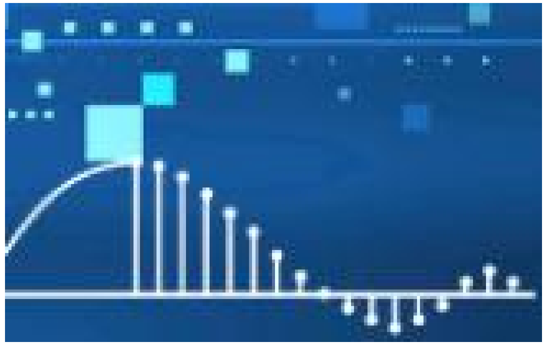
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第 三 章

Contents

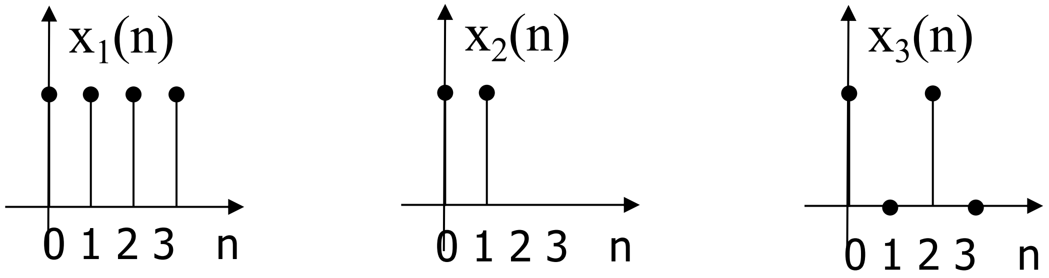
信号采样与重构

Test

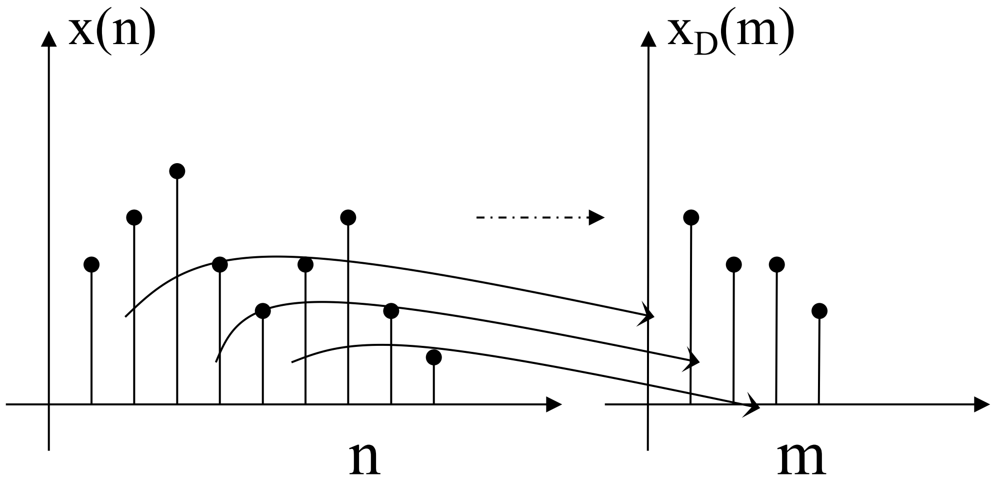
- 试用x(n)的Z变换和DTFT表示如下序列的Z变换和DTFT

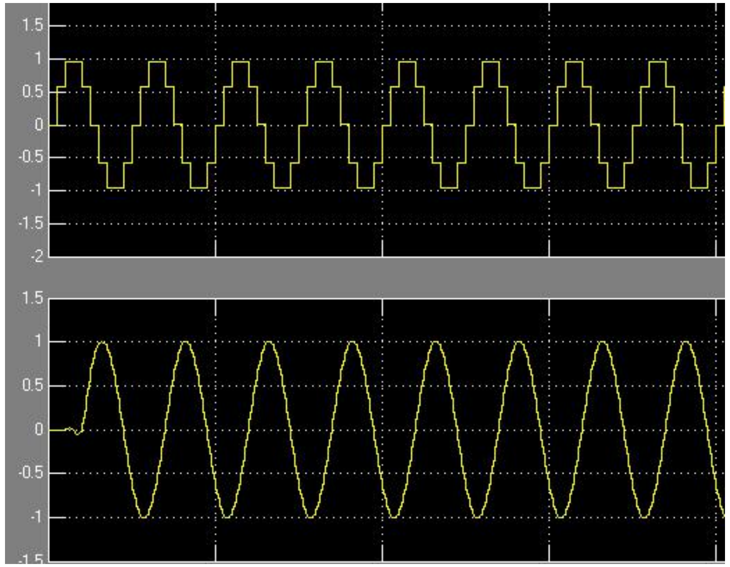
$$x_I(m)=\begin{cases} x(\frac{m}{I}) & (m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots) \\ 0 & esle \end{cases} \qquad x_D(m)=x(mD)$$

- 求如下三个序列的DTFT, 并指出相互之间的关系



抽　　取　　与　　内　　插





- 多速率是指对数据的速率进行改变，保持信息不丢失。
- 多速率处理并不只用来降速率（抽取），在某些场合下却是用来提升数据（内插）速率（如数字放音系统）。
- 深入理解和掌握抽取和内插理论对现代通信研究和各种商品化数字应用开发都至关重要。

3.2 抽取与内插

- 带通采样定理降低了射频采样速率，为实时处理奠定了基础。
- 但是，收发机的角度看，带通采样速率越宽越好。
  - 1、处理带宽越宽，对不同信号有更好的适应性；
  - 2、采样率越高，在相同的工作频率范围内所需的“盲区”采样频率数量就越少，利于简化系统设计；
  - 3、过采样可以利用相关技术提高采样量化信噪比。

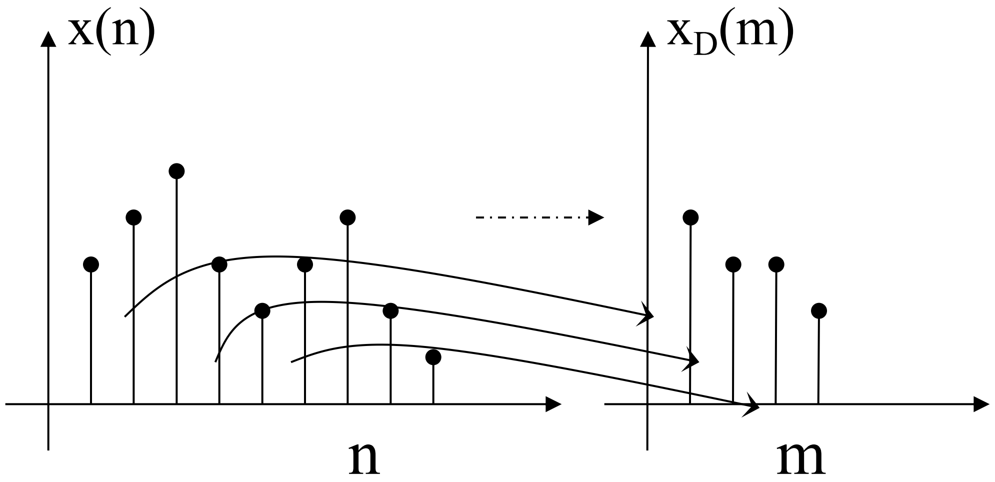
高采样率的新问题

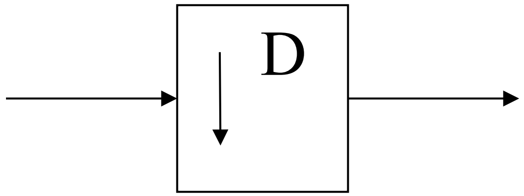
- 采样速率的提高，后续的信号处理速度跟不上，很难满足实时性要求。
- 有必要对A / D后的数据流进行降速处理。
- 是否有可能进行降速处理而又不至于丢失原连续信号的信息呢?
- 回答是肯定的！
  - 实际信号带宽一般为几十千赫兹到几百千赫兹，所需采样速率要求不高，对采样数据流进行降速处理或者叫做二次采样是完全可能的。

一、信号的整倍抽取

- 把原始采样序列 每D个数据取一个形成新序列,也叫**减采样(Downsampling, Decimation）**

$$x_D(m) = x(mD)$$





- 抽取器（采样压缩器）

抽取后频域的变化？

$$\delta_D(n)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi}{D}ni}=\begin{cases}1 & n=0,\pm D,\pm 2D,\ldots\ldots\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$x'(n)=x(n)\delta_D(n)=\begin{cases}x(n) & n=0,\pm D,\pm 2D,\ldots\ldots\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$x_D(n)=x(nD)=x'(nD)$$

$$X_D(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_D(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x'(nD)z^{-n}$$

由于$x'(m)$仅在m为D的整倍数处有值

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x'(m)z^{-m/D}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta_D(m)z^{-m/D}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(x(m)\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi}{D}mi}\right)z^{-m/D}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{j\frac{2\pi}{D}mi}z^{-m/D}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)^{-m}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)$$

抽取后频域的变化？

$$x(n) \Leftrightarrow Xs(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc(\Omega - k\Omega_0) \qquad \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T})$$

$$x_D(n) \Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc(\Omega - k\frac{\Omega_0}{D}) \Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT})$$

$$X_D(\omega) = \frac{1}{DT}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Xc(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT})$$

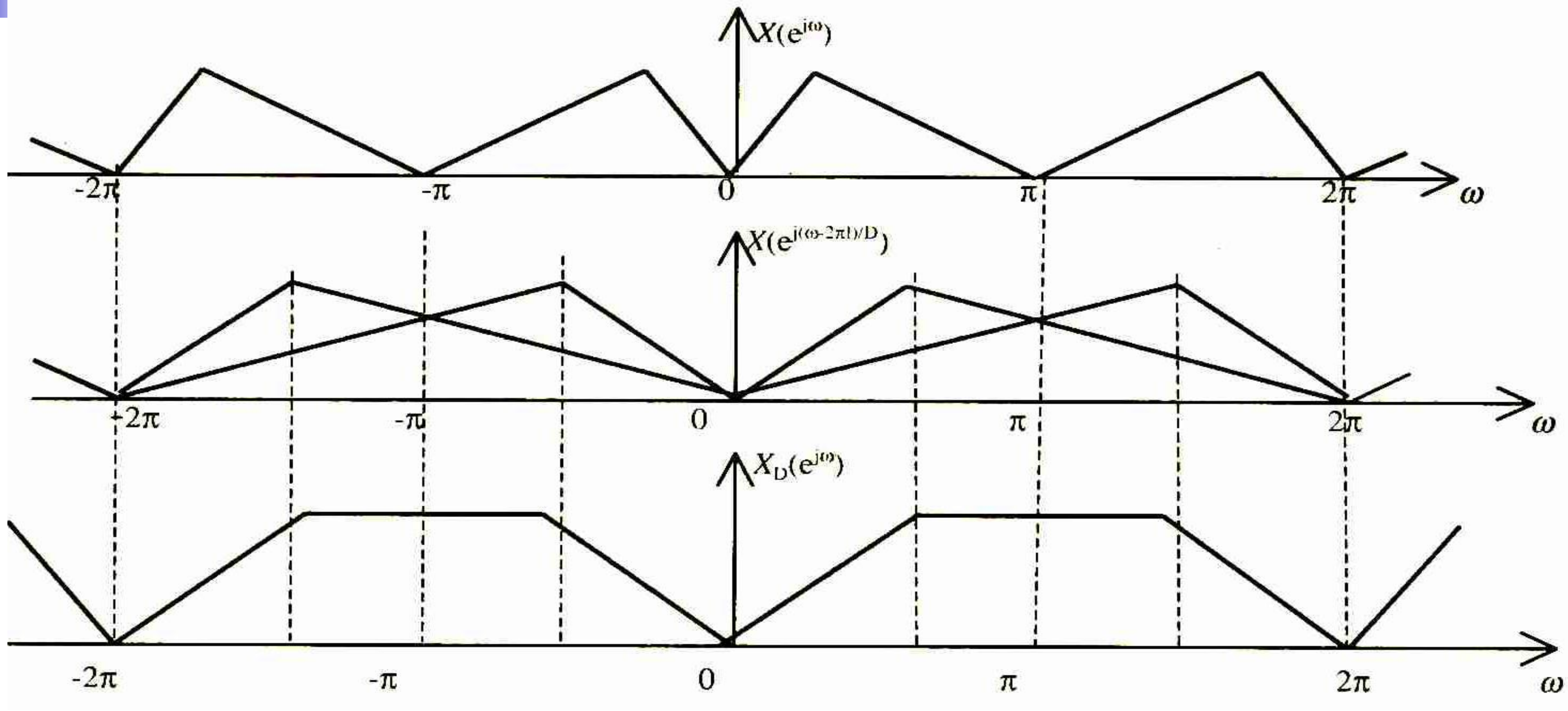
$$\overset{k->mD+i}{=} \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}[\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Xc(\frac{\omega}{DT} - m\frac{2\pi}{T} - i\frac{2\pi}{DT})]$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}[\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Xc(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m\frac{2\pi}{T})]$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(\omega')\Big|_{\omega' = \frac{\omega - 2\pi i}{D}}$$

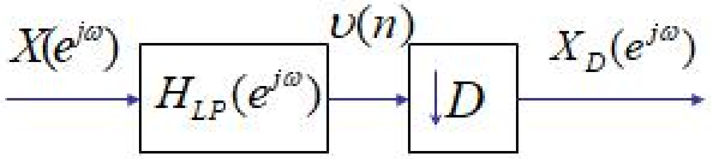
2倍抽取的频谱变化

$$X_D(\omega) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(\omega')\Big|_{\omega'=\frac{\omega-2\pi i}{D}}$$

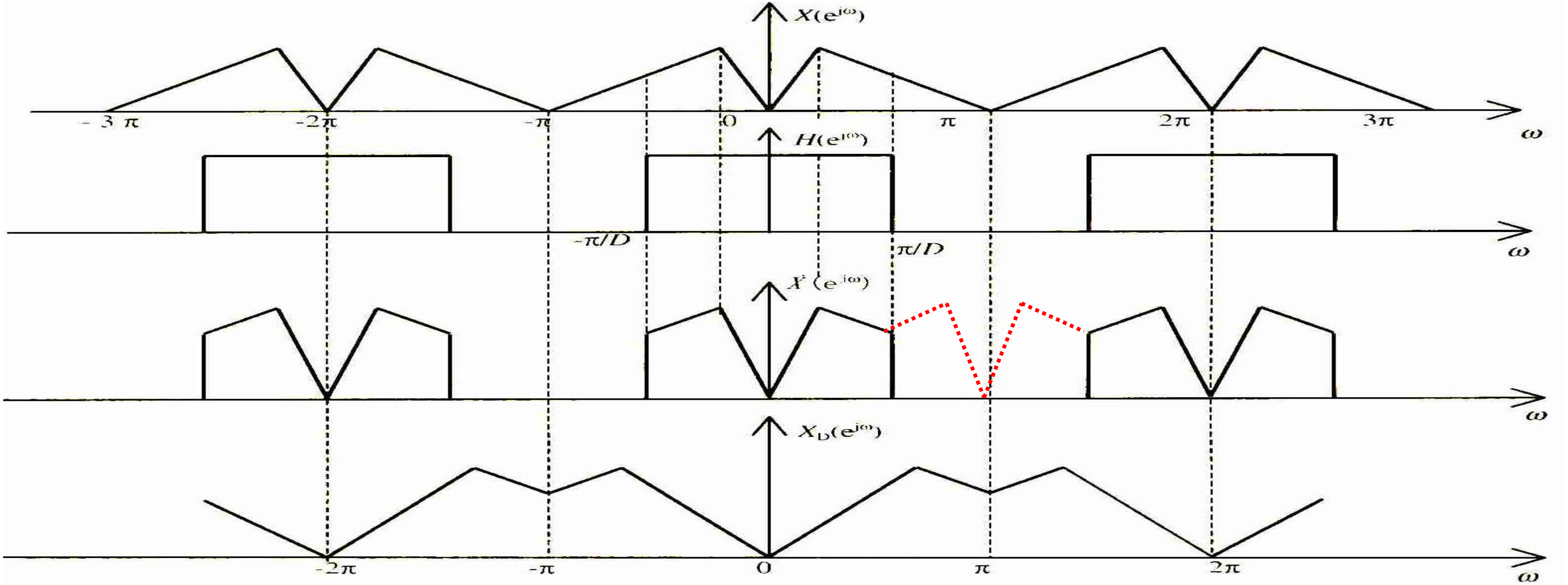


- 如果序列x(n)的采样率为Fs，则其无模糊带宽为Fs/2。
- D倍抽取后序列$x_D(m)$之取样率为Fs/D，其无模糊带宽为Fs/2D。
- 当x(n)含有大于Fs/2D频率分量时，$x_D(m)$必然频谱混叠，无法恢复x(n)某些频率分量。

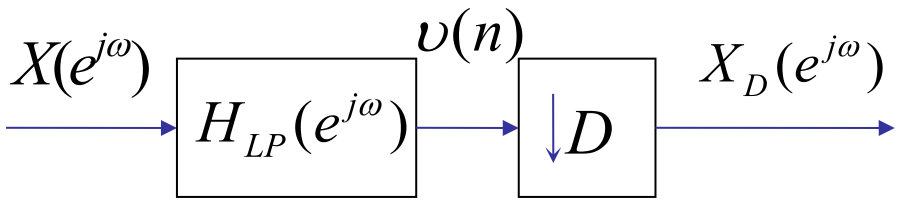
如何防止混叠失真？



- 先用数字滤波器(带宽为 $\frac{\pi}{D}$)滤波，再进行**D**倍抽取。保证抽取前后频谱成分一一对应，信息不丢失



D倍抽取器结构



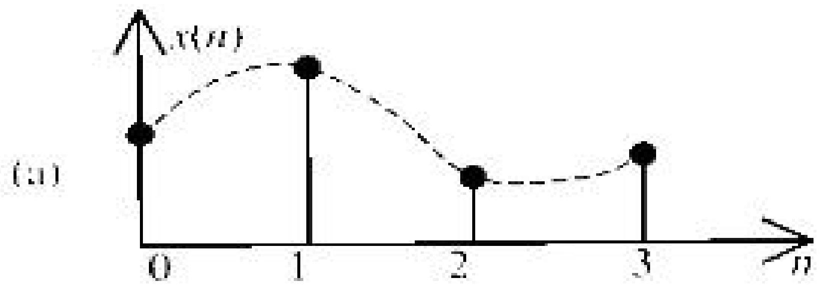
- 需要指出，即当原始信号的频谱分量本身就小于 $\frac{\pi}{D}$（归一化频域）时，前置低通滤波器可以省去。

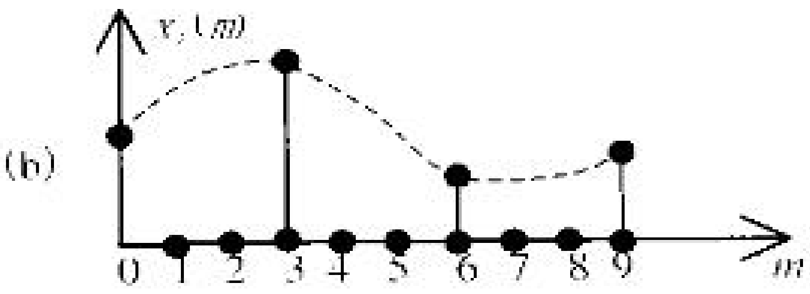
$$X_D(n)=\upsilon(Dn)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn-k)=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn-k)}$$

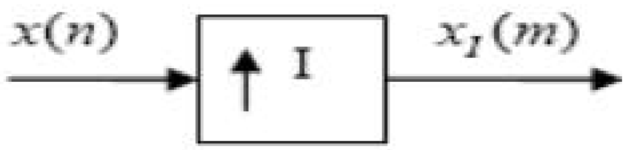
二、信号的整倍内插

- 所谓整数倍内插就是指在两个原始抽样点之间插入(D-1)个零值，也叫做**增采样（Upsampling, Interpolation)**。

$$x_I(m)=\begin{cases} x\left(\dfrac{m}{I}\right) & (m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots) \\ 0 & esle \end{cases}$$







内插信号频谱的变化

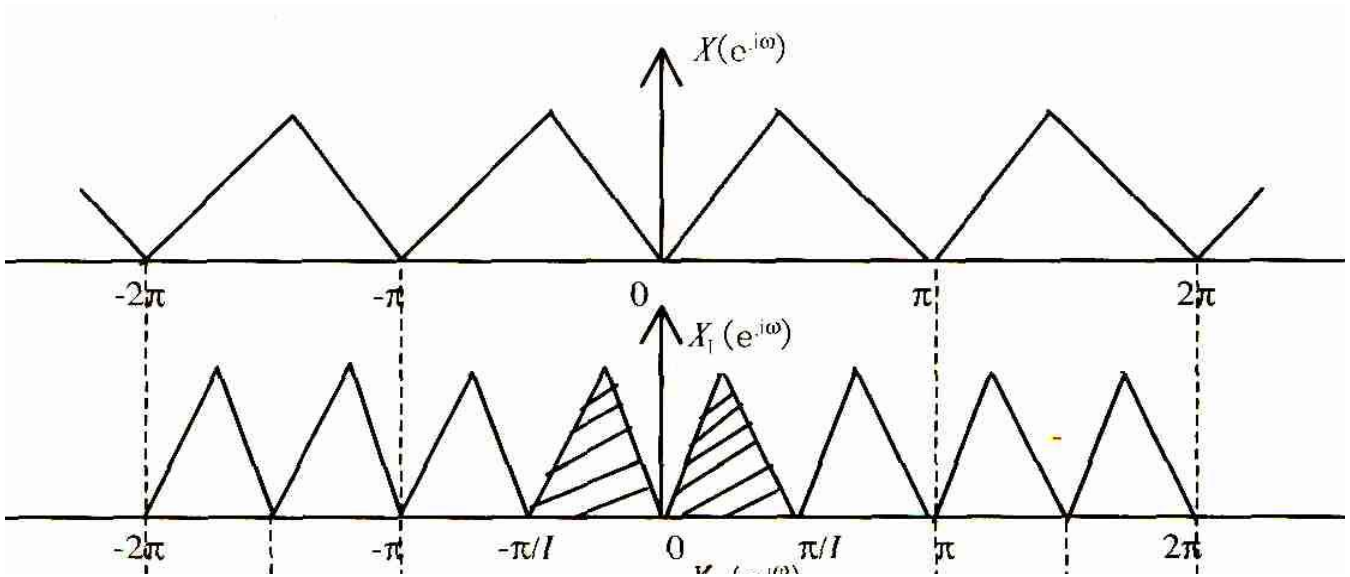
- $x_I(m)$除了m为I的整倍点，其余都为零，所以有：

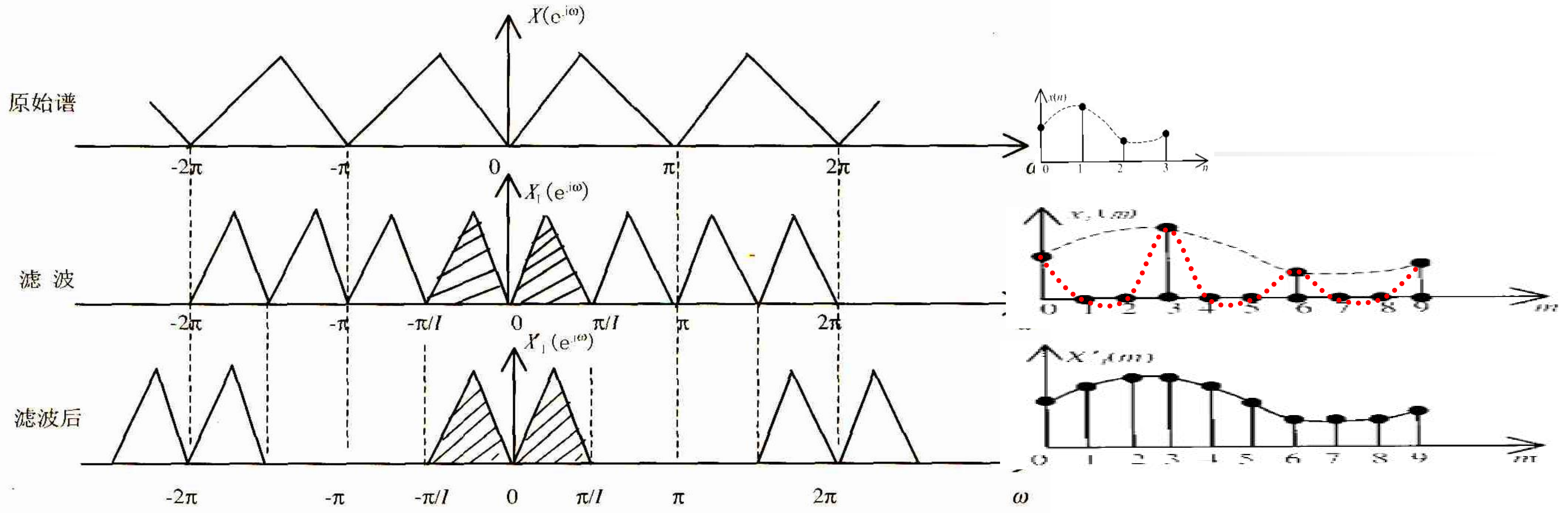
$$X_I(e^{j\omega})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_I(m) e^{-j\omega m}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_I(kI) e^{-j\omega Ik}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega Ik} = X(e^{j\omega I})$$

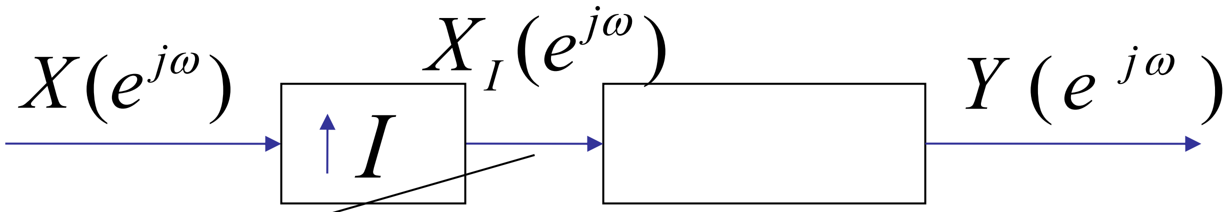




- **1、由上式可见，内插后的信号频谱为原始序列谱经I倍压缩后得到的谱。**
- **2、经低通滤波消去高频镜像之后，原来插入的零值点变为x(n)的准确内插值，经过内插大大提高了时域分辨率。**

完整内插器结构

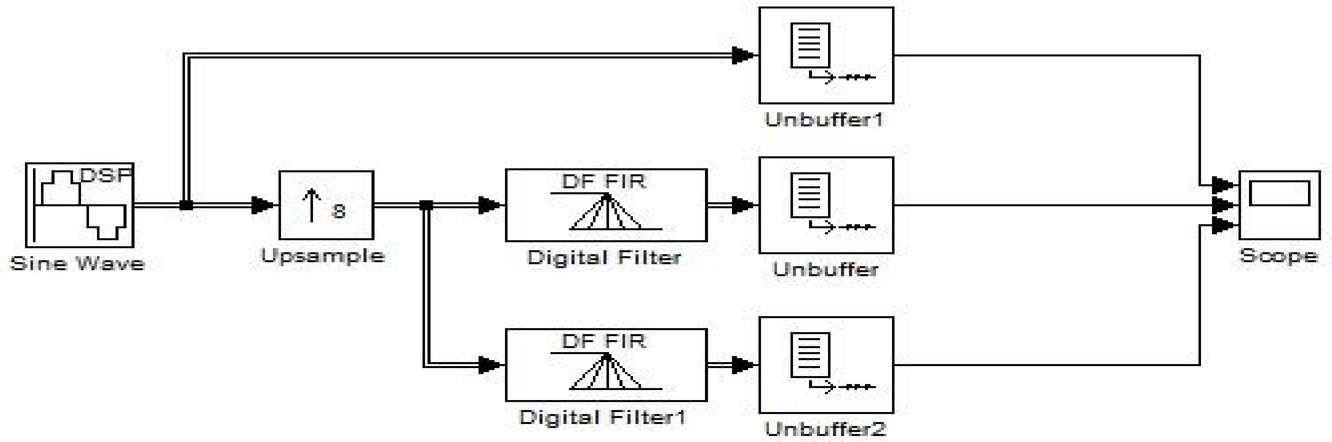
$$H_{LP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & else \\ I, & 0 \le |w| \le \dfrac{\pi}{I} \end{cases}$$

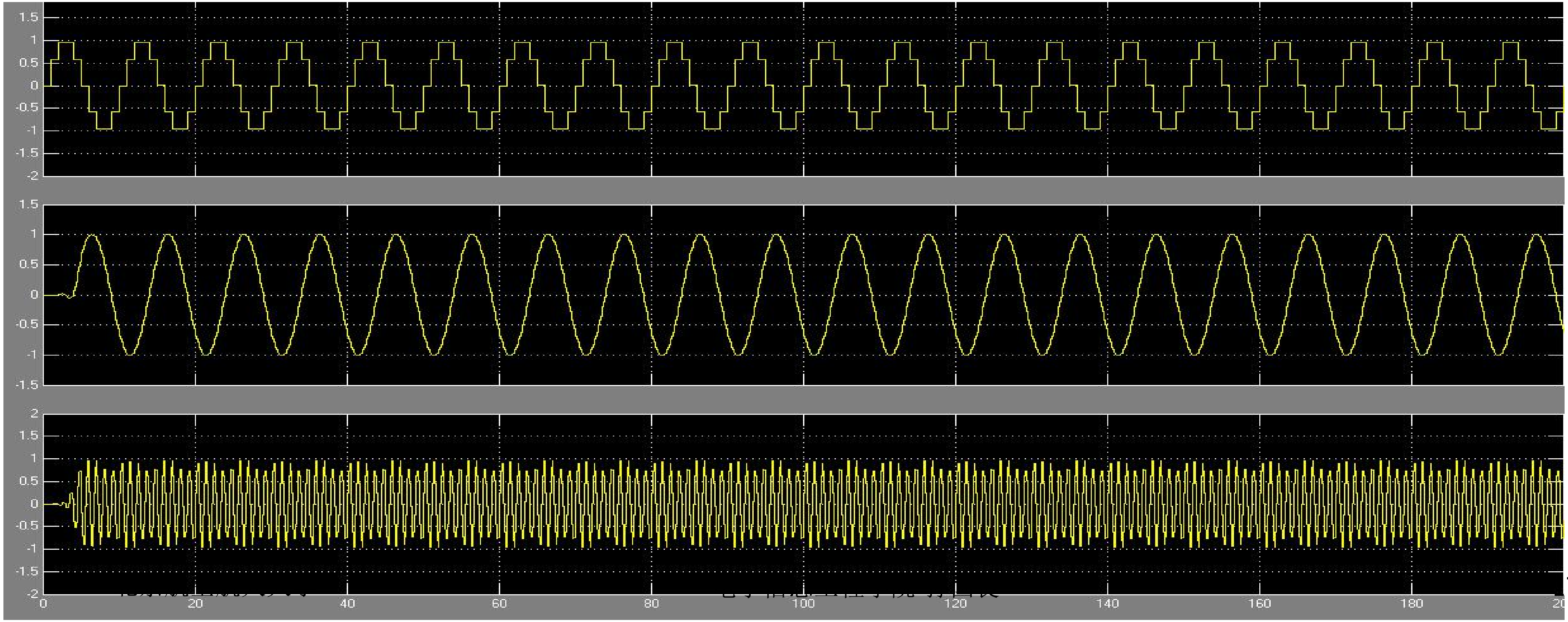


$$y(n) = \upsilon(n) * h(n) = \sum_k \upsilon(k) h(n-k) = \sum_k x(k/I) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-kI)$$

- 内插器的低通滤波器在内插之后，目的是为了滤除高频镜像分量
  - 抽取器的低通滤波器是在抽取之前，为了防止混叠干扰。
  - 如果在内插之后，不是采用低通，而是采用带通，则可将内插后的高频成分取出，这正是数字上变频的基本原理。

$$H_{BP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & else \\ I, & n\dfrac{\pi}{I} \le |w| \le (n+1)\dfrac{\pi}{I} \end{cases}$$


DSP
Sine Wave
8
Upsample
DF FIR
Digital Filter
DF FIR
Digital Filter1
Unbuffer1
Unbuffer
Unbuffer2
Scope


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
2
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180

三、信号非整倍抽取和内插

$$R = \frac{I}{D}$$

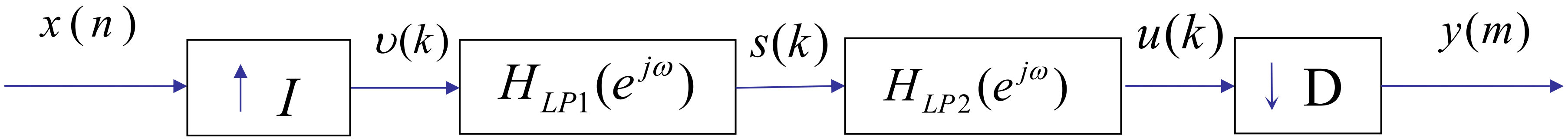
$$x(n) \rightarrow \boxed{H_{LP2}(e^{j\omega})} \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow \boxed{\uparrow I} \rightarrow \boxed{H_{LP1}(e^{j\omega})} \rightarrow y(m)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow I} \xrightarrow{v(k)} \underbrace{\boxed{H_{LP1}(e^{j\omega})} \xrightarrow{s(k)} \boxed{H_{LP2}(e^{j\omega})}}_{H(e^{j\omega})} \xrightarrow{u(k)} \boxed{\downarrow D} \rightarrow y(m)$$

- 分数倍变换可以通过先进行**I**倍内插再进行**D**倍抽取来实现。两个级联低通滤波工作在相同的速率，可以用一个组合滤波器来代替，即避免混叠又消除镜像干扰。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| \le \min\left(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

分数倍变换的频谱



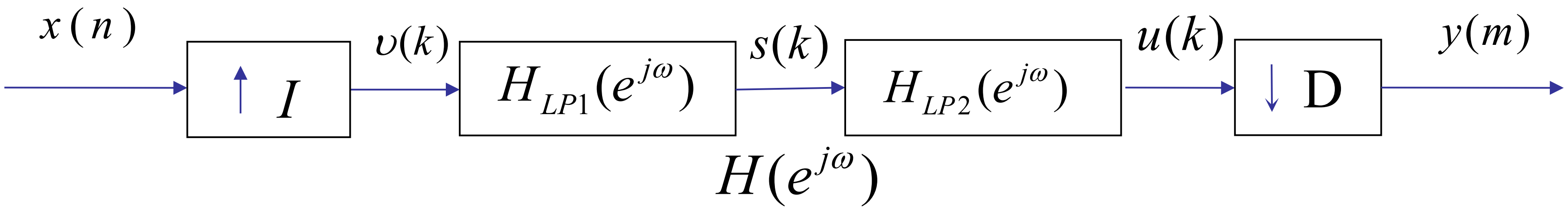
$$H(e^{j\omega})$$

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})$$

$$U(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})H(e^{j\omega}) = \begin{cases} IX(e^{j\omega I}) & |\omega| \le \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & else \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} U(e^{j(\omega - 2\pi k)/D}) = \begin{cases} \frac{I}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega I - 2\pi k)/D}) & |\omega| \le \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & else \end{cases}$$

分数倍变换的时域表示



$$\upsilon(n)=\begin{cases} x(n/I) & n=0,\pm I,\pm 2I\cdots \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$u(n)=\upsilon(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)\upsilon(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)x(k/I)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n)=u(Dn)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(Dn-Ik)$$

分数倍抽取时域运算的简化

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn - Ik)$$

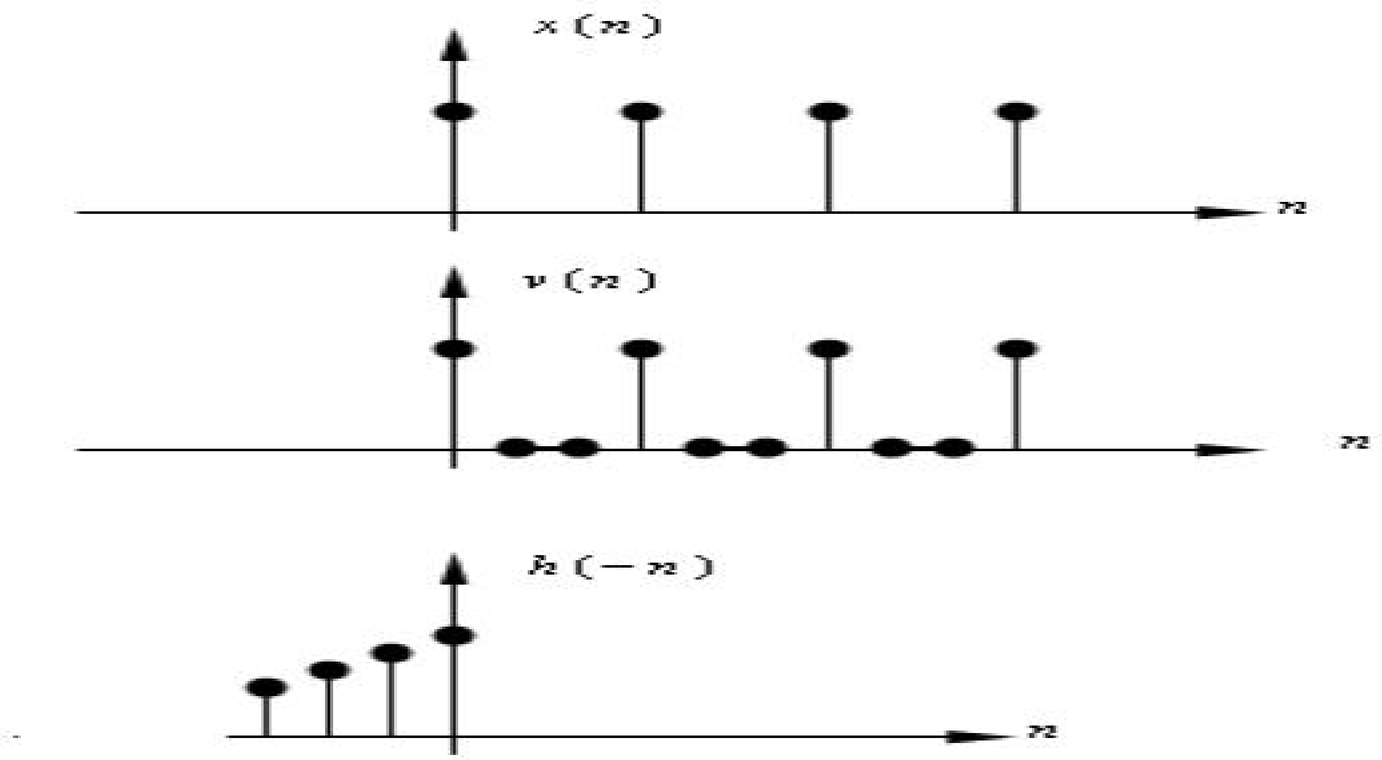
$$Dn - Ik \geq 0 \qquad k \leq \frac{D}{I}n \qquad 令：\ m = \left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor - k,\quad m \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor - m\right)h\left(Dn - \left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor I + mI\right)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor - m\right)h\left(mI + \langle Dn \rangle_I\right)$$

Example:

- 令I=3,D=2，x(n)和h(n)如图所示



1、求u(n)

$$u(n) = \upsilon(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)\upsilon(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

$$u(1) = \cancel{0 \cdot h(0)} + x(0)h(1) = x(0)h(1)$$

$$u(2) = \cancel{0 \cdot h(0)} + \cancel{0 \cdot h(1)} + x(0)h(2) = x(0)h(2)$$

$$u(3) = x(1)h(0) + \cancel{0 \cdot h(1)} + \cancel{0 \cdot h(2)} + x(0)h(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)$$

$$\vdots$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

$$\cancel{u(1) = x(0)h(1)}$$

$$u(2) = x(0)h(2)$$

$$\cancel{u(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)}$$

$$u(4) = x(1)h(1)$$

$$\vdots$$

2、求y(n)

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\left\lfloor\frac{Dn}{I}\right\rfloor-m\right)h\left(mI+\langle Dn\rangle_I\right)$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor-m\right)h\left(3m+\langle 2n\rangle_3\right)$$

$$y(0)=\sum_{m=0}^{\infty}x(-m)h(3m)=x(0)h(0)=u(0)$$

既避免了与插值后为零的点相乘的多余运算，又避免了被舍弃点的多余计算。

$$y(1)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\left\lfloor\frac{2}{3}\right\rfloor-m\right)h\left(3m+\langle 2\rangle_3\right)=\sum_{m=0}^{\infty}x(-m)h(3m+2)=x(0)h(2)=u(2)$$

$$y(2)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\left\lfloor\frac{4}{3}\right\rfloor-m\right)h\left(3m+\langle 4\rangle_3\right)=\sum_{m=0}^{\infty}x(1-m)h(3m+1)=x(1)h(1)=u(4)$$

四、速率变换的多相结构

- 问题：
- 抽取和内插器中数字滤波处理发生在高采样率数据端上，需要很大的计算量，有时甚至难以实现。

- 解决途径：
- 信号的多相表示应用于多速率处理中以提高处理效率。

1、信号及滤波器的多相表示

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$=h_0+h_4z^{-4}+h_8z^{-8}+h_{12}z^{-12}+\cdots$$

$$+h_1z^{-1}+h_5z^{-5}+h_9z^{-9}+h_{13}z^{-13}+\cdots$$

$$+h_2z^{-2}+h_6z^{-6}+h_{10}z^{-10}+h_{14}z^{-14}+\cdots$$

$$+h_3z^{-3}+h_7z^{-7}+h_{11}z^{-11}+h_{15}z^{-15}+\cdots$$

$$=z^{0}\left[h_0+h_4z^{-4}+h_8z^{-8}+h_{12}z^{-12}+\cdots\right]$$

$$+z^{-1}\left[h_1+h_5z^{-4}+h_9z^{-8}+h_{13}z^{-12}+\cdots\right]$$

$$+z^{-2}\left[h_2+h_6z^{-4}+h_{10}z^{-8}+h_{14}z^{-12}+\cdots\right]$$

$$+z^{-3}\left[h_3+h_7z^{-4}+h_{11}z^{-8}+h_{15}z^{-12}+\cdots\right]$$

$$H(z)=\sum_{l=0}^{M-1}z^{-l}\sum_{n=0}^{\infty}h(Mn+l)z^{-Mn}$$

$$E_l(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(Mn+l)z^{-n}$$

$$H(z)=\sum_{l=0}^{M-1}z^{-l}E_l(z^M)$$

$$e_l(n)=h(Mn+l)$$

$$E_l(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e_l(n)z^{-n}$$

$$H(z)=\sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \qquad h_l^{(E)}(n)=h(Mn+l)$$

$$E_l(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-n}$$

多相—I型

$$H(z)=\sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_l(z^M) \qquad h_l^{(R)}(n)=h(Mn+M-1-l)$$

$$R_l(z)=E_{M-1-l}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+M-1-l) z^{-n}$$

多相—II型

$$H(z)=\sum_{l=0}^{M-1} z^{l} Q_l(z^M) \qquad h_l^{(Q)}(n)=h(Mn-l)$$

$$Q_l(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(Mn-l) z^{-n}$$

多相—III型

系统的多相分解示例

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} \qquad M = 2$$

$$E_0(z) = 1 + 3z^{-1} \qquad E_1(z) = 2 + 4z^{-1}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-2}} + \frac{\alpha z^{-1}}{1-\alpha^2 z^{-2}}$$

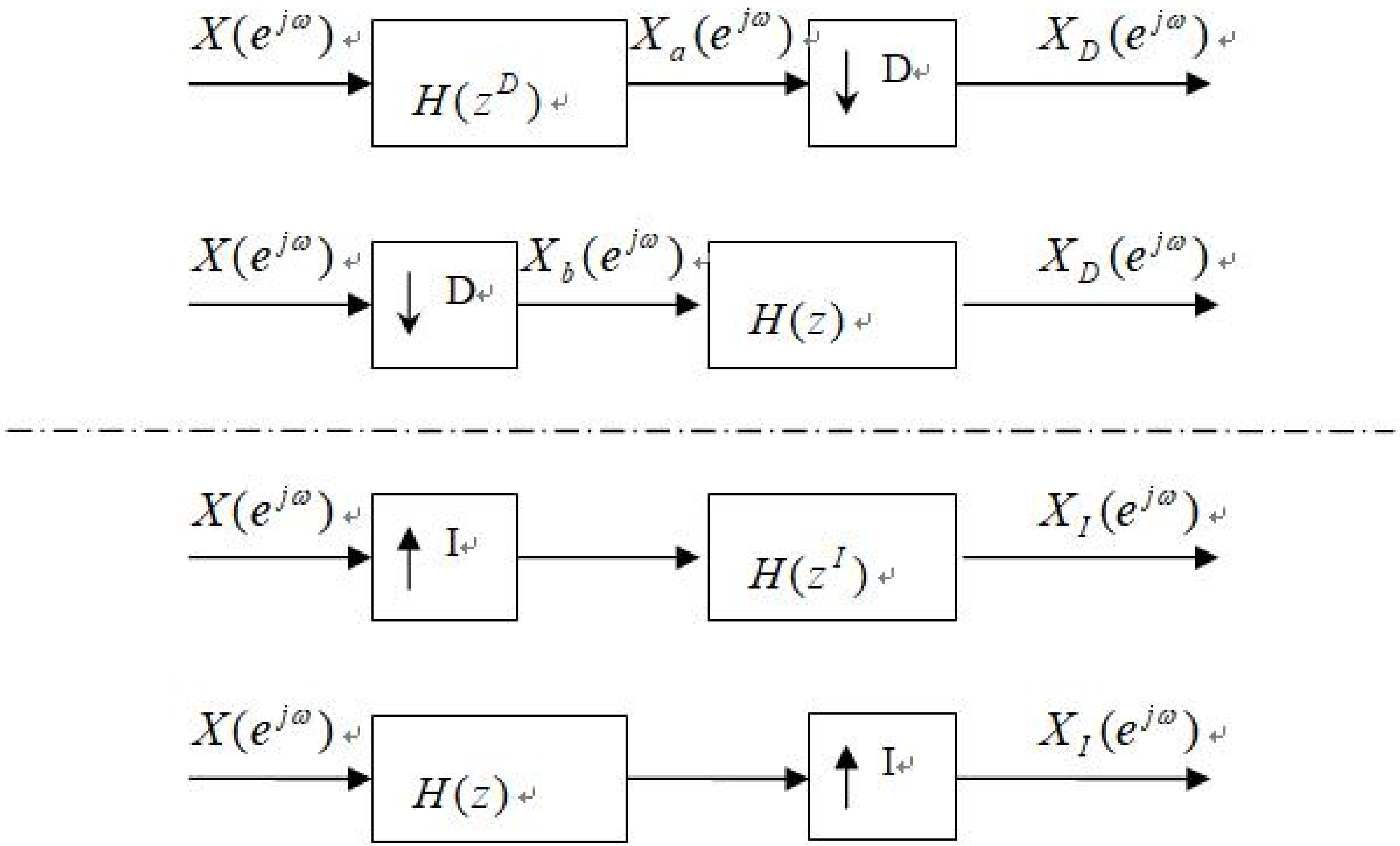
$$E_0(z) = \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-1}} \qquad E_1(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2 z^{-1}}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

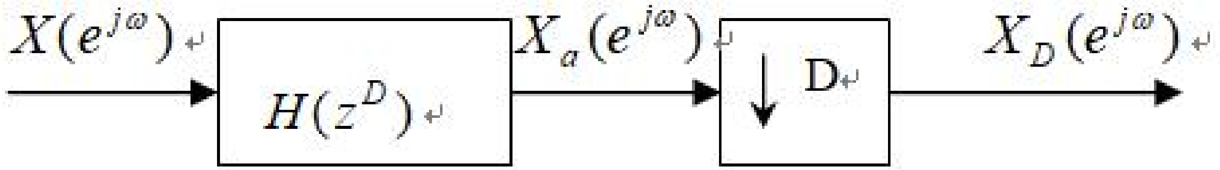
2、 内插/抽取的多相实现

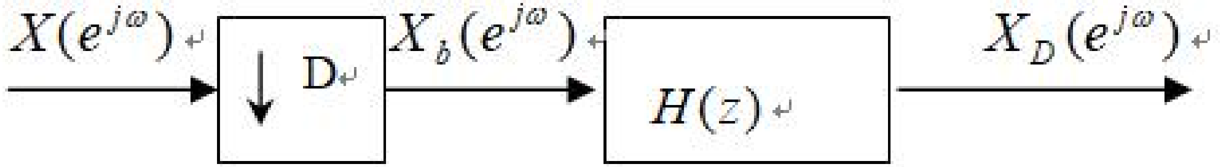
- 从抽取和内插器来看，其低通滤波器皆工作在高数据率条件下，势必对运算速度的要求很高，不利于实时处理。
- 那么是否可以将滤波器变换到数据率的低端进行工作呢？

变速率处理多相实现结构



抽取器多相结构等效证明



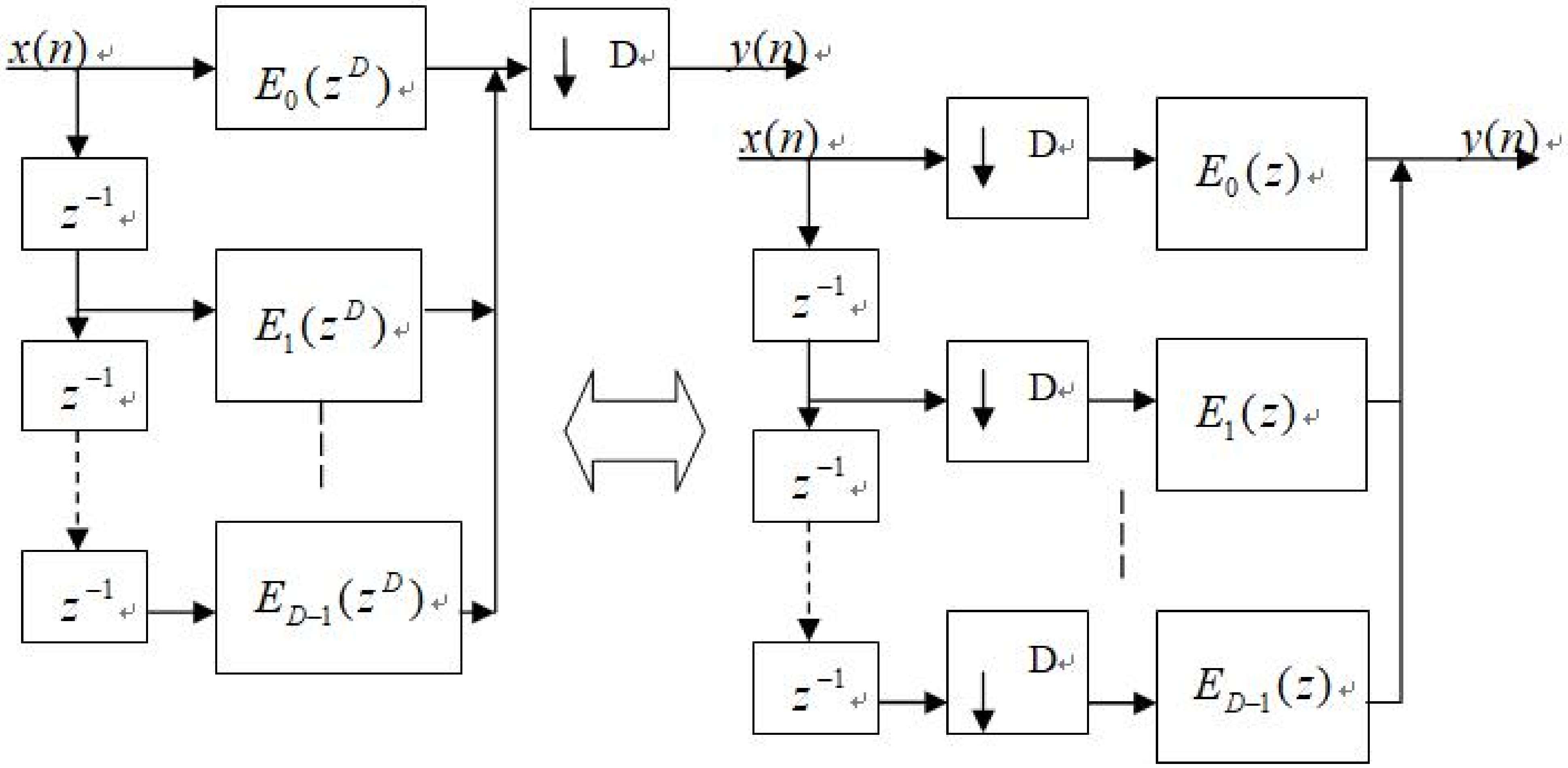


$$X_D(e^{j\omega}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X_a(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}})$$

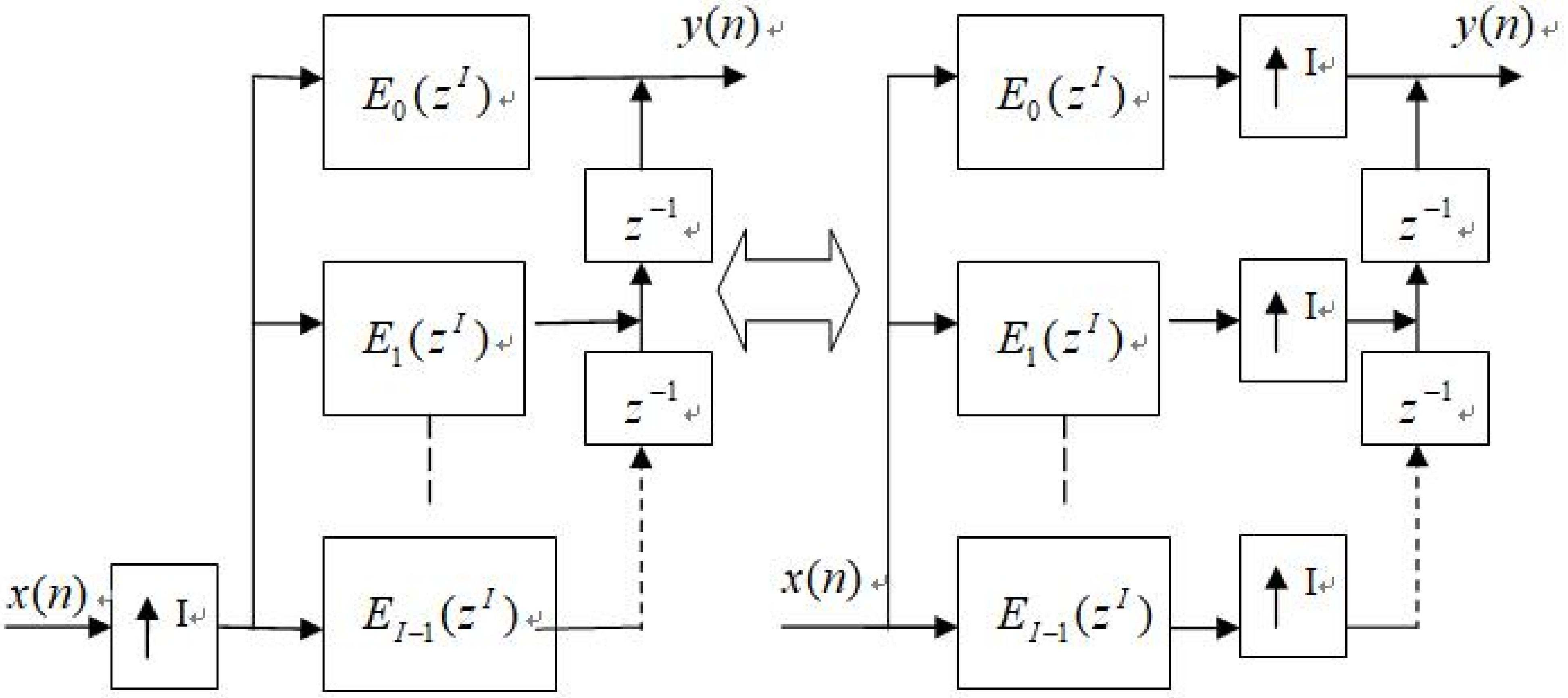
$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}D})X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}})$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\omega})X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}}) = \left[\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi i}{D}})\right]H(e^{j\omega})$$

抽取器的等效多相滤波结构



内插器的等效多相滤波结构



作业:

- 4.15
- 4.18
- 4.36
- 4.40
- 4.53

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn