

第一章 离散傅里叶变化

数字处理需要对时域进行采样与截断，频域离散化。

从离散傅里叶级数（DFS）开始，逐步介绍离散傅里叶变换（DFT），以及快速算法。

1.1 离散傅立叶级数

周期序列等价于有限长序列，可以引出抽样定理。

连续信号可以进行连续傅里叶变换，而周期信号需要进行傅里叶级数，时域的周期性造成了频域的离散。时域的离散造成频域的周期性。

CTFS 是主值区间的信号，CTFT 是频域的采样。

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

1.2 离散傅立叶变换

若是一个周期序列，那么不是绝对可和的，不能使用 DTFT。

若是周期为 N 那么：

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

希望展开成离散的傅里叶级数：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = 1, \text{ when } r = mN, 0, \text{ else}$$

定义变换因子的符号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是主值区间的 Z 变换在单位圆的等间隔抽样。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=w\pi k/N}$$

1.2.1 频域采样

频域采样 N 点，得到的是抽样点为 N 的周期延拓。可以用来设计滤波器，若是可以无失真回复原序列，那么可以完整表达 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

1.2.2 内插器公式

$$\frac{1 - \exp -j\omega N}{1 - \exp -j\omega} = \exp -j\omega \frac{N-1}{2} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2}$$

DFS

是对 DTFT 在主值区间的 N 点采样。周期性和离散性是等价的。

1.3 离散傅里叶变换

当只取主值区间时，就可以得到 DFT。

$$\tilde{X}(k) = DFT[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFT[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

规定周期信号和主值区间转换的标记方式： $x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$ ， $\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x[[n]]_N$ 。

1.3.1 对偶性

注意：

$$DFT[X(n)] = Nx((-k))_N R_N(k)$$

得到：

$$IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT[X^*(k)]}$$

1.3.2 性质

- 线性
- 循环移位 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) = W_N^{-mk} \tilde{X}[k]$
- 圆周共轭对称：实序列对应频域圆周共轭对称，虚序列对应频域圆周共轭反对称

- 圆周卷积和：点数有关
- 相关不满足交换律

1.4 DFT 快速算法

几个特点：

- 对称性： $W_N^{nk} = W_N^{-nk}$
- 周期性： $W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$
- 可约性： $W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}$

1.4.1 戈泽尔算法

最典型：利用周期性与对称性。

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{rk} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{rk} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n) = x(n) * W_N^{-kn}u(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(n-r)}u(n-r)$$