Some

Author: Pannenets.F

Date: September 19, 2020

Je reviendrai et je serai des millions. «Spartacus»

Chapter 1

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

绪　　论

Contents

1、课程教材

2、学习方法

3、考核方式

4、教辅答疑

德才兼备　知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

本节内容

一　数字信号理背景知识

二　课程内容及脉络

三　数字处理应用实例

课程教材

学习方法

考核方式

教辅答疑

■课程教材

- 《离散时间信号处理》奥本海姆
- 《数字信号处理教程》程佩清

■学习方法

- 数学抽象转化为物理概念
- 从工程角度思考理论问题

课程教材

学习方法

考核方式

教辅答疑

■考核方式

■过程考核：20-30%

■期末考试：70-80%

■教辅答疑

■教辅：李铮、王艳萍

■地点：新主楼F518

数字处理应用？？？

背景知识

课程内容

应用示例

背景知识

课程内容

应用示例

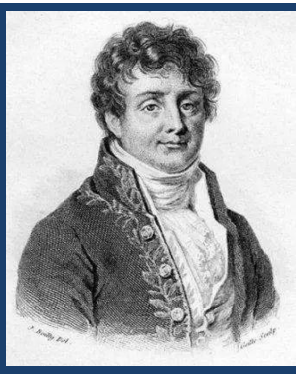
关　于　信　号

- 信号定义及作用?
  - **探测、揭示、控制**
- 信号的分类?
  - **四大类**
  - **两大类**
  - **课程名称和教材名称？？？**
- 信号处理的核心?
  - **表示、运算、变换**
  - **滤波、压缩、特征提取**

数字处理的优点

- 背景知识
- 课程内容
- 应用示例

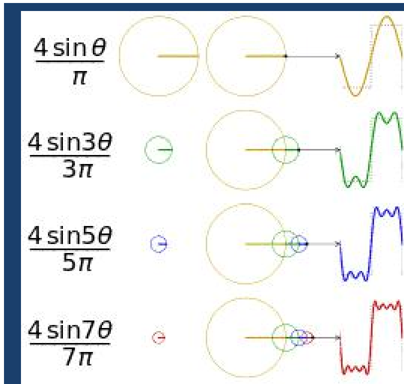
- 精度极高
- 灵活性好
- 可靠性强
- 容易集成
- 时分复用
- 多维处理



背景知识

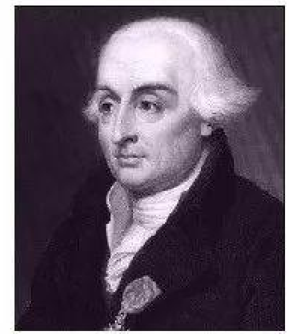
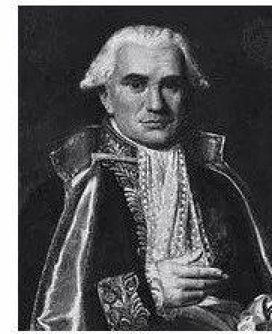
课程内容

应用示例

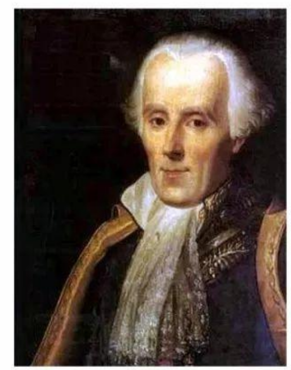
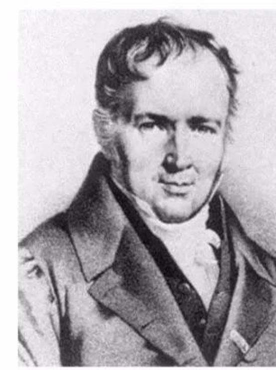


数字处理的发展

- 理论分析
  - 牛顿 1643~1727
  - 拉格朗日 1736~1813
  - 拉普拉斯 1749~1827
  - 傅里叶 1768~1830
- 工程实现（运算量）
  - 库利-图基（计算数学）
  - 桑德-图基

拉格朗日（左） | 蒙日（右）

拉普拉斯（左） | 泊松（右）

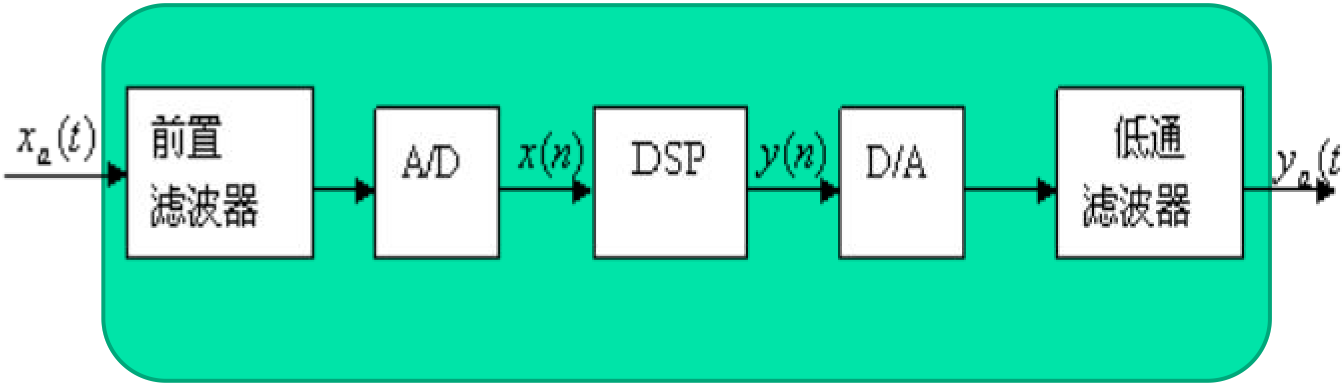
课　程　脉　络

背景知识

课程内容

应用示例

信号滤波，谱分析



工程用连续信号的离散处理结构

基础理论

- 第一章　离散信号与系统
  - 基本的离散时间序列
  - 离散时间系统概念、性质
  - 差分方程与离散时间系统
- 第二章　离散系统变换域分析
  - DTFT、Z变换
  - 系统行数和频率响应
  - LTI系统幅相特性分析
- 第三章　连续信号的离散处理
  - 信号采样和重构
  - 多率转换技术
  - 实际处理中需要注意的问题

工程设计

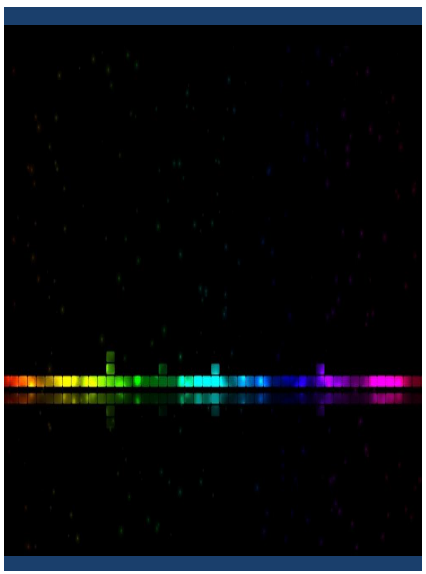
- 第四章　离散傅立叶变换及快速算法
  - 离散傅立叶变换
  - 快速算法（FFT）
  - DFT用于系统实现及信号分析
- 第五章　数字滤波器设计
  - 系统结构
  - IIR数字滤波器设计（时域和频域）
  - FIR数字滤波器设计（时域和频域）

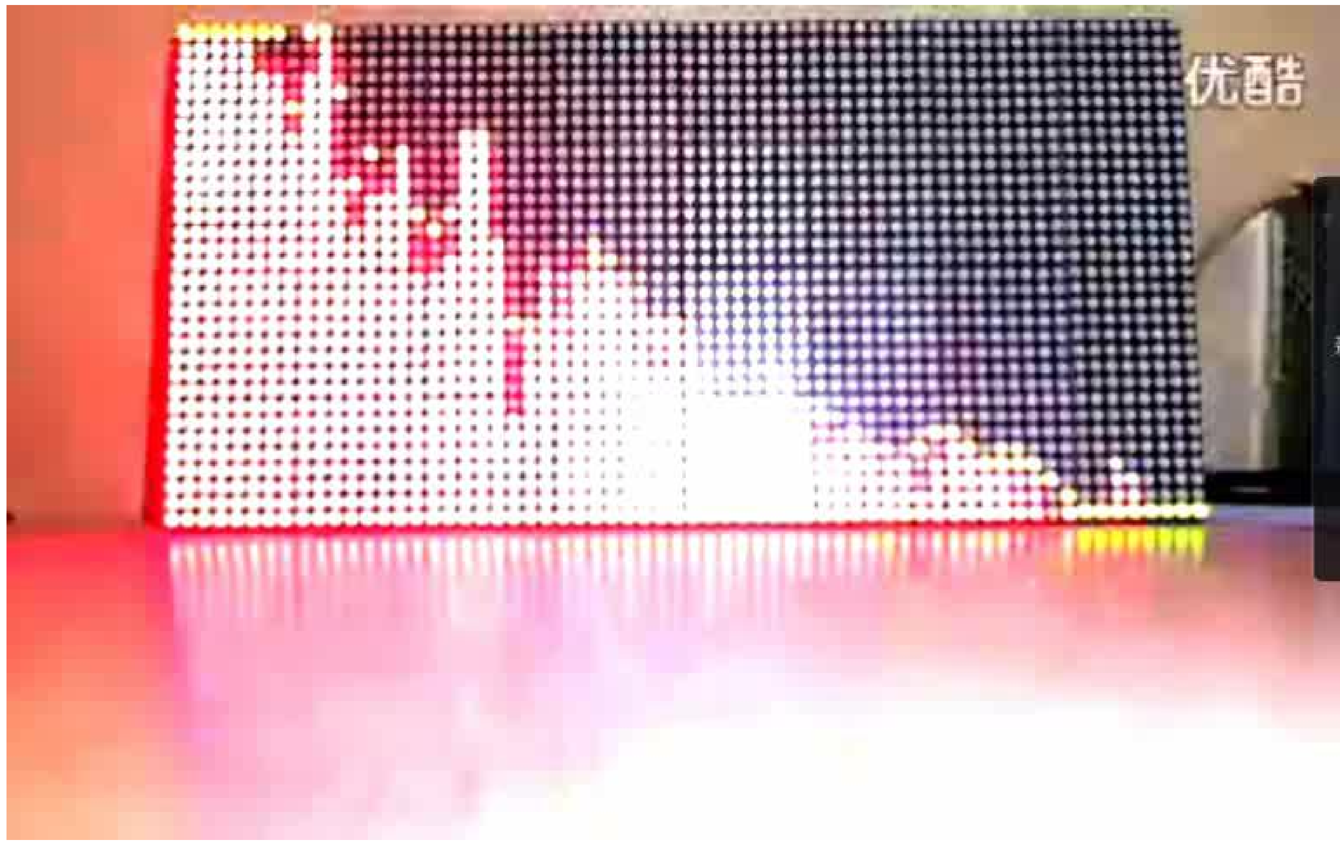
课　程　脉　络

背景知识

课程内容

应用示例



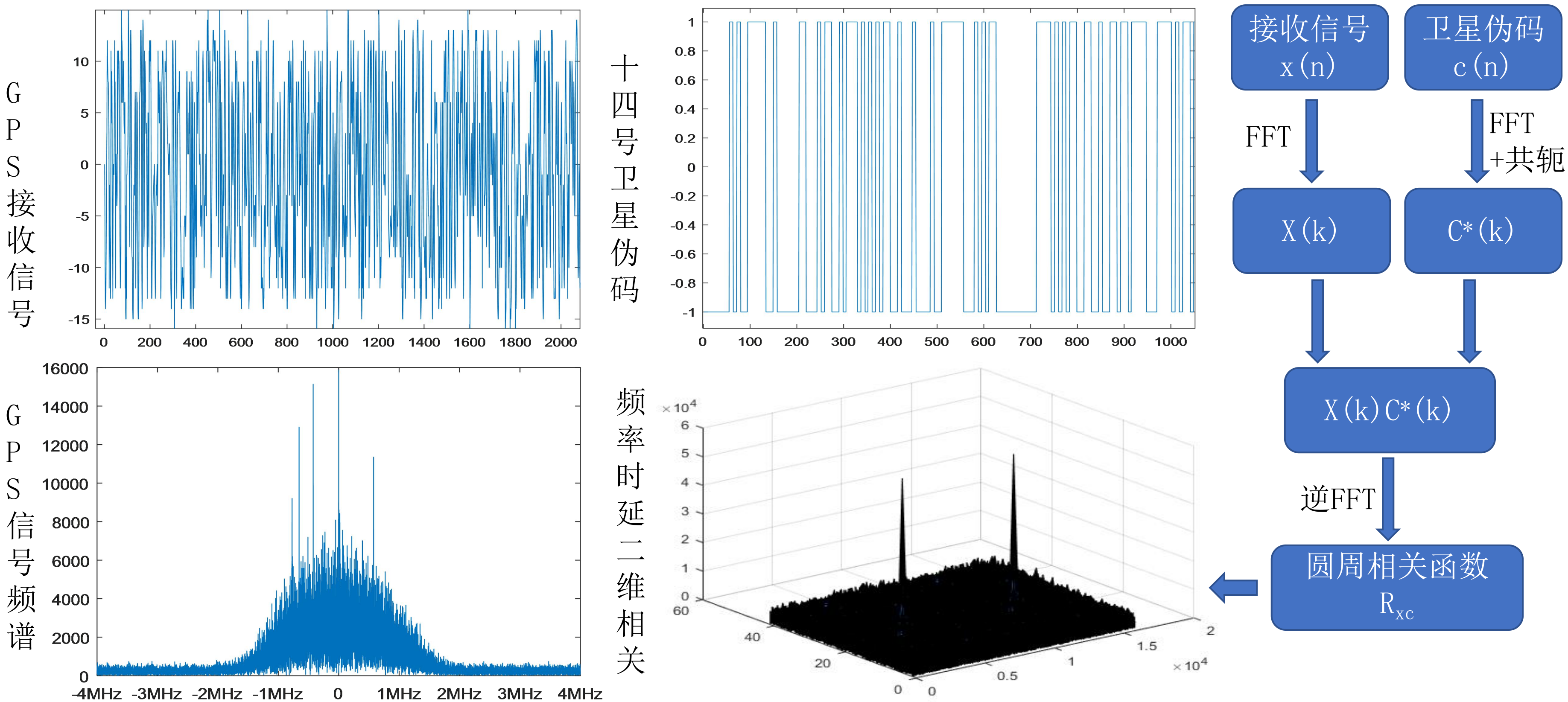


示例

- Signal Processing
  - Discrete-time Filter Objects
  - Graphical User Interfaces (GUIs)
  - Designing Filters
  - Filtering
    - Filtering a Signal
    - Savitzky-Golay Filtering
    - Second-Order Sections
  - Transforms
  - Spectral Analysis
    - Power Spectral Density
    - Spectral Analysis of DTMF
    - Spectrogram Demo

- DSP
  - Adaptive Processing
    - Equalization
    - Acoustic noise cancelation
    - Noise canceller (LMS)
    - Noise canceller (RLS)
    - Linear prediction
    - Time-delay estimation
    - Tracking filter
  - Aerospace
  - Audio processing
    - Acoustic noise cancelation
    - Dynamic range compression
    - Flanging
    - Reverberation
    - Stereo expansion

FFT用于GPS卫星信号捕获



谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 2

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 一 章
离散时间信号与系统

Contents

一 六大信号

二 九种运算

三 五类系统

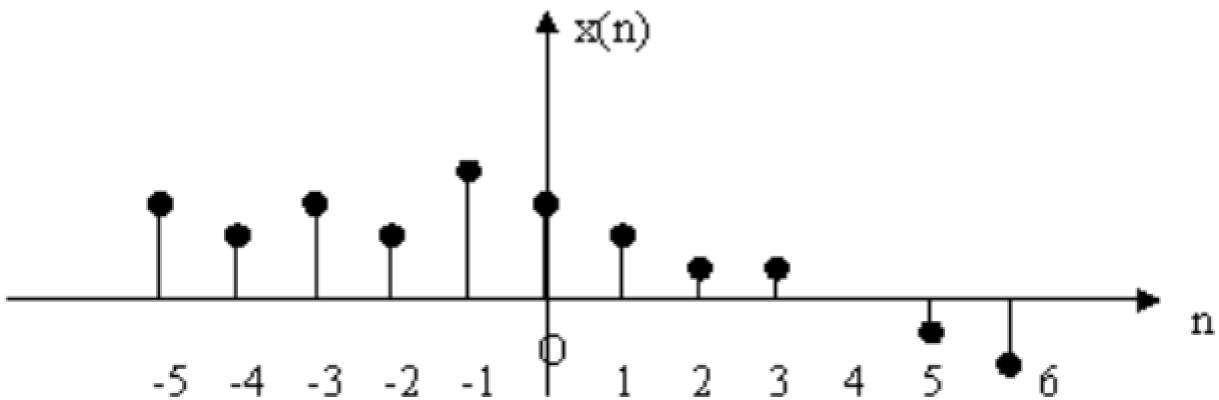
离散时间信号
离散时间系统
线性时不变系统
线性常系数差分方程

离散时间信号（序列）

- 定义？描述方式？
- 基本序列有哪些？
- 序列的运算形式？

1.1.1 离散时间信号定义

- 仅在离散时刻点上有意义的信号或不连续瞬时刻给出函数值的函数
- 通常用集合来表示，记作：
  - x={x(n)} ← {x_a(nT)} ($-\infty < n < +\infty$)
  - 图形表达：



1.1.2 基本序列

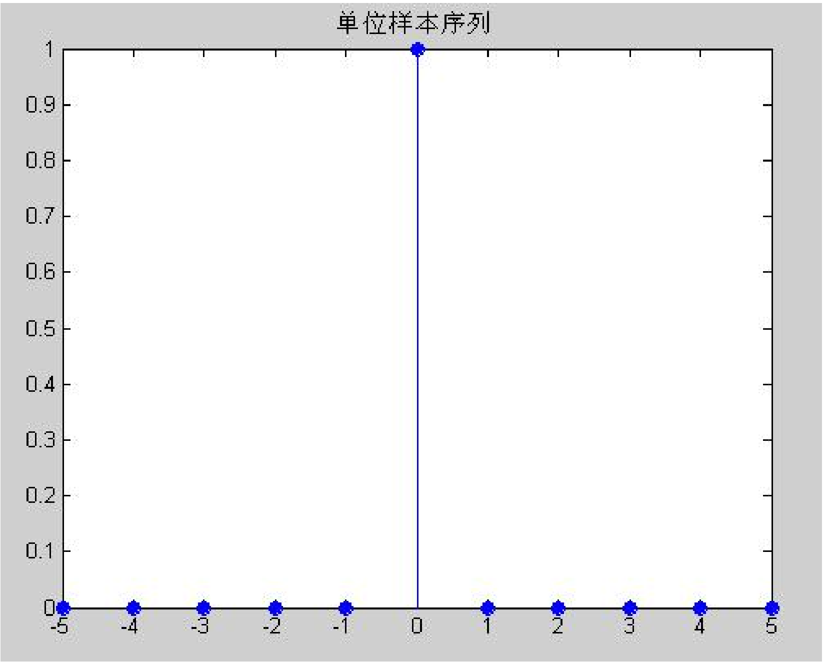
- **1、单位冲激（抽样、样本）序列**

$$\delta(n-n0)=\begin{cases}0 & n\neq n0\\ 1 & n=n0\end{cases}$$

$$function[x,n]=impseq(n_0,n_1,n_2)$$

$$n=[n1:n2];$$

$$x=[(n-n0)==0];$$



2、单位阶跃序列

$$u(n-n0)=\begin{cases}0 & n<n0\\ 1 & n\ge n0\end{cases}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

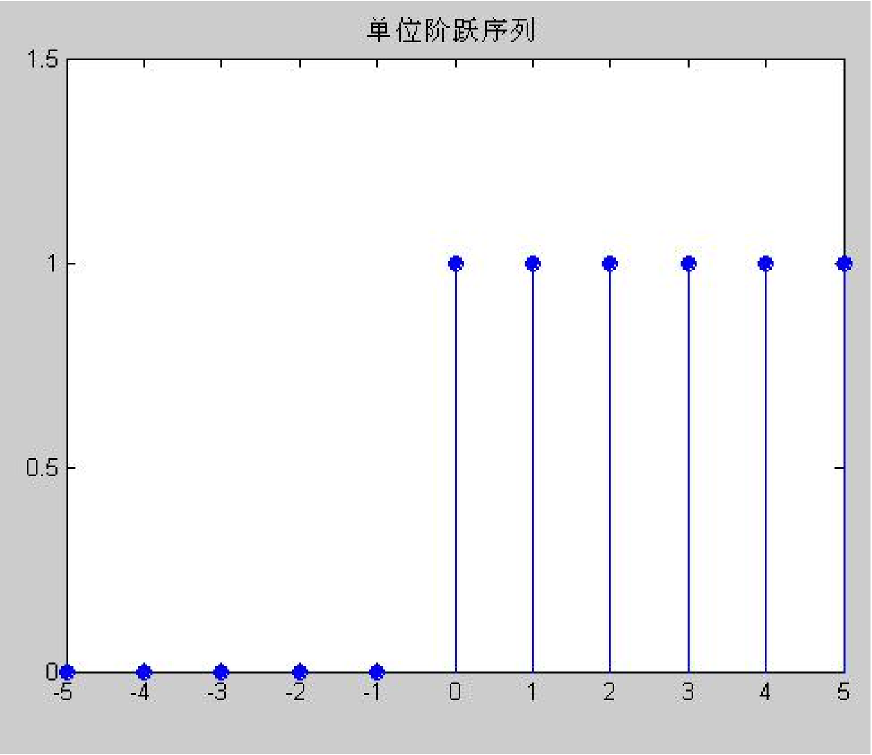
$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(k)u(n-k)=\delta(n)*u(n)$$

$function[x,n]=stepseq(n_0,n_1,n_2)$

$n=[n1:n2];$

$x=[(n-n0)>=0];$



基本序列

- **3、矩形窗序列**

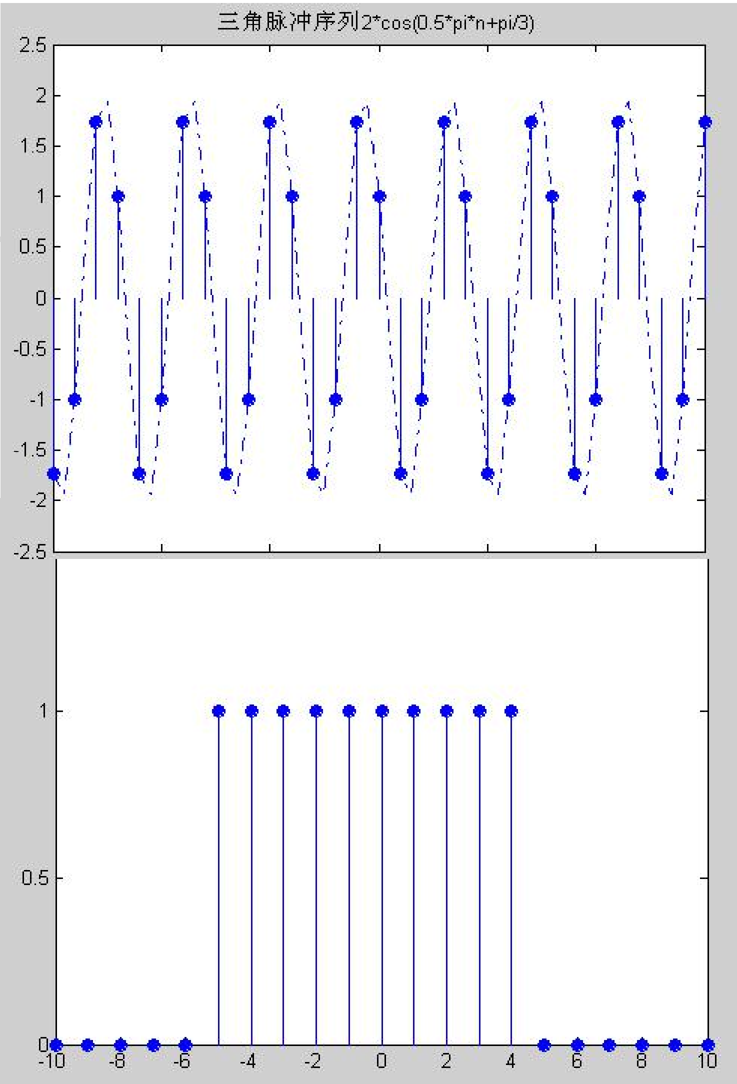
$$R_N(n) = G_N(n) = \begin{cases} 0 & \text{其它} \\ 1 & 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

$$R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) = u(n) - u(n-N)$$

- **4、正弦（三角）序列**

$$x(n) = A\cos(\omega_0 * n + \theta_0)$$

- **5、指数序列** $x(n) = A\alpha^n$
- **6、周期序列** $x(n) = x(n+N)$



关于三角序列的频率和周期

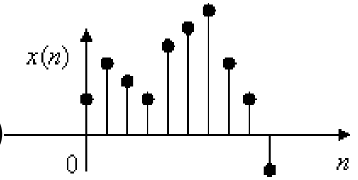
$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\omega_0}\text{为整数时，} & N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\text{；}\\ \dfrac{2\pi}{\omega_0}\text{为有理数时，} & N>\dfrac{2\pi}{\omega_0},N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}*k=\dfrac{Q}{P}*k=Q\\ \dfrac{2\pi}{\omega_0}\text{为无理数时，} & N\text{不存在，为非周期序列}\end{cases}$$

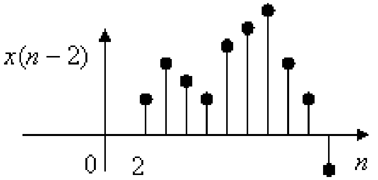
- 无论N是否存在，ω_0 皆称为序列的频率。

1.1.3 序列基本运算

- 1、移位

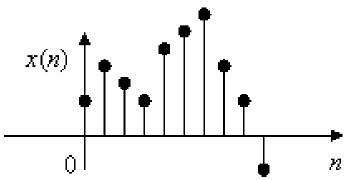
$$y(n)=x(n-m)$$

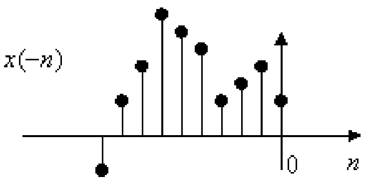




- 2、翻褶

$$y(n)=x(-n)$$





- 3、和、差

$$y(n)=x_1(n)\pm x_2(n)$$

- 4、积、商

$$y(n)=x_1(n)\times\div x_2(n)$$

序列基本运算

- **5、累加** $S(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$
- **6、差分**
  - 前向差分：$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$
  - 后向差分：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$
- **7、卷积和**

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\cdot h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(n-m)\cdot h(m)$$

例题

- 已知下面两个序列：

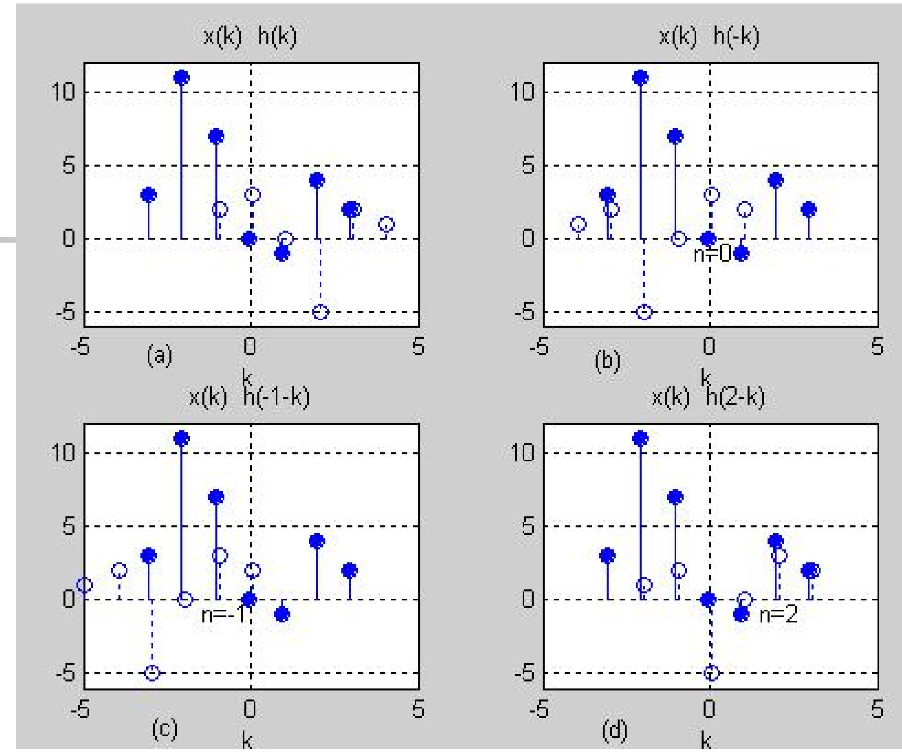
$$x(n)=[3,11,7,\underset{\uparrow}{0},-1,4,2];\ -3\le n\le 3$$

$$h(n)=[2,\underset{\uparrow}{3},0,-5,2,1];-1\le n\le 4$$

- 试求卷积y(n)=x(n)*h(n)。

方法一、定义法

$$\sum_k x(k)h(-1-k)$$
$$=3\times(-5)+11\times 0+7\times 3+0\times 2$$
$$=6=y(-1)$$



$$y(n)=\{6,31,47,6,-\underset{\uparrow}{5}1,-5,41,18,-22,-3,8,2\}$$

- 注意：*y(n)*的起始点（第一个非零样本）是由n=-3+(-1)=-4给出的，而最后一点（最后一个非零样本）是由n=3+4=7给出的。

$$x(n) = [3, 11, 7, \underset{\uparrow}{0}, -1, 4, 2];\ -3 \le n \le 3$$

$$h(n) = [2, \underset{\uparrow}{3}, 0, -5, 2, 1];\ -1 \le n \le 4$$

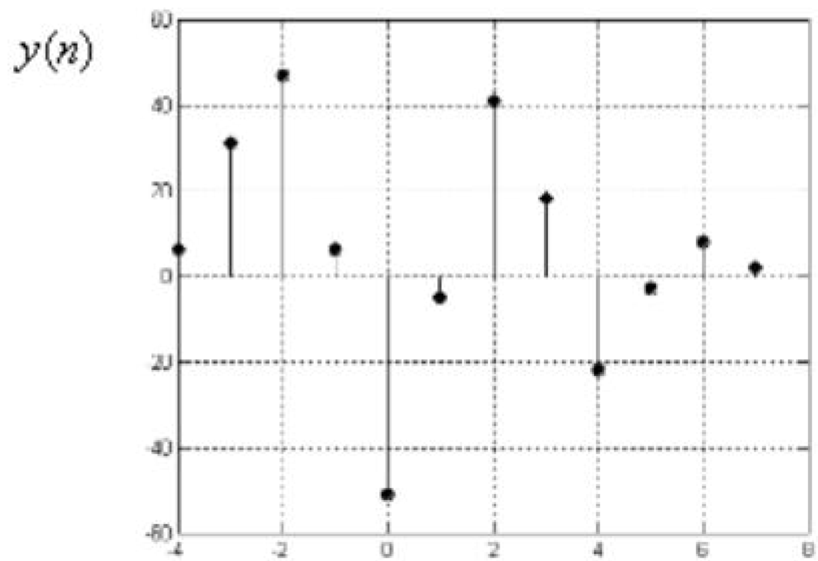
方法二：对位相乘求和法

													h(n)
x(n):						3	11	7	0	-1	4	2	
						3	11	7	0	-1	4	2	1
					6	22	14	0	-2	8	4		2
				15	-55	-35	0	5	-20	-10			-5
			0	0	0	0	0	0	0				0
		9	33	21	0	-3	12	6					3
	6	22	14	0	-2	8	4						2
y(n):	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2	

$y(n) = \{6, 31, 47, 6, -\underset{\uparrow}{5}1, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\}$（请思考 n=0 的定时信息如何确定？）

方法三、利用 conv_m 函数

```
x = [3, 11, 7, 0, -1, 4, 2];
nx = [-3: 3];
h = [2, 3, 0, -5, 2, 1]; nh = [-1: 4];
[y,ny] = conv_m(x,nx,h,nh)
stem(ny,y,'filled'); grid
```



结果:

y =	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2
ny =	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

8、序列相关

- 相关是对两个序列相似程度的一种度量，在信号处理中应用广泛。
- 已知两个有限能量的实值序列*x(n)*和*y(n)*,其互相关是一个序列：

$$R_{xy}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot y(n-\tau)=x(n)*y(-n)$$

$$R_{xx}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot x(n-\tau)=x(n)*x(-n)$$

例题

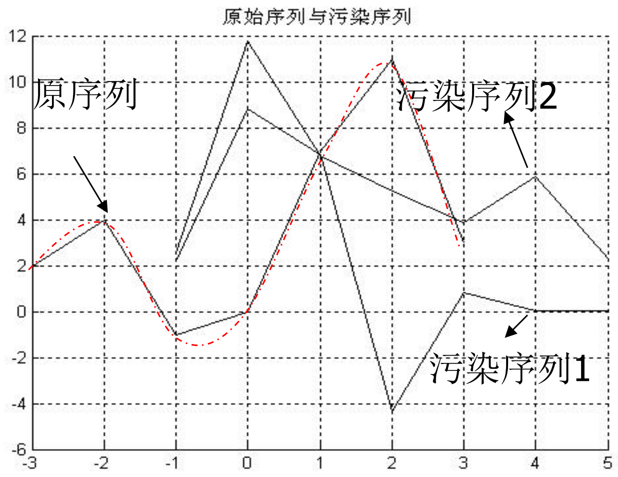
- 设x(n)是原序列，y(n)是受到噪声污损并移位的序列：

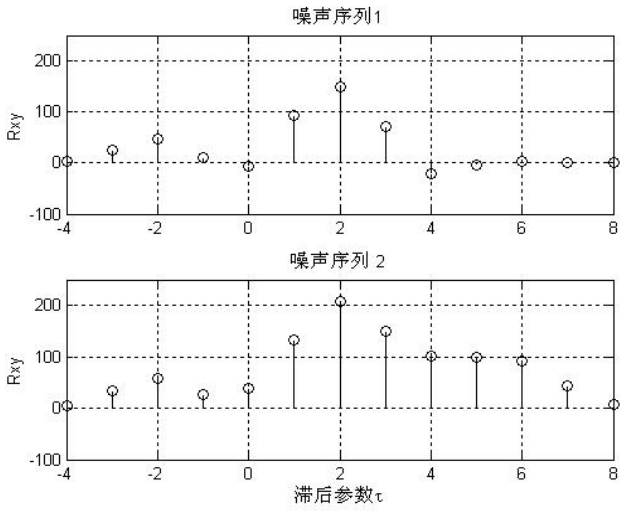
$$x(n) = [3,11,7,\underset{\uparrow}{0},-1,4,2]$$

$$y(n) = x(n-2) + \omega(n)$$

  - w(n)是均值为0，方差为1的高斯随机序列。
  - 计算y(n)和x(n)之间的互相关。

雷达信号中目标的识别与锁定





9、序列能量和功率

- 能量：
$$E=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)x^{*}(n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$
  - 能量有限的信号称为能量信号
- 功率：
$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{+N}\left|x(n)\right|^{2}$$
  - 能量无限，但功率有限的信号称为功率信号

习题（第二版）

- 课后作业1：
- 2.1，2.2，2.3，
- 2.12，2.21，2.22，2.55

复习题

- 1、写出y(n)=x(n)*h(n)卷积和数学表达
- 2、假设x(n)区间是（i，j），h(n)区间是（p，q)，给出y(n)的区间；
- 3、假设x(n)=h(n)=u(n)-u(n-5)，求y(n)

离散时间信号
离散时间系统
线性时不变系统
线性常系数差分方程

离 散 时 间 系 统

- 系统定义？
- 描述方式？
- 基本系统有哪些？

1.2 离散时间系统

- 数学上，离散时间系统可以定义为一种变换或算子
  - 把输入序列按照某种规则映射为输出序列

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

  - 注：DFT也可看作一种系统

1、无（有）记忆系统

- 输出y[n]只决定于同一时刻的输入x[n]，与其它时刻的输入序列值无关，则称该系统为无记忆系统。
  - 如：纯阻性网络、组合电路等。。。。

- 输出y[n]不仅与同一时刻的输入x[n]有关，而且与其他时刻的输入序列值有关，则称该系统为有记忆系统。
  - 如容（感）抗网络，时序电路，差分系统、平均系统等。

$$y(n)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x(n-k)$$

2、（非）线性系统

- 一个离散时间系统，如果同时满足可加性和齐次性

$$T\{x_1(n)+x_2(n)\}=T\{x_1(n)\}+T\{x_2(n)\}$$

$$T\{k*x(n)\}=k*T\{x(n)\}$$

$$T\{\sum_i k_i*x_i(n)\}=\sum_i k_i*T\{x_i(n)\}$$

$$y(n)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x(n-k)$$

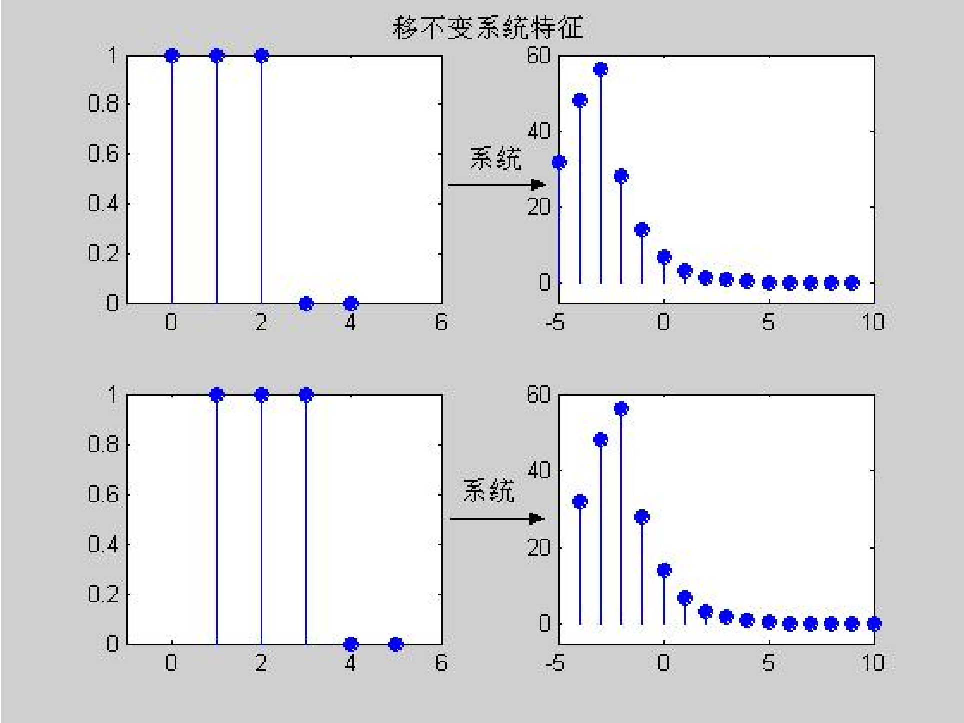
3、时（不）变系统

- 如果输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟，若：
- $$T\{x(n)\} = y(n)$$
- 则有：

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0)$$

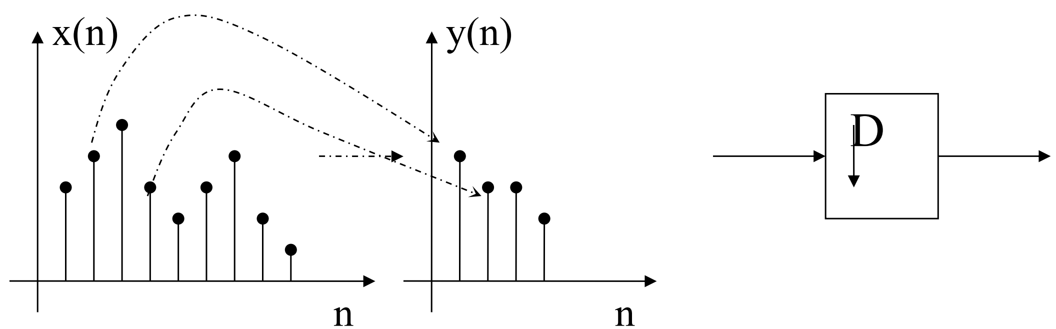
- 称为时不变系统。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$



例题

- 由下列关系定义的系统称为压缩器
- $y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty$ M是一个正整数。



- 证明压缩器系统是时变的

$$T[x(n-m)] = x(Mn-m) \neq y(n-m) = x[M(n-m)]$$

4、（非）因果系统

- 输出序列在n_0时刻的值仅仅取决于$n<=n_0$时刻的输入序列，则该系统称为因果系统。
  - 所有的实时可实现系统，也就是自然界中真实存在的系统皆为因果系统。
  - 非因果系统通常是在理论上探讨或滞后实现的。
    - 如前向差分系统即为非因果系统。

5、（非）稳定系统

- 如果对任何一个有界的输入序列，系统的输出序列都是有界的，则称该系统为BIBO意义下的稳定系统。即若：
- $|x(n)| \le B_x < +\infty$ Bx为一个确定的有限正数
- 则有：
- $|y(n)| \le B_y < +\infty$ By为一个确定的有限正数

  - 现实世界中的大部分系统均为稳定系统
  - 非稳定需要系统本身有极大的能量存储，从这个意义上说，所有的无源系统均为稳定系统，如电话，整流器等。

例题

- 判断系统： $T(x[n]) = g[n]x[n]$

  $$T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$$

- 是否是
- （1）线性的？
- （2）时不变？

$$T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])$$
$$= g[n](\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])$$
$$= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

$$T(x[n-n_0]) = g[n]\cdot x[n-n_0] \neq y[n-n_0] = g[n-n_0]\cdot x[n-n_0]$$

$$T(x[n-m]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k-m] \overset{k'=k-m}{=} \sum_{k'=n_0-m}^{n-m} x[k'] \neq \sum_{k=n_0}^{n-m} x[k]$$

若n0为负无穷，结果为何？

例题

- 有一个系统的输入为x[n],输出为y[n],且满足下列差分方程：

$$y[n]=ny[n-1]+x[n]$$

- 该系统是因果的且满足初始松弛条件，即若$n<n_0$，$x[n]=0$，则$y[n]=0$，$n<n_0$。
- （a）若$x(n)=\delta(n)$，求y[n]（对全部的n）。
- （b）系统是线性的吗？试证明之。
- （c）系统是时不变的吗？试证明之。

系统单位冲激响应

- 解： (a)

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

  - 由于： $n < 0$ $\quad y[n] = 0 \quad x(n) = \delta(n)$

$$y[0] = \delta[0] = 1 \qquad y[n] = \begin{cases} 0 & n \le 1 \\ 1 & n = 0 \\ n! & n \ge 1 \end{cases}$$

$$y[n]=ny[n-1]+x[n]$$

- (b)因为 $y'[n]=\underline{T(\alpha x_1[n]+\beta x_2[n])=ny'[n-1]+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]}$

$$\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]=n(\alpha y_1[n-1]+\beta y_2[n-1])+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

$$y[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$$

$$y[n]=\underline{ny[n-1]+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]}$$

- 所以 $y'[n]=y[n]$ 即：$T(\alpha x_1[n]+\beta x_2[n])=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$

- (c)系统输出的时移： $y[n-n_0]=(n-n_0)y[n-n_0-1]+x[n-n_0]$

系统输入延时后得到的输出：

$$y'(n)=T(x[n-n_0])$$

$$y'(n)=ny'[n-1]+x[n-n_0]$$

所以：

$$y'(n)\neq y[n-n0]$$

线 性 时 不 变 系 统

- 重点研究对象
- 为何典型？
- 基本性质？

1.3 线性时不变系统（Linear Time Invariable System）

- 如果一个系统既是线性系统，又是时不变系统
- 假设线性时不变系统的单位冲击响应为：$h(n)=T\{\delta(n)\}$

$$y(n)=T\{x(n)\}=T\{\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)\}$$

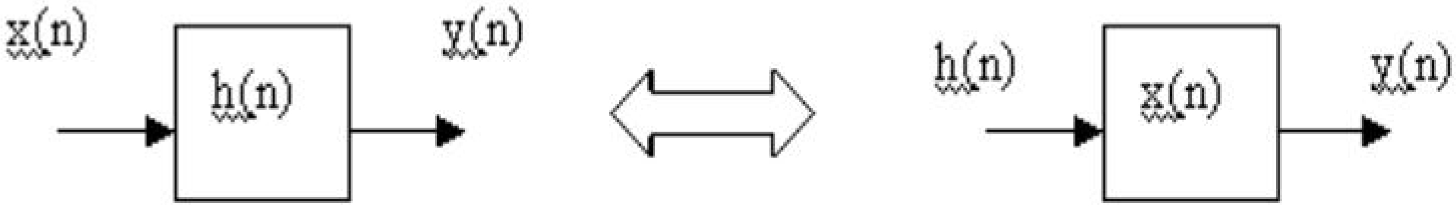
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)T\{\delta(n-k)\}(\text{叠加性})$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)(\text{时不变性})$$

- 质变：

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

性质一： 交换律

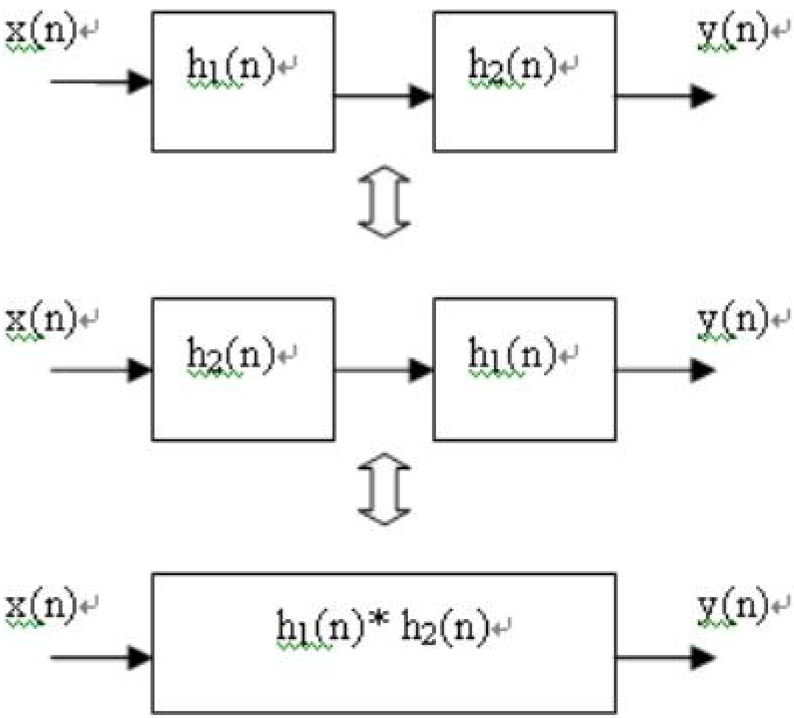


$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$\Delta y(n) = \Delta x(n) * h(n) = \Delta h(n) * x(n)$$

$$y(n-m) = x(n-m) * h(n) = h(n-m) * x(n)$$

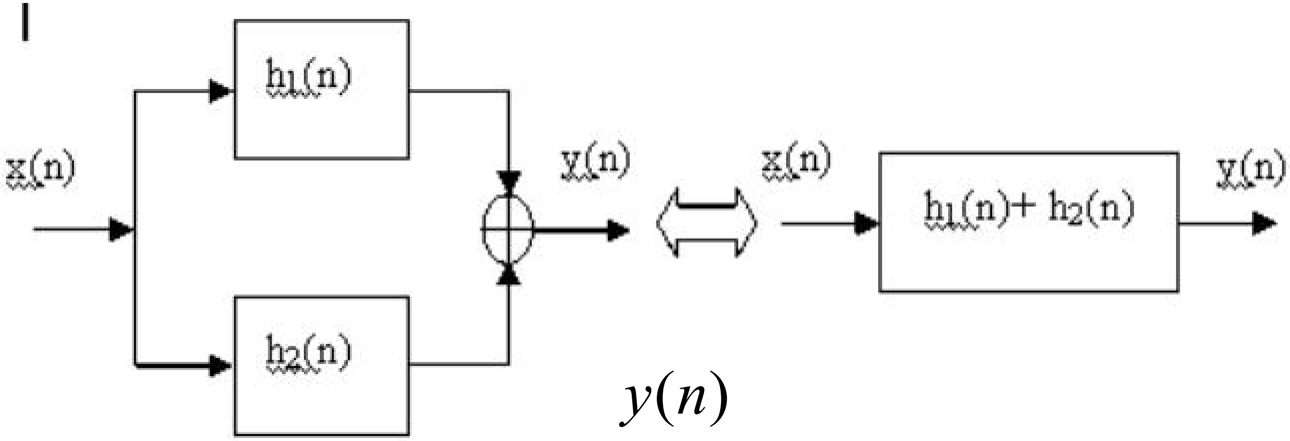
性质二：结合律



$$
\begin{aligned}
& y(n) \\
& = x(n) * h_1(n) * h_2(n) \\
& = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\
& = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\
& = [x(n) * h_2(n)] * h_1(n)
\end{aligned}
$$

$$y(n) * u(n) = [x(n) * u(n)] * h(n) = [h(n) * u(n)] * x(n)$$

性质三：分配律



$$\begin{aligned} &y(n) \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \end{aligned}$$

定理一、线性时不变系统为因果系统的充要条件是：

$$h(n)=h(n)u(n)$$

- 充分性：
- 若n<0时，*h(n)*=0，则有

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)h(n-m) \end{aligned}$$

- *y(n)*仅与m<n时的*x(m)*有关，系统因果

定理一、线性时不变系统为因果系统充要条件是：

$$h(n)=h(n)u(n)$$

- 必要性：
- 已知系统为因果系统，假设n<0时，*h(n)!=0*，则有：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)h(n-m)+\sum_{m=n+1}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 所假设的条件下，第二个求和式中至少有一项不为零，即*y(n)*至少和m>n中的某一个*x(m)*有关，不符合因果系统的定义，所以假设不成立

定理二：线性时不变系统为稳定系统充要条件是：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

- 充分性：
- 对于任意有界输入序列，即对所有时刻n，皆有x(n)<N ，从而得到:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right|$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = NM < +\infty$$

- 对于输入有界序列，输出必然有界

定理二：线性时不变系统为稳定系统充要条件是：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

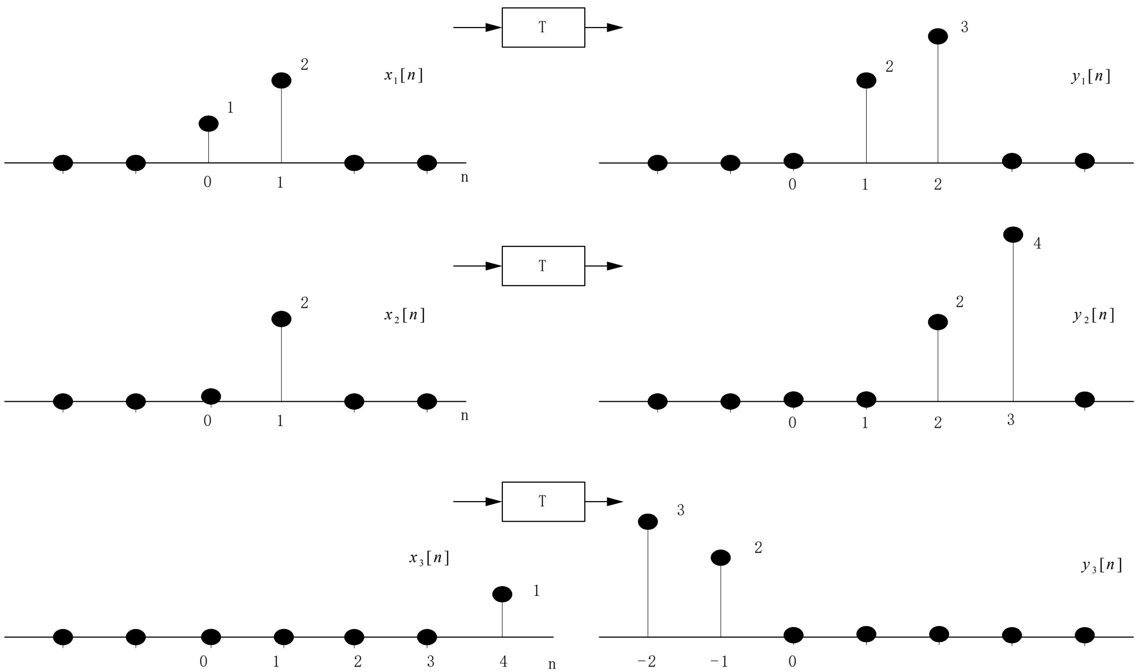
- 必要性：
- 已知系统稳定，假设： $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$
- 找到一个有界的输入： $x(n) = sign(h(-n))$
- 此时：

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = \infty$$

- 不符合BIBO稳定的条件，假设不成立

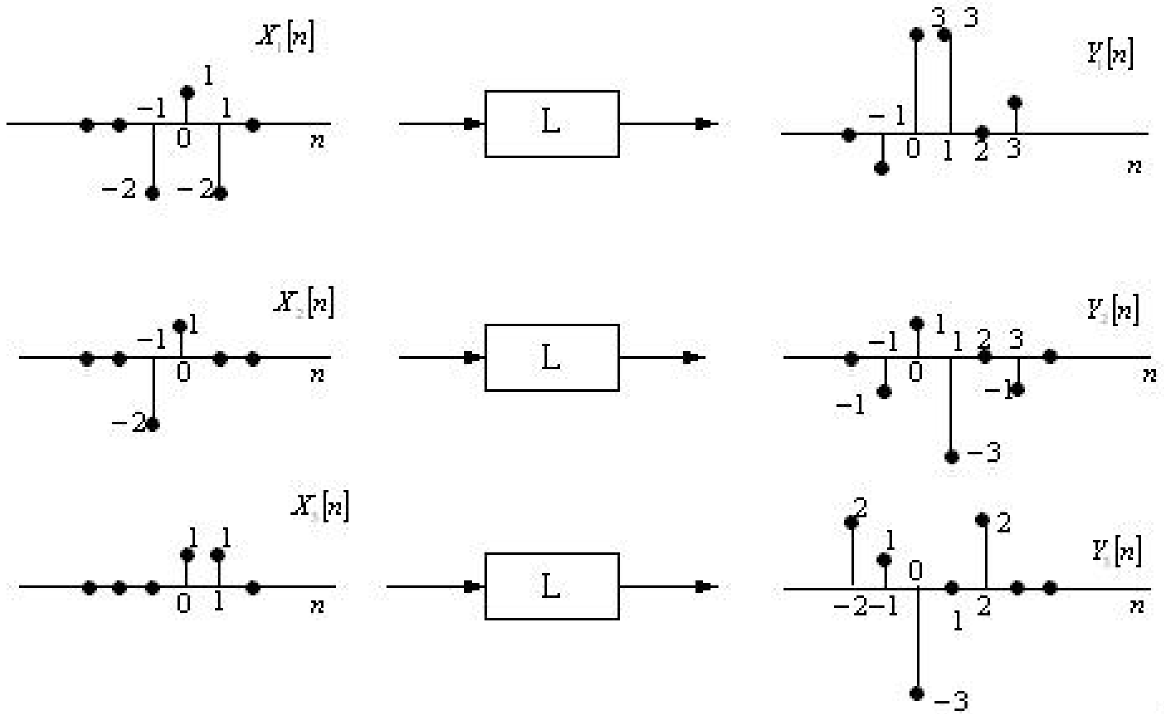
例题

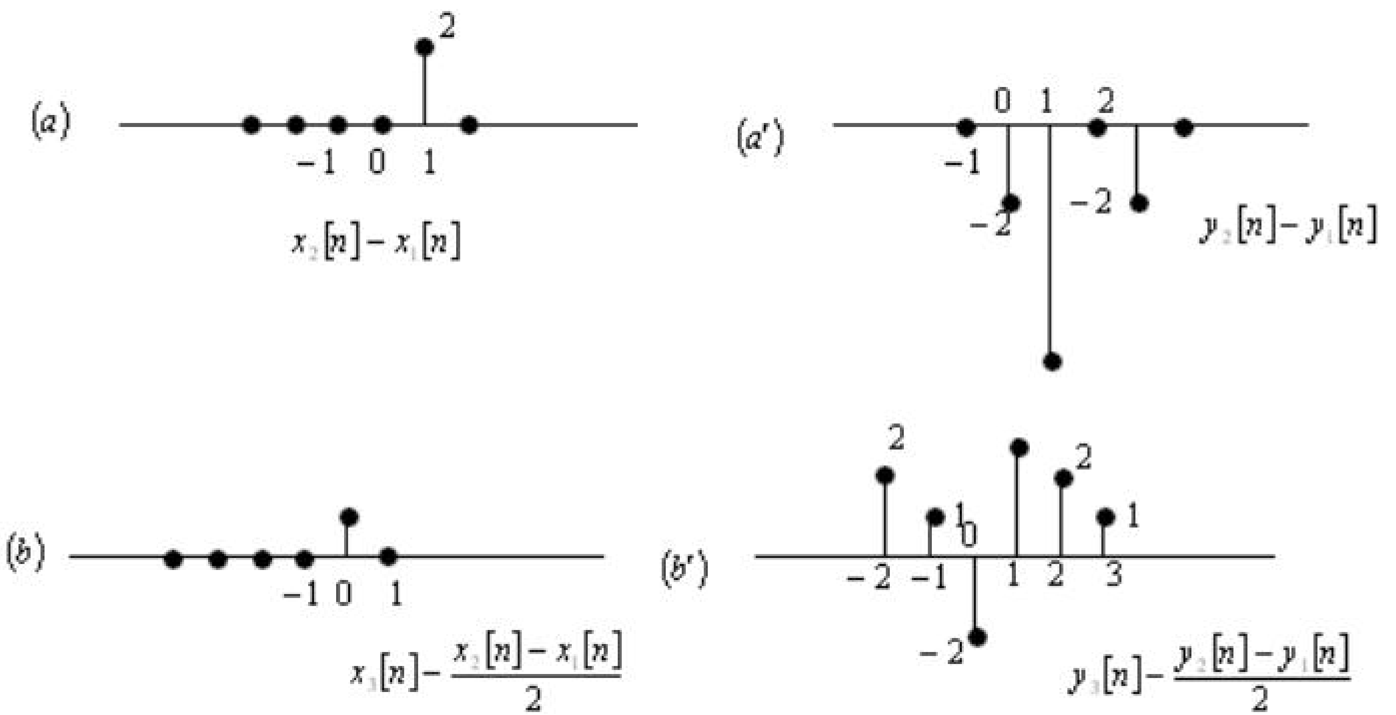
- 图中T是时不变系统，输入响应如图
- （a）确定系统是否为线性。
- （b）系统的单位冲激响应是什么？
- （c）对任意输入，输出能唯一确定吗？



例题

L为线性系统，输入输出对应如图所示，问：
（a）系统L是否时不变的？
（b）系统的单位冲激响应是什么？




(a)
2
−1 0 1
x₂[n]− x₁[n]
(a′)
0 1 2
−1
−2
−2
y₂[n]− y₁[n]
(b)
−1 0 1
x₃[n]− (x₂[n]− x₁[n])/2
(b′)
2
1
0
2
1
−2 −1 1 2 3
−2
y₃[n]− (y₂[n]− y₁[n])/2

1.4线性常系数差分方程

- 离散时间的线性时不变系统通常由常系数线性差分方程来表示：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

-
  - 差分方程的阶数等于输出序列y(n)的最高值和最低值之差，如上述差分方程的阶数为N。
  - 所谓线性是指在差分方程中只含有输入、输出序列的一次项，而不含有高次项及交叉乘积项。否则，为非线性方程。

求解途径

- 求解常系数线性差分方程通常有两种途径
- 离散时域解法：
  - 迭代法，此种方法只能给出比较形象的的不完整数值解，不容易得到闭合形式的数学描述公式。
  - 时域经典解法，即求齐次解和特解，再由边界系数确定齐次解与特解的待定系数。
  - 卷积和法，主要用于求解系统的零状态解。
- 变换域方法：
  - 与连续系统的拉普拉斯变换法类似，采用Z变换方法来求解差分方程，在实际应用中较常用。

LCCDE与LTI的关系

- 例：常系数线性差分方程为

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

  - (1) 若系统为松弛状态，求系统的单位冲激响应；
  - (2) 若系统的初始状态为: $y(0)=1$ ，试分析系统是否为线性时不变系统。

解：

- (1) 零状态时系统的单位冲激响应

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

- 依次
- 迭代
- 求得：

$$h(0)=a*h(-1)+1=0+1=1$$
$$h(1)=a*h(0)+0=a+0=a$$
$$h(2)=a*h(1)+0=a^2+0=a^2$$

$$h(n)=a*h(n-1)+0=a^n+0=a^n$$

- 由数学归纳法得到 $h(n)=\begin{cases}a^n & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

(2)y(0)=1时

$$\begin{cases} x_1(n) = \delta(n) \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \qquad y_1(n) = a^n * u(n)$$

$$\begin{cases} x_2(n) = \delta(n-1) \\ y_2(0) = 1 \end{cases} \qquad y_2(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$x_2(n) = x_1(n-1) \qquad y_2(n) \neq y_1(n-1)$$ 时变

$$\begin{cases} x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_3(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$y_1(n) + y_2(n) = 2a^n * u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

$$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n)$$ 非线性

LCCDE与LTI的关系

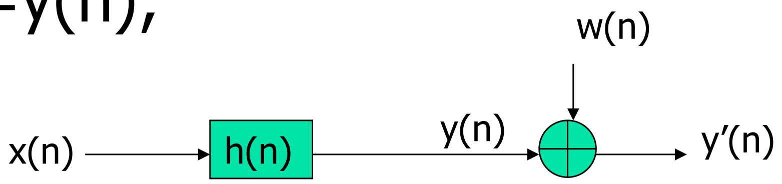
- 对上面的例子而言
  - 当边界条件为y(0)=1时，系统是时变的；
  - 当边界条件y(0)=0时，系统是线性但不是时不变系统；
  - 当边界条件为y(-1)=0时，系统才是线性时不变系统。
- 常系数线性差分方程，并不一定代表线性系统，也不一定代表时不变系统。
- 边界条件决定了常系数线性差分方程和线性时不变系统之间的对应关系。只有当系统为零状态，才相当于一个线性时不变系统。

习题（第二版）

- 课后作业2：
- 2.15，2.20，2.25，
- 2.27，2.42，2.56

思考题（反卷积用于系统辨识）

- x(n)*h(n)=y(n);



- 已知x(n),y(n)条件下求h(n)

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 3

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

第 二 章

Contents

离散时间系统变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

离散时间傅里叶变换（DTFT）

- 定义？涵义？
- 基本序列的DTFT？
- DTFT的主要性质定理？

学习方法：

结论比过程重要！！！

一、DTFT及逆变换定义

- 序列的傅立叶变换（DTFT）用来表示离散时间非周期信号及其傅立叶频谱之间的关系。

- 正变换：$DTFT\,[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

- 反变换：$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

  - 由于三角函数的周期性，反变换积分区间可以为任何一个周期区间。

二、DTFT反变换推导

$$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(k-n) = x(n)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = Sa[\pi(n-k)] = \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

DTFT反变换隐藏的涵义:信号分解

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{[X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega]}{2\pi}e^{jk\Delta\omega n}$$

三、典型序列的傅立叶变换：

- （一）单位冲激序列

$$DTFT\ [\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = x(0)e^{-j\omega 0} = 1$$

- （二）单位常数序列

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi) \Longrightarrow$$

$$x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$
$$= 1$$

- （三）单位阶跃序列

$$DTFT\ [u(n)] = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

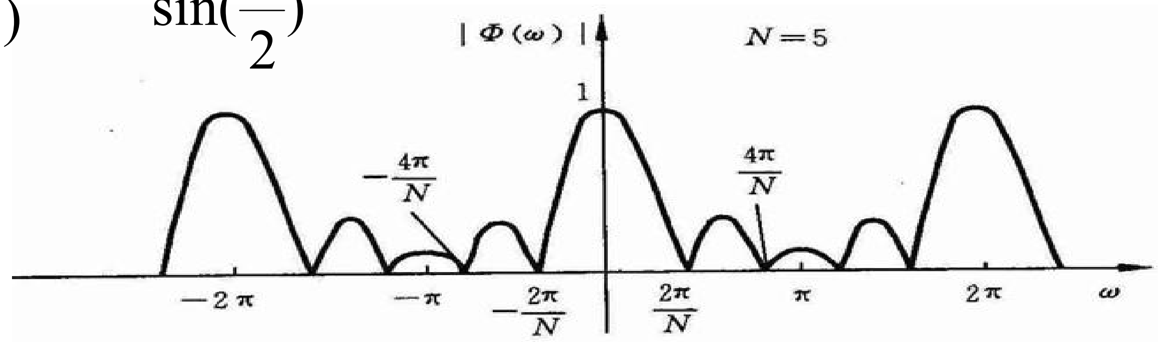
- （四）指数序列

$$DTFT\ [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

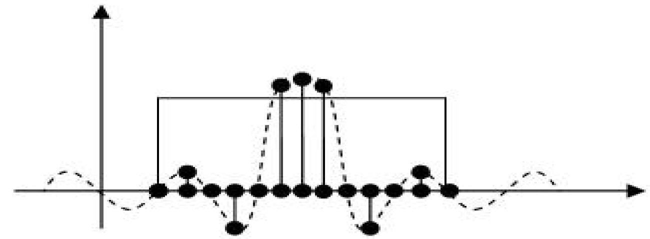
矩形窗的DTFT

$$DTFT[W(n)]=\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}(e^{j\frac{N\omega}{2}}-e^{-j\frac{N\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}=\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$



理想低通滤波器



- 截止频率为 w_c 的理想低通滤波器

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \le w \le w_c \\ 0 & w_c < w \le \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn}\, dw = \frac{w_c}{\pi}\frac{\sin\left[w_c(n-\alpha)\right]}{w_c(n-\alpha)}$$

四、序列傅立叶变换的主要性质

- 1、线性

$$ax(n)+bh(n)\longrightarrow aX(e^{jw})+bH(e^{jw})$$

- 2、时域平移->频域调制

$$x(n-m)\longrightarrow e^{-jwm}X(e^{jw})$$

- 3、时域调制->频域平移

$$e^{jnw_0}x(n)\longrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$DTFT[x(-n)]=X(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(n)]=X^*(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(-n)]=X^*(e^{j\omega})$$

- 4、时域翻褶 $x(-n)\longrightarrow X(e^{-jw})$

- 5、时域相乘

$$x(n)h(n) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

- 6、时域卷积

$$x(n)*h(n) \qquad X(e^{jw})H(e^{jw})$$

- 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})Y^*(e^{jw})dw$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 \, dw$$

8、DTFT的对称性

- 共轭对称序列： $x_e(n) = x_e^*(-n)$
- 共轭反对称序列： $x_o(n) = -x_o^*(-n)$
- 可以证明：

$$\mathrm{Re}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[x_e(-n)] \qquad \mathrm{Re}[x_o(n)] = -\mathrm{Re}[x_o(-n)]$$

$$\mathrm{Im}[x_e(n)] = -\mathrm{Im}[x_e(-n)] \qquad \mathrm{Im}[x_o(n)] = \mathrm{Im}[x_o(-n)]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |x_e(n)| = |x_e(-n)| \\ Arg\,[x_e(n)] = -Arg\,[x_e(-n)] \end{array}} \qquad \begin{array}{l} |x_o(n)| = |x_o(-n)| \\ Arg\,[x_o(n)] = \pi - Arg\,[x_o(-n)] \end{array}$$

共轭反对称序列的性质如何？？

序列共轭分量的傅立叶变换
与序列傅立叶变换的共轭分量

$$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$
$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$
$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

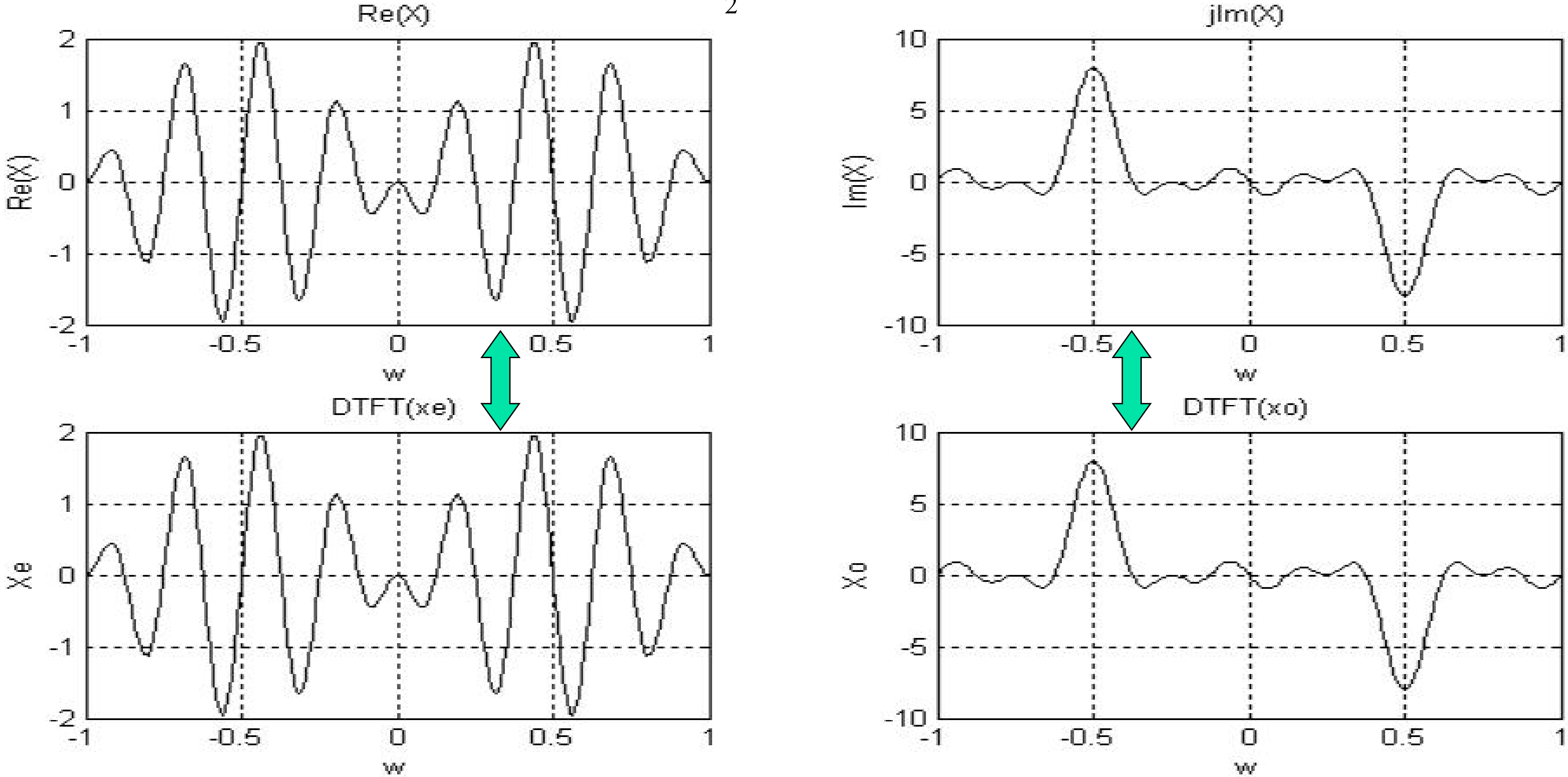
$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$
$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$
$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

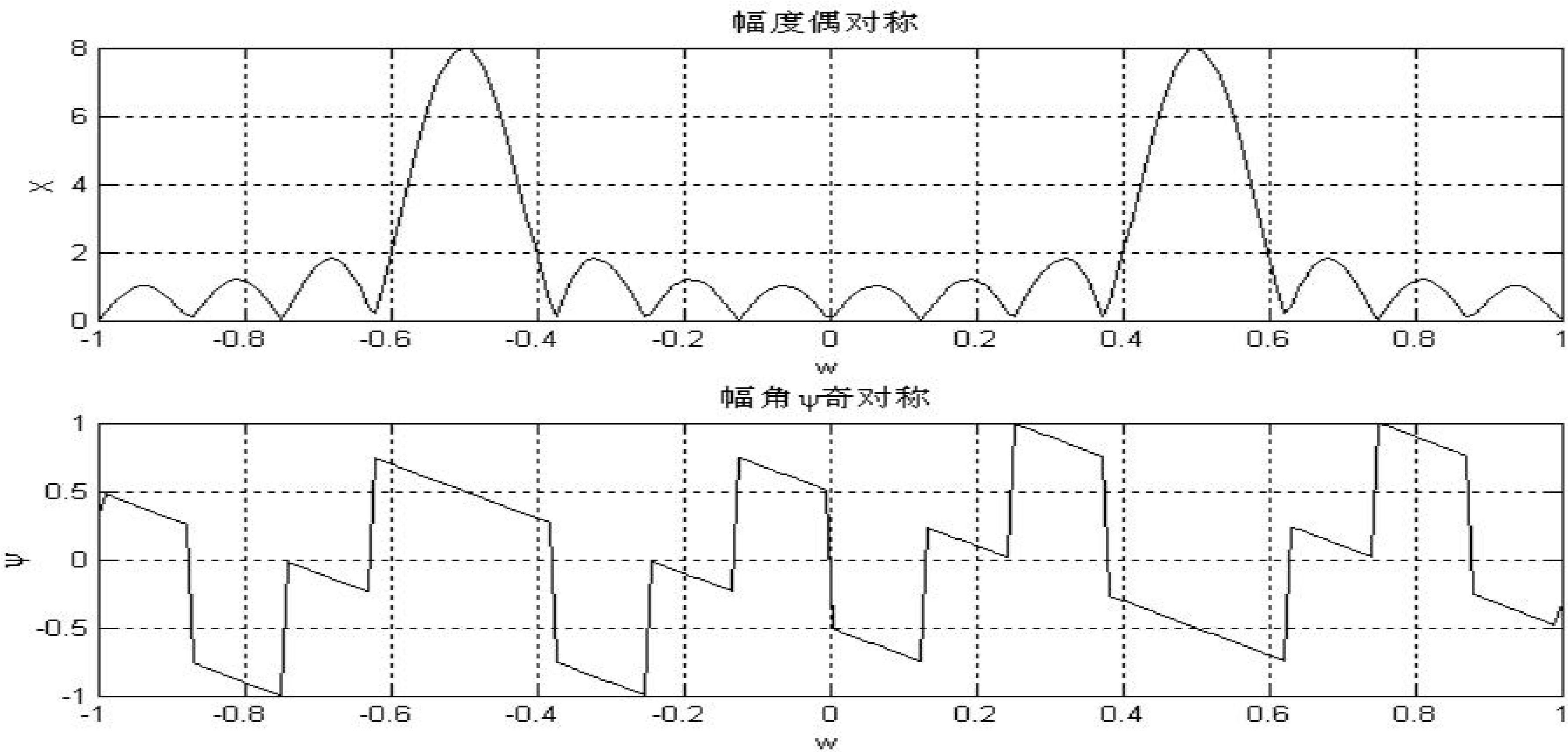
$$DTFT[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$
$$DTFT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$DTFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$
$$DTFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

$$x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad -5 \le n \le 10$$




幅度偶对称
8
6
4
2
0
X
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
w
幅角ψ奇对称
1
0.5
0
-0.5
-1
ψ
w

CTFT Vs DTFT

表 1 连续时间和离散时间的典型基本信号傅立叶变换对比

连续信号 $x(t)$	CTFT $X(j\omega)$	离散信号 $x(n)$	主周期内的 DTFT $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-\mathrm{i}\omega t_0}$	$\delta(n-r)$	$e^{-\mathrm{i}r\Omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi(\omega)$	$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-\mathrm{i}\Omega}}+\pi(\Omega)$
$e^{-\alpha t}u(t), \alpha>0$	$\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}$	$a^n u(n), \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\Omega}}$
$te^{-\alpha t}u(t), \alpha>0$	$\frac{1}{(a+\mathrm{i}\omega)^2}$	$na^n u(n), \quad \lvert a\rvert<1$	$\frac{ae^{-\mathrm{i}\Omega}}{(1-ae^{-\mathrm{i}\Omega})^2}=\frac{ae^{\mathrm{i}\Omega}}{(e^{\mathrm{i}\Omega}-a)^2}$
$\tau Sa(\frac{\tau t}{2})$	$2\pi G_\tau(\omega)$	$\frac{\Omega_c}{\pi}Sa(\Omega_c n)$	$G_{2\Omega_c}(\Omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$e^{\mathrm{i}\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$\cos\Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$

例题1：求和式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$

- 解：

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |\omega|<\frac{\pi}{4}\\ 0 & \frac{\pi}{4}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$y^*[n]=\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*\left(e^{-j\omega}\right)=\begin{cases}\frac{1}{5} & |\omega|<\frac{\pi}{6}\\ 0 & \frac{\pi}{6}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$\therefore\ Y^*\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\frac{1}{5} & |\omega|<\frac{\pi}{6}\\ 0 & \frac{\pi}{6}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$\therefore\ 左=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{10}d\omega=\frac{1}{60}$$

例题2

- 令 $x[n]$和$X(e^{j\omega})$分别代替一个序列及其傅里叶变换，利用
- $X(e^{j\omega})$ 表示如下序列的傅立叶变换

$$y_s[n]=\begin{cases} x[n], & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

- 解：$$y_s[n]=\frac{1}{2}\left\{x[n]+(-1)^n x[n]\right\}=\frac{1}{2}\left\{x[n]+e^{j\pi n}x[n]\right\}$$

$$Y_s(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})+\frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\pi)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[2n]e^{-j2n\omega}$$

例题3

- 若实序列 $x[n]$ 的DTFT为X(w),且
- X(0.2)=9e-j0.7;
- 1) X(-0.2)=?
- 2) 若y(n)=x(-n+2),求Y(-0.2);

Z 变 换 及 反 变 换

- 定义
- 收敛域？
- 性质定理
- 反变换

一、Z变换定义及收敛域

- 设序列为x(n)，则幂级数：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

- 称为序列x(n)的Z变换，其中z为变量。也可记作：

$$Z[x(n)]=X(z)$$

- 幂级数收敛时，Z变换才有意义。Z变换收敛的所有z值的集合称为收敛域。
- 在收敛域内，Z变换处处解析，不含任何奇异点。

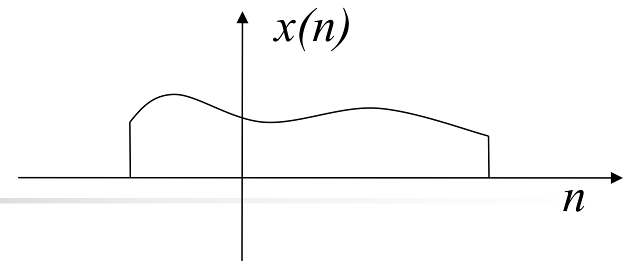
二、不同序列的收敛域

- 根据**级数理论**，幂级数收敛的充分且必要条件是该级数**绝对可和**：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = M < \infty$$

- 对于不同形式的序列，其收敛域的形式亦有所不同，分类讨论如下

1、有限长序列



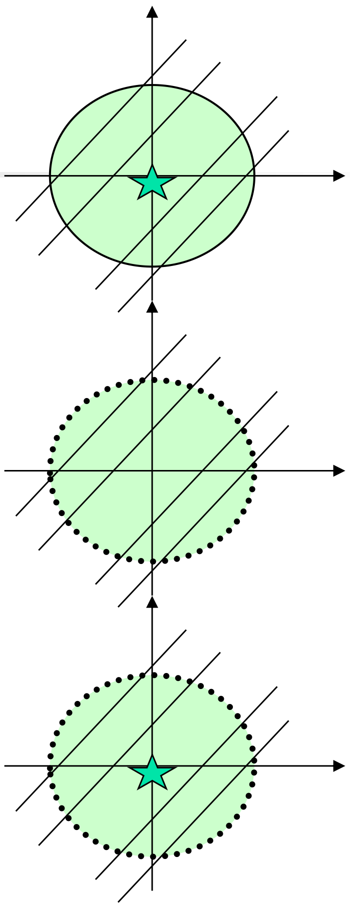
$$x(n)=\begin{cases} 有值 & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- **X(z)为有限项级数之和，只要级数的每一项有界，则级数就是收敛的。**
- **收敛域至少包括有限Z平面**

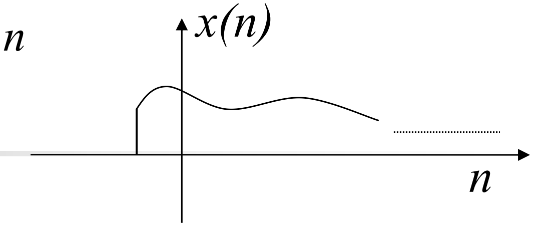
$$0<|z|<\infty$$

- 根据区间的不同，级数有可能在原点和无穷远出现奇异点，故仍可细分为如下三种情况：
- 1）、正半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和无穷远点；
- 2）、负半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和原点；
- 3）、跨原点有限长序列，则收敛域仅为有限Z平面；



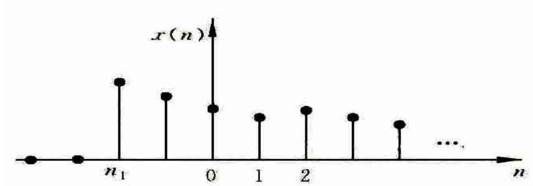
2、右边序列

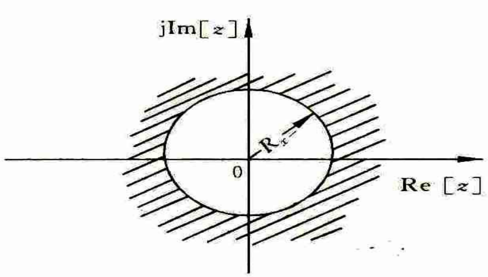
$$x(n)=\begin{cases}\text{有值} & n_1 \le n \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



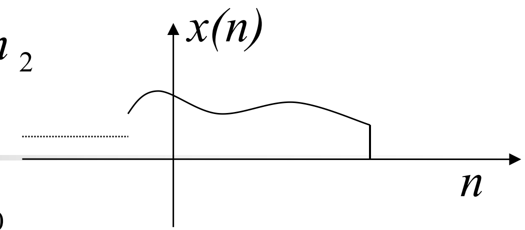
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}=\left\langle\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}\right\rangle+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 第一部分若存在，则为一负半轴有限长序列，其收敛域为不包括无穷远点的所有Z平面。第二部分是z的负幂级数，由阿贝尔定理可知，存在一个最小的收敛半径，在此半径外的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不为零的有限半径处向外扩张的有限Z平面；若 $n_1 \ge 0$，还要包括无穷远点，此时的序列为因果序列。



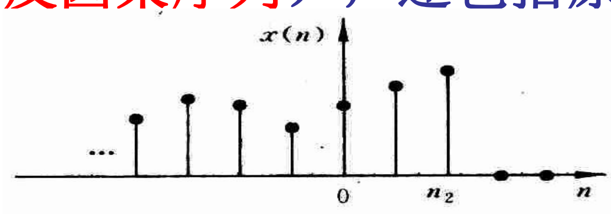


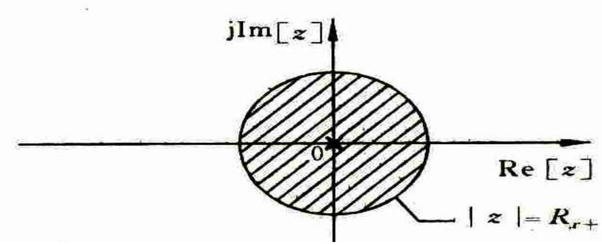
3、左边序列 $x(n)=\begin{cases}\text{有值} & n\le n_2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}=\left\langle\sum_{n=1}^{n_2}x(n)z^{-n}\right\rangle+\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}$$

- 若第一部分存在，则为正半轴有限长序列，其收敛域为不包括原点的所有Z平面。第二部分是z的正幂级数，由阿贝尔定理知，存在一个最大的收敛半径，在此半径内的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不有限半径处向内收敛的圆形区域；在 $n_2\le 0$ 时（反因果序列），还包括原点。

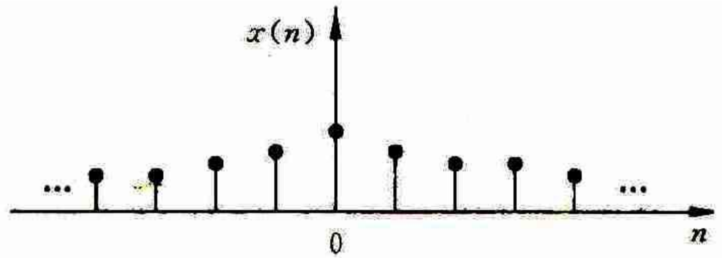


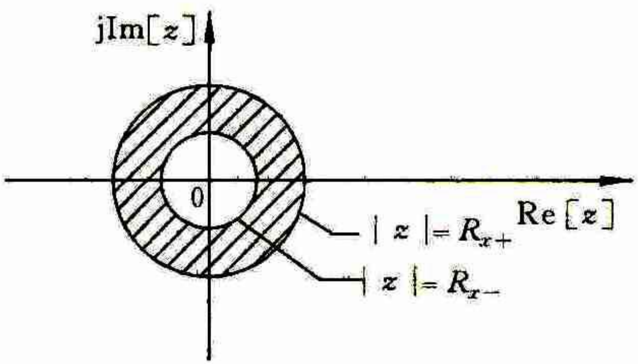


4、双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

- 收敛域应该是正半轴序列与负半轴序列收敛域的重叠
- 若有收敛域必为环状区域，否则处处不收敛



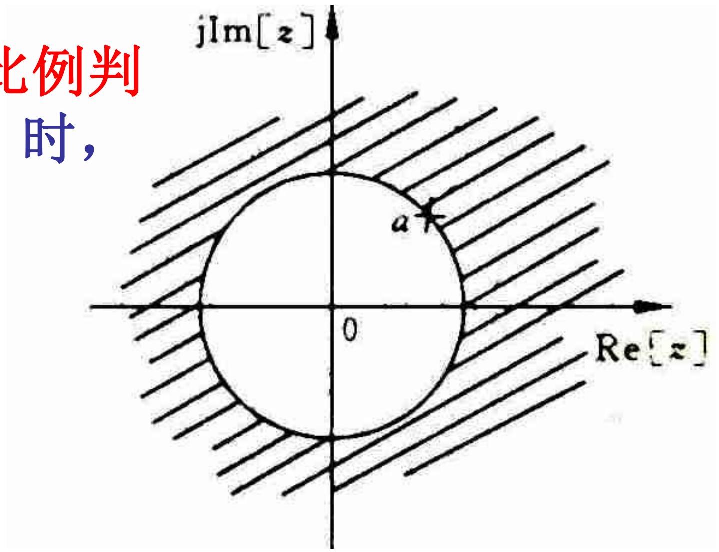


Ex:求 $x(n)=a^n u(n)$ Z变换及收敛域。

- 解： $Z[x(n)]=\sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} (az^{-1})^n$

- 这是一个无穷项等比级数求和，由比例判定法可知，只有在 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，级数收敛为：

$$Z[x(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$



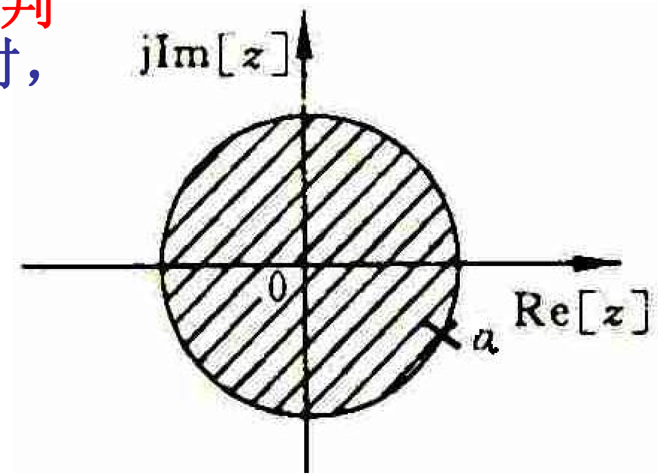
Ex:求 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

- 解：

$$Z[x(n)]=\sum_{-\infty}^{+\infty}-a^n u(-n-1)z^{-n}=\sum_{1}^{+\infty}(a^{-1}z)^n$$

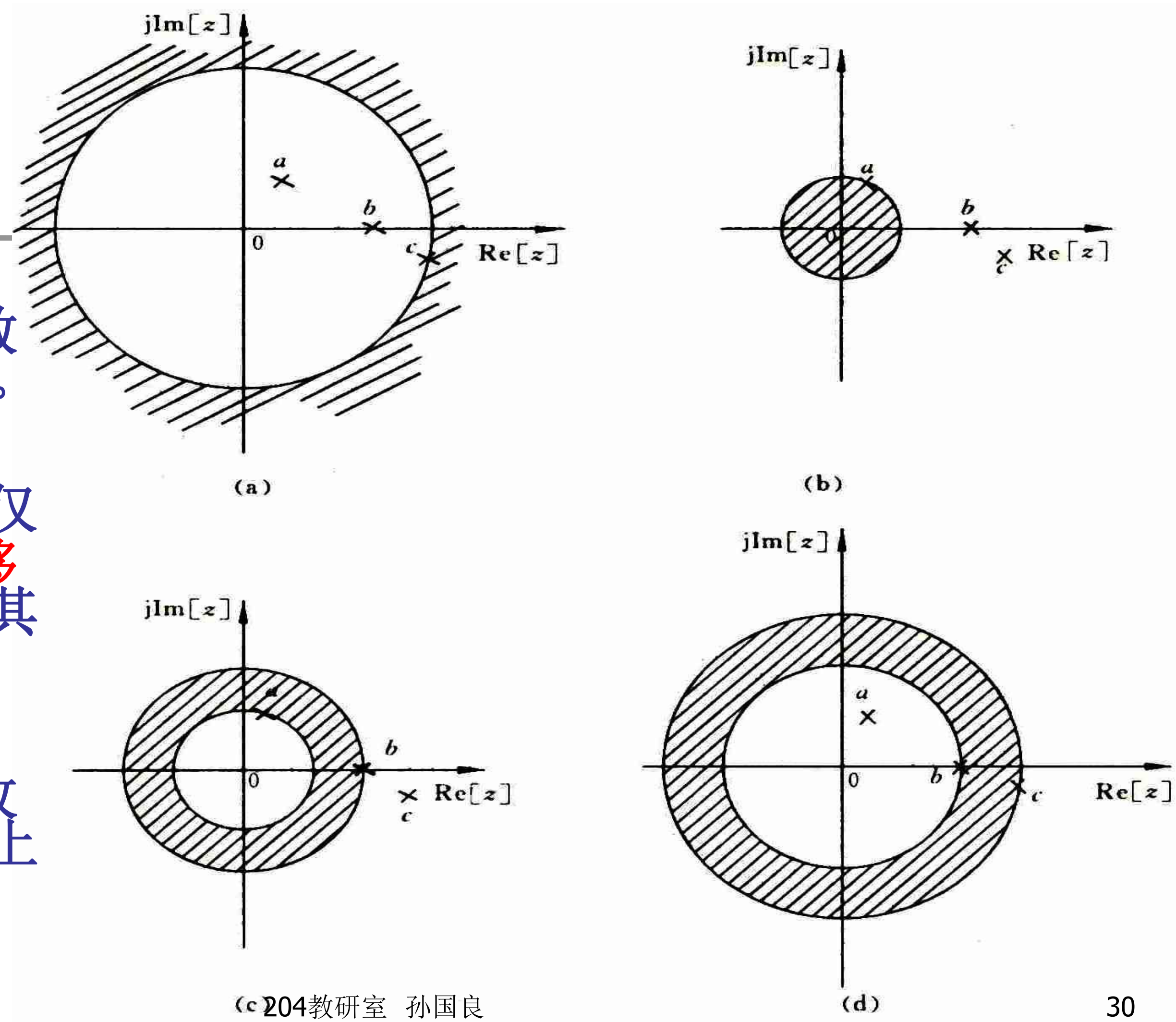
- 这是一个无穷项等比级数求和，由**比例判定法**可知，只有在 $\left|a^{-1}z\right|<1$，即 $\left|z\right|<\left|a\right|$ 时，级数收敛为：

$$Z[x(n)]=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{z}{z-a}$$



结论：

- 不同的序列其Z变换的数学表达式可以完全一致。
- 对于一个序列而言，仅仅用其Z变换来表示是不够充分的，必须同时给出其Z变换的收敛范围。
- 同一个Z变换函数，当收敛域不同时，代表时轴上性质不同的序列。



例题1：$X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ $\quad 0.5<|z|<2$ 求x(n)

- 解：由可知有两个一阶极点， 可展成

$$X(z)=\frac{A_1}{1-z_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z_2z^{-1}}$$

$$A_1=\mathrm{Re}\; s[X(z)/z]\big|_{z=z_1}=\frac{4}{3},\; A_2=\mathrm{Re}\; s[X(z)/z]\big|_{z=z_2}=-\frac{1}{3}$$

- 由收敛域可知，对应第一极点z1=2为反因果序列，对应第二极点z2=0.5为因果序列,所以原始序列为：

$$x(n)=-\frac{4}{3}2^n u(-n-1)-\frac{1}{3}0.5^n u(n)$$

三、Z变换性质定理

- 1、线性

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \qquad R_{-} < |z| < R_{+}$$

- 需要注意：
  - 若参与和运算的序列在时域上不重合，则相加后的和序列的收敛域为各个序列的收敛域的交集
  - 若不满足上述条件，则线性组合过程中两个序列Z变换的零、极点可能会互相抵消，导致收敛域的扩大。

2、序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 序列的移位仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点处的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域不发生变化。

3、Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

- 在尺度变换中，若**a**为实数，则零、极点在**Z**平面上沿径向运动；
  - 若**a**为单位复数，则零、极点在以原点为圆心的园上旋转；
  - 若**a**为任意复数，则零、极点既有径向伸缩，又有角度旋转。

4、序列线性加权（Z域求导）

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[n^m x(n)] = (-z\frac{d}{dz})^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 序列的线性加权对收敛域的影响与序列的移位相类似，仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域也不发生变化。

5、共轭序列

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 此处要注意，原序列Z变换极点的共轭是共轭序列Z变换的极点。
- 由于共轭关系仅关于X轴对称，不影响极点矢径的长度，因而不改变收敛半径和收敛域。

6、序列翻褶

$$Z[x(-n)] = X(\frac{1}{z}) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$$

- 序列的翻褶导致**Z**变换的收敛域以单位圆为基准作镜像映射

7、初值定理（因果序列）

$$x(n) = x(n)u(n) \qquad \lim_{z->\infty} X(z) = x(0)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z->\infty} X(z) \\
&= \lim_{z->\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\
&= \lim_{z->\infty} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + ...] \\
&= x(0)
\end{aligned}$$

8、终值定理

- 若序列为因果序列，并且极点处于单位圆以内（若恰好在单位圆上，则最多可在**z=1**处有一阶极点），则：

$$\lim_{z->1}(z-1)X(z)=\lim_{n->+\infty}x(n)$$

$$\lim_{z->1}(z-1)X(z)$$

$$= \lim_{z->1}[(z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}]$$

$$= \lim_{z->1}[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)(z^{-(n-1)} - z^{-n})]$$

$$= \lim_{z->1}[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-(n-1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}]$$

$$= \lim_{z->1}[\sum_{m=-1}^{+\infty} x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=-1}^{+\infty} x(m)z^{-m}]$$

$$= \lim_{z->1}\{\sum_{m=-1}^{+\infty}[x(m+1)-x(m)]z^{-m}\} = \sum_{m=-1}^{+\infty}[x(m+1)-x(m)]\lim_{z->1} z^{-m}$$

$$= \lim_{n->+\infty}\{[x(0)-x(-1)]+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+...[x(n)-x(n-1)]\}$$

$$= \lim_{n->+\infty} x(n)$$

9、时域卷积和

$$Z[\sum_{m=0}^{n} x(m)] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

$$|z| > Max(1, R_{x-})$$

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z) \qquad \max(R_{x-}, R_{h-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{h+})$$

- **若时域为卷积和，则Z域是相乘，乘积的收敛域是X(z)收敛域和H(z)收敛域的交集。**
  - 上述结论在两个卷积和序列无零、极点对消的情况下才成立。若出现零、极点对消，则收敛域将会扩大。
  - 利用**卷积和定理，可以求LTI系统的响应。**

例题2

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}$$

- 因果系统输出为：

$$y[n]=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^{n}u[n]-\frac{4}{3}\cdot 2^{n}\cdot u[-n-1]$$

- 求系统输入的X(z)
- 解：

$\because\ y[n]$的 z变换为： $$Y(z)=(-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{1+0.25z^{-1}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})}\qquad 0.25<|z|<2$$

$$\therefore\ X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-2z^{-1}}\qquad |z|<2$$

为什么？

10、时域相乘（Z域复卷积）

$$X(z) = Z[x(n)] \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$
$$H(z) = Z[h(n)] \qquad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(\frac{z}{v})H(v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H(\frac{z}{v})v^{-1}dv$$
$$R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&Y(z)\\
&= Z[x(n)h(n)]\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n)z^{-n}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)[\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(v)v^{n-1}dv]z^{-n}\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)H(v)z^{-n}v^{n-1}dv]\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n} H(v)v^{-1}dv]\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv
\end{aligned}
$$

周期卷积

- 为了使复卷积数学意义明显，令围线为一个以原点为圆心的圆，即：

$$v=\rho e^{j\theta},z=re^{j\omega}$$

- 则复卷积公式变为：

$$Y(re^{j\omega})=\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(\rho e^{j\theta})X(\frac{r}{\rho}e^{j(\omega-\theta)})\frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$

$$\underset{\rho=const}{\overset{r=const}{=}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- 由于积分是在 π 到 $-\pi$ 的周期上进行的，所以称为周期卷积。

11、帕塞瓦定理

$$X(z)=Z[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$H(z)=Z[h(n)] \quad R_{h-}<|z|<R_{h+}$$

$$R_{x-}R_{h-}<1<R_{x+}R_{h+}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*(v^{*-1})v^{-1}dv$$

$$Z[h^*(n)] = H^*(Z^*)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*\left(\frac{Z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$Y(z)\big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

若积分围线取为单位圆，即：

$$v = e^{j\omega}$$

则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

再进一步，若令 $h(n) = x(n)$，则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

上式表明：时域中序列的能量与变换域中频谱的能量是一致的。

四、 Z反变换

- 从给定的Z变换及其收敛域中还原出原始序列**x(n)**，称为Z反变换

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

- Z反变换的实质是求**X(Z)**的幂级数展开式，通常有三种方法：长除法、部分分式法、留数法（围线积分法）。

部分分式法

- 在实际应用中，一般**X(z)**是**z**的有理分式：

$$X(z) = B(z)/A(z)$$

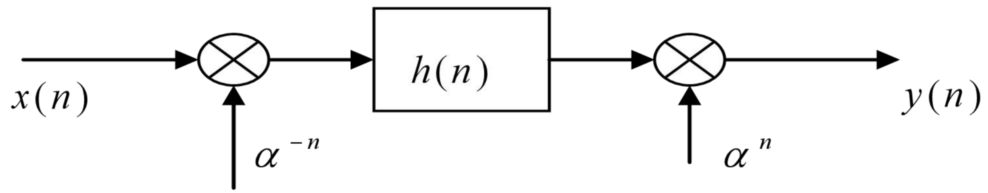
- **A(z)**及**B(z)**都是变量**z**的实系数多项式，并且没有公因式，则可展成部分分式形式

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_i Z^{-1}[X_i(z)]$$

例题3

- 离散系统如下，h(n)为LTI系统



- 1）整个系统是否为LTI？
- 2）若系统是LTI的，请给出系统的单位冲激响应g(n)

解答：

$$[x[n]\bullet\alpha^{-n}]\otimes h[n]\bullet\alpha^{n} = y[n]$$

- 1） $k_1x_1[n]+k_2x_2[n] \longrightarrow [k_1x_1[n]+k_2x_2[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}$

$$[k_1x_1[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}+[k_2x_2[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}$$

$$k_1y_1[n]+k_2y_2[n]$$

$$y[n]=(\alpha^{-n}x[n]\otimes h[n])\cdot\alpha^{n}$$

$$=(\sum_k \alpha^{-k}x[k]h[n-k])\cdot\alpha^{n}$$

$$=\sum_k \alpha^{n-k}x[k]h[n-k]$$

$$y[n-m]=\sum_k \alpha^{n-m-k}x[k]h[n-m-k]$$

$$T\{x[n-m]\}$$

$$=(\alpha^{-n}x[n-m]\otimes h[n])\cdot\alpha^{n}$$

$$=(\sum_k \alpha^{-k}x[k-m]h[n-k])\cdot\alpha^{n}$$

$$[x[n]\bullet\alpha^{-n}]\otimes h[n]\bullet\alpha^{n} = y[n]$$

- 2) $g[n]=\{\delta(n)\alpha^{-n} * h[n]\} * \alpha^{n} = h[n] * \alpha^{n}$

$$y[n]\cdot\alpha^{-n} = (\alpha^{-n}x[n]\otimes h[n])$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z)\cdot H(z)$$

$$Y(z') = X(z')\cdot H(\frac{z'}{\alpha})$$

$$g[n] = Z^{-1}[H(\frac{z}{\alpha})] = \alpha^{n}h[n]$$

信号变换小结：

- 变换是从另一个维度来审视信号
- DTFT隐含有周期性，以及信号频谱分解的概念
- Z变换需要注意收敛域问题
- 卷积特性是信号变换中的主要性质
- 对称性对于实信号的变换很重要
- 结论比过程重要，但是过程要能自己走通

作业：

- *2.8*
- 2.11
- 2.17
- 2.44

- 3.1(b)、(g)
- 3.3
- 3.4
- 3.6(c)
- 3.9
- *3.28*

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn