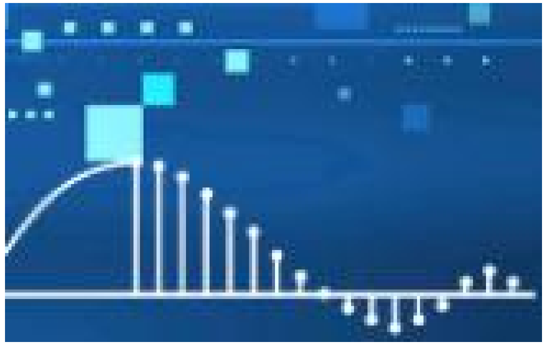
北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第 二 章

Contents

离散时间系统变换域分析

离散时间傅里叶变换（DTFT）

- 定义？涵义？
- 基本序列的DTFT？
- DTFT的主要性质定理？

学习方法：
结论比过程重要！！！

一、DTFT及逆变换定义

- 序列的傅立叶变换（DTFT）用来表示离散时间非周期信号及其傅立叶频谱之间的关系。

- 正变换：$DTFT\,[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

- 反变换：$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

  - 由于三角函数的周期性，反变换积分区间可以为任何一个周期区间。

二、DTFT反变换推导

$$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(k-n) = x(n)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = Sa[\pi(n-k)] = \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

DTFT反变换隐藏的涵义:信号分解

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{[X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega]}{2\pi}e^{jk\Delta\omega n}$$

三、典型序列的傅立叶变换：

- （一）单位冲激序列

$$DTFT\ [\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = x(0) e^{-j\omega 0} = 1$$

- （二）单位常数序列

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi) \Longrightarrow x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = 1$$

- （三）单位阶跃序列

$$DTFT\ [u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

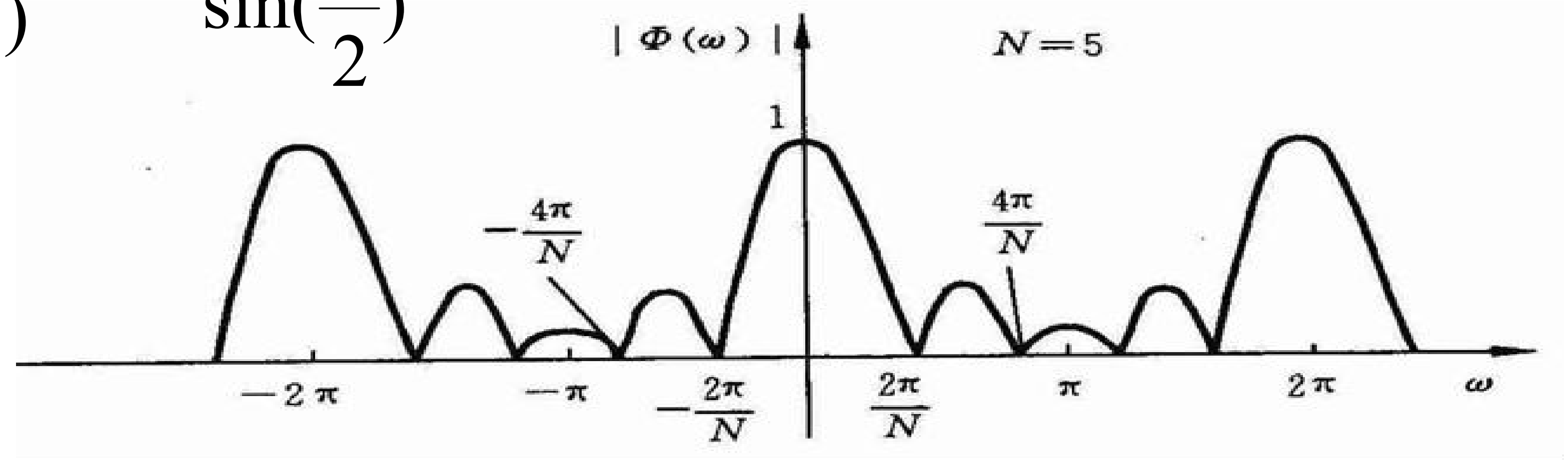
- （四）指数序列

$$DTFT\ [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

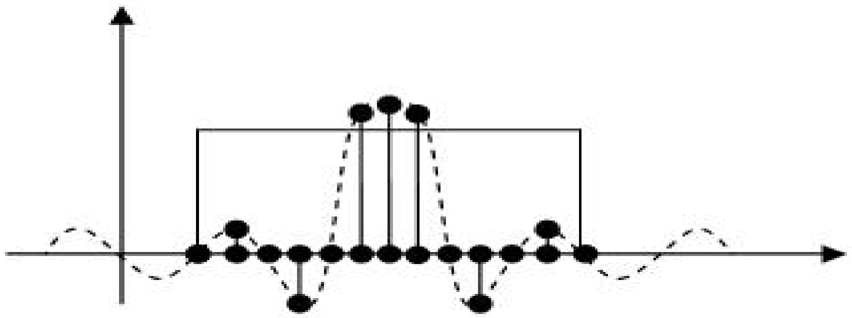
矩形窗的DTFT

$$DTFT[W(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}\left(e^{j\frac{N\omega}{2}} - e^{-j\frac{N\omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$



理想低通滤波器



- 截止频率为 w_c 的理想低通滤波器

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \le w \le w_c \\ 0 & w_c < w \le \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin\left[w_c(n-\alpha)\right]}{w_c(n-\alpha)}$$

四、序列傅立叶变换的主要性质

- 1、线性

$$ax(n)+bh(n) \longrightarrow aX(e^{jw})+bH(e^{jw})$$

- 2、时域平移->频域调制

$$x(n-m) \longrightarrow e^{-jwm}X(e^{jw})$$

- 3、时域调制->频域平移

$$e^{jnw_0}x(n) \longrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$DTFT\,[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$
$$DTFT\,[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$
$$DTFT\,[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

- 4、时域翻褶

$$x(-n) \longrightarrow X(e^{-jw})$$

- 5、时域相乘

$$x(n)h(n) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

- 6、时域卷积

$$x(n) * h(n) \qquad X(e^{jw})H(e^{jw})$$

- 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})Y^*(e^{jw})dw$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 \, dw$$

8、DTFT的对称性

- 共轭对称序列： $x_e(n) = x_e^*(-n)$
- 共轭反对称序列： $x_o(n) = -x_o^*(-n)$
- 可以证明：

$$\mathrm{Re}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[x_e(-n)]$$

$$\mathrm{Im}[x_e(n)] = -\mathrm{Im}[x_e(-n)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &|x_e(n)| = |x_e(-n)| \\ &Arg\,[x_e(n)] = -Arg\,[x_e(-n)] \end{aligned}}$$

$$\mathrm{Re}[x_o(n)] = -\mathrm{Re}[x_o(-n)]$$

$$\mathrm{Im}[x_o(n)] = \mathrm{Im}[x_o(-n)]$$

$$|x_o(n)| = |x_o(-n)|$$

$$Arg\,[x_o(n)] = \pi - Arg\,[x_o(-n)]$$

共轭反对称序列的性质如何？？

序列共轭分量的傅立叶变换与序列傅立叶变换的共轭分量

$$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$
$$DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$
$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$
$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

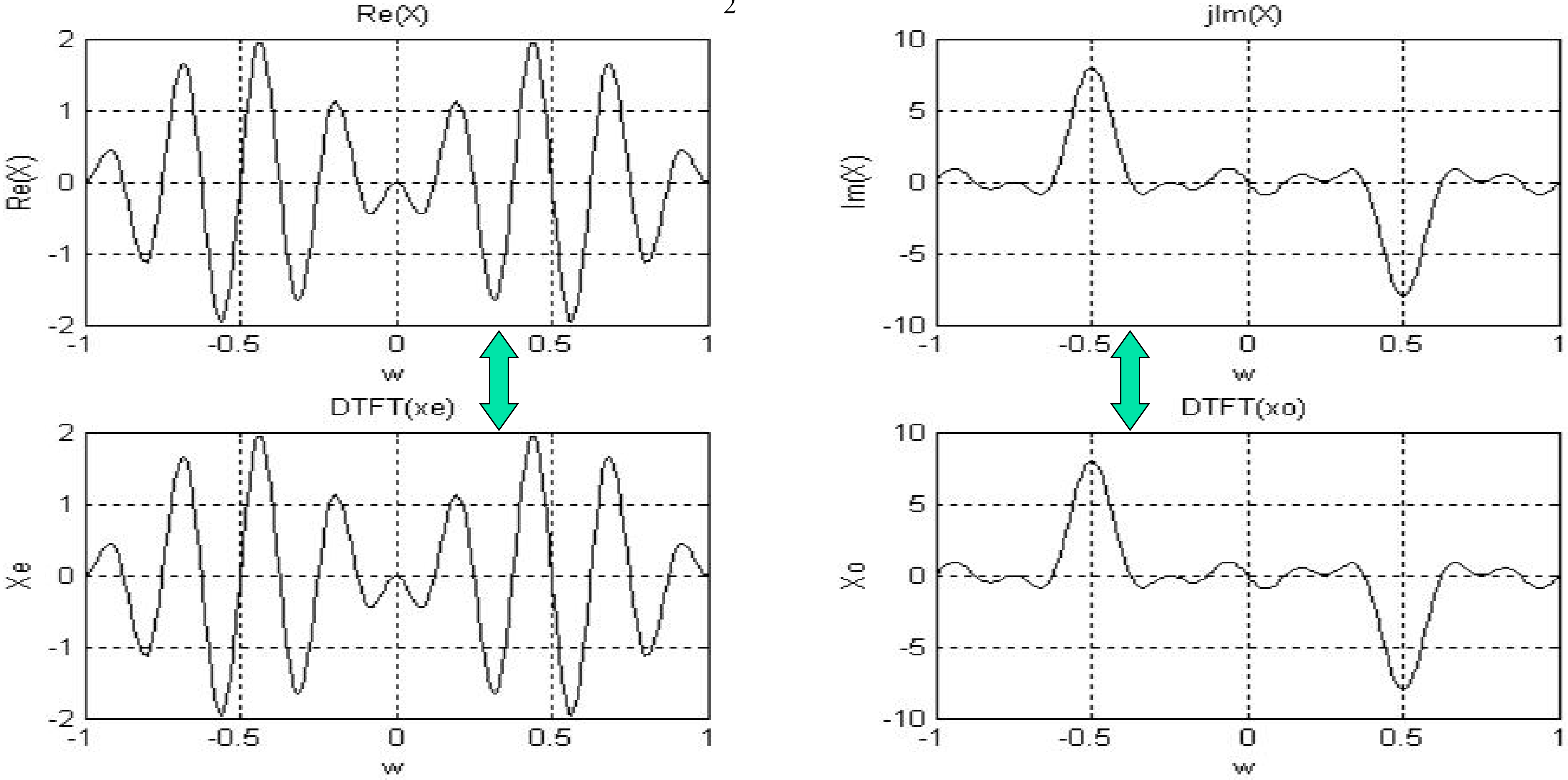
$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$
$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$
$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

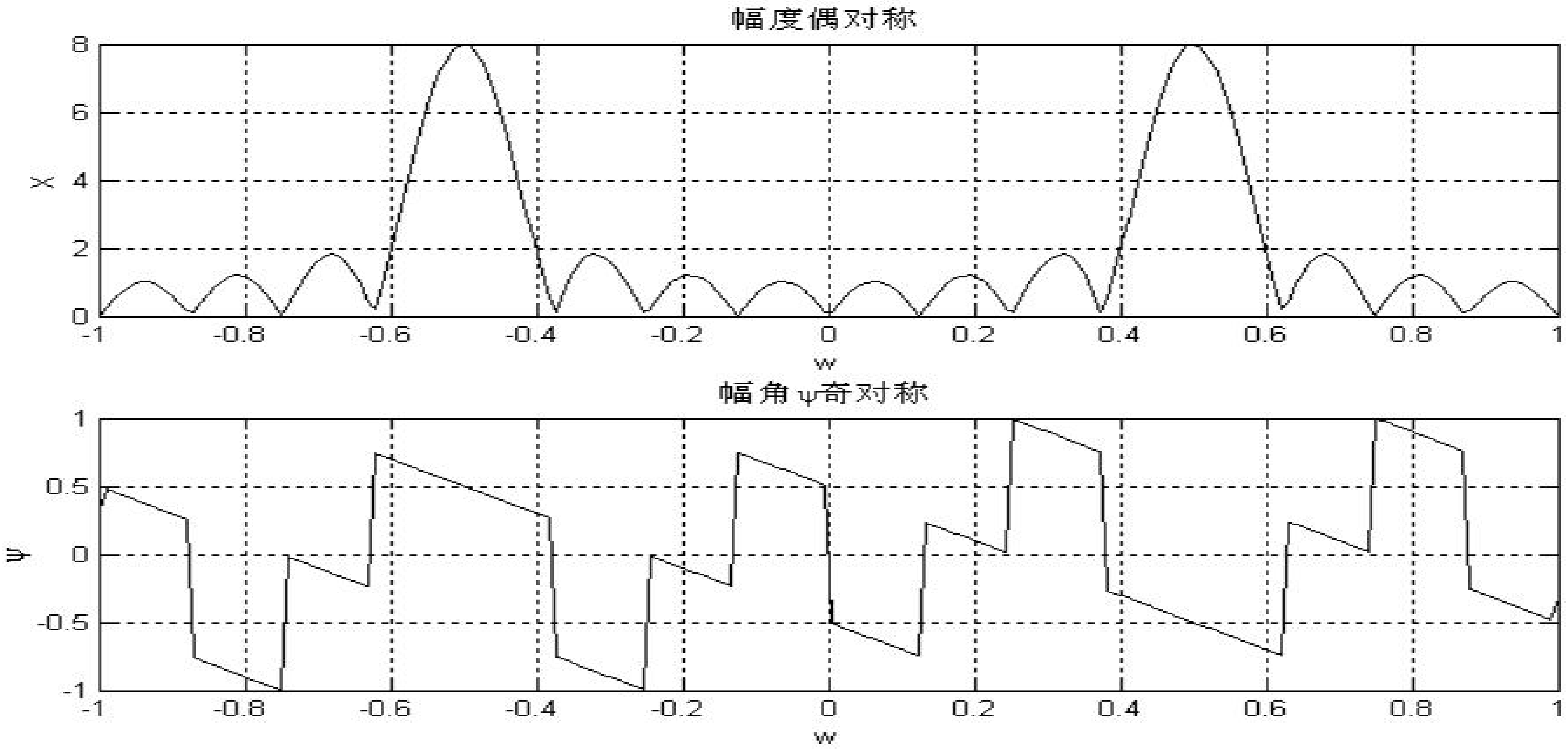
$$DTFT[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$
$$DTFT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$DTFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$
$$DTFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

$$x(n)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad -5 \le n \le 10$$




幅度偶对称
8
6
X 4
2
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
w
幅角ψ奇对称
1
0.5
ψ 0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
w

CTFT Vs DTFT

表 1 连续时间和离散时间的典型基本信号傅立叶变换对比

连续信号 $x(t)$	CTFT $X(j\omega)$	离散信号 $x(n)$	主周期内的 DTFT $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$\delta(n-r)$	$e^{-ir\Omega}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{i\omega}+\pi(\omega)$	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-e^{-i\Omega}}+\pi(\Omega)$
$e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha>0$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$	$a^n u(n)$, $\lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-i\Omega}}$
$te^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha>0$	$\dfrac{1}{(a+i\omega)^2}$	$na^n u(n)$, $\lvert a\rvert<1$	$\dfrac{ae^{-i\Omega}}{(1-ae^{-i\Omega})^2}=\dfrac{ae^{i\Omega}}{(e^{i\Omega}-a)^2}$
$\tau Sa(\dfrac{\tau t}{2})$	$2\pi G_\tau(\omega)$	$\dfrac{\Omega_c}{\pi}Sa(\Omega_c n)$	$G_{2\Omega_c}(\Omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$e^{i\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$\cos\Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$

例题1：求和式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$

- 解：

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$y^*[n] = \frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*\left(e^{-j\omega}\right) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore\ Y^*\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore\ 左 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{10}\, d\omega = \frac{1}{60}$$

例题2

- 令 $x[n]$和$X(e^{j\omega})$分别代替一个序列及其傅里叶变换，利用
- $X(e^{j\omega})$ 表示如下序列的傅立叶变换

$$y_s[n]=\begin{cases} x[n], & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

- 解： $$y_s[n]=\frac{1}{2}\left\{x[n]+(-1)^n x[n]\right\}=\frac{1}{2}\left\{x[n]+e^{j\pi n}x[n]\right\}$$

$$Y_s(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})+\frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\pi)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[2n]e^{-j2n\omega}$$

例题3

- 若实序列 $x[n]$ 的DTFT为X(w),且
- X(0.2)=9e-j0.7;
- 1) X(-0.2)=?
- 2) 若y(n)=x(-n+2),求Y(-0.2);

离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

Z 变 换 及 反 变 换

- 定义
- 收敛域?
- 性质定理
- 反变换

一、Z变换定义及收敛域

- 设序列为x(n)，则幂级数：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

- 称为序列x(n)的Z变换，其中z为变量。也可记作：

$$Z[x(n)]=X(z)$$

- 幂级数收敛时，Z变换才有意义。Z变换收敛的所有z值的集合称为收敛域。
- 在收敛域内，Z变换处处解析，不含任何奇异点。

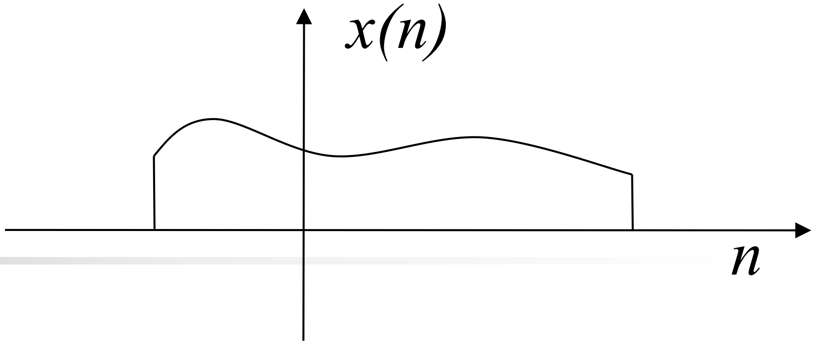
二、不同序列的收敛域

- 根据级数理论，幂级数收敛的充分且必要条件是该级数绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = M < \infty$$

- 对于不同形式的序列，其收敛域的形式亦有所不同，分类讨论如下

1、有限长序列

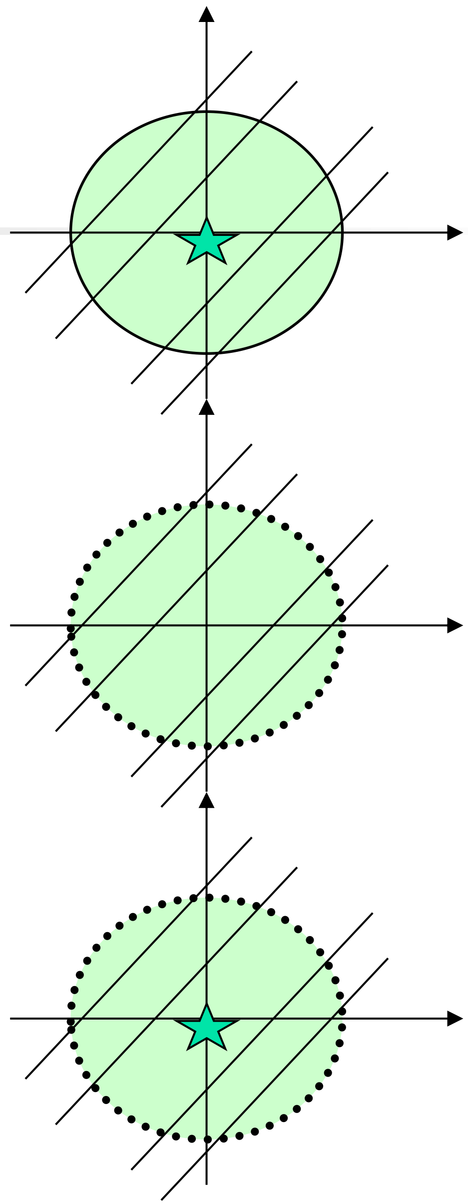


$$x(n)=\begin{cases}\text{有值} & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- X(z)为有限项级数之和，只要级数的每一项有界，则级数就是收敛的。
- 收敛域至少包括有限Z平面

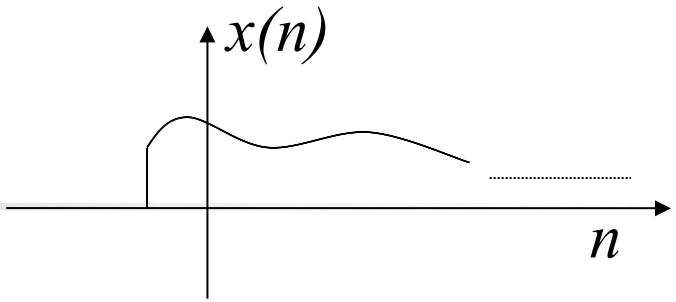
$$0<|z|<\infty$$

- 根据区间的不同，级数有可能在**原点**和**无穷远**出现奇异点，故仍可细分为如下三种情况：
- **1**）、**正半轴**有限长序列，其收敛域为**有限Z平面和无穷远点**；
- **2**）、**负半轴**有限长序列，其收敛域为**有限Z平面和原点**；
- **3**）、跨原点有限长序列，则收敛域仅为**有限Z平面**；



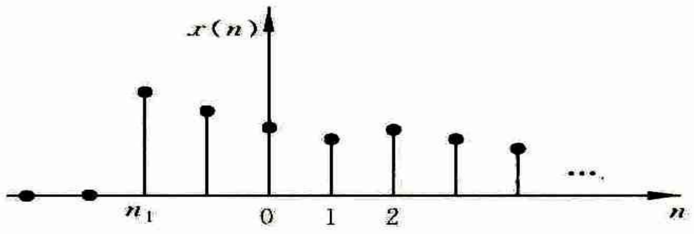
2、右边序列

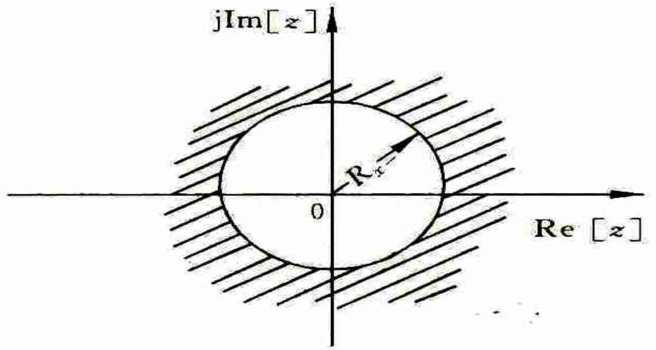
$$x(n) = \begin{cases} 有值 & n_1 \le n \\ 0 & 其他 \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

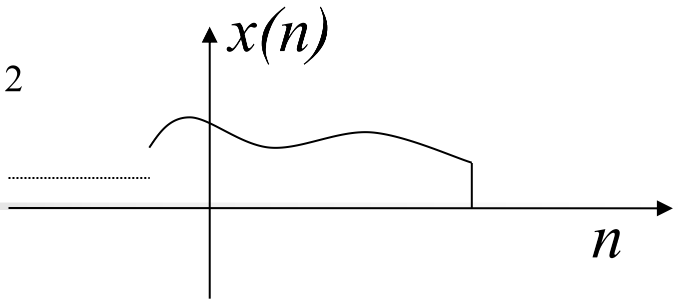
- 第一部分若存在，则为一负半轴有限长序列，其收敛域为不包括无穷远点的所有Z平面。第二部分是z的负幂级数，由阿贝尔定理可知，存在一个最小的收敛半径，在此半径外的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不为零的有限半径处向外扩张的有限Z平面；若 $n_1 \ge 0$，还要包括无穷远点，此时的序列为因果序列。





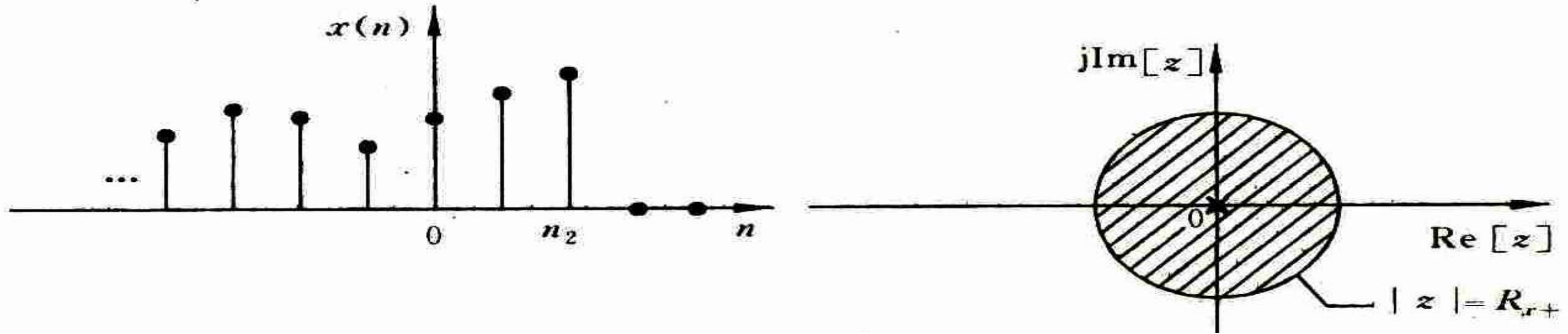
3、左边序列

$$x(n)=\begin{cases}\text{有值} & n\le n_2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}=\left\langle\sum_{n=1}^{n_2}x(n)z^{-n}\right\rangle+\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}$$

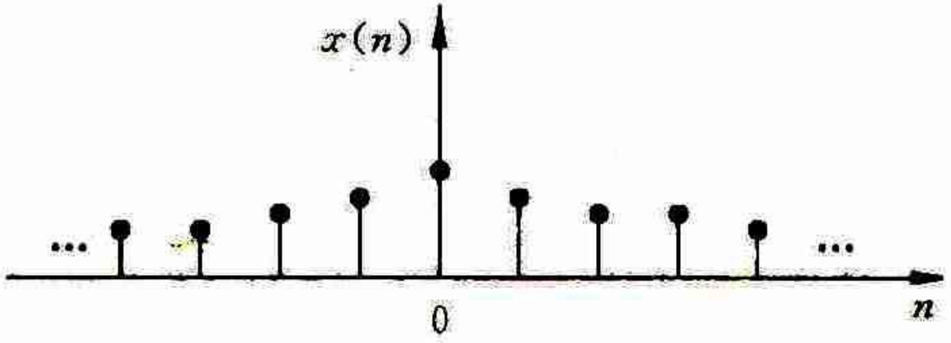
- 若第一部分存在，则为正半轴有限长序列，其收敛域为不包括原点的所有Z平面。第二部分是z的正幂级数，由阿贝尔定理知，存在一个最大的收敛半径，在此半径内的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不有限半径处向内收敛的圆形区域；在 $n_2\le 0$ 时（反因果序列），还包括原点。

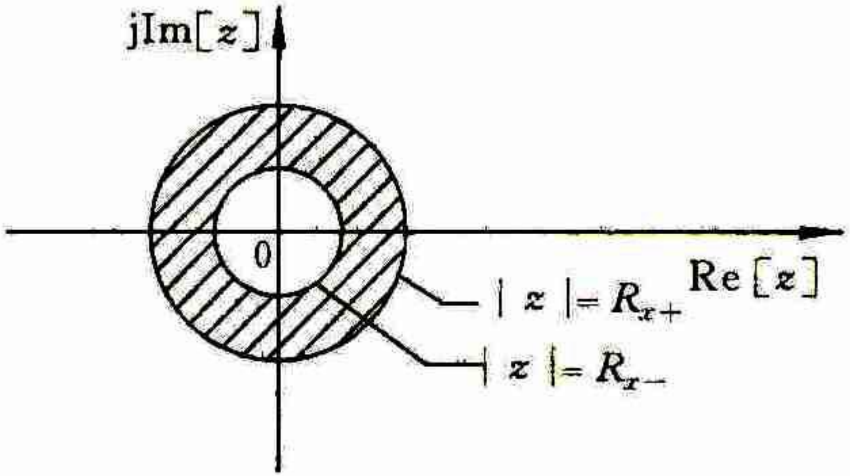


4、双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

- 收敛域应该是正半轴序列与负半轴序列收敛域的重叠
- 若有收敛域必为环状区域，否则处处不收敛



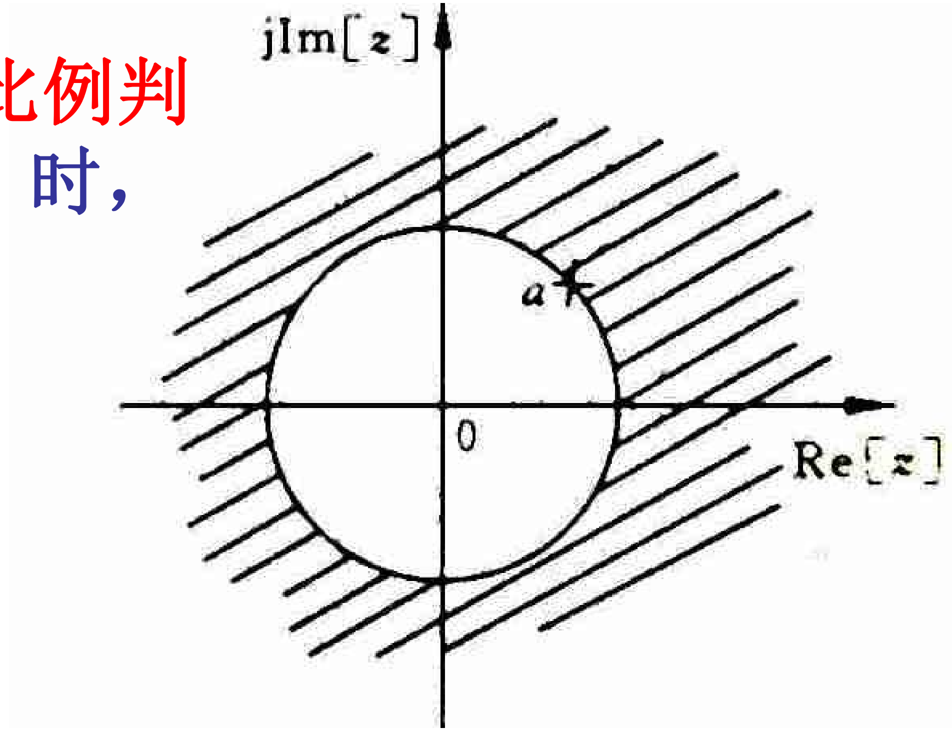


Ex:求 $x(n)=a^n u(n)$ Z变换及收敛域。

- 解: $$Z[x(n)]=\sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{0}^{+\infty}(az^{-1})^n$$

- 这是一个无穷项等比级数求和，由比例判定法可知，只有在 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，级数收敛为：

$$Z[x(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$



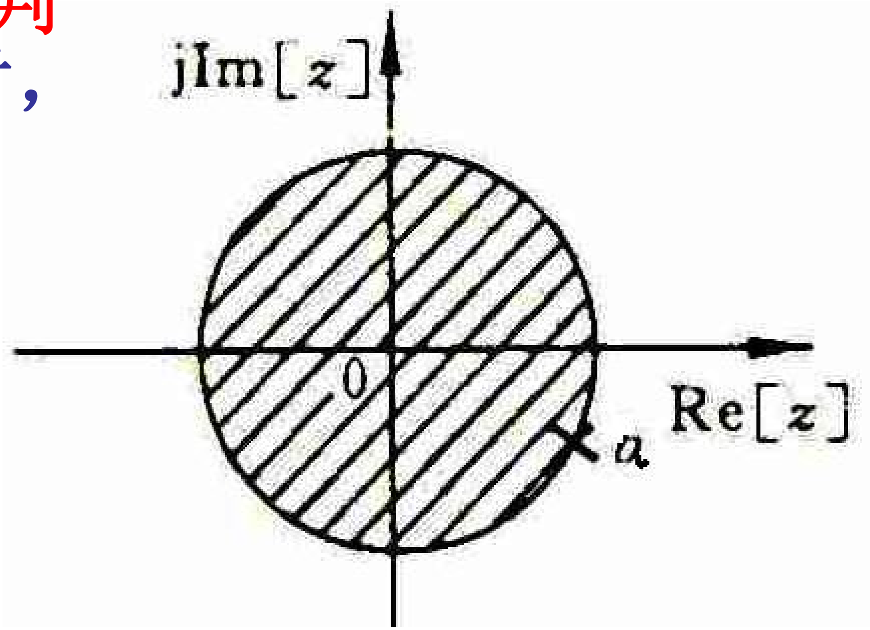
Ex:求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

- 解：

$$Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

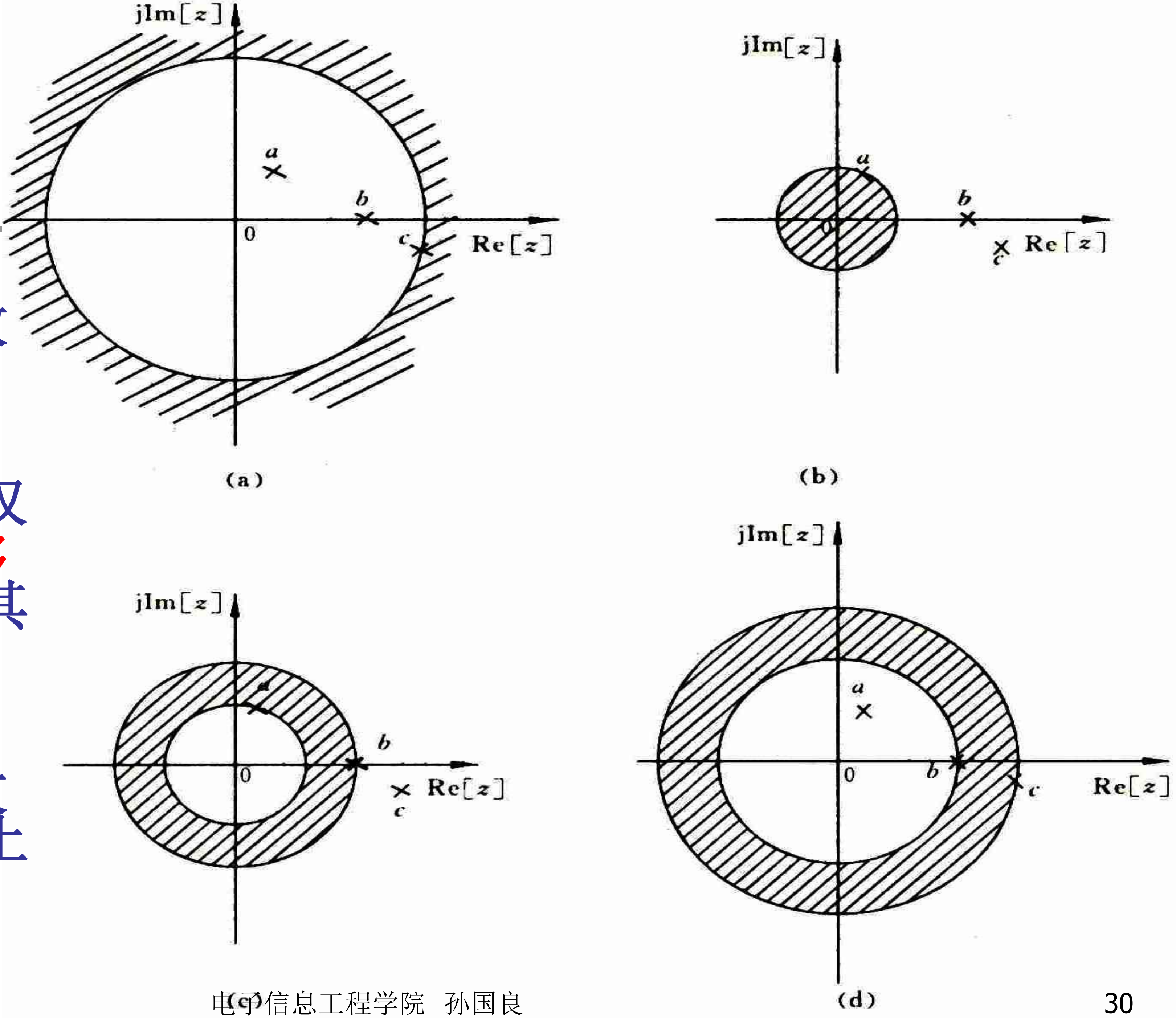
- 这是一个无穷项等比级数求和，由**比例判定法**可知，只有在 $|a^{-1}z| < 1$，即 $|z| < |a|$ 时，级数收敛为：

$$Z[x(n)] = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$



结论：

- 不同的序列其Z变换的数学表达式可以完全一致。
- 对于一个序列而言，仅仅用其Z变换来表示是不够充分的，必须同时给出其Z变换的收敛范围。
- 同一个Z变换函数，当收敛域不同时，代表时轴上性质不同的序列。



例题1：$X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$　$0.5<|z|<2$ 求x(n)

- 解：由可知有两个一阶极点， 可展成

$$X(z)=\frac{A_1}{1-z_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z_2z^{-1}}$$

$$A_1=\mathrm{Re}\ s[X(z)/z]|_{z=z_1}=\frac{4}{3},A_2=\mathrm{Re}\ s[X(z)/z]|_{z=z_2}=-\frac{1}{3}$$

- 由收敛域可知，对应第一极点z1=2为反因果序列，对应第二极点z2=0.5为因果序列,所以原始序列为：

$$x(n)=-\frac{4}{3}2^nu(-n-1)-\frac{1}{3}0.5^nu(n)$$

三、Z变换性质定理

- **1、线性**

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \qquad R_{-} < |z| < R_{+}$$

- 需要注意：
  - 若参与和运算的序列在时域上不重合，则相加后的和序列的收敛域为各个序列的收敛域的交集
  - 若不满足上述条件，则线性组合过程中两个序列Z变换的零、极点可能会互相抵消，导致收敛域的扩大。

2、序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 序列的移位仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点处的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域不发生变化。

3、Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \qquad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

- 在尺度变换中，若**a**为实数，则零、极点在**Z**平面上沿径向运动；
  - 若**a**为单位复数，则零、极点在以原点为圆心的园上旋转；
  - 若**a**为任意复数，则零、极点既有径向伸缩，又有角度旋转。

4、序列线性加权（Z域求导）

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[n^m x(n)] = (-z\frac{d}{dz})^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 序列的线性加权对收敛域的影响与序列的移位相类似，仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域也不发生变化。

5、共轭序列

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 此处要注意，原序列Z变换极点的共轭是共轭序列Z变换的极点。
- 由于共轭关系仅关于X轴对称，不影响极点矢径的长度，因而不改变收敛半径和收敛域。

6、序列翻褶

$$Z[x(-n)] = X(\frac{1}{z}) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$$

- 序列的翻褶导致Z变换的收敛域以单位圆为基准作镜像映射

7、初值定理（因果序列）

$$x(n) = x(n)u(n) \qquad \lim_{z->\infty} X(z) = x(0)$$

$$\lim_{z->\infty} X(z)$$

$$= \lim_{z->\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= \lim_{z->\infty} [x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + ...]$$

$$= x(0)$$

8、终值定理

- 若序列为**因果序列**，并且极点处于单位圆以内（若恰好在单位圆上，则**最多可在z=1处有一阶极点**），则：

$$\lim_{z->1}(z-1)X(z)=\lim_{n->+\infty}x(n)$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z->1}(z-1)X(z)\\
&=\lim_{z->1}[(z-1)\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}]\\
&=\lim_{z->1}[\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)(z^{-(n-1)}-z^{-n})]\\
&=\lim_{z->1}[\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-(n-1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}]\\
&=\lim_{z->1}[\sum_{m=-1}^{+\infty}x(m+1)z^{-m}-\sum_{m=-1}^{+\infty}x(m)z^{-m}]\\
&=\lim_{z->1}\{\sum_{m=-1}^{+\infty}[x(m+1)-x(m)]z^{-m}\}=\sum_{m=-1}^{+\infty}[x(m+1)-x(m)]\lim_{z->1}z^{-m}\\
&=\lim_{n->+\infty}\{[x(0)-x(-1)]+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+...[x(n)-x(n-1)]\}\\
&=\lim_{n->+\infty}x(n)
\end{aligned}
$$

9、时域卷积和

$$Z[\sum_{m=0}^{n} x(m)] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

$$|z| > Max\ (1, R_{x-})$$

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z) \qquad \max(R_{x-}, R_{h-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{h+})$$

- **若时域为卷积和，则Z域是相乘，乘积的收敛域是X(z)收敛域和H(z)收敛域的交集。**
  - 上述结论在两个卷积和序列无零、极点对消的情况下才成立。若出现零、极点对消，则收敛域将会扩大。
  - 利用卷积和定理，可以求LTI系统的响应。

例题2

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}$$

- 因果系统输出为：

$$y[n]=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n]-\frac{4}{3}\cdot 2^n\cdot u[-n-1]$$

- 求系统输入的X(z)
- 解：

$\because$ $y[n]$的 z变换为：

$$Y(z)=(-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{1+0.25z^{-1}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad 0.25<|z|<2$$

$$\therefore\ X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-2z^{-1}} \qquad |z|<2$$

为什么？

10、时域相乘（Z域复卷积）

$$X(z)=Z[x(n)] \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$H(z)=Z[h(n)] \qquad R_{h-}<|z|<R_{h+}$$

$$y(n)=x(n)h(n)$$

$$Y(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{h-}<|z|<R_{x+}R_{h+}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&Y(z) \\
&= Z[x(n)h(n)] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)[\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(v)v^{n-1}dv]z^{-n} \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)H(v)z^{-n}v^{n-1}dv] \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n} H(v)v^{-1}dv] \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv
\end{aligned}
$$

周期卷积

- 为了使复卷积数学意义明显，令围线为一个以原点为圆心的圆，即：

$$v=\rho e^{j\theta}, z=re^{j\omega}$$

- 则复卷积公式变为：

$$Y(re^{j\omega})=\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(\rho e^{j\theta})X(\frac{r}{\rho}e^{j(\omega-\theta)})\frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$

$$\overset{r=const}{\underset{\rho=const}{=}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- 由于积分是在 π 到 $-\pi$ 的周期上进行的，所以称为**周期卷积**。

11、帕塞瓦定理

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$R_{x-}R_{h-} < 1 < R_{x+}R_{h+}$$

$$\mathrm{y}(n) = x(n)h^{*}(n)$$

$$Z[h^{*}(n)] = H^{*}(Z^{*})$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(v)H^{*}\left(\frac{z}{v^{*}}\right)v^{-1}dv$$

$$Y(z)\Big|_{z=1} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^{*}(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(v)H^{*}\left(\frac{1}{v^{*}}\right)v^{-1}dv}$$

若积分围线取为单位圆，即：

$$v = e^{j\omega}$$

则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

再进一步，若令 $h(n) = x(n)$ ，则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

上式表明：时域中序列的能量与变换域中频谱的能量是一致的。

四、 Z反变换

- 从给定的Z变换及其收敛域中还原出原始序列x(n)，称为Z反变换

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

- Z反变换的实质是求X(Z)的幂级数展开式，通常有三种方法：长除法、部分分式法、留数法（围线积分法）。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

部分分式法

- 在实际应用中，一般**X(z)**是**z**的有理分式：

$$X(z) = B(z) / A(z)$$

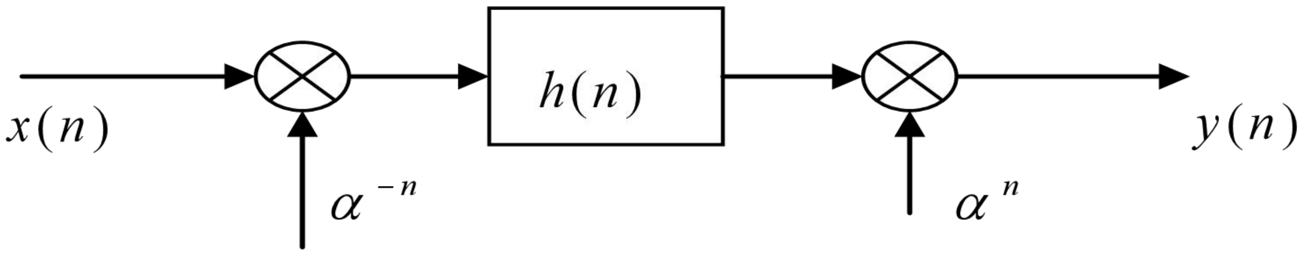
- **A(z)**及**B(z)**都是变量**z**的实系数多项式，并且没有公因式，则可展成部分分式形式

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_i Z^{-1}[X_i(z)]$$

例题3

- 离散系统如下，h(n)为LTI系统



- 1）整个系统是否为LTI？
- 2）若系统是LTI的，请给出系统的单位冲激响应g(n)

解答：

$$[x[n]\bullet\alpha^{-n}]\otimes h[n]\bullet\alpha^{n}=y[n]$$

- 1）$k_1x_1[n]+k_2x_2[n]\longrightarrow[k_1x_1[n]+k_2x_2[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}$

$$[k_1x_1[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}+[k_2x_2[n]]\alpha^{-n}\otimes h[n]\cdot\alpha^{n}$$

$$k_1y_1[n]+k_2y_2[n]$$

$$y[n]=(\alpha^{-n}x[n]\otimes h[n])\cdot\alpha^{n}$$

$$=(\sum_k\alpha^{-k}x[k]h[n-k])\cdot\alpha^{n}$$

$$=\sum_k\alpha^{n-k}x[k]h[n-k]$$

$$y[n-m]=\sum_k\alpha^{n-m-k}x[k]h[n-m-k]$$

$$T\{x[n-m]\}$$

$$=(\alpha^{-n}x[n-m]\otimes h[n])\cdot\alpha^{n}$$

$$=(\sum_k\alpha^{-k}x[k-m]h[n-k])\cdot\alpha^{n}$$

$$[x[n]\bullet\alpha^{-n}]\otimes h[n]\bullet\alpha^{n} = y[n]$$

- 2) $g[n]=\{\delta(n)\alpha^{-n} * h[n]\} * \alpha^{n} = h[n] * \alpha^{n}$

$$y[n]\cdot\alpha^{-n} = (\alpha^{-n}x[n]\otimes h[n])$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z)\cdot H(z)$$

$$Y(z') = X(z')\cdot H(\frac{z'}{\alpha})$$

$$g[n] = Z^{-1}[H(\frac{z}{\alpha})] = \alpha^{n}h[n]$$

信号变换小结：

- 变换是从另一个维度来审视信号
- DTFT隐含有周期性，以及信号频谱分解的概念
- Z变换需要注意收敛域问题
- 卷积特性是信号变换中的主要性质
- 对称性对于实信号的变换很重要
- 结论比过程重要，但是过程要能自己走通

作业：

- *2.8*
- 2.11
- 2.17
- 2.44

- 3.1(b)、(g)
- 3.3
- 3.4
- 3.6(c)
- 3.9
- *3.28*

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn