

第一章 离散信号与系统

1.1 因果性、记忆性

是否用到了 $x[n]$ 的未来值/过去值，而不是其他可计算的值。

1.2 LTI 系统

既是线性系统，又是时不变系统，称为 LTI 系统。其充要条件是 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 。
无法直接判断可以假设是一个 LTI 系统：

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{4^n}$$

假设是：

- LTI:

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k] \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n} h_1[k]$$

矛盾！

- TI and Linear:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} &\rightarrow \frac{1}{4^{n-1}} \\ 2\frac{1}{2^n} &\rightarrow 4\frac{1}{4^n} \end{aligned}$$

1.2.1 因果系统

$$h[n] = h[n]u[n]$$

1.2.2 稳定系统

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

1.2.3 特征频率与 LTI 系统

若是有一个无限长的指数信号，那么有一个单频信号：

2.27

$$[e^{j\omega_0 n}] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

但是若是有限长，那么就有引入除去 ω_0 的分量，因此对于一个 LTI 系统来说，放大 $e^{j\omega_0 n}$ 和 $e^{j\omega_0 n}u[n]$ 需要的系统函数是不一样的。

1.3 差分方程的阶数

输出 $y[n-i]$ 最高值和最低值 i 的差值。

LCCDE = linear constant-coefficient difference equation .

第二章 DTFT 变换

2.1 频域阶数

2.42

若是在原有的系统函数多一个 z ，说明原来 $a_0 z^0$ 的位置变成了 $a_0 z^1$ ，也就是 a_n 变成了 a_{n+1} 。同理 z^{-1} 对应 a_{n-1} 。由于使用因果信号， z^{-1} 的形式更合适。

2.2 系统设计

2.56，

需要一个系统时，可以通过其定义入手，配凑式子。同时，对于特定的频率分量，其幅度、角度变换是由其频率响应改变的。

2.3 DTFT 推导细节

$$\begin{aligned} DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

注意 2π 与 $\delta(n)$ 的由来：单位虚数的积分。

将 IDTFT 展开成累加的形式，实际上是将不同频率的分量逐个恢复：

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n} \end{aligned}$$

表 2.1: DTFT 变换对

时域函数	DTFT
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$
$W_N(n)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$
$\frac{w_c \sin[w_c(n - \alpha)]}{\pi w_c(n - \alpha)}$	$e^{-j\omega\alpha}(u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c))$

表 2.2: DTFT 变换性质

性质名称	表达式
线性	
时域平移-频域调制	$x(n - m) \rightarrow e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$
时域调制-频域平移	$e^{jn\omega_0} x(n) \rightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
时域翻折	$x(-n) \rightarrow X(e^{-j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

可以利用帕塞瓦尔定理解决一些求和式子：Slide P83.

2.4 DTFT 对称性

共轭对称与共轭反对称序列定义，实际上是实部、虚部分别的奇偶对称：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

任意序列都可以进行共轭分解：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x(-n) = x_e(-n) + x_o(-n) = x_e^*(n) - x_o^*(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

根据下一小节的性质：

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

同样的对频域函数进行变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

逆变换：

$$DTFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

2.5 变换共轭性质

具有普适性。

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x^*[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*) \\
\mathcal{Z}[x[-n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{-1})^{-n} = X(z^{-1}) \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Re}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{x[n] + x^*[n]}{2}\right] = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Im}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{z[n] - x^*[n]}{2j}\right] = \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]
\end{aligned}$$

2.6 Z 变换

表 2.3: \mathcal{Z} 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

表 2.4: \mathcal{Z} 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha < z < \beta$	$\frac{1}{\beta} < z < \frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a > 0$	$X(z^a)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha^{1/a} < z < \beta^{1/a}$
$x(n \pm m)$	双边 $z^{\pm m} X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$x(n-m)u(n)$	单边 $z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$

见下页

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(n+m)u(n)$	单边 $z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < \left \frac{z}{a} \right < \beta$
$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)v^{-1}dv^1$		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty)$$

帕塞瓦尔定理

$$Y(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^* \left(\frac{1}{V^*} \right)_V^{-1} dV$$

2.7 逆 Z 变换

2.7.1 部分分式法

对于有理多项式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$ka^n u(n), |z| > a$$

$$-ka^n u(-n-1), |z| < a$$

¹其中 C 是 $X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

2.8 从能量看 Z 变换与 DTFT

时域频域的能量是一致的，没有发生衰减。

2.9 Z 变换与时域频域

为了解决非零状态系统，使用单边 Z 变换。

系统不改变频率：

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0(n-m)+\phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\
 &= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0})
 \end{aligned}$$

2.10 系统零极点与频率响应

单位圆上的系统函数是频率响应。

2.10.1 幅度响应

- 原点处的零极点幅度无影响
- 经过单位圆上的零点幅度归零，单位圆附近的零点出现谷点
- 经过单位圆上的极点幅度无穷大，单位圆附近的极点出现峰点
- 远离零极点时影响较小

2.10.2 相位响应

- 原点处的零极点对相位影响为线性，极点会引起滞后，零点会引起超前
- 靠近单位圆的零极点会引起较大的波动
- 远离极点零点的位置变换比较平缓
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零

对于圆内外零极点：

- 圆内极点：顺时针经过，相位迅速延后
 - 圆外极点：顺时针经过，相位迅速提前
 - 圆内零点：顺时针经过：相位迅速提前
 - 圆外零点：顺时针经过：相位迅速延后
- 过单位圆零点相位突变 π 。

2.11 LTI 系统幅相特性分析

当给定幅度特性时，总可以通过共轭分解找到一个系统满足要求：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

2.11.1 全通系统

频响恒为 1，其零极点分别为 a 与 $1/a^*$ ：

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

其相位响应为：群延迟为正值，连续相位递减。

$$\begin{aligned} \text{Assume: } a &= re^{j\theta} \\ \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] &= -\omega - 2 \arctg \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] \\ \text{grd} [H_{ap}(e^{j\omega})] &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{-j(\omega - \theta)}|^2} \end{aligned}$$

用途：

- 相位均衡器，用于提高群延迟
- 任何因果稳定系统均可以分解为全通系统和最小相位的级联
- 若是系统不稳定，可以用于交换系统的零极点，而不改变幅度特性

2.11.2 最小相位系统

要求极点在单位圆内（主要考虑系统稳定性），要求零点在单位圆内（主要考虑相位变化最小）。

最小相位系统零极点均在单位圆内，极点往往与系统稳定性联系在一起，零点则往往与系统的延时特性联系在一起。逆系统也是因果稳定的，可以实现幅度和相位失真的完全补偿。

- 最小相位延迟，全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{\min}(z) H_{ap}(z) \\ \arg [H(e^{j\omega})] &= \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] \\ \arg [H(e^{j\omega})] &\leq \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] \\ |\arg [H(e^{j\omega})]| &\geq |\arg [H_{\min}(e^{j\omega})]| \end{aligned}$$

- 最小群延迟，全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值：

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 最小能量延迟，最集中在 $n = 0$ 范围内：

$$\sum_{m=0}^n |h(n)|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2$$

因此：

$$|h(0)| \leq |h_{\min}(0)|$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为最大相位系统。

2.11.3 系统的补偿

幅度失真由最小相位因子补偿，相位失真利用全通因子补偿特定频段。

2.11.4 线性相位系统

定义：群延迟 α 为常数 $\phi(\omega) = -\alpha\omega + \beta$

线性相位响应时域表现为信号平移，波形不发生失真。

不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统。

若是群延迟 α 满足 2α 为整数，那么单位冲激响应严格对称，否则不严格对称，但是仍满足线性相位。

2.11.5 广义线性相位系统

在系统相位存在突变以及固定相位时，仍然存在恒定群延迟。

已知线性相位系统存在对称性，进行分析：

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

$$DTFT[h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta}$$

$$DTFT[h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta}$$

因此， $A(\omega)$ 的对称性决定了 $h(n)$ 的对称性（一致）。

根据对称形式与 2α 的奇偶性，有四类 FIR 线性相位滤波器。

对称冲激响应的系统特性推导：

$$\begin{aligned}
h(n) &= \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n} \\
\text{令 } m &= N-1-n = \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\
&= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})
\end{aligned}$$

得到：

1. 系统零点个数等于系统在原点的极点阶数相等
2. z_i 与 z_i^{-1} 均为零点
3. $h(n)$ 为实数，零点共轭成对

四类，其中 $M = N - 1$ ：

$$\begin{aligned}
H(z) &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \\
H(z) &= \frac{1}{2} \left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\
&= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \\
H(\omega) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} h(n) \left[\frac{(e^{j\omega})^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm (e^{j\omega})^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]
\end{aligned}$$

- I 类： M 为偶数，偶对称： $h(n) = h(M-n)$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{M}{2} - n \right) \omega \right]$$

- II 类： M 为奇数，偶对称，存在特殊零点：

$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

解得 $z = -1, \omega = \pi$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\frac{N}{2} - n = m = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

- III 类: M 为偶数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = \pm 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N-1}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left(\frac{N-1}{2} - m \right) \sin(m\omega)$$

- IV 类: M 为奇数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

对于一个关于 $n = k$ 对称的序列, 其群延时为 k 。

2.11.5.1 最小相位分解

根据零点成对进行分解, 分解到最小相位系统与线性相位系统。

第三章 信号采样与重构

需要解决的问题：

- 数字频率和模拟频率之间的对应关系：时域采样对频域的影响
- 采样定理：能否包含原始信号的所有信息？如何无失真恢复原始信号？是否有冗余信息可以去除？是否可以进行速率的变化？
- 离散处理如何等效为一个模拟 LTI 系统？

3.1 理想周期采样重构

3.1.1 模拟-采样-数字频谱关系

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想时域采样：

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

其中：

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

频域表示为：

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \rightarrow \frac{2\pi}{T_1} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) S(\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_c(\Omega) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned}$$

那么从连续信号采样得到的是原始信号的频谱（带限 Ω_N ）的周期（ Ω_s ）性拓延，当然，这是存在混叠的。

AD 是 CD 的工程近似。

进一步研究其离散采样信号的频谱：

对于采样信号：

$$\begin{aligned}
X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\Omega T)n}
\end{aligned}$$

对于数字信号：

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n}
\end{aligned}$$

经过两种形式的比对，可以得到：

$$X(j\omega) \Big|_{\omega=\Omega T} = X_s(j\Omega)$$

这就得到了一个重要的**频率转换公式**：

$$\Omega T = \omega$$

3.1.2 信号重构

通过理想重构滤波器：

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

其频域形式：

$$H(\omega) = T G_{\omega_c}(\omega)$$

其频率表示为，无混叠时采样点之外也无失真，有混叠时，则采样点之外存在一定失真。

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= x_s(t) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}
\end{aligned}$$

3.1.3 奈奎斯特低通采样定理

若信号的频带满足 $|\omega| < \omega_c$ ，那么以至少 $2\omega_c$ 的速率采样就可以无失真的恢复原始信号。

3.1.4 奈奎斯特带通采样定理

若信号的频带满足 $|f| < \omega_c$ ，那么以至少 $2f_c$ 的速率采样，且满足 $f_s = \frac{4f_0}{2n+1}$ 就可以无失真的恢复原始信号。其中 f_0 为频带中心频率。

3.2 连续信号的离散化

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

实际上处理的系统函数 $H_{eff}(j\Omega)$ 只能处理 $|\Omega| < \pi/T$ 。

3.3 抽取和内插

虽然带通定理降低了采样的速率，但是有时我们需要更高的带宽也就是更快的速度，优点有：

- 处理带宽变宽
- 信号处理的盲区减少
- 量化信噪比可以提升

但是高速率的采样又会造成后续的信号处理速度不匹配，因此又需要降速，但是减少采样又想要不丢失信息。

3.3.1 信号整倍数抽取

其采样序列转变为，通过统一的形式表示一个周期的冲激函数，很是美观、方便：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其 Z 变换:

$$\begin{aligned} X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}mi} \right) z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{D}mi} z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right) \end{aligned}$$

当 $D = 1$ 时, 退化到原始的 Z 变换。

从采样的模拟谱来看, 降采样将交叠平移的频率间隔缩小了 D 倍, 因此数字谱也是如此。

$$\begin{aligned} x(n) &\Leftrightarrow X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - k\Omega_0) \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right) \\ x_D(n) &\Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\Omega - k\frac{\Omega_0}{D}\right) \Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT}\right) \end{aligned}$$

这也导致交叠变得更加容易, 原本交叠间隔是 2π , 会变得更小。

最终在数字频域的表现如下, 可以看到平移中心没有变化, 但是频谱已经被稀释(拉伸)了。

$$X_D(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi i}{D}\right)$$

为了**防止混叠**，需要把可能产生混叠的部分滤除，在对数字信号 D 倍抽取之前，先用数字低通滤波器 π/D 滤波。

3.3.2 信号整倍数内插

内插显得很不可思议，对于一个 I 倍的内插结构，就是在原始序列的每两个点之前，插入 $I - 1$ 个零。也就是对于 $x_i(m)$ 来说，除去 m 为 I 的整倍数的点，其余都为 0。

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

类似的，来分析其频谱：

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_I(m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_I(kI) e^{-j\omega Ik} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{-j\omega Ik} = X(e^{j\omega I}) \end{aligned}$$

可见，这里的形式比较简洁，就是简单的将频谱压缩了 I 倍。

将抽取后的频谱进行内插后的频谱进行时域还原，可以得到准确的内插值，提高了时域的分辨率。

类似的，在内插后需要进行低通滤波，防止其搬运频谱也进入之后系统。同时，内插需要增益为 I 。

3.3.3 非整倍数抽取和内插

可以通过如 图 3.1 的系统对信号进行非整倍数的抽取和内插。

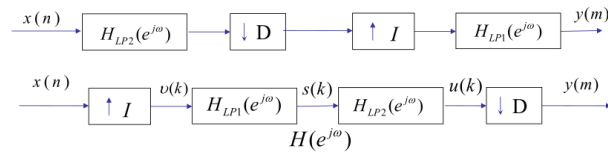


图 3.1: 非整倍数抽取与内插系统

滤波器只需满足在最小频带工作：同时补偿进行内插的增益 I 。需要注意，给定分数后，滤波器频率已经默认给定。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

其时域表示：

$$v(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn-Ik)$$

对时域计算的一点简化：

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn-Ik)$$

$$Dn - Ik \geq 0 \quad k \leq \frac{D}{I}n \quad \text{令：} \quad m = \lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - k, \quad m \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - m\right) h\left(Dn - \lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor I + mI\right)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - m\right) h(mI + Dn \% I)$$

3.3.4 速率变换的多相结构

在高采样率的数据端，数字的滤波器计算量巨大。希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式，以特定频率倍数为周期：

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\
&= h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots \\
&\quad + h_1z^{-1} + h_5z^{-5} + h_9z^{-9} + h_{13}z^{-13} + \dots \\
&\quad + h_2z^{-2} + h_6z^{-6} + h_{10}z^{-10} + h_{14}z^{-14} + \dots \\
&\quad + h_3z^{-3} + h_7z^{-7} + h_{11}z^{-11} + h_{15}z^{-15} + \dots \\
&= z^0 [h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-1} [h_1 + h_5z^{-4} + h_9z^{-8} + h_{13}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-2} [h_2 + h_6z^{-4} + h_{10}z^{-8} + h_{14}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-3} [h_3 + h_7z^{-4} + h_{11}z^{-8} + h_{15}z^{-12} + \dots]
\end{aligned}$$

M 相分解:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l)z^{-Mn} \\
E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l)z^{-n} \\
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M)
\end{aligned}$$

对应的时域表示为:

$$\begin{aligned}
e_l(n) &= h(Mn+l) \\
E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_l(n)z^{-n}
\end{aligned}$$

3.3.5 离散话处理工程问题

3.3.5.1 处理对能量的影响

- 采样降低 T 倍
- 抽取不影响信号功率
- 内插降低 I 倍

第四章 离散傅里叶变换及其快速算法

工程中对时域、频域的处理都只能局限在特定时段、频段内，并且采样和实现都是离散的。需要的变换需要满足时域序列和频域抽样的关系。

4.1 四类傅里叶变换

傅里叶变换的目的是建立**时域表达**和**频域表达**的变换关系，当时间与频率分别为连续、离散时，就得到不同形式的傅里叶变换对：

- 连续时间-连续频率：CTFT

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

- 连续时间-离散频率：CTFS 周期信号为功率信号，能力无限，因此变换需要特殊处理。时域周期化导致频域离散化

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$
$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$
$$X(j\Omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0)$$

- 离散时间-连续频率：DTFT 时域离散导致的频域周期化

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 离散时间-离散频率：DFS 时域周期性离散化，不是绝对可和的：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right]$$
$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = 1, \text{ when } r = mN, 0, \text{ else}$$

定义变换因子的符号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk}$$
$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是对周期序列主值区间的 Z 变换 / DTFT 在单位圆的等间隔取样。

4.2 频域采样定理

本节考虑：如何利用单位圆抽样恢复原始信号，并且抽样对于时域的影响。

对于任意信号进行频谱单位圆抽样并进行 IDFS 变换得到的序列是

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \right) \\
 &\quad \text{where } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(m - n - rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)
 \end{aligned}$$

这个公式显示了原序列点数、采样点数之间的关系，以及交叠造成的数学形式。若是可以无失真恢复原序列，那么可以完整表达其频谱：

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

那么定义一个因子即可建立从恢复频谱到原频谱的关系：

$$\Phi_k(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \\
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

这个因子存在 N 零点，只有在这些零点处极点才会被抵消，在其他抽样点处都为 0。

4.3 DFT

DFT 是主值区间的采样，DFT 是有限长序列（周期延拓后）的变换。

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) R_N(n)$$

DFT 是其 DTFT 的等长采样的主值区间。

4.3.1 DFT 性质

- 对偶性：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{nk} \right)^*$$

$$\text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} (\text{DFT}[X^*(k)])^*$$

- 圆周对称性
- 线性性
- 循环移位特性：

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

- 频率圆周移位：

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

据此可以得到：

$$\text{DFT} \left[x(n) \cos \left(\frac{2\pi nl}{N} \right) \right] = \frac{1}{2} [X((k-l))_N + X((k+l))_N] R_N(k)$$

$$\text{DFT} \left[x(n) \sin \left(\frac{2\pi nl}{N} \right) \right] = \frac{1}{2} [X((k-l))_N - X((k+l))_N] R_N(k)$$

- 圆周共轭性：若 $x(n)$ 为共轭对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周共轭对称序列： $x(n) = x^*(N-n)$ ；若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周反共轭对称序列： $x(n) = -x^*(N-n)$ ；

- 时域-频域对称性:

$$\text{DFT}[x((-n))_{-k}] = X(N - k)$$

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((N - k)_N) R_N(k) = X^*(N - k)$$

据以上两个式子可以得到实部、虚部的变化，首先定义共轭序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((N - n))_N] R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N - x^*((N - n))_N] R_N(n)$$

那么：

$$\text{DFT}\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k)$$

$$\text{DFT}\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k)$$

$$\text{DFT}\{x_{ep}(n)\} = \text{Re}[X(k)]$$

$$\text{DFT}\{x_{op}(n)\} = j \text{Im}[X(k)]$$

- 圆周卷积和：可交换/点数相关
- 线性卷积和：至少 $N_1 + N_2 - 1$ 点结果
- 时域相乘：

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

- 圆周相关：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n - m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + m) y^*(n)$$

其频谱：

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) \quad R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

利用交叠求 DFT 实际上是搬移，搬移的源是原序列而不是补全的序列。

圆周卷积：翻折-向右平移

4.4 FFT

4.4.1 基底特性

- 对称性：

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk}$$

- 周期性：

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

- 可约性：

$$W_{mN}^{mnk} = W_N^{nk}$$

4.5 戈泽尔算法

将 DFT 转换为卷积：

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{kr} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{-k(N-r)} = x[n] \otimes W_N^{-kn}u[n]$$

分解其 Z 变换：

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \frac{1}{(1-W_N^{-k}z^{-1})(1-W_N^kz^{-1})} * (1 - W_N^kz^{-1}) \\ &= \frac{1}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}} * (1 - W_N^kz^{-1}) \end{aligned}$$

4.6 基 2 FFT

特殊基：

$$W_N^{N/2} = -1$$

$$W_2^0 = 1$$

$$W_2^1 = -1$$

两类 FFT：时间抽取（DIT），频域抽取（DIF）

4.6.1 时域奇偶抽取

首先补零！

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_0^{N-1} x[n]W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned}$$

概括来说，就是在时域进行奇偶分解，在频域进行组合；旋转因子在前，加减在后；整体旋转在前，微调在后。其蝶形图如 **图 4.1**。

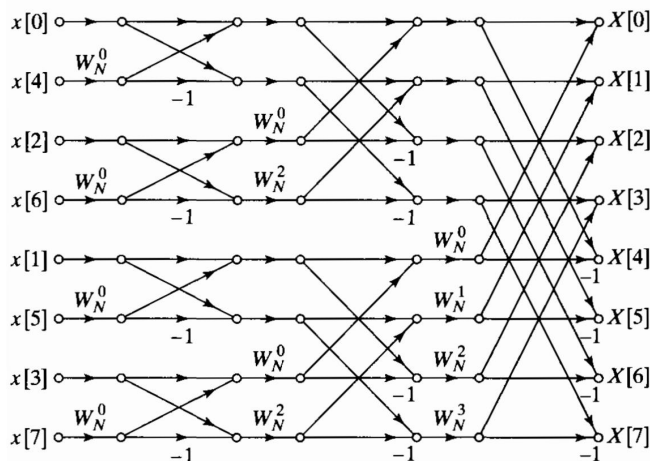


图 4.1: DIT 蝶形图

4.6.2 频域奇偶抽取

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{nk} + x[n + \frac{N}{2}] W_N^{(N/2+n)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}] W_N^{Nk/2}) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}] (-1)^k) W_N^{nk}
 \end{aligned}$$

那么有：

$$\begin{aligned}
 k = 2r, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}]) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_N^{nk} \\
 k = 2r + 1, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_N^{nk}
 \end{aligned}$$

概括来说，就是在时域进行前后分解，在频域进行奇偶分解；加减在前，旋转因子在后；微调在前，整体旋转在后。其蝶形图如 [图 4.2](#)。

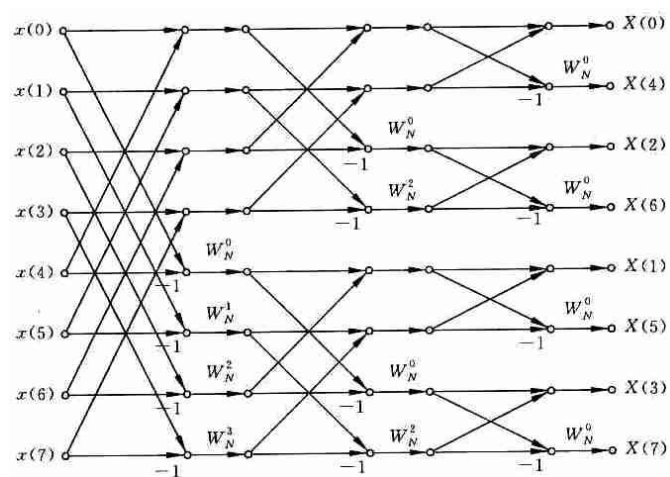


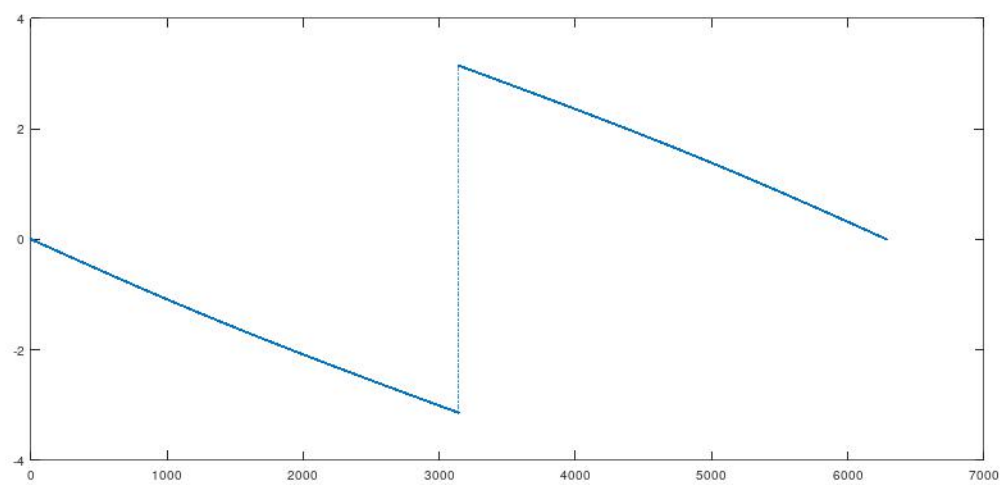
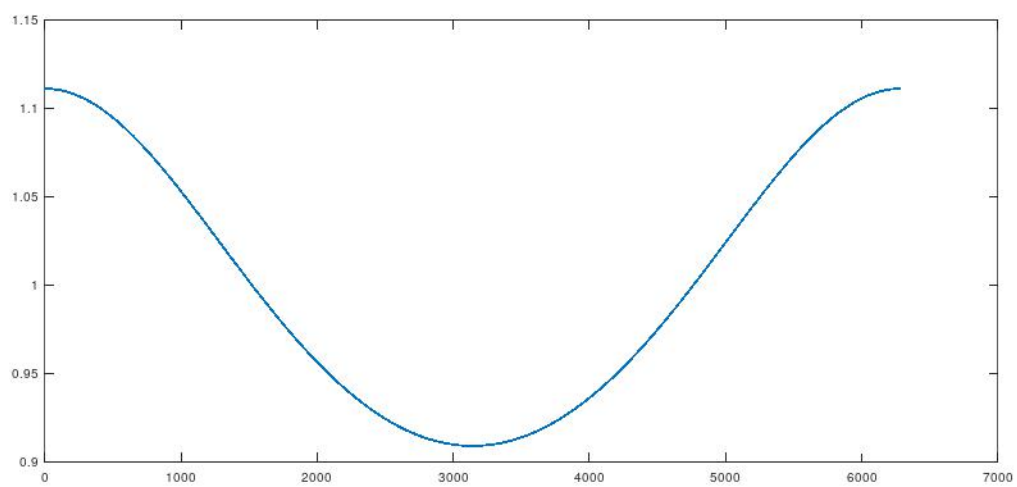
图 4.2: DIF 蝶形图

第五章 复习题

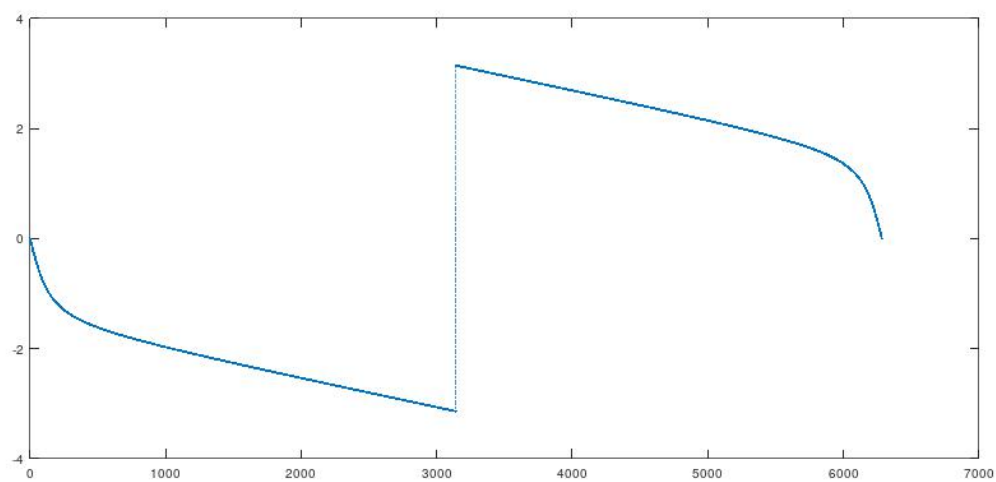
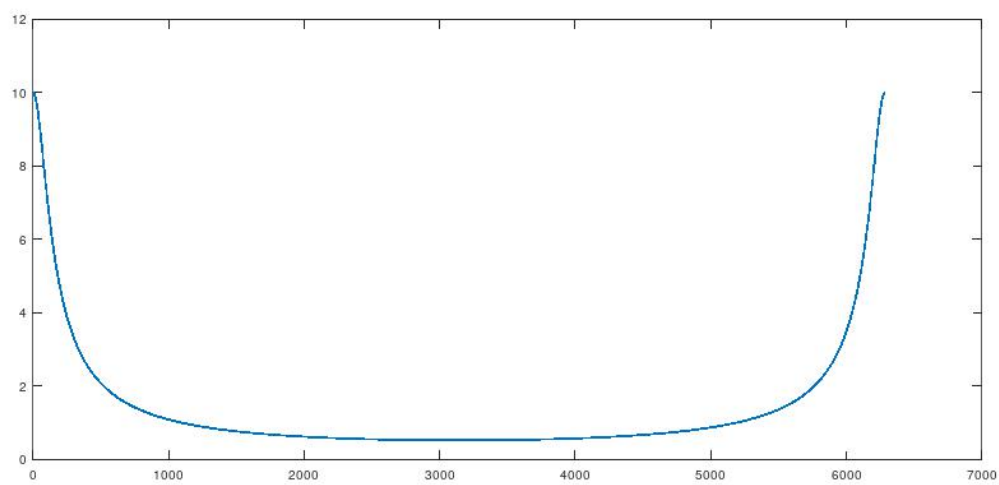
2.44, 5.49, 4.8, 4.53, 4.7, 4.34, 4.43, 4.49, 7.33

附录 A 零极点幅度相位研究

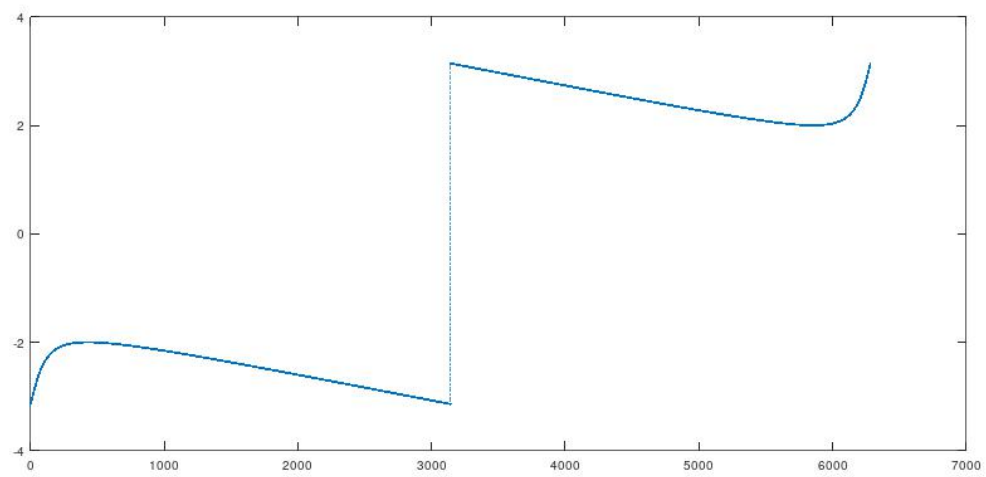
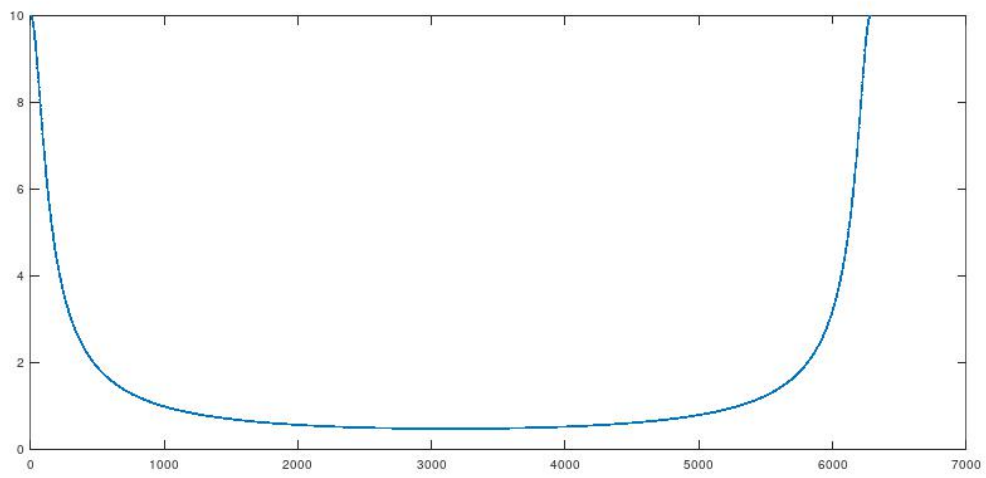
$z = 0.1$ 极点 无零点



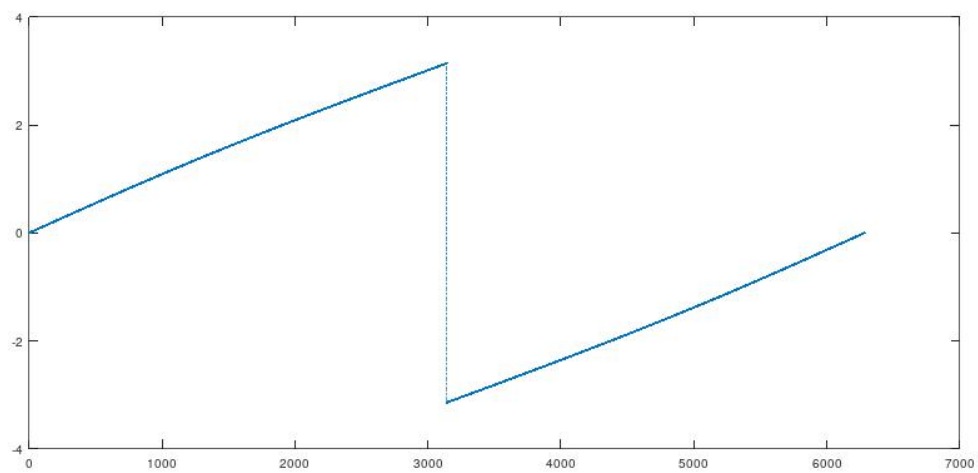
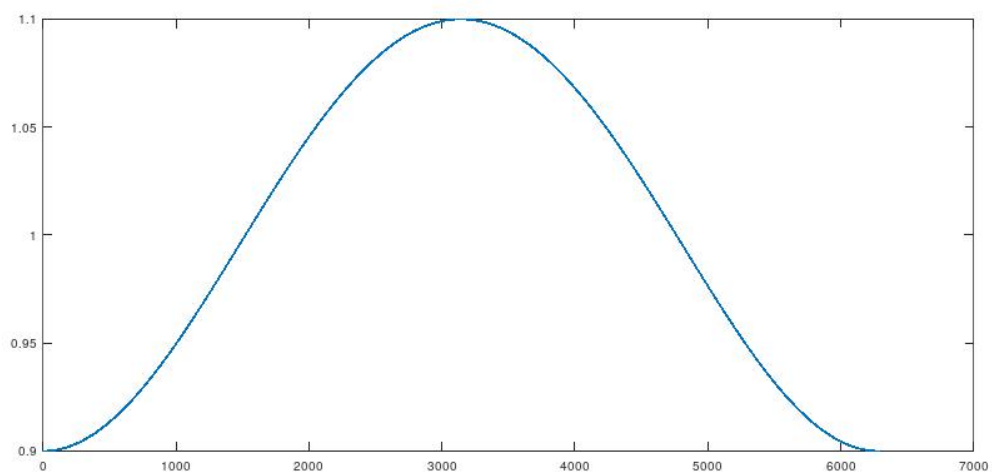
$z = 0.9$ 极点 无零点



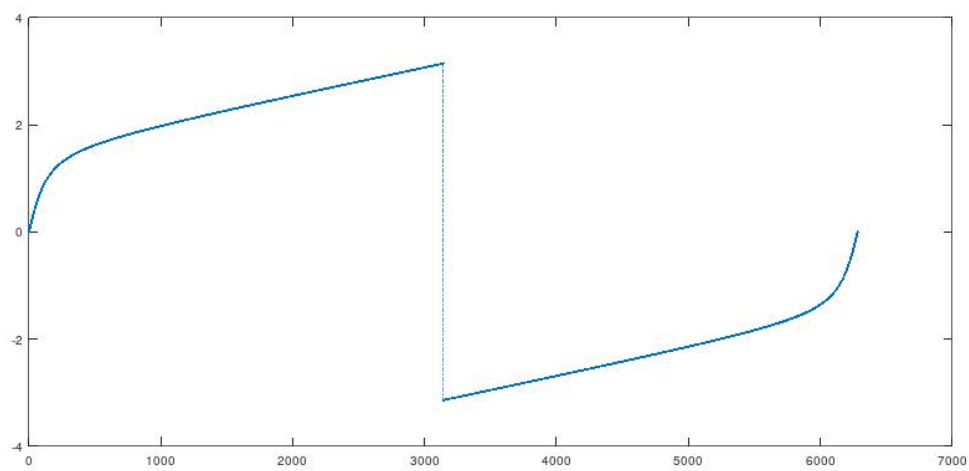
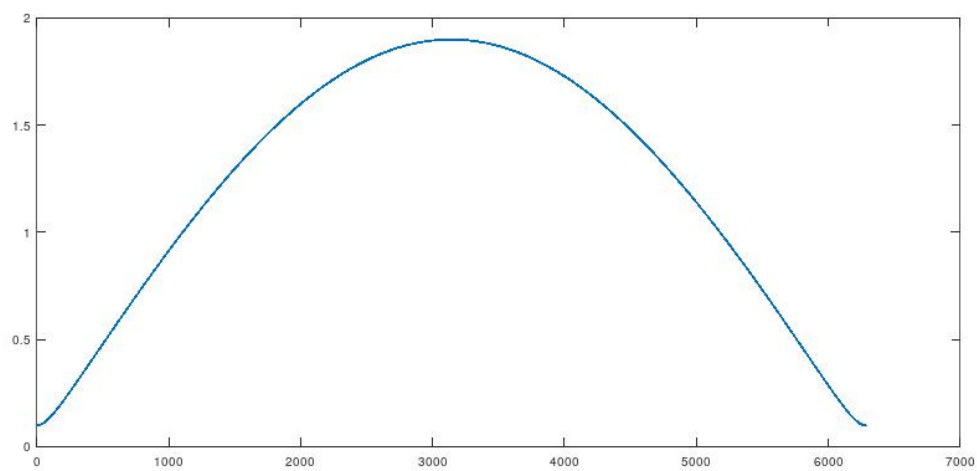
Z = 1.1 极点 无零点



$Z = 0.1$ 零点 无极点



$z = 0.9$ 零点 无极点



$Z = 1.1$ 零点 无极点

