



## 数字信号处理

授课教师: 孙国良

电子信息工程学院



Contents

# 离散时间系统变换 域分析

#### 德才兼备 知行合一

**DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI** 





离散时间傅里叶变换



Z变换及反变换



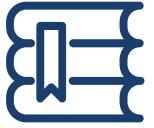
三 系统函数与频率响应



兀

LTI系统幅相特性分析

# 离散时间傅里叶变换 (DTFT) 二



#### 离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义? 涵义?
- 基本序列的DTFT?
- DTFT的主要性质定理?



# 学习方法: 结论比过程重要!!!



■ 序列的傅立叶变换 (DTFT) 用来表示离散时间非周期信号及 其傅立叶频谱之间的关系。

• 正变换: 
$$DTFT$$
  $[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 

• 反变换: 
$$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

■ 由于三角函数的周期性,反变换积分区间可以为任何一个周期区间。

## 二、DTFT反变换推导

$$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \frac{\sin \pi (n-k)}{\pi (n-k)} = Sa \left[\pi (n-k)\right] = \delta (n-k) = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & \text{ #...} \end{cases}$$

北京航空航天大学



## DTFT反变换隐藏的涵义:信号分解

$$X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[X(e^{jk\Delta\omega})\Delta\omega\right]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n}$$

北京航空航天大学 204教研室 孙国良

6



## 三、典型序列的傅立叶变换:

■ (一)单位冲激序列

DTFT 
$$[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = x(0)e^{-j\omega 0} = 1$$

■ (二)单位常数序列

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega + 2k\pi\right) \Longrightarrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta\left(\omega\right) e^{j\omega n} d\omega$$

■ (三)单位阶跃序列

$$DTFT \quad [u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta (\omega + 2k\pi)$$

 $X(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})]$ 

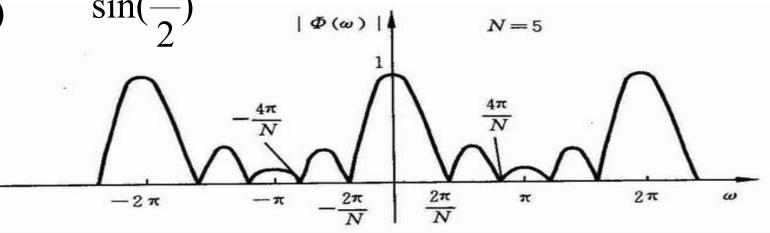
■ (四)指数序列

$$DTFT \quad [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta (\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

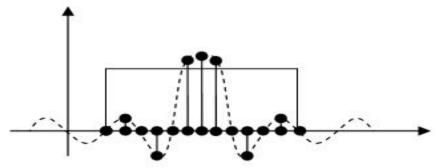
## 矩形窗的DTFT

$$DTFT[W(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}(e^{j\frac{N\omega}{2}}-e^{-j\frac{N\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}=\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$







■ 截止频率为 w 。 的理想低通滤波器

$$H_{d}(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_{c} \leq w \leq w_{c} \\ 0 & w_{c} < w \leq \pi, -\pi < w < -w_{c} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin[w_c(n-\alpha)]}{w_c(n-\alpha)}$$



#### 四、序列傅立叶变换的主要性质

■ 1、线性

$$ax(n) + bh(n) \longrightarrow aX(e^{jw}) + bH(e^{jw})$$

■ 2、时域平移->频域调制

$$x(n-m) \longrightarrow e^{-jwm} X(e^{jw})$$

3、时域调制->频域平移

$$e^{jnw_0} X(n) \longrightarrow X(e^{j(w-w_0)}) \begin{vmatrix} DTFT & [x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega}) \\ DTFT & [x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega}) \end{vmatrix}$$

 $DTFT [x(-n)] = X(e^{-j\omega})$ 

■ 4、时域翻褶

$$X(-n) \longrightarrow X(e^{-jw})$$

北京航空航天大学 204教研室 孙国良



#### 5、时域相乘

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(w-\theta)}) d\theta$$

6、时域券积

$$x(n) * h(n)$$

$$x(n) * h(n)$$
  $X(e^{jw})H(e^{jw})$ 

■ 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) Y^*(e^{jw}) dw$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw$$



#### ■ 共轭对称序列:

- 共轭反对称序列:
- 可以证明:

$$Re[x_e(n)] = Re[x_e(-n)]$$

$$Im[x_e(n)] = -Im[x_e(-n)]$$

$$|x_e(n)| = |x_e(-n)|$$

$$Arg [x_e(n)] = -Arg [x_e(-n)]$$

$$x_{e}(n) = x_{e}^{*}(-n)$$
  
 $x_{o}(n) = -x_{o}^{*}(-n)$ 

Re[
$$x_o(n)$$
] =  $-\text{Re}[x_o(-n)]$   
Im[ $x_o(n)$ ] = Im[ $x_o(-n)$ ]  
 $|x_o(n)| = |x_o(-n)|$   
 $Arg[x_o(n)] = \pi - Arg[x_o(-n)]$ 

共轭反对称序列的性质如何??



#### 序列共轭分量的傅立叶变换 与序列傅立叶变换的共轭分量

$$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

$$x(n) = x_{e}(n) + x_{o}(n) \qquad X(e^{j\omega}) = X_{e}(e^{j\omega}) + X_{o}(e^{-j\omega})$$

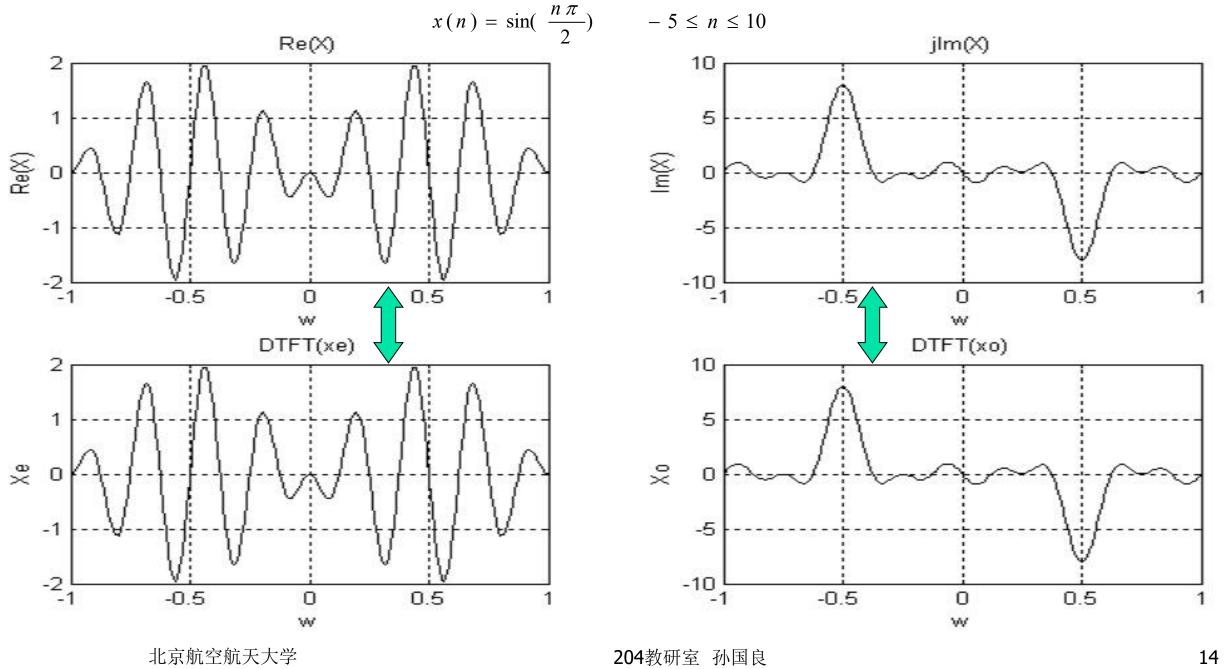
$$x_{e}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^{*}(-n)] \qquad X_{e}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^{*}(e^{-j\omega})]$$

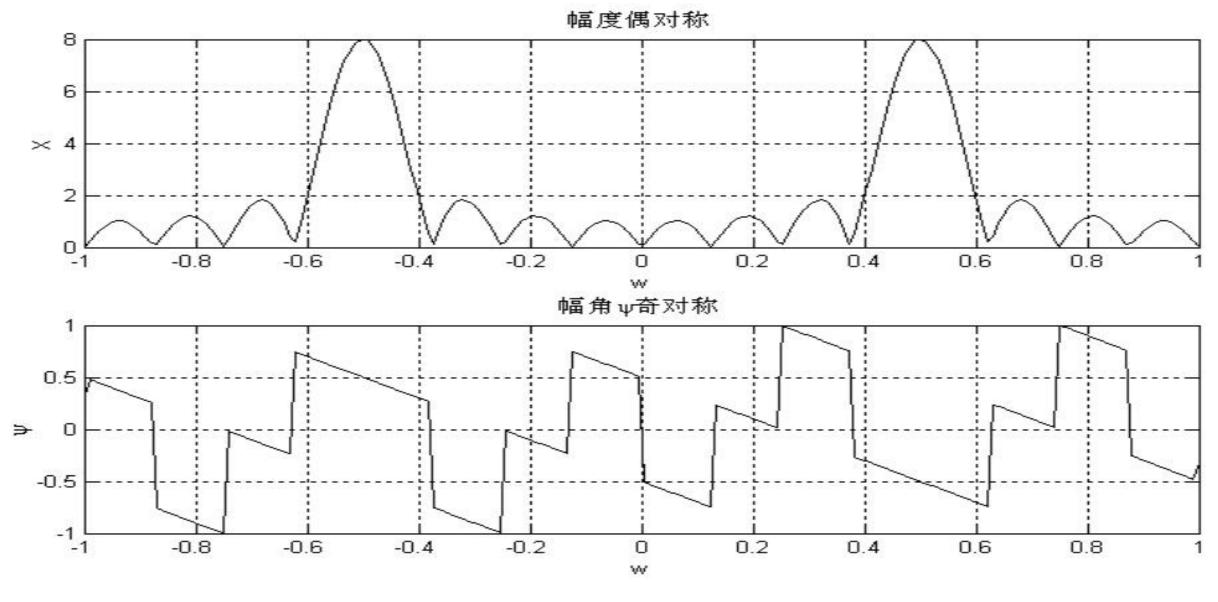
$$x_{o}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^{*}(-n)] \qquad X_{o}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^{*}(e^{-j\omega})]$$

$$DTFT[x_{e}(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^{*}(e^{j\omega})] = Re[X(e^{j\omega})] \qquad DTFT\{Re[x(n)]\} = X_{e}(e^{j\omega})$$

$$DTFT[x_{o}(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^{*}(e^{j\omega})] = j \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] \qquad DTFT\{j \operatorname{Im}[x(n)]\} = X_{o}(e^{j\omega})$$

推论:实序列傅立叶变换是共轭对称的,即实部是偶对称,虚部是奇对称;幅度是偶对称,幅角是奇对称。





北京航空航天大学

204教研室 孙国良

#### CTFT Vs DTFT

#### 表 1 连续时间和离散时间的典型基本信号傅立叶变换对比

连续信号 $x(t)$	CTFT $X(j\omega)$	离散信号x(n)	主周期内的 DTFT $X$ (Ω)
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-\mathrm{i}\omega t_0}$	$\delta(n-r)$	$e^{-\mathrm{i}r\Omega}$
u(t)	$\frac{1}{i\omega} + \pi(\omega)$	u(n)	$\frac{1}{1-e^{-\mathrm{i}\Omega}}+\pi(\Omega)$
$e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{a+i\omega}$	$a^n u(n)$ , $ a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}$
$te^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$	$na^nu(n)$ , $ a <1$	$\frac{ae^{-i\Omega}}{(1-ae^{-i\Omega})^2} = \frac{ae^{i\Omega}}{(e^{i\Omega}-a)^2}$
$\tau Sa(\frac{\tau t}{2})$	$2\pi G_{\tau}(\omega)$	$\frac{\Omega_c}{\pi} Sa(\Omega_c n)$	$G_{2\Omega_c}(\Omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_{_{0}})$	$e^{\mathrm{i}\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_{_0})$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\mathcal{S}(\Omega-\Omega_{_0})+\mathcal{S}(\Omega+\Omega_{_0})]$

北京航空航天大学



例题1: 求和式 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

解:

$$\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$y^*[n] = \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*(e^{-j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore Y^* (e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad \therefore £ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{10} d_{\omega} = \frac{1}{60} \end{cases}$$



- 令 x[n]和 X (e j o)分别代替一个序列及其傅里叶变换,利用
- X(e<sup>jω</sup>) 表示如下序列的傅立叶变换

•  $\mathfrak{M}$ :  $y_s[n] = \frac{1}{2} \{ x[n] + (-1)^n x[n] \} = \frac{1}{2} \{ x[n] + e^{j\pi n} x[n] \}$ 

$$Y_{s}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x[2n]e^{-j2n\omega}$$



#### 例题3

- 若实序列 x[n] 的DTFT为X(w),且
- X(0.2)=9e-j0.7;
- 1) X(-0.2)=?
- 2) 若y(n)=x(-n+2),求Y(-0.2);



## Z变换及反变换



离散时间傅里叶变换

#### Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义
- 收敛域?
- ■性质定理
- 反变换





## 一、Z变换定义及收敛域

■ 设序列为x(n),则幂级数:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

■ 称为序列x(n)的Z变换,其中z为变量。也可记作:

$$Z[x(n)] = X(z)$$

- 幂级数收敛时,Z变换才有意义。Z变换收敛的所有z值的集合称为收敛域。
- <u>在收敛域内,Z变换处处解析,不含任何奇异点。</u>

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 21



#### 二、不同序列的收敛域

■ 根据级数理论,幂级数收敛的充分且必要条件是该 级数绝对可和:

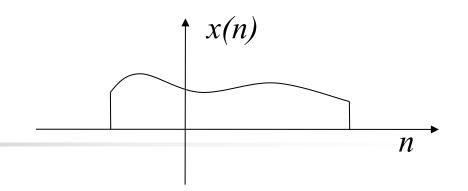
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = M < \infty$$

■ 对于不同形式的序列,其收敛域的形式亦有所不同, 分类讨论如下

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 22



## 1、有限长序列



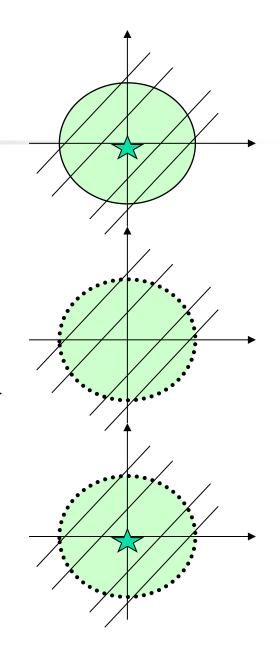
$$x(n) = \begin{cases} 有値 & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$
  $X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$ 

- X(z)为有限项级数之和,只要级数的每一项有界,则级数就是收敛的。
- ■收敛域至少包括有限Z平面

$$0 < |z| < \infty$$

■ 根据区间的不同,级数有可能在 原点和无穷远出现奇异点,故仍 可细分为如下三种情况:

- 1)、正半轴有限长序列,其收敛域为有限Z平面和无穷远点;
- 2)、负半轴有限长序列,其收敛域为有限Z平面和原点;
- 3)、跨原点有限长序列,则收 敛域仅为有限Z平面;

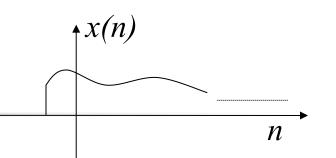


北京航空航天大学



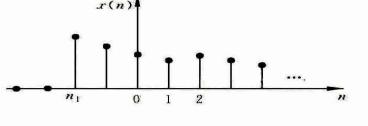
# $\mathbf{2}, \quad \mathbf{右边序} \mathbf{\mathcal{J}} \quad x(n) = \begin{cases} \mathbf{f} \times \mathbf{f} & n_1 \leq n \\ \mathbf{0} & \mathbf{j} \in \mathbf{f} \end{cases}$

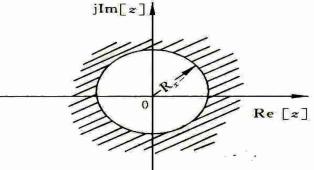
$$x(n) = \begin{cases} f\mathbf{\hat{q}} \\ 0 \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 第一部分若存在,则为一负半轴有限长序列,其收敛域 为不包括无穷远点的所有Z平面。第二部分是z的负幂级数,由阿贝尔定理可知,存在一个最小的收敛半径,在 此半径外的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不为零的有限半径处向外扩张的有限Z平面; 若  $n_1 \ge 0$ ,还要包括无穷远点,此时的序列为因 果序列。





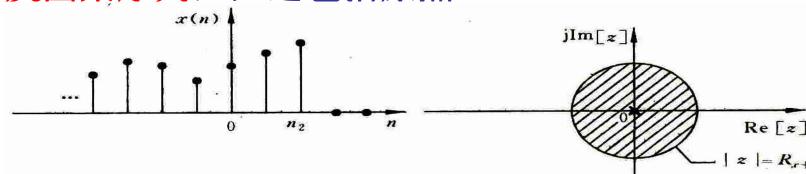
# 3、左边序列 $x(n) = \begin{cases} fd & n \le n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$x(n) = \begin{cases} f \end{cases}$$

$$n \leq n_2$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} = \left\langle \sum_{n=1}^{n_2} x(n) z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=-\infty}^{0} x(n) z^{-n}$$

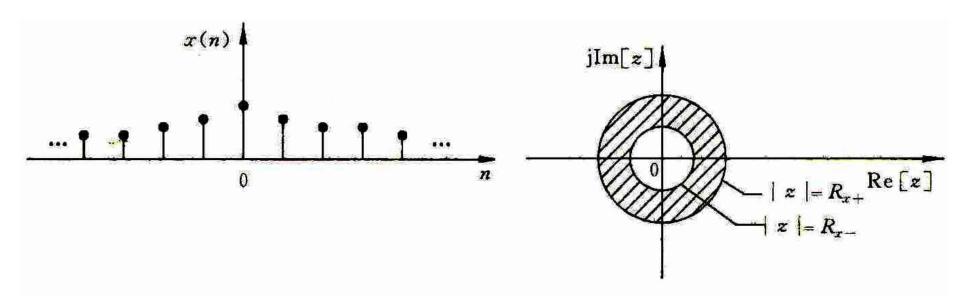
- 若第一部分存在,则为正半轴有限长序列,其收敛域为不 包括原点的所有Z平面。第二部分是z的正幂级数,由阿贝 尔定理知,存在一个最大的收敛半径 ,在此半径内的任何 点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不有限半径处向内收敛的圆形区域: 在  $n_{2} \leq 0$  时(反因果序列),还包括原点。



#### 4、双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

- 收敛域应该是正半轴序列与负半轴序列收敛域的重叠
- 若有收敛域必为环状区域,否则处处不收敛

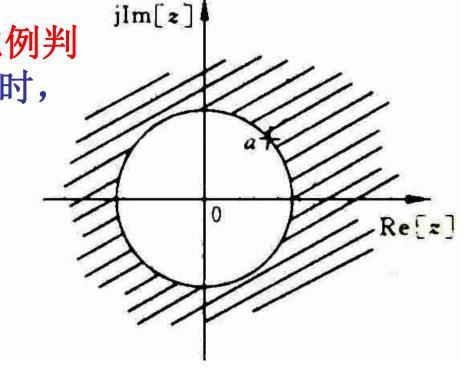


#### $\mathbf{E}\mathbf{x}$ :求 $x(n) = a^n u(n)$ **Z**变换及收敛域。

$$Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

■ 这是一个无穷项等比级数求和,由比例判定法可知,只有在  $|az^{-1}| < 1$ ,即 |z| > |a| 时,级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$



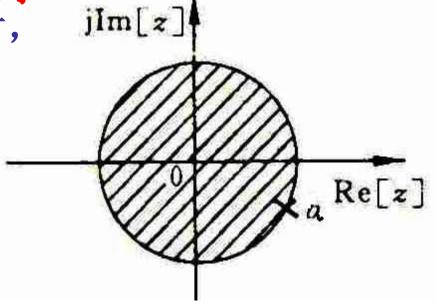
#### $\mathbf{Ex:}$ 求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

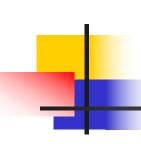
■ 解:

$$Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1)z^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

■ 这是一个无穷项等比级数求和,由比例判定法可知,只有在  $|a^{-1}z|<1$  ,即 |z|<|a| 时,级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a}$$



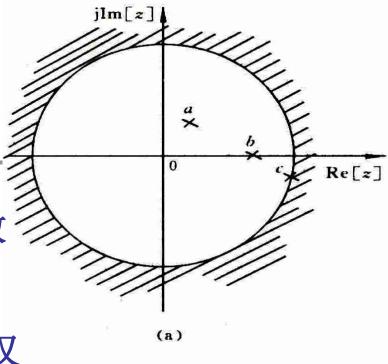


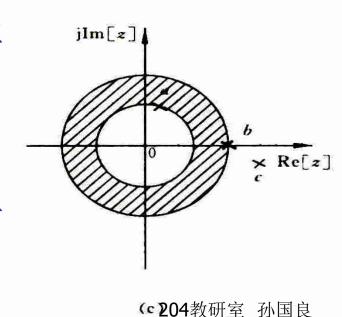
## 结论:

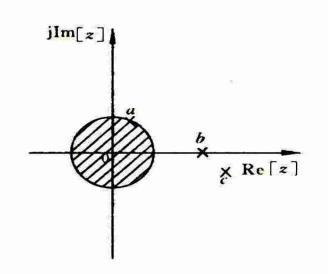
• 不同的序列其Z变换的数学表达式可以完全一致。

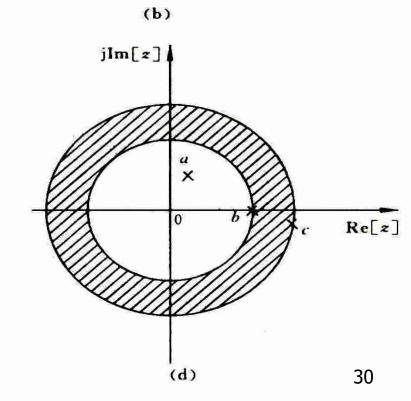
对于一个序列而言,仅仅 用其Z变换来表示是不够 充分的,必须同时给出其 Z变换的收敛范围。

• 同一个**Z**变换函数,当收敛域不同时,代表时轴上性质不同的序列。











## 例题**1**: $X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ 0.5 < |z| < 2 求**x(n)**

$$0.5 < |z| < 2$$
 **X(n)**

■解:由可知有两个一阶极点,可展成

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_2 z^{-1}}$$

$$A_1 = \text{Re } s[X(z)/z]|_{z=z_1} = \frac{4}{3}, A_2 = \text{Re } s[X(z)/z]|_{z=z_2} = -\frac{1}{3}$$

■ 由收敛域可知,对应第一极点z1=2为反因果序列,对 应第二极点z2=0.5为因果序列,所以原始序列为:

$$x(n) = -\frac{4}{3}2^{n}u(-n-1) - \frac{1}{3}0.5^{n}u(n)$$



#### 三、Z变换性质定理

#### 1、线性

$$Z[x(n)] = X(z)$$
  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$   
 $Z[y(n)] = Y(z)$   $R_{y-} < |z| < R_{y+}$   
 $Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$   $R_{-} < |z| < R_{+}$ 

#### ■ 需要注意:

- 若参与和运算的序列在时域上不重合,则相加后的和序列 的收敛域为各个序列的收敛域的交集
- 若不满足上述条件,则线性组合过程中两个序列**Z**变换的 零、极点可能会互相抵消,导致收敛域的扩大。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良

32

# 2、序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z)$$
  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$   
 $Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$   $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 

- 序列的移位仅对有限长、单边序列(左边序列、右边 序列)在原点和无穷远点处的是否收敛有影响。
- 对于双边序列,由于它的收敛域为环形域,不包括原 点和无穷远点, 所以收敛域不发生变化。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 33



## 3、Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

- 在尺度变换中,若a为实数,则零、极点在Z平面上沿 径向运动:
  - 若a为单位复数,则零、极点在以原点为圆心的园上**旋转**;
  - 若a为任意复数,则零、极点既有径向伸缩,又有角度旋转。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 34

## 4、序列线性加权(Z域求导)

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[n^m x(n)] = (-z \frac{d}{dz})^m [X(z)] R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 序列的线性加权对收敛域的影响与序列的移位相类似,仅对有限长、 单边序列(左边序列、右边序列)在原点和无穷远点的是否收敛有影响。
- 对于双边序列,由于它的收敛域为环形域,不包括原点和无穷远点, 所以收敛域也不发生变化。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 35



#### 5、共轭序列

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

- 此处要注意,原序列Z变换极点的共轭是共轭序列Z变换的 极点。
- 由于共轭关系仅关于X轴对称,不影响极点矢径的长度, 因而不改变收敛半径和收敛域。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良 36



$$Z[x(-n)] = X(\frac{1}{z}) R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$$

■ 序列的翻褶导致Z变换的收敛域以单位圆为基准 作镜像映射

### 7、初值定理(因果序列)

$$x(n) = x(n)u(n) \qquad \lim_{z \to \infty} X(z) = x(0)$$

$$\lim_{z \to \infty} X(z)$$

$$= \lim_{z \to \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= \lim_{z \to \infty} [x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + ...]$$

$$= x(0)$$



#### 8、终值定理

■ 若序列为因果序列,并且极点处于单位圆以内(若恰好在单位圆上,则最多可在z=1处有一阶极点),则:

$$\lim_{z \to 1} (z - 1) X (z) = \lim_{n \to +\infty} x(n)$$

$$\lim_{z \to 1} (z - 1) X(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} [(z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}]$$

$$= \lim_{z \to 1} [\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) (z^{-(n-1)} - z^{-n})]$$

$$= \lim_{z \to 1} [\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-(n-1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}]$$

$$= \lim_{z \to 1} [\sum_{m=-1}^{+\infty} x(m+1) z^{-m} - \sum_{m=-1}^{+\infty} x(m) z^{-m}]$$

$$= \lim_{z \to 1} \{\sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] z^{-m}\} = \sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] \lim_{z \to 1} z^{-m}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \{[x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + ...[x(n) - x(n-1)]\}$$

$$= \lim_{m \to +\infty} x(n)$$

# 9、时域卷积和

$$Z\left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

$$|z| > Max (1, R_{x-})$$

$$X(z) = Z[x(n)]$$
  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$   
 $H(z) = Z[h(n)]$   $R_{h-} < |z| < R_{h+}$ 



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z)$$
  $\max(R_{x-}, R_{h-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{h+})$ 

- 若时域为卷积和,则Z域是相乘,乘积的收敛域是 X(z)收敛域和H(z)收敛域的交集。
  - 上述结论在两个卷积和序列无零、极点对消的情况下才成立。若 出现零、极点对消,则收敛域将会扩大。
  - 利用卷积和定理,可以求LTI系统的响应。

# 例题2

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

■ 因果系统输出为:

$$y[n] = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

- 求系统输入的X(z)
- 解:

$$\therefore X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \qquad |z| < 2$$

# 4

#### 10、时域相乘(Z域复卷积)

$$X(z) = Z[x(n)]$$
  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$   
 $H(z) = Z[h(n)]$   $R_{h-} < |z| < R_{h+}$ 

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c} X(\frac{z}{v}) H(v) v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c} X(v) H(\frac{z}{v}) v^{-1} dv$$

$$R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+}$$

43



### 证明:

$$Y(z) = Z[x(n)h(n)]$$

$$= Z[x(n)h(n)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)[\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}H(v)v^{n-1}dv]z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{c}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)H(v)z^{-n}v^{n-1}dv]$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{c}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(\frac{z}{v})^{-n}H(v)v^{-1}dv]$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(\frac{z}{v})H(v)v^{-1}dv$$

# 周期卷积

- 为了使复卷积数学意义明显,令围线为一个以原点为圆心的圆,即:  $v = \rho e^{j\theta}, z = r e^{j\omega}$
- 则复卷积公式变为:

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c} H(\rho e^{j\theta}) X(\frac{r}{\rho} e^{j(\omega-\theta)}) \frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$

$$= \int_{\rho=const}^{r=const} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

■ 由于积分是在 π到 - π 的周期上进行的,所以称为周期卷积。

北京航空航天大学 204教研室 孙国良

45

#### 11、帕塞瓦定理

$$X(z) = Z[x(n)] \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \qquad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$R_{x-}R_{h-} < 1 < R_{x+}R_{h+}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*(v^{*-1})v^{-1}dv$$

$$Z[h^*(n)] = H^*(Z^*)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(v) H^*(\frac{z}{v^*}) v^{-1} dv$$

$$Y(z) \mid_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$$

1

#### 若积分围线取为单位圆,即:

$$v = e^{j\omega}$$

#### 则有:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

再进一步,若令 h(n) = x(n) ,则有:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

上式表明: 时域中序列的能量与变换域中频谱的能量是一致的。



从给定的Z变换及其收敛域中还原出原始序列x(n), 称为Z反变换

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

■ Z反变换的实质是求X(Z)的幂级数展开式,通常有三种方法: 长除法、部分分式法、留数法(围线积分法)。



#### 部分分式法

■ 在实际应用中,一般X(z)是z的有理分式:

$$X(z) = B(z) / A(z)$$

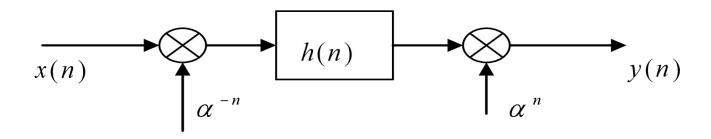
A(z)及B(z)都是变量z的实系数多项式,并且没有公因式,则可展成部分分式形式

$$X(z) = \sum_{i} X_{i}(z)$$

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_{i} Z^{-1}[X_{i}(z)]$$



■ 离散系统如下,h(n)为LTI系统



- 1) 整个系统是否为LTI?
- 2) 若系统是LTI的,请给出系统的单位冲激响应g(n)



$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^{n} = y[n]$$

■ 1)  $k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \longrightarrow [k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^{n}$   $[k_1 x_1[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^{n} + [k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^{n}$  $k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$ 

$$y[n] = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n]) \cdot \alpha^{n}$$

$$= (\sum_{k} \alpha^{-k} x[k] h[n-k]) \cdot \alpha^{n}$$

$$= \sum_{k} \alpha^{n-k} x[k] h[n-k]$$

$$y[n-m] = \sum_{k} \alpha^{n-m-k} x[k] h[n-m-k]$$

$$T \{x[n-m]\}$$

$$= (\alpha^{-n} x[n-m] \otimes h[n]) \cdot \alpha^{n}$$

$$= (\sum_{k} \alpha^{-k} x[k-m] h[n-k]) \cdot \alpha^{n}$$



$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^{n} = y[n]$$

 $g[n] = \{\delta(n)\alpha^{-n} * h[n]\} * \alpha^n = h[n] * \alpha^n$ 

$$y[n] \cdot \alpha^{-n} = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n])$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z) \cdot H(z)$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z) \cdot H(z)$$
$$Y(z') = X(z') \cdot H(\frac{z'}{\alpha})$$

$$g[n] = Z^{-1}[H(\frac{z}{\alpha})] = \alpha^{n}h[n]$$



#### 信号变换小结:

- 变换是从另一个维度来审视信号
- DTFT 隐含有周期性,以及信号频谱分解的概念
- Z变换需要注意收敛域问题
- 卷积特性是信号变换中的主要性质
- 对称性对于实信号的变换很重要
- 结论比过程重要,但是过程要能自己走通

# 作业:

- **2.8**
- **2.11**
- **2.17**
- **2.44**
- 3.1(b) (g)
- **3.3**
- **3.4**
- **3.6(c)**
- **3.9**
- **3.28**





# 谢谢

授课教师: 孙国良

Email: mrsgl@buaa.edu.cn