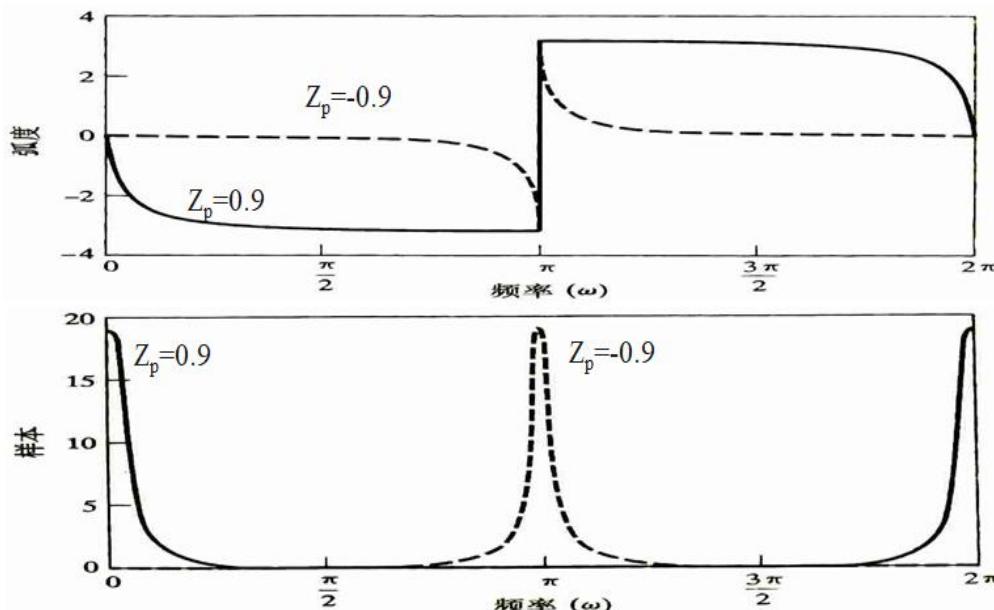
$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$= -\omega - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right]$$

$$grad[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{-j(\omega - \theta)}|^2}$$

- 群延迟为正值, 连续相位递减。



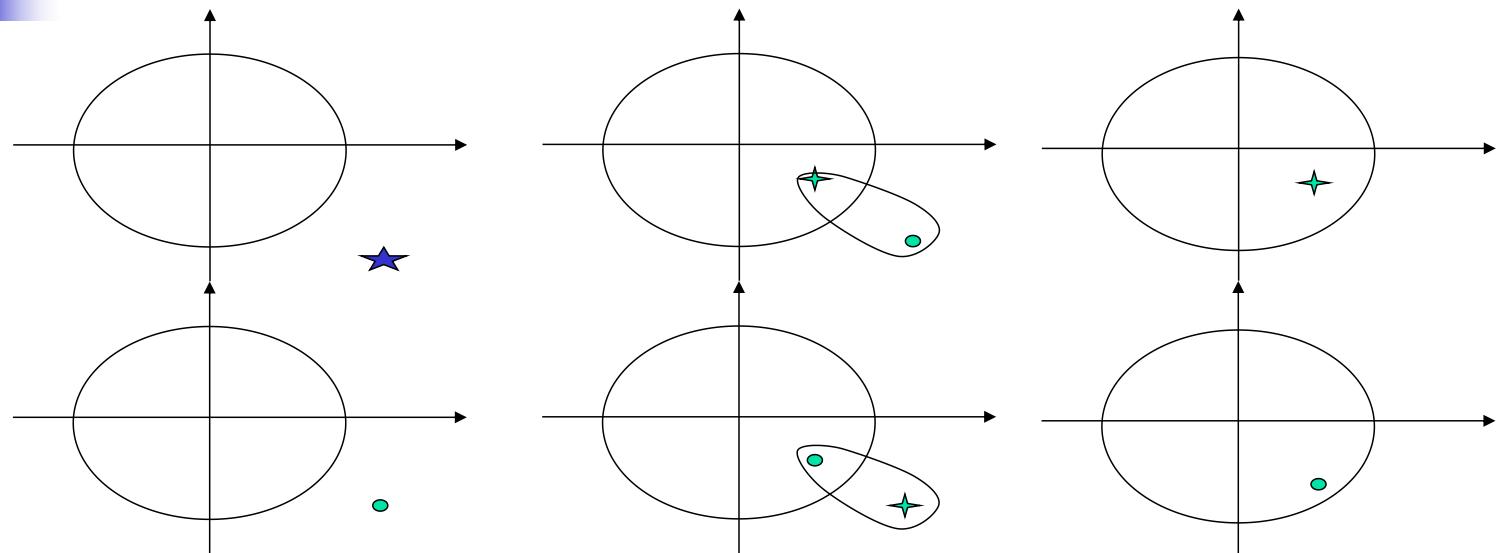
- 对于高阶因果全通系统而言，由于：

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^N \arg[H_{api}(e^{j\omega})]$$

$$grd[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^N grd[H_{api}(e^{j\omega})]$$

- 同样具有**群延迟为正值**，**连续相位负递减**的特性。
- 全通系统在实际中有如下用途：
 - **1、用作相位均衡器**，对系统相位、群延迟失真进行补偿；
 - **2、任何因果稳定系统皆可分解为全通系统和最小相位系统的级联；**
 - **3、若所设计的系统是非稳定的，可用其交换零、极点，使系统**稳定**，而保证系统的幅度特性不变。**

非稳定系统调整为稳定系统



非最小相位系统调整为最小相位系统

二、最小相位系统

- LTI有理系统，其频率响应的幅度特性不能唯一确定该系统。原因何在？
 - 稳定、因果性要求并没有对零点作约束
 - 假如某一系统具有给定的幅度特性，则该系统与任何可选择的全通因子级联将不影响它的幅度特性。
- 逆向思维：
 - 是否任何因果稳定有理系统函数是由一个决定幅度特性的基本核被一系列全通因子包裹着？即系统是全通系统和某一类基本系统（最小相位系统）级联的形式？即：

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

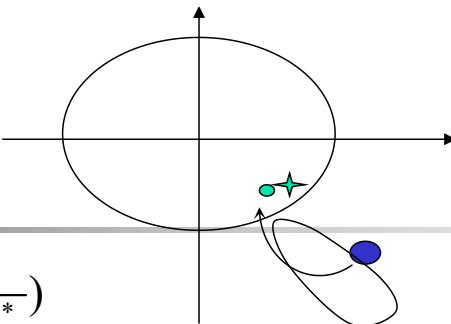
- 寻找的线索？全通因子的零点都在单位圆外

LTI系统全通分解 证明:

- 假设 $H(z)$ 为因果稳定非最小相位系统，将有 r 个零点在单位圆外 (z 在单位圆内)，其余的零、极点都在单位圆内。
- 在单位圆内的零、极点将构成最小相位系统 $H_1(z)$ ，那么 $H(z)$ 就能表示成：

$$H(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^r \left(z - \frac{1}{c_k} \right)$$

$$H(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^r \left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)$$



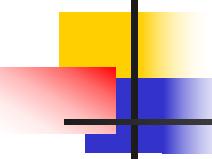
$$= H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-c_k^* \frac{\left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)}{(z - c_k)} \right] \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right]$$

$$= H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right] \prod_{k=1}^r \left[-c_k^* \frac{\left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)}{(z - c_k)} \right]$$

$$= \left\{ H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right] \right\} \prod_{k=1}^r \left[\frac{\left(z^{-1} - c_k^* \right)}{(1 - c_k z^{-1})} \right] = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

结论：

- 1) $H_{ap}(z)$ 由单位圆外的零点和其单位圆内的共轭倒数极点组成。
- 2) 最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 的零极点全部都在单位园内；不仅包含 $H(z)$ 中位于单位圆内的零、极点，而且也包含了与单位圆外那些零点镜像到单位圆内的共轭倒数零点。
- 3) 将最小相位系统位于单位圆内的零点反射到单位圆外与它们成共轭倒数的位置上而形成一个非最小相位系统。它们都具有相同幅度特性。



最小相位系统的性质

- “最小相位”名词代表这类系统三个**本质特征**:
 - 最小相位延迟
 - 最小群延迟
 - 最小能量延迟

1、最小相位滞后

- 由系统的全通分解知:
- 可以进一步得到:

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] \leq \arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

$$|\arg[H(e^{j\omega})]| \geq |\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]|$$

- 全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小（滞后）
- 对于具有相同幅度响应的所有系统而言，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的相位滞后。

2、最小群延迟

- 注意到具有相同幅度响应系统的群延迟为：

$$grd [H(e^{j\omega})] = grd [H_{\min}(e^{j\omega})] + grd [H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- 由于全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值，所以：

$$grd [H(e^{j\omega})] \geq grd [H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 因此在具有相同幅度响应的所有系统中，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的群延迟。

3、最小能量延迟

- 对于具有相同幅度响应的所有系统，该性质包含有两部分内容：
 - 1) 初值能量最大，即初值能量延迟最小：
 - 2) 部分能量最大，即部分能量延迟最小：

$$\sum_{m=0}^n |h(n)|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2$$

- 最小相位系统的部分能量最集中在**n=0**周围，也就是说，**最小相位系统的能量在所有相同幅度响应函数的系统中延迟最小**，也称为**最小能量延迟系统**。

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z) = H_{\min}(z) \frac{(z^{-1} - z_k^*)}{(1 - z_k z^{-1})} \quad \frac{H(z)}{(z^{-1} - z_k^*)} = \frac{H_{\min}(z)}{(1 - z_k z^{-1})} = Q(z)$$

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}) \quad H(z) = Q(z)(z^{-1} - z_k^*)$$

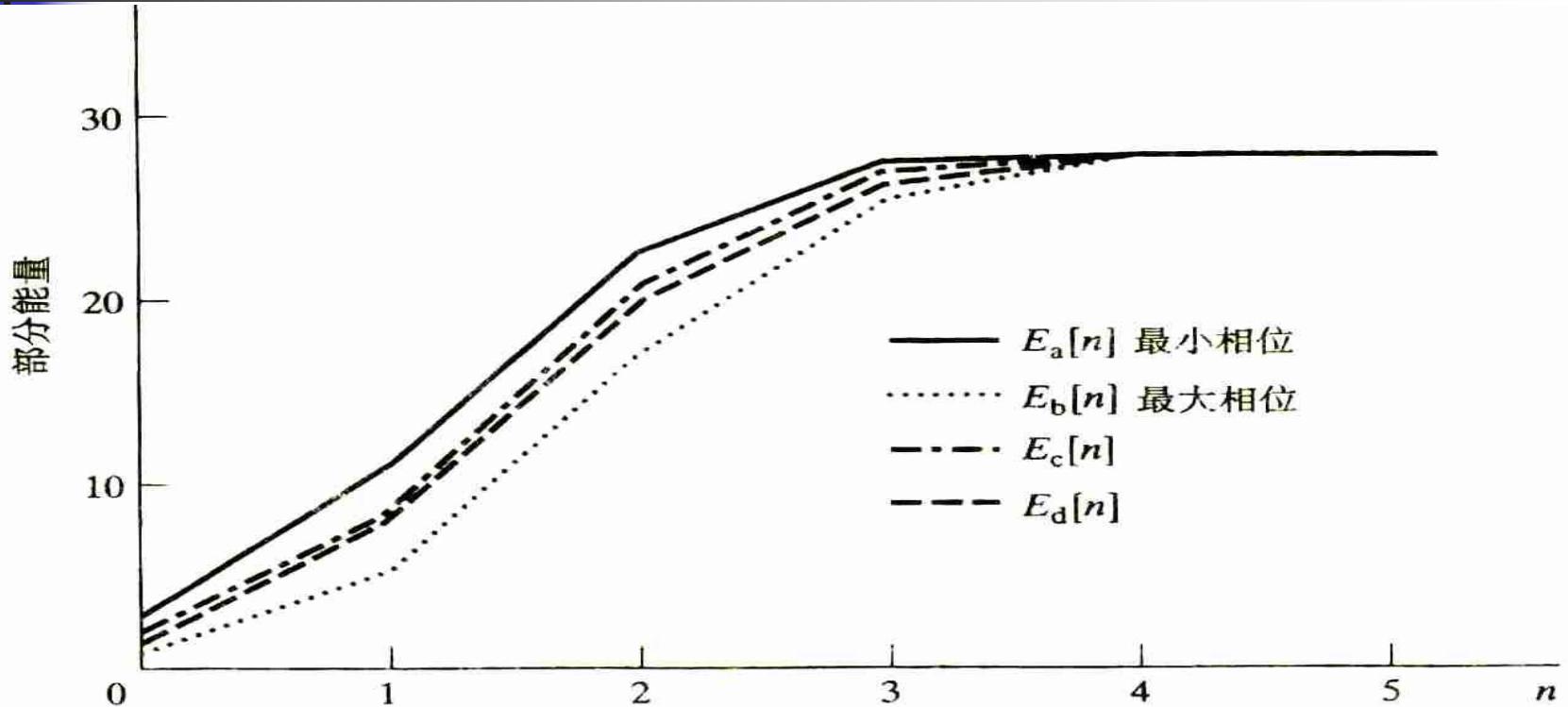
$$h_{\min}[n] = Z^{-1}\{H_{\min}(z)\} = q[n] - z_k \cdot q[n-1]$$

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = q[n-1] - z_k^* \cdot q[n]$$

$$z_k = a + jb$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 = \sum_{m=0}^n \left\{ |h_{\min}[m]|^2 - |h[m]|^2 \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \left\{ |q[m] - (a + jb) \cdot q[m-1]|^2 - |q[m-1] - (a - jb) \cdot q[m]|^2 \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \left\{ (1 - a^2 - b^2) \cdot [q^2[m] - q^2[m-1]] \right\} = (1 - |z_k|^2)q_n^2 \end{aligned}$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为**最大相位系统**。



逆系统与失真补偿

■ 逆系统

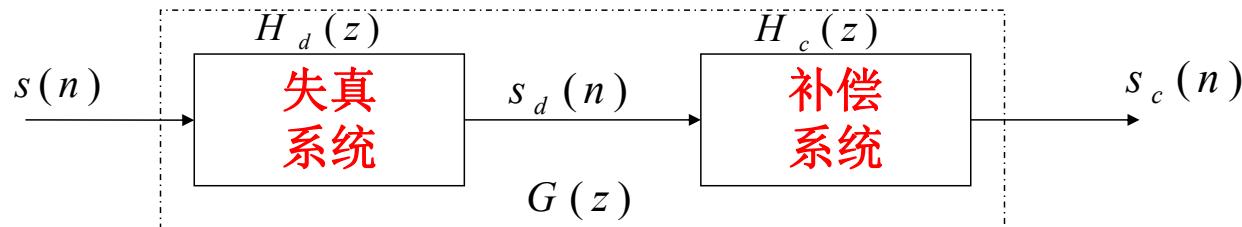
- 系统函数为 $H(z)$ 的LTI系统，其对应的逆系统定义为它与原系统级联后的总系统函数为1，即： $H_i(z) = 1/H(z)$
 - 原系统是有理系统，逆系统零极点分别是原系统极零点；
 - 若原系统和逆系统的频率响应存在，满足

$$H_i(e^{j\omega}) = 1 / H(e^{j\omega})$$

- 要求存在逆系统是合理的，譬如通信接收系统是发射系统的逆系统，才能无失真的恢复发射信息

信号传输失真

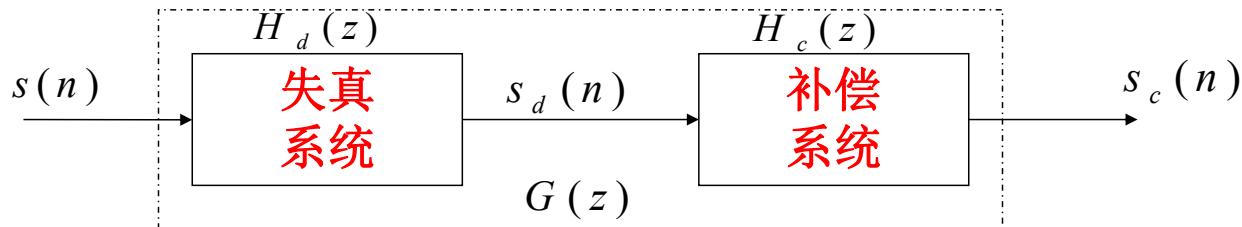
- 若一个信号已经被某个不合要求的频率响应的**LTI**系统所失真，那么可以用一个**补偿**系统来处理这个**失真了**的信号，如图所示。



- 传输失真包括**幅度失真**和**相位失真**两大类；
- 所有系统都存在逆系统，但并非所有因果稳定系统都有因果稳定的逆系统；
- 最小相位系统本身是因果稳定的，并且也有一个因果和稳定的逆系统，从而可以实现幅度和相位失真的**完全补偿**。

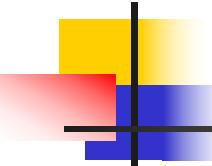
信号失真的补偿

- 若信号被某个**非最小相位的LTI**系统所失真，可以用一个**补偿**系统来补偿信号的**失真**。



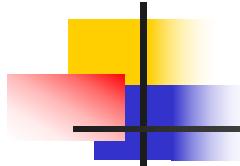
- 此时幅度失真和相位失真不可能被同时补偿；幅度失真可以利用其最小相位因子完全补偿：
- $$H_d(z) = H_{d \min}(z)H_{ap}(z)$$
- 相位失真可利用全通因子在某些有效频段进行补偿和平衡；

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d \min}(z)}$$



作业

- 5.12
- 5.14
- 5.18
- 5.22



■ 1.求单位冲激响应

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

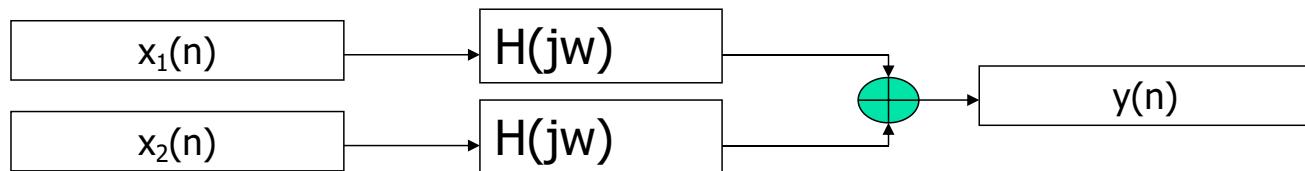
■ 2、求 $h(n-a)$ 的DTFT

三、 线性相位系统

- 在设计滤波器和其它系统中，往往希望系统在某一频带范围内具有近似**恒定的幅度**和**零相位**特性，以使信号通过时该频带信号**不失真**。
- 但是：
 - 1) 对因果系统而言，零相位是几乎是奢望。
 - 2) 相位失真使信号在时域的波形有很大的畸变，即便幅度响应为恒定时亦是如此。

Example1: 相位响应对信号的影响

- 双频信号经过**实**LTI系统



$$x_1(n) = A_1 \cos(\omega_1 n + \varphi_1), \quad x_2(n) = A_2 \cos(\omega_2 n + \varphi_2)$$

$$\text{suppose : } |H(e^{j\omega})| = 1, A_1 = A_2 = 1, \varphi_1 = \varphi_2 = 0;$$

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

$$y(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi(\omega_1)) + \cos(\omega_2 n + \varphi(\omega_2))$$

Example1: 相位失真对信号的影响

w1=0.03

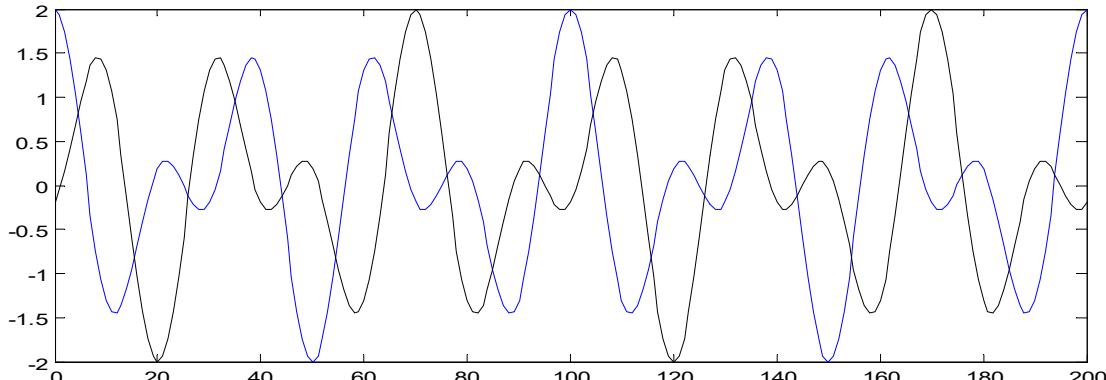
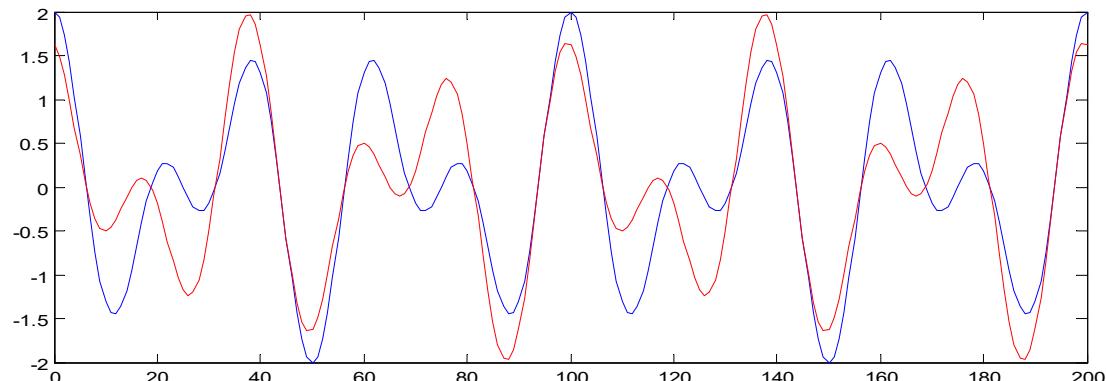
w2=0.05

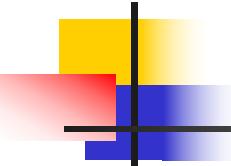
$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -38$$

$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -70$$





初步认知：

- 非线性相位响应使信号有很大的波形畸变，即使幅度响应为恒定时亦是如此；
- 线性相位响应在时域上表现的是整个信号的时间平移，信号的波形不发生失真。
- 不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统
- 下一步？
 - 如何寻找适合实用要求的线性相位系统？

一、基本定义

- 基本定义:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 相位响应

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$$

- 群延迟

$$grd[H(e^{j\omega})] = -\frac{d \arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

- 线性相位->群延迟为常数

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta \quad (\alpha, \beta = const)$$

二、线性相位系统的时域特征

- 考虑一个LTI系统，其频率响应为：

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi$$

- 相位和群延迟分别如下：

$$\arg[H_{id}(e^{j\omega})] = -\omega\alpha$$

$$grd[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha$$

- 单位冲激响应为：

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n - \alpha)] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n - \alpha)] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

■ 对任意输入 $x(n)$, 系统的输出为:

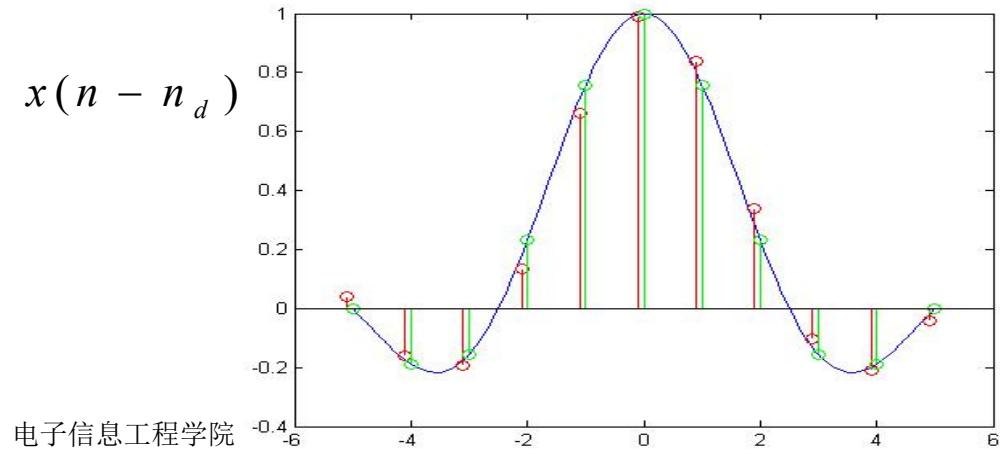
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n - k - \alpha)]$$

■ 1) 若 α 为整数, 则有:

$$h_{id}(n) = \delta(n - n_d)$$

$$y(n) = x(n) * \delta(n - n_d) = x(n - n_d)$$

■ 2) 若 α 为非整数实数?



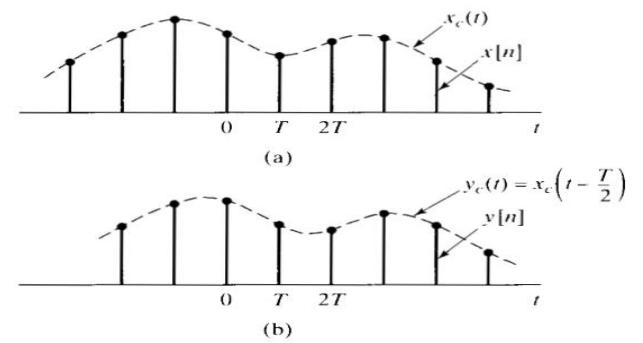
群延迟为非整数

- 系统输出

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n - k - \alpha)]$$

- 相当于对如下模拟信号在 nT 的采样序列:

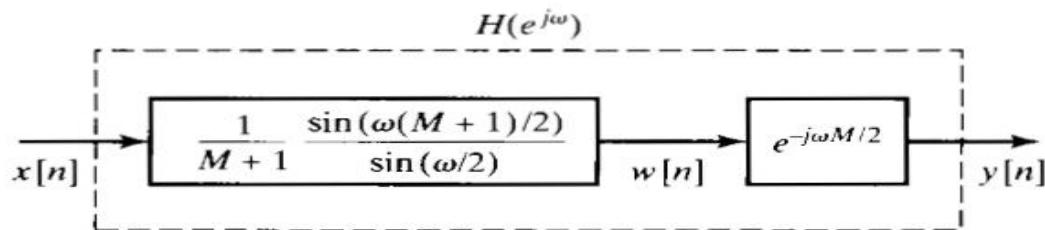
$$\begin{aligned} y_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(t - \alpha T - kT) / T] \\ &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT) Sa[\pi(t - kT) / T] \right\} * \delta(t - \alpha T) = x_c(t) * h_c(t) \end{aligned}$$



非整数延迟 (4.10) ---滑动平均系统

- $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)$
- $h(n) = u(n) - u(n-N)$

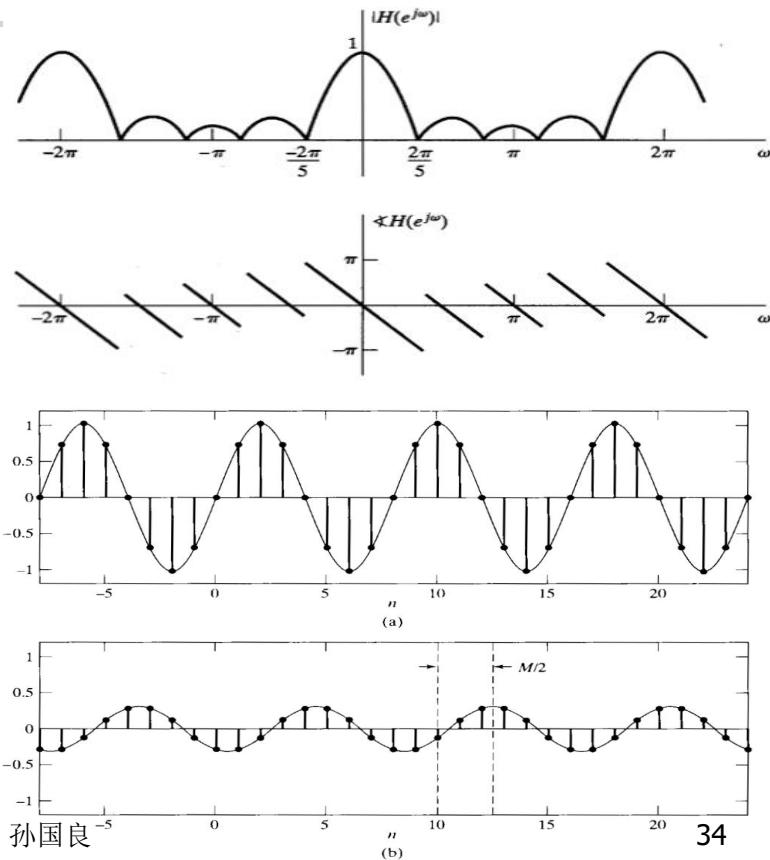
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi.$$



北京航空航天大学

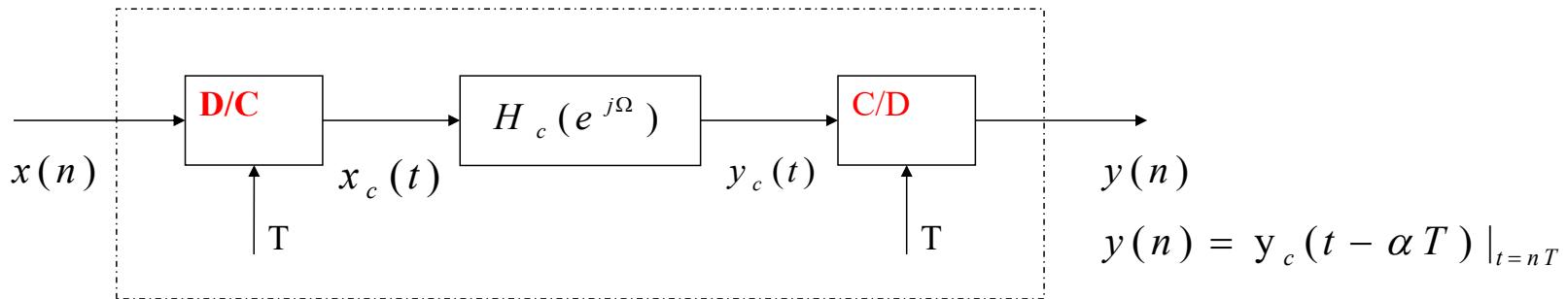
$$x[n] = \cos(0.25\pi n)$$

电子信息工程学院 孙国良



$$\begin{aligned}
 y_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(t - \alpha T - kT)/T] \\
 &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT) Sa[\pi(t - kT)/T] \right\} * \delta(t - \alpha T) = x_c(t) * h_c(t)
 \end{aligned}$$

容易看出，正是序列 $x_c(t)$ 的重构信号，是频率响应为 $h_c(t)$ 系统的单位冲激响应 $H_c(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\alpha T}$



由上面的讨论可以看出，若LTI系统具有随输入频率而相位呈线性变化的特性，那么它将是一个理想的延迟系统，其中的 α 代表了延迟量。

- 上面讨论的是具有全通特性的**LTI**线性相位系统，对于更为一般的情况：

- $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$
- 如对于线性相位的低通滤波器而言：
-
- $$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$
- 相应的单位冲激响应为：

$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n - \alpha)] = \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

由单位冲激响应：

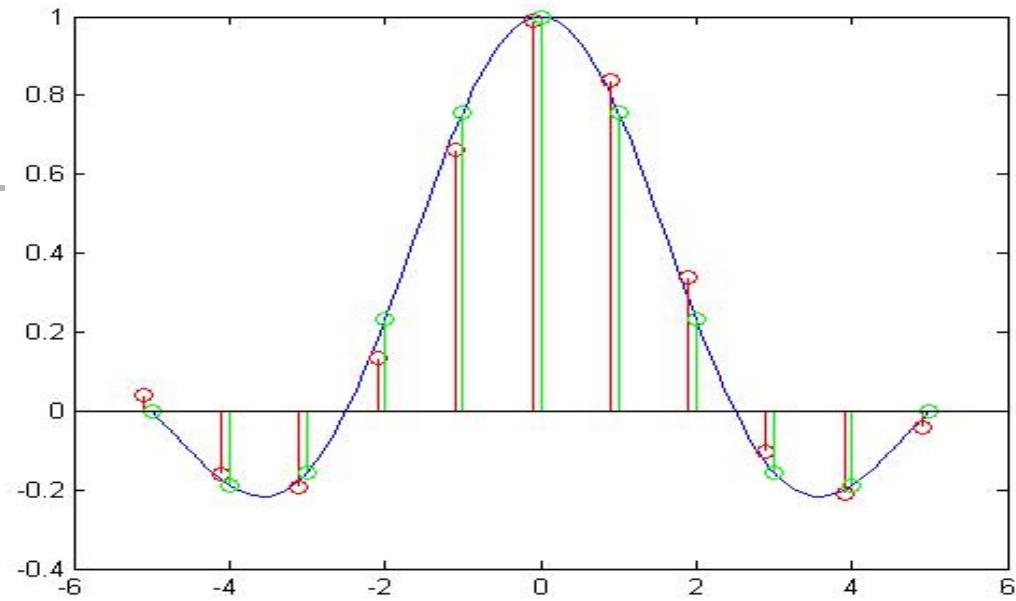
$$h_{id}(n) = \text{Sa}[\omega(n - \alpha)] \\ = \frac{\sin \omega(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

可以得到：

$$h_{id}(\alpha + n) = h_{id}(\alpha - n)$$

$$h_{id}(2\alpha - n) = h_{id}(n)$$

如果 α 为整数，则单位冲激响应关于 偶对称；若 α 不为整数，则单位冲激响应关于 不是严格意义上的对称，但是仍然是线性相位和恒定群延迟。



广义线性相位

- 线性相位的概念加以推广是有意义的。
 - 线性相位系统具有许多优点，但是其范畴较窄。
 - 现实当中的许多系统不一定满足上面的定义，如滑动平均系统、微分系统等，但均有信号相位不失真的特性。
- 广义线性相位系统

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

- 如果不顾及由 $A(e^{j\omega})$ 的正负交替带来的相位突变及 带入的固定相位， 则系统具有恒定群延迟。

广义线性相位时频关系

$$h(n) \implies H(e^{j\omega}) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$h(n) = h^*(n) \implies H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

$$\implies |H(\omega)| = |H(-\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

实条件

$$DTFT [h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha}$$

$$DTFT [h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha - n) = h(n + \alpha) &\implies -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha \\ &\implies \varphi(\omega) = -\omega\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha - n) = -h(n + \alpha) &\implies -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha + \pi \\ &\implies \varphi(\omega) = -\omega\alpha - \pi / 2 \end{aligned}$$

广义线性相位时频关系

- 由广义相位定义和DTFT时移特性知：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(\omega)e^{-j(\omega\alpha - \beta)} \\ DTFT [h(\alpha - n)] &= H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta} \\ DTFT [h(n + \alpha)] &= H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta} \end{aligned}$$

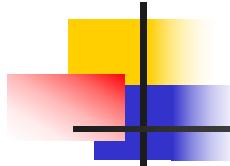
- 若A(w)为奇函数，则h(n)奇对称；
- 若A(w)为偶函数，则h(n)偶对称。

广义线性相位序列未必是实对称序列，也未必是对称序列。

实对称序列必定是线性相位序列；
扩展了线性相位的适用范围。

三、因果广义线性相位系统

- 对**实系统**而言，无论狭义线性相位，还是广义线性相位，都要求单位冲激响应序列**对称**。
- 如果再要求系统是**有理**、**因果**的，**对称性**将意味着 $\alpha >= 0$ 和 $h(n)$ 必须为**时域带限**，即有限长冲激响应 (**FIR**) 系统。
 - 因果无限长冲激响应 (**IIR**) 系统也能够具有广义线性相位，但是**系统函数不是有理的**。
- 根据对称形式和 $M=2$ α 为奇、偶情况，划分**四类**具有广义线性相位的**FIR** 系统。



四大类线性相位滤波器

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{令 } m = N-1-n} &= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\ &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

系统零点特性

$$H(z) := \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

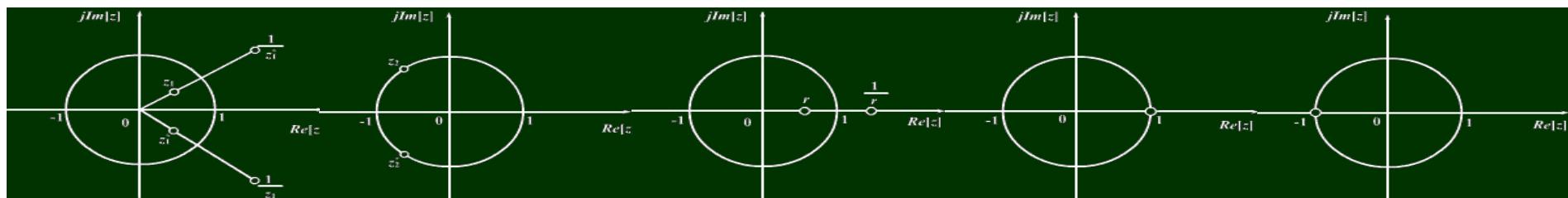
1) 系统零点的个数等于系统在原点的极点阶数

2) 若 $z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点, 则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i) = 0 \quad \therefore H(z_i^{-1}) = \pm z_i^{(N-1)} H(z_i) = 0$$

3) $h(n)$ 为实数, 则零点共轭成对

即 $z_i^*, 1/z_i^*$ 也是零点

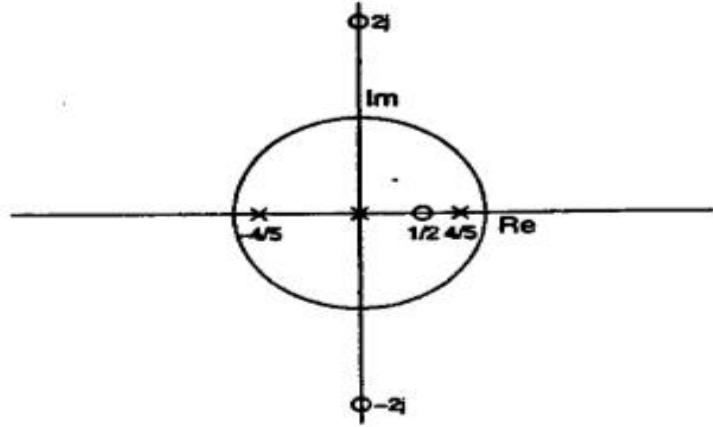


最小相位及线性相位分解(5.45)

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})}$$

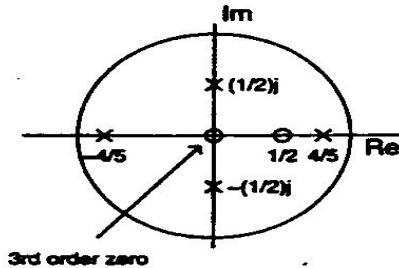
$$H(z) = H_{\min}(z)H_{lin}(z)$$

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

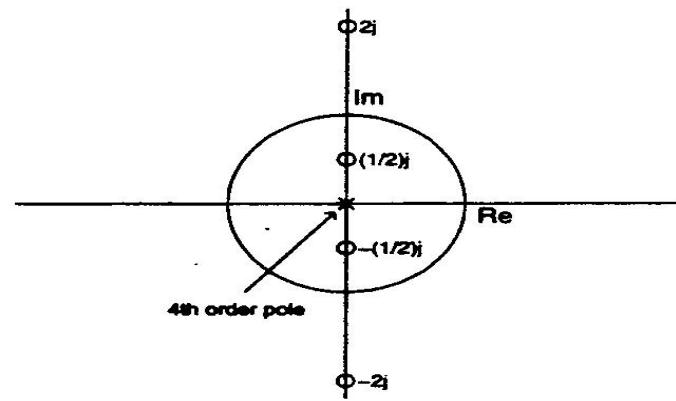


子信息

$$H_2(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}$$



$$H_{lin}(z) = (1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + 4z^{-2})$$



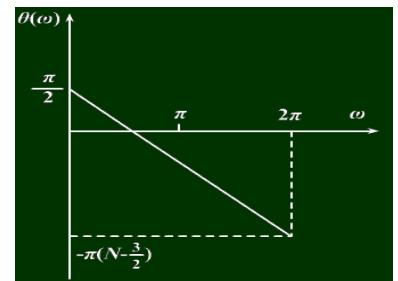
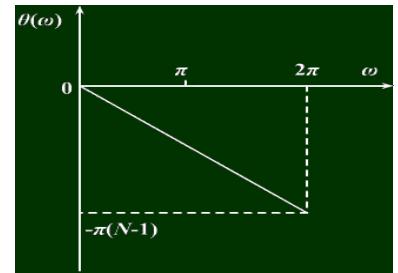
频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} "+" & e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ "- " & j e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \end{cases}$$

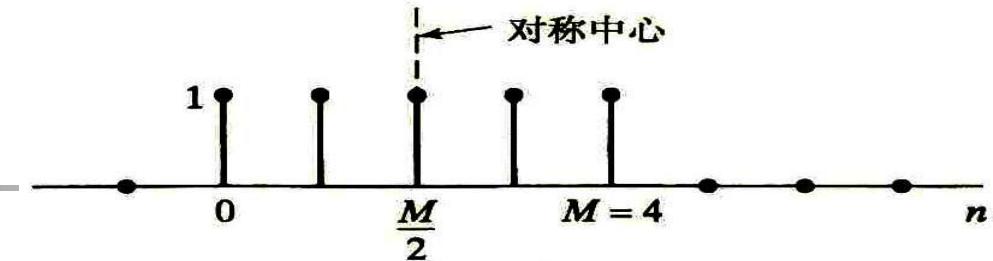
由 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

得 $H(z) = \frac{1}{2} [H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\ &= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \end{aligned}$$



I类:



M 为偶数 , 偶对称

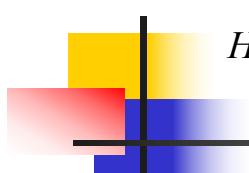
$$h(n) = h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\because \cos \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} = \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] = \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

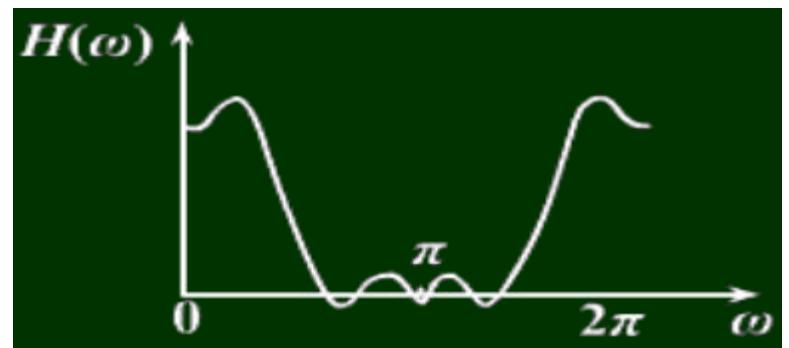
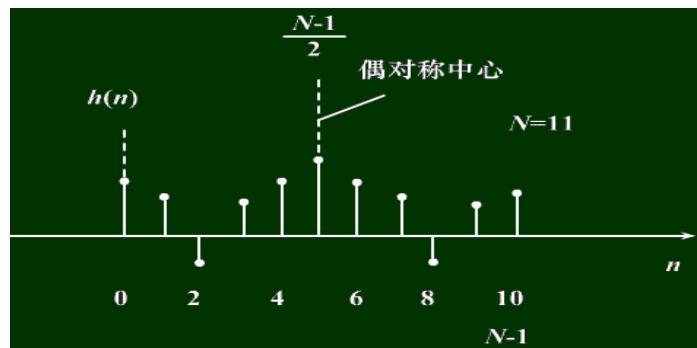
$\therefore \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈偶对称

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \stackrel{\text{令 } \frac{N-1}{2} - n = m}{=} h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(m\omega)$$



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a(k) \cos \omega k \right)$$

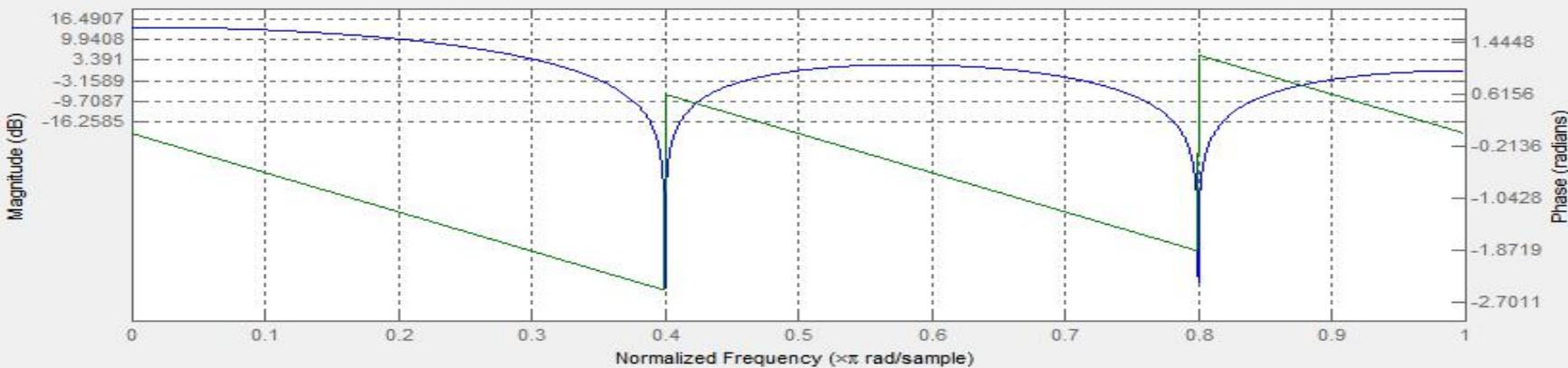
$$\begin{cases} a(0) = h(\frac{M}{2}) \\ a(k) = 2h(\frac{M}{2} - k) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \end{cases}$$



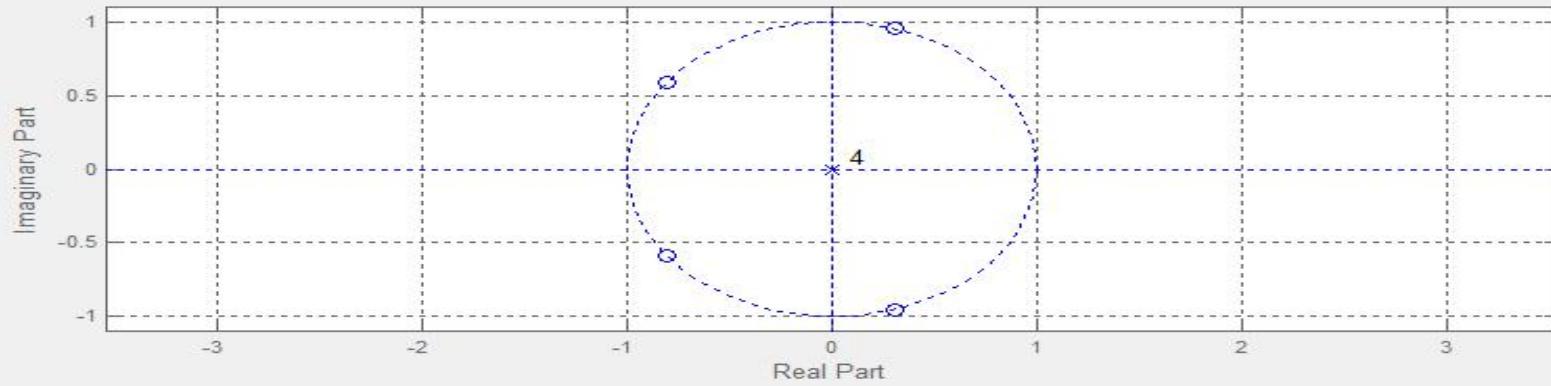
$\because \cos(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

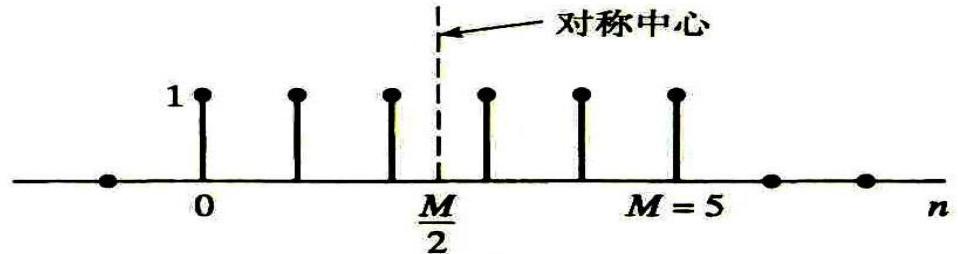
Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot



II类:



M 为奇数 , 偶对称

$$h(n) = h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

- 特殊零点: $Z=-1$

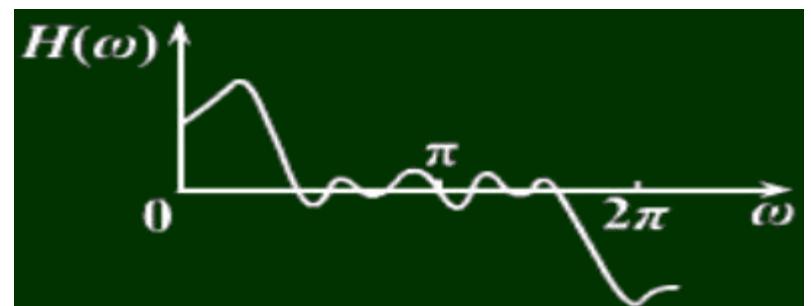
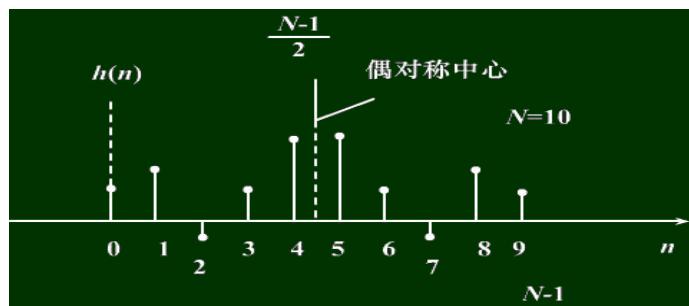
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N}{2} - n = m = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b(k) \cos \omega(k - \frac{1}{2}) \right)$$

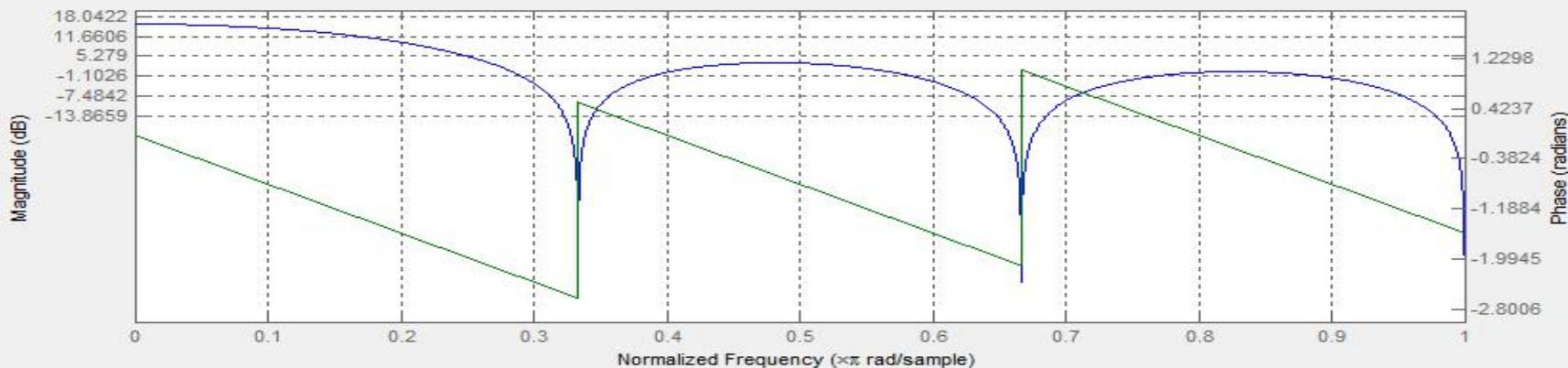
$$b(k) = 2h(\frac{N}{2} - k) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



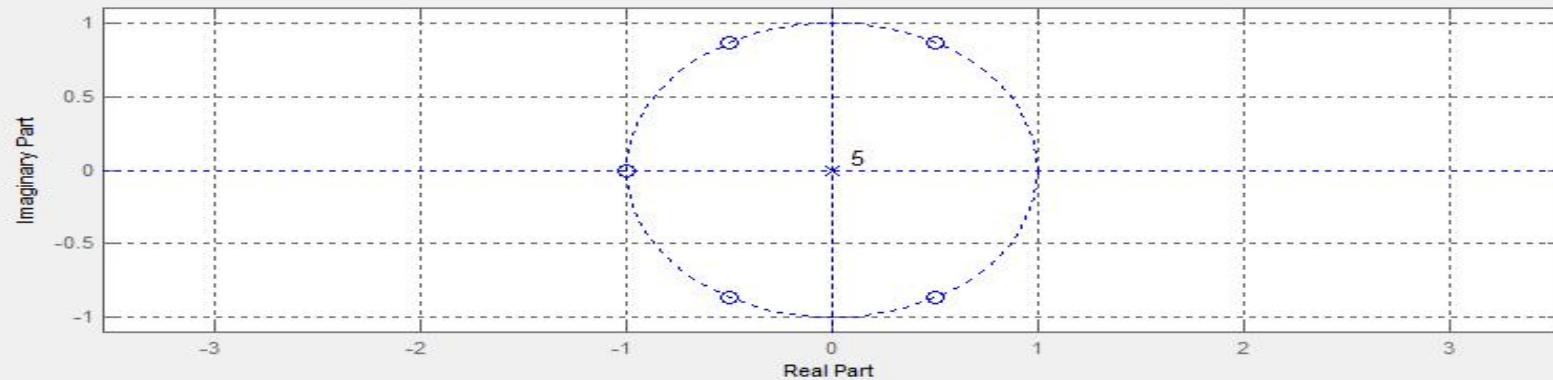
$H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈偶对称

$H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称 $\omega = \pi$ 时 $\cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$

Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot

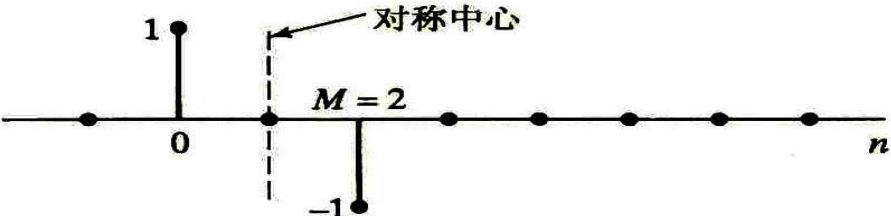


III类:

M 为偶数

$$h(n) = -h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M$$

特殊零点: $z=+,-1$



$$H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\therefore \sin \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} = \sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] = -\sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$\therefore \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈奇对称

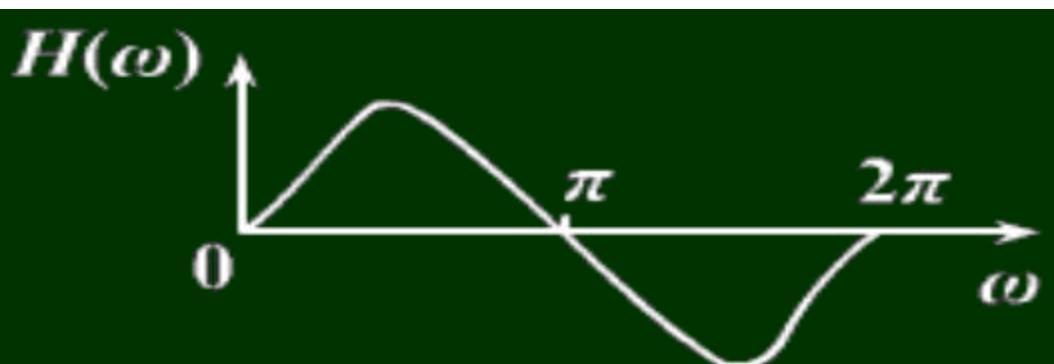
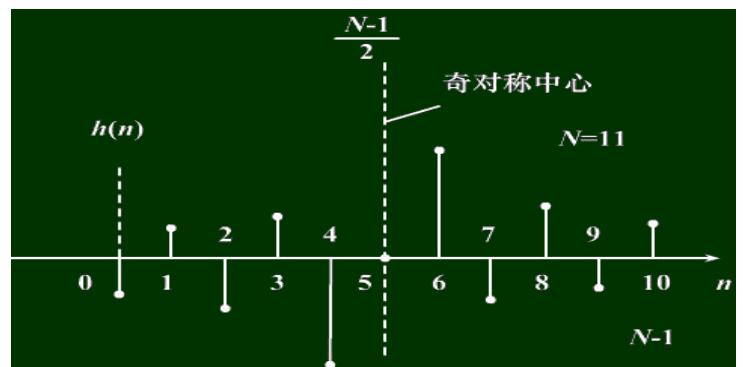
$$h(n) \text{ 奇对称且 } N \text{ 为奇数} \quad \therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N-1}{2} - n = m \quad = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(m\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c(k) \sin \omega k \right)$$

$$c(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

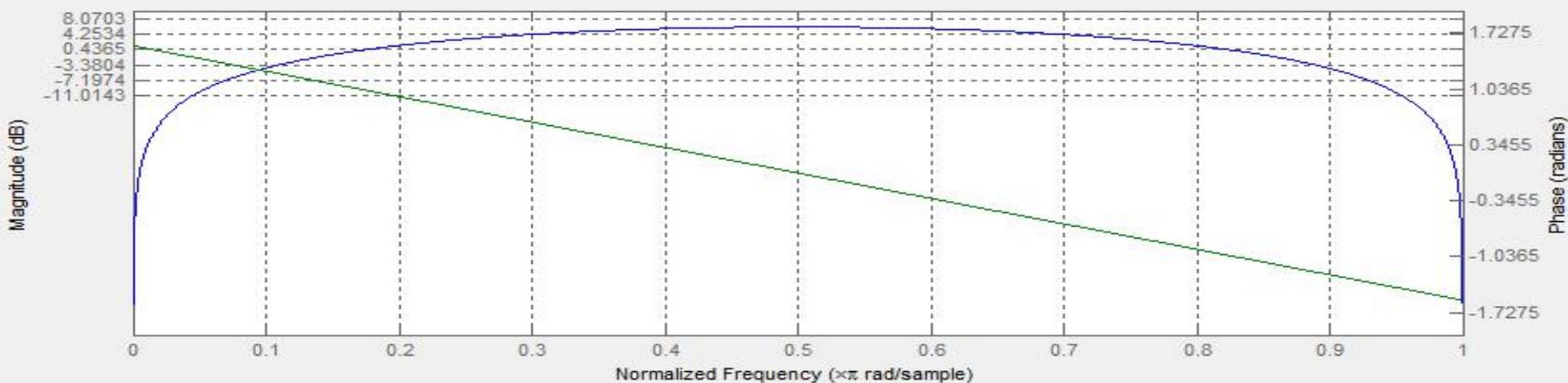


$$\omega = 0, \pi, 2\pi \text{ 时 } \sin(\omega n) = 0$$

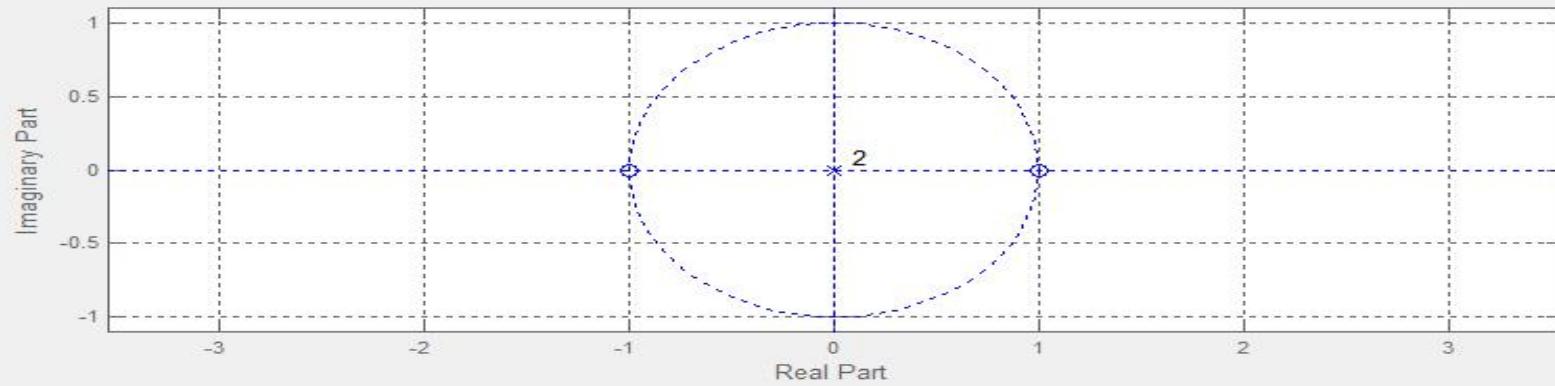
因 $\sin(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称

故 $H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称

Magnitude (dB) Pole/zero plot



Pole/Zero Plot

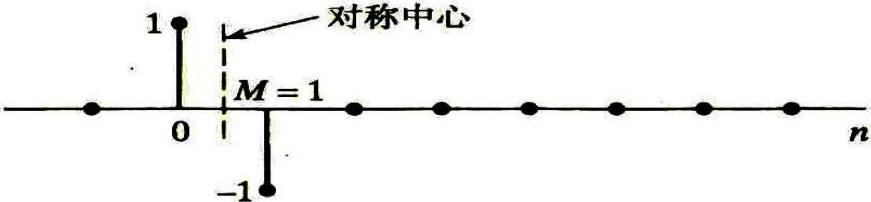


IV类:

M 为奇数

$$h(n) = -h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$$

■ 特殊零点: $Z=1$



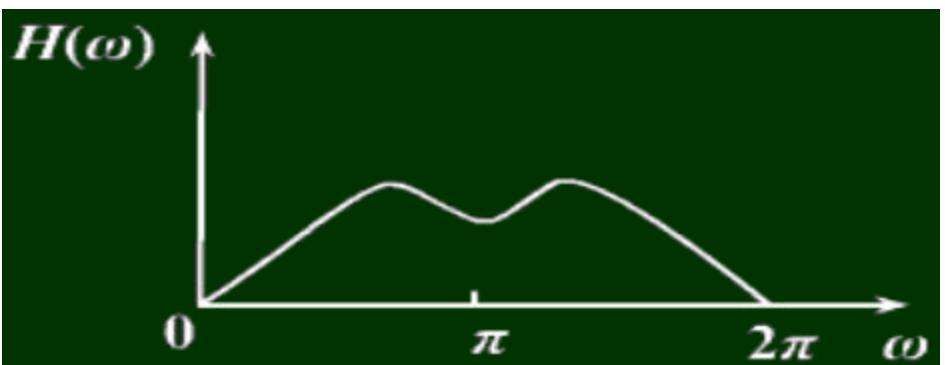
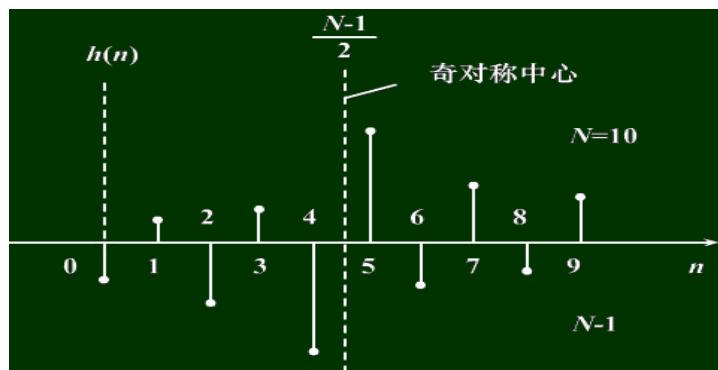
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N}{2} - n = m \quad = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} d(k) \sin \omega(k - \frac{1}{2}) \right)$$

$$d(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

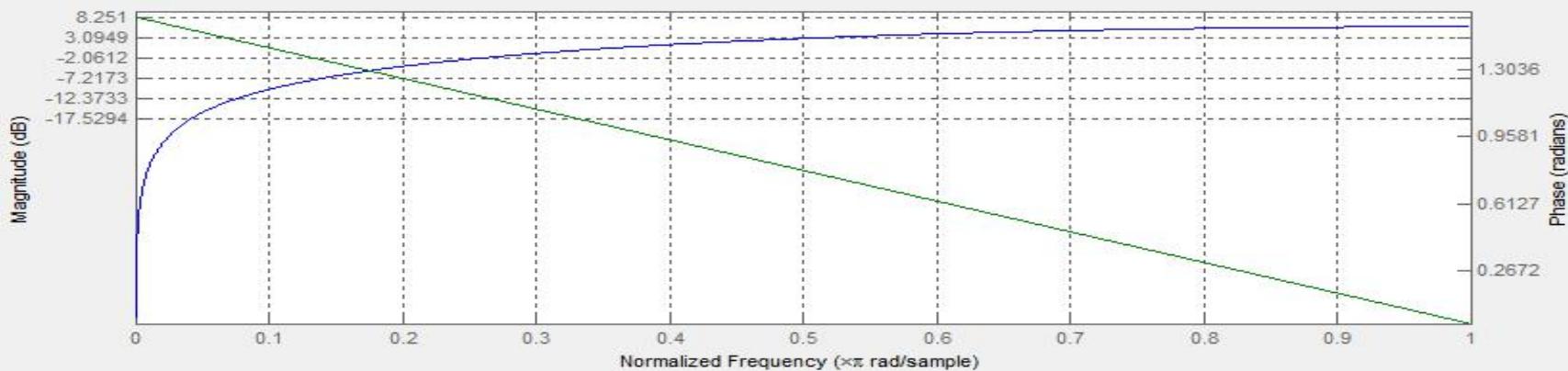


$$\omega = 0, 2\pi \text{ 时 } \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

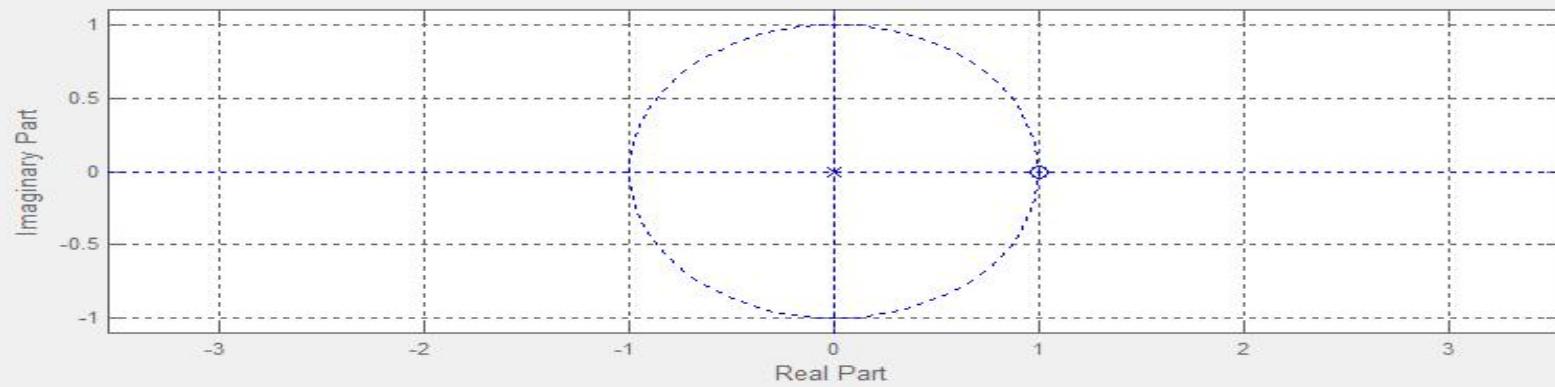
$H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈奇对称

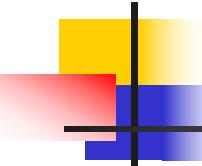
$H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈偶对称

Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot





总结

- 在不考虑幅度失真的情况下，线性相位系统不会导致信号波形的失真；
- 实线性相位系统的单位冲激响应具有对称性；
- 有理的因果广义线性系统是**FIR**系统；
 - 第**I**类系统适合设计所有滤波器；
 - 第**II**类系统不适合设计高通滤波器；
 - 第**III**类系统不适合设计低通和高通滤波器；
 - 第**IV**类系统不适合设计低通滤波器。

作业

- 5.15
- 5.33
- 5.59





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 4

4.1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



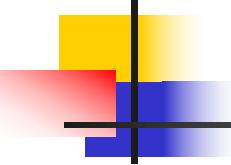
三

抽取与内插



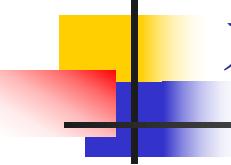
四

离散处理的工程问题



采样与重构的重要性

- 虽然自然界中存在离散时间信号，但是最常见的还是连续时间信号。
 - 采样（离散化）
- 连续时间信号的处理分析往往经由对之采样后的离散时间序列处理完成的。
 - 计算（连续信号离散化处理）
- 利用离散处理后的结果往往需要在连续域表达出来，便于接收和理解
 - 重构（连续化）

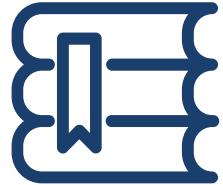


本章要解决的问题（三点一线）

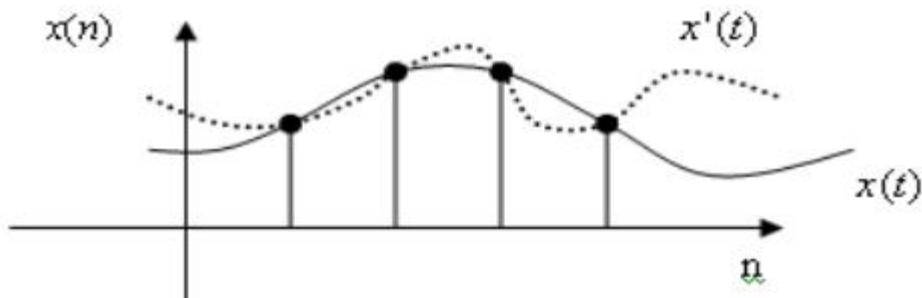
- 1、**数字频率和模拟频率之间对应关系**: 时域采样导致了信号频域发生了何种变化?
- 2、**采样定理**: 采样后信号是否包含了连续信号的所有信息? 如何无失真恢复原始信号? 采样的信号是否包含冗余信息? 是否可以进行速率的变化?
- 3、**离散处理如何等效模拟LTI**: 用于实际连续信号的处理应用? 如何提高信号处理的性能?
- 学习方法: 学会用频谱图方法分析理解各环节对信号的作用

理想周期采样与重构
连续信号离散处理
抽取与内插
离散处理的工程问题

理 想 周 期 采 样 与 重 构

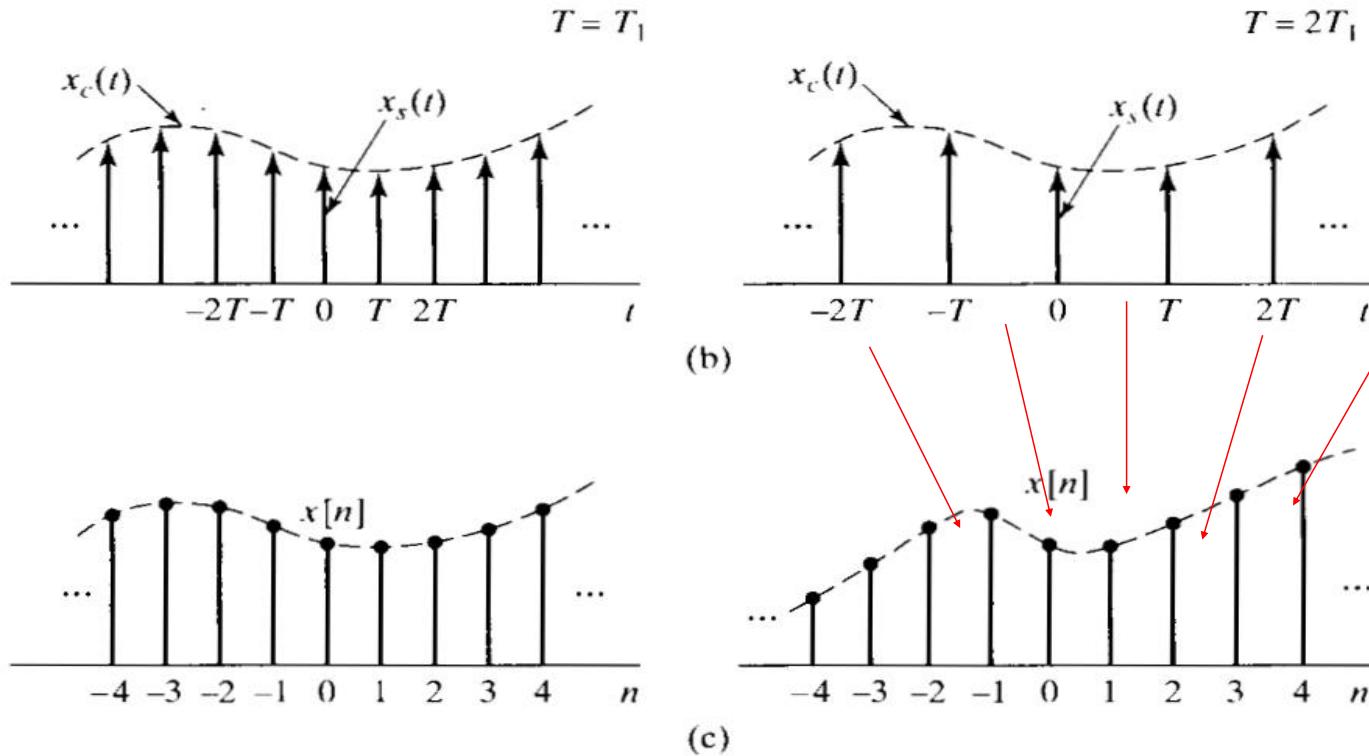


- 采样一般是不可逆的



- 为保证采样不丢失信息，该做何约束？

一个连续时间信号两种采样



正弦信号的采样

$$x_c(t) = \cos(\Omega t),$$

$$x(n) = x_c(t)|_{t=nT}$$

$$T_1 = 0.01 s \quad x(n) = \cos(0.2\pi * n) \quad \omega = 0.2\pi$$

$$T_1 = 0.02 s \quad x(n) = \cos(0.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$\Omega = 2\pi * 10; \quad T_3 = 0.05 s \quad x(n) = \cos(1.0\pi * n) \quad \omega = 1.0\pi$$

$$T_4 = 0.10 s \quad x(n) = \cos(2\pi * n) \quad \omega = 0$$

$$T_5 = 0.12 s \quad x(n) = \cos(2.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$\Omega_1 = 2\pi * 10 \quad x(n) = \cos(0.2\pi * n) \quad \omega = 0.2\pi$$

$$\Omega_2 = 2\pi * 20 \quad x(n) = \cos(0.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$T = 0.01; \quad \Omega_3 = 2\pi * 50 \quad x(n) = \cos(1.0\pi * n) \quad \omega = 1.0\pi$$

$$\Omega_4 = 2\pi * 100 \quad x(n) = \cos(2\pi * n) \quad \omega = 0$$

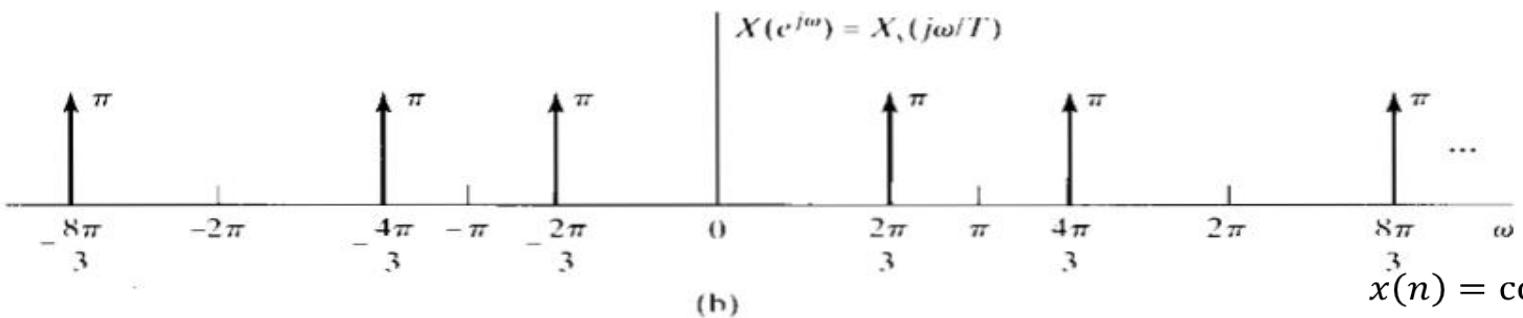
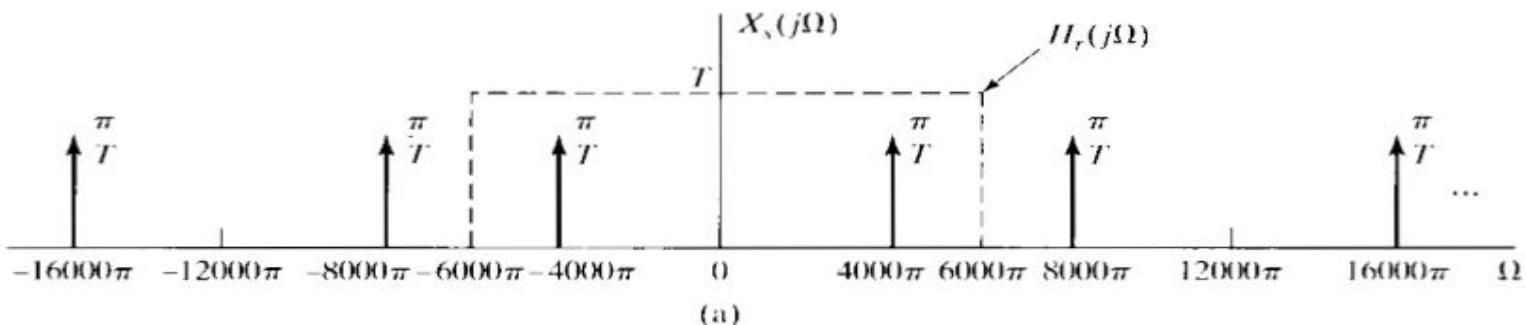
$$\Omega_5 = 2\pi * 120 \quad x(n) = \cos(2.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

例题1 无混叠采样

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

$$T = \frac{1}{6000}$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$



北京航空航天大学

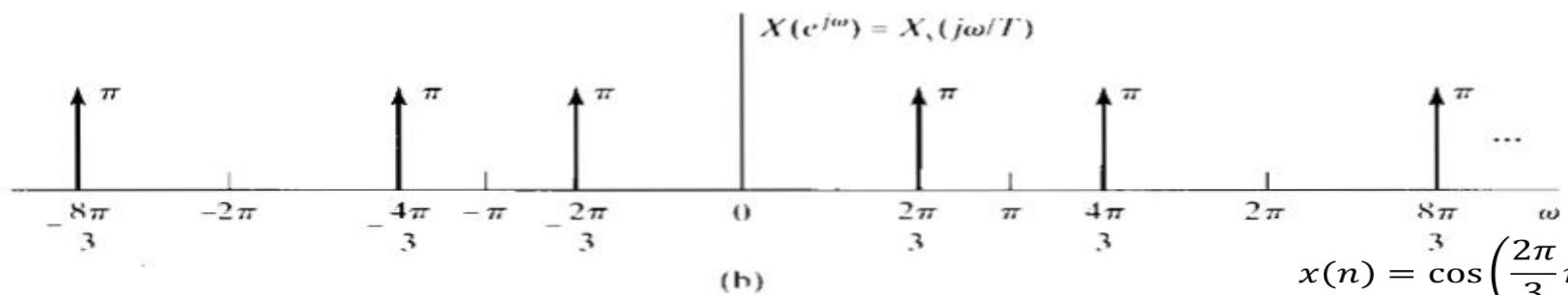
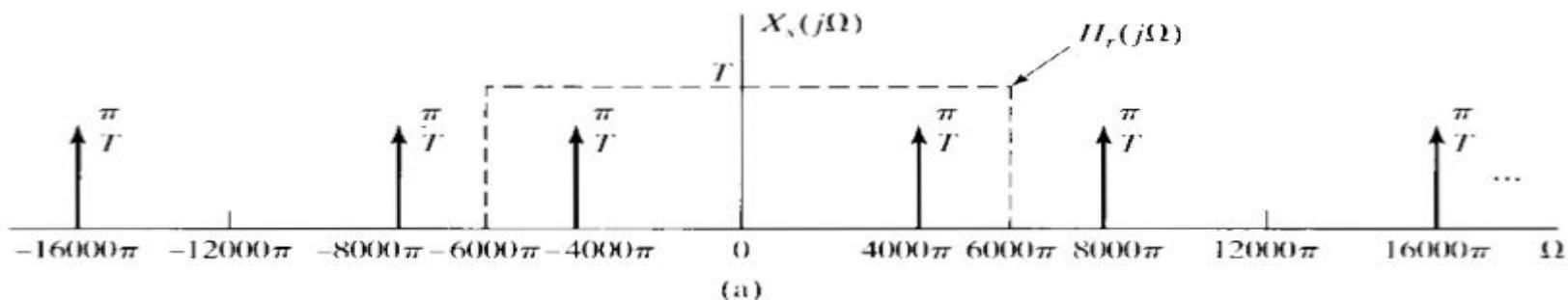
电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_c(t) = \cos(16000\pi t)$$

例题2 混叠采样



北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

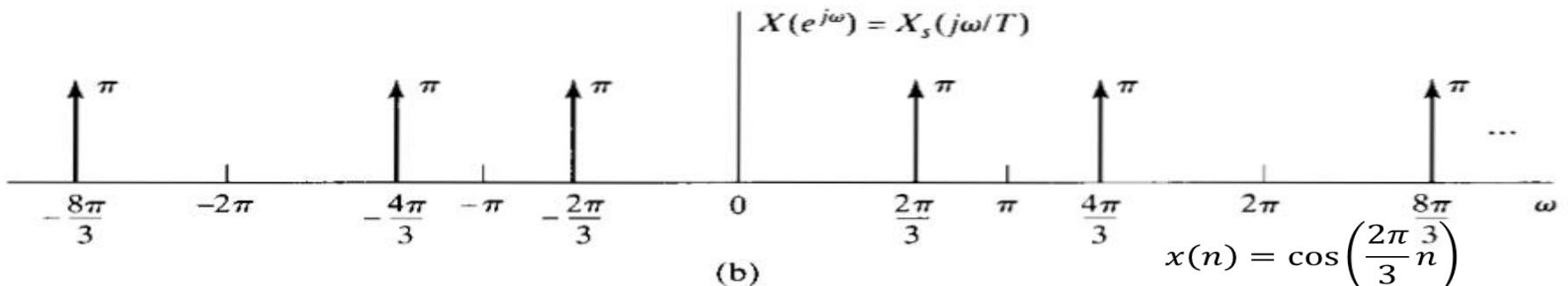
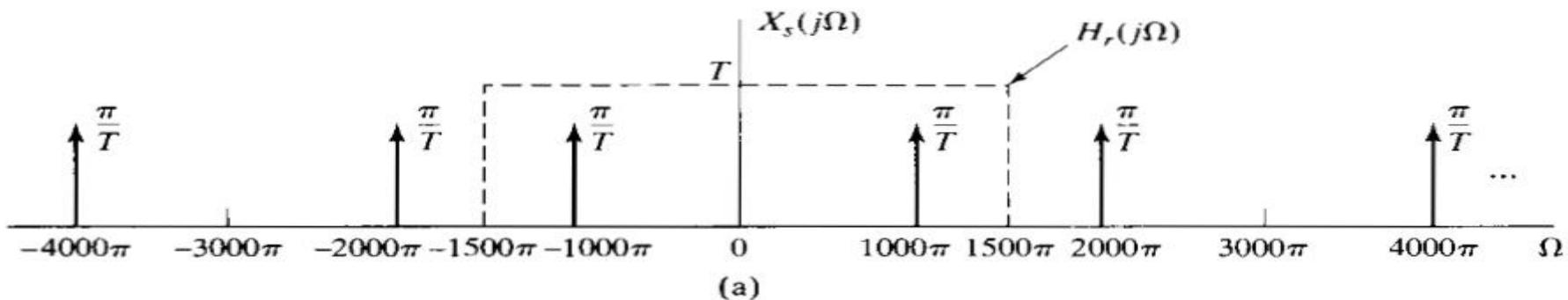
$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

例题3 混叠采样

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

$$T = \frac{1}{1500}$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$



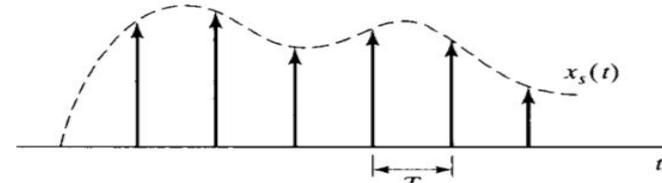
北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

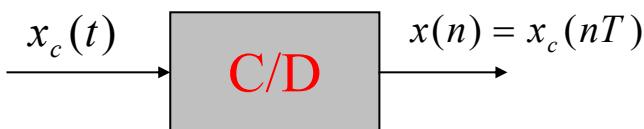
3.1.1 理想周期采样



- 典型的周期采样为冲激脉冲采样，亦称**理想采样**：

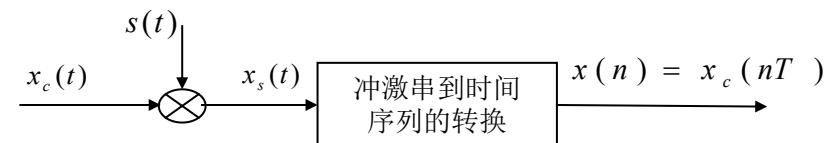
$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

■ 物理模型



A/D器件是理想C / D转换器的工程近似。

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ x(n) &= x_c(nT) \end{aligned}$$



调制器+序列的转换

$x_c(nT)$ 是连续冲激串的冲激面积，它除了在整倍数 T 时刻以外都为零，包含有物理时间的概念；

$x(n)$ 是以整数变量 n 给出的，引入了时间归一化， $x(n)$ 没有任何采样率的信息。

3.1.2、采样的频域表示

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

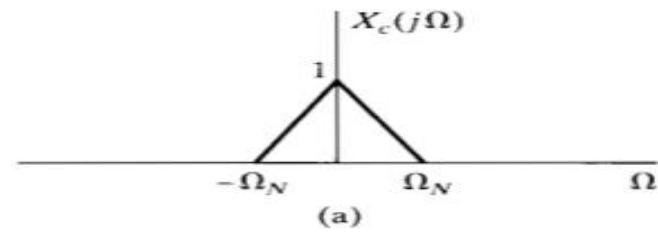
$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

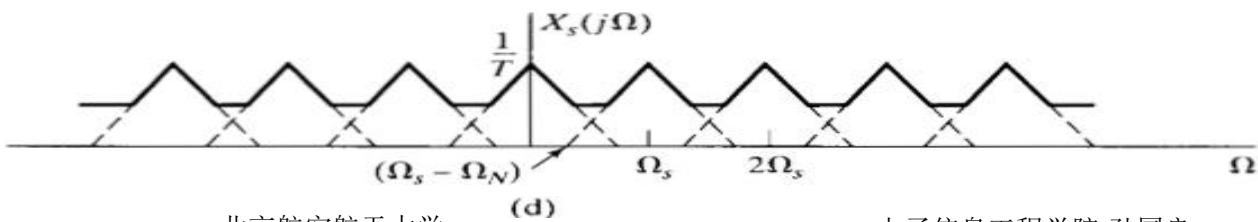
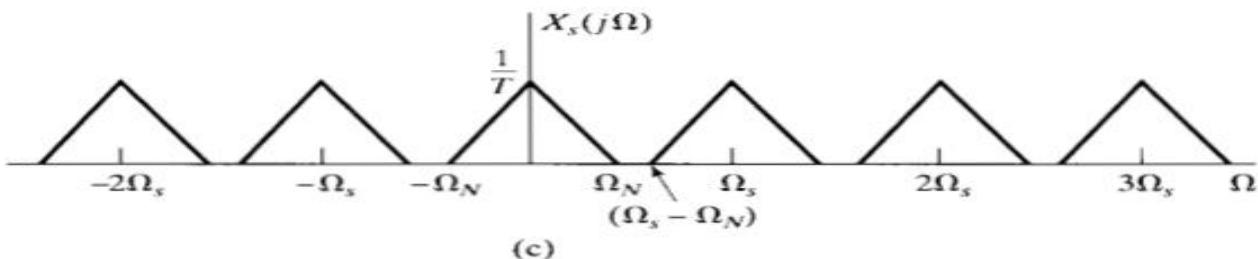
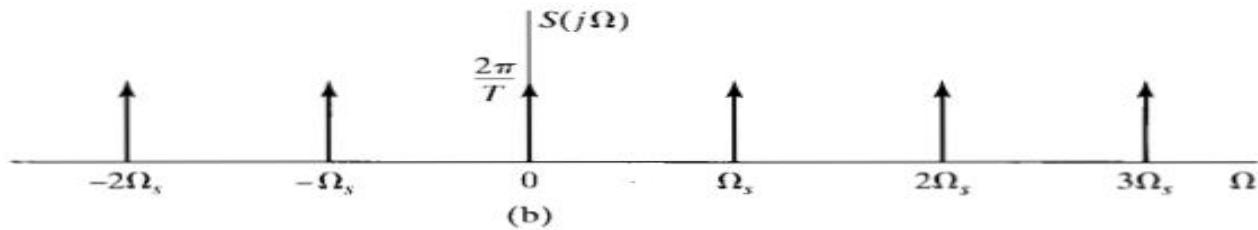
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = 1/T$$

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) * S(\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_c(\Omega) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned}$$



$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$



北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良

采样后信号傅里叶变换是由被采样信号的傅里叶变换按整数倍的采样频率移位叠加起来得到，即周期性延拓。

x(n)频谱 与x(t)频谱的关系

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\Omega T)n} \end{aligned}$$

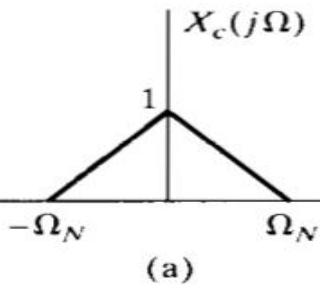
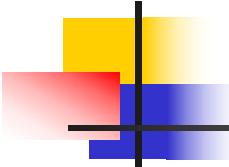
$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$X(j\omega)|_{\omega=\Omega/T} = X_s(j\Omega)$$

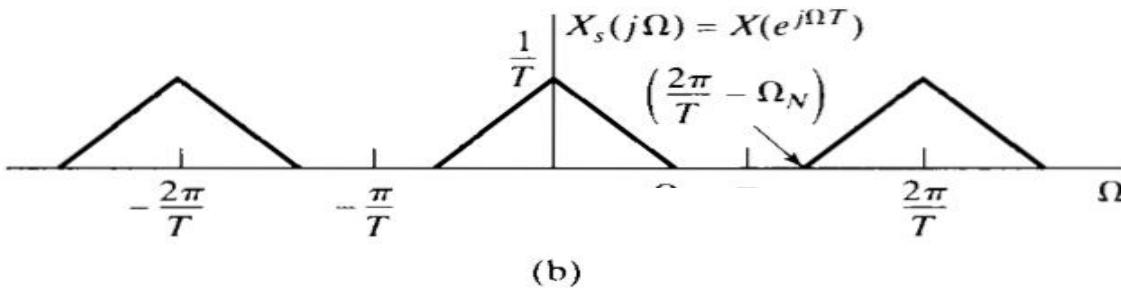
$$X(j\omega) = X_s(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T}$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})|_{\Omega=\omega/T} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{(\omega - 2k\pi)}{T}) \end{aligned}$$

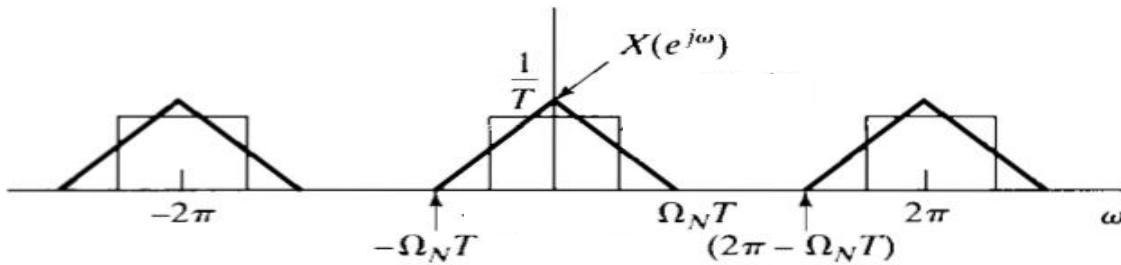


$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})|_{\Omega=\omega/T}$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{(\omega - 2k\pi)}{T})$$

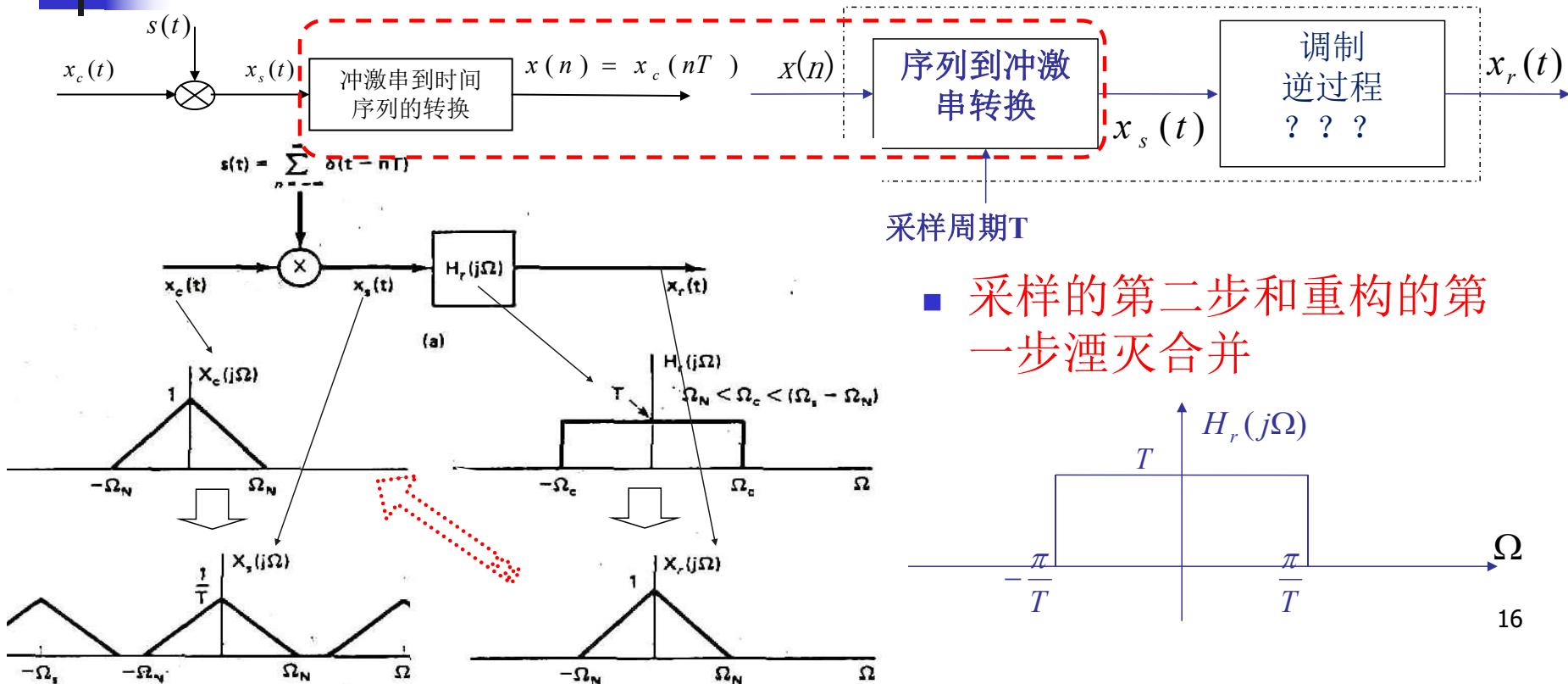
(a)



(b)

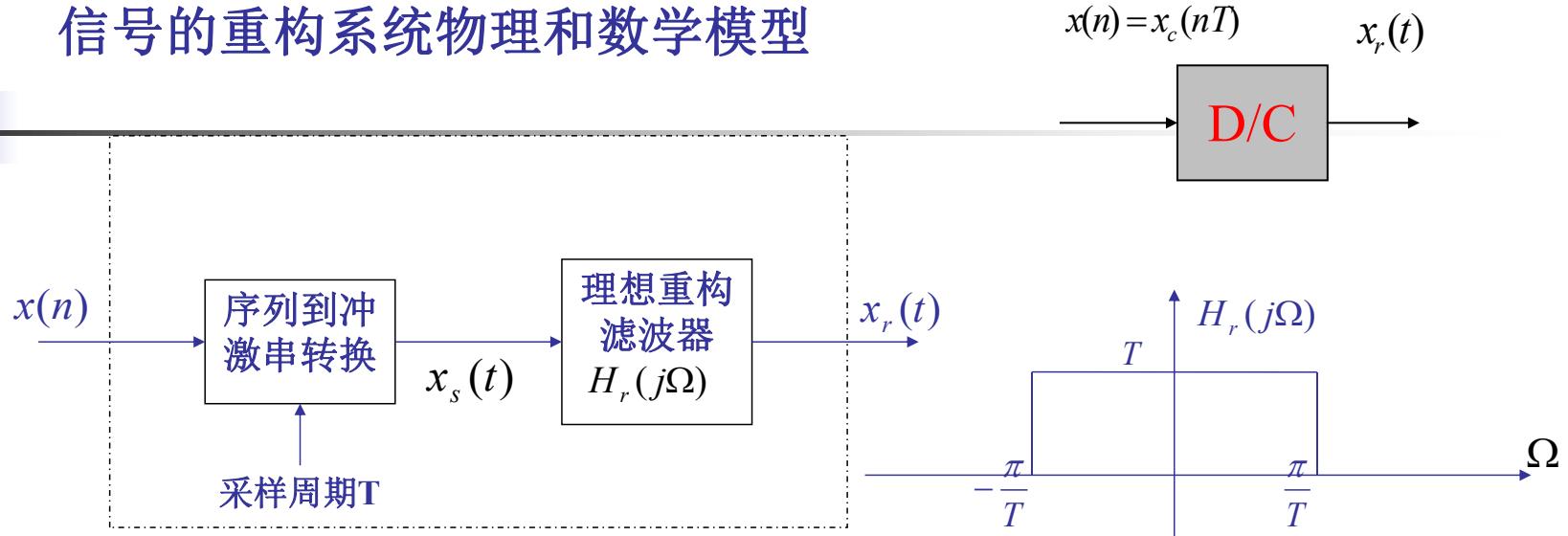


3.1.3 信号重构



- 采样的第二步和重构的第一步湮灭合并

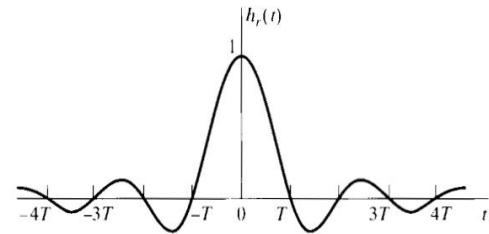
信号的重构系统物理和数学模型



$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T} = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$

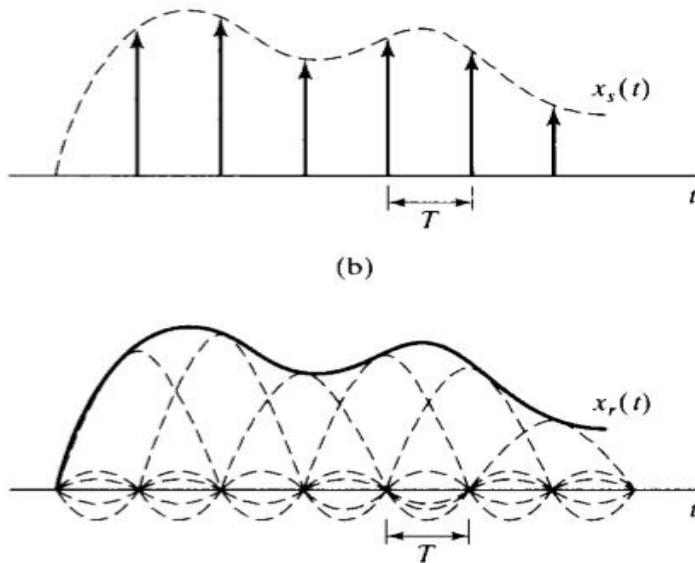
理想重构滤波器

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

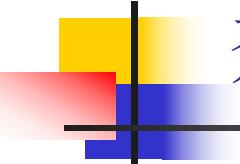


- 增益为**T**(用以补偿采样损耗), 截止频率为 Ω_c , 通常选取 $\frac{\Omega_s}{2}$ 。

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_s(t) \otimes h_r(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT) \otimes h_r(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \end{aligned}$$



- ✓ 理想重构信号在各采样点上与原连续信号相同，并且与采样速率无关。
- ✓ 如果采样没有发生频谱混叠，则采样重构后的信号在采样点以外无失真；若发生混叠，则采样点之间的信号将发生失真。

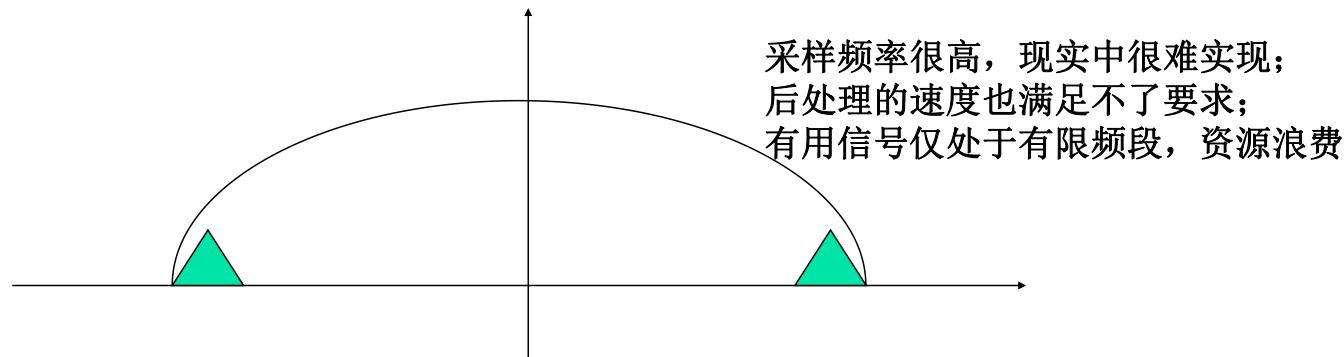


奈奎斯特低通采样定理

- 若实信号 $x_c(t)$ 是频段带限信号， $0 \sim f_h$ ，则该信号的带宽为 $B = f_h$ 。
- 对该信号以采样率 $f_s \geq 2B$ 的速率进行采样，则采样后的离散时间序列 $x(n)$ 可以无失真的恢复原始信号。

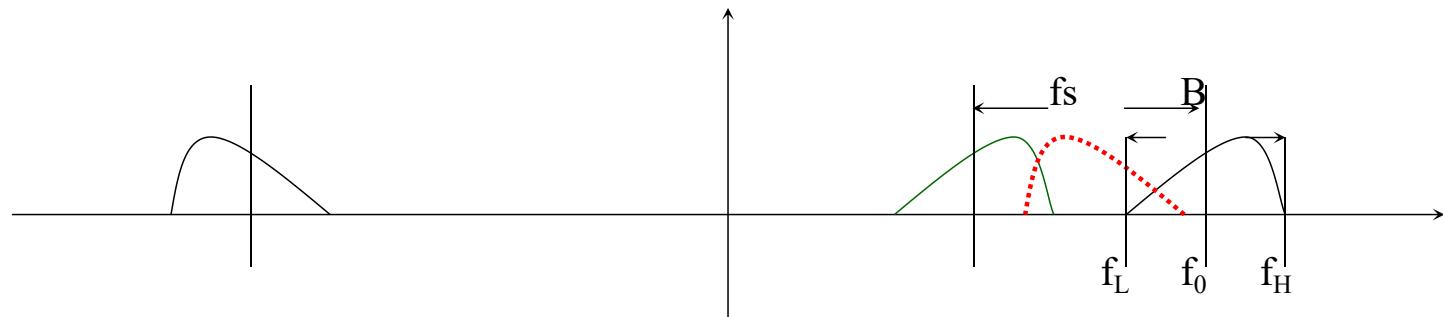
奈氏带通采样定理

- 奈氏低通采样定理只讨论了基带信号的采样问题
- 如果信号的频率分布在某一有限的频带上时，那么该如何对这样的带限信号进行采样呢？



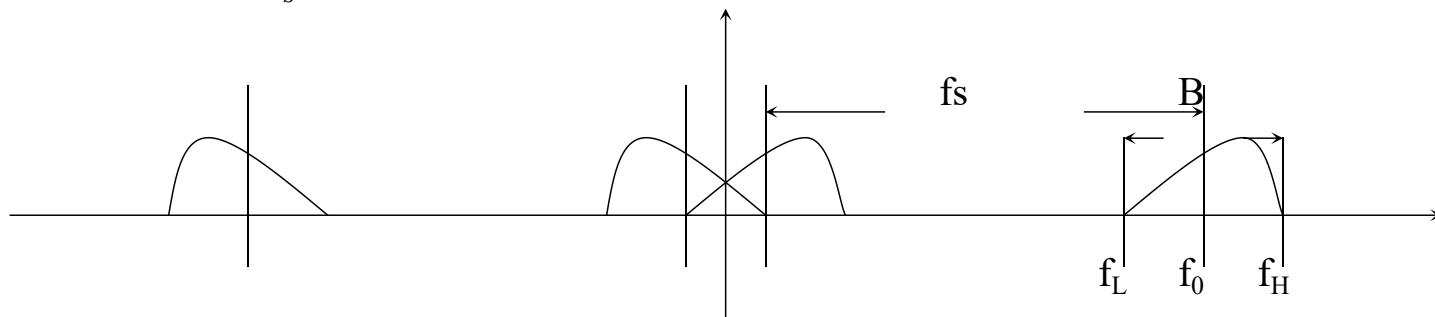
讨论：

- 1、当 $f_s < 2B$ 时

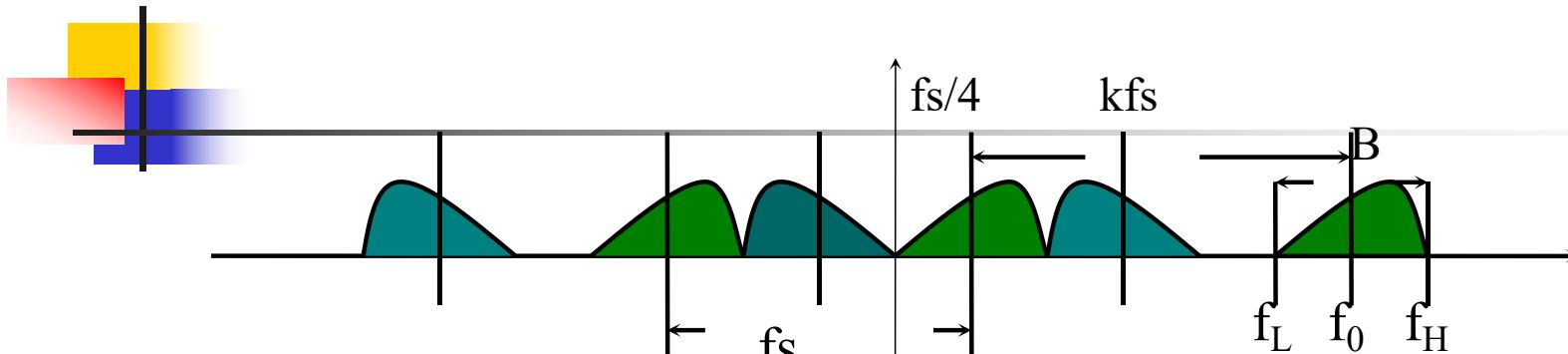


信号频谱必然混叠，无法恢复原始信号

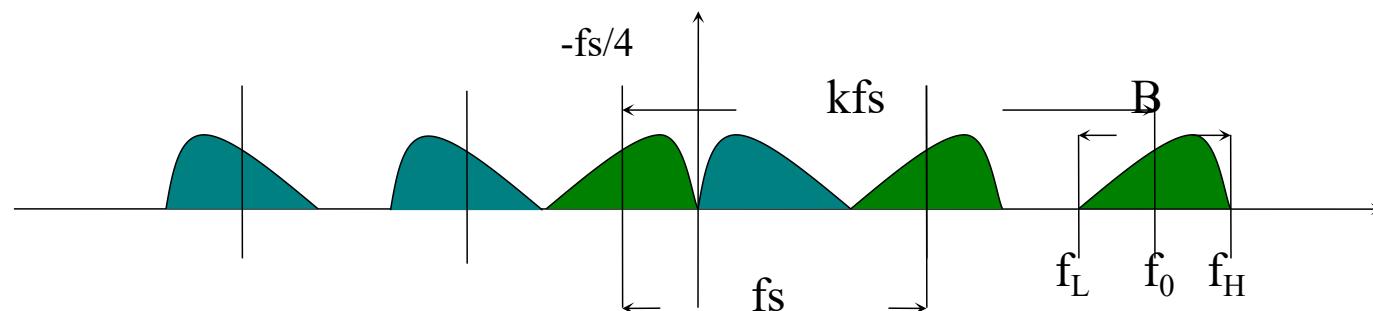
■ 2、当 $f_s \geq 2B$ 时



- 1、不一定能够由采样后的信号恢复原始信号
- 2、实信号频谱区间是正负对称的，从而其搬移之后的频谱亦是正负对称的，要使其频谱不发生混叠，只能符合以下的两种情况



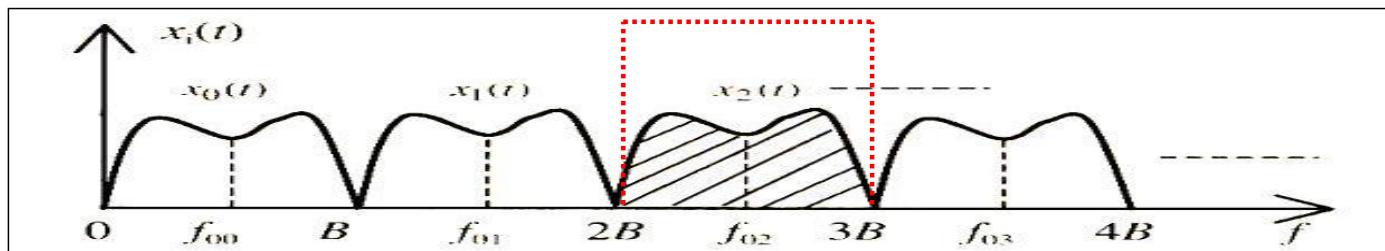
$$a) \frac{f_s}{4} = f_0 - k * f_s \leftrightarrow f_s = \frac{4 f_0}{4k + 1}$$



$$b) \frac{f_s}{4} = f_0 + k * f_s \leftrightarrow f_s = \frac{4 f_0}{4k - 1}$$

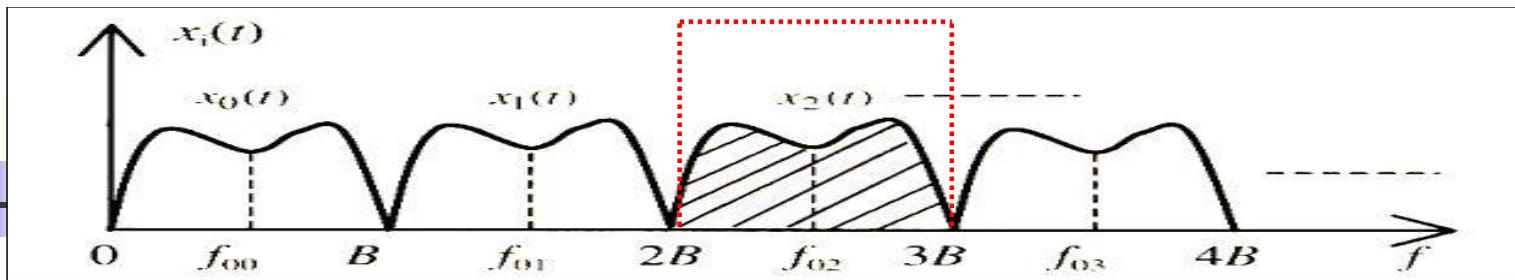
奈氏带通采样定理（欠采样）

- 当 $f_s \geq 2B$ 时，若采样率满足 $f_s = \frac{4 f_0}{2n + 1}$ ($n=0,1,2\dots$)
- 则可以无失真的从采样信号中恢复原始信号
 - 特例1：当 $f_0 = f_H / 2$, $B = f_H$, $n=0$, f_s 即为奈氏低通采样速率。

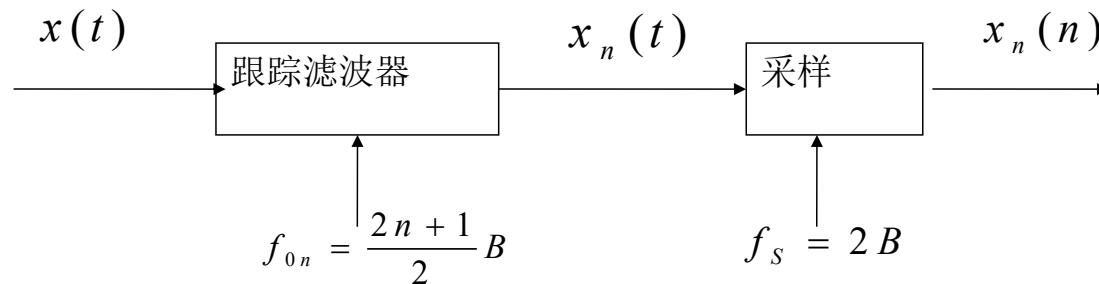


- 特例2： $f_s = \frac{4 f_0}{2n + 1} = 2B \rightarrow f_0 = \frac{(2n + 1)B}{2}$

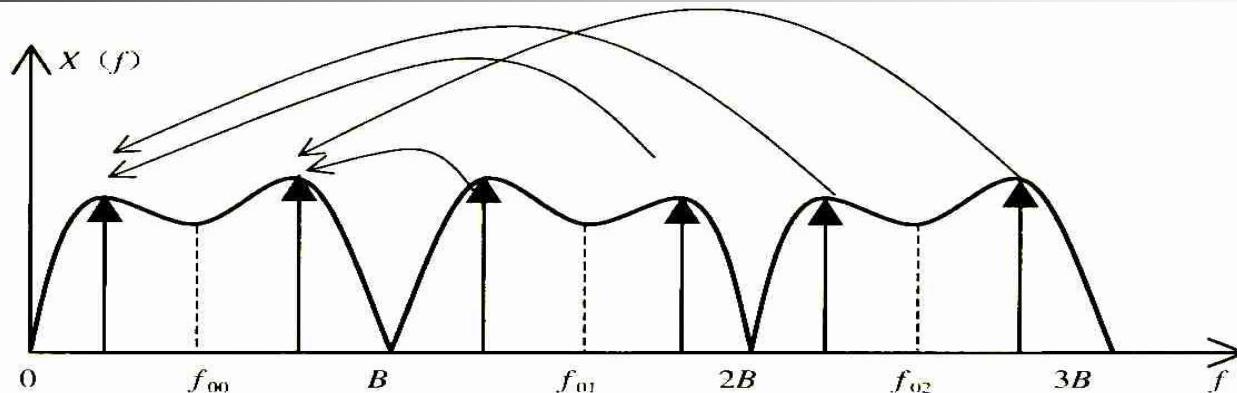
若要用最低采样速率即两倍带宽对信号进行采样，其信号中心频率必须满足信号最高(或最低)频率是带宽整数倍。



- 任何一个中心频率为 f_{0n} ($n=0, 1, 2, 3, \dots$), 带宽为 B 的带通信号均可以用同样的采样频率 $f_s = 2B$ 对信号进行采样，均能准确地表示或者重新恢复出位于不同频段(中心频率不同)的原信号。
 - 前提：只允许在其中的一个频带上存在信号，而不允许在不同的频带上同时存在信号。

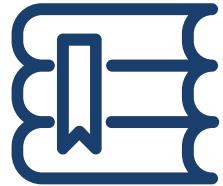


- 如果抗混叠滤波器滤波器理想的话，采用同一采样速率就能实现对全频域信号进行数字化，然后用软件方法进行解调分析，这正是软件无线电的根本出发点。



- 带通采样把位于不同频带的信号都用位于**(0, B)**上相同的基带信号来表示，但是：
 - 奇数通带上的高频分量对应基带上的低频分量，奇数通带上的低频分量对应基带上的高频。
 - 偶数频带与采样后的数字基带谱是高、低频率分量一一对应的。

连续信号离散化处理

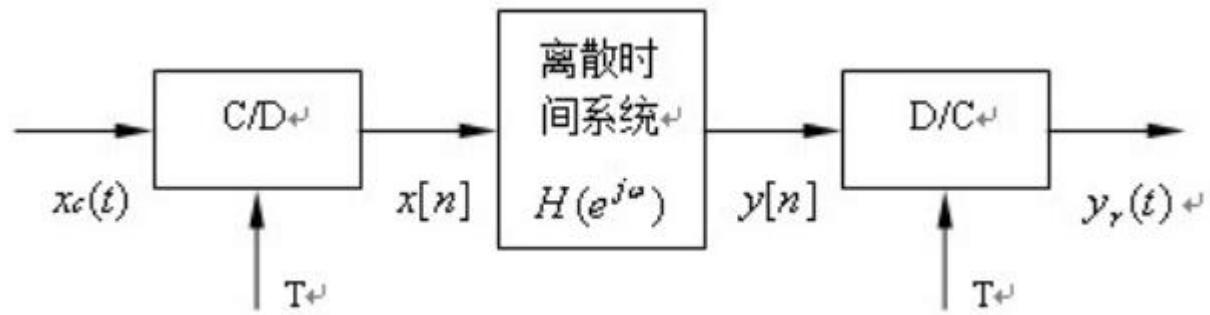


理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

离散处理的工程问题



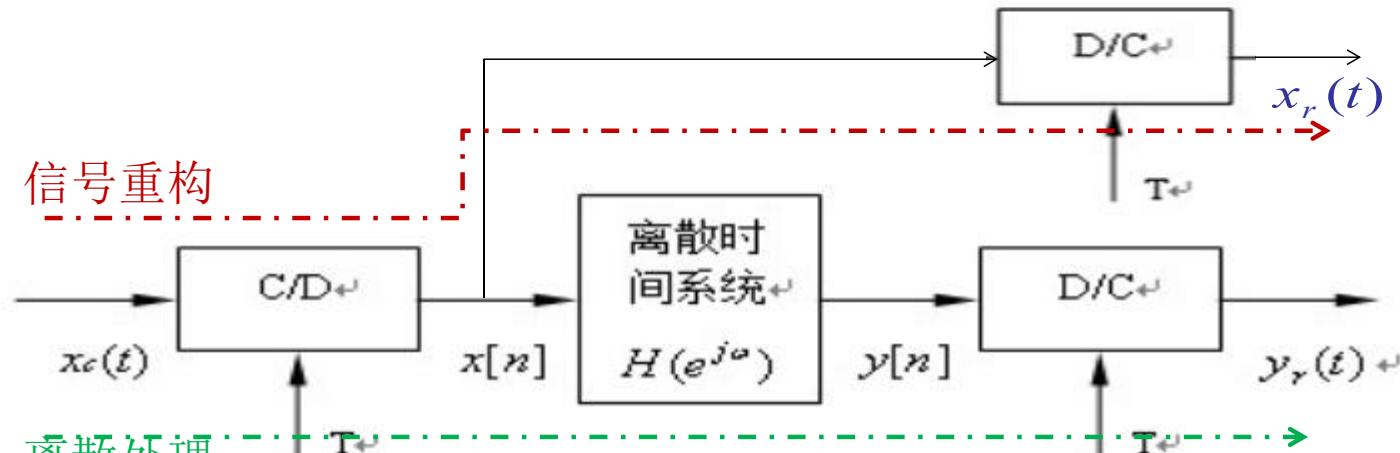
- 离散系统大都用来处理连续时间信号
- 离散化处理可否等效为模拟LTI? 条件是什么?

离散与连续LTI系统的等效关系

- 离散处理与模拟LTI的等效

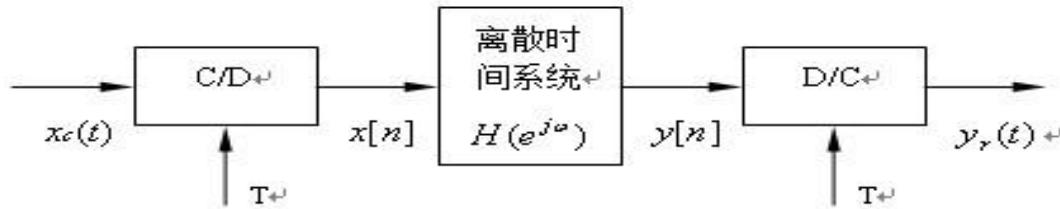
$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

- 信号重构



- 离散处理

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$



$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

■ 假设离散时间系统是LTI $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})$$



$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi / T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi / T \end{cases}$$

- 输入是带限的,
- 采样率满足奈奎斯特定理
- 在C/D中即使有混叠发生, 只要H(e{jw})不通过这些混叠的分量, 结论仍正确

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega)$$

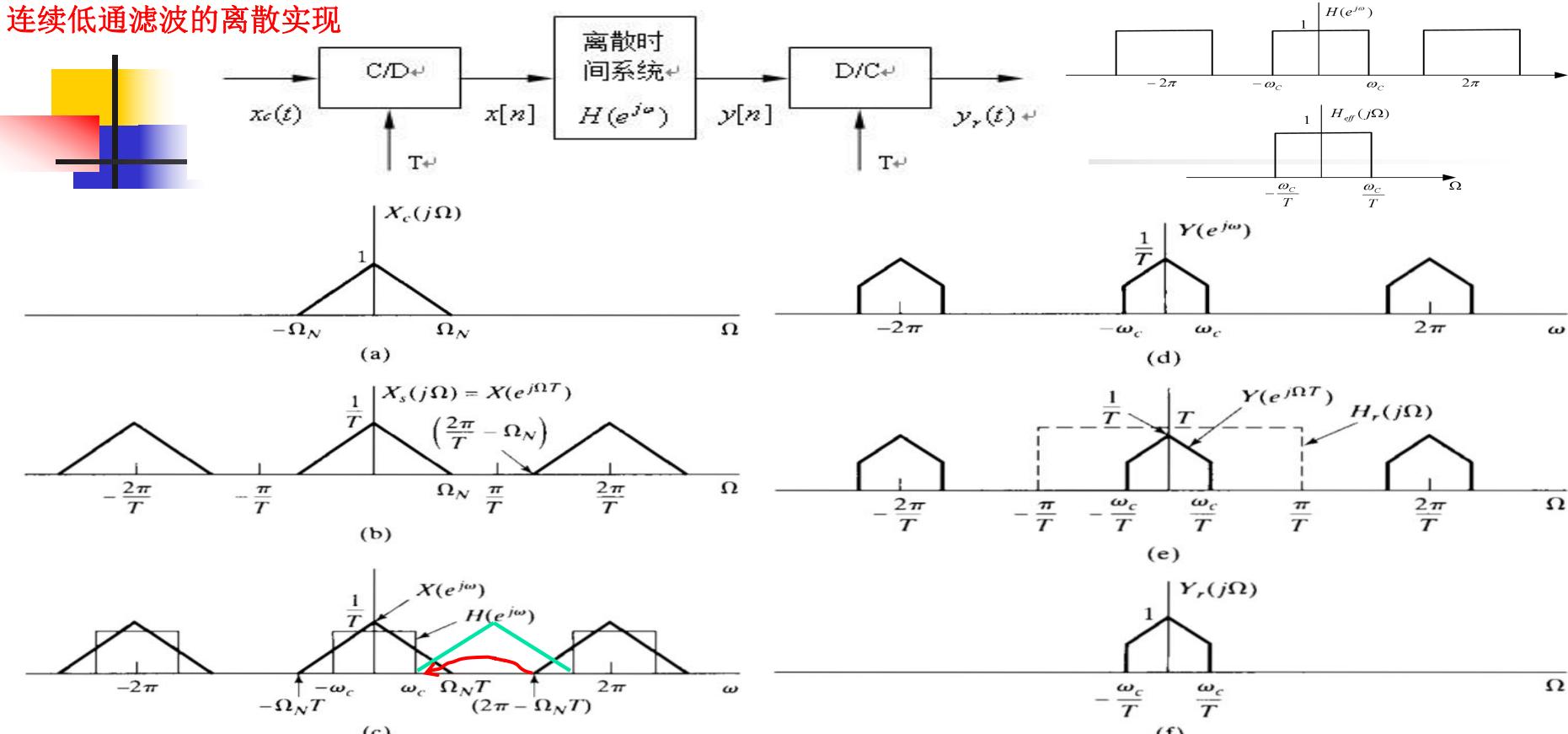
北京航空航天大学

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi / T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi / T \end{cases}$$

电子信息工程学院 孙国良

29

连续低通滤波的离散实现



$$\Omega_N T < \omega_c \quad (2\pi - \Omega_N T) > \Omega_N T \\ (2\pi - \Omega_N T) > \omega_c$$

北京航空航天大学

- 带限输入，并且满足采样定理整个系统将表现为一个线性时不变连续时间系统
- 截止频率既依赖 ω_c ，又与 T 有关。当利用固定的离散时间低通滤波器而改变采样周期 T 时，就能实现具有可变截止频率的连续时间低通滤波器

电子信息工程学院 孙国良

微分器的离散实现与等效

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)], \quad H_c(j\Omega) = j\Omega.$$

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases}$$

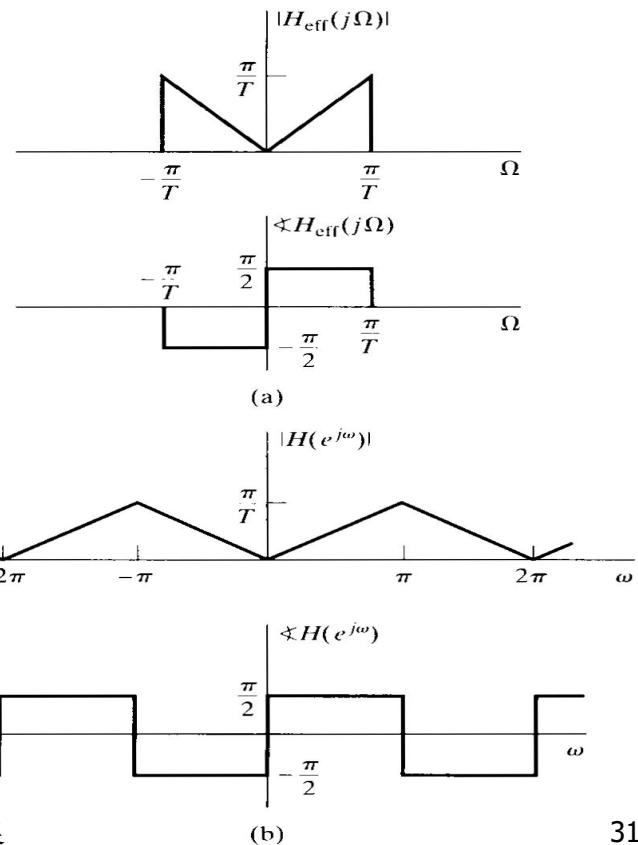
$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \quad -\infty < n < \infty,$$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\cos \pi n}{n T}, & n \neq 0. \end{cases}$$

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



余弦信号经过微分系统

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) \text{ with } \Omega_0 < \pi/T.$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n), \quad \omega_0 = \Omega_0 T < \pi$$

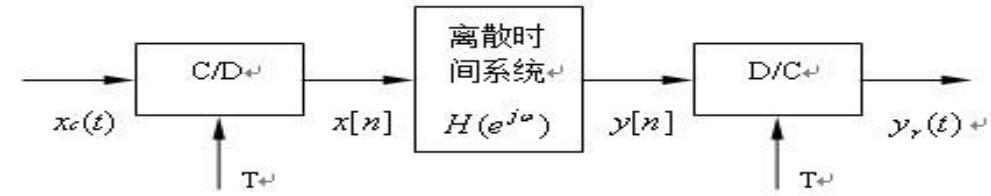
$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{j\omega}{T}[\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = T Y(e^{j\Omega T}) \\ &= T \left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T - \Omega_0 T) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T + \Omega_0 T) \right] \\ &= T \left[\frac{j\omega_0\pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \right] \\ &= j\Omega_0\pi\delta(\Omega - \Omega_0) - j\Omega_0\pi\delta(\Omega + \Omega_0). \end{aligned}$$

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$y[n] = -\frac{\omega_0}{T} \sin(\omega_0 n)$$

$$\begin{aligned} y_r(t) &= j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} - j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} \\ &= -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t), \end{aligned}$$

余弦通过差分系统

$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n]) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = 2 - 2 \cos \omega$$

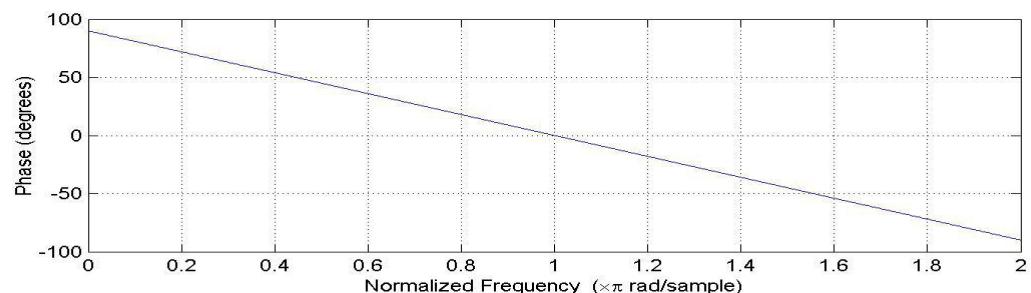
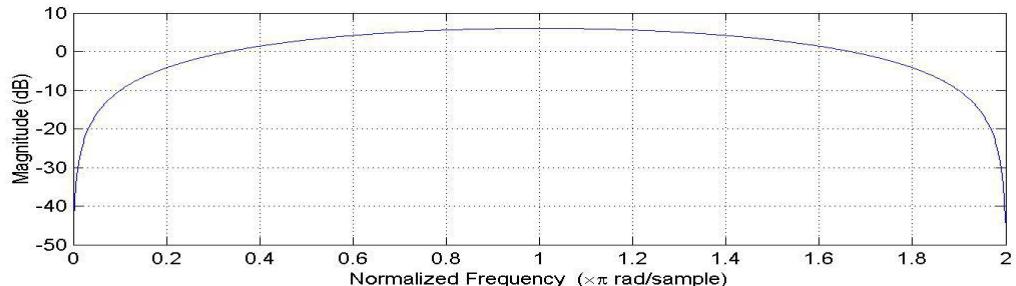
$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c \tan \frac{\omega}{2})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

$$y[n]$$

$$= \cos(\omega_0 n) - \cos(\omega_0(n-1))$$

$$= -2 \sin \frac{\omega_0}{2} \sin \left(\omega_0 n - \frac{\omega_0}{2} \right)$$



冲激响应不变法 设计数字低通滤波器的由来

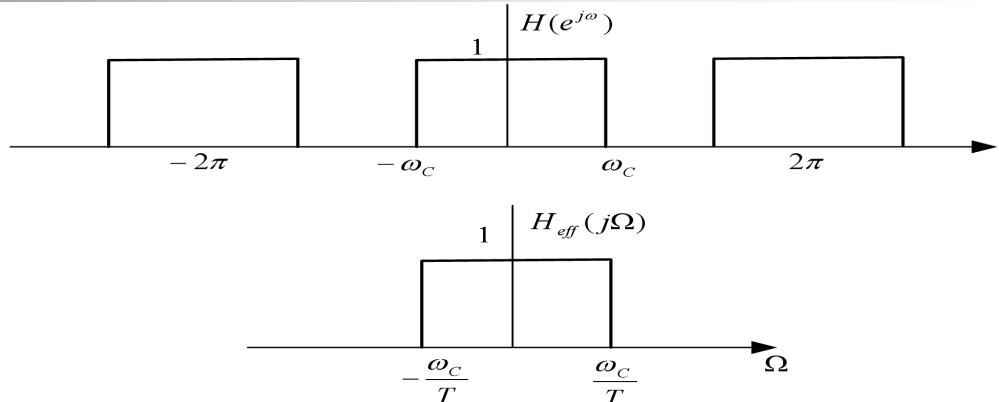
$$\Omega_c = \omega_c / T < \pi / T$$

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases}$$

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t},$$

$$h[n] = T h_c(nT) = T \frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi n T} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n},$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$



冲激响应不变法

- 目的:

- 使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟滤波器单位冲激响应的采样，即：

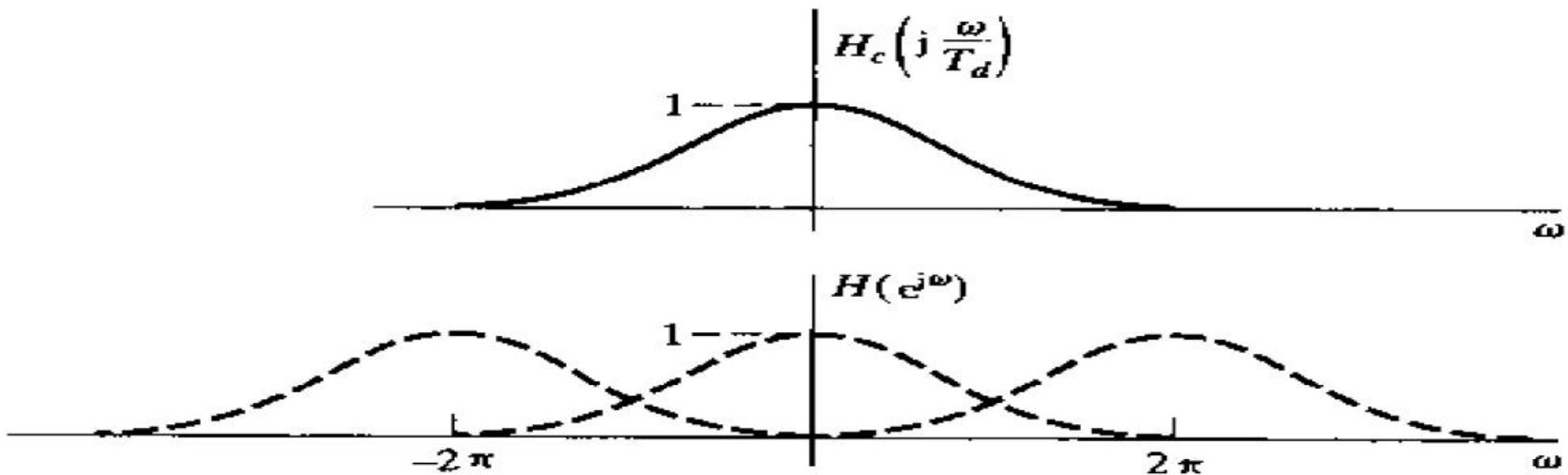
$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$$

- 利用上述关系找到模拟滤波器对应的离散时间系统函数

$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - j \frac{2\pi k}{T})$$

冲激响应不变法的混叠现象



- 1、提高采样频率将减小混叠
- 2、阶跃响应不变法也可以减小混叠

作业

- 4.2
- 4.3
- 4.4
- 4.5

- 4.8
- 4.20





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

4.2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



三

抽取与内插



四

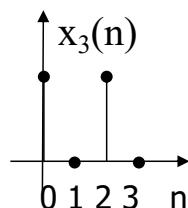
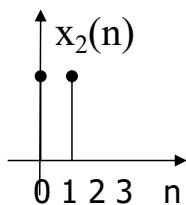
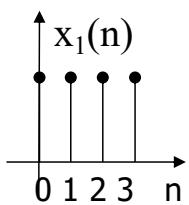
离散处理的工程问题

Test

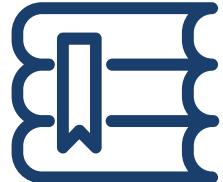
- 试用 $x(n)$ 的Z变换和DTFT表示如下序列的Z变换和DTFT

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad x_D(m) = x(mD)$$

- 求如下三个序列的DTFT，并指出相互之间的关系



抽 取 与 内 插

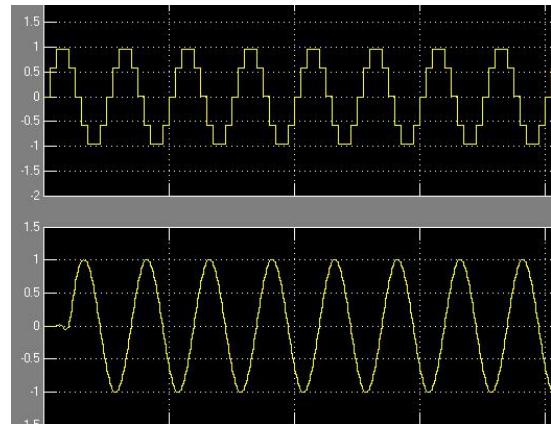
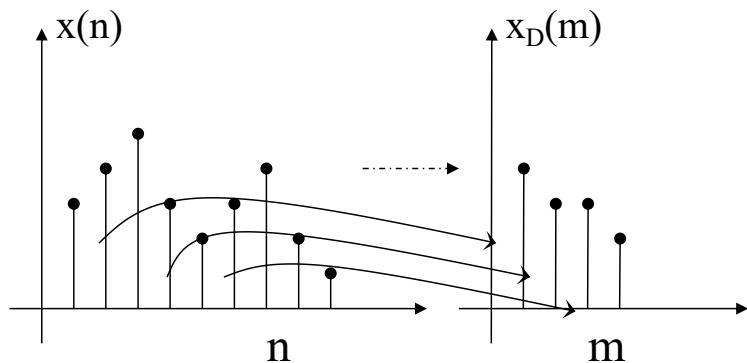


理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

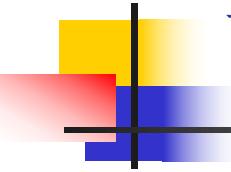
离散处理的工程问题



- 多速率是指对数据的速率进行改变，保持信息不丢失。
- 多速率处理并不只用来降速率（抽取），在某些场合下却是用来提升数据（内插）速率（如数字放音系统）。
- 深入理解和掌握抽取和内插理论对现代通信研究和各种商品化数字应用开发都至关重要。

3.2 抽取与内插

- 带通采样定理降低了射频采样速率，为实时处理奠定了基础。
- 但是，收发机的角度看，带通采样速率越宽越好。
 - 1、处理带宽越宽，对不同信号有更好的适应性；
 - 2、采样率越高，在相同的工作频率范围内所需的“盲区”采样频率数量就越少，利于简化系统设计；
 - 3、过采样可以利用相关技术提高采样量化信噪比。



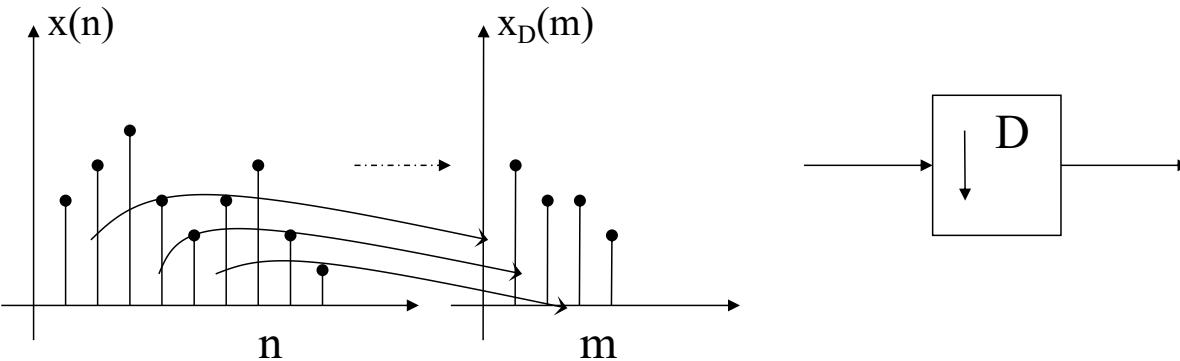
高采样率的新问题

- 采样速率的提高，后续的信号处理速度跟不上，很难满足**实时性**要求。
- 有必要对**A / D**后的数据流进行**降速**处理。
- 是否有可能进行降速处理而又不至于丢失原连续信号的信息呢？
- 回答是肯定的！
 - 实际信号带宽一般为几十千赫兹到几百千赫兹，所需采样速率要求不高，对采样数据流进行降速处理或者叫做二次采样是完全可能的。

一、信号的整倍抽取

- 把原始采样序列 每D个数据取一个形成新序列，
也叫**减采样(Downsampling, Decimation)**

$$x_D(m) = x(mD)$$



- 抽取器（采样压缩器）**

抽取后频域的变化?

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x'(n) = x(n)\delta_D(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$$

$$X_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_D(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x'(nD) z^{-n}$$

由于 $x'(m)$ 仅在 m 为 D 的整倍数处有值

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x'(m) z^{-m/D}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} mi} \right) z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j \frac{2\pi}{D} mi} z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right) \end{aligned}$$

抽取后频域的变化?

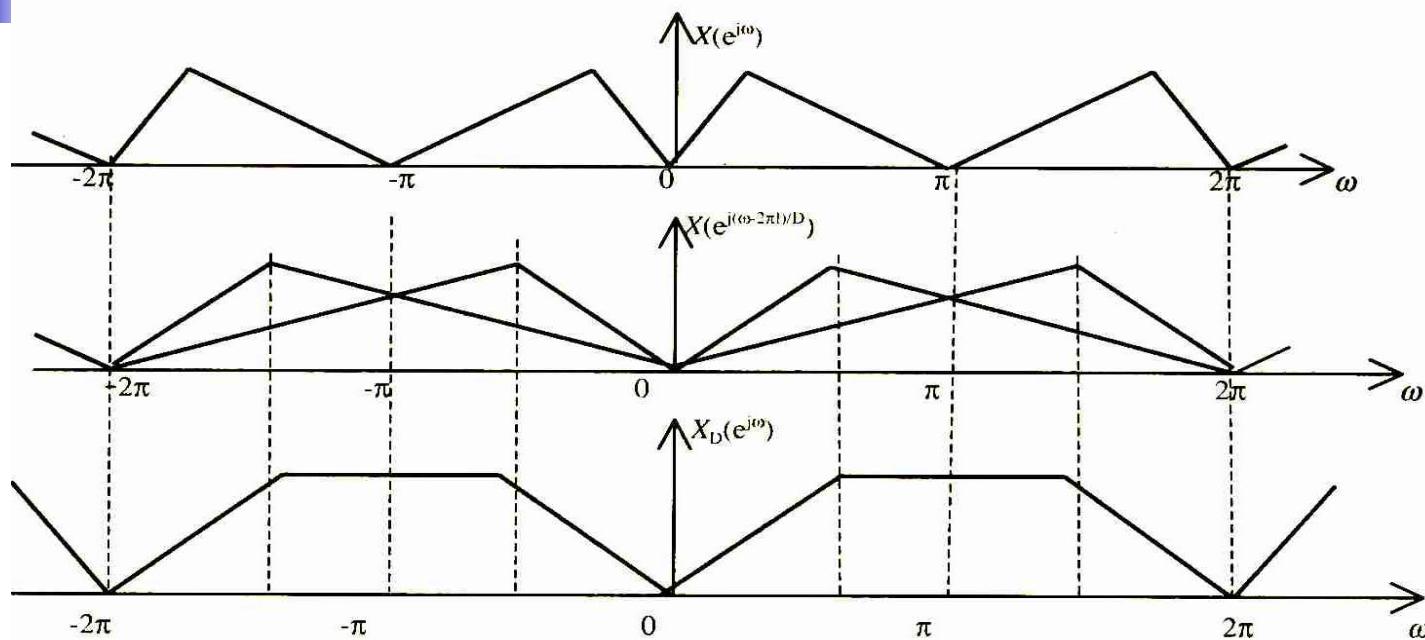
$$x(n) \Leftrightarrow X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - k\Omega_0) \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$x_D(n) \Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\Omega - k \frac{\Omega_0}{D}\right) \Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT}\right)$$

$$\begin{aligned} X_D(\omega) &= \frac{1}{DT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT}\right) \\ &\stackrel{k \rightarrow mD+i}{=} \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - m \frac{2\pi}{T} - i \frac{2\pi}{DT}\right) \right] \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m \frac{2\pi}{T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(\omega') \Big|_{\omega'=\frac{\omega-2\pi i}{D}} \end{aligned}$$

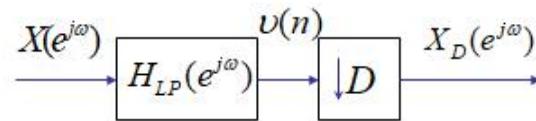
2倍抽取的频谱变化

$$X_D(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(\omega') \Big|_{\omega'=\frac{\omega - 2\pi i}{D}}$$

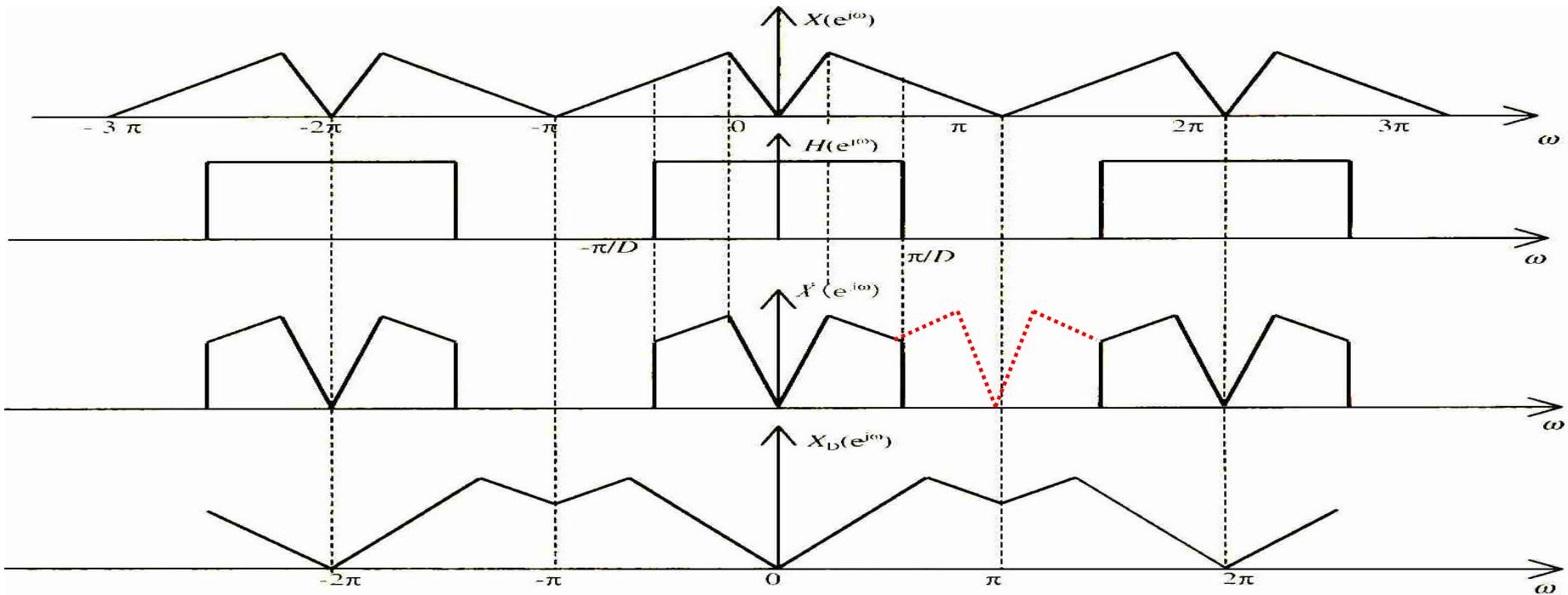


- 如果序列 $x(n)$ 的采样率为 F_s ，则其无模糊带宽为 $F_s/2$ 。
- D 倍抽取后序列 $x_D(m)$ 之取样率为 F_s/D ，其无模糊带宽为 $F_s/2D$ 。
- 当 $x(n)$ 含有大于 $F_s/2D$ 频率分量时， $x_D(m)$ 必然频谱混叠，无法恢复 $x(n)$ 某些频率分量。

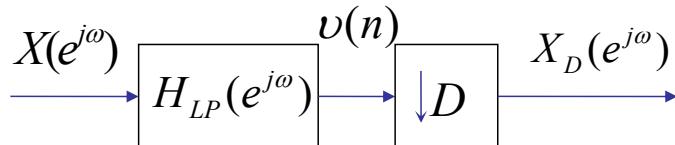
如何防止混叠失真？



- 先用数字滤波器(带宽为 $\frac{\pi}{D}$)滤波，再进行**D**倍抽取。保证抽取前后频谱成分一一对应，信息不丢失



D倍抽取器结构



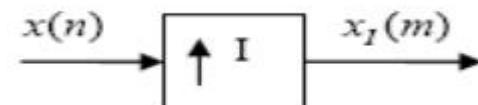
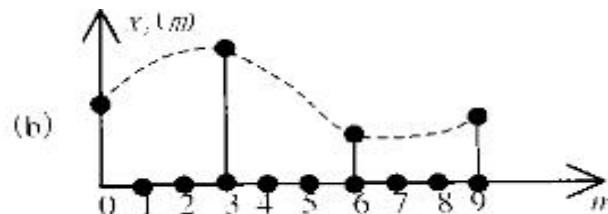
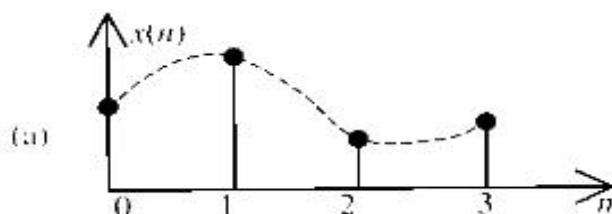
- 需要指出，即当原始信号的频谱分量本身就小于 $\frac{\pi}{D}$ (归一化频域) 时，前置低通滤波器可以省去。

$$X_D(n) = v(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn - k) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn - k)}$$

二、信号的整倍内插

- 所谓整数倍内插就是指在两个原始抽样点之间插入(**D-1**)个零值，也叫做**增采样 (Upsampling, Interpolation)**。

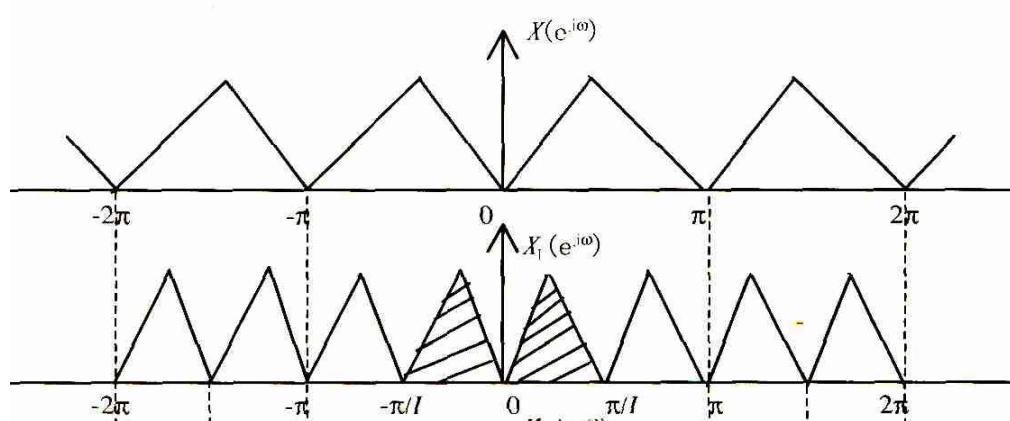
$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

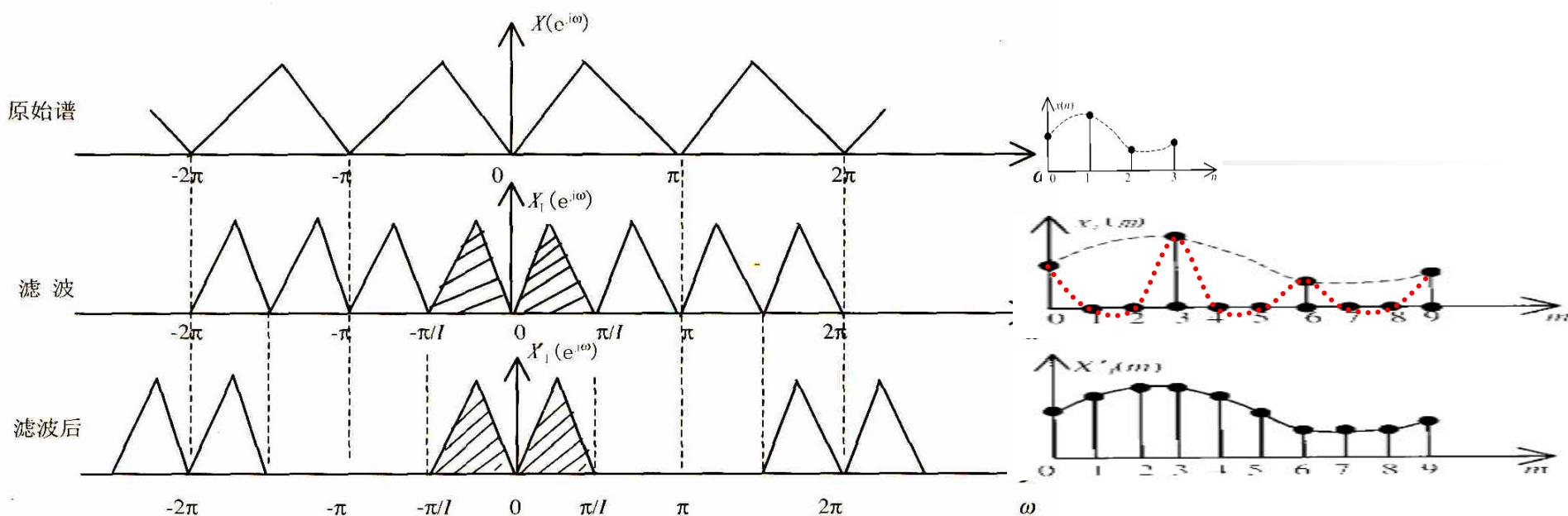


内插信号频谱的变化

- $x_I(m)$ 除了 m 为 I 的整倍点，其余都为零，所以有：

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_I(m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_I(kI) e^{-j\omega I k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega I k} = X(e^{j\omega I}) \end{aligned}$$

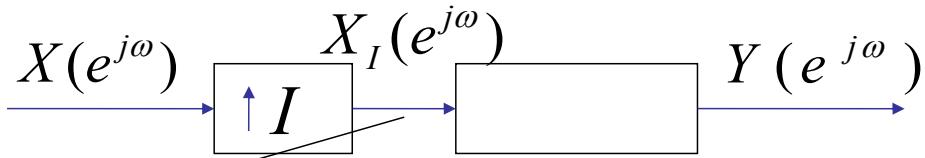




- 1、由上式可见，内插后的信号频谱为原始序列谱经**I倍压缩**后得到的谱。
- 2、经低通滤波消去高频镜像之后，原来插入的零值点变为 **$x(n)$** 的准确内插值，经过内插大大提高了时域分辨率。

完整内插器结构

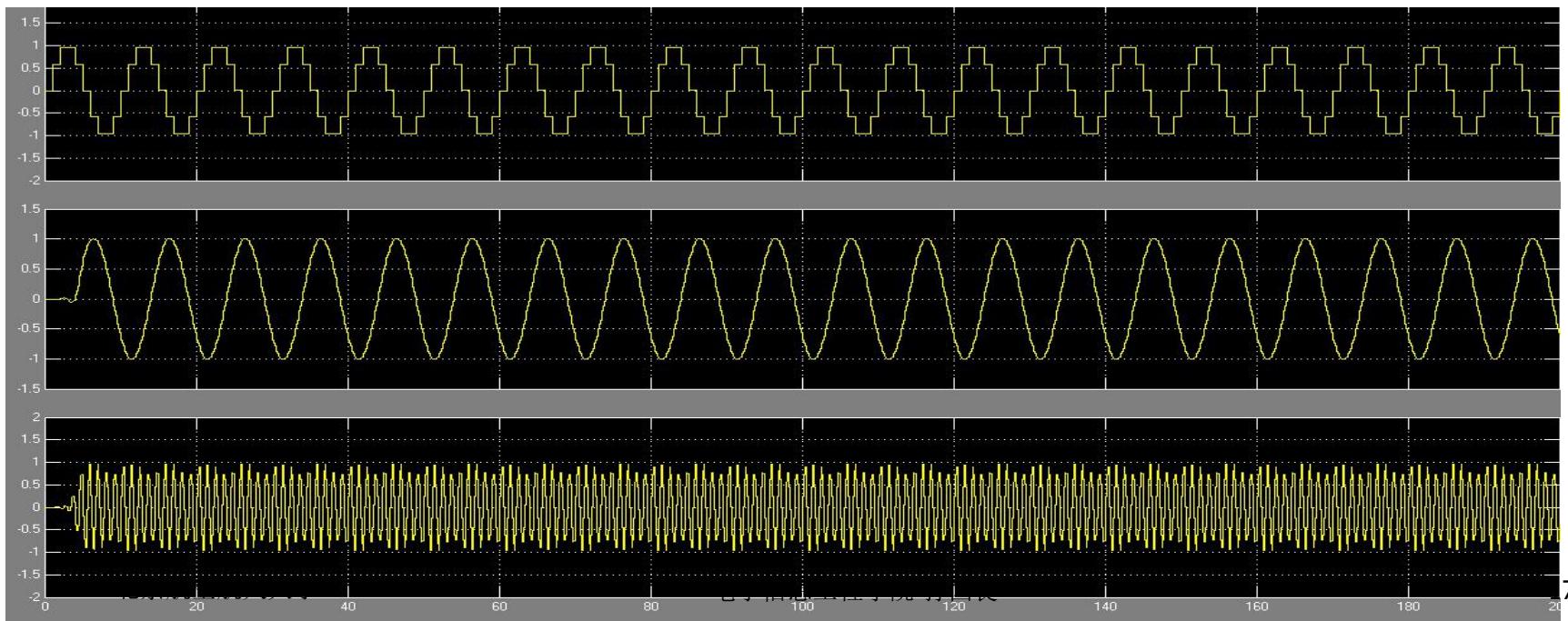
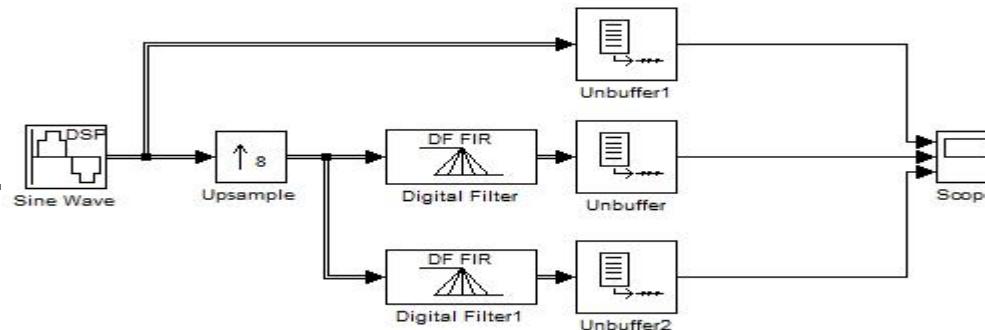
$$H_{LP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ I, & 0 \leq |w| \leq \frac{\pi}{I} \end{cases}$$



$$y(n) = v(n) * h(n) = \sum_k v(k)h(n-k) = \sum_k x(k/I)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-kI)$$

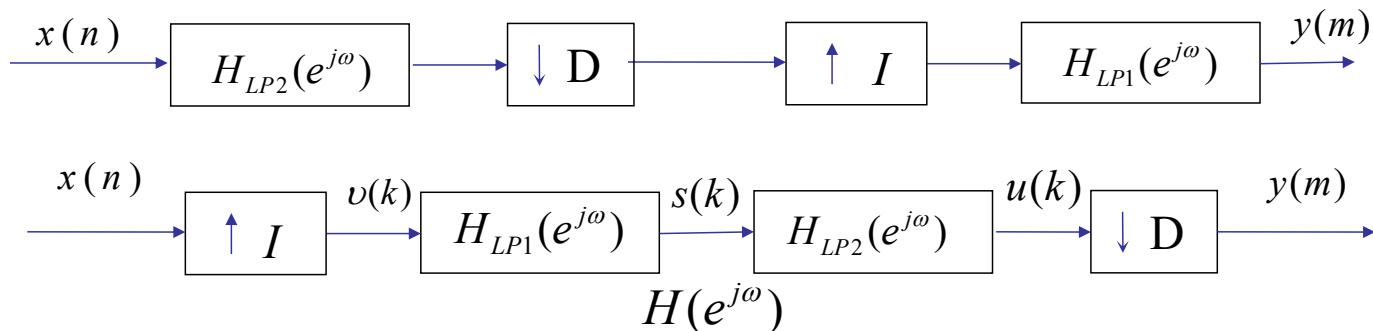
- 内插器的低通滤波器在内插之后，目的是为了滤除高频镜像分量
 - 抽取器的低通滤波器是在抽取之前，为了防止混叠干扰。
 - 如果在内插之后，不是采用低通，而是采用带通，则可将内插后的高频成分取出，这正是数字上变频的基本原理。

$$H_{BP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ I, & n \frac{\pi}{I} \leq |w| \leq (n+1) \frac{\pi}{I} \end{cases}$$



三、信号非整倍抽取和内插

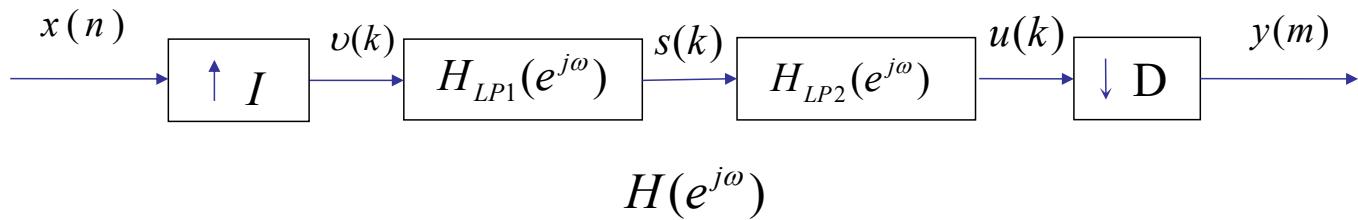
$$R = \frac{I}{D}$$



- 分数倍变换可以通过先进行**I**倍内插再进行**D**倍抽取来实现。两个级联低通滤波工作在相同的速率，可以用一个组合滤波器来代替，即避免混叠又消除镜像干扰。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

分数倍变换的频谱

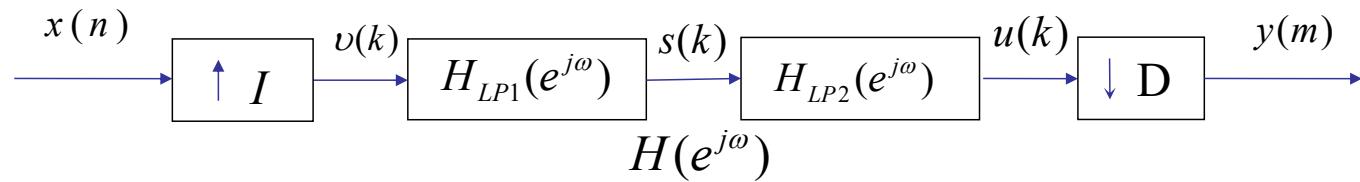


$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})$$

$$U(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})H(e^{j\omega}) = \begin{cases} IX(e^{j\omega I}) & |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} U(e^{j(\omega - 2\pi k)/D}) = \begin{cases} \frac{I}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega I - 2\pi k)/D}) & |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

分数倍变换的时域表示



$$v(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I \dots \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn - Ik)$$

分数倍抽取时域运算的简化

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn -Ik)$$

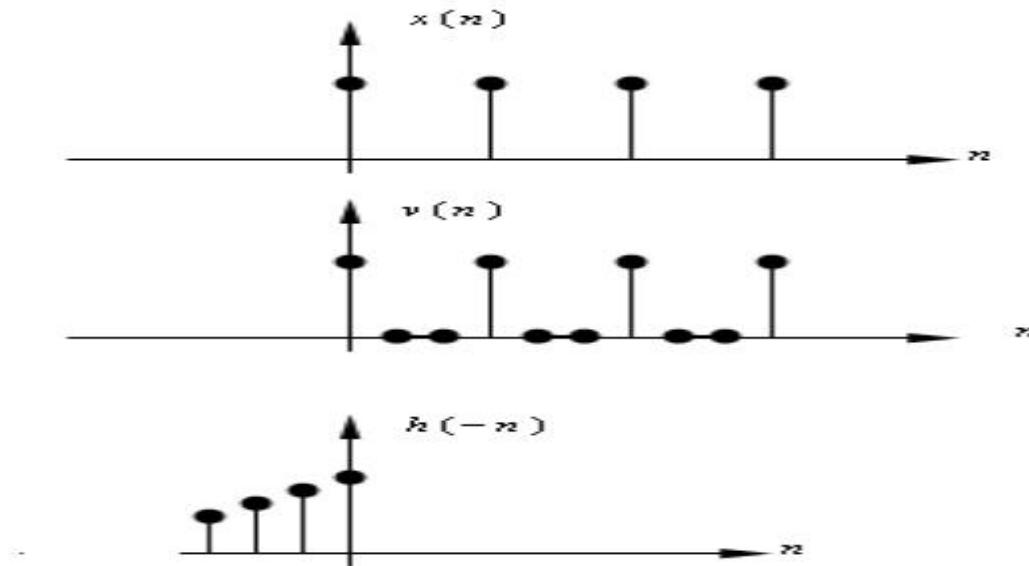
$$Dn - Ik \geq 0 \quad k \leq \frac{D}{I}n \quad \text{令: } m = \left[\frac{Dn}{I} \right] - k, \quad m \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left[\frac{Dn}{I}\right] - m\right)h(Dn - \left[\frac{Dn}{I}\right]I + mI)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left[\frac{Dn}{I}\right] - m\right)h(mI + \langle Dn \rangle_I)$$

Example:

- 令 $I=3, D=2$, $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图所示



1、求 $u(n)$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

$$u(1) = \cancel{0 \cdot h(0)} + x(0)h(1) = x(0)h(1)$$

$$u(2) = \cancel{0 \cdot h(0)} + \cancel{0 \cdot h(1)} + x(0)h(2) = x(0)h(2)$$

$$u(3) = x(1)h(0) + \cancel{0 \cdot h(1)} + \cancel{0 \cdot h(2)} + x(0)h(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)$$

⋮

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

~~$$u(1) = x(0)h(1)$$~~

$$u(2) = x(0)h(2)$$

~~$$u(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)$$~~

$$u(4) = x(1)h(1)$$

⋮

2、求y(n)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor - m\right) h(mI + \langle Dn \rangle_I)$$

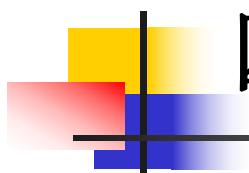
$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 2n \rangle_3)$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} x(-m) h(3m) = x(0)h(0) = u(0)$$

既避免了与插值后为零的点相乘的多余运算，又避免了被舍弃点的多余计算。

$$y(1) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 2 \rangle_3) = \sum_{m=0}^{\infty} x(-m) h(3m + 2) = x(0)h(2) = u(2)$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 4 \rangle_3) = \sum_{m=0}^{\infty} x(1-m) h(3m + 1) = x(1)h(1) = u(4)$$



四、速率变换的多相结构

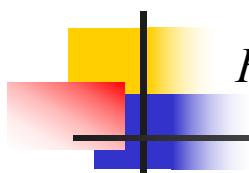
- 问题：
 - 抽取和内插器中数字滤波处理发生在高采样率数据端上，需要很大的计算量，有时甚至难以实现。

- 解决途径：
 - 信号的多相表示应用于多速率处理中以提高处理效率。

1、信号及滤波器的多相表示

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \dots \\ &\quad + h_1 z^{-1} + h_5 z^{-5} + h_9 z^{-9} + h_{13} z^{-13} + \dots \\ &\quad + h_2 z^{-2} + h_6 z^{-6} + h_{10} z^{-10} + h_{14} z^{-14} + \dots \\ &\quad + h_3 z^{-3} + h_7 z^{-7} + h_{11} z^{-11} + h_{15} z^{-15} + \dots \\ &= z^0 [h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-1} [h_1 + h_5 z^{-4} + h_9 z^{-8} + h_{13} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-2} [h_2 + h_6 z^{-4} + h_{10} z^{-8} + h_{14} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-3} [h_3 + h_7 z^{-4} + h_{11} z^{-8} + h_{15} z^{-12} + \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l)z^{-Mn} \\ E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l)z^{-n} \\ H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \\ e_l(n) &= h(Mn + l) \\ E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_l(n)z^{-n} \end{aligned}$$



$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \quad h_l^{(E)}(n) = h(Mn + l)$$

$$E_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l) z^{-n} \quad \text{多相—I型}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_l(z^M) \quad h_l^{(R)}(n) = h(Mn + M - 1 - l)$$

$$R_l(z) = E_{M-1-l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + M - 1 - l) z^{-n} \quad \text{多相—I型}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^l Q_l(z^M) \quad h_l^{(Q)}(n) = h(Mn - l)$$

$$Q_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn - l) z^{-n} \quad \text{多相—III型}$$

北京航空航天大学

系统的多相分解示例

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$M = 2$$

$$E_0(z) = 1 + 3z^{-1} \quad E_1(z) = 2 + 4z^{-1}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1}{1 - \alpha^2 z^{-2}} + \frac{\alpha z^{-1}}{1 - \alpha^2 z^{-2}}$$

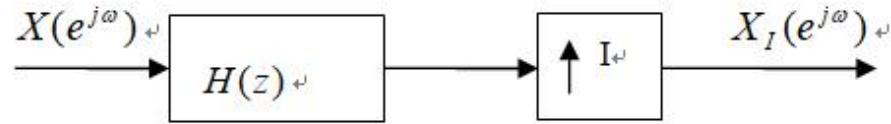
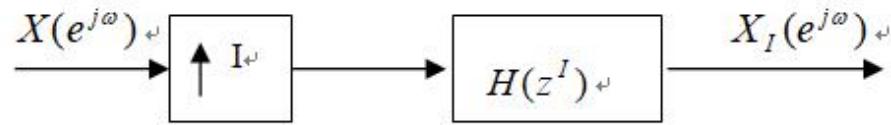
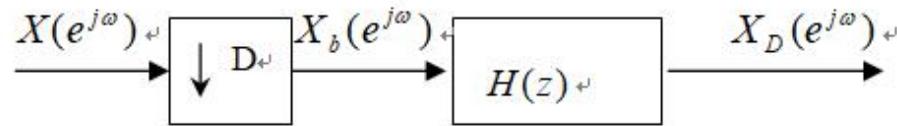
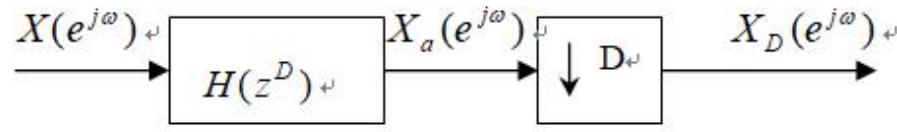
$$E_0(z) = \frac{1}{1 - \alpha^2 z^{-1}} \quad E_1(z) = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2 z^{-1}}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

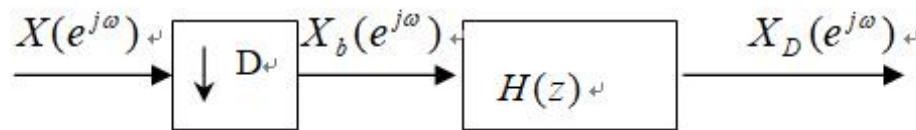
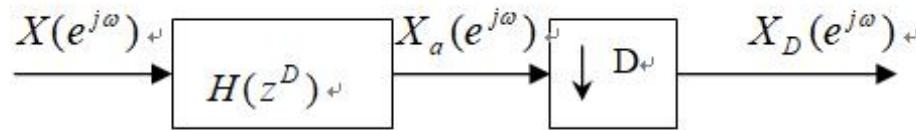
2、内插/抽取的多相实现

- 从抽取和内插器来看，其**低通滤波器皆工作在高数据率条件下**，势必对运算速度的要求很高，不利于实时处理。
- 那么是否可以将滤波器变换到数据率的低端进行工作呢？

变速率处理多相实现结构

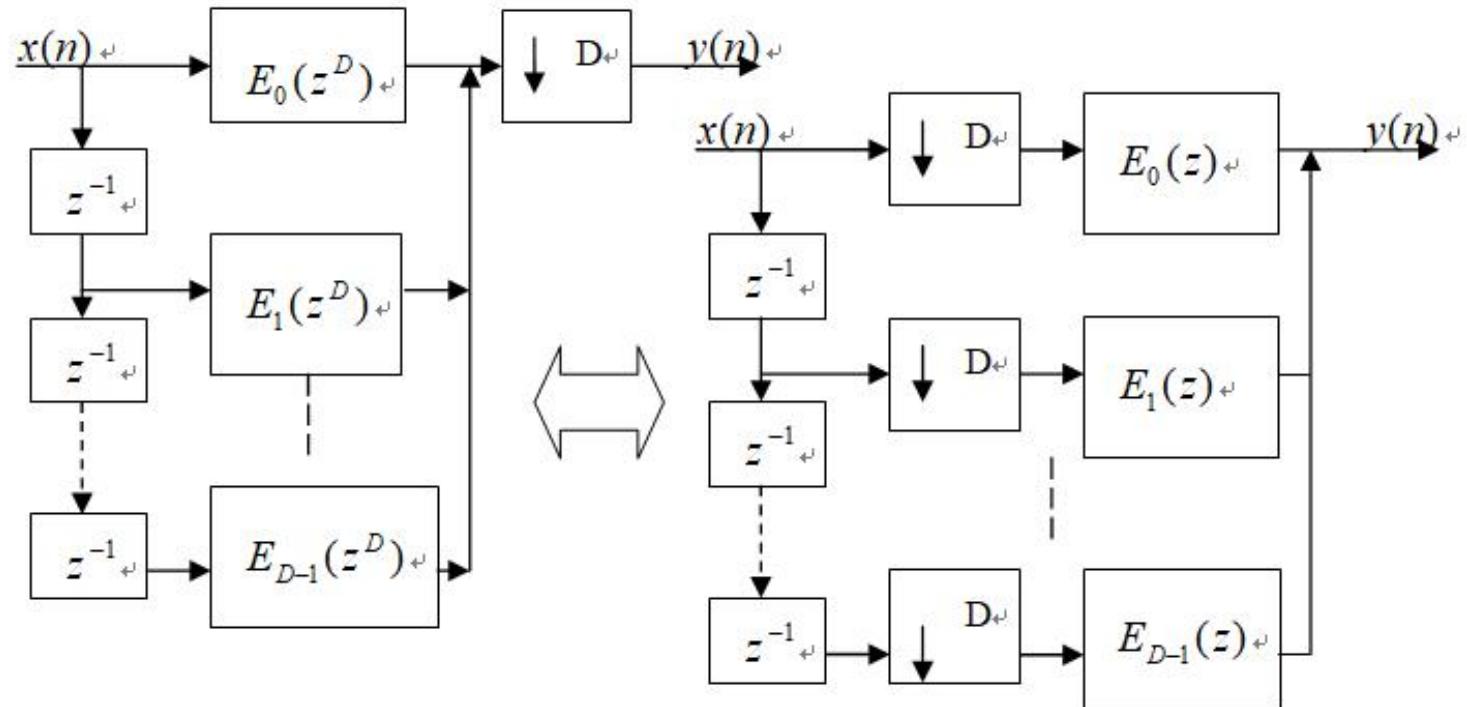


抽取器多相结构等效证明

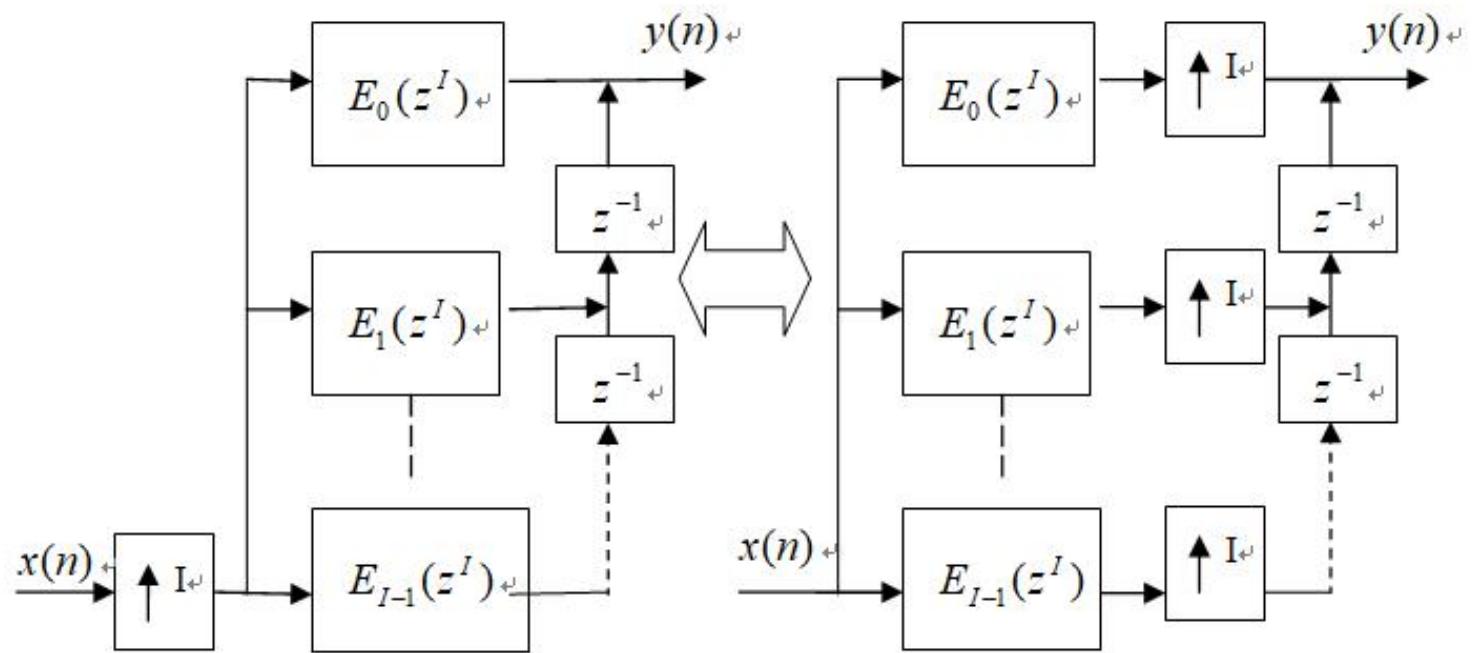


$$\begin{aligned} X_D(e^{j\omega}) &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X_a(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}D}) X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\omega}) X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) = \left[\frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \right] H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

抽取器的等效多相滤波结构



内插器的等效多相滤波结构



作业：

- 4.15
- 4.18
- 4.36
- 4.40
- 4.53





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

4.3



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



三

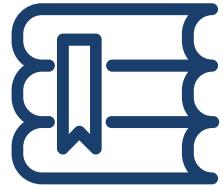
抽取与内插



四

离散处理的工程问题

离散化处理工程问题



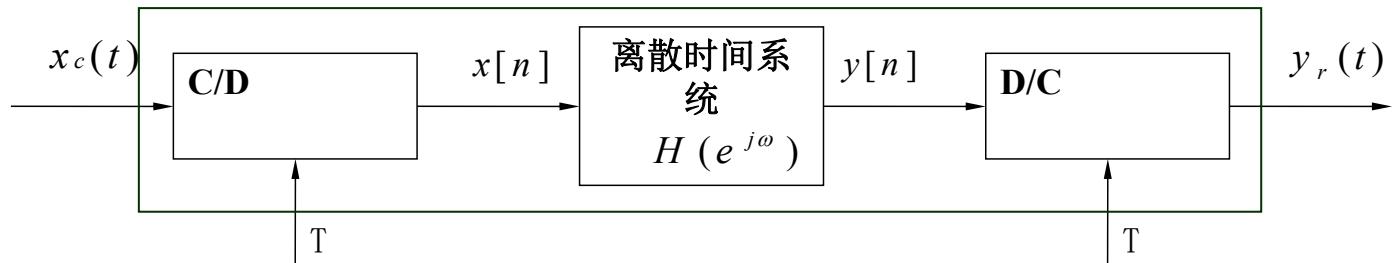
理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

离散处理的工程问题

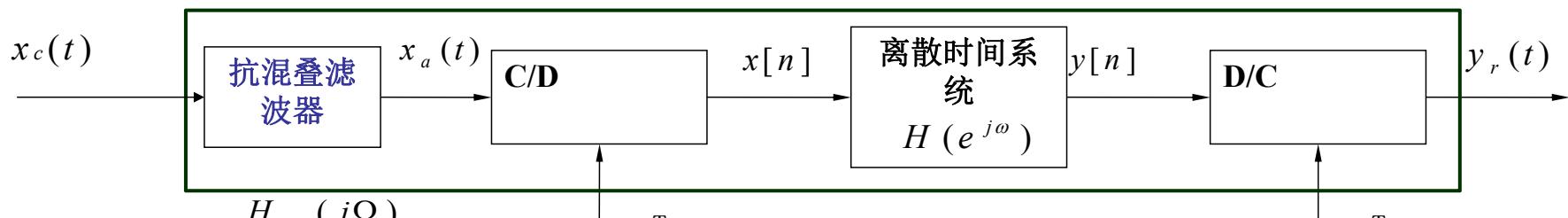
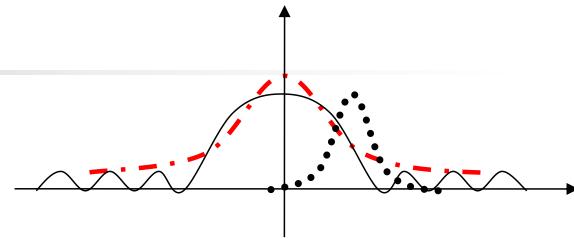
- 离散LTI系统能等效为连续LTI系统



- 等效频率响应为: $H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$ $|\Omega| < \pi / T$
- 实际应用中:
 - 输入信号不是真正带限---》预滤波
 - C / D转换器存在量化误差---》量化噪声模型
 - D / C转换器近似实现存在畸变---》补偿重构
- 如何使得离散化处理接近模拟LTI特性?

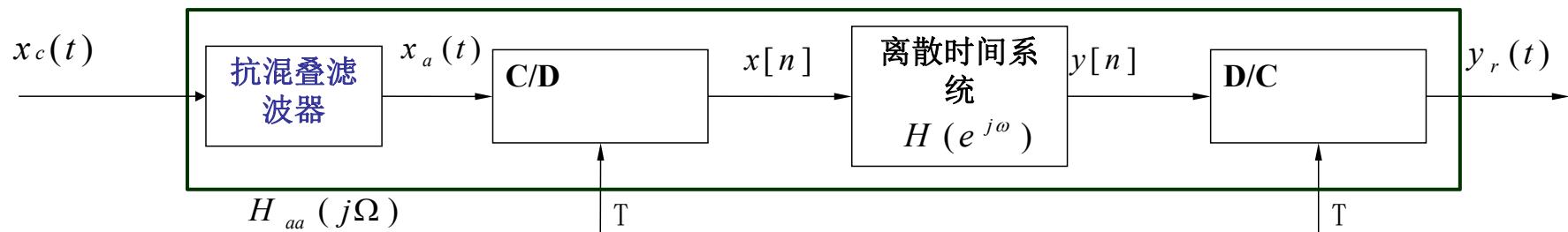
一、消除混叠的预滤波

- 工程应用中，采样率设定总是受到干扰：
 - 1、有用信号本身不带限
 - 2、信号本身是带限的，**加性噪声**也可能占据高频区域；
 - 3、有用信号仅占据小部分带宽
 - 语音在**0~20kHz**内有明显分量，对用户来说**3~4kHz**足够
- 防止因采样而引起的混叠，必须将输入信号**强制限带**。
 - 如果系统的采样率一定，则要求输入信号强制限带到低于所要求的采样率一半（又称作系统的**处理带宽**）。



增加抗混叠后

$$H_{eff}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T})$$

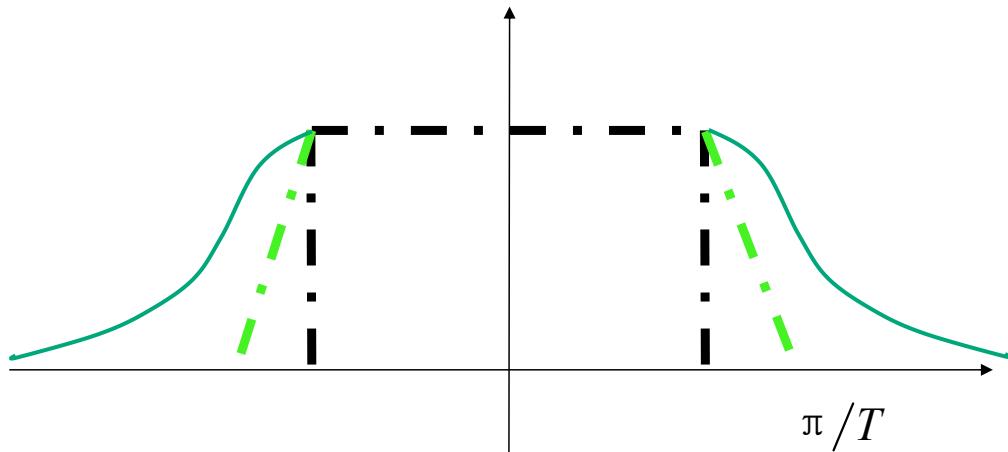


- 限带功能由**C / D**转换器之前的低通滤波器完成，称为**抗混叠滤波器**，**要求抗混叠滤波器在有效带宽处有足够大的衰减。**
- 理想情况下，理想抗混叠滤波器的频率响应为：

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 0 & |\Omega| > \Omega_c \\ 1 & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T \end{cases}$$

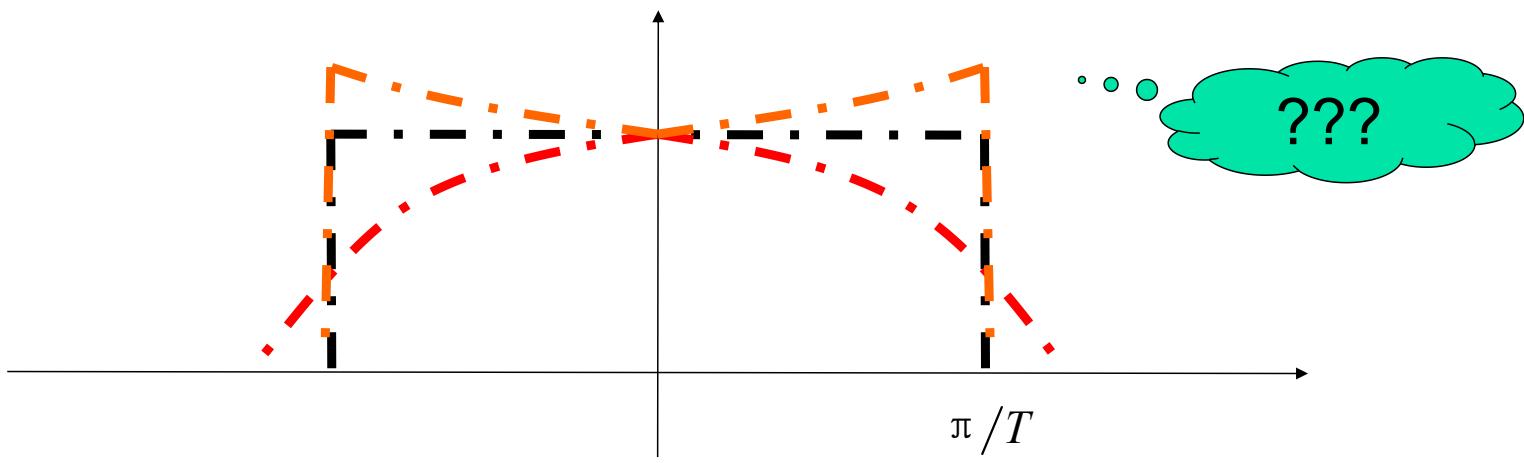
问题

- 期望抗混叠滤波器
有锐截止特性。
- 难以实现，且有很严重的**非线性相位**失真

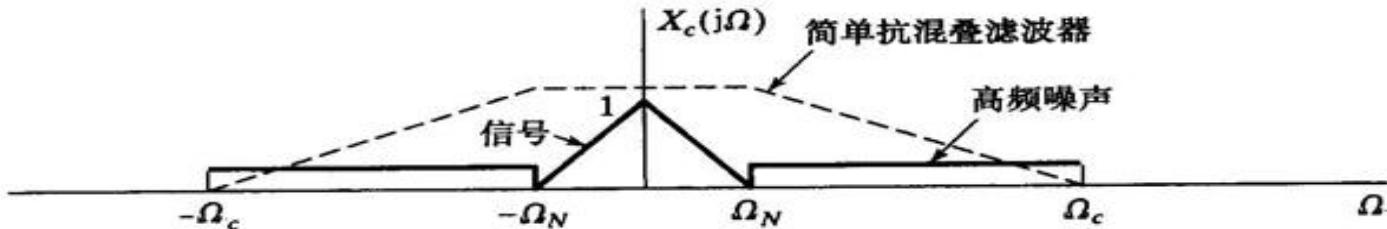


幅度预滚降

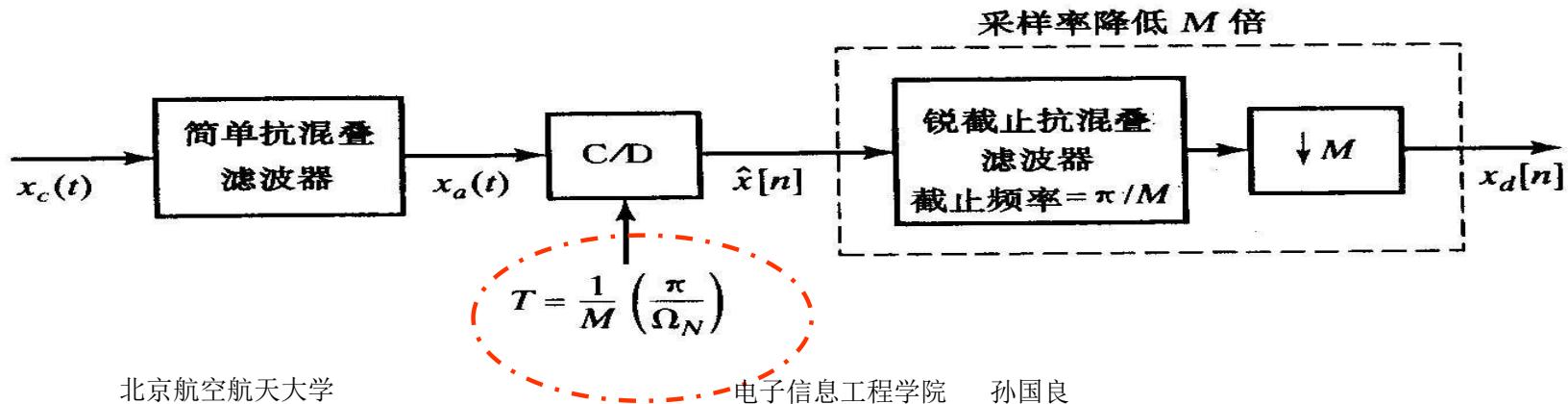
- 为了实现在 π/T 以上的频率响应部分小到可以忽略不计，就需要对 $H_{aa}(j\Omega)$ 特性一开始就进行“滚降”，也即在低于 π/T 的频率上就引入衰减。
 - 这种衰减所带来的幅度失真能够部分的在离散时间系统中补偿

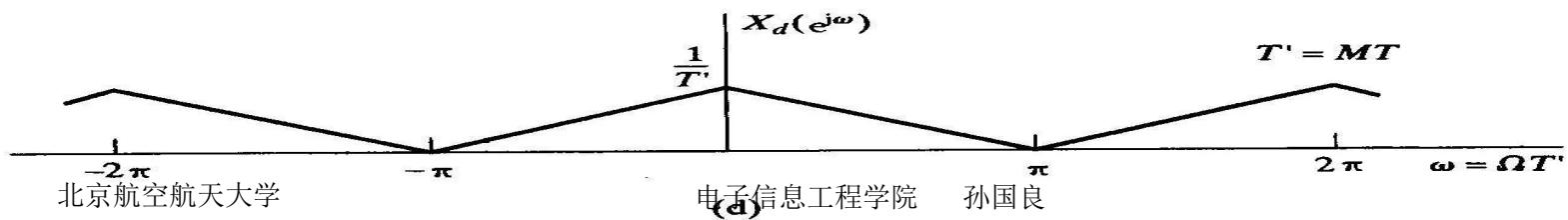
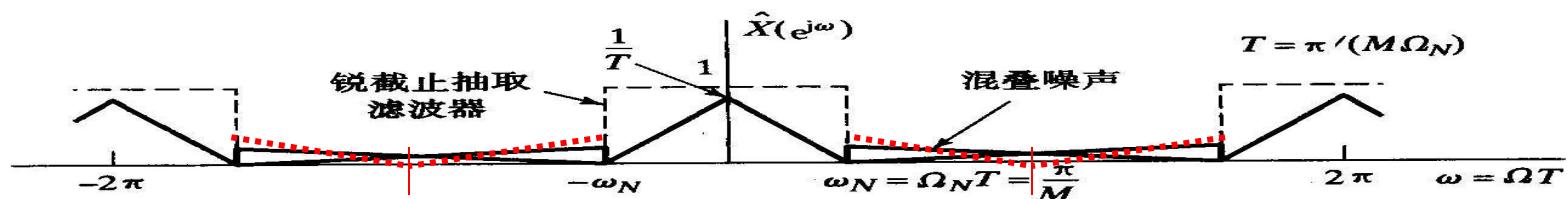
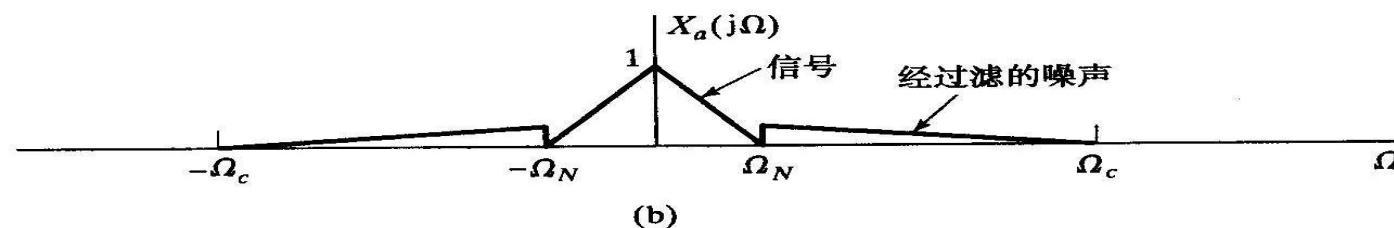
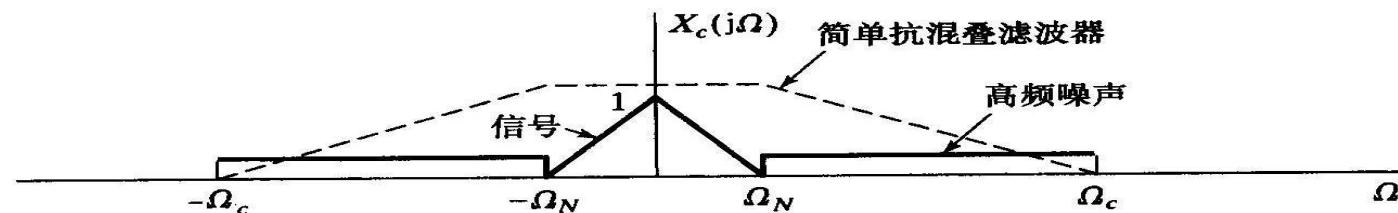


过采样抗混叠



- 采用简单的抗混叠滤波器，使得其在 M 倍的信号带宽处 $M\Omega_N$ 有显著的衰减。
- 用高的采样率 $2M\Omega_N$ 实现C/D转换，之后进行 M 倍抽取。





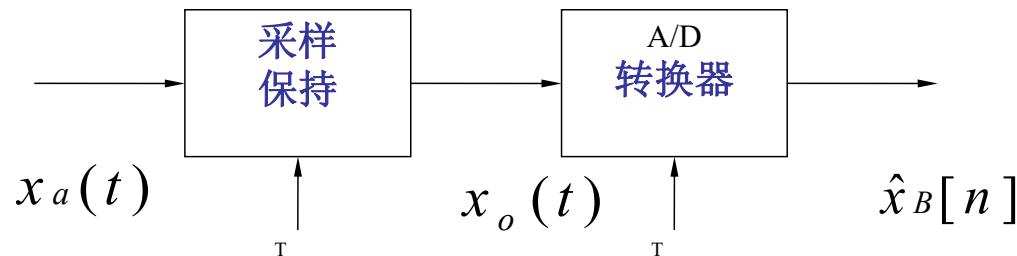
北京航空航天大学

电子信息工程学院

孙国良

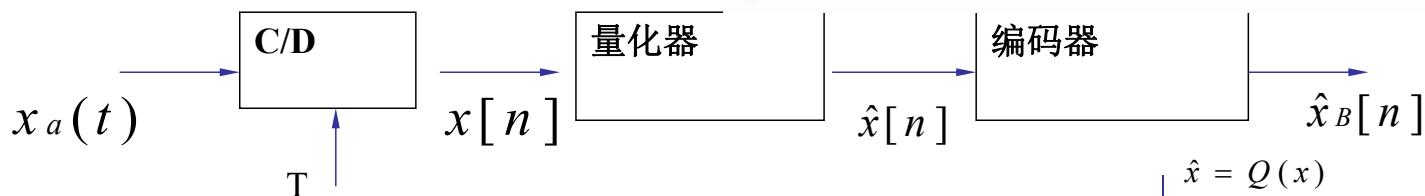
二、A/D采样量化噪声

- 理想C / D转换器将连续时间信号转换为无限精度的离散时间信号。
- 实际中利用数字信号进行处理，即近似为有限精度的序列或量化样本



量化

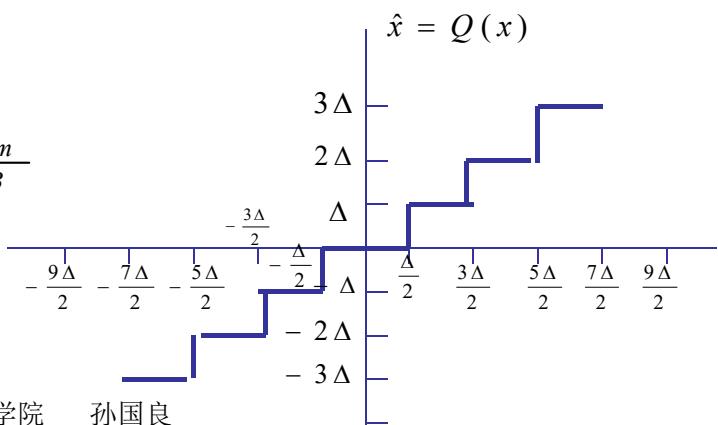
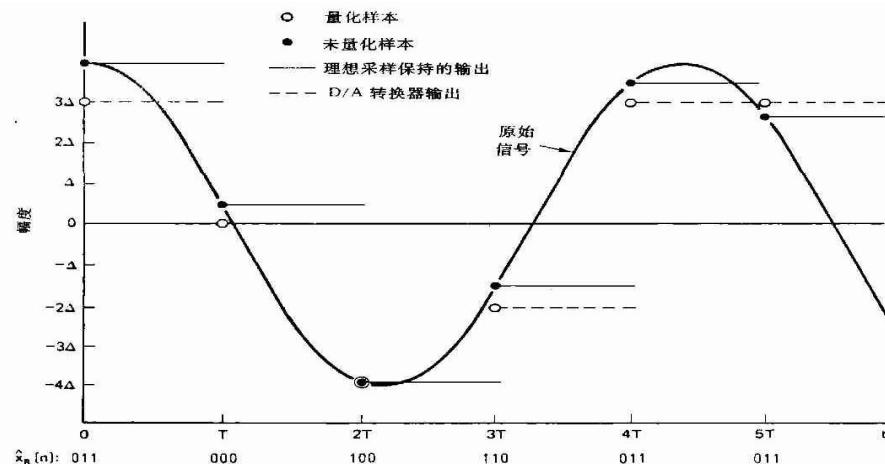
- 量化器是一种非线性系统，能够将输入样本按照某一规则映射到幅值的有限集



量化器量化阶取决于满幅度电平和量化位数有关

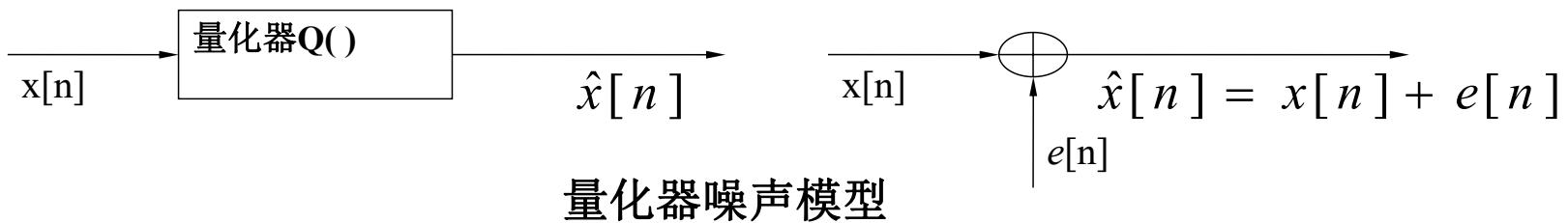
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

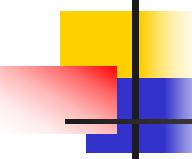
$$\hat{x}[n] = \hat{x}_B[n]\Delta$$



量化噪声模型

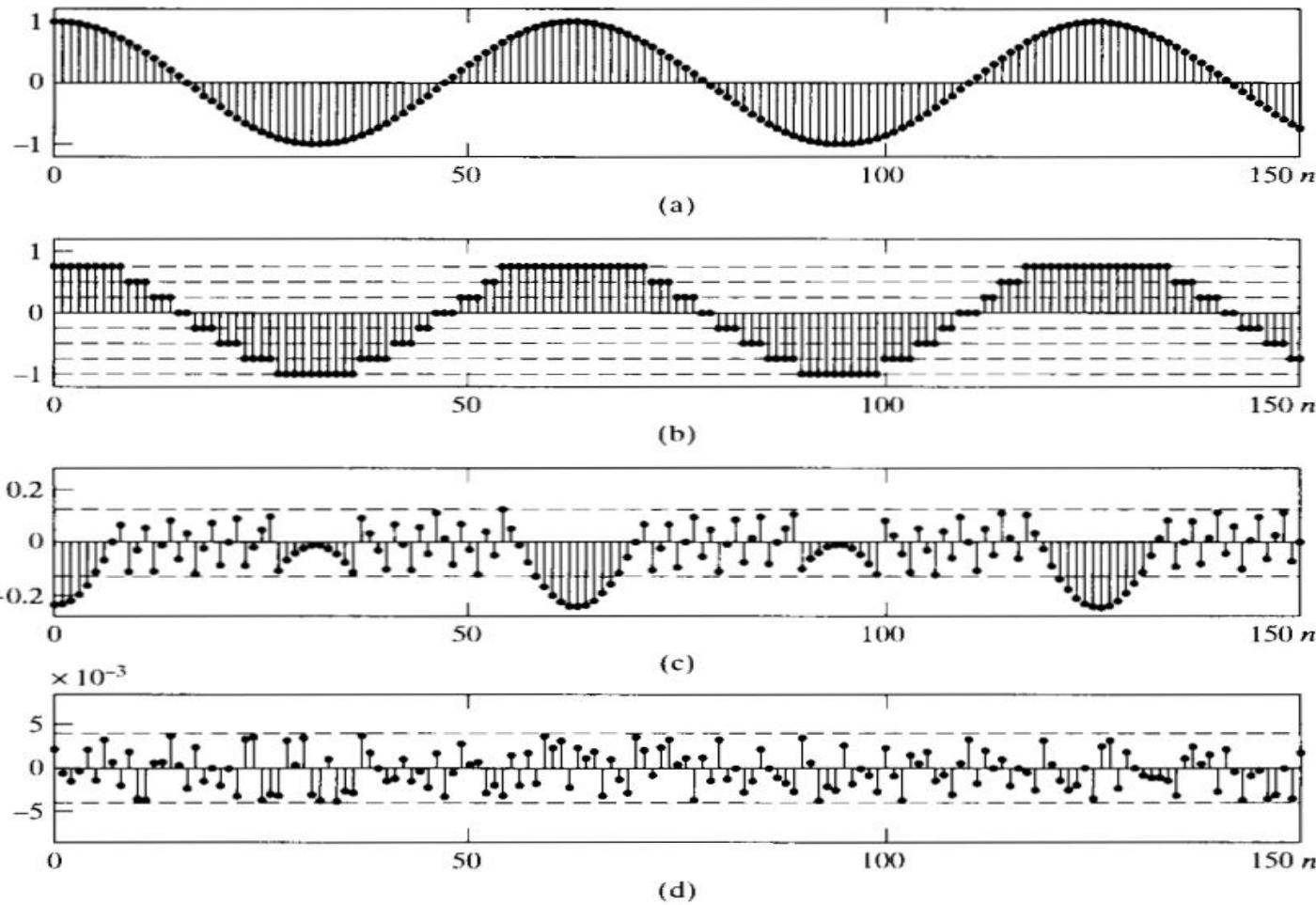
- 一般量化样本不同于样本的真值，其差值就是量化误差：
 - 对于舍入的量化器 $\hat{x}[n] = \hat{x}[n] - x[n]$
- 量化器的简化模型如图所示。 $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$
 - 在大多数情况下，**e(n)**是未知的
 - 统计模型来表示量化效应，，量化误差为加性噪声信号。





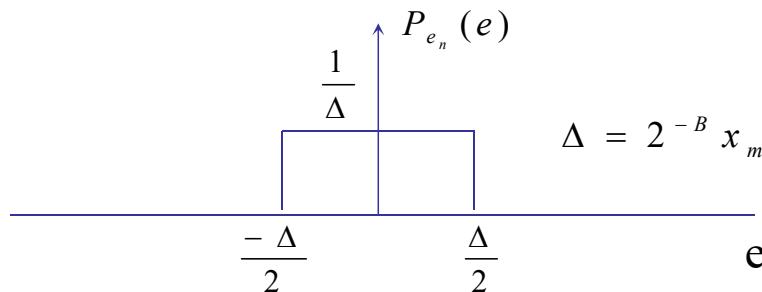
加性噪声模型的基本假设

- 1、误差序列 $e[n]$ 是平稳随机过程。
- 2、误差序列 $e[n]$ 与序列 $x[n]$ 不相关。
- 3、误差过程为白噪声，样本之间不相关。
- 4、误差过程概率分布在量化误差范围内均匀分布。
 - 假设是有条件的：如果信号足够复杂，而量化阶又足够小，以至于从一个样本到另一个样本，信号的幅度很可能横穿过许多量化台阶，那么这个统计模型的假设似乎就愈真实。



均匀量化

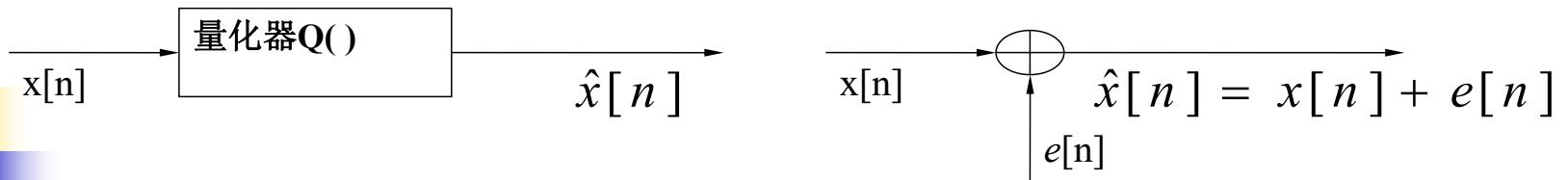
- 均匀舍入量化噪声是均匀分布的随机变量
 - $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$
- 量化噪声的一阶概率密度如图所示(如果量化是**截尾**而不是舍入，那么误差总是负的，并假设从- Δ 到 0 为均匀概率密度分布)。 $\Delta = 2^{-B} x_m$



量化噪声功率

- 由于假定噪声样本间是不相关，这样 $e[n]$ 为均匀分布的白噪声序列。
- $e[n]$ 的均值是零，而其方差为： $\sigma_c^2 = \frac{\Delta^2}{12}$
- 对于一个(B+1)位双极性量化器，其满幅度值为 X_m 。噪声方差或功率是：

$$\sigma_c^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$



- 加性噪声所污损的一种常用度量是**信噪比**, 定义为信号方差(功率)对噪声功率的比, 以**dB**表示
- 一个**(B+1)**位量化器的信噪比是:

$$SNR = 10 \lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}\right) = 10 \lg\left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) = 6.02 B + 10.8 - 20 \lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

- 量化样本的字长每增加一位(也即量化电平数加倍), 信噪比提高**6dB**。

信号幅度匹配

$$SNR = 6B - 1.25 \text{ dB}$$

$$SNR = 10\lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}\right) = 10\lg\left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) = 6.02B + 10.8 - 20\lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

- 容易看出当 σ_x 减半时，**SNR**下降**6dB**。
- 因此，仔细地将**信号幅度与A / D换器的满幅度值匹配**是很重要的。
 - 对于像语音和音乐，幅度分布趋向于集中在零附近，并随着幅度的增加很快地跌落。幅度超过**均方根值三倍**或四倍的概率非常小。
 - 为了避免峰值箝位(如在统计模型中所假设的)，可以在**A / D转换器**之前设置滤波器和放大器增益，以使得 $\sigma_x = X_m / 4$
 - 高质量的音乐录制和重放系统中，要获得大约**90~96dB**的信噪比，就要求有**16位量化**

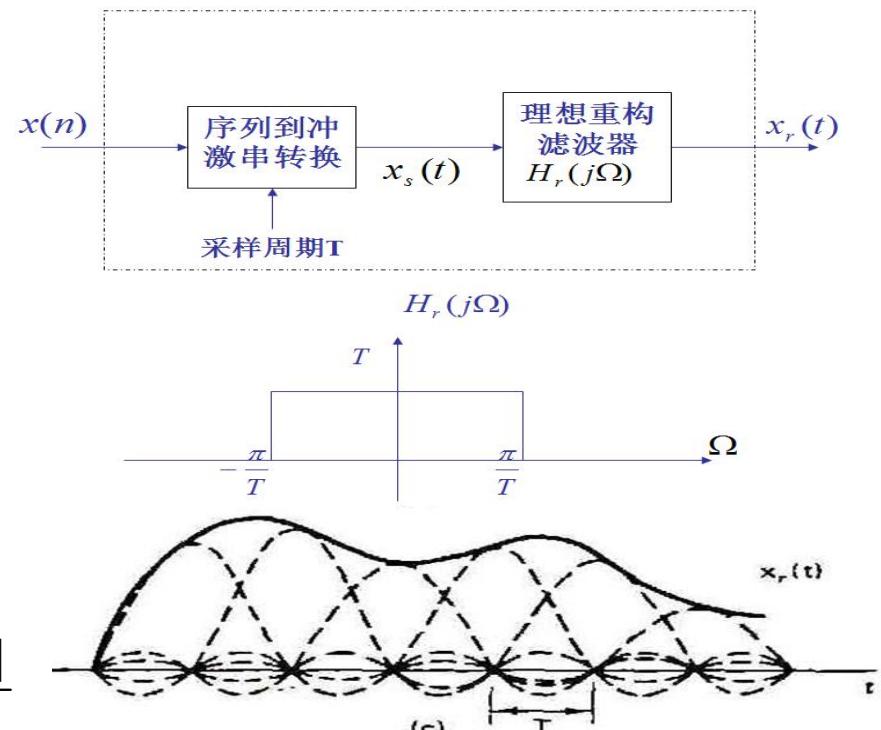
三、D/A转换中的信号失真

■ 理想重构带限信号：

$$X_r(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)$$

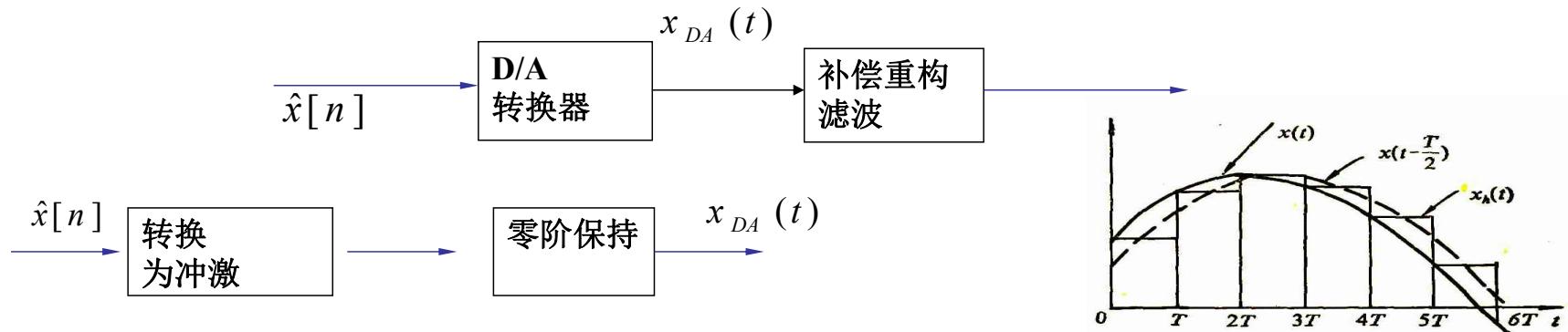
$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, |\Omega| < \pi/T \\ 0, |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$



理想D/C的D/A逼近

- 可实现系统近似是数字/模拟转换器(D / A)紧跟着一个补偿重构滤波器。



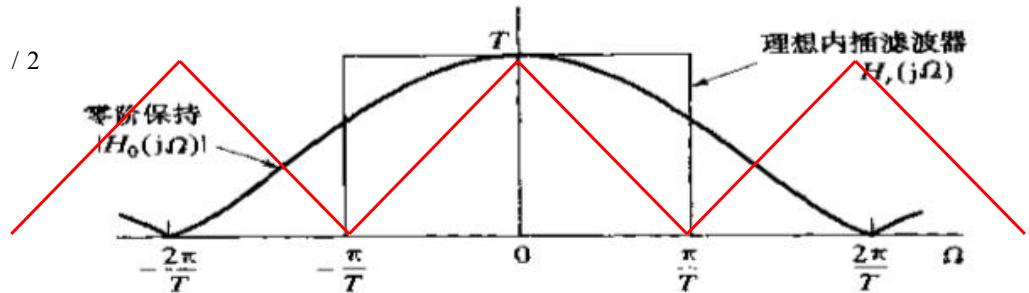
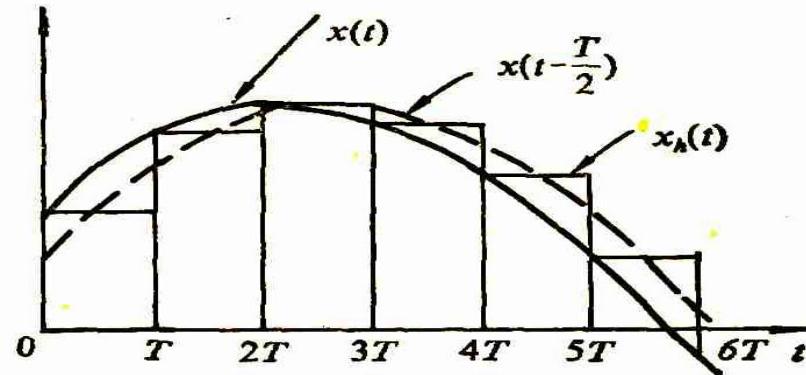
$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_B[n] \Delta h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT)$$
$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

零阶保持器

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{其它} \\ 1 & 0 < t < T \end{cases}$$

$$H_0(s) = \left(\frac{1 - e^{-TS}}{s} \right)$$

$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T / 2)}{\Omega} e^{-j\Omega T / 2}$$



零阶保持器不是一个理想的低通滤波器

- 幅度特性发生畸变；
- 高频分量仍然能够通过，引入噪声和高频镜像。
- 信号产生滞后群延迟 ($T/2$)，对闭环反馈系统的稳定性不利。

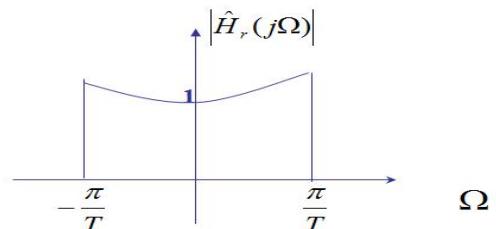
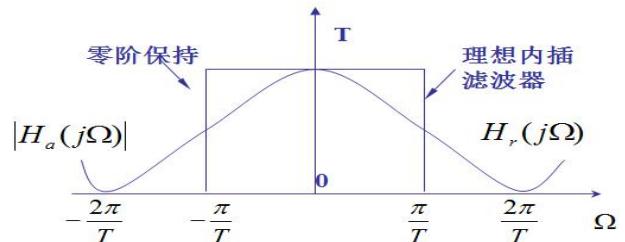
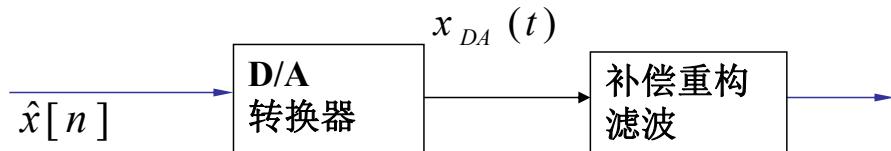
补偿重构滤波器

■ 补偿重构滤波器：

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

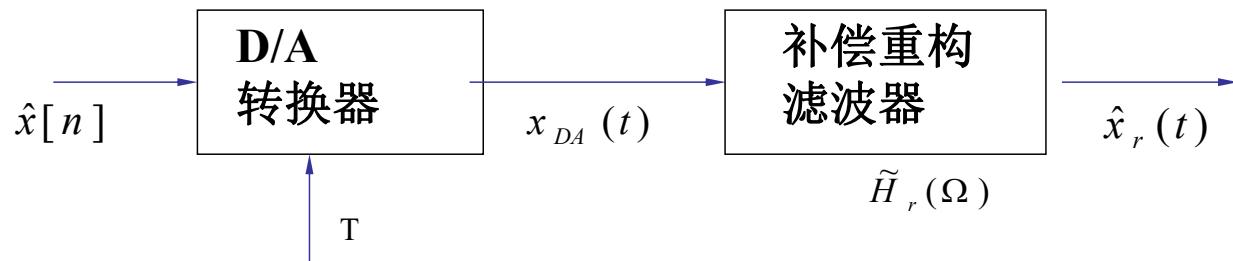
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T / 2}{\sin(\Omega T / 2)} e^{j\Omega T / 2}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

理想补偿重构滤波器，用于紧跟在一个零阶保持重构系统如D/A转换器之后。



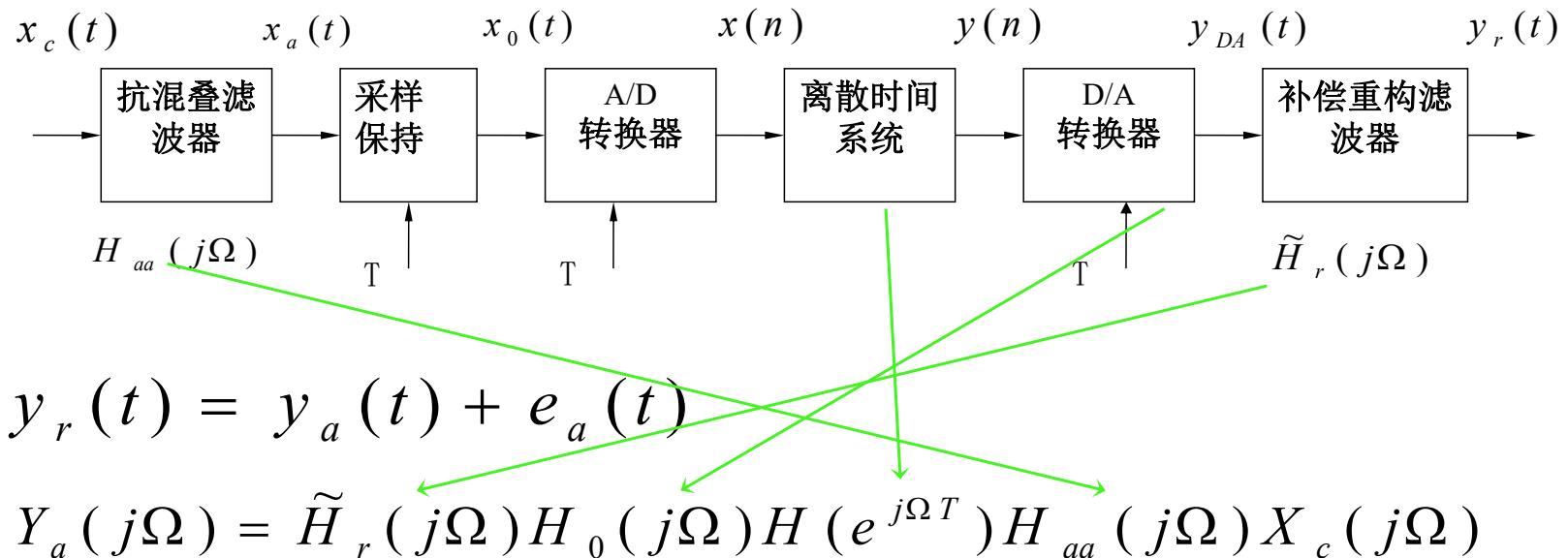
$$\begin{aligned}
 \hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \\
 \hat{x}_r(t) &= x_a(t) + e_a(t)
 \end{aligned}$$

式中 $e_a(t)$ 是一个带限白噪声信号。



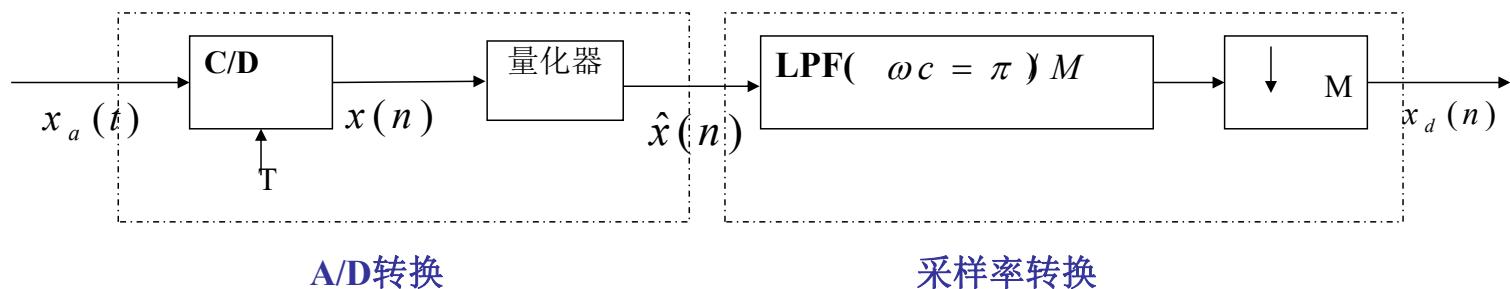
模拟信号数字处理系统的LTI特性

- 如果抗混叠滤波器的输出是带限，并且离散时间系统是**LTI**的，那么总系统就具有**LTI**特性



四、过采样A/D转换

- 为研究过采样和量化阶大小之间的关系，考察如下图所示的系统。

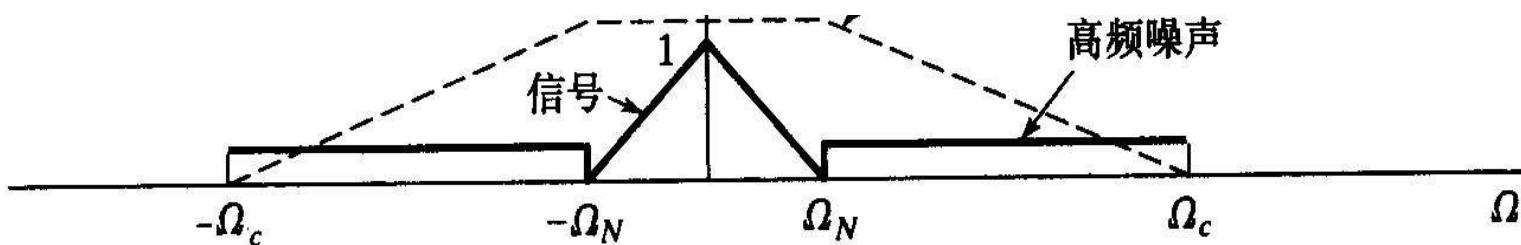


- 此种采样方式下的信噪比？

基本假设

- $x_a(t)$ 是零均值广义平稳的随机过程
- 功率谱密度记 $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$
- 自相关函数记为 $\phi_{x_a x_a}(\tau)$
- 假设 $x_a(t)$ 已经带限到 Ω_N ，即

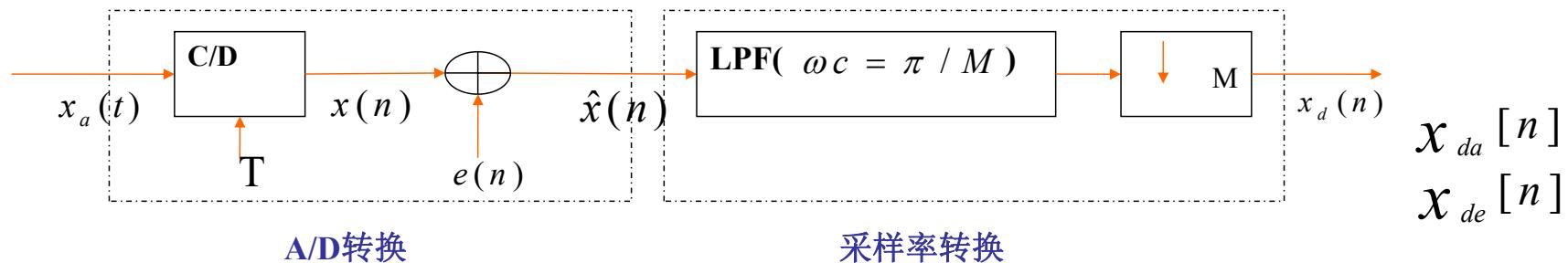
$$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_N$$



过采样+抽取 后信噪比有无改善?

- 假定量化为加性噪声模型, $2\pi / T = 2M\Omega_N$
 - 常数M称为过采样率
- 抽取滤波器增益为1的理想低通滤器
 - 截止频率为 $\omega_c = \pi / M$

系统等效为:



输出中的信号分量

- 令 $\phi_{xx}[m]$ 和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 分别记作 $x[n]$ 的自相关函数和功率谱密度，则有：

$$\phi_{xx}[m] = \varepsilon\{x[n+m]x[n]\} = \varepsilon\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\} = \phi_{x_ax_a}(mT)$$

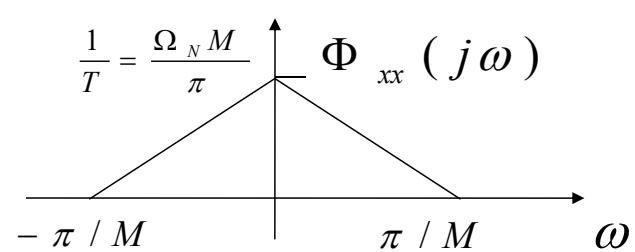
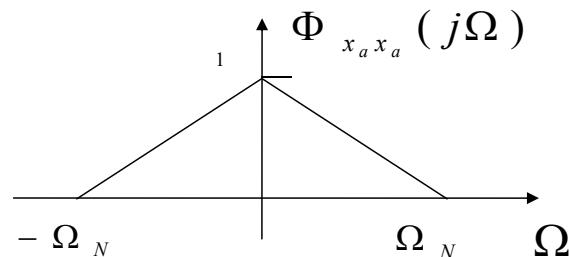
- 即样本序列的自相关函数就是对应的连续时间信号自相关函数的采样。

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_ax_a}\left(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T})\right)$$

采样信号功率等于模拟信号功率

- 输入带限，过采样M倍的信号功率谱为：

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T}) & |\omega| < \pi/M \\ 0 & \pi/M < |\omega| < \pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon\{x^2[n]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega = \varepsilon\{x_a^2(t)\} \end{aligned}$$

抽取对功率影响

- 注意到 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 是带限制 $|\omega| < \pi / M$

$$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx}(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}) = \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) \quad |\omega| < \pi$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \mathcal{E}\{x^2[n]\} \end{aligned}$$

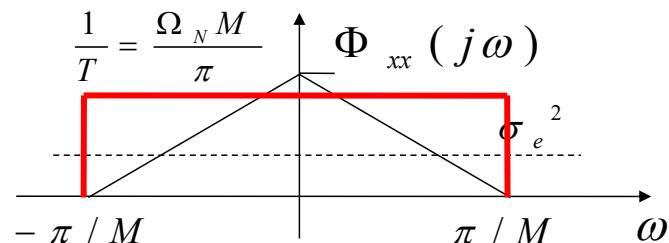
- 结论：输出中信号功率保持不变

输出中的量化噪声分量

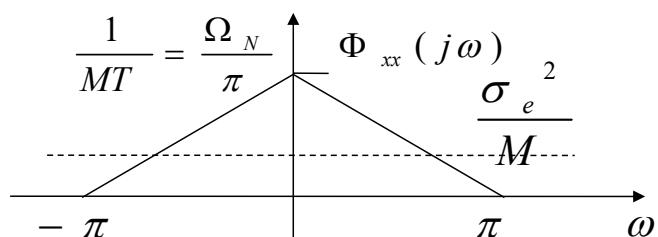
- 假设 $e[n]$ 是一个广义平稳的白噪声过程，其均值为零，方差为 $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ ，
- 则 $e[n]$ 的自相关函数和功率谱分别是：

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$$

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$$



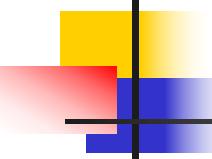
$$\begin{aligned} P_{de} &= \varepsilon \{ x_{de}^2[n] \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_e^2 / M d\omega \\ &= \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{1}{12M} \left(\frac{X_m}{2^B} \right)^2 \end{aligned}$$



M倍过采样+抽取之后的信噪比

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \lg\left(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}}\right) = 10 \lg\left(\frac{12 \cdot M \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) \\ &= 6.02 B + 10 \lg M + 10.8 - 20 \lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \end{aligned}$$

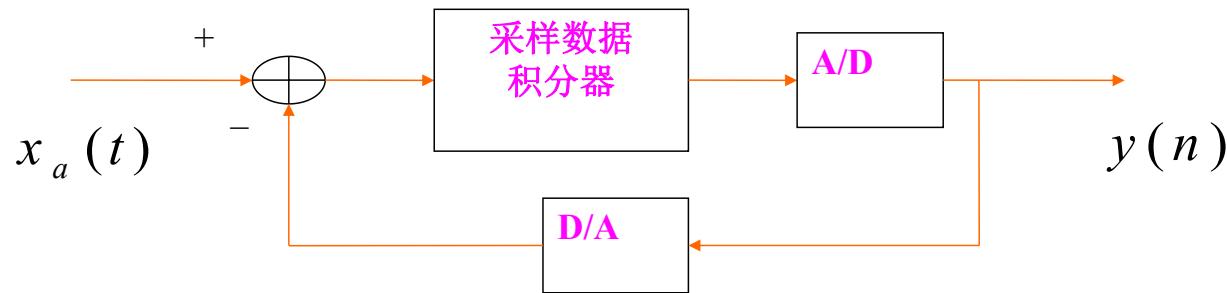
- 结论:
- 相同位数条件下，信噪比提升 $10\log M$ 分贝
- 在相同信噪比要求下，每将过采样M加倍，就可以减少**1/2**位量化位数。



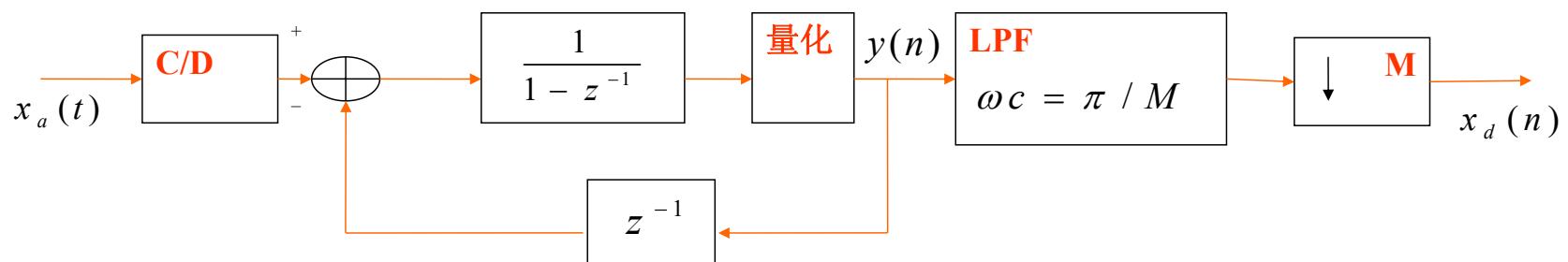
噪声成形的过采样A/D

- 过采样和抽取可以改善信噪比。但是为了实现所需要的量化位数上有明显的减少，就需要很大的过采样率。
 - 例如，为了从**16**位减少到**12**位就要求**M=256**！这似乎是一个相当高的代价。
- 然而，如果把过采样与用反馈噪声谱成形的技术结合起来，可以获得更好的性能。
 - 噪声成形中的基本思想是要改变**A/D**转换的过程，使得量化噪声的功率谱密度不再是均匀的，将其成形为大部分的噪声功率位于频带 $|\omega| < \pi/M$ 之外的形式。后续的滤波和减采样就将更多的量化噪声功率滤除。

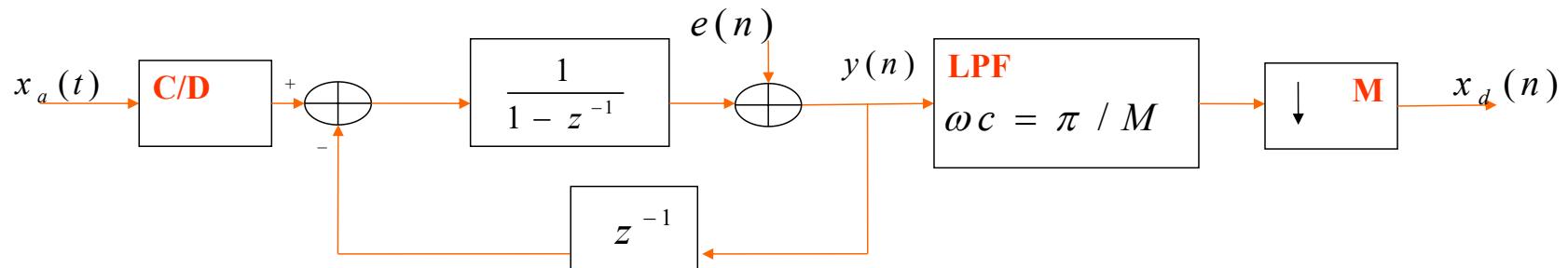
噪声成形量化器 (Delta-Sigma)



带量化成形的过采样离散等效结构

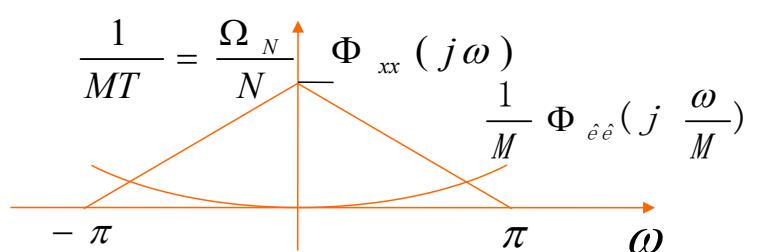
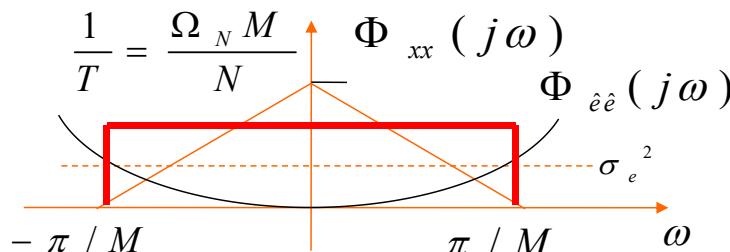
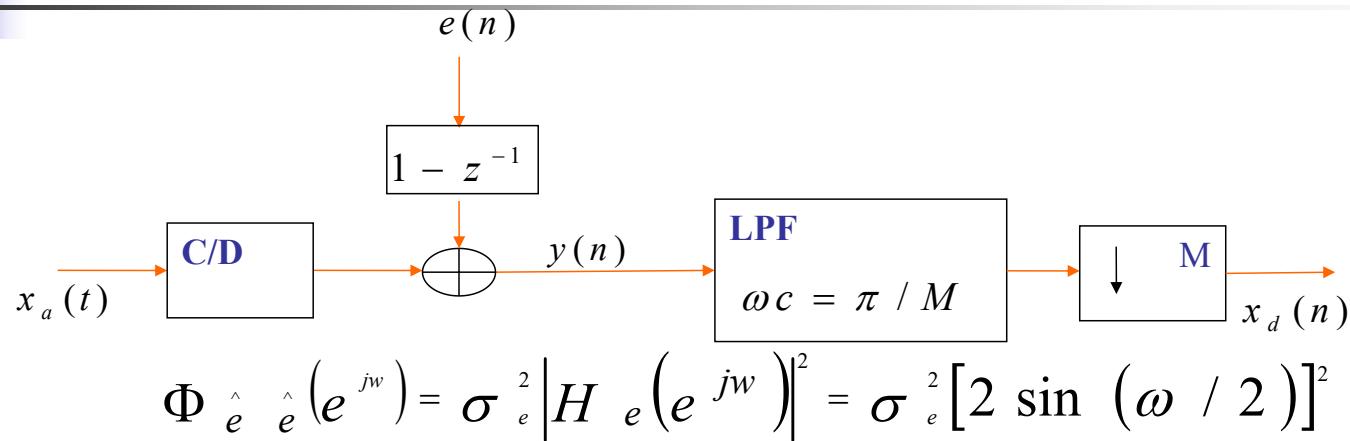


噪声成型后的信号与噪声



- **y[n]**是两个分量之和：
 - 单独由**x[n]**产生的**y_x(n)**
 - 单独由噪声**e[n]**产生的**ē[n]**。
- 传递函数分别为： $H_x(z) = 1$ $H_e(z) = (1 - z^{-1})$
- 从而有： $y_x[n] = x[n]$ $\hat{e}[n] = \hat{e}[n] - \hat{e}[n-1]$

抽取前、后信号和量化噪声的功率谱密度



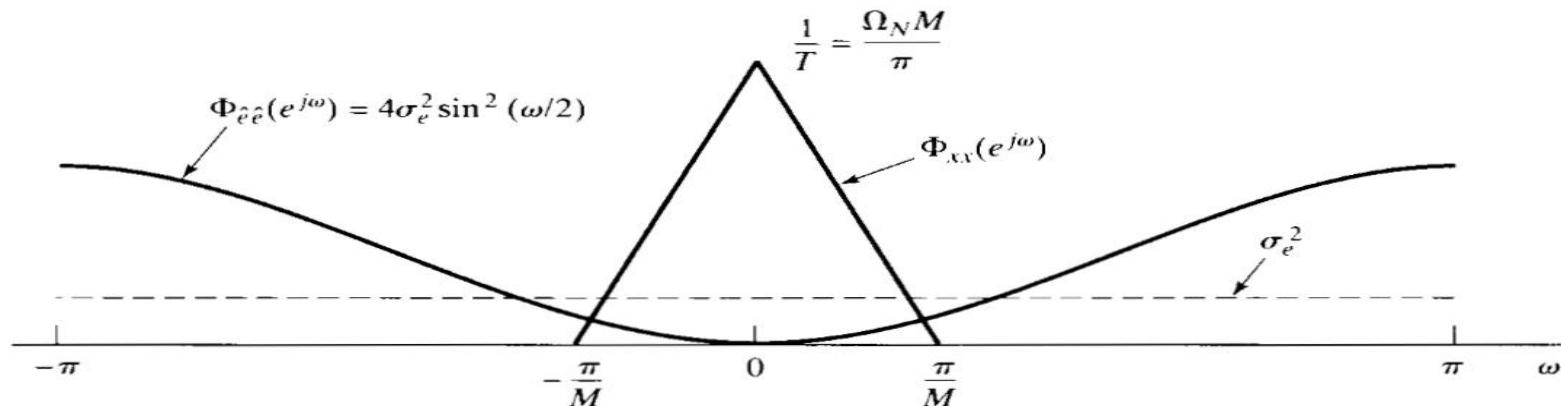


Figure 4.64 The power spectral density of the quantization noise and the signal.

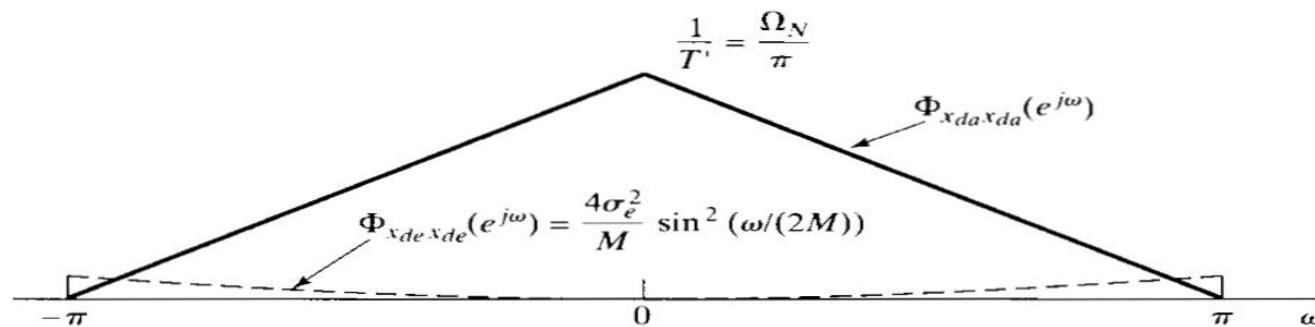


Figure 4.65 Power spectral density of the signal and quantization noise after downsampling.

抽取滤波后量化噪声的功率

- 噪声成型后总噪声功率增加： $\mathcal{E} \left\{ e^{\hat{n}^2[n]} \right\} = 2 \sigma_e^2$
 - 量化噪声成形使噪声功率比直接过采样情况有更多功率位于信号带宽 $|\omega| < \pi/M$ 以外，被后续的低通滤波器滤除。
- 输出中的量化噪声功率是：

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta^2}{12M} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \right)^2 d\omega$$

- 假设 M 足够大，以至满足： $\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}$
- 从而有： $P_{de} = \frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^2}{3M^3} = \frac{1}{36} \frac{\Delta^2 \pi^2}{M^3}$

输出的信噪比为：

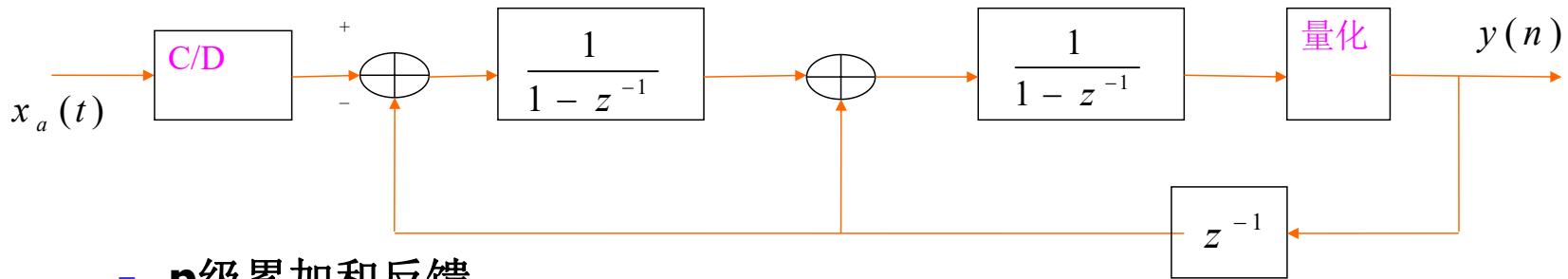
M	Direct quantization	Noise shaping
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}} \right) = 10 \lg \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2 \pi^2} \frac{3M^3}{\pi^2} \right) \\ &= 6.02B + (30 \lg M - 5.17) + 10 \cdot 8 - 20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) \end{aligned}$$

- 结论：
- 同样量化位数下信噪比提升**30lgM-5.17**
- 利用噪声成形后每加倍过采样率可节省**1.5**比特
 - 直接量化时，每加倍过采样率可以节省**1/2**比特量化

高阶噪声成形

Quantizer order p	Oversampling factor M				
	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5



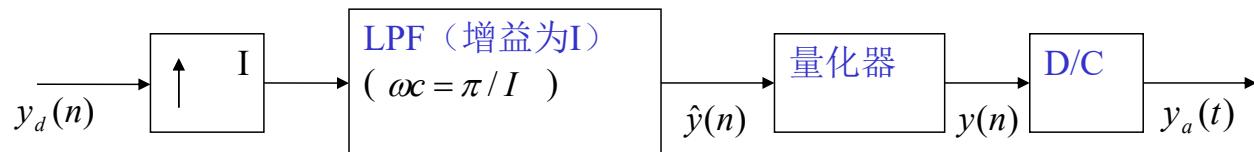
- **p**级累加和反馈

$$\Phi_{\hat{e} \hat{e}}(e^{jw}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^{2p}$$

- 当 $p=2$ 和 $M=64$ 时，精度上有 13 比特提高，也就是说 1 比特量化器在抽取器的输出端能够实现大约 14 比特的精度。
- 但大 p 值易产生不稳定和发生震荡的潜在威胁。

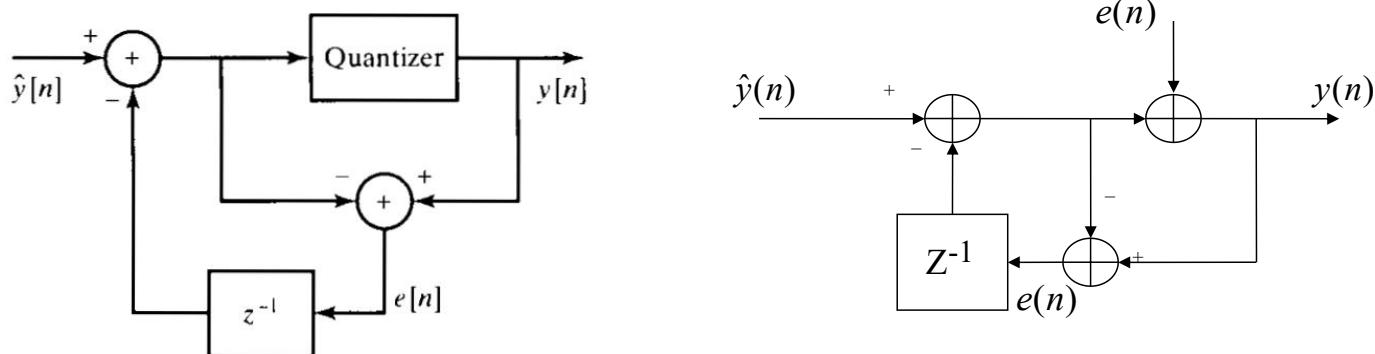
五、D/A中过采样和噪声成形

- 为了简化模拟抗混叠滤波和提高精度，信号最初被过采样，但是最后输出 $x_d(n)$ 还是在奈奎斯特采样率下的数据。
- 对于离散时间信号处理来说，总是非常希望最小的采样率，因此以相反的过程来应用同一原理从而改善D/A转换是可能的。如图所示：



一阶噪声成形量化器

- 要被转换为连续时间信号的序列 $y_d[n]$ 首先被增采样得到 $\hat{y}[n]$ ，送到**D/A**转换器之前再重新量化。



- 如果可以确保量化噪声不占据信号频带的话，那么就能用一个很少位数的简单**D/A**转换器，这样噪声就能用廉价的模拟滤波滤除。

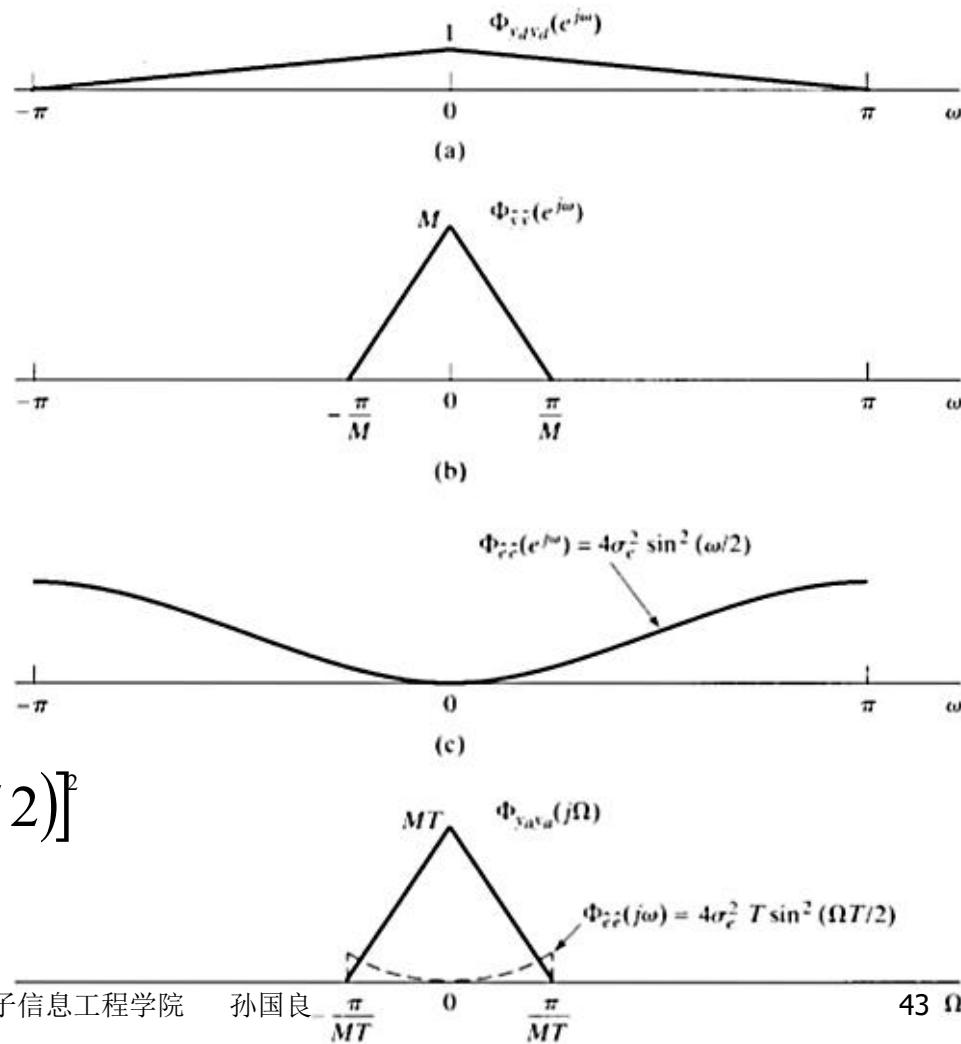
噪声成形量化器

- 从 $\hat{y}[n]$ 到 $y[n]$ 的传递函数是 **1**。
- 从 $e[n]$ 到 $y[n]$ 的传递函数是：

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}$$

- 噪声成形系统输出端量化噪声分量 $\hat{e}[n]$ 功率谱密度**

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^2 = \frac{\Delta^2}{12} * [2 \sin(\omega/2)]^2$$



作业

- 4.6
- 4.7
- 4.24
- 4.25
- 4.34
- 4.43
- 4.49



D/A失真分析

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

- 用加性噪声模型来表示量化效应:

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

- 简化讨论, 定义:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t)$$

$$X_s(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j2\pi k/T)$$

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn} \right) H_0(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega) \end{aligned}$$

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum X_a(j\Omega + j2\pi k/T) \right] H_0(j\Omega)$$



谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 5

5.1 DFS



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

DFT快速算法



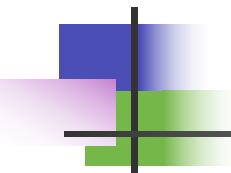
五

DFT的工程应用

离散傅立叶变换(DFT)

- 工程实践中，离散时间傅里叶变换(DTFT) 适用性不强：
 - 信号时域很宽但数字设备只能处理有限长数据
 - 信号的频谱在数字设备上的表示也只能是离散
 - 数字处理必须采取以下三项措施：
 - (1)时域采样（时域离散化）
 - (2)时域截断---> **有限长时域序列**
 - (3)频率离散---> **有限长频域序列**
- 傅立叶变换需要反映**有限长度时域序列与频域抽样**之间的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad X(k) = \sum_0^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}$$



主要内容

- **4.1 离散傅立叶级数(DFS)**
 - 傅立叶变换四大形式
 - **DFS**变换对
- **4.2 频域采样与重构**
- **4.3 离散傅立叶变换(DFT)**
 - **DFT**定义
 - **DFT性质定理**
- **4.4 DFT的快速算法**
 - 戈泽尔算法
 - **FFT**算法
 - **Chirp Z**变换
- **4.5 DFT的工程应用**
 - **LTI**的**DFT**实现
 - 信号的**DFT**分析

离散傅里叶级数

频域采样与重构

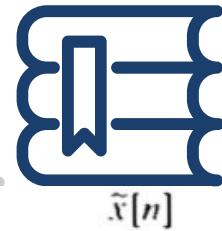
离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用

北京航空航天大学

离散傅里叶级数



- CTFT CTFS DTFT → DFS
- 离散傅里叶级数是傅里叶变换的第四类
- 意义：
 - 1、周期序列等效于有限长序列
 - 2、引出频域抽样定理
 - 3、引出离散傅里叶变换

4.1 离散傅立叶级数(DFS)

■ 4.1.1 傅立叶变换的表现形式

■ 傅里叶变换

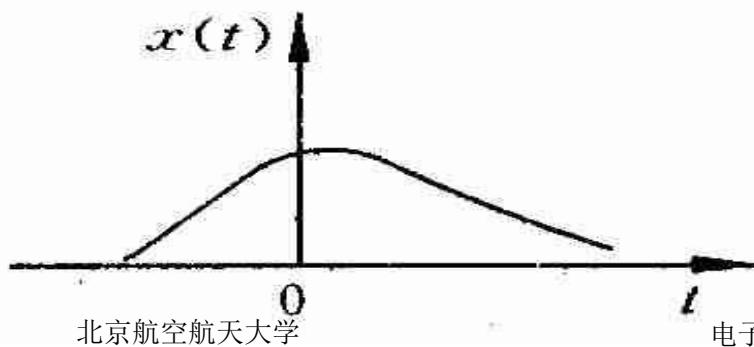
- 建立信号时域表达与其频域表达之间的变换关系。
- 当自变量“时间”或“频率”分别为连续或离散时，就形成了各种不同表象形式的傅里叶变换对。

一、连续时间、连续频率—傅里叶变换(CTFT)

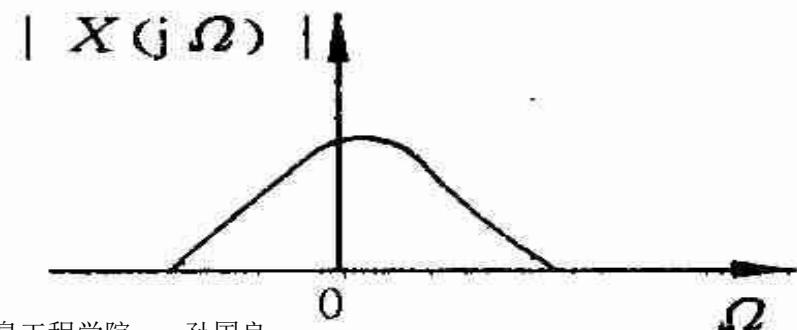
- 若信号为连续时间的非周期信号，其傅里叶变换是频域连续的非周期函数。

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$



北京航空航天大学



电子信息工程学院 孙国良

二、连续时间、离散频率——傅里叶级数(CTFS)

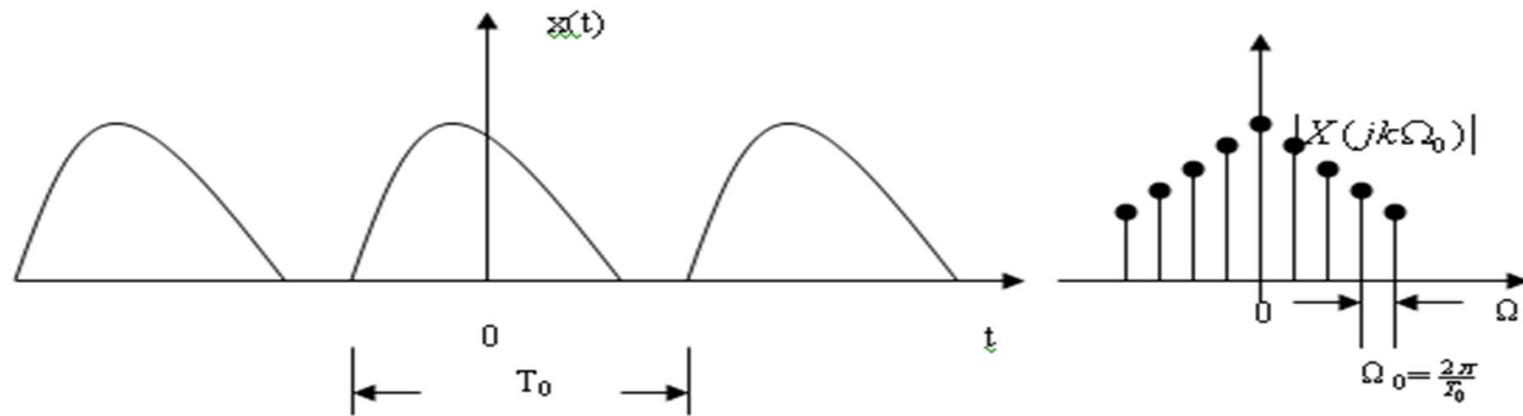
- 按照狄义赫利条件，周期性信号为功率信号，能量无限，不满足变换的充分条件
 - 因此其傅立叶变换必有特殊的表现形式。
- 我们仍旧按照傅立叶变换式来进行考察：

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt & x(t) &= x(t + T_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - T_0) e^{-j\Omega t} dt && \xrightarrow{\quad} X(j\Omega)(1 - e^{j\Omega T_0}) = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega(t - T_0)} dt = X(j\Omega) e^{j\Omega T_0} \end{aligned}$$

频谱离散

$$X(j\Omega)(1 - e^{j\Omega T_0}) = 0$$

- $1 - e^{j\Omega T_0}$ 仅在有限可数个频点 $\Omega_k = \frac{2k\pi}{T_0}$ 处为零，就要求在其他频段 $X(j\Omega)$ 皆为零，为离散频率函数。
- 时域上的周期性造成了频域上的离散。
- 周期信号能量无限，离散频点处的能量为冲激函数。



连续傅里叶级数

- 实际上, $x(t)$ 可展成傅立叶级数,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

- 引入广义函数的条件下有:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\Omega - \Omega_0)t} dt = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

CTFS是主值
区间信号
CTFT的频域
采样

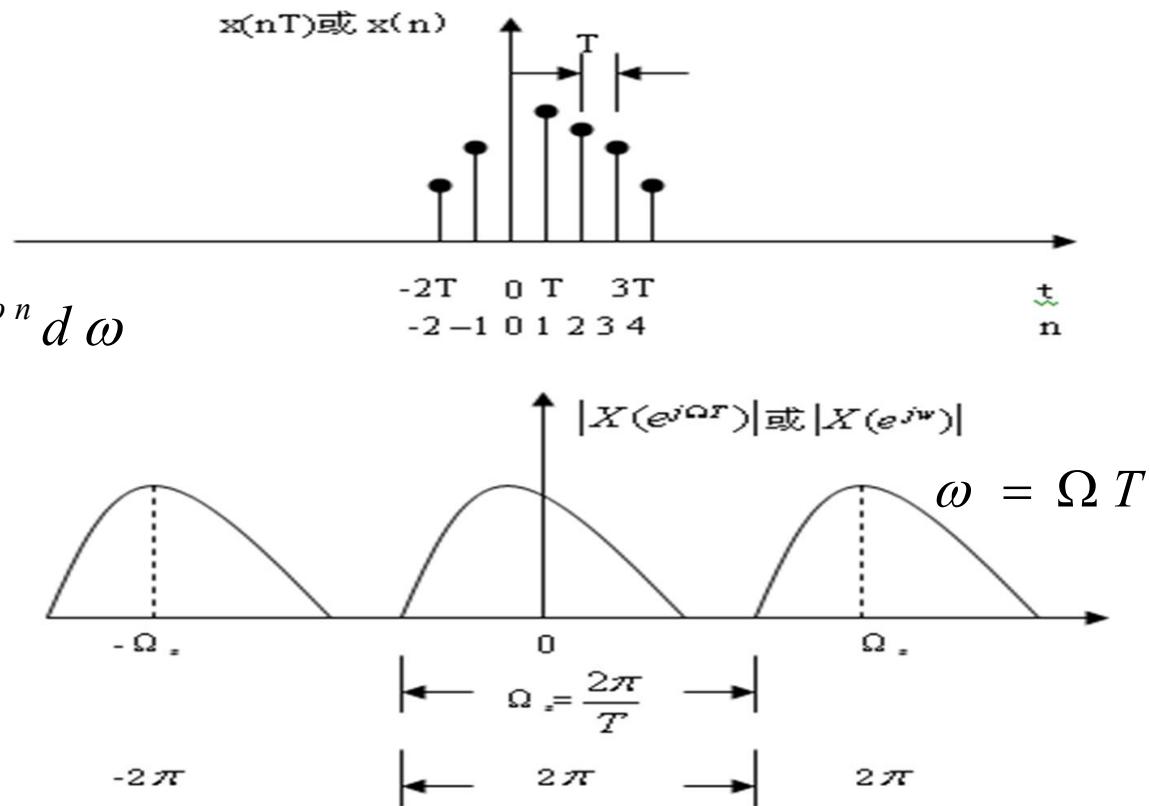
三、离散时间、连续频率—序列傅里叶变换(DTFT)

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

时域离散导致
频域周期化

北京航空航天大学



四、离散时间、离散频率—离散傅立叶级数(DFS)

- 设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的一个周期序列,

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

- 周期序列不是绝对可和的, 所以不适合 DTFT 表示

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n + N) e^{-j\omega n} & \omega_k = k \frac{2\pi}{N} \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n') e^{-j\omega(n'-N)} = e^{j\omega N} X(e^{j\omega}) & X(e^{j\omega})(1 - e^{j\omega N}) = 0 \end{aligned}$$

离散谱

周期序列也可以用傅里叶级数表示，只是...

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\Omega_0 t} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad T_0 = NT$$

$$x(nT) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\Omega_0 nT} = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk \frac{2\pi}{NT} nT} = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- 周期为**N**的复指数序列基频序列为： $e_1(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$
- 其**k**次谐波序列为：

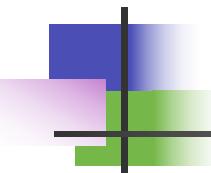
$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \quad e_{k+rN}(n) = e_k(n)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

连续周期信号与离散周期序列的复指数

	基频序列	周期	基频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	T_0	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 连续傅立叶级数有无穷多个谐波成分
- 离散傅里叶级的谐波只有N个是独立



DFS变换对的导出

- 假设信号可展成如下的离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- 其中**N**为常数，选取它是为了表达式成立的需要
- $\tilde{X}(k)$ 是待求的**k**次谐波系数。

系数的求取

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} (k-r)n} \\&= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (k-r)n} \right] \\&\xrightarrow{\tilde{X}(r)} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} rn} &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} rN}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases}\end{aligned}$$

序列的傅立叶级数(DFS)

- 通常对变换因子采用以下符号:

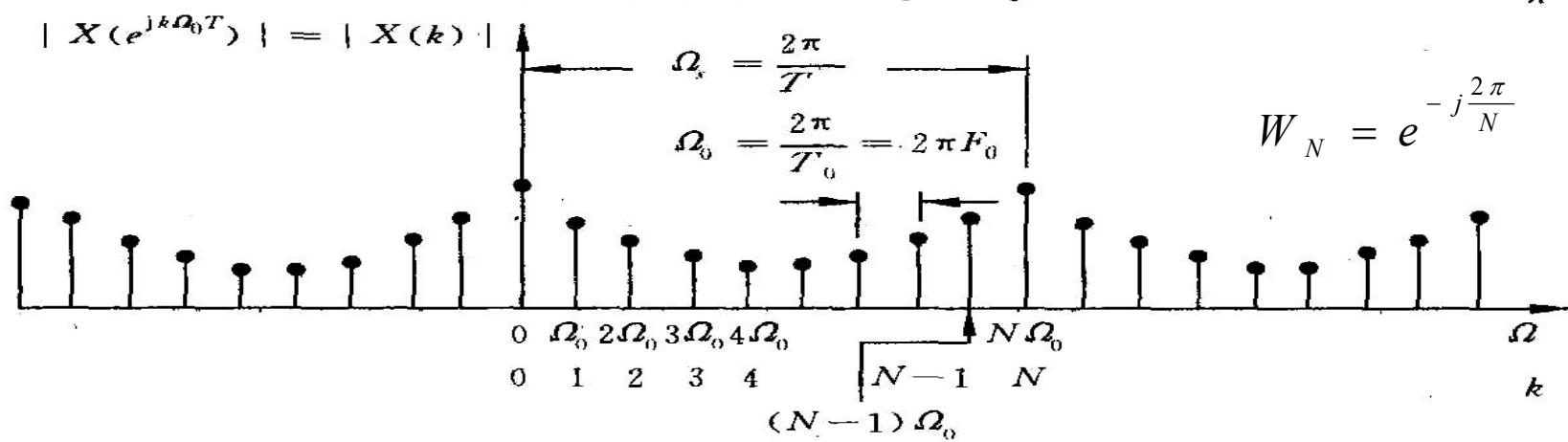
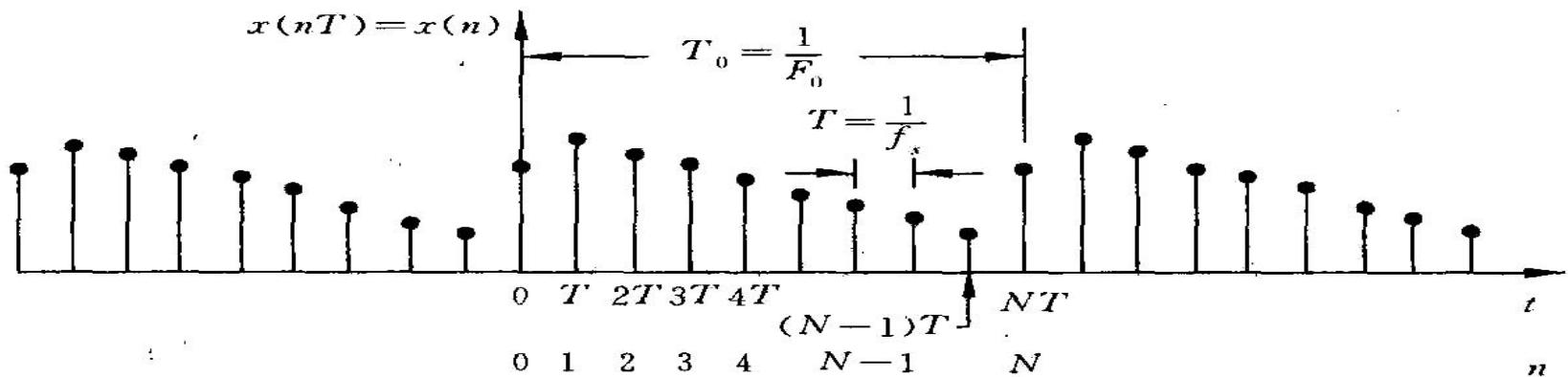
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- 则**DFS**变换对为:

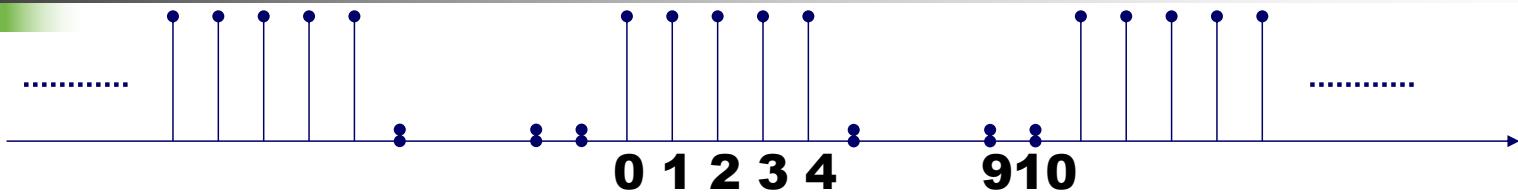
- 正变换 $\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{-nk}$
- 反变换

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk}$$

DFS频谱的含义

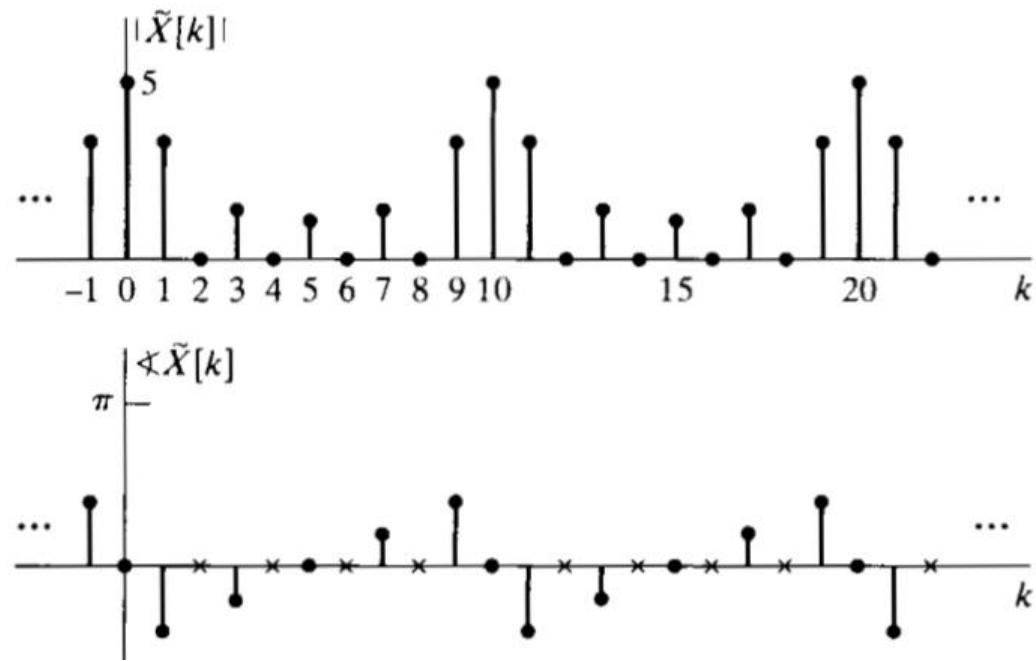


周期矩形脉冲串的DFS

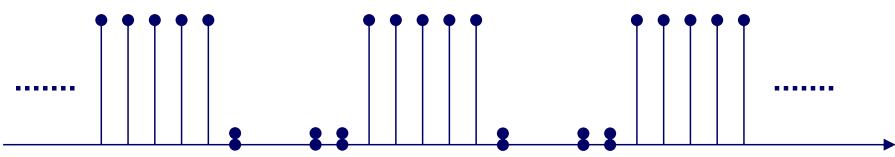


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn}$$

$$= e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k / 2)}{\sin(\pi k / 10)}$$

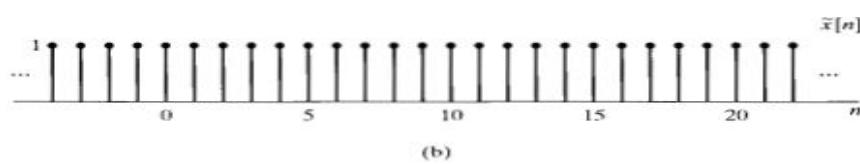


DFS与主值区间的DTFT关系

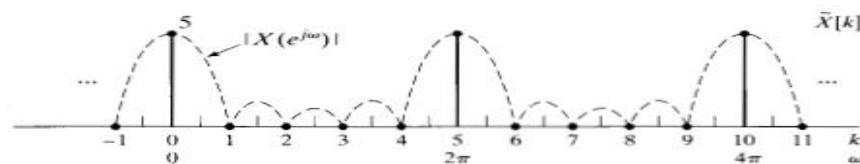


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad \omega > \omega_c = k * \frac{2\pi}{N}$$



(b)



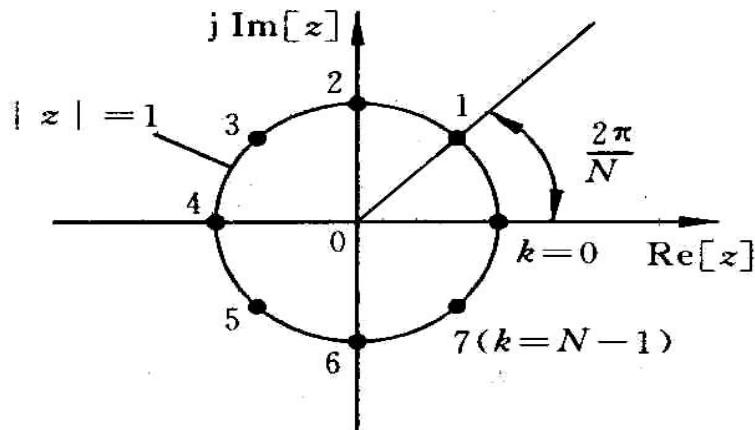
特例

DFS可以看成是周期序列主值区间的 Z变换(或DTFT)在单位圆上等间隔抽样

■ 设 $x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$, 则Z变换为:

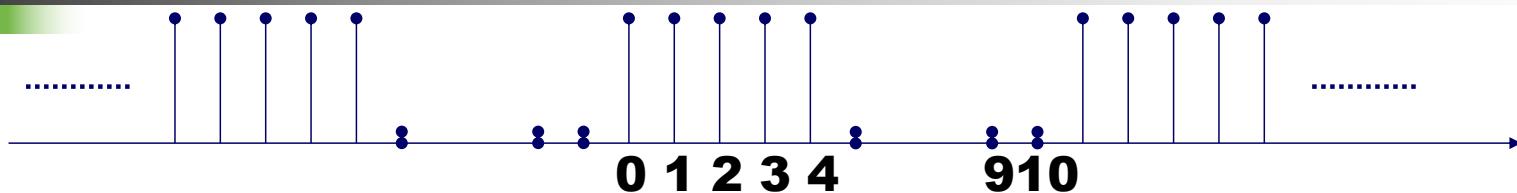
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k} = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

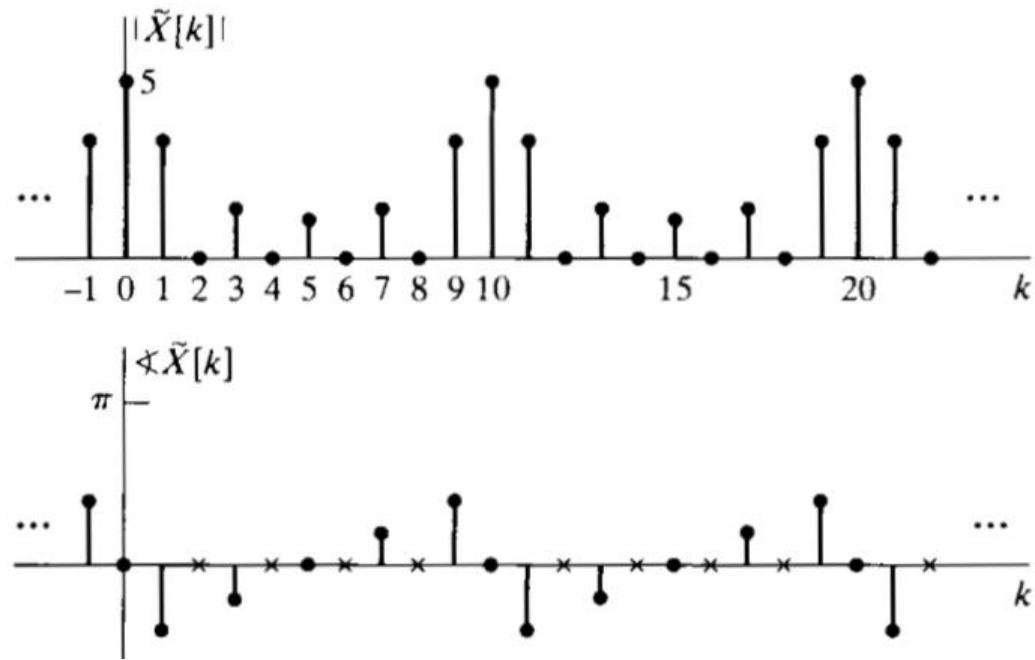


$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

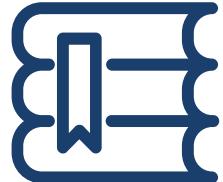
例题：



- 若上述10周期矩形脉冲的DFS如图所示
- 1) 若信号脉宽不变, 周期变为8, 请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出?
- 2) 若信号脉宽不变, 周期变为8, 请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出?



频 域 采 样 定 理



- 在采样定理的限制条件下，信号时域采样可以恢复原始信号。
- 信号的Z域的单位圆上的变换(DTFT)也可以恢复信号。
- 是否也可以利用单位圆抽样恢复原始信号呢？在单位圆上抽样将导致信号在时间域上发生怎样的变化？

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}k}} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

4.2 频域抽样及重构

$$\tilde{x}(n)$$

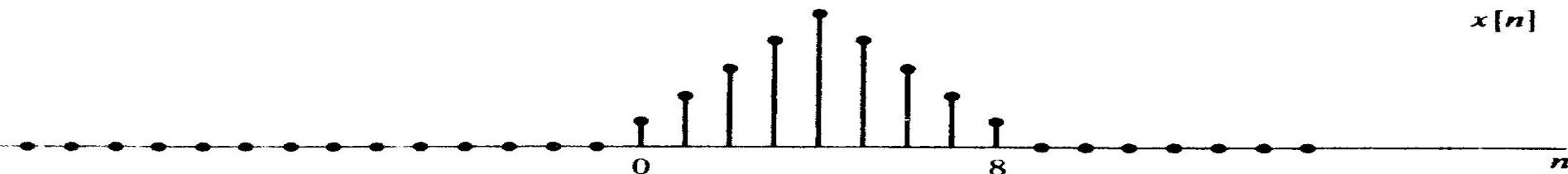
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m-n)} \right)$$

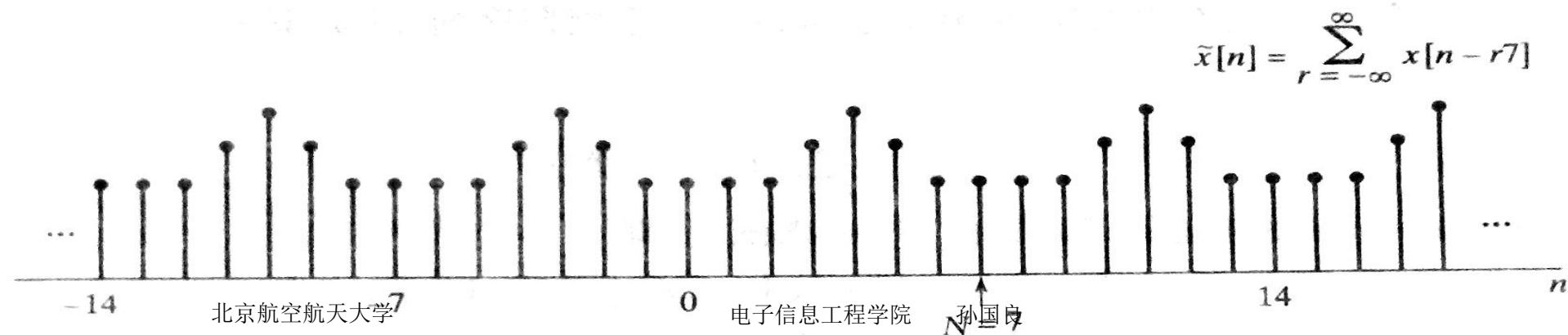
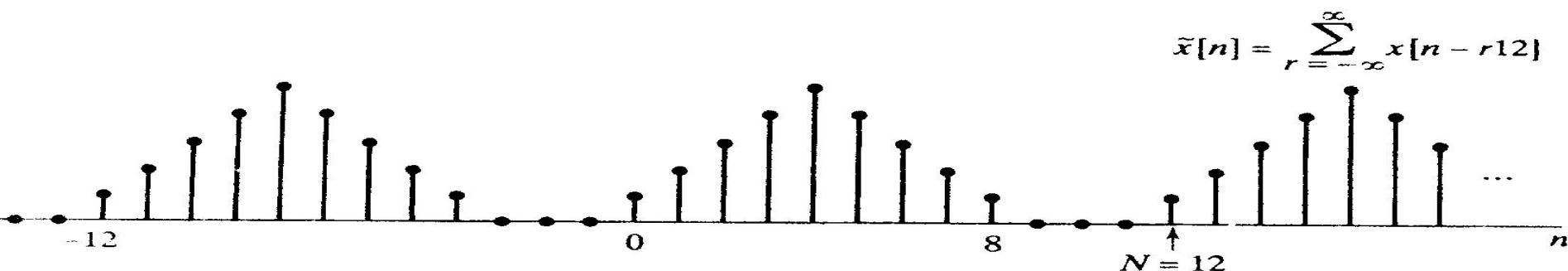
- 对于任意信号，直接对其频谱单位圆抽样值求**IDFS变换**得到的序列

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(m - n - rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$



(a)



频域采样定理

- 单位圆上**N**点的**频率抽样**变换得到的是原序列在**时轴**上以抽样点数为**周期的延拓** $\tilde{x}(n)$ 。
- 为此：
 - 如原序列**不是有限长**，则时域延拓必然造成**混叠**；
 - 若原序列是一个**有限长且长度小于采样点数N**的序列，则可以通过**乘以窗函数**得到原始序列，即：

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right) R_N(n)$$

频域重构

- 若频域抽样可以无失真恢复原序列，
- 则可以完整表达 $X(z)$ 及 $X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\ X(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \\ X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

内插函数

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- 分子有N个零点，内插函数的极点与第k个零点相抵消，仅在该点处值不为零，在其他抽样点处皆为零。

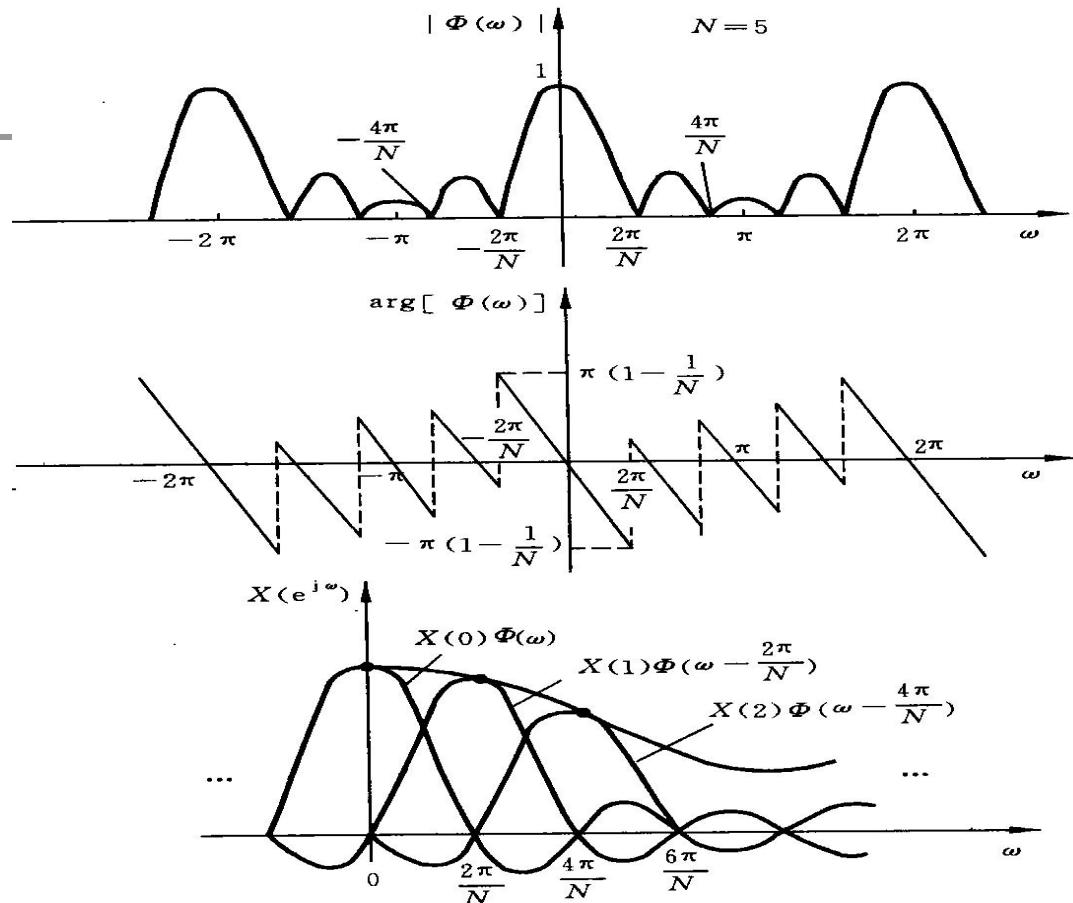
$$z_r = e^{j\frac{2\pi}{N}r} \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned}\Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - k\frac{2\pi}{N})}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} - k\frac{\pi}{N})} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega - \frac{k\pi}{N})} = \Phi(\omega - k\frac{2\pi}{N})\end{aligned}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega)}$$

频域重构



FIR滤波器频率内插结构

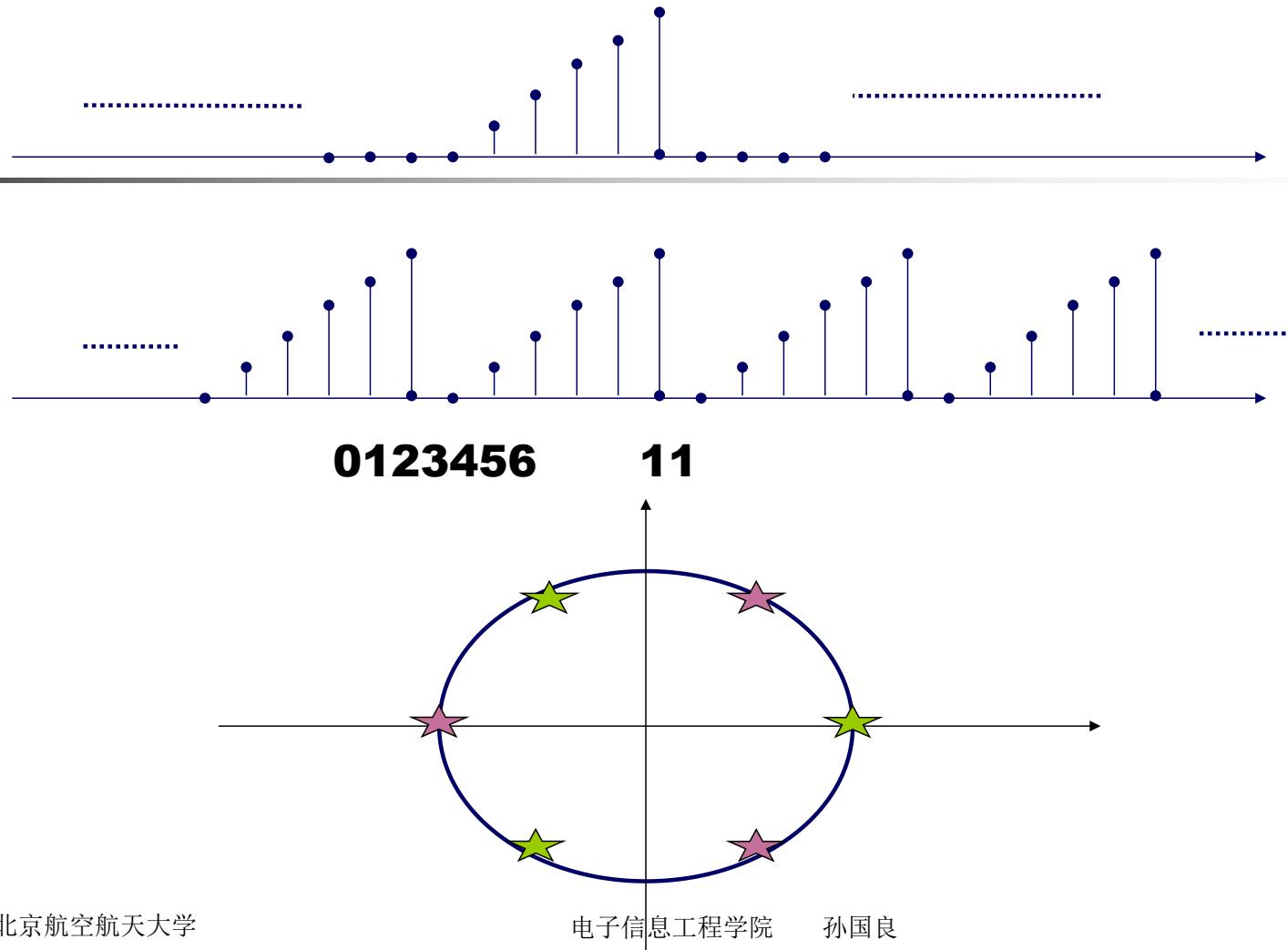
$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= \frac{1 - e^{-jwN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{-j(w - \frac{2\pi k}{N})}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{wN}{2}}}{e^{-j(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N})}} \bullet \frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2} - k\pi\right) e^{j\pi k}}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi k}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2} - k\pi\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{(N-1)\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{(w - \frac{2\pi}{N}k)N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w - \frac{2\pi}{N}k}{2}\right)} e^{-j(w - \frac{2\pi}{N}k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \end{aligned}$$

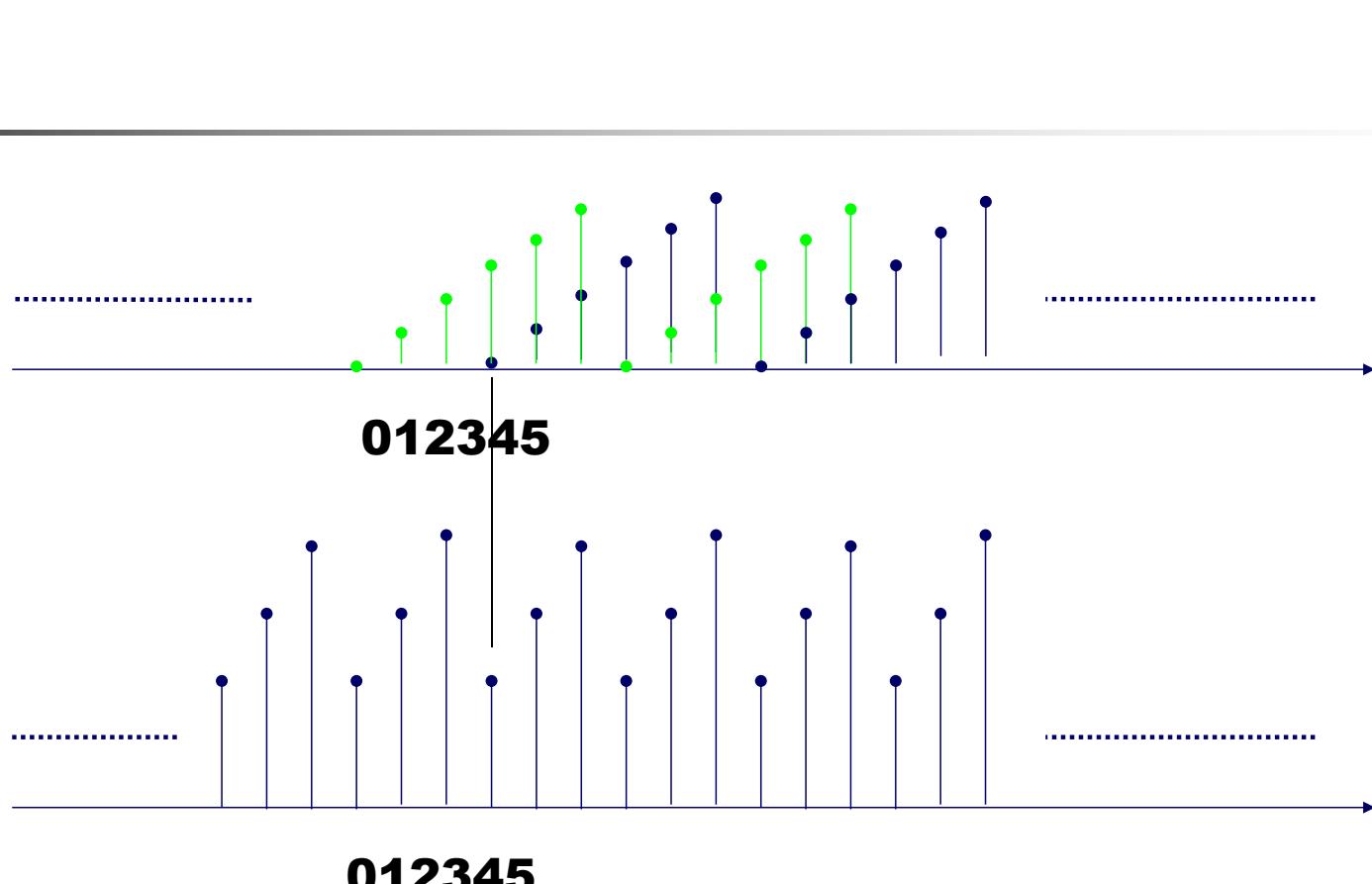
例题：

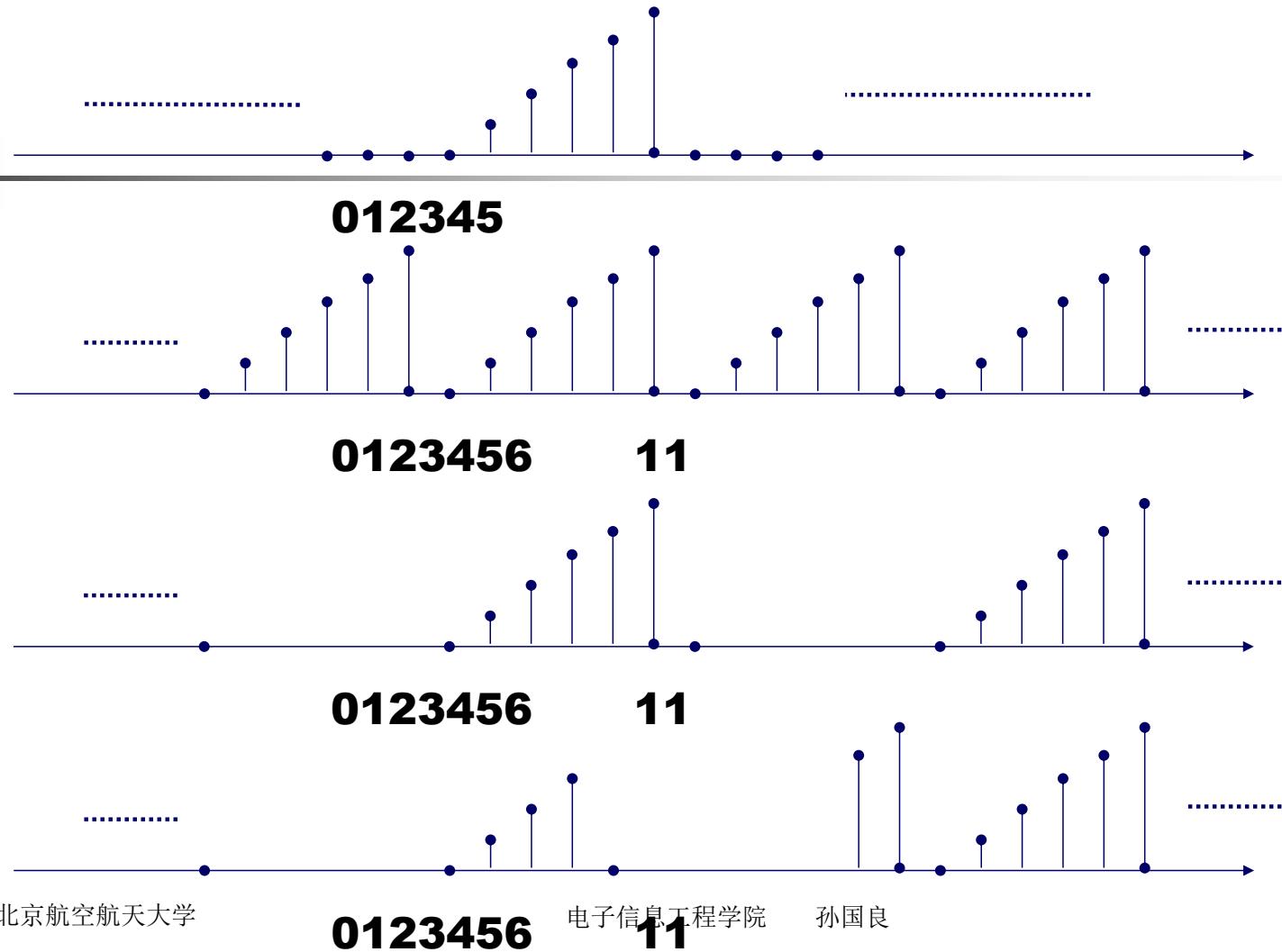
- 已知6点周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 的DFS为 $\tilde{X}_1(k)$;

$$\tilde{x}_1(n) = n \% 6$$

- 若假设一个周期为3的序列 $\tilde{x}_2(n)$ 的DFS $[\tilde{X}_2(k)]$ 与上述6点周期序列之间存在如下关系：
 - $\tilde{x}_2(\tilde{k})=\tilde{x}_1(2k)$,请确定3点周期序列
- 若未知序列为12点， $\tilde{X}_2(2k)=\tilde{X}_1(k)$,则能否唯一确定序列？请给出两种序列满足上述要求







作业

- 8.1
- 8.2
- 8.6
- 8.30





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

5.2 DFS



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

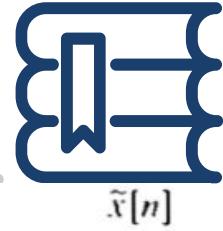
DFT快速算法



五

DFT的工程应用

离散傅里叶变换



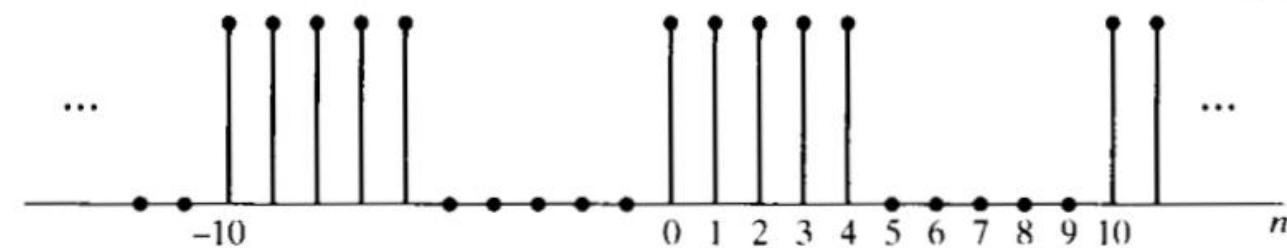
离散傅里叶级数

频域采样与重构

离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用



- DFS是主值区间序列(N点)的DTFT的频域N点采样
- 引申:
- 1、DFS适合N点DTFT频谱的计算机运算和表示
- 2、频域采样定理说明DFS可以无失真恢复出N点序列
- 结论: DFT借用DFS顺理成章! ! !

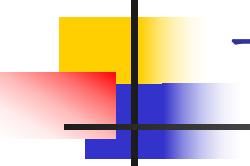
4.3 离散傅立叶变换(DFT)

■ 有限长序列的傅里叶变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega}$$

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) R_N(n)$$



一、离散傅里叶变换 (DFT)

$$X(k) = \text{DFT} [x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT} [X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

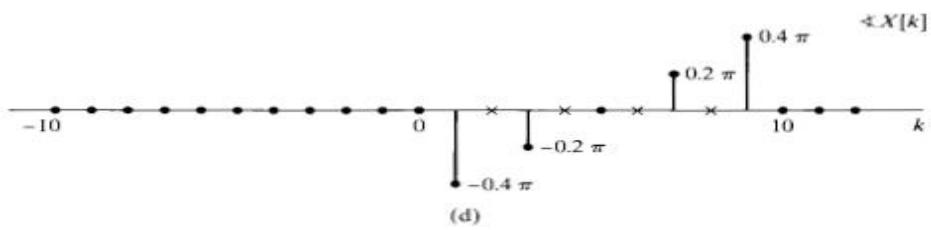
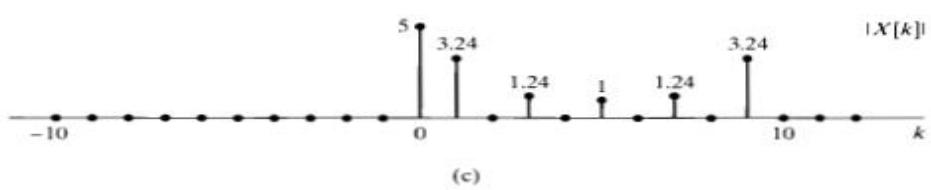
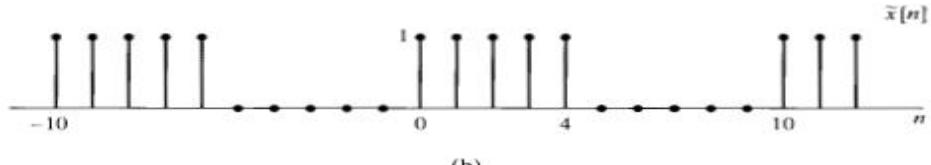
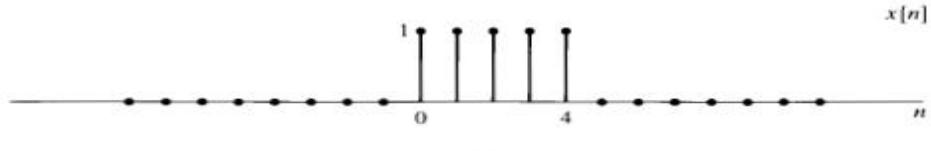
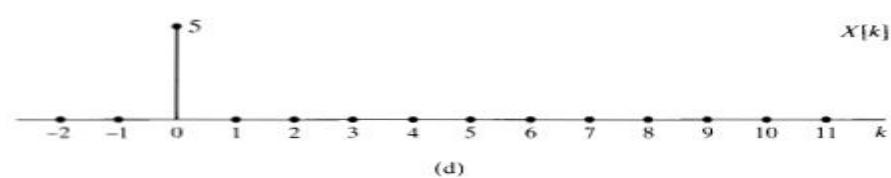
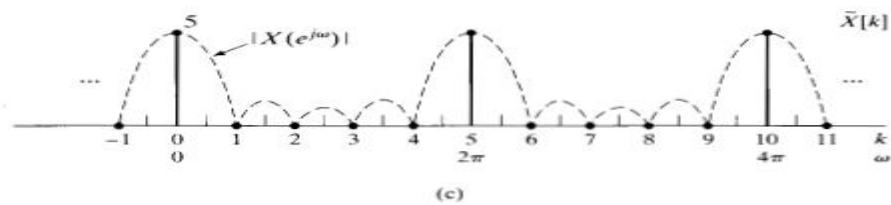
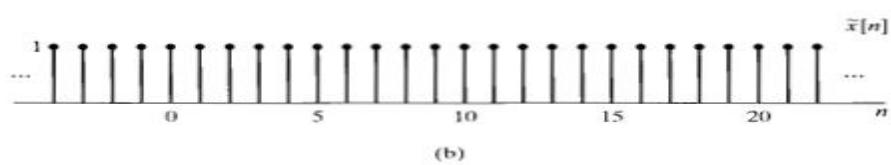
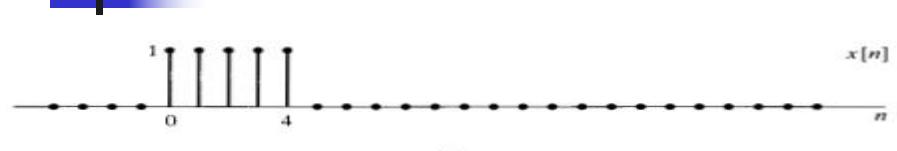
$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

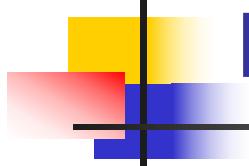
$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N$$

1、DFT隐含有周期性

2、有限长序列DFT是其本身的DTFT(等长)频域采样

例题：矩形窗的DFT (与点数有关)





DFT对偶性（一）

- IDFT可以用DFT来实现和计算

$$DFT : X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right)$$

$$\begin{aligned} IDFT : x(n) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right) \\ &= \frac{1}{N} \overline{\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right)} \end{aligned}$$

$$IDFT [X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT [X^*(k)]}$$

DFT的对偶性 (二)

DFT [X(n)]

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') W_N^{nn'} \right) W_N^{nk} \right] R_N(k)$$

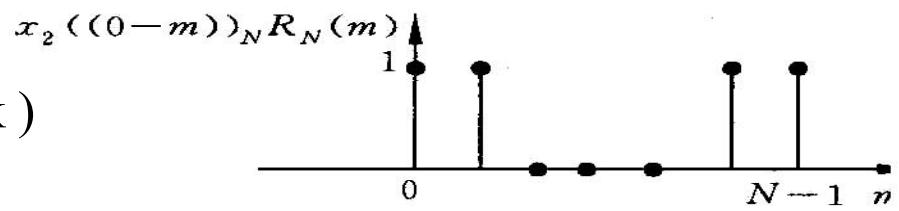
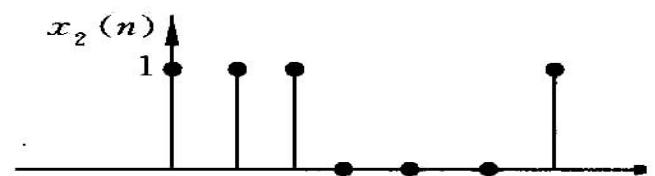
$$= \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(n'+k)} \right) \right] R_N(k)$$

$$= \left\{ \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \times [N \delta(n' + k)] \right\} R_N(k)$$

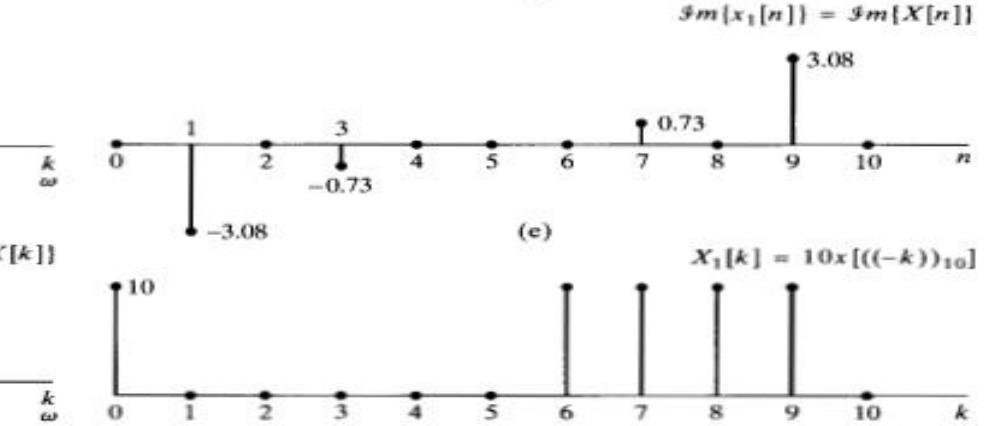
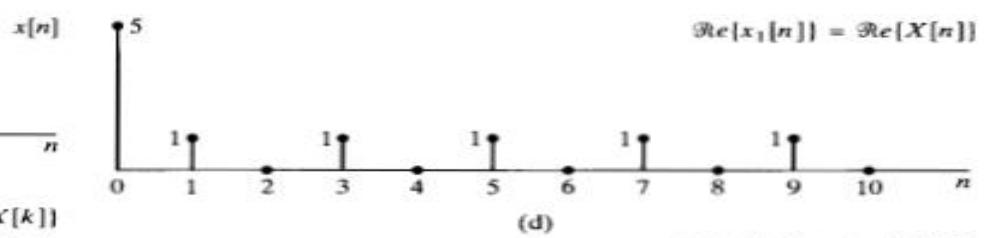
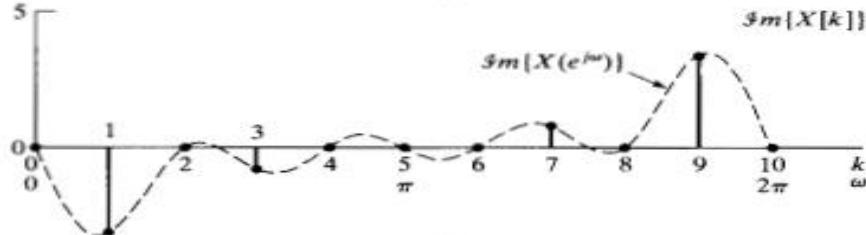
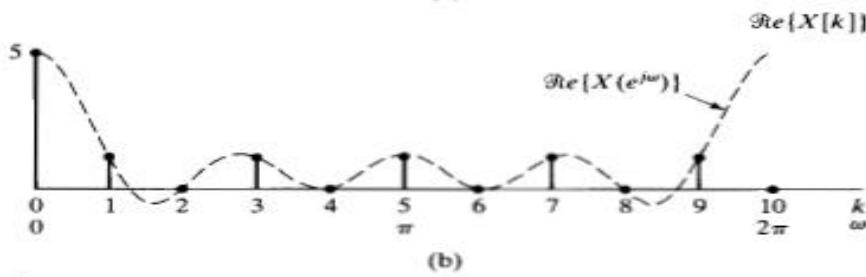
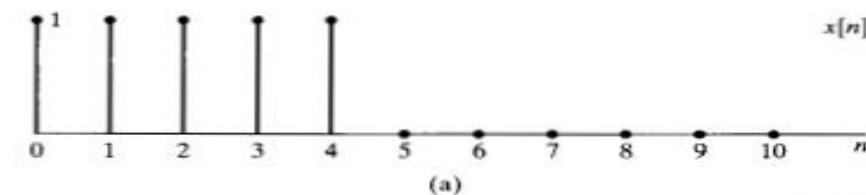
$$= N \tilde{x}((-k)) R_N(k)$$

圆周翻褶

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(N - n) \sup_{n \in \mathbb{Z}} x(N) = x(0) \\ x'(-n) &= x((-n)) R_N(n) \end{aligned}$$



DFT对偶性的验证及圆周翻褶



二、DFT性质

- 讨论都假设**N点**有限长序列的**N点DFT**

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

- **1、线性**

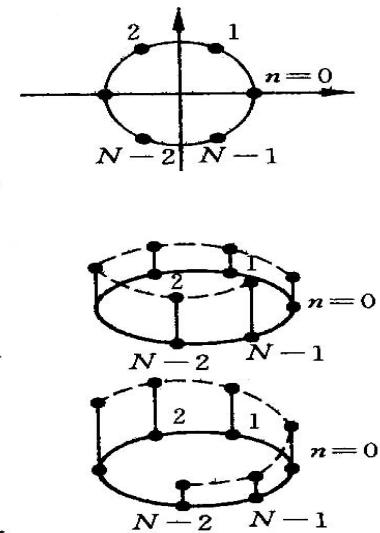
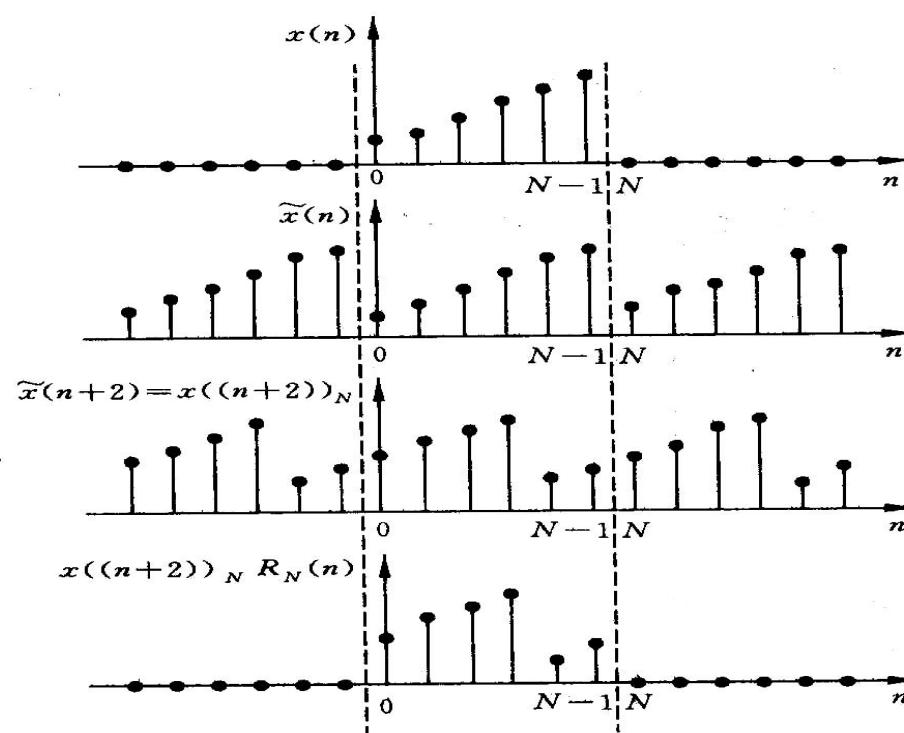
$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

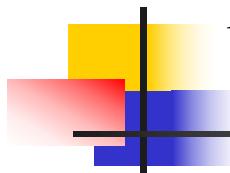
- 若两个有限长序列的**点数不等**, 则需要将**短序列补零**后作**N点DFT**再进行相加, 其中:
 - **N=max(N1,N2)**

2、圆周（循环）移位

- 序列以N为周期
延拓成周期序列
- 将周期序列加以
移位
- 取主值区间[0,
 $N-1$]上的序列值

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$





$$X_m(k) = DFT[x_m(n)] = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

$$DFT[x_m(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] = DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} \right] R_N(k) = \left[\sum_{i=m}^{N+m-1} \tilde{x}(i) W_N^{(i-m)k} \right] R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i-N) W_N^{(i-N)k} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right) R_N(k) = \left(W_N^{-mk} DFS[\tilde{x}(n)] \right) R_N(k) = W_N^{-mk} (DFS[\tilde{x}(n)] R_N(k))$$

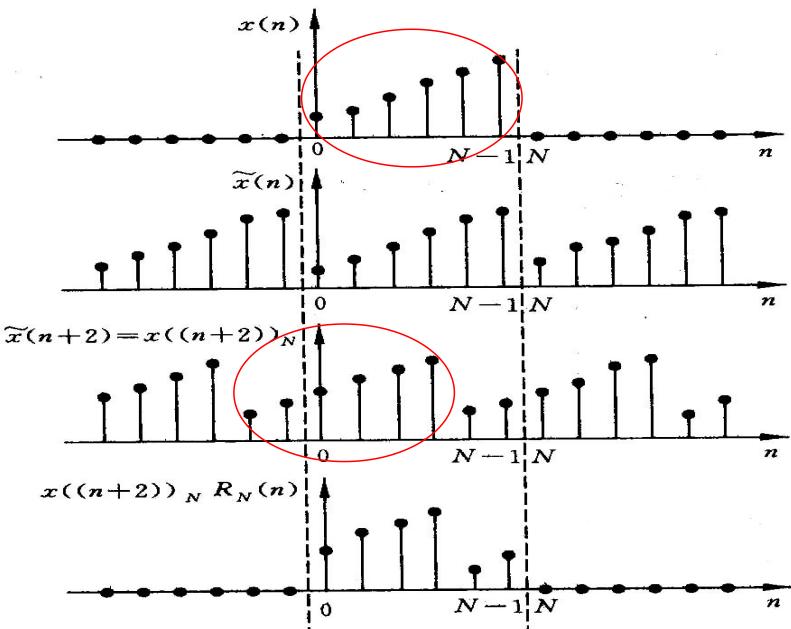
$$= W_N^{-mk} DFT[x(n)]$$

有限长序列的圆周移位仅在离散频域中引入一个和频率成正比的线性相位，不影响频谱幅度特性。

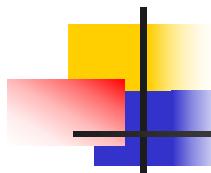
圆周移位特性利用频域抽样定理的再解释

$$W_N^{-km} = e^{(j\frac{2\pi}{N}k)m} = e^{j\omega m} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

- 信号线性平移后信号的**DTFT**频谱的采样
- 频谱采样所重构的信号是原信号的周期延拓
- 证明过程也看到了离散傅立叶级数(**DFS**)的移位性质：



$$D F S [x ((n + m))_N] = D F S [\tilde{x} (n + m)] = W_N^{-m k} \tilde{X} (k)$$



频域圆周移位

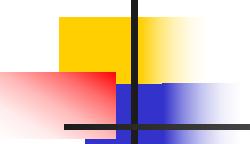
- 同样，利用频域与时域的对偶关系，可以证明：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j \frac{2\pi}{N} nl} x(n)$$

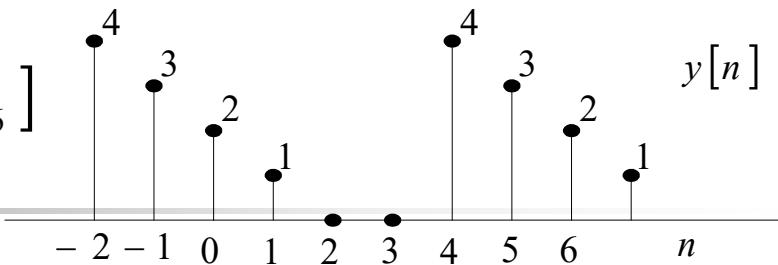
- 频域圆周移位导致时间序列的**调制特性**，也就是说时域序列的调制等效于频域的圆周移位。由此式可以得到：

$$DFT[x(n) \cos(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(k)$$

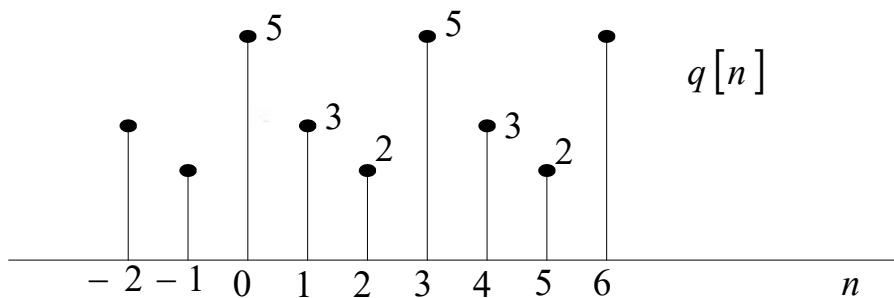
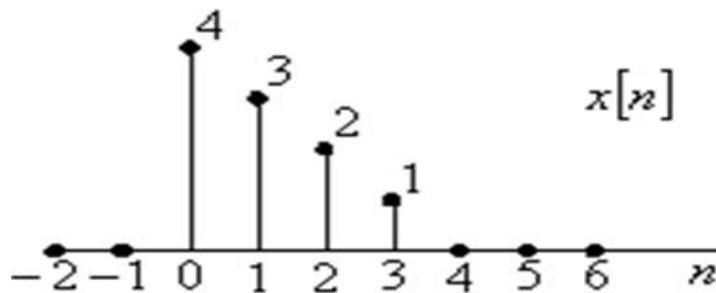
$$DFT[x(n) \sin(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(k)$$



$$y[n] = x[((n - 4))_6]$$



例题：考虑如图所示的实有限长序列 $x[n]$



(1) 简略画出有限长序列 $y[n]$ 的图形, 其 6 点 DFT 为 $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$, 式中 $X[k]$

为 $x[n]$ 的 6 点 DFT。

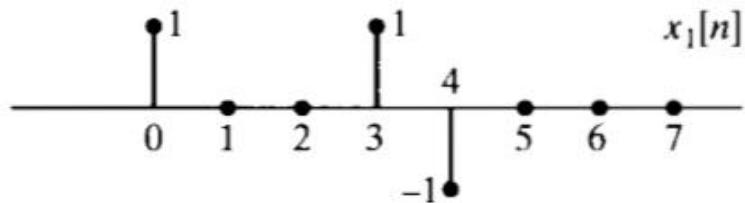
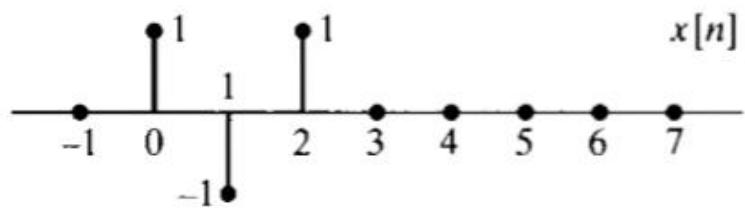
(2) 简略画出有限长序列 $q[n]$ 的图形, 其 3 点 DFT 为: $Q[k] = X[2k], k = 0, 1, 2$

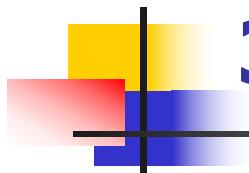
例题

- 两个序列 $x(n)$, $x_1(n)$ 均作N点DFT
- 满足关系:

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k 2/N},$$

- 试问是否存在这样的N?
- N是否唯一?





3、圆周共轭对称性

- 任一序列都可表示成共轭对称分量与共轭反对称分量之和。
 - 在讨论有限长序列的离散傅立叶变换时，不能直接采用其定义。因为对于 N 点的序列，按定义给出的共轭对称分量与共轭反对称分量都是 $(2N-1)$ 点。
- 需要从周期序列的共轭对称定义入手，导出有限长序列的圆周共轭

圆周共轭分解

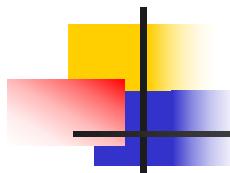
- 有限长序列的圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量分别定义为其周期延拓序列相应共轭分量的主值区间

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]$$

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$



圆周共轭对称

- 若 $x(n)$ 为共轭对称序列，则 $x((n))_N$ 称为圆周共轭对称序列

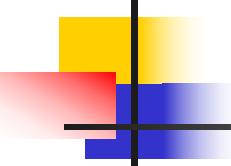
$$x(n) = x^*(N - n) \quad n \in [0, N - 1]$$

- 若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，则 $x((n))_N$ 称为圆周共轭反对称序列：

$$x(n) = -x^*(N - n) \quad n \in [0, N - 1]$$

- 注

- 共轭对称是以零点为中心考察对称的性质，
- 圆周共轭由于是针对[0, N-1]上的有限长序列引入的，其对称中心变为 $\frac{N}{2}$ 。

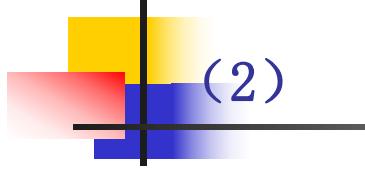


DFT对称特性

$$x(0) = x(N), X(0) = X(N)$$

- (1) $DFT[x((-n))_N R_N(n)] = X(N - k)$
- 证明:

$$\begin{aligned} & DFT[x((-n))_N R_N(n)] \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(-n)} W_N^{nk} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(N-n)} W_N^{nk} \right) R_N(k) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(i)} W_N^{(N-i)k} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(n)} W_N^{-kn} \right) R_N(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(n)} W_N^{n(N-k)} \right) R_N(k) = X((N-k))_N R_N(k) = X(N-k) \end{aligned}$$



(2)

$$DFT[x^*(n)] = X^*((N - k))_N R_N(k) = X^*(N - k)$$

证明：

$$\begin{aligned} DFT[x^*(n)] &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right)^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N - k))_N R_N(k) = X^*(N - k) \end{aligned}$$

同理可得：

$$DFT[x^*(N - n)] = X^*((k))_N R_N(n) = X^*(k)$$

(3)

$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

证明：

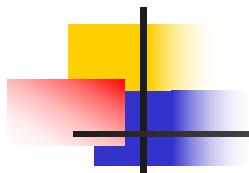
$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \}$$

$$= DFT \left\{ \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)] \right\}$$

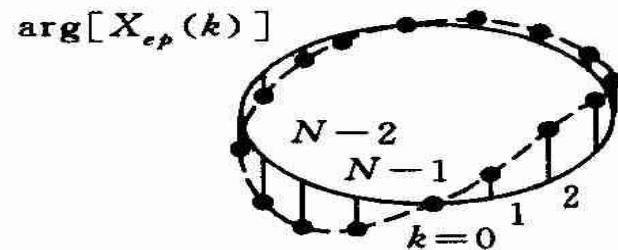
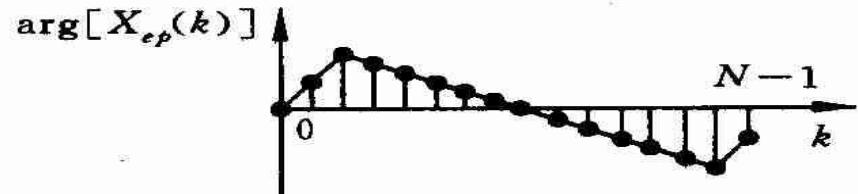
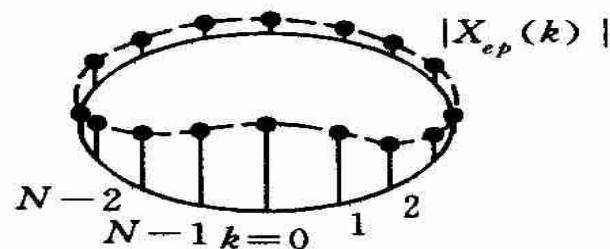
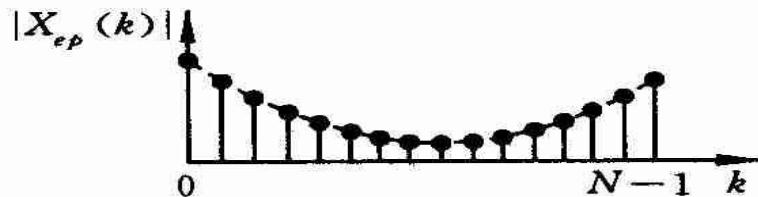
$$= \frac{1}{2} \{ DFT[x(n)] + DFT[x^*(n)] \}$$

$$= \frac{1}{2} [X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)]$$

$$= \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k) = X_{ep}(k)$$


$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

- 同理可得： $DFT \{ j \text{Im}[x(n)] \} = X_{op}(k)$
 $DFT \{ x_{ep}(n) \} = \text{Re}[X(k)]$
 $DFT \{ x_{op}(n) \} = j \text{Im}[X(k)]$
- 复序列**实部**的**DFT**对应于序列**DFT**的**圆周共轭对称分量**；序列**虚部**乘以**j**的**DFT**对应于序列**DFT**的**圆周共轭反对称分量**。
- **实序列**的**DFT**只有圆周共轭对称分量，**纯虚序列**的**DFT**只有圆周共轭反对称分量。



实序列，其DFT圆周共轭对称，即：

$$X_{op}(k) = X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

纯虚序列，其DFT圆周共轭反对称，即：

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$x[n] = \delta[n - 1] + \delta[n - N + 1]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = W_N^k + W_N^{(N-1)k} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

例题

- 实N点有限长序列 $x(n)$, $n=0,1,2,\dots,N$
- 其傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$, DFT为 $X(k)$
- 1) 若: $\text{Im}\{X(k)\} = 0, \quad k = 0,1,\dots,N-1$ 是否我们可以得到结论: $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$?如果可以, 请详细说明原因。如果不可以, 请举出反例。
- 2) 是否存在上述 $x(n)$ 其 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$?如果有请举例。否则请给满足 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$ N点序列 $y(n)$ 的特征。若 $X(k) = Y(e^{j\omega})|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$ 请指出有限长序列 $x(n)$ 与有限长序列 $y(n)$ 间的关系。

$$x(n) = y((n))_N R_N(n)$$

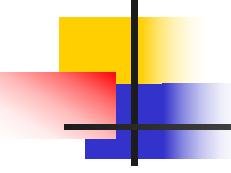
利用对称性减少运算量

- 对于实序列和纯虚序列，只要知道一半数目就可以利用对称性求得另外一半，从而可以节约运算
- 利用共轭对称性，可以用一次DFT运算来计算两个实数序列的DFT，因而可以减少计算量。

$$\begin{aligned}\omega(n) &= x_1(n) + jx_2(n) & W(k) \\& & = DFT[w(n)] \\& & = DFT[x_1(n) + jx_2(n)] \\& & = DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] \\& & = X_1(k) + jX_2(k)\end{aligned}$$

$$X_1(k) = DFT\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

$$X_2(k) = DFT\{\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*((N-k))_N]R_N(k)$$



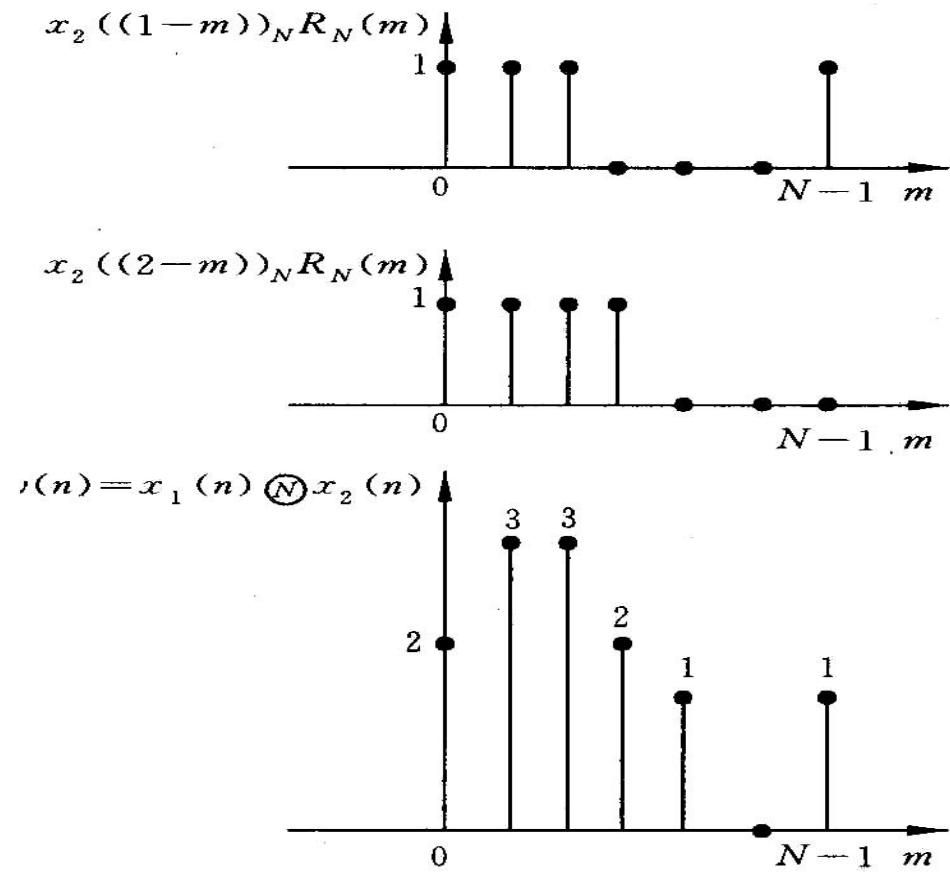
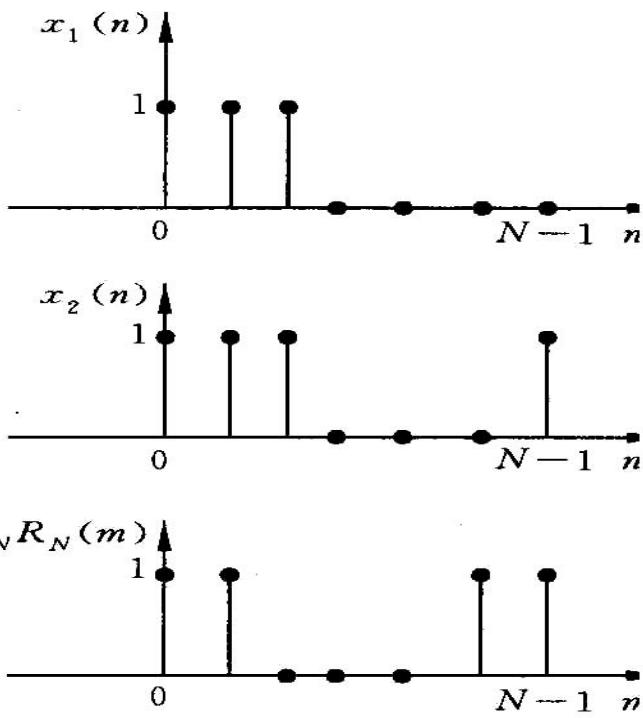
四、圆周卷积和 (**N**)

- 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为 **N** 的有限长序列。
- 圆周卷积和定义为：

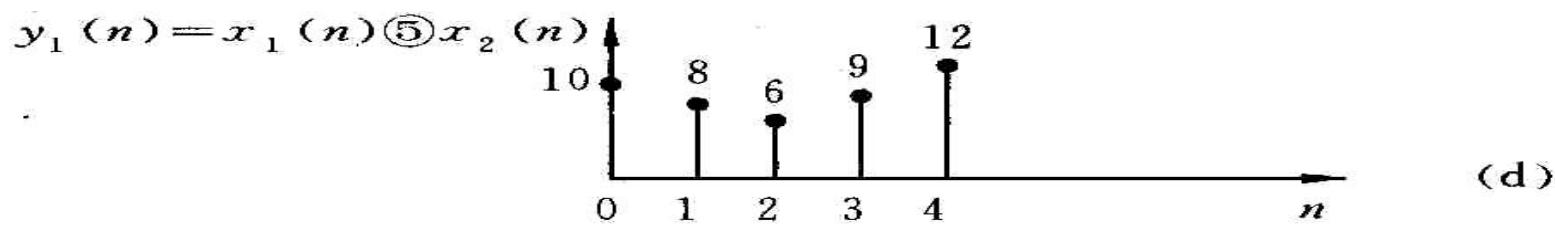
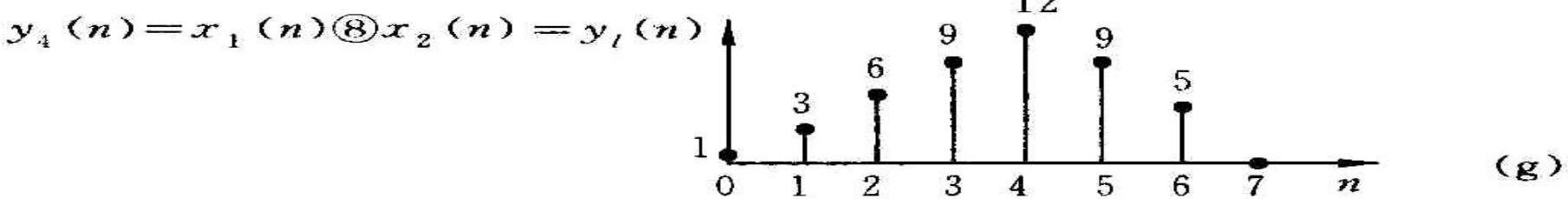
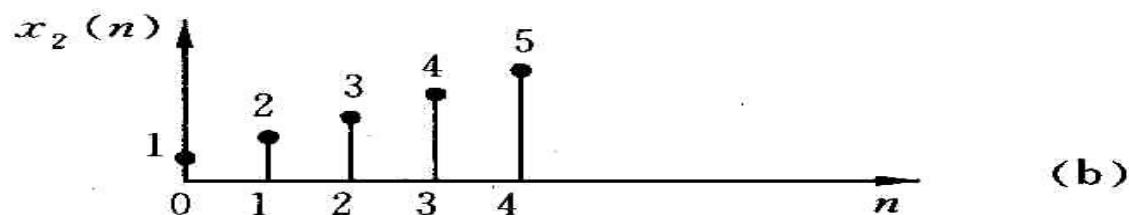
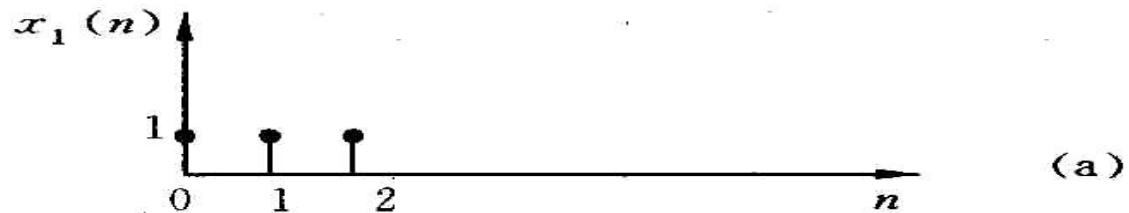
$$y(n)$$

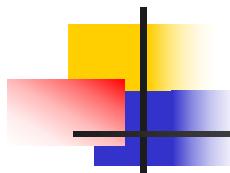
$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

- 圆周卷积和与点数 **N** 有关



两个序列做不同点数的圆周卷积和，其结果不一样





圆周卷积和性质

- 若:

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

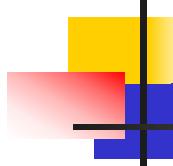
-

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k)$$

- 则有:

$$y(n) = IDFT[Y(k)]$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$



证明:

$$y(n)$$

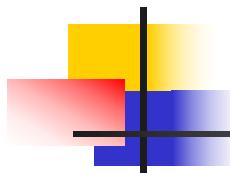
$$= IDFT[Y(k)]$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) X_2(k) W_N^{-nk} \right) R_N(n)$$

$$= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk} \right) X_2(k) W_N^{-nk} \right] R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right) \right] R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \equiv \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

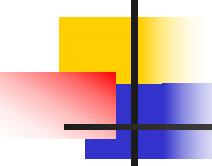


圆周卷积和交换性

同理不难证明：

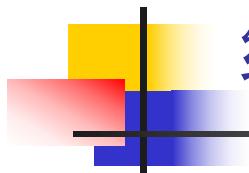
$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2((m))_N x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$\begin{aligned} x_1(n) \Theta x_2(n) &= x_2(n) \Theta x_1(n) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right) R_N(n) = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right) R_N(n) \end{aligned}$$



圆周卷积和 计算 线性卷积和

- 时域圆周卷积和在频域上相当于两DFT相乘，因而可以采用DFT的快速算法（FFT）来实现。与序列的线性卷积和相比，计算速度可以大大加快。
- 一般实际问题（例如信号通过线性移不变系统）都是线性卷积运算，并且作卷积和的两个序列一般情况下长度不等。
 - 如果输入信号以及系统的单位冲激响应都是有限长序列，那么是否能用圆周卷积运算来代替线性卷积运算呢？



线性卷积和

- $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$) ,
- $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$) ,
- 线性卷积和: $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$
- $X_1(n)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1$, $x_2(n)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$, 将两个不等式相加, 得到其卷积和 $y(n)$ 的非零区间: $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$, 所以是 $N_1 + N_2 - 1$ 点有限长序列。

圆周卷积和

■ 数据长度调整

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

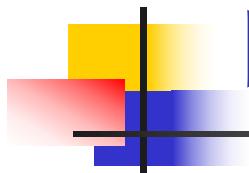
$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

L点圆周卷积是圆周卷积以L为周期的周期延拓序列的主值序列。

圆周卷积无失真代表圆周卷积的条件是延拓周期L必须满足：

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \Theta x_2(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m)_L) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) \end{aligned}$$

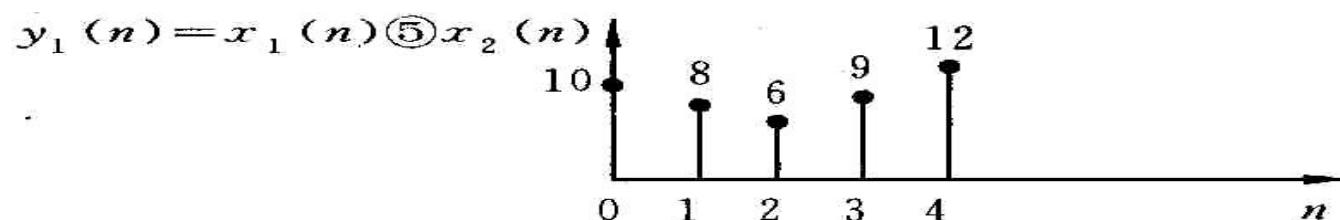
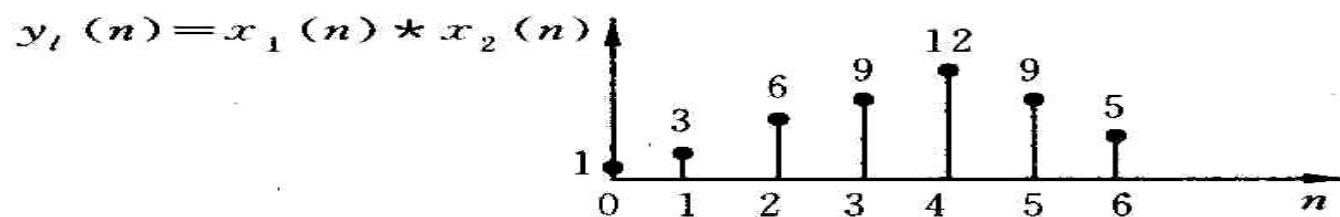
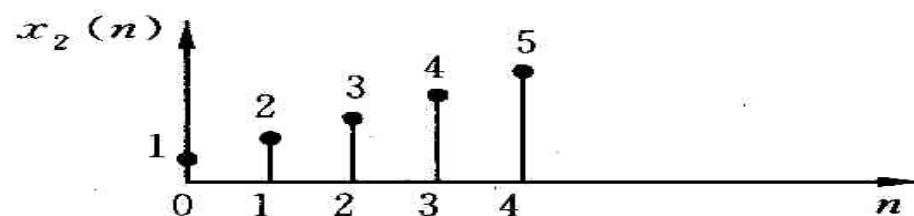
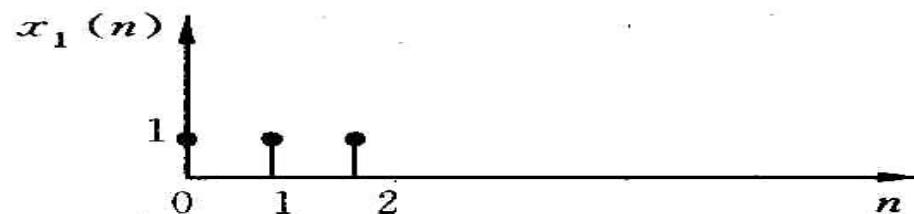


圆周卷积和定理的再解释

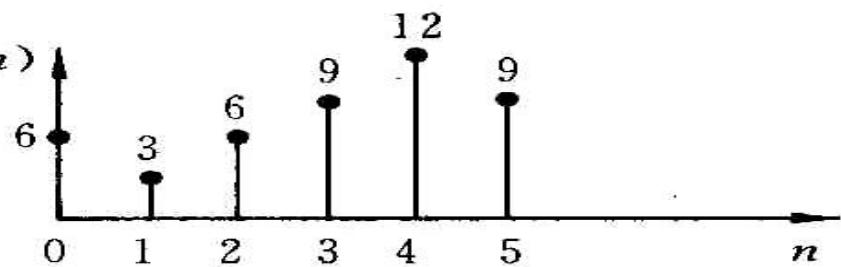
$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) \quad \dots \quad > y(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad \dots \quad > y_I(n)$$

- $Y(K)$ 实际上是两个信号线性卷积和DTFT的采样
- $\rightarrow y(n)$ 相当于线性卷积和的周期延拓
- \rightarrow DFT的点数只有大于等于线性卷积和长度时，才能恢复。

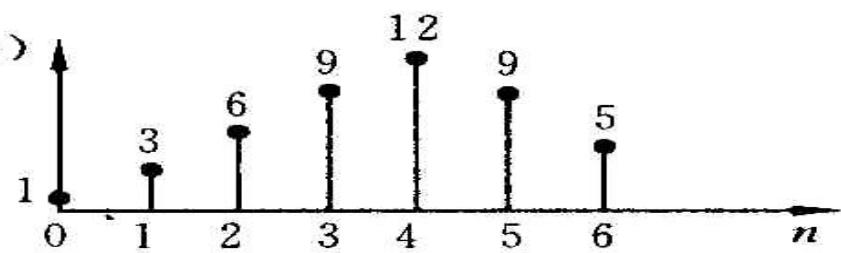


$$y_2(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n)$$



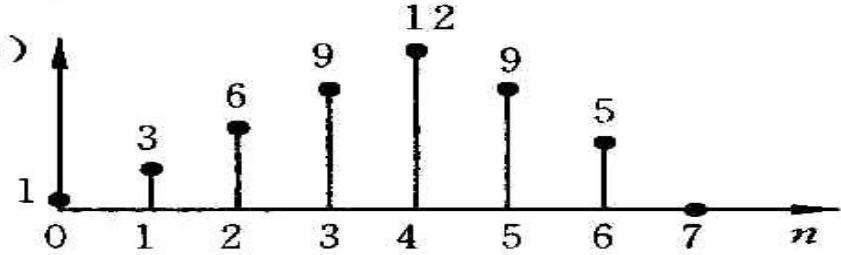
(e)

$$y_3(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n) = y_1(n)$$

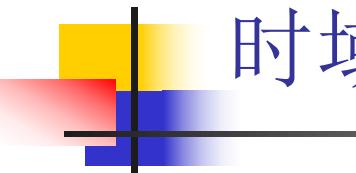


(f)

$$y_4(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n) = y_1(n)$$



(g)



时域相乘定理

- 利用时域与频域的对偶性，可以证明：
- 若： $x_1(n)$ ， $x_2(n)$ 皆为**N**点有限长序列，并且**y(n)**为其相乘序列：

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$

- 则有：

$$Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \Theta X_2(k)$$

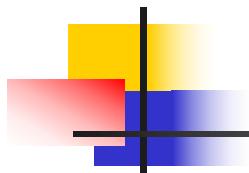
五、圆周相关

- 线性相关定义为：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)y^*(n)$$

- 相关与卷积和类似
 - 缺少“翻褶”过程；
 - 与卷积和不同的是相关不满足交换律。
- 自相关函数：

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+m) = r_{xx}^*(-m)$$



相关函数的频谱

$$R_{xy}(z)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-m) z^{-m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(n-m) z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(m) z^{(m-n)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(m) z^m = X(z) Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) \quad R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

- 
- 上述推导说明：
 - 互相关函数的频谱只包含两个信号**共有频率成分**。
 - 自相关函数的**傅里叶变换**是信号的**功率谱**，是信号谱分析建模的基础。
 - 与圆周卷积和类似，由于**DFT****隐含的周期性**，存在圆周相关的概念，它不同于线性相关。

- 借助线性相关性质假设：

- 可以证明： $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$

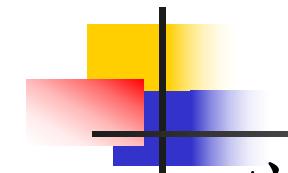
$$IDFT[R_{xy}(k)] = r_{xy}(m)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N \right] R_N(m) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N \right] R_N(m)$$

- 由此，引出圆周相关的定义为：

$$r_{xy}(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N \right) R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N \right) R_N(m)$$

$$\begin{aligned}
& IDFT[R_{xy}(k)] \\
&= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) X(k) W_N^{-mk} \right) R_N(m) \\
&= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) W_N^{-mk} \right] R_N(m) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) W_N^{(n-m)k} \right) \right] R_N(m) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-(n-m)k} \right)^* \right] R_N(m) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N \right) R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m))_N \right) R_N(m) = r_{xy}(m)
\end{aligned}$$

- 
- 实际信号处理中主要是为了实现线性相关运算，从而实现对信号的分析；
 - 由于圆周相关可以利用**FFT**快速实现，因而大部分情况下利用圆周相关来实现线性相关；
 - 与卷积类似，**L点圆周相关能代表线性相关的条件是：**

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

作业

- 8.9
- 8.14
- 8.15
- 8.16
- 8.23
- 8.27





谢 谢

授课教师：孙国良

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

5.3 FFT



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

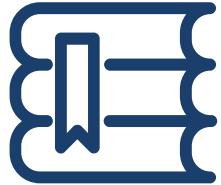
DFT快速算法



五

DFT的工程应用

D F T 快 速 算 法



离散傅里叶级数

频域采样与重构

离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用

北京航空航天大学



- ◆ DFT到底有多“坑”？
- ◆ 如何提高运算效率？



倍速

DFT存在的问题及改进

- **N点有限长序列，其DFT变换对为：**

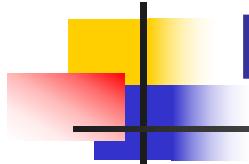
- $$DFT : X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

$$IDFT : x(n) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right) R_N(n)$$

- 可以看出，**变换与反变换的差别仅在于指数符号和常数乘因子**1/N**。**实际上：

$$IDFT [X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT [X^*(k)]}$$

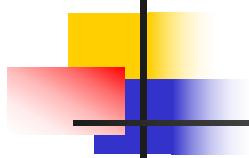
- 因而我们**只讨论DFT正变换的运算量**，反变换的运算量是完全相同的。



DFT直接计算的运算量

$$DFT: \quad X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

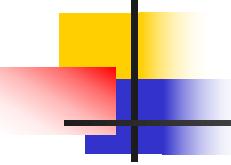
- 一般来说 $x(n)$ 和 W_N^{nk} 都是复数，
- 每一个 $X(k)$ 值的计算，需要 **N** 次复数乘法以及 **(N-1)** 次复数加法，
- 完成整个**DFT**运算总需要 N^2 次复数乘法和 **N (N-1)** 次复数加法。

- 
- 复数运算实际上是由实数运算来完成的，如：

$$AB = (a + jc)(b + jd) = (ab - cd) + j(ad + bc)$$

$$A + B = (a + jc) + (b + jd) = (a + b) + j(c + d)$$

- 一次复数乘法需用：
 - 四次实数乘法
 - 二次实数加法；
- 一次复数加法则需：
 - 二次实数加法。
- 整个**DFT**运算总共需要：
 - **4N²次实数乘法**
 - **2 N² + 2 N (N - 1) = 2 N (2 N - 1) 次实数加法。**



特例：

- 上述统计与实际的运算次数有**少许出入**，某些因子不能按照一般的复数来计算运算量，如：

$$\pm 1 \quad \pm j \quad W_N^0 = 1 \quad W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{N/4} = -j$$

- 当**N**很大时，这种特例很小。
- 直接计算**DFT**运算量是很可观的：
 - N=8**时，**DFT**需**64**次复乘，
 - N=1024**时，**DFT**所需复乘为**1 048 576**次，
- 对**实时性很强的信号处理**来说，对**硬件的计算速度要求是太高了**。为了实用的需要，**需要改进DFT的计算方法**，减少运算次数。

变换基底的特性

如何才能减少运算量？仔细观察DFT的运算就可看出，其**变换系数**的具有如下**特性**：

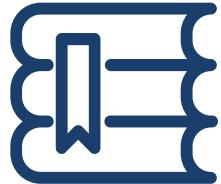
$$(1) W_N^{n k} \text{ 的对称性 } (W_N^{n k})^* = W_N^{-nk}$$

$$(2) W_N^{n k} \text{ 的周期性 } W_N^{n k} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

$$(3) W_N^{n k} \text{ 的可约性 } W_N^{n k} = W_{mN}^{mn k} \quad W_N^{n k} = W_{N/m}^{nk/m}$$

$$W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk}$$

$$W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$



问 题 及 思 路

DFT存在的问题

改进的可行性

运算量正比于序列长度平方 N^2

长序列分解成短序列

$$(\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2} < N^2$$

变换基 $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
为复数，复运算

可约性、周期性、对称性可合并运算；

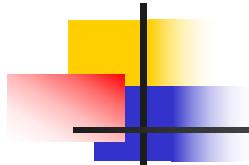
$$W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m} = W_{mN}^{mnk}$$

$$W_N^{nk} = W_N^{n(k+N)} = W_N^{(n+N)k}$$

$$W_N^{-nk} = W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{nk})^*$$

还有少量实因子

$$\begin{aligned}W_N^0 &= -1 \\W_N^{N/4} &= j \\W_N^{N/2} &= -1 \\W_N^{3N/4} &= -j\end{aligned}$$

- 
- (1) 利用 $W_N^{n k}$ 的对称性, 合并DFT运算中某些项, 并且可以计算反变换;
 - (2) 由于DFT的运算量是与 N^2 成正比, 利用 $W_N^{n k}$ 周期性和可约性将长序的DFT分解为短序列的DFT。
 - FFT基本可以分成两大类
 - 按时间抽取(DIT, Decimation-in-time)
 - 按频率抽取(DIF, Decimation-in-frequency)。

戈 泽 尔 算 法

戈泽尔算法

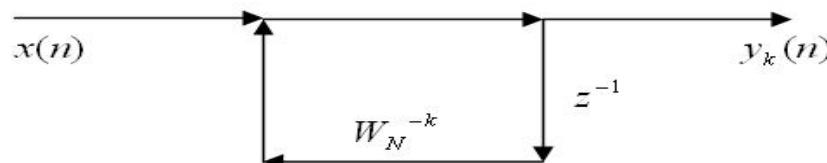
基2-FFT的定义及特点

时域抽取的基2-FFT

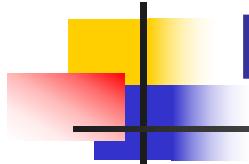
FFT应用示例

课后作业与参考资料

- 利用复变换基 W_N^{n-k} 的周期性、对称性减少运算量的典型例子
- 利用卷积计算频域



- 用于单离散频点或少数任意离散频点场合（如**DTMF**辨识）的有效计算



DFT变形为卷积

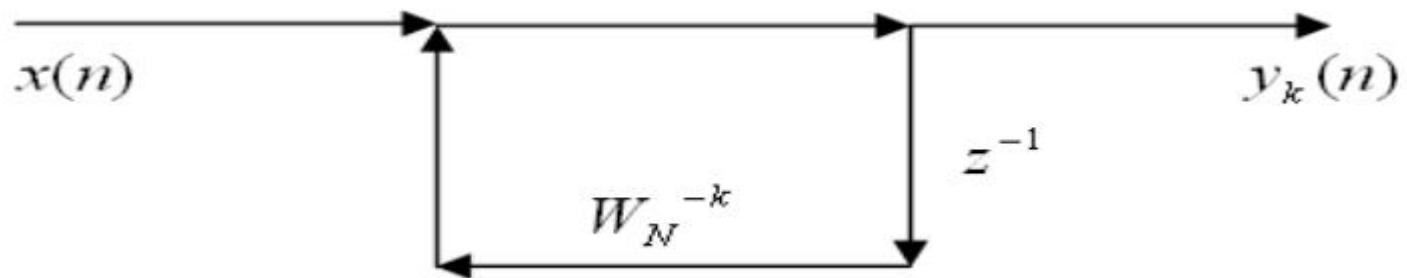
$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n) = x(n) * W_N^{-kn} u(n) \stackrel{x(n) \text{为有限长}}{=} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(n-r)} u(n-r)$$

$$y_k(n)|_{n=N} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} u(N-r) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} = X(k)$$

推论：避免计算和存储 W_N^{-kn}

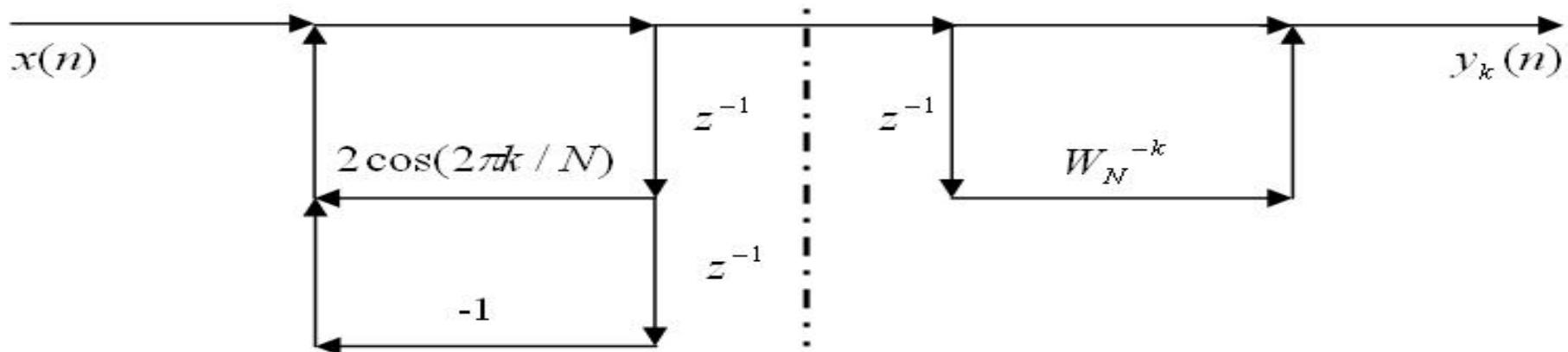
- 如果构造冲击响应 $h(n)$ 为 $h(n) = W_N^{-kn} u(n)$ 的系统，则该系统对有限长输入在 $n = N$ 时刻的响应即为 $X(k)$ 。

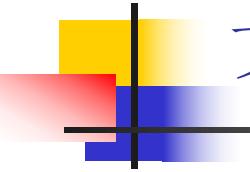


运算量減半

- 立足于上面用卷积实现**DFT**的方法，通过变形将上面的运算量减小一半。

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})} * (1 - W_N^k z^{-1}) \\ &= \frac{1}{1 - 2 \cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2}} * (1 - W_N^k z^{-1}) \end{aligned}$$





戈泽尔算法特点

- 利用迭代实现了复因子的计算
- 如果输入序列是复数，由于系数是实数并且-1不必作乘法运算，所以计算一个 $X(K)$ 只需要 $2N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法。
- 戈泽尔算法还有另外一个优点是只需要将前馈环节中的复因子取共轭就可以计算 $X(N-K)$ ，可以将运算量再次减半。
- 戈泽尔算法虽然比直接运算有效的多，但是无论如何变形，其运算量将仍然正比于 N^2 。

基2-FFT的定义及特点



■ 基2-FFT定义：

- I. 序列长度为 2^L ，如不满足可补0 -----适合递归分解
- II. 序列长度每次减半进行DFT快算运算 --分解出特殊基

$$W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

- III. 序列分解的最小单元长度为2 -----无复数运算

$$W_2^0 = 1 \quad W_2^1 = -1$$

■ 两大类：

- 时间抽取(DIT)的基2-FFT： (库利-图基, 1965)
- 频域抽取(DIF)的基2-FFT： (桑德-图基, 1966)

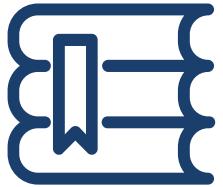
戈泽尔算法

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

线性调频-Z变换



DFT时域奇偶抽取的数学推演

$$N = 2^L$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

时域奇偶分组

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) \\ x_2(r) = x(2r+1) \end{cases}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{2rk}$$

利用复指数
基底的可约性

旋转因子

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk}$$

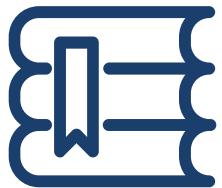
$$\begin{cases} X_1(k) = DFT[x_1(n)] \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)] \end{cases}$$

N/2点DFT

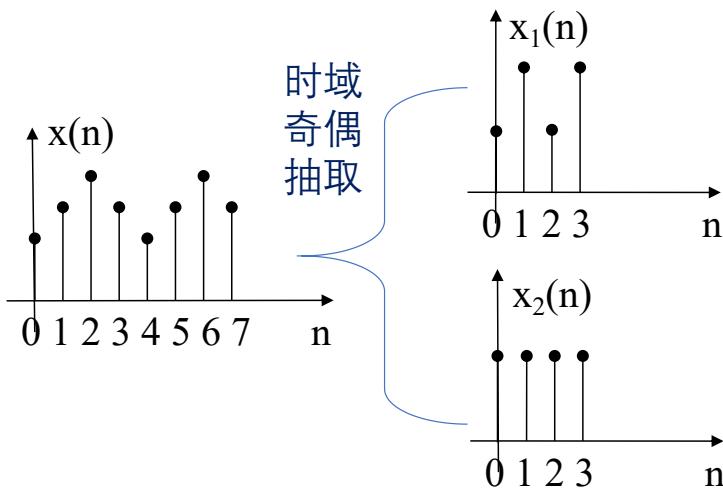
$$= X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

k需周期性拓展

$$\begin{aligned} X_1\left(\frac{N}{2}+k\right) &= X_1(k) \\ X_2\left(\frac{N}{2}+k\right) &= X_2(k) \end{aligned}$$

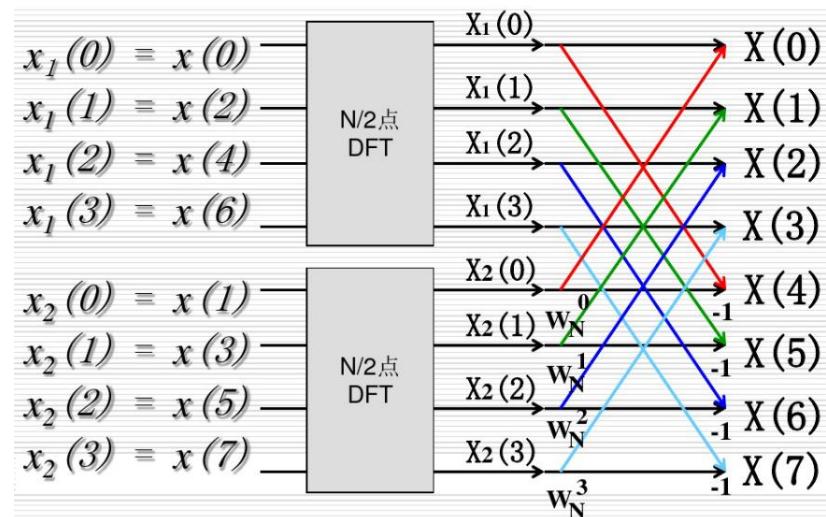


DFT时域抽取的物理解释

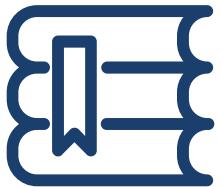


时域分解

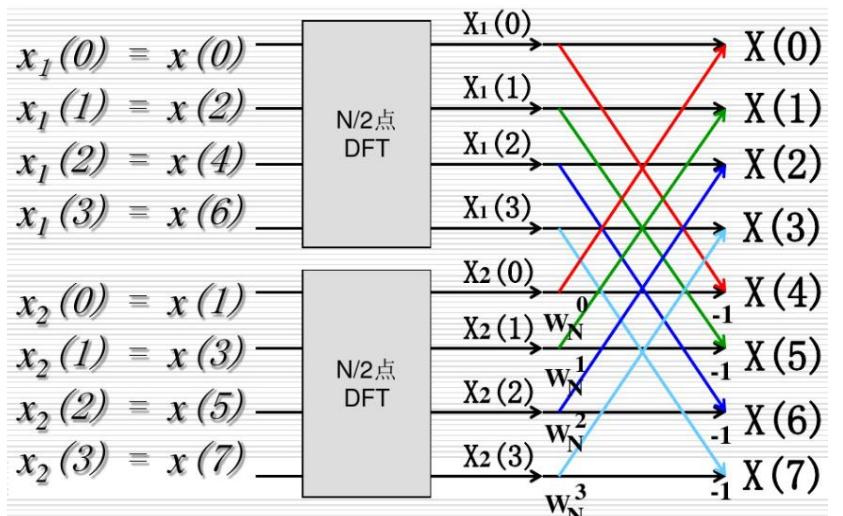
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$



频域组合



一次分解后的基本蝶形及运算量



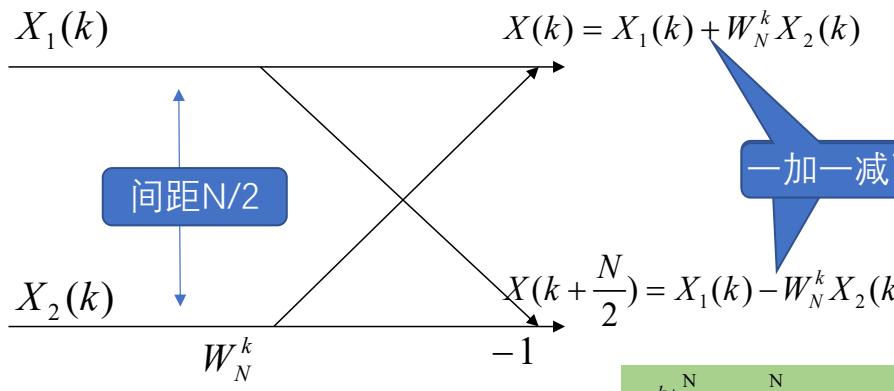
运算量	分解前	分解后
复乘次数	N^2	$2 \times (N/2)^2 + N/2 = N(N+1)/2 \approx N^2/2$
复加次数	$N^2 - N$	$2 * N/2 * (N/2 - 1) + N = N^2/2$

按照上述方法依次分解下去…

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

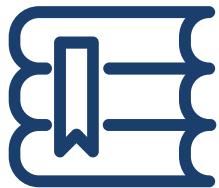
$$X_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_1(k)$$

$$X_2\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_2(k)$$

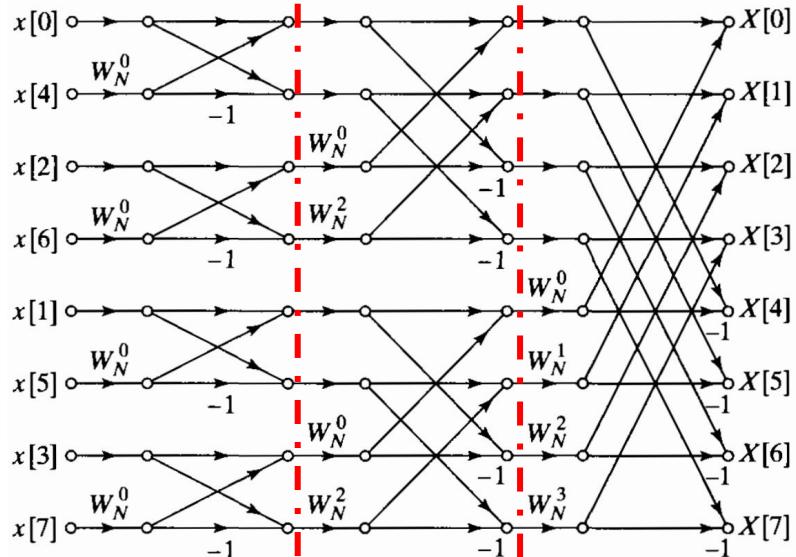


$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^{\frac{N}{2}} W_N^k = -W_N^k$$

蝶形单元：旋转因子在前，加减在后
 运算量：一次复乘，两次复加



DIT分解的最终蝶形结构及运算量

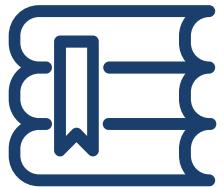


运算量	分解前	分解后
复乘	N^2	$L * N / 2 = \log_2^N * N / 2$
复加	$N^2 - N$	$L * N = \log_2^N * N$

DIT蝶形特点

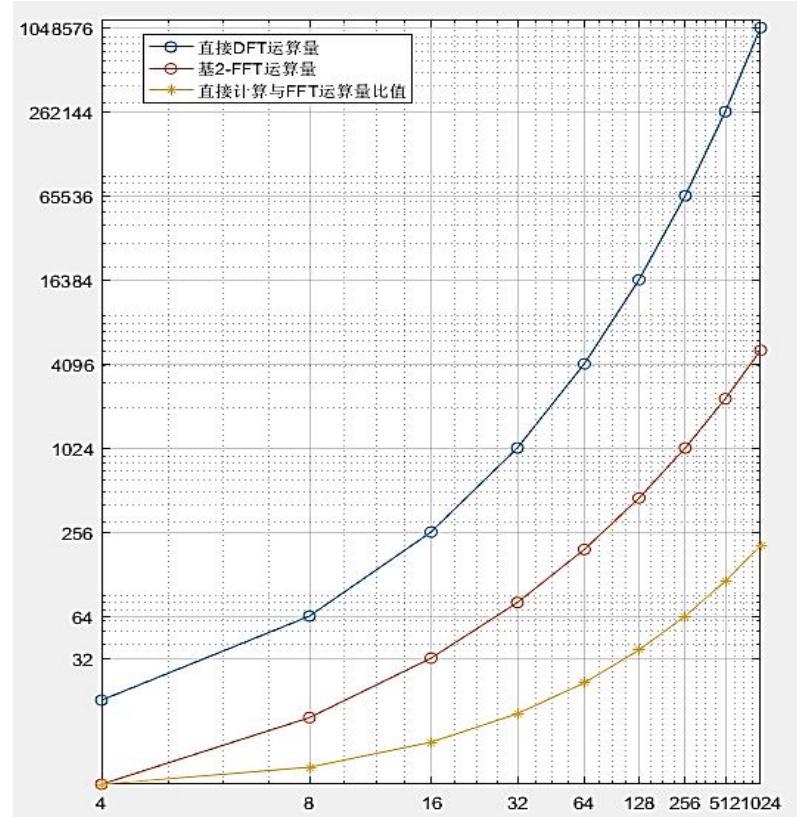
- 共有L级蝶形，每级有N/2个蝶形；
- 同址运算（原位运算）；
- 倒位序寻址；

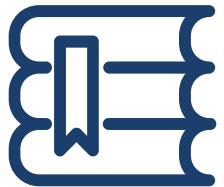
自然顺序 n	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序数 \hat{n}
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7



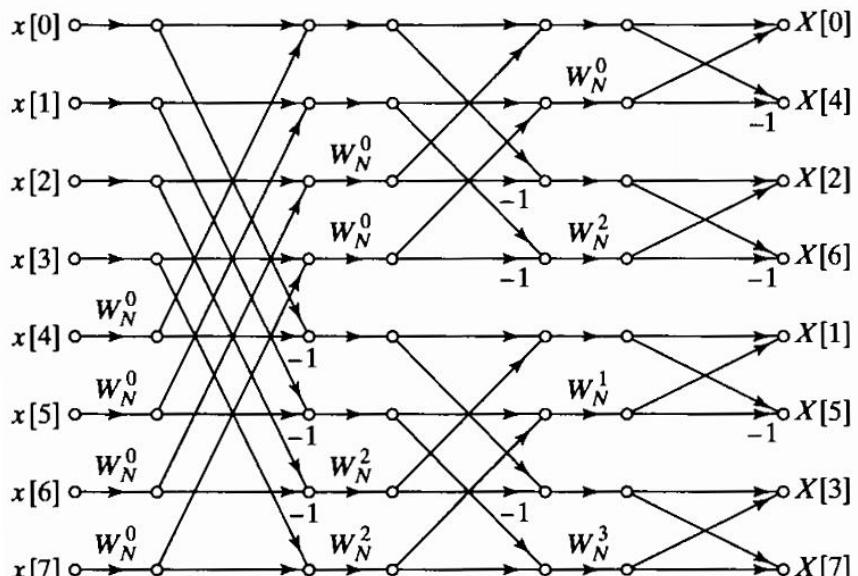
基2-FFT与直接DFT复乘运算量对比

序列长度N \ 运算量	直接DFT	基2-FFT	运算量之比
序号	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	
1	16	4	4.0
2	64	12	5.3
3	256	32	8.0
4	1024	80	12.8
5	4096	192	21.3
6	16384	448	36.6
7	65536	1024	64.0
8	262144	2304	113.8
9	1048576	5120	204.8

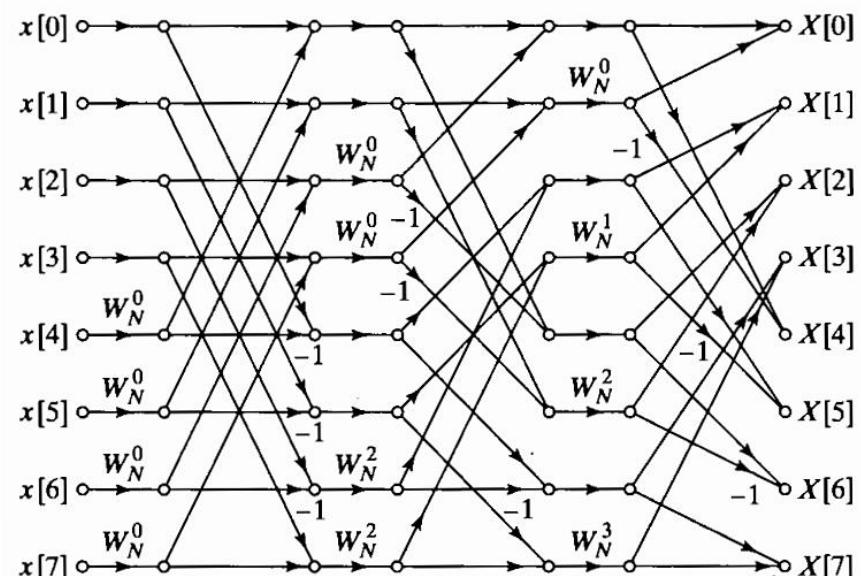




DIT 基 2 -FFT 的其他流图形式



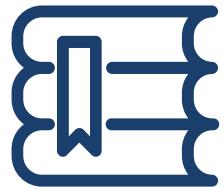
输入正位序输出倒位序



输入正位序输出正位序

DIT基本蝶形本质特征：旋转因子在前，加减在后

DFT频域奇偶抽取的数学推演



$$N = 2^L$$

时域前后分组

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

按K的奇偶性分解
为越来越短的序列

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(\frac{N}{2}+n\right)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2}] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right)]. W_N^{nk}$$

利用复指数
基底的可约性

FFT背景介绍

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

线性调频-Z变换

频域按k奇偶分

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + (-1)^k x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{nk}$$

- 令 $\begin{cases} k = 2r \\ k = 2r + 1 \end{cases} \right\} r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

- 则：

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{n \cdot 2r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{nr}$$

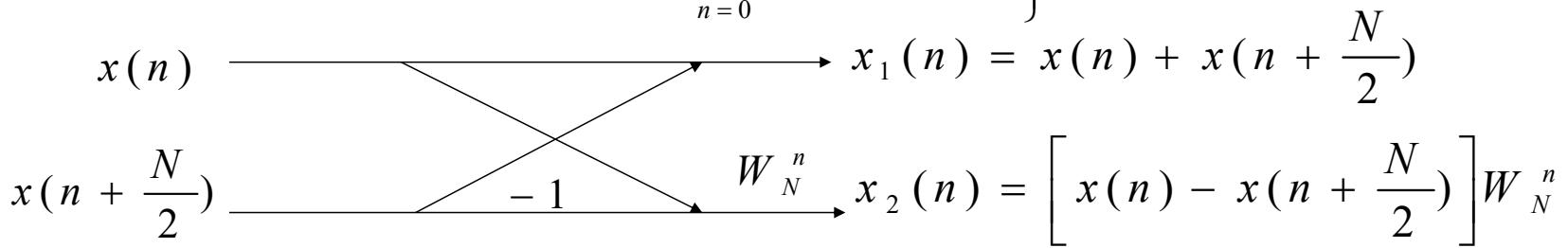
$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{n(2r+1)}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^n \right\} W_N^{nr}$$

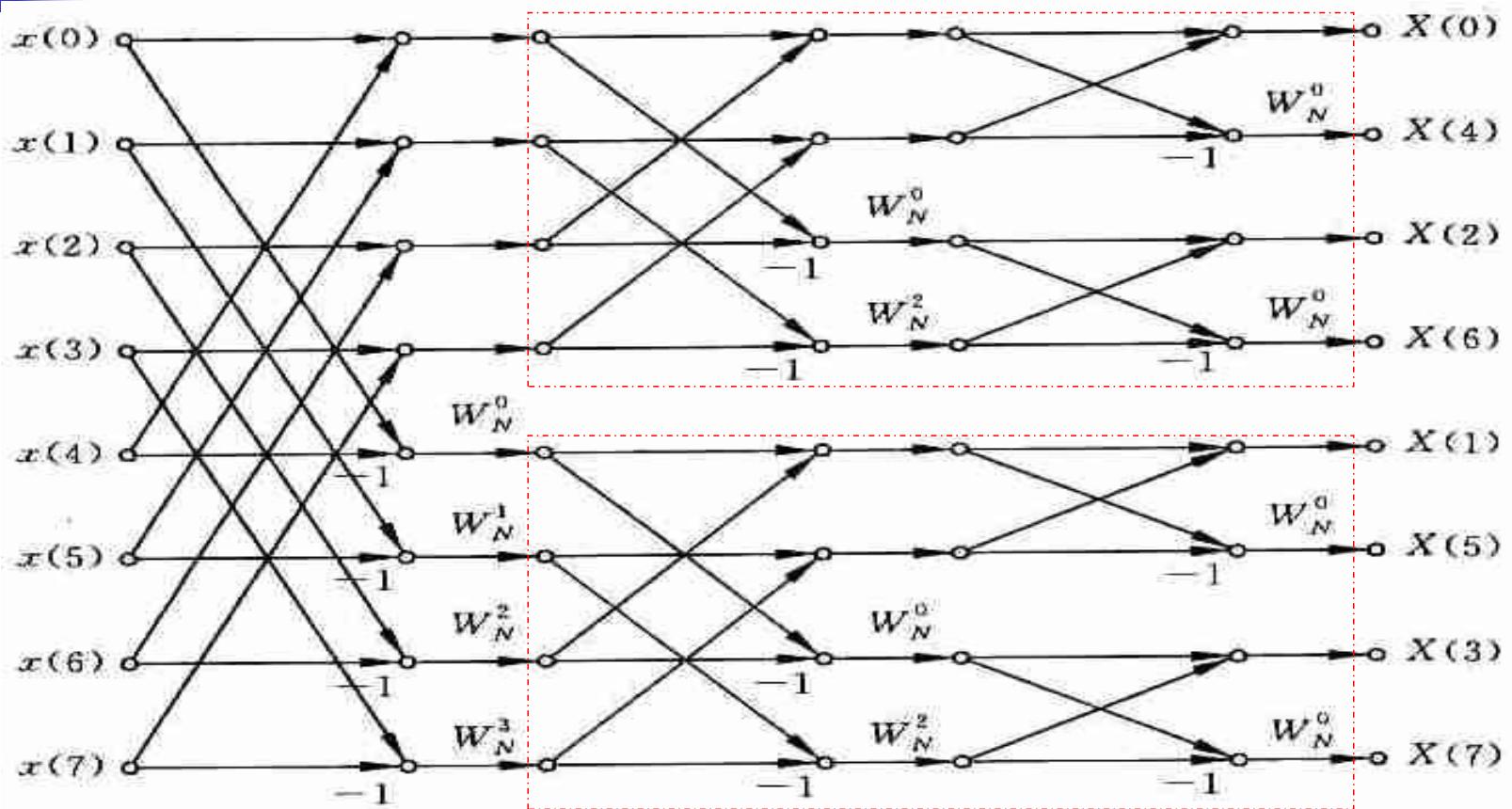
DIF运算关系的基本蝶形

- 令
$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \right\} n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- 则:
$$\left. \begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\ X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} \end{aligned} \right\} r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

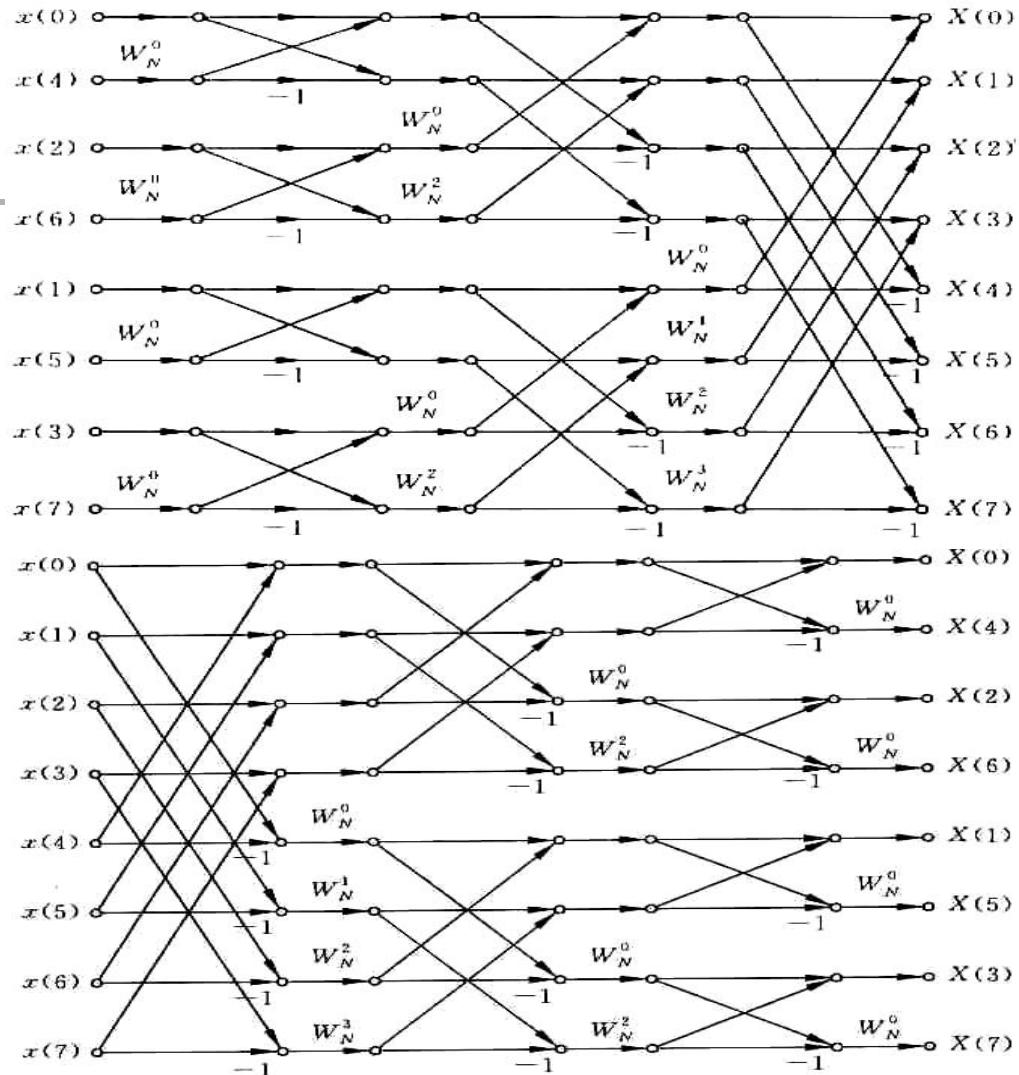


N=8点DIF FFT结构

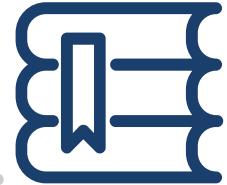


DIT与DIF 的本质区别

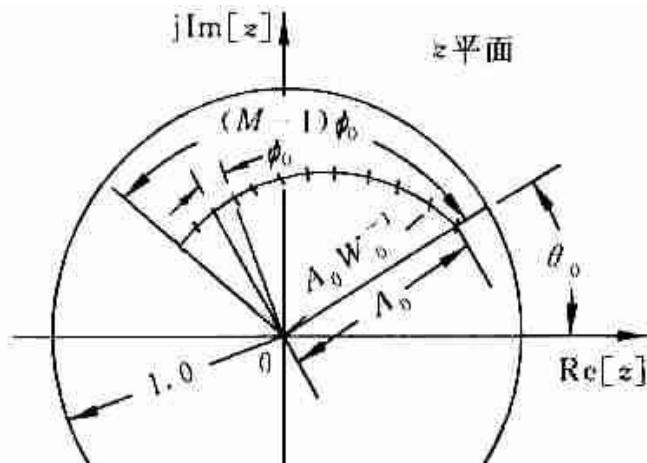
- 形式上区别是：**DIF**输入是自然顺序，输出是倒位序的，与**DIT**正好相反。
 - DIF**与**DIT**都可将输入或输出按照要求进行重排。
- 实质性区别是：**DIF**与**DIT**的基本蝶形不同。



线性调频-Z变换



- 对非单位圆上的抽样感兴趣，如语音信号处理中往往需要知道极点所在处的复频率，如果极点位置离单位圆较远，只利用单位圆上的频谱，就很难知道极点所在处的复频率。
- Z变换采用螺线抽样就适应于这些需要，称为线性调频Z变换(CZT, Chirp-Z)



戈泽尔算法

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

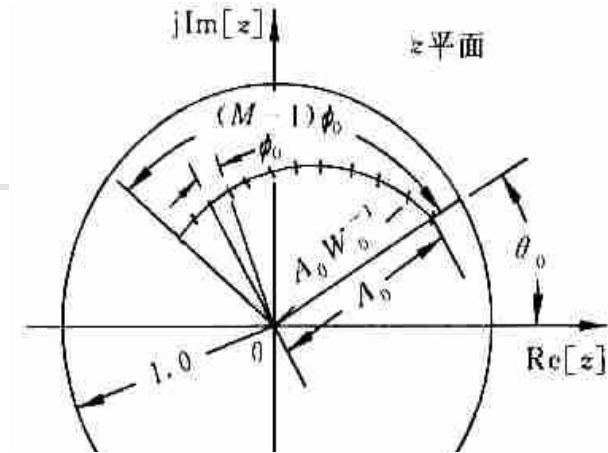
线性调频-Z变换

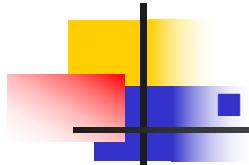
一、算法原理

- 已知 $x(n) (0 \leq n \leq N - 1)$
- **Z变换为:** $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$
- 为适应**z**可以沿**Z**平面更一般的路径取值, 沿**Z**平面上的一段**螺旋线**作等分角的**M**点抽样, **z**的这些抽样点 **z_k** 为:

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\phi_0} = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\phi_0)}$$





CZT的快速算法

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{-nk}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned}$$

- 直接计算这一公式，与直接计算**DFT**相似，总共算出**M**个抽样点，需要**NM**次复数乘法与(**N-1**)**M**次复数加法，当**N, M**较大时，运算量将很大。

布鲁斯坦等式

- 采用**布鲁斯坦** (**Bluestein**) 提出的等式，可以将以上运算转换为卷积和形式，进而采用**FFT**算法，提高运算速度。
- 布鲁斯坦所提出的等式为：

$$nk = \frac{1}{2} \left[n^2 + k^2 - (k - n)^2 \right]$$

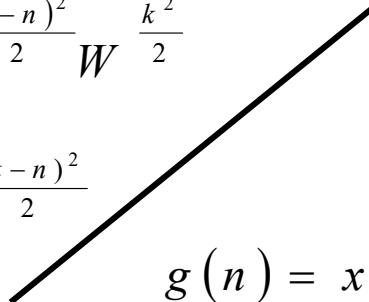
- 由此可得：

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}} \\ &= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \end{aligned}$$

CZT 转变为卷积和

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}}$$

$$= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

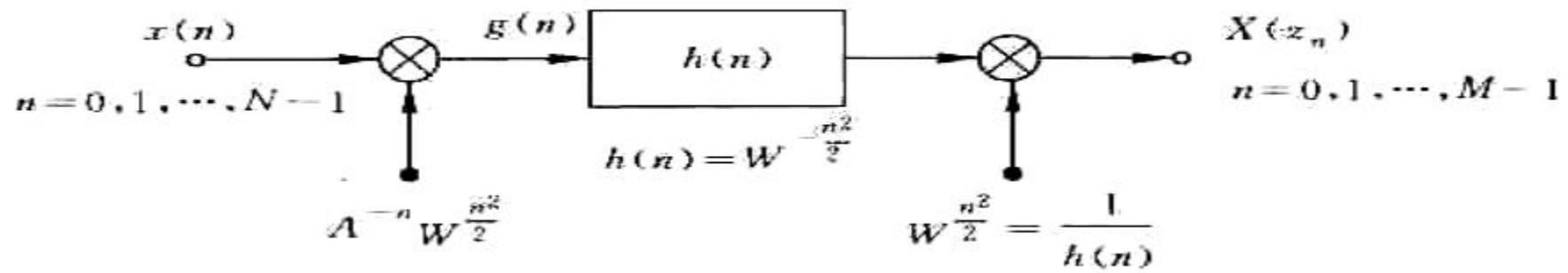


$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$$

Chirp signal

$$X(z_k) = \frac{1}{h(k)} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

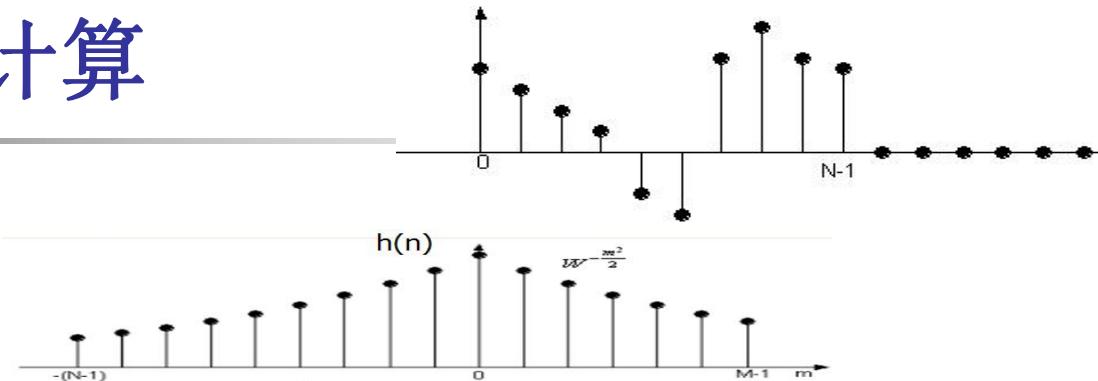


二、CZT快速计算

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$$

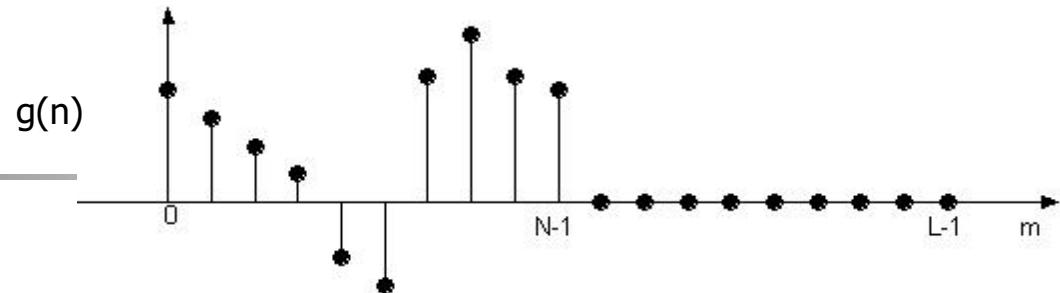
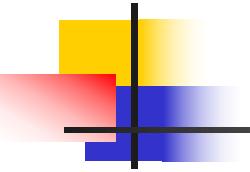
$$g(n) = x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(z_k) = \frac{1}{h(k)} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

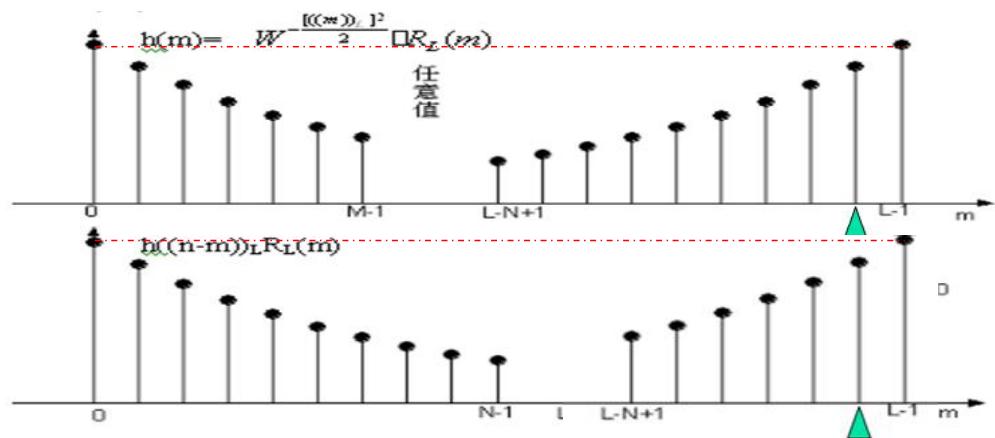
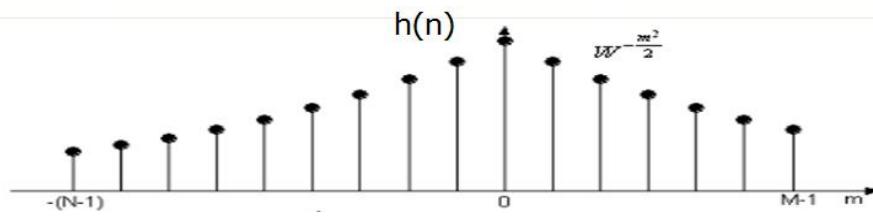


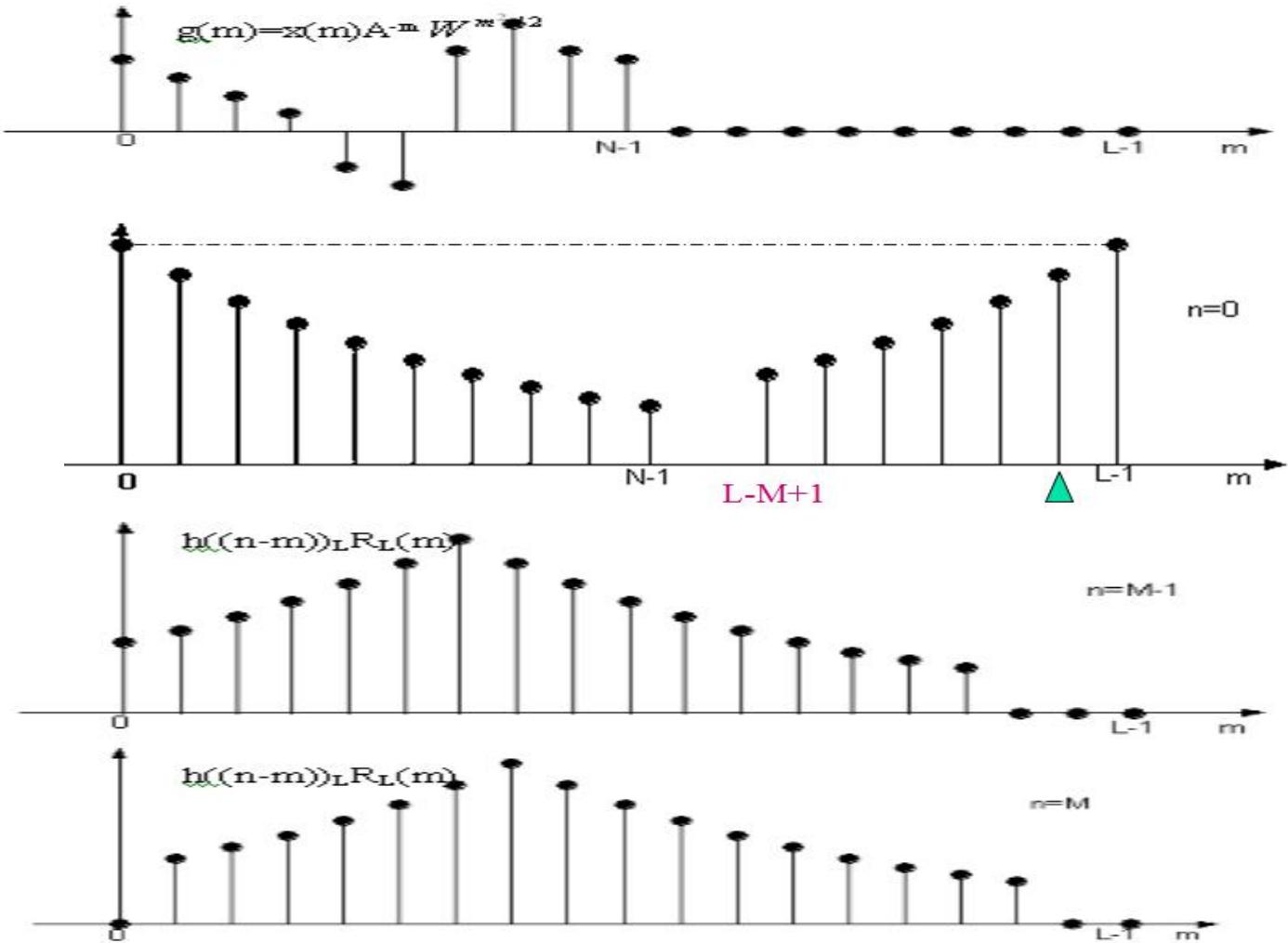
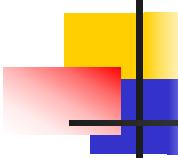
■ 线性系统 $h(n)$ 是非因果的。

- 当 n 取值为 0 到 $N-1$, k 取值为 $0, 1 \dots, M-1$ 时, 则 $h(n)$ 的定义区间为 $[-N+1, M-1]$



- **$g(n)$** 长度为 N , **$h(n)$** 长度为 M . 所以 **$g(n)*h(n)$** 的点数为 $2N+M-2$
- 圆周卷积代替线性卷积不产生混叠失真的条件是圆周卷积点数大于或等于 $2N+M-2$
- 但我们只需要前 M 个值，对其他值是否有混叠失真并不感兴趣，这样有可能将圆周卷积的点数缩减到最小为 $N+M-1$ 。





CZT快速运算的实现步骤：

- 1) 选择整数 $L \geq N + M - 1$
- 2) $g(n)$ 补零成 L 点序列
- 3) 利用 FFT 法求 L 点 DFT
- 4) 形成 L 点 $h(n)$ 序列
- 5) 利用 FFT 法求 L 点 DFT

- 6) 将 $H(r)$ 和 $G(r)$ 相乘得 $Q(r) = H(r)G(r)$,
- 7) 求 $Q(r)$ 的 L 点 IDFT, 其中前 M 个值为 CZT 数值
- 8) 最后求 $X(z_k)$: $X(z_k) = q(k)/h(k)$, $0 \leq k \leq M - 1$

$$g(n) = \begin{cases} A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} x(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & N \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$
$$G(r) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} rn}, \quad 0 \leq r \leq L - 1$$
$$h(n) = \begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}}, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 (\text{或任意值}), & M \leq n \leq L - N \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}, & L - N + 1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$
$$H(r) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} rn}, \quad 0 \leq r \leq L - 1$$

作业:

- 9.6 ■ 9.19
- 9.7 ■ 9.21
- 9.14 ■ 9.28
- 9.17 ■ 9.48
- 9.26
- 9.27





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn