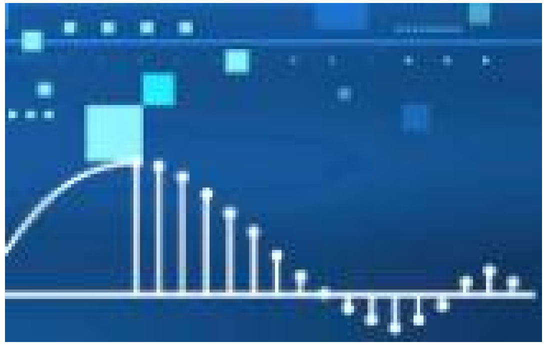
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

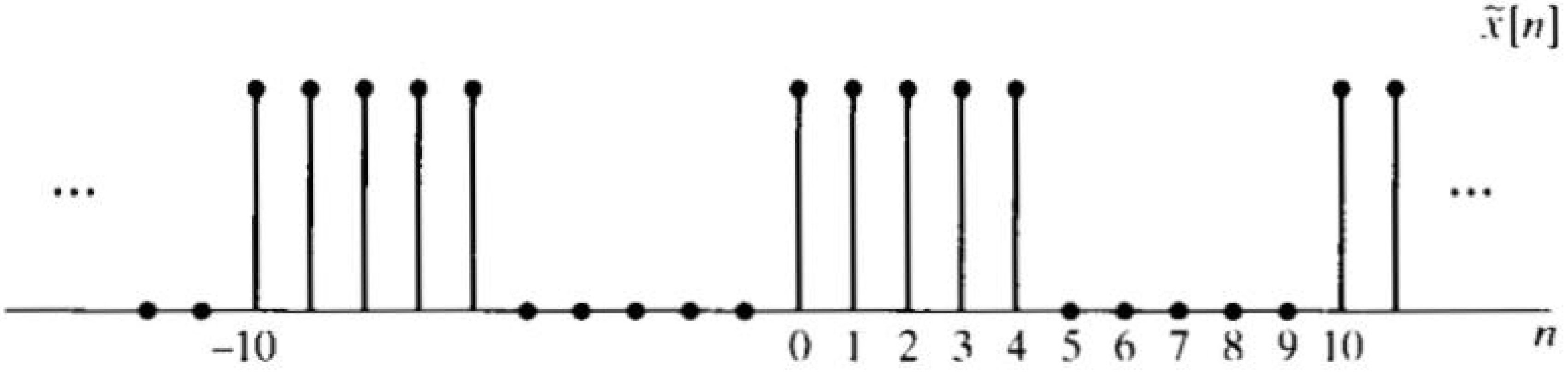
第 四 章

Contents

离散傅里叶变换及快速算法

离 散 傅 里 叶 变 换

- 离散傅里叶级数
- 频域采样与重构
- 离散傅里叶变换
- DFT快速算法
- DFT的工程应用



- DFS是主值区间序列(N点)的DTFT的频域N点采样

- 引申:
- 1、DFS适合N点DTFT频谱的计算机运算和表示
- 2、频域采样定理说明DFS可以无失真恢复出N点序列

- 结论：DFT借用DFS顺理成章！！！

4.3 离散傅立叶变换(DFT)

- 有限长序列的傅里叶变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \qquad X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k=0,1,2,\ldots N-1$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)R_N(n)$$

一、离散傅里叶变换（DFT）

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \qquad ,0 \le k \le \mathrm{N}-1$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad ,0 \le n \le \mathrm{N}-1$$

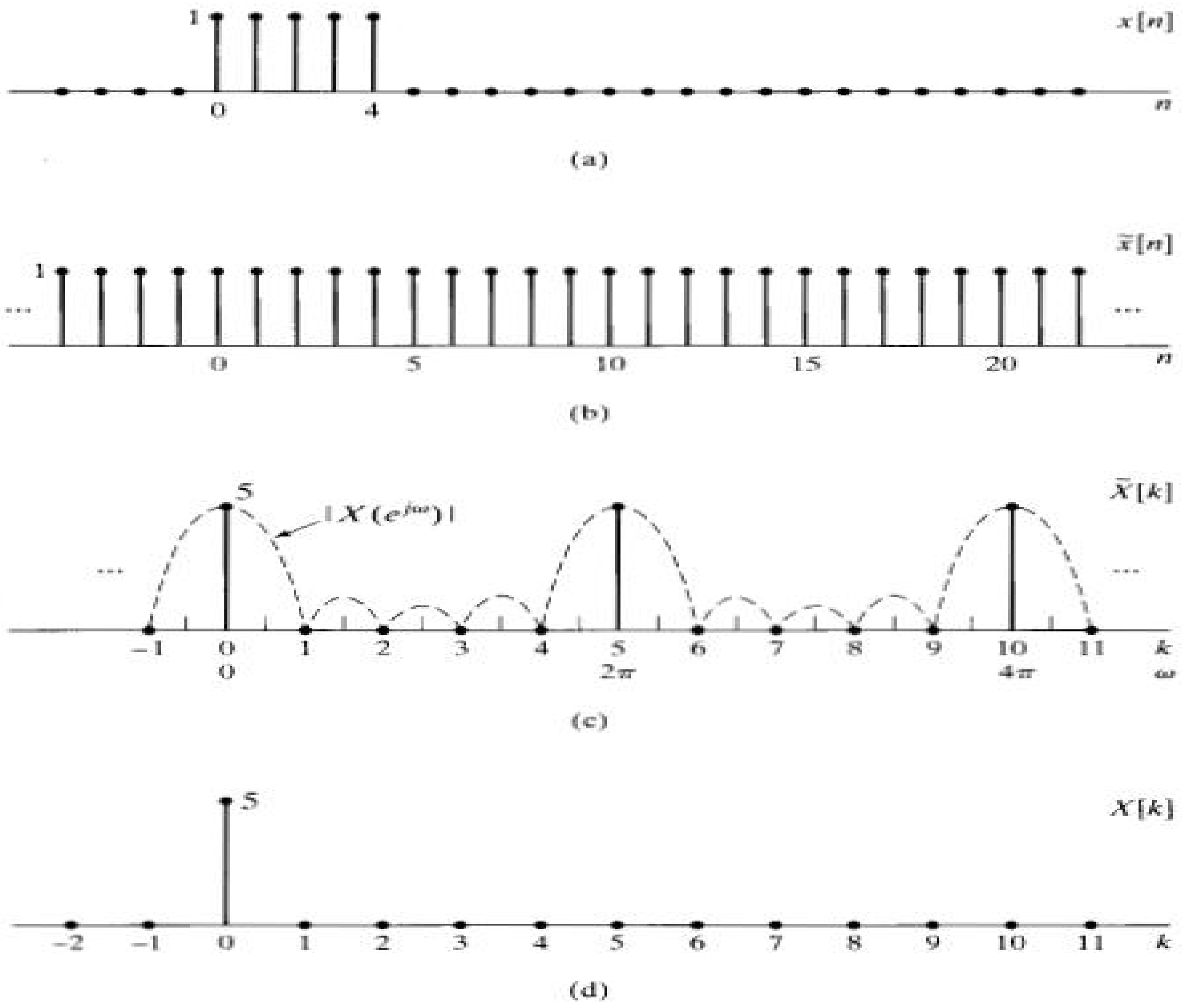
$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \qquad\qquad x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

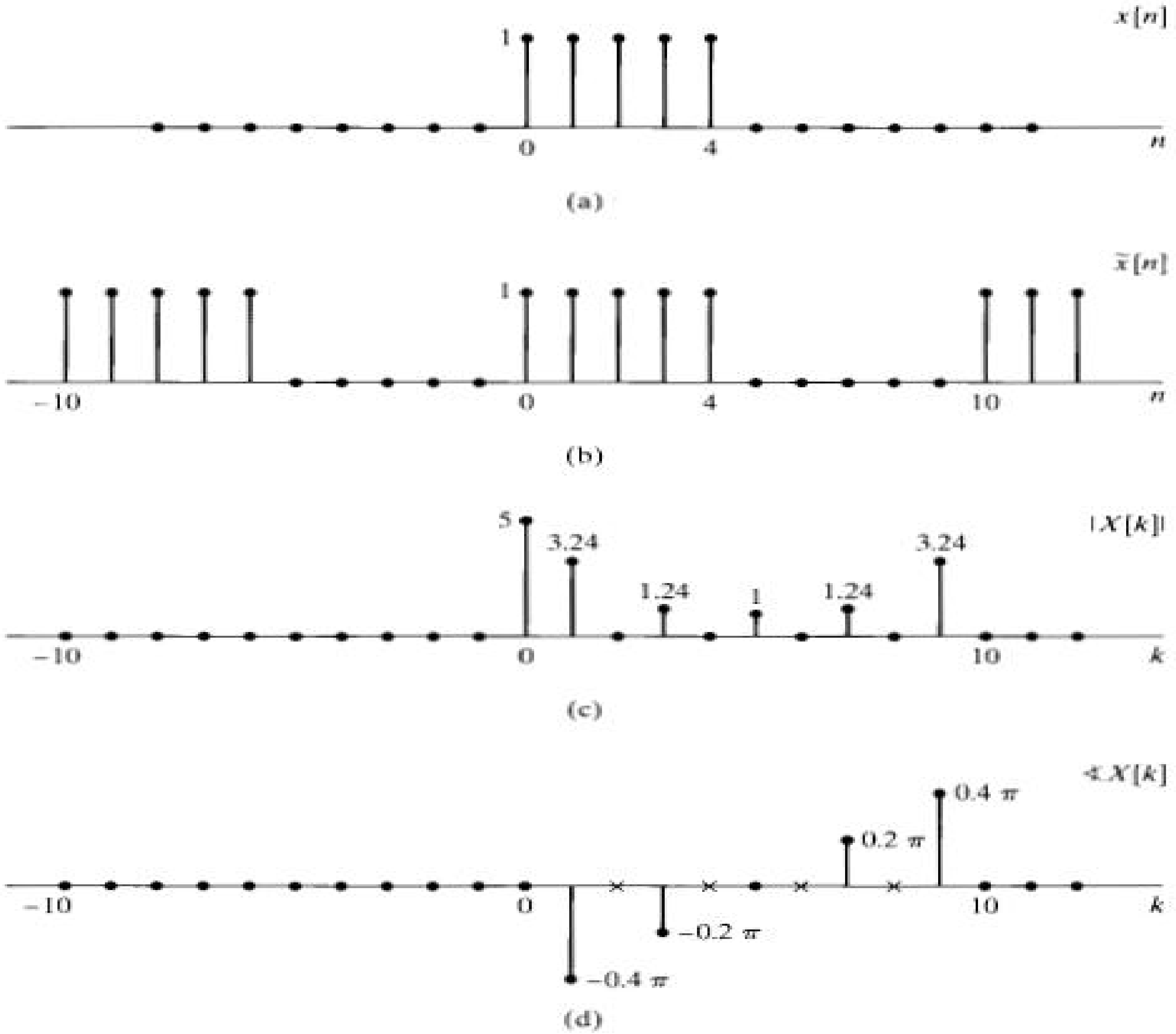
$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k) \qquad\qquad \tilde{x}(n) = x(n\text{模}N) = x((n))_N$$

1、DFT隐含有周期性

2、有限长序列DFT是其本身的DTFT(等长)频域采样

例题：矩形窗的DFT (与点数有关)





DFT对偶性（一）

- IDFT可以用DFT来实现和计算

$$DFT:\quad X(k)=\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\right)$$

$$IDFT:\quad x(n)=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\overline{\left(\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}\right)}$$

$$IDFT\left[X(k)\right]=\frac{1}{N}\overline{DFT\left[X^*(k)\right]}$$

DFT的对偶性（二）

圆周翻褶

$$x'(n) = x(N-n) \text{ sup } \quad x(N) = x(0)$$

$$x'(n) = x((-n))_N R_N(n)$$

$$\mathrm{DFT}\,[X(n)]$$

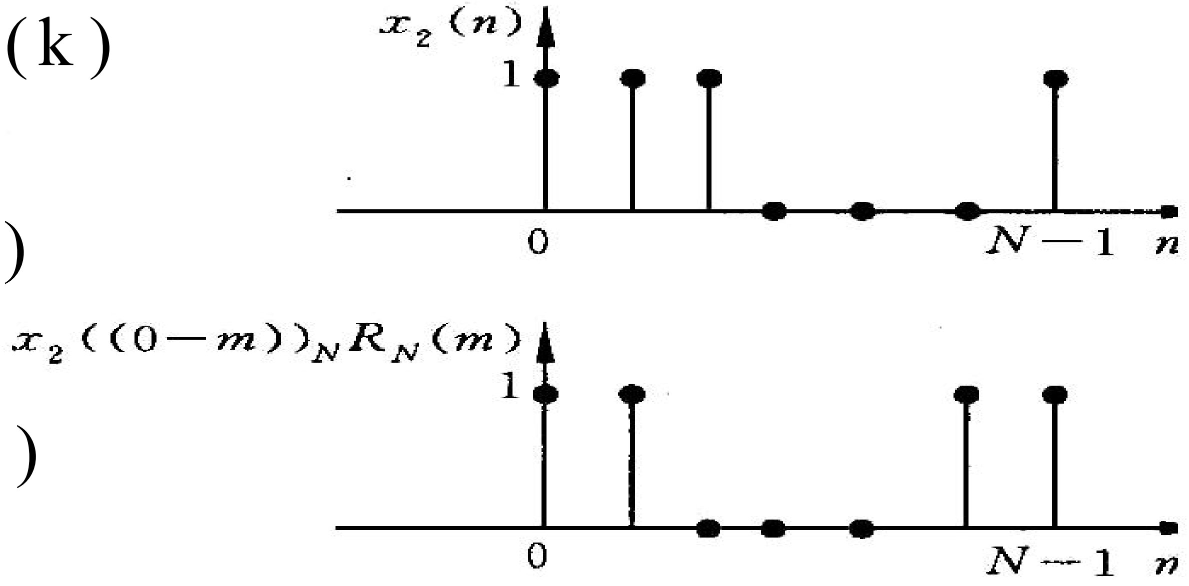
$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{nk}\right) R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') W_N^{nn'}\right) W_N^{nk}\right] R_N(k)$$

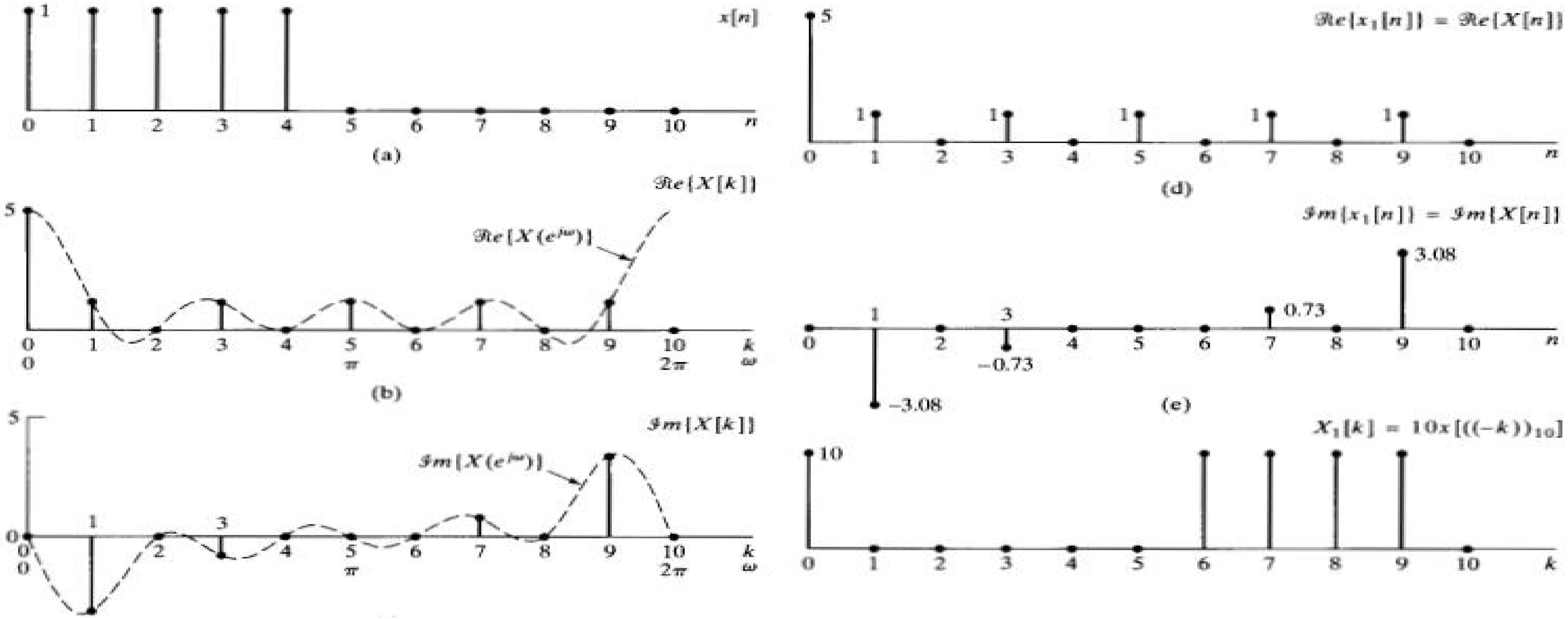
$$= \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(n'+k)}\right)\right] R_N(k)$$

$$= \left\{\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \times [N\delta(n'+k)]\right\} R_N(k)$$

$$= N\tilde{x}((-k))_N R_N(k)$$



DFT对偶性的验证及圆周翻褶



二、DFT性质

- 讨论都假设N点有限长序列的N点DFT

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

- 1、线性

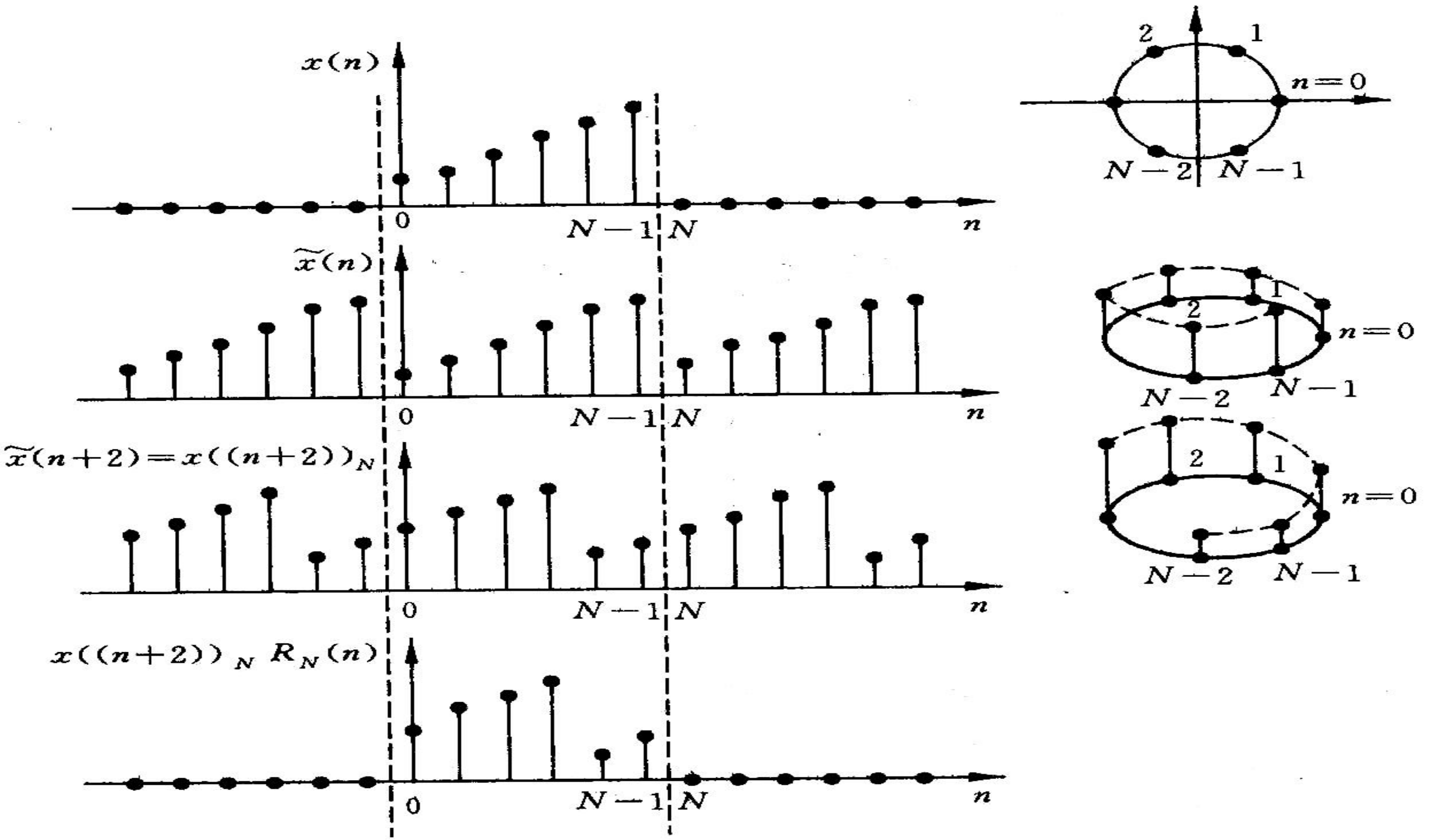
$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

  - 若两个有限长序列的点数不等，则需要将短序列补零后作N点DFT再进行相加,其中：
  - N=max(N1,N2)

2、圆周（循环）移位

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

- 序列以N为周期延拓成周期序列
- 将周期序列加以移位
- 取主值区间[0, N-1]上的序列值



$$X_m(k) = DFT[x_m(n)] = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

$$DFT[x_m(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] = DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k)$$

$$= [\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m)W_N^{nk}]R_N(k) = [\sum_{i=m}^{N+m-1} \tilde{x}(i)W_N^{(i-m)k}]R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk}[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik}]\right)R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk}[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i-N)W_N^{(i-N)k}]\right)R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk}[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik}]\right)R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk}[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik}]\right)R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i)W_N^{ik}\right)R_N(k) = \left(W_N^{-mk}DFS[\tilde{x}(n)]\right)R_N(k) = W_N^{-mk}\left(DFS[\tilde{x}(n)]R_N(k)\right)$$

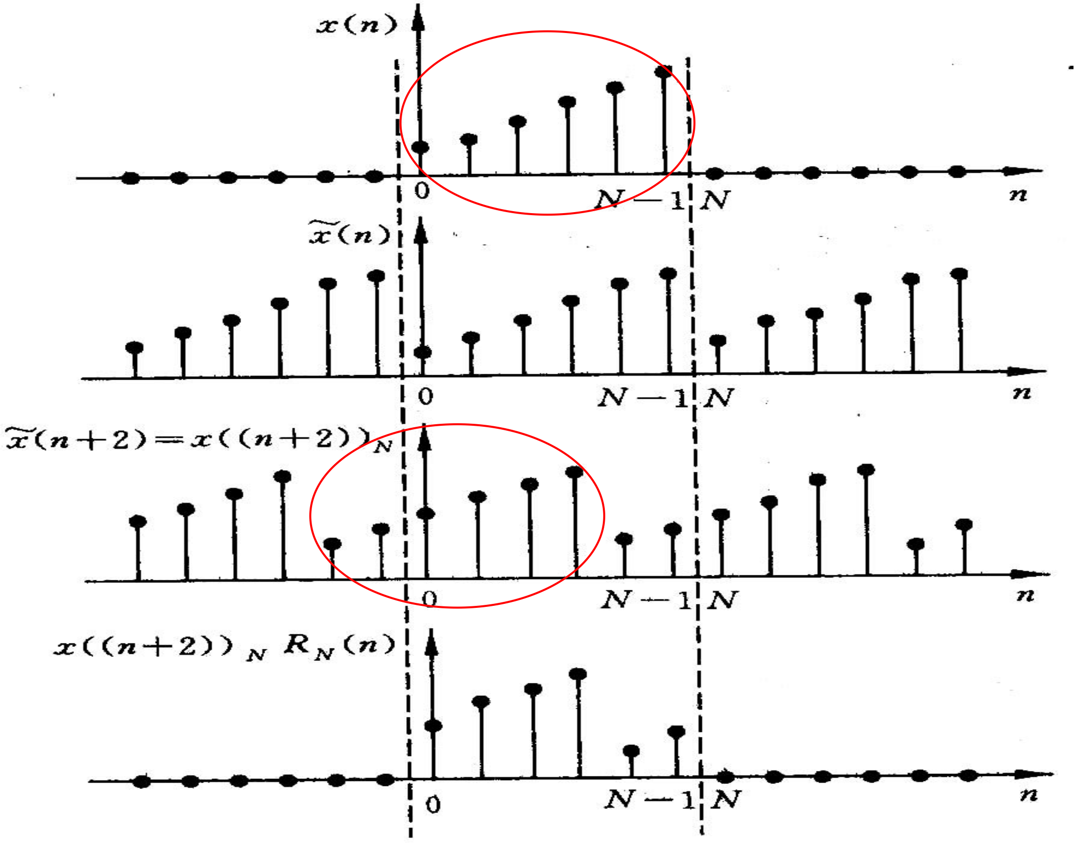
$$= W_N^{-mk}DFT[x(n)]$$

有限长序列的圆周移位仅在离散频域中引入一个和频率成正比的**线性相位**，**不影响**频谱**幅度**特性。

圆周移位特性利用频域抽样定理的再解释

$$W_N^{-km} = e^{(j\frac{2\pi}{N}k)m} = e^{j\omega m}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

- 信号线性平移后信号的**DTFT**频谱的采样
- 频谱采样所重构的信号是原信号的周期延拓
- 证明过程也看到了离散傅立叶级数**(DFS)**的移位性质：



$$DFS[x((n+m))_N] = DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

频域圆周移位

- 同样，利用频域与时域的对偶关系，可以证明：

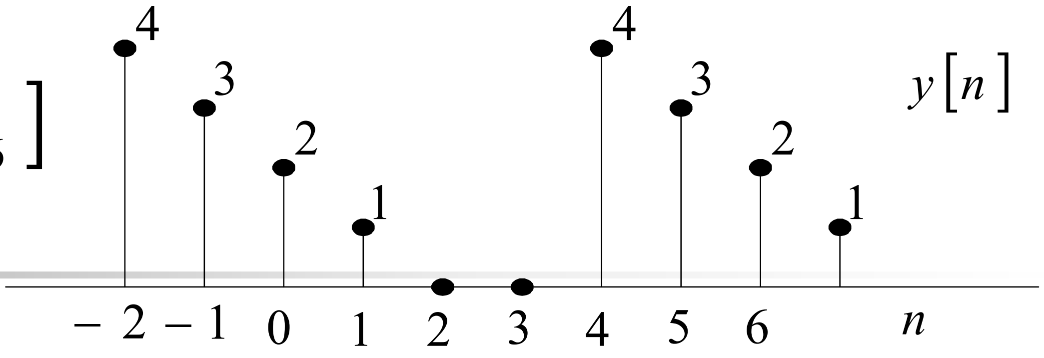
$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

- 频域圆周移位导致时间序列的**调制特性**，也就是说时域序列的调制等效于频域的圆周移位。由此式可以得到：

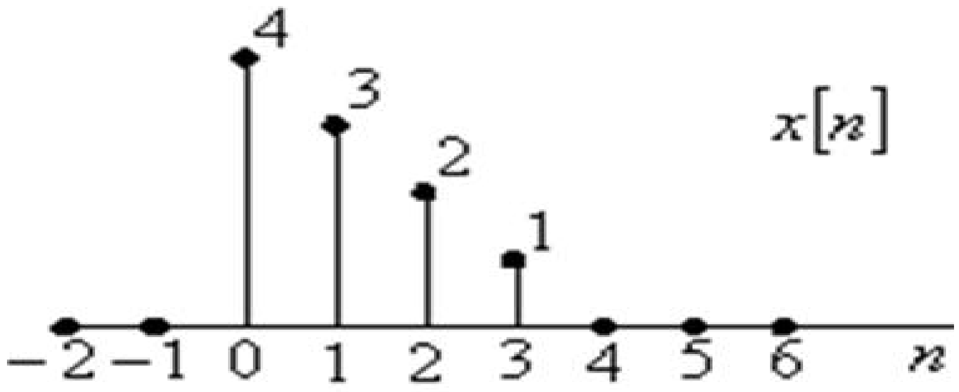
$$DFT[x(n)\cos(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(k)$$

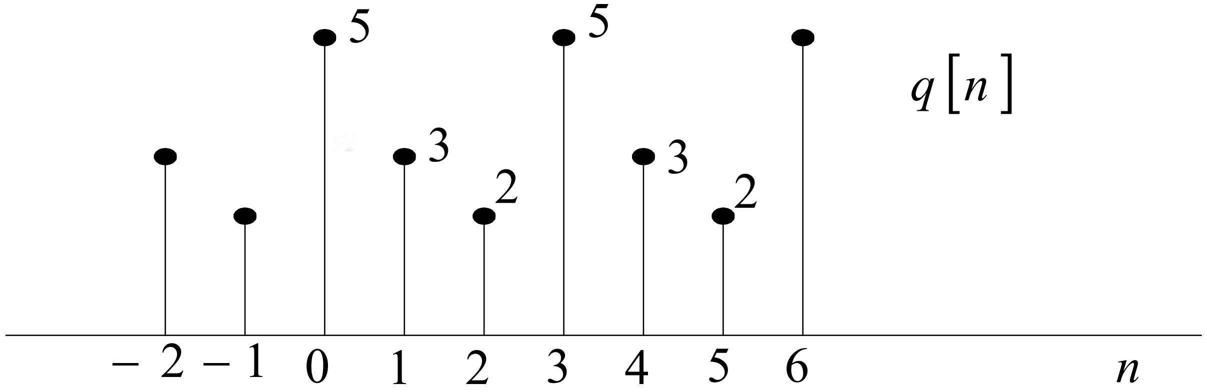
$$DFT[x(n)\sin(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(k)$$

$$y[n] = x[((n-4))_6]$$



例题：考虑如图所示的实有限长序列 $x[n]$





（1）简略画出有限长序列 $y[n]$ 的图形，其 6 点 DFT 为 $Y[k]=W_6^{4k}X[k]$，式中 $X[k]$

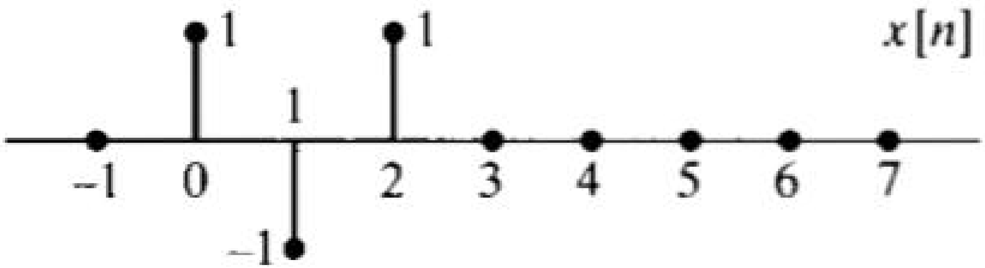
为 $x[n]$ 的 6 点 DFT。

（2）简略画出有限长序列 $q[n]$ 的图形，其 3 点 DFT 为：$Q[k]=X[2k]$，　$k=0,1,2$

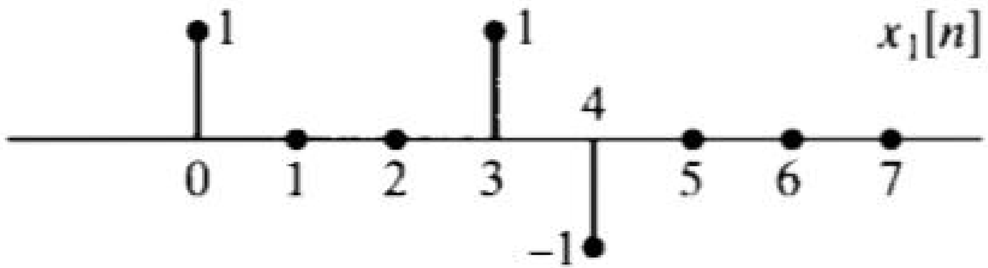
例题

- 两个序列x(n), x1(n)均作N点DFT
- 满足关系：

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k2/N},$$



- 试问是否存在这样的N?
- N是否唯一？



3、圆周共轭对称性

- 任一序列都可表示成共轭对称分量与共轭反对称分量之和。
  - 在讨论有限长序列的离散傅立叶变换时，不能直接采用其定义.因为对于**N**点的序列，按定义给出的共轭对称分对称分量与共轭反对称分量都是（**2N-1**）点。
- 需要从周期序列的共轭对称定义入手，导出有限长序列的圆周共轭

圆周共轭分解

- 有限长序列的圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量分别定义为其周期延拓序列相应共轭分量的主值区间

$$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]$$

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=\tilde{x}_o(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

圆周共轭对称

- 若 $x(n)$ 为共轭对称序列，则 $x((n))_N$称为圆周共轭对称序列

$$x(n) = x^*(N-n) \qquad n \in [0, N-1]$$

- 若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，则 $x((n))_N$称为圆周共轭反对称序列：

$$x(n) = -x^*(N-n) \qquad n \in [0, N-1]$$

- 注
  - 共轭对称是以零点为中心考察对称的性质，
  - 圆周共轭由于是针对**[0，N-1]**上的有限长序列引入的，其对称中心变为 $\frac{N}{2}$。

DFT对称特性

$$x(0)=x(N),\ X(0)=X(N)$$

- （1） $DFT\,[x((-n))_N R_N(n)] = X(N-k)$
- 证明：

$$DFT[x((-n))_N R_N(n)]$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(-n)W_N^{nk}\right)R_N(k)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(N-n)W_N^{nk}\right)R_N(k)=\left(\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{(N-i)k}\right)R_N(k)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-kn}\right)R_N(k)=\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{n(N-k)}\right)R_N(k)=X((N-k))_N R_N(k)=X(N-k)$$

(2) $DFT[x^*(n)] = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$

证明：

$$DFT[x^*(n)]$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right)^* R_N(k)$$

$$= X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$$

同理可得：

$$DFT[x^*(N-n)] = X^*((k))_N R_N(n) = X^*(k)$$

（3） $DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((N-k))_N]R_N(k)$

证明：

$$DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\}$$

$$= DFT\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{DFT[x(n)] + DFT[x^*(n)]\}$$

$$= \frac{1}{2}[X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)]$$

$$= \frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((N-k))_N]R_N(k) = X_{ep}(k)$$

$$DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X((k))_N + X^*((N-k))_N]R_N(k)$$

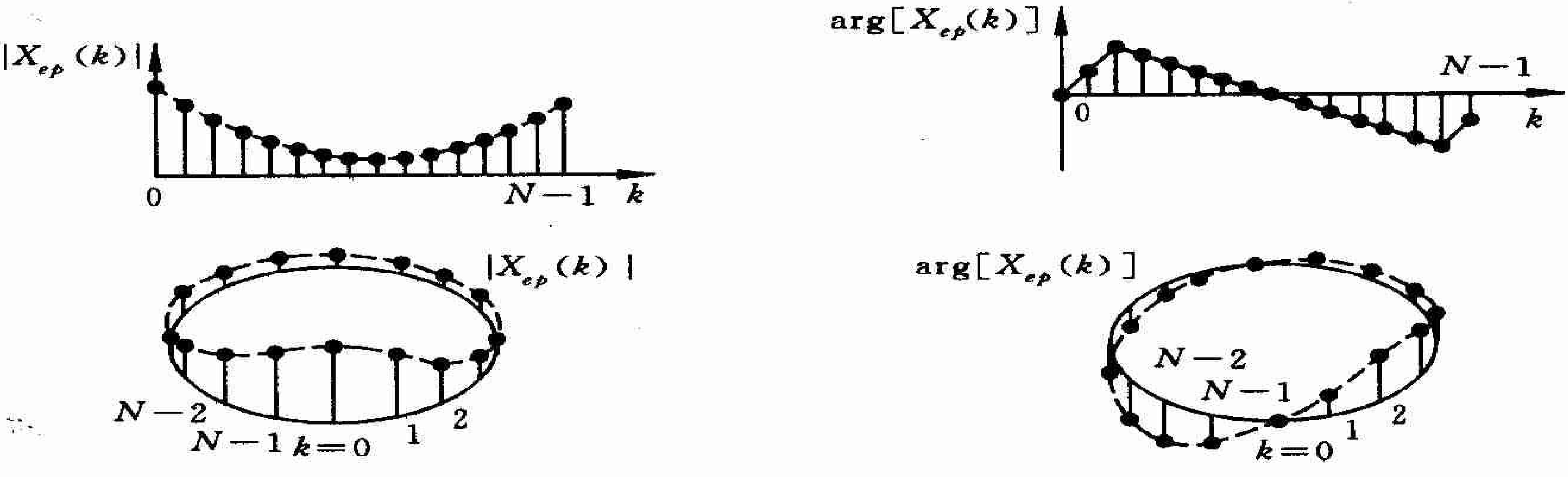
- 同理可得：

$$DFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k)$$

$$DFT\{x_{ep}(n)]\} = \mathrm{Re}[X(k)]$$

$$DFT\{x_{op}(n)]\} = j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

- 复序列实部的**DFT**对应于序列**DFT**的圆周共轭对称分量；序列虚部乘以**j**的**DFT**对应于序列**DFT**的圆周共轭反对称分量。
- 实序列的**DFT**只有圆周共轭对称分量，纯虚序列的**DFT**只有圆周共轭反对称分量。



实序列，其DFT圆周共轭对称，即：

$$X_{op}(k) = X_{op}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

纯虚序列，其DFT圆周共轭反对称，即：

$$X_{op}(k) = -X_{op}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

$$x[n]=\delta[n-1]+\delta[n-N+1]$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}=W_N^{k}+W_N^{(N-1)k}=2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

例题

- 实N点有限长序列x(n), n=0,1,2,...N
- 其傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ， DFT为 $X(k)$
- 1）若： $\mathrm{Im}\{X(k)\}=0, \quad k=0,1,\ldots,N-1$ 是否我们可以得到结论：$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0, \quad |\omega|\le\pi$?如果可以，请详细说明原因。如果不可以，请举出反例。
- 2）是否存在上述x(n) 其 $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0, \quad |\omega|\le\pi$?如果有请举例。否则请给满足 $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0, \quad |\omega|\le\pi$ N点序列y(n) 的特征。若 $X(k)=Y(e^{j\omega})|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$ 请指出有限长序列x(n)与有限长序列y(n)间的关系。

$$x(n)=y((n))_N R_N(n)$$

利用对称性减少运算量

- 对于实序列和纯虚序列，只要知道一半数目就可以利用对称性求得另外一半，从而可以节约运算
- 利用共轭对称性，可以用一次DFT运算来计算两个实数序列的DFT，因而可以减少计算量。

$$\omega(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\begin{aligned} W(k) &= DFT[w(n)] \\ &= DFT[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] \\ &= X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

$$X_1(k) = DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

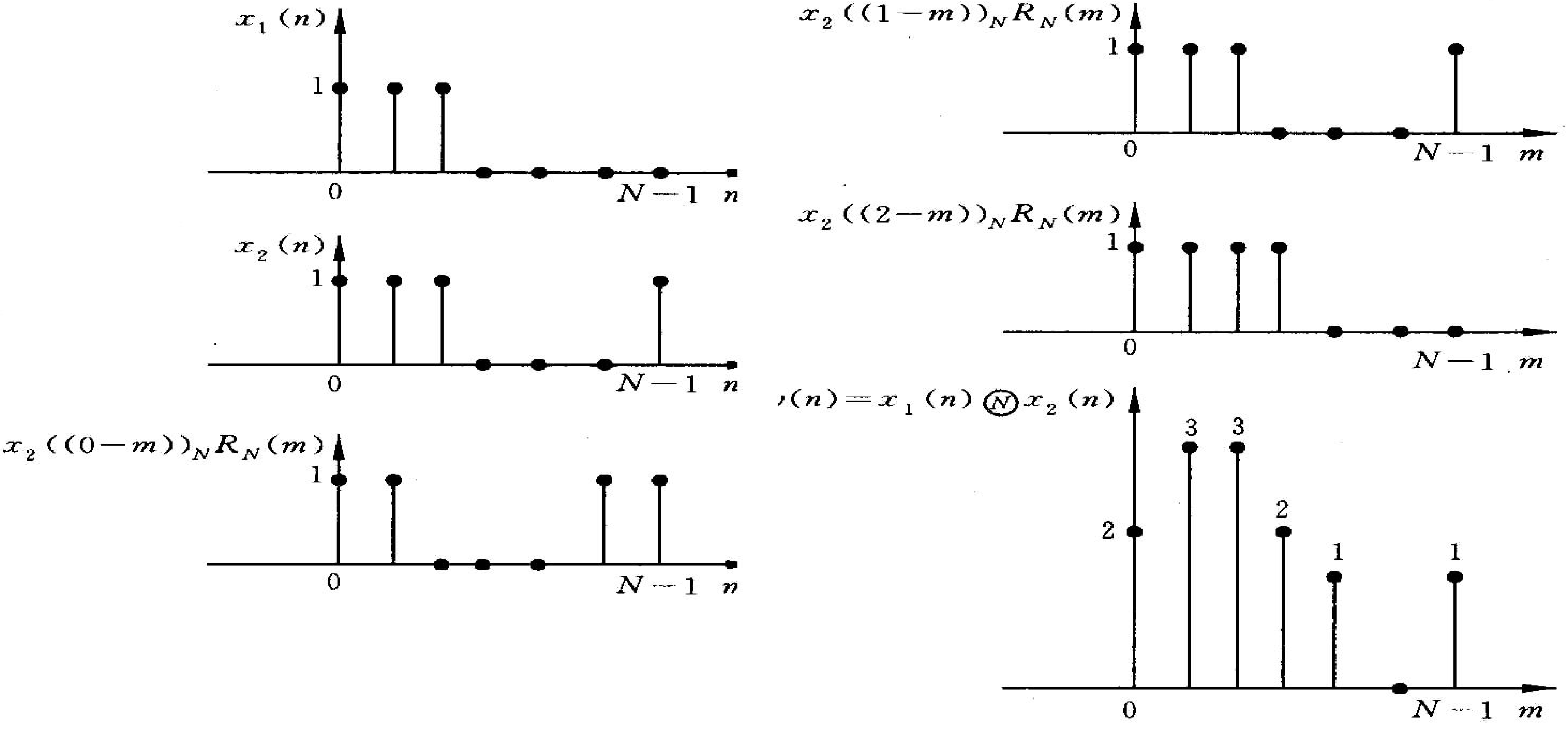
$$X_2(k) = DFT\{\mathrm{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - X^*((N-k))_N]R_N(k)$$

四、圆周卷积和（N）

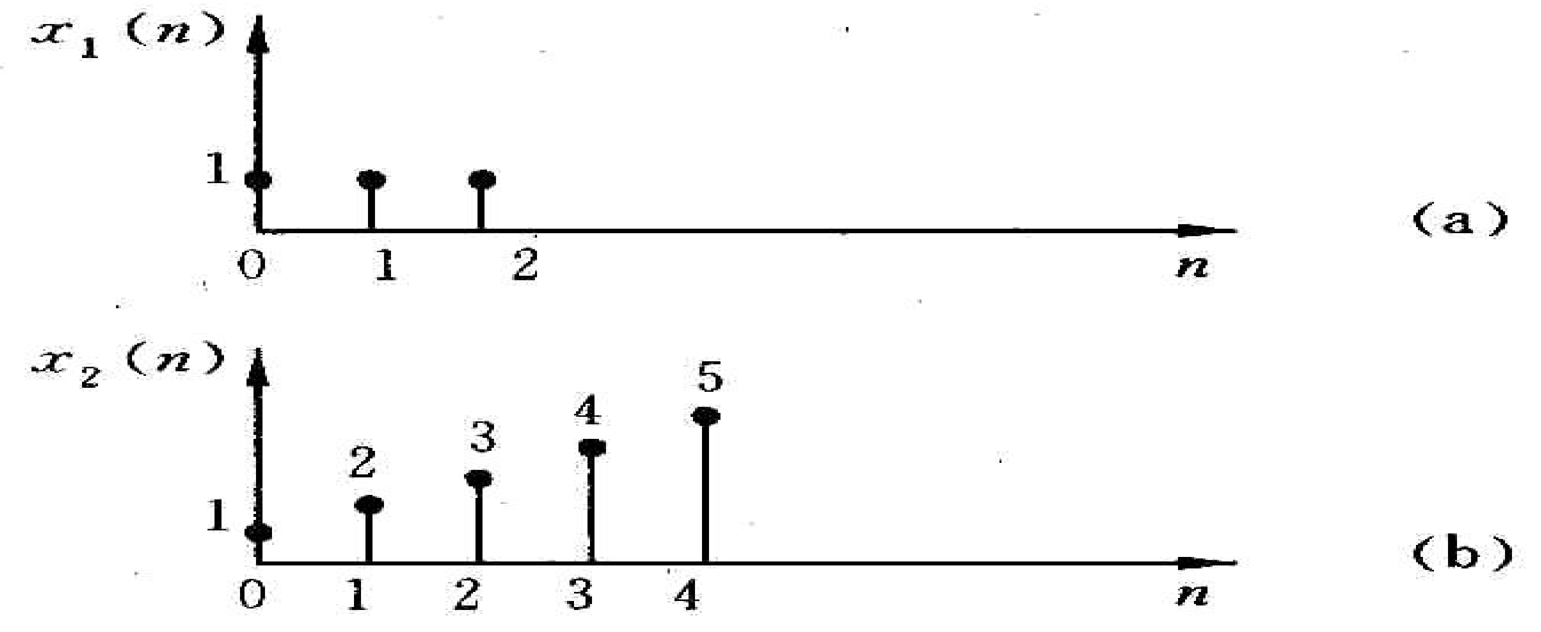
- 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为**N**的有限长序列。
- 圆周卷积和定义为：

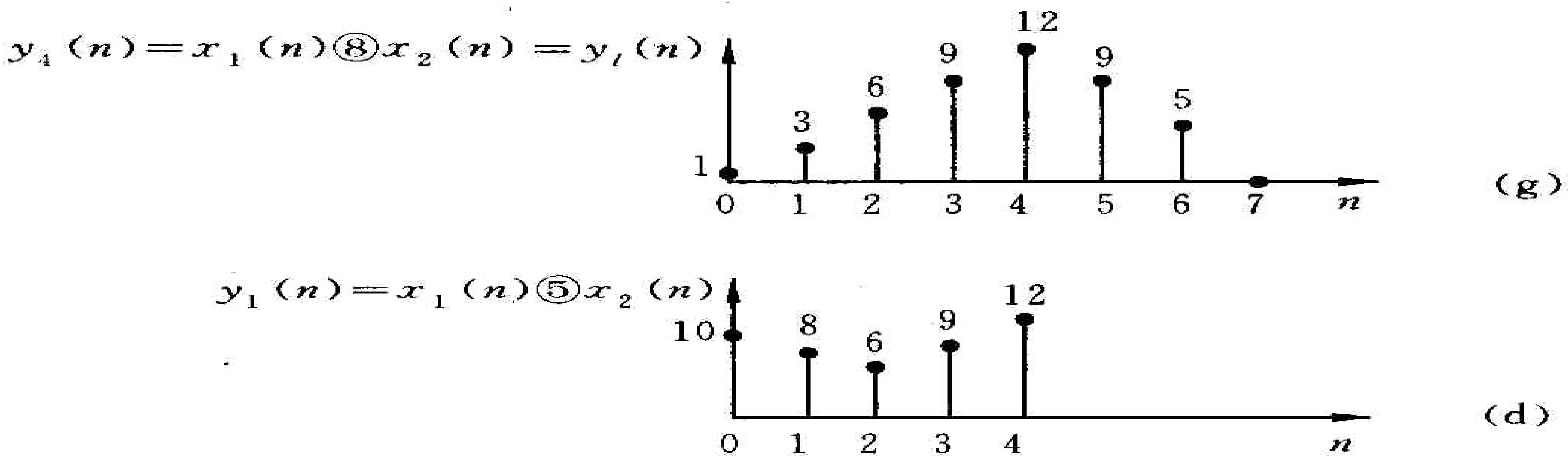
$$y(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N] R_N(n)$$

- 圆周卷积和与点数**N**有关


x1(n)
x2(n)
x2((0−m))N RN(m)
x2((1−m))N RN(m)
x2((2−m))N RN(m)
(n)=x1(n) N x2(n)
0
1
2
3
N−1
n
m

两个序列做不同点数的圆周卷积和，其结果不一样





圆周卷积和性质

- 若：

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

- $$Y(k) = X_1(k)X_2(k)$$

- 则有：

$$y(n) = IDFT[Y(k)]$$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N]R_N(n)$$

- **证明：**

$$
\begin{aligned}
&y(n)\\
&= IDFT[Y(k)]\\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)W_N^{-nk}\right)R_N(n)\\
&= \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)W_N^{mk}\right)X_2(k)W_N^{-nk}\right]R_N(n)\\
&= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_2(k)W_N^{-(n-m)k}\right)\right]R_N(n)\\
&= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n) \equiv \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N\, x_2((n-m))_N\right]R_N(n)
\end{aligned}
$$

圆周卷积和交换性

同理不难证明：

$$y(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N\right]R_N(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2((m))_N\,x_1((n-m))_N\right]R_N(n)$$

$$x_1(n)\Theta x_2(n)=x_2(n)\Theta x_1(n)$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right)R_N(n)=\left(\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N\right)R_N(n)$$

圆周卷积和 计算 线性卷积和

- 时域圆周卷积和在频域上相当于两**DFT**相乘，因而可以采用**DFT**的快速算法（**FFT**）来实现。与序列的线性卷积和相比，计算速度可以大大加快。
- 一般实际问题（例如信号通过线性移不变系统）都是线性卷积运算，并且作卷积和的两个序列一般情况下长度不等。
  - 如果输入信号以及系统的单位冲激响应都是有限长序列，那么是否能用圆周卷积运算来代替线性卷积运算呢？

线性卷积和

- $x_1(n)$是N_1点的有限长序列（$0 \le n \le N_1-1$），
- $x_2(n)$是N_2点的有限长序列（$0 \le n \le N_2-1$），
- 线性卷积和：$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

- $X_1(n)$的非零区间为$0 \le m \le N1$，$x_2(n)$的非零区间为$0 \le n-m \le N_2-1$，将两个不等式相加，得到其卷积和$y(n)$的非零区间: $0 \le n \le N_1+N_2-2$，所以是N_1+N_2-1点有限长序列。

圆周卷积和

- 数据长度调整

$$x_1(n)=\begin{cases} x_1(n), 0\le n\le \mathrm{N}_1-1 \\ 0, N_1\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$x_2(n)=\begin{cases} x_2(n), 0\le n\le \mathrm{N}_2-1 \\ 0, N_2\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & y(n) \\ &= x_1(n)\Theta x_2(n) \\ &= [\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L]R_L(n) \\ &= [\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m)]R_L(n) \\ &= [\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2(n+rL-m)]R_L(n) \\ &= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL)]R_L(n) \end{aligned}$$

L点圆周卷积是圆周卷积以L为周期的周期延拓序列的主值序列。
圆周卷积无失真代表圆周卷积的条件是延拓周期L必须满足：

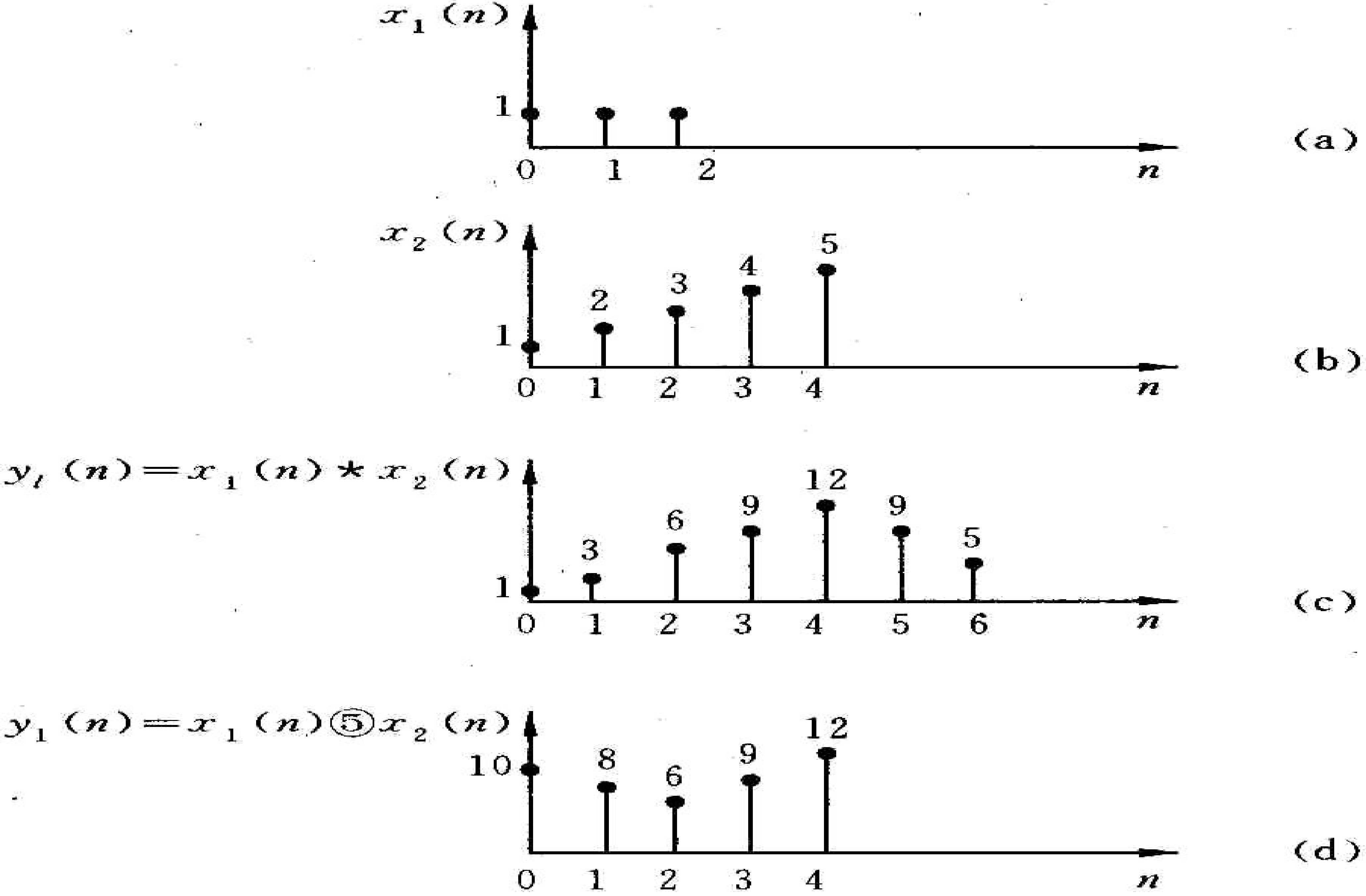
$$L\ge N_1+N_2-1$$

圆周卷积和定理的再解释

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) ----> y(n)$$

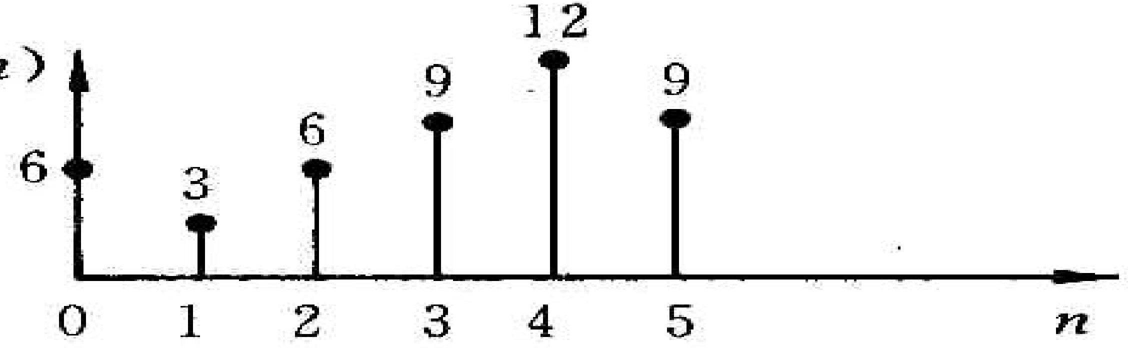
$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) ---> y_1(n)$$

- Y(K)实际上是两个信号线性卷积和DTFT的采样
- →y(n)相当于线性卷积和的周期延拓
- →DFT的点数只有大于等于线性卷积和长度时，才能恢复。



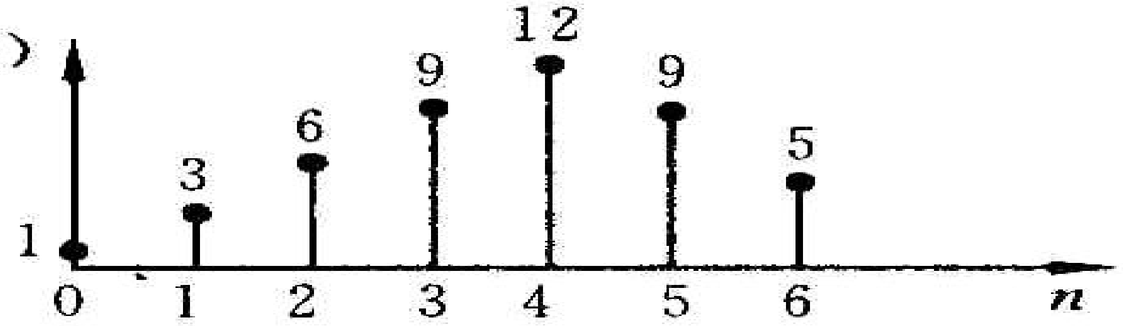
x1(n)
1
0 1 2
n
(a)
x2(n)
1 2 3 4 5
0 1 2 3 4
n
(b)
yl(n)=x1(n)*x2(n)
1 3 6 9 12 9 5
0 1 2 3 4 5 6
n
(c)
y1(n)=x1(n)⑤x2(n)
10 8 6 9 12
0 1 2 3 4
n
(d)

$y_2(n) = x_1(n) ⑥ x_2(n)$



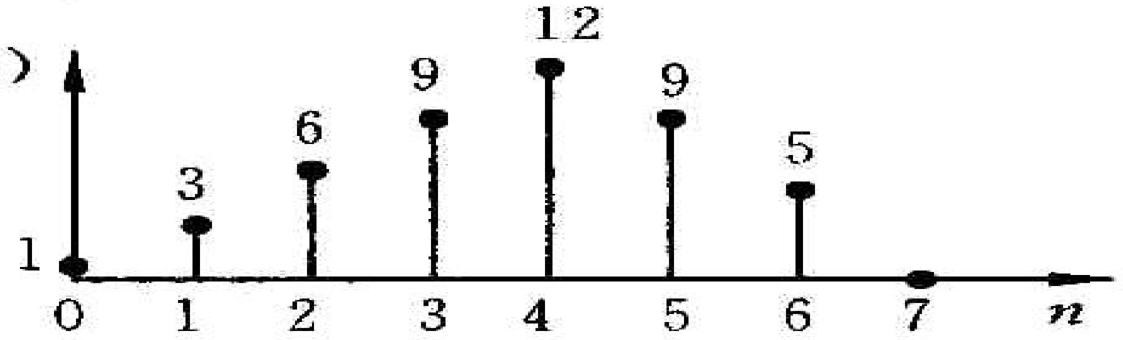
(e)

$y_3(n) = x_1(n) ⑦ x_2(n) = y_l(n)$



(f)

$y_4(n) = x_1(n) ⑧ x_2(n) = y_l(n)$



(g)

时域相乘定理

- 利用时域与频域的对偶性，可以证明：
- 若：$x_1(n)$ ，$x_2(n)$ 皆为**N**点有限长序列，并且**y(n)**为其相乘序列：

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$

- 则有：

$$Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \Theta X_2(k)$$

五、圆周相关

- 线性相关定义为：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^*(n)$$

- 相关与卷积和类似
  - 缺少“翻褶”过程；
  - 与卷积和不同的是相关不满足交换律。
- 自相关函数：

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)x(n+m)=r_{xx}^*(-m)$$

相关函数的频谱

$$R_{xy}(z)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^{*}(n-m) z^{-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^{*}(n-m) z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^{*}(m) z^{(m-n)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^{*}(m) z^{m} = X(z) Y^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)$$

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Y^{*}(e^{j\omega}) \qquad R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^{2}$$

- 上述推导说明：
  - 互相关函数的频谱只包含两个信号共有频率成分。
  - 自相关函数的傅里叶变换是信号的功率谱，是信号谱分析建模的基础。
- 与圆周卷积和类似，由于DFT隐含的周期性，存在圆周相关的概念，它不同于线性相关。

- 借助线性相关性质假设：
- 可以证明：

$$R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

$$IDFT[R_{xy}(k)] = r_{xy}(m)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N\right]R_N(m) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N\right]R_N(m)$$

- 由此，引出圆周相关的定义为：

$$r_{xy}(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N\right)R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N\right)R_N(m)$$

$$IDFT[R_{xy}(k)]$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) X(k) W_N^{-mk} \right) R_N(m)$$

$$= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) W^{-mk} \right] R_N(m)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) W_N^{(n-m)k} \right) \right] R_N(m)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-(n-m)k} \right)^* \right] R_N(m)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N \right) R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m))_N \right) R_N(m) = r_{xy}(m)$$

- 实际信号处理中主要是为了实现线性相关运算，从而实现对信号的分析；
- 由于圆周相关可以利用**FFT**快速实现，因而大部分情况下利用圆周相关来实现线性相关；
- 与卷积类似，**L**点圆周相关能代表线性相关的条件是：

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

作业

- 8.9
- 8.14
- 8.15
- 8.16
- 8.23
- 8.27

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn