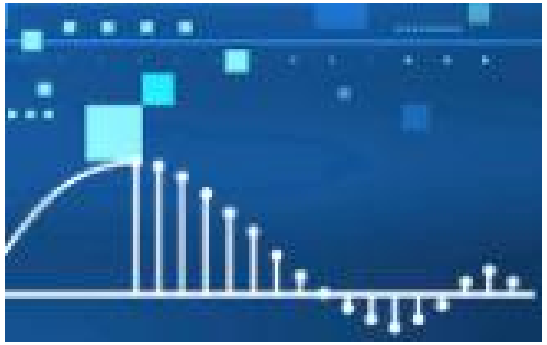
北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 二 章

Contents

离散时间系统变换域分析

LTI系统幅相特性分析

- 典型频响的LTI系统有哪几类？
- 具体表现形式和作用是什么？

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- 一般来说关于幅度特性的了解并没有给出任何有关相位的信息；两者独立。然而，有理LTI系统幅度和相位特性间存在制约
  - 如果幅度特性已知，与其有关的相位特性仅有有限种选择。
  - 如果零极点个数（阶数）和相位特性已知（线性相位），除了幅度加权因子外，也仅有有限可数种幅度特性可供选取。
  - 在特殊条件下（如最小相位），幅度与相位特性一一对应。

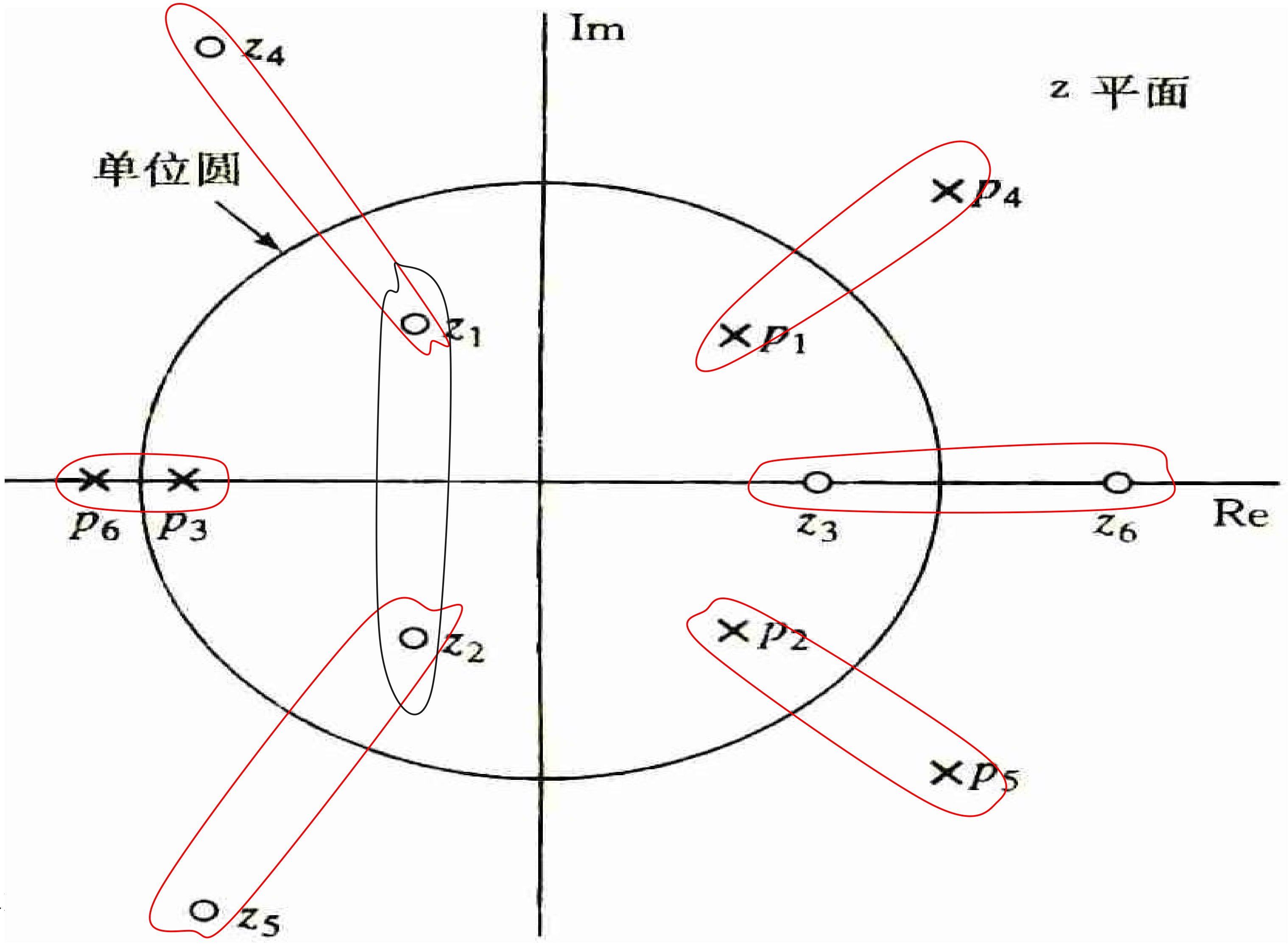
幅度特性约束下的系统函数

- 给定频率响应的幅度平方特性下

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

  - 尽量使由幅度平方响应演化出来的零、极点在单位圆内外皆有
  - 使得总能够选择出一个物理可实现的系统来满足幅度响应的要求。

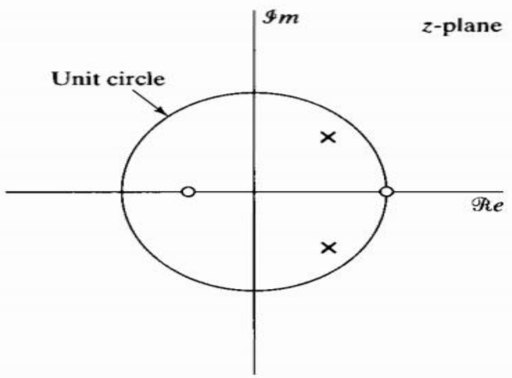
Ex:设由系统幅度响应所引导的 $C(z)$ 的零、极点如图所示，若系统为常实系数线性差分方程所确定的因果稳定系统，试确定其系统的零、极点。

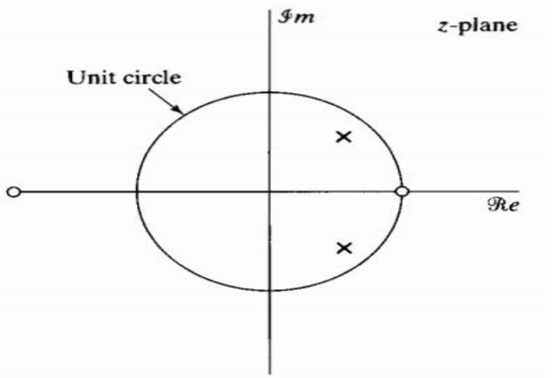


EX:具有相同C(z)的LTI系统

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

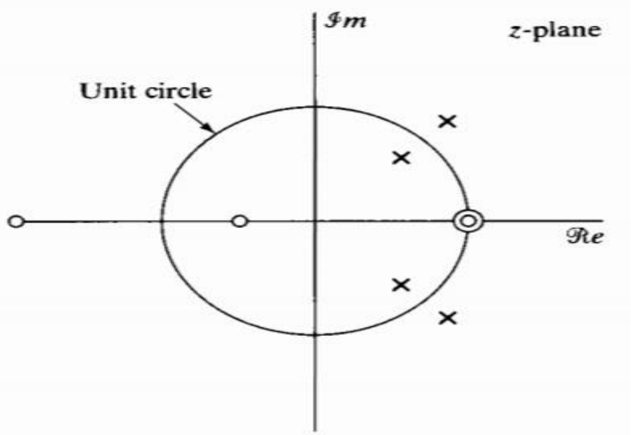
$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$





$$\begin{aligned} C_1(z) &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \\ &= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})2(1 - z)(1 + 0.5z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(z) &= H_2(z)H_2^*(1/z^*) \\ &= \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)}. \end{aligned}$$



一、 全通系统

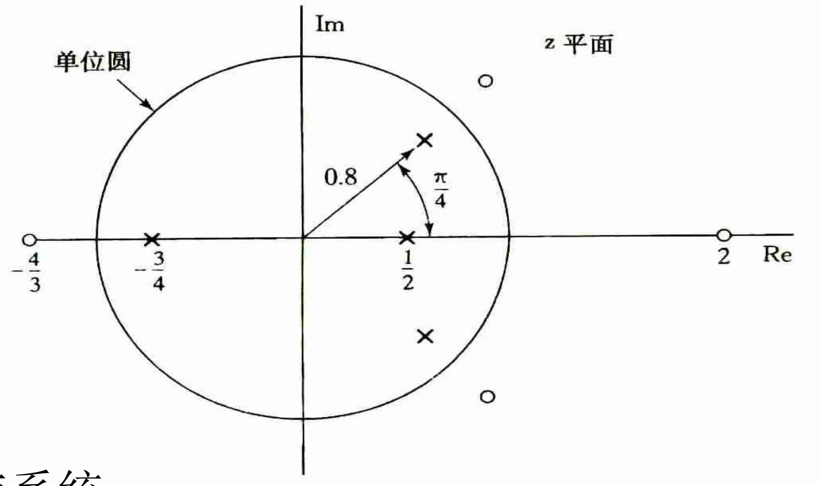
- 若系统对所有的频率分量的幅度响应均为非零恒定值，则该系统即为全通系统。

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}=-a^*\left(\frac{z-\frac{1}{a^*}}{z-a}\right)$$

- 幅度响应为：

$$\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|=\left|H_{ap}(z)\big|_{z=e^{j\omega}}\right|$$

$$=\left|\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}\right|=\left|e^{-j\omega}\left(\frac{1-a^*e^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right)\right|=\left|e^{-j\omega}\right|\left|\frac{x^*}{x}\right|=1$$



- 通常，全通系统就是由上式扩展来的：

$$H_{ap}(z)=A\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-a_k^*}{1-a_kz^{-1}} \longrightarrow \text{实冲激响应系统} \longrightarrow$$

$$=A\prod_{k=1}^{Nr}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_kz^{-1}}\prod_{k=1}^{(N-Nr)/2}\frac{z^{-1}-a_k^*}{1-a_kz^{-1}}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_k^*z^{-1}}=A\frac{Z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}$$

- D(z)为实系数多项式，所以

$$D(e^{j\omega})=D^*(e^{-j\omega}) \qquad \left|H_{ap}(z)|_{z=e^{j\omega}}\right|=A(const\quad)$$

  - 全通系统的零点与极点呈共轭倒数对关系。
  - 全通系统是从其幅度响应特性定义，但相位响应却更重要。

相位响应

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^{*}}{1-az^{-1}}=-a^{*}\left(\frac{z-\frac{1}{a^{*}}}{z-a}\right)$$

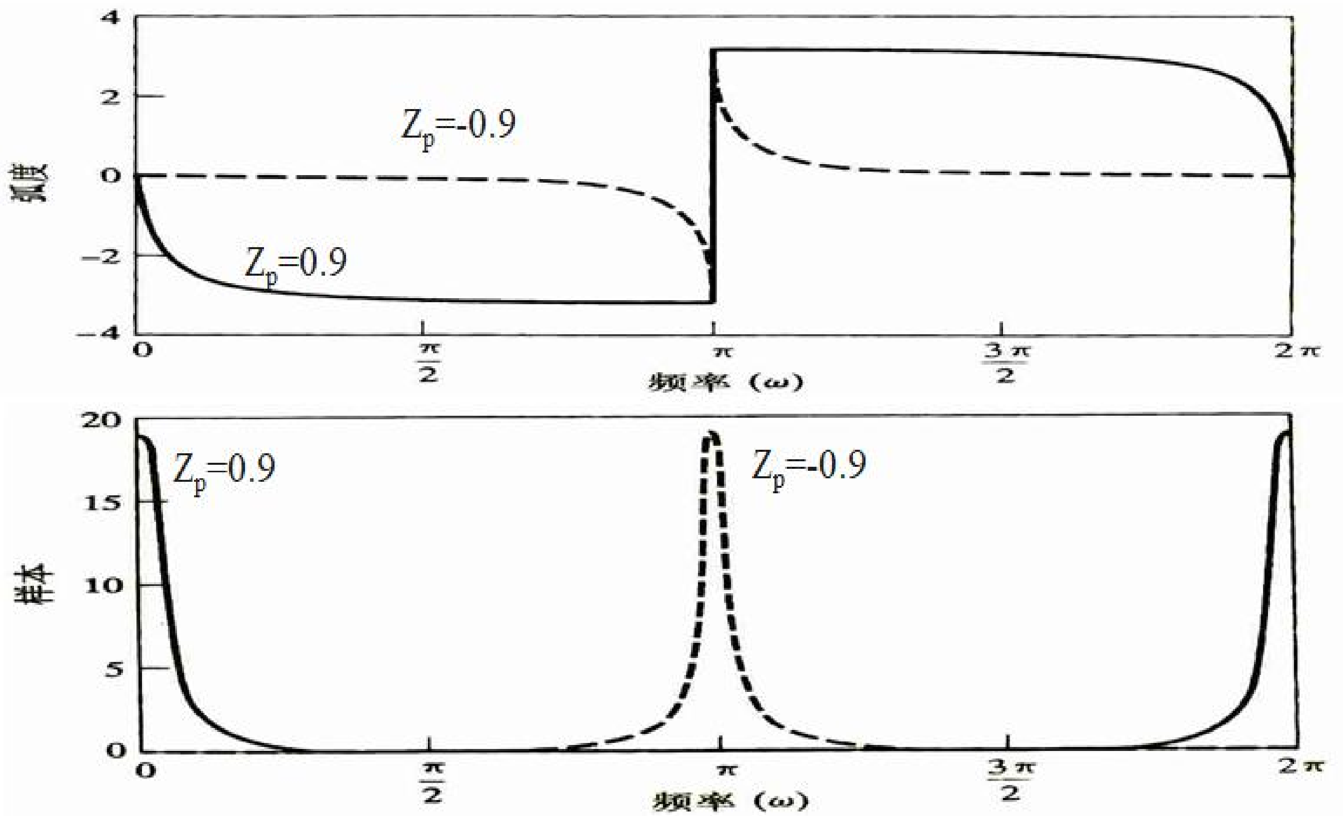
- 令： $a=re^{j\theta}$

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$=-\omega-2arctg\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]$$

$$grd[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$=\frac{1-r^{2}}{\left|1-re^{-j(\omega-\theta)}\right|^{2}}$$



- 群延迟为正值，连续相位递减。

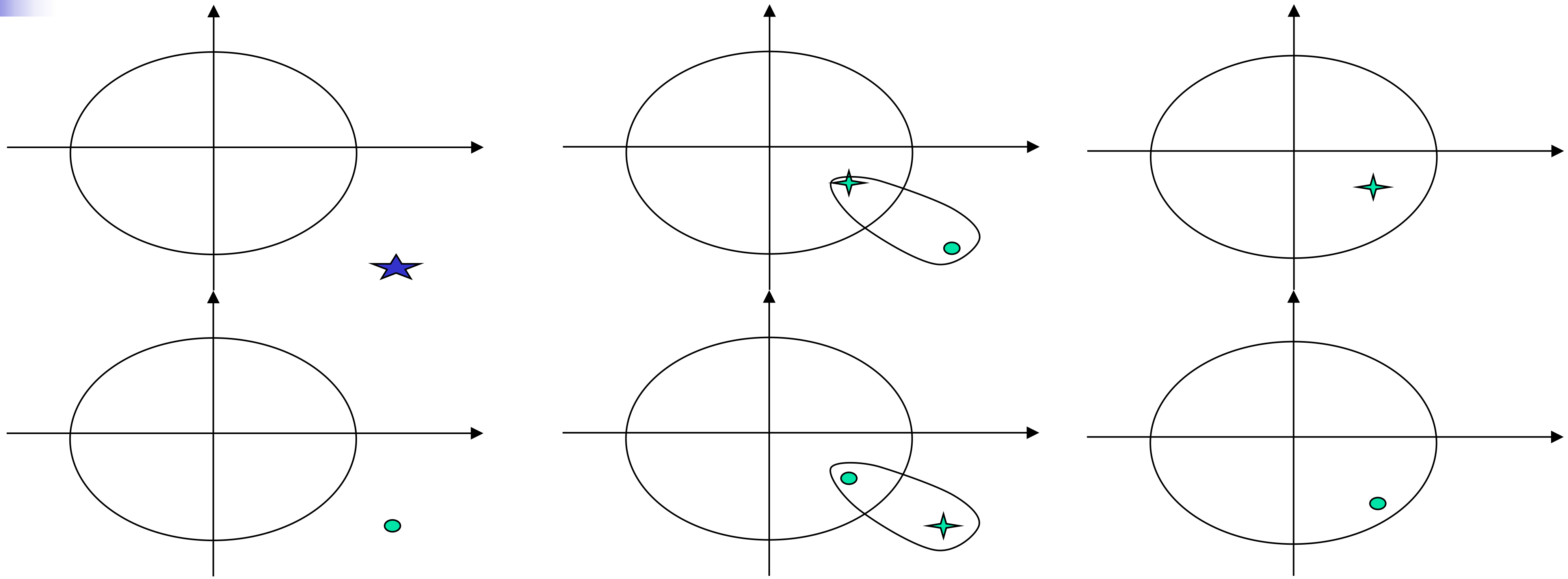
- 对于高阶因果全通系统而言，由于：

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^{N} \arg[H_{api}(e^{j\omega})]$$

$$grd[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^{N} grd[H_{api}(e^{j\omega})]$$

- 同样具有**群延迟为正值**，连续相位**负递减**的特性。
- 全通系统在实际中有如下用途：
  - 1、用作**相位均衡器**，对系统相位、群延迟失真进行补偿；
  - 2、**任何因果稳定系统皆可分解为全通系统和最小相位系统的级联；**
  - 3、若所设计的系统是非稳定的，可用其交换零、极点，使系统**稳定，**而保证系统的幅度特性不变。

非稳定系统调整为稳定系统



非最小相位系统调整为最小相位系统

二、最小相位系统

- LTI有理系统，其频率响应的幅度特性不能唯一确定该系统。原因何在？
  - 稳定、因果性要求并没有对零点作约束
  - 假如某一系统具有给定的幅度特性，则该系统与任何可选择的全通因子级联将不而不影响它的幅度特性。
- 逆向思维：
  - 是否任何因果稳定有理系统函数是由一个决定幅度特性的基本核被一系列全通因子包裹着？即系统是全通系统和某一类基本系统（最小相位系统）级联的形式？即：

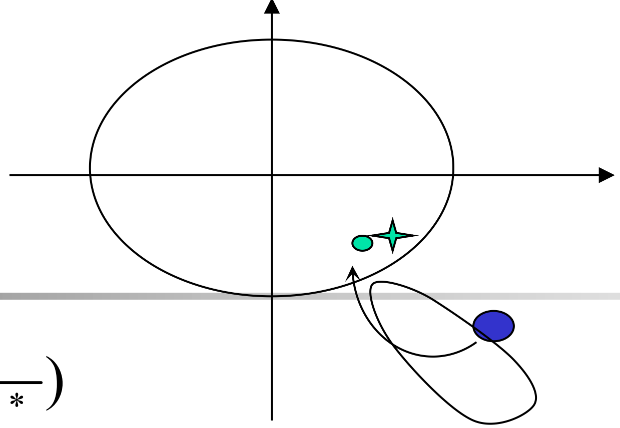
$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

  - 寻找的线索？全通因子的零点都在单位圆外

LTI系统全通分解　证明：

- 假设**H(z)**为因果稳定非最小相位系统，将有**r**个零点在单位圆外（$z=\frac{1}{c_k^*}$，c_k在单位圆内）**,**其余的零、极点都在单位圆内。
- 在单位圆内的零、极点将构成最小相位系统$H_1(z)$，那么**H(z)**就能表示成：

$$H(z)=H_1(z)\prod_{k=1}^{r}\left(z-\frac{1}{c_k^*}\right)$$



$$H(z)=H_1(z)\prod_{k=1}^{r}\left(z-\frac{1}{c_k^*}\right)$$

$$=H_1(z)\prod_{k=1}^{r}\left[-c_k^*\frac{\left(z-\frac{1}{c_k^*}\right)}{(z-c_k)}\right]\left[-\frac{1}{c_k^*}(z-c_k)\right]$$

$$=H_1(z)\prod_{k=1}^{r}\left[-\frac{1}{c_k^*}(z-c_k)\right]\prod_{k=1}^{r}\left[-c_k^*\frac{\left(z-\frac{1}{c_k^*}\right)}{(z-c_k)}\right]$$

$$=\left\{H_1(z)\prod_{k=1}^{r}\left[-\frac{1}{c_k^*}(z-c_k)\right]\right\}\prod_{k=1}^{r}\left[\frac{(z^{-1}-c_k^*)}{(1-c_kz^{-1})}\right]=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

结论：

1）Hap(z)由单位圆外的零点和其单位圆内的共轭倒数极点组成。

2）**最小相位系统Hmin(z)**的零极点全部都在单位园内；不仅包含**H(z)**中位于单位圆内的零、极点，而且也包含了与单位圆外那些零点镜像到单位圆内的共轭倒数零点。

3）将最小相位系统位于单位圆内的零点反射到单位圆外与它们成共轭倒数的位置上而形成一个非最小相位系统。它们都具有**相同幅度特性**。

最小相位系统的性质

- “最小相位”名词代表这类系统三个**本质特征：**
  - 最小相位延迟
  - 最小群延迟
  - 最小能量延迟

1、最小相位滞后

- 由系统的全通分解知： $H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$
- 可以进一步得到：

$$\arg[H(e^{j\omega})]=\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]+\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$\arg[H(e^{j\omega})]\le\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

$$\left|\arg[H(e^{j\omega})]\right|\ge\left|\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]\right|$$

  - 全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小（滞后）
  - 对于具有相同幅度响应的所有系统而言，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的相位滞后。

2、最小群延迟

- 注意到具有相同幅度响应系统的群延迟为：

$$grd\,[H(e^{j\omega})] = grd\,[H_{\min}(e^{j\omega})] + grd\,[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- 由于全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值，所以：

$$grd\,[H(e^{j\omega})] \geq grd\,[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 因此在具有相同幅度响应的所有系统中，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的群延迟。

3、最小能量延迟

- 对于具有相同幅度响应的所有系统，该性质包含有两部分内容：
  - 1）初值能量最大，即初值能量延迟最小：

$$|h(0)| \le |h_{\min}(0)|$$

  - 2）部分能量最大，即部分能量延迟最小：

$$\sum_{m=0}^{n} |h(n)|^2 \le \sum_{m=0}^{n} |h_{\min}(m)|^2$$

- 最小相位系统的部分能量最集中在**n=0**周围，也就是说，最小相位系统的能量在所有相同幅度响应函数的系统中延迟最小，也称为最小能量延迟系统。

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)=H_{\min}(z)\frac{(z^{-1}-z_k^*)}{(1-z_kz^{-1})}\qquad \frac{H(z)}{(z^{-1}-z_k^*)}=\frac{H_{\min}(z)}{(1-z_kz^{-1})}=Q(z)$$

$$H_{\min}(z)=Q(z)(1-z_kz^{-1})\qquad H(z)=Q(z)(z^{-1}-z_k^*)$$

$$h_{\min}[n]=Z^{-1}\{H_{\min}(z)\}=q[n]-z_k\cdot q[n-1]$$

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=q[n-1]-z_k^*\cdot q[n]$$

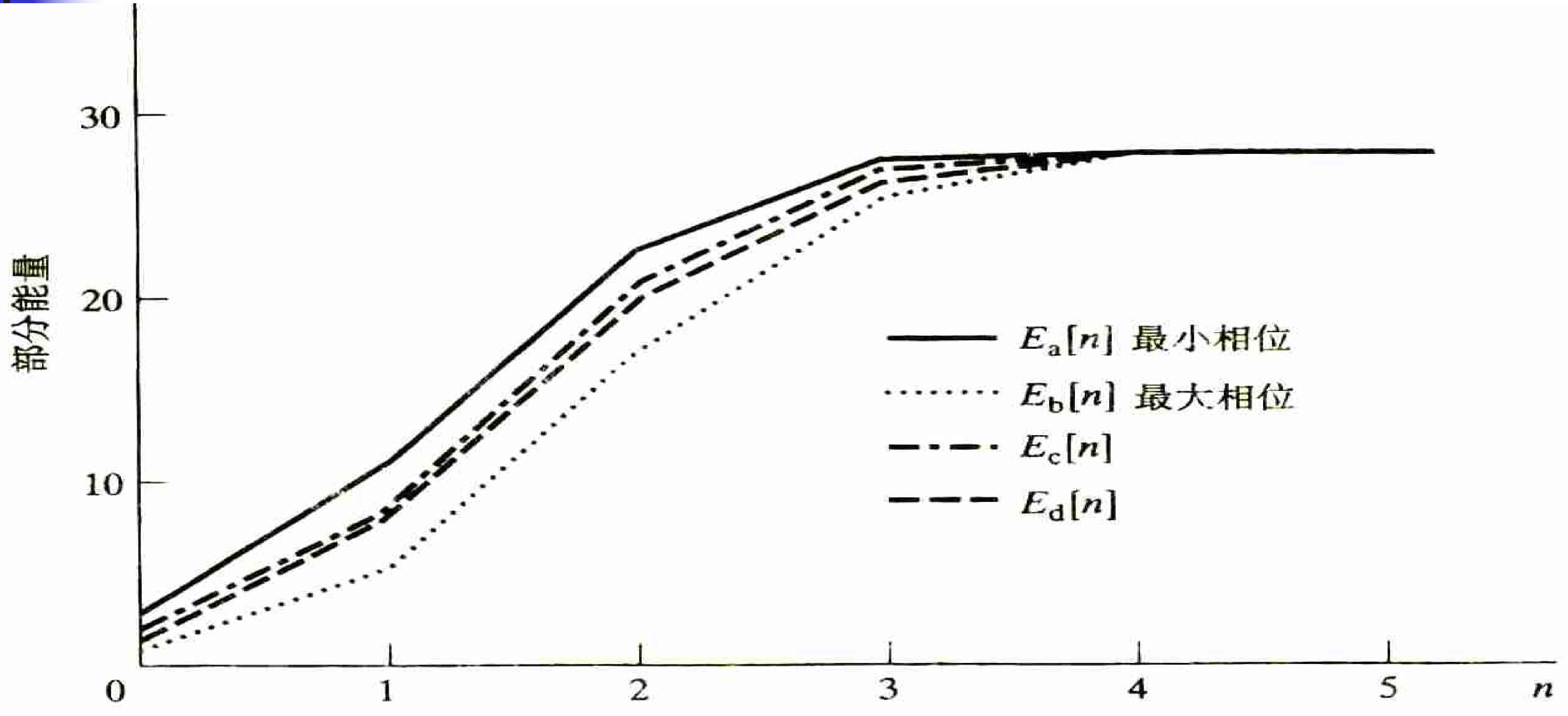
$$z_k=a+jb$$

$$\varepsilon=\sum_{m=0}^{n}\left|h_{\min}[m]\right|^2-\sum_{m=0}^{n}\left|h[m]\right|^2=\sum_{m=0}^{n}\left\{\left|h_{\min}[m]\right|^2-\left|h[m]\right|^2\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\left\{\left|q[m]-(a+jb)\cdot q[m-1]\right|^2-\left|q[m-1]-(a-jb)\cdot q[m]\right|^2\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\left\{(1-a^2-b^2)\cdot\left[q^2[m]-q^2[m-1]\right]\right\}\qquad=\left(1-\left|z_k\right|^2\right)q_n^2$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为最大相位系统。



逆系统与失真补偿

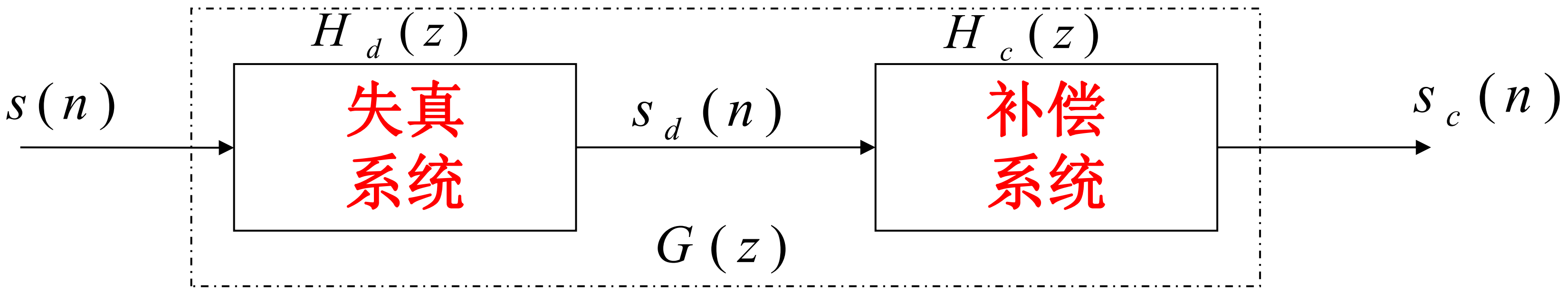
- 逆系统
  - 系统函数为H(z)的LTI系统，其对应的逆系统定义为它与原系统级联后的总系统函数为1，即：Hi(z)=1/H(z)
    - 原系统是有理系统，逆系统零极点分别是原系统极零点；
    - 若原系统和逆系统的频率响应存在，满足

$$H_i(e^{j\omega}) = 1/H(e^{j\omega})$$

  - 要求存在逆系统是合理的，譬如通信接收系统是发射系统的逆系统，才能无失真的恢复发射信息

信号传输失真

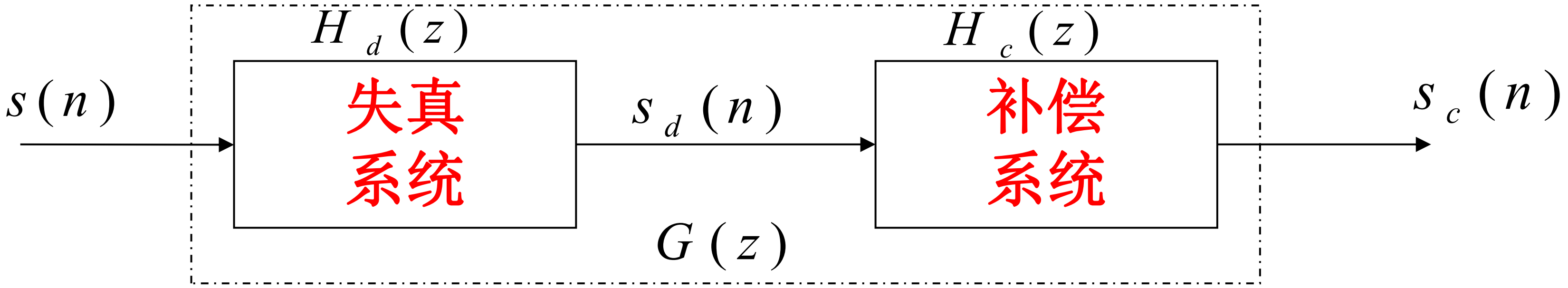
- 若一个信号已经被某个不合要求的频率响应的**LTI**系统所失真，那么可以用一个补偿系统来处理这个失真了的信号，如图所示。



- 传输失真包括幅度失真和相位失真两大类；
- 所有系统都存在逆系统，但并非所有因果稳定系统都有因果稳定的逆系统；
- 最小相位系统本身是因果稳定的，并且也有一个因果和稳定的逆系统，从而可以实现幅度和相位失真的完全补偿。

信号失真的补偿

- 若信号被某个**非最小相位**的**LTI**系统所失真，可以用一个**补偿**系统来补偿信号的**失真**。



- 此时幅度失真和相位失真不可能被同时补偿；幅度失真可以利用其最小相位因子完全补偿：

$$H_d(z) = H_{d\min}(z) H_{ap}(z)$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\min}(z)}$$

- 相位失真可利用全通因子在某些有效频段进行补偿和平衡；

作业

- 5.12
- 5.14
- 5.18
- 5.22

- 1.求单位冲激响应

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

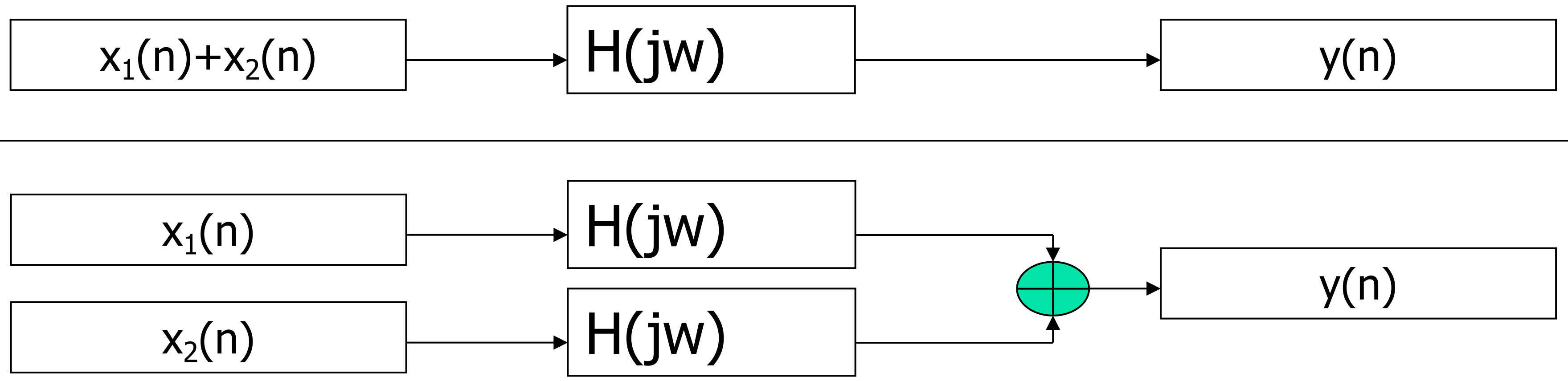
- 2、求h(n-a)的DTFT

三、 线性相位系统

- 在设计滤波器和其它系统中，往往希望系统在某一频带范围内具有近似**恒定的幅度**和**零相位**特性，以使信号通过时该频带信号**不失真**。
- 但是：
  - 1）对因果系统而言，零相位是几乎是奢望。
  - 2）相位失真使信号在时域的波形有很大的畸变，即便幅度响应为恒定时亦是如此。

Example1:相位响应对信号的影响

- 双频信号经过实LTI系统



$$x_1(n) = A_1\cos(\omega_1 n + \varphi_1), \qquad x_2(n) = A_2\cos(\omega_2 n + \varphi_2)$$

$$\sup\ pose: \left|H(e^{j\omega})\right| = 1,\ A_1 = A_2 = 1, \varphi_1 = \varphi_2 = 0;$$

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

$$y(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi(\omega_1)) + \cos(\omega_2 n + \varphi(\omega_2))$$

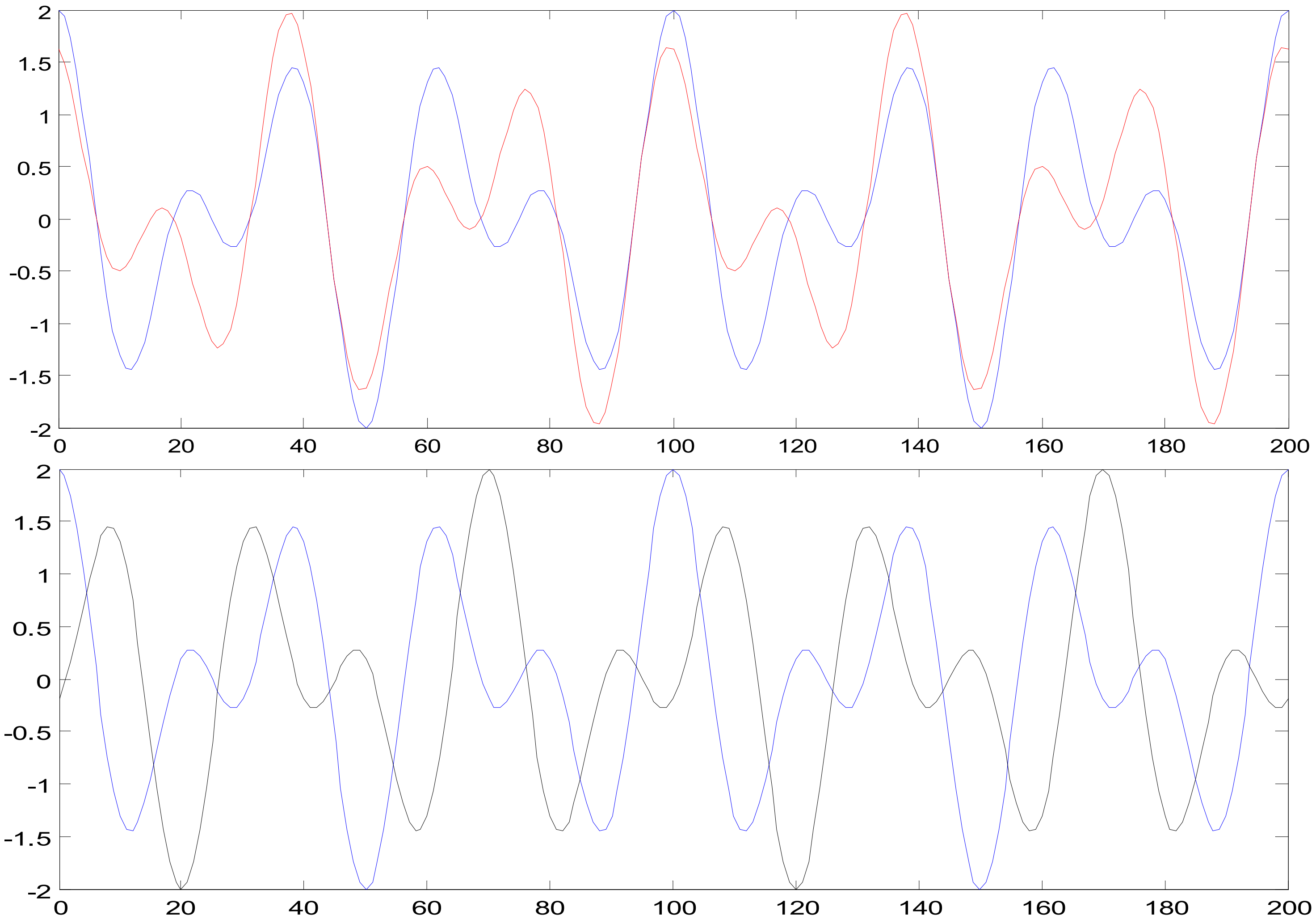
Example1:相位失真对信号的影响

w1=0.03

w2=0.05

$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -38$$



$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -70$$

初步认知：

- 非线性相位响应使信号有很大的波形畸变，即使幅度响应为恒定时亦是如此;
- 线性相位响应在时域上表现的是整个信号的时间平移，信号的波形不发生失真.
- 不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统

- 下一步？
  - 如何寻找适合实用要求的线性相位系统？

一、基本定义

- 基本定义：

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

  - 相位响应 $\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$
  - 群延迟 $grd\,[H(e^{j\omega})] = -\dfrac{d\,\arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$
  - 线性相位->群延迟为常数

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta \qquad (\alpha, \beta = const)$$

二、线性相位系统的时域特征

- 考虑一个LTI系统，其频率响应为：

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \qquad |\omega| < \pi$$

- 相位和群延迟分别如下：

$$\arg[H_{id}(e^{j\omega})] = -\omega\alpha$$

$$grd[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha$$

- 单位冲激响应为：

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n-\alpha)] = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \qquad -\infty < n < +\infty$$

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n-\alpha)] = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \qquad -\infty < n < +\infty$$

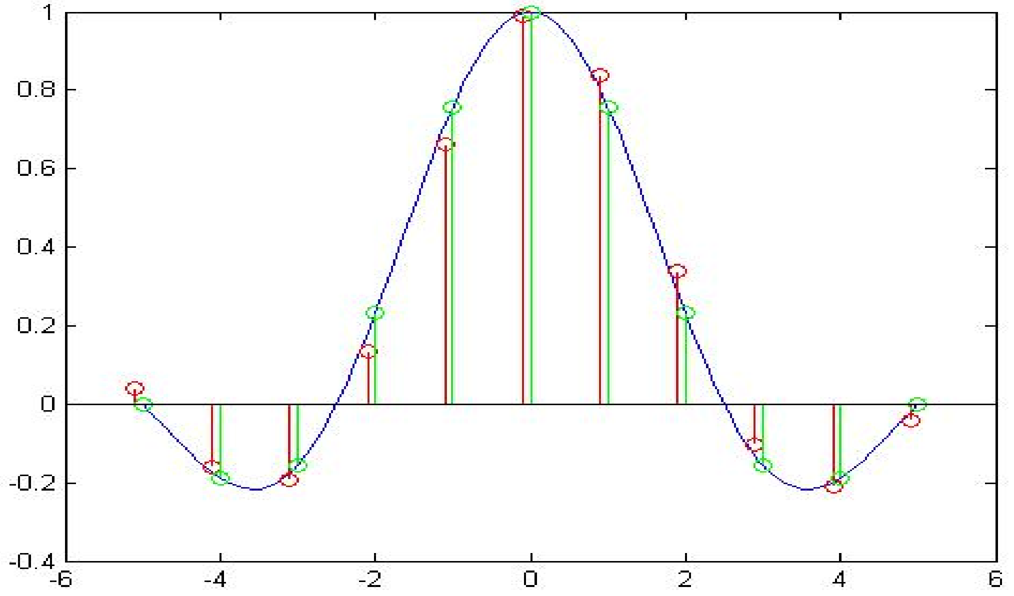
- 对任意输入 ,系统的输出为:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n-k-\alpha)]$$

- 1）若 $\alpha = n_d$ 为整数，则有：

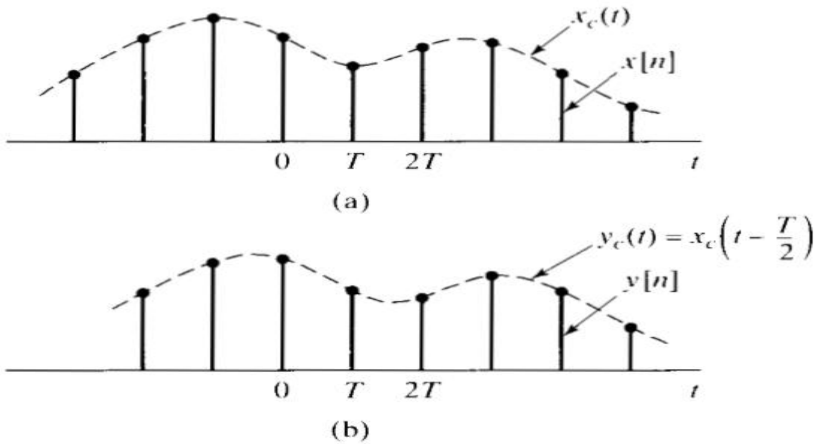
$$h_{id}(n) = \delta(n-n_d)$$

$$y(n) = x(n) * \delta(n-n_d) = x(n-n_d)$$



- 2）若 α 为非整数实数?

群延迟为非整数



- 系统输出

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n-k-\alpha)]$$

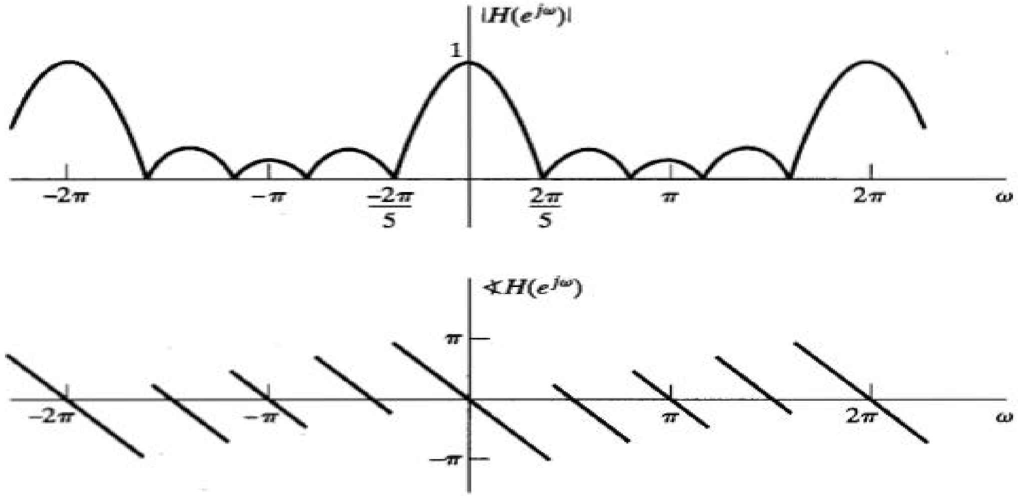
- 相当于对如下模拟信号在nT的采样序列：

$$y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(t-\alpha T-kT)/T]$$

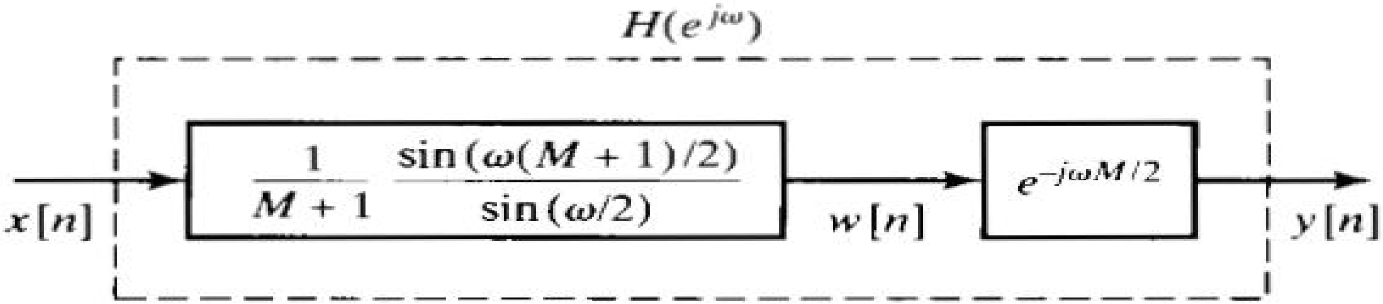
$$= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT) Sa[\pi(t-kT)/T] \right\} * \delta(t-\alpha T) = x_c(t) * h_c(t)$$

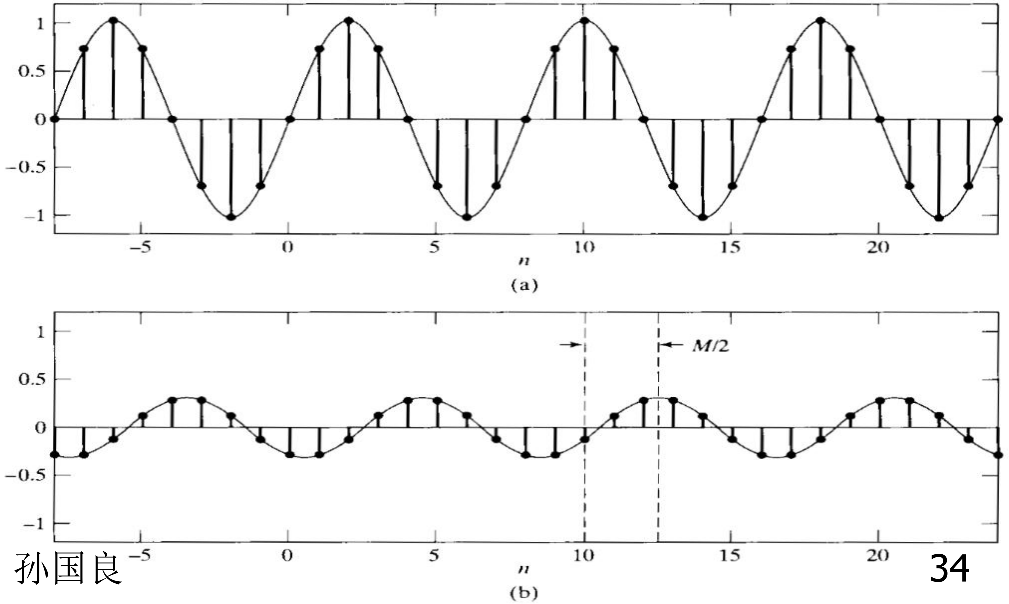
非整数延迟（4.10）---滑动平均系统

- $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x(n-m)$
- $h(n)=u(n)-u(n-N)$



$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(M+1)}\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}, \qquad |\omega|<\pi.$$



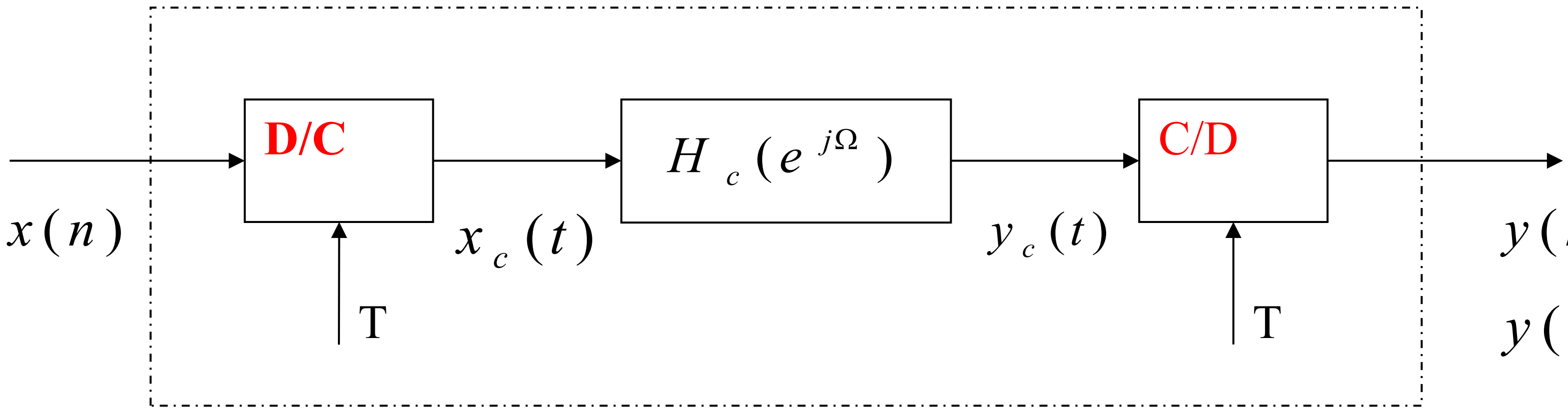


$$x[n]=\cos(0.25\pi n)$$

$$y_c(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)Sa[\pi(t-\alpha T-kT)/T]$$

$$=\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_c(kT)Sa[\pi(t-kT)/T]\right\}*\delta(t-\alpha T)=x_c(t)*h_c(t)$$

容易看出，$x_c(t)$正是序列$x(n)$的重构信号，$h_c(t)$是频率响应为$H_c(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega\alpha T}$系统的单位冲激响应。



$y(n)$

$$y(n)=y_c(t-\alpha T)|_{t=nT}$$

由上面的讨论可以看出，若LTI系统具有随输入频率而相位呈线性变化的特性，那么它将是一个理想的延迟系统，其中的α代表了延迟量。

- 上面讨论的是具有全通特性的**LTI**线性相位系统，对于更为一般的情况：

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{-j\omega\alpha}$$

- 如对于线性相位的低通滤波器而言：

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

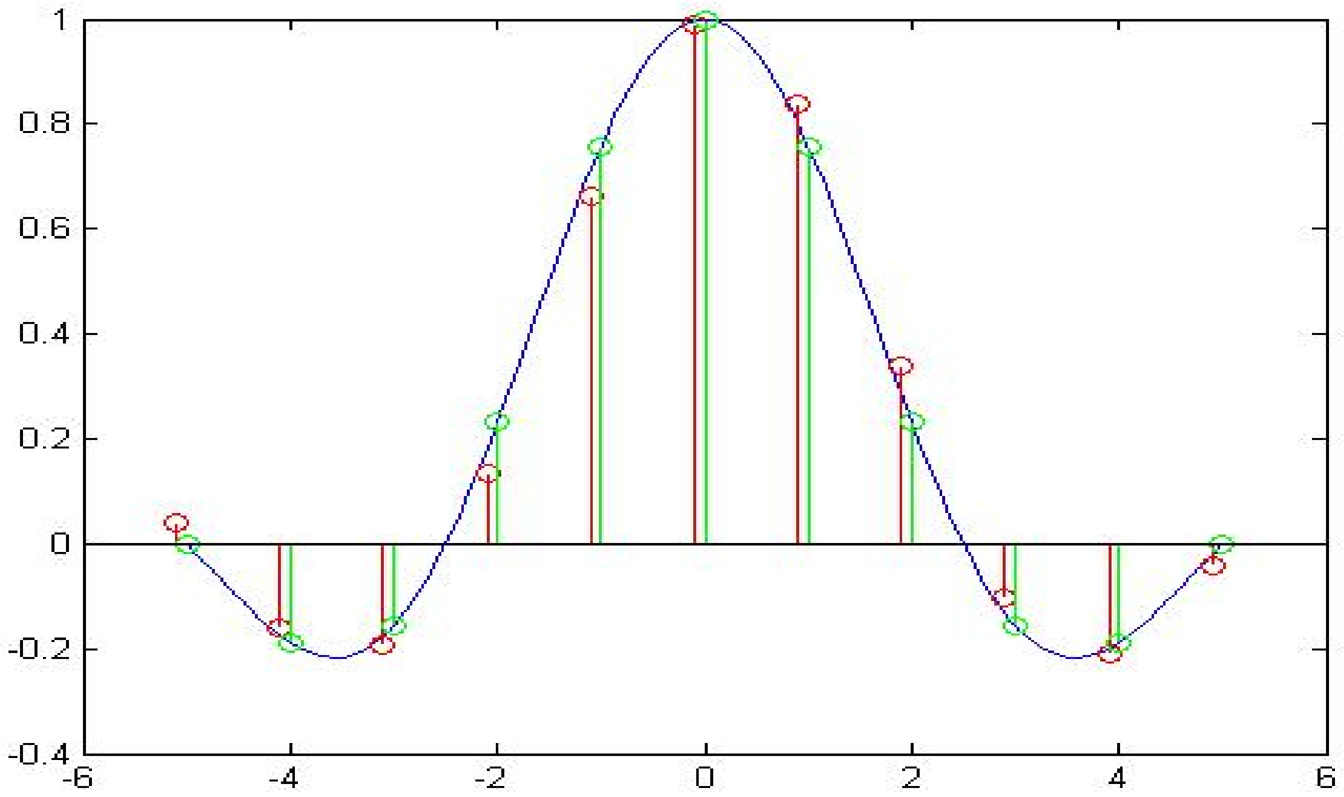
- 相应的单位冲激响应为：

$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(n-\alpha)] = \frac{\sin \omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \qquad -\infty < n < +\infty$$

由单位冲激响应：

$$h_{id}(n) = Sa[\omega(n-\alpha)]$$

$$= \frac{\sin \omega(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \qquad -\infty < n < +\infty$$



可以得到：

$$h_{id}(\alpha + n) = h_{id}(\alpha - n)$$

$$h_{id}(2\alpha - n) = h_{id}(n)$$

如果 2α 为整数，则单位冲激响应关于 α 偶对称；若 2α 不为整数，则单位冲激响应关于 α 不是严格意义上的对称，但是仍然是线性相位和恒定群延迟。

广义线性相位

- 线性相位的概念加以推广是有意义的。
  - 线性相位系统具有许多优点，但是其范畴较窄。
  - 现实当中的许多系统不一定满足上面的定义，如滑动平均系统、微分系统等，但均有信号相位不失真的特性。
- 广义线性相位系统

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

- 如果不顾及由 $A(e^{j\omega})$ 的正、负交替带来的相位突变及 β 带入的固定相位，则系统具有恒定群延迟。

广义线性相位时频关系

$$h(n) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$h(n) = h^*(n) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

$$\Longrightarrow |H(\omega)| = |H(-\omega)|, \qquad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

实条件

$$DTFT\ [h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha}$$

$$DTFT\ [h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha}$$

$$h(\alpha - n) = h(n + \alpha) \Longrightarrow -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha$$

$$\Longrightarrow \varphi(\omega) = -\omega\alpha$$

$$h(\alpha - n) = -h(n + \alpha) \Longrightarrow -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha + \pi$$

$$\Longrightarrow \varphi(\omega) = -\omega\alpha - \pi/2$$

广义线性相位时频关系

- 由广义相位定义和DTFT时移特性知：

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\omega\alpha-\beta)}$$

$$\downarrow$$

$$DTFT\ [h(\alpha-n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta}$$

$$DTFT\ [h(n+\alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta}$$

  - 若A(w)为奇函数,则h(n)奇对称；
  - 若A(w)为偶函数,则h(n)偶对称。

广义线性相位序列未必是实对称序列，也未必是对称序列。

实对称序列必定是线性相位序列；扩展了线性相位的适用范围。

三、因果广义线性相位系统

- 对实系统而言，无论狭义线性相位，还是广义线性相位，都要求单位冲激响应序列对称。
- 如果再要求系统是有理、因果的，对称性将意味着α>=0和h(n)必须为时域带限,即有限长冲激响应（**FIR**）系统。
  - 因果无限长冲激响应（**IIR**）系统也能够具有广义线性相位，但是系统函数不是有理的。
- 根据对称形式和**M=2 α**为奇、偶情况，划分四类具有广义线性相位的**FIR**系统。

四大类线性相位滤波器

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \le n \le N-1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n}$$

令$m = N-1-n$ $$= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

系统零点特性

$$H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

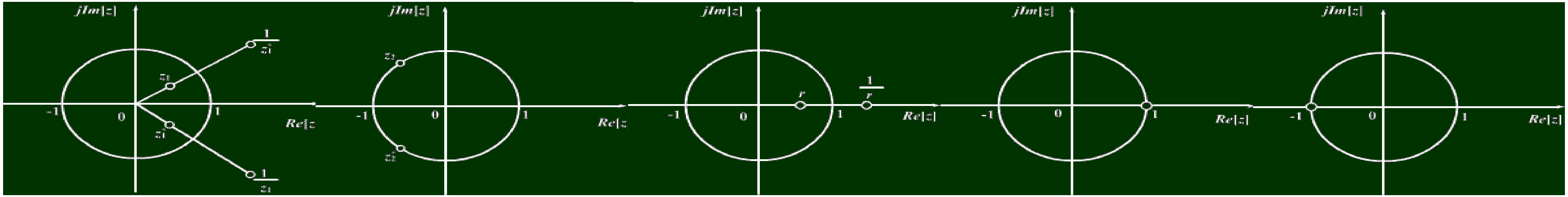
1）系统零点的个数等于系统在原点的极点阶数

2）若 $z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i)=0 \qquad \therefore H(z_i^{-1})=\pm z_i^{(N-1)}H(z_i)=0$$

3）$h(n)$ 为实数，则零点共轭成对

即 z_i^*，$1/z_i^*$ 也是零点

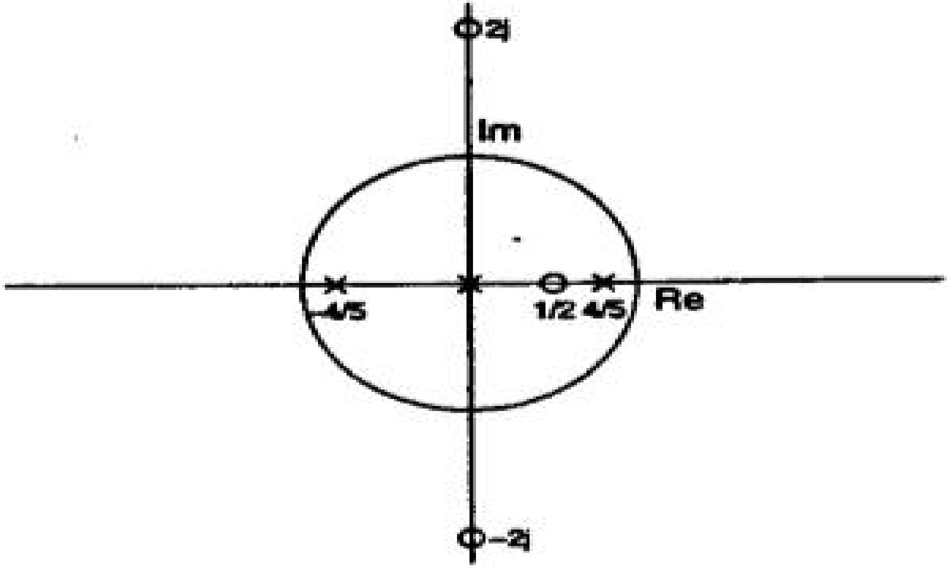


最小相位及线性相位分解(5.45)

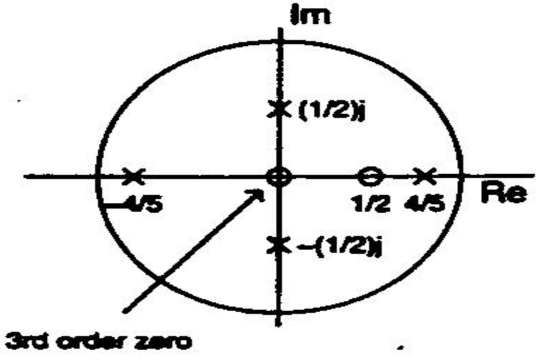
$$H(z)=\frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}$$

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{lin}(z)$$

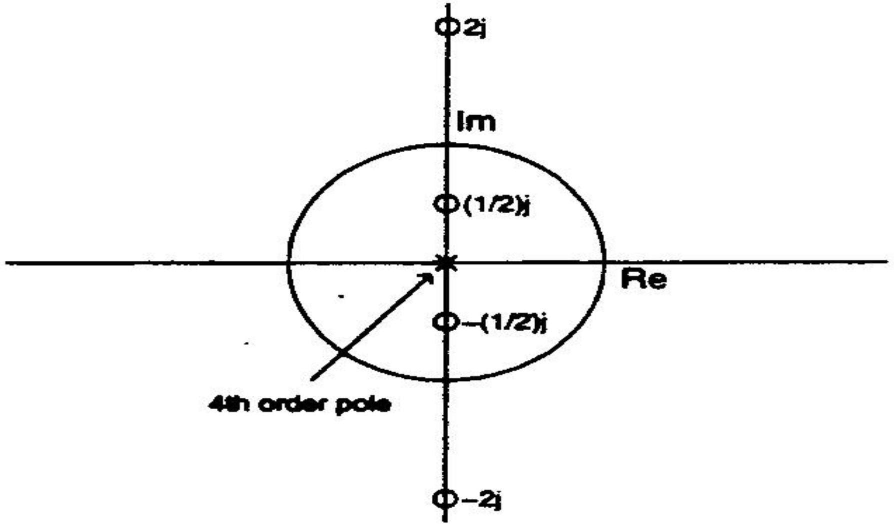
$$H(z)=\frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$$



$$H_2(z)=\frac{(1-0.5z^{-1})}{(1-0.64z^{-2})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}$$



$$H_{lin}(z)=(1+\tfrac{1}{4}z^{-2})(1+4z^{-2})$$



频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} \text{"+"} & e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \\ \text{"–"} & je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \end{cases}$$

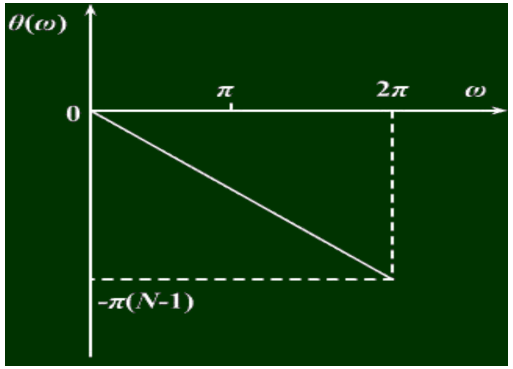
由 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

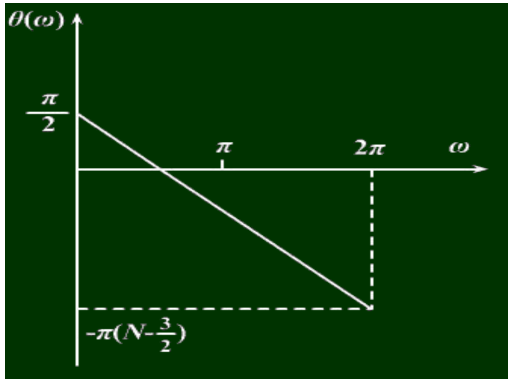
得 $H(z) = \frac{1}{2}\left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{n}\right]$$

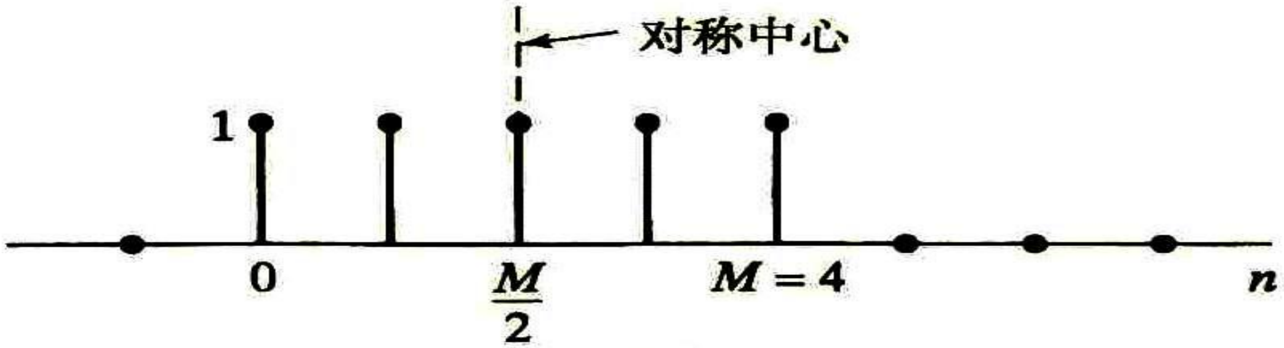
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^{n}\right]$$

$$= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]$$





I类:



M 为偶数 ，偶对称

$h(n)=h(M-n) \quad 0 \le n \le M \qquad H(z)=z^{-M}H(z^{-1})$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because \cos\left\{\left[\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right]\omega\right\}=\cos\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]=\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

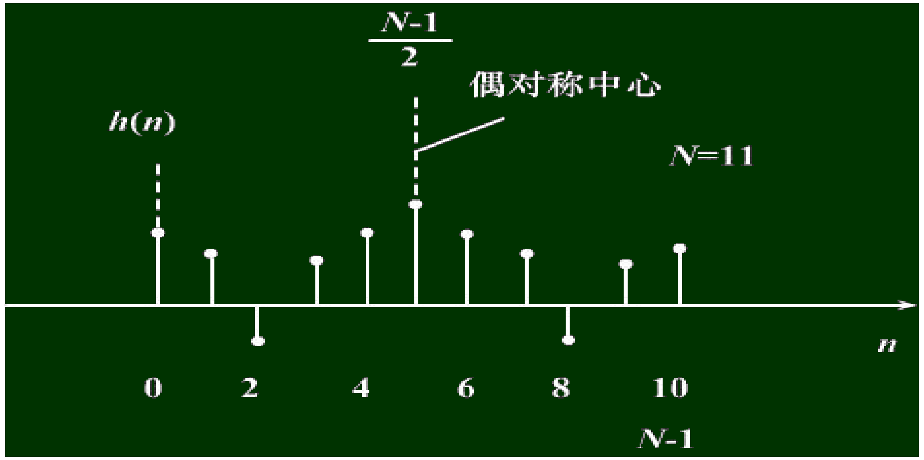
$$\therefore \cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\text{对}\frac{N-1}{2}\text{呈偶对称}$$

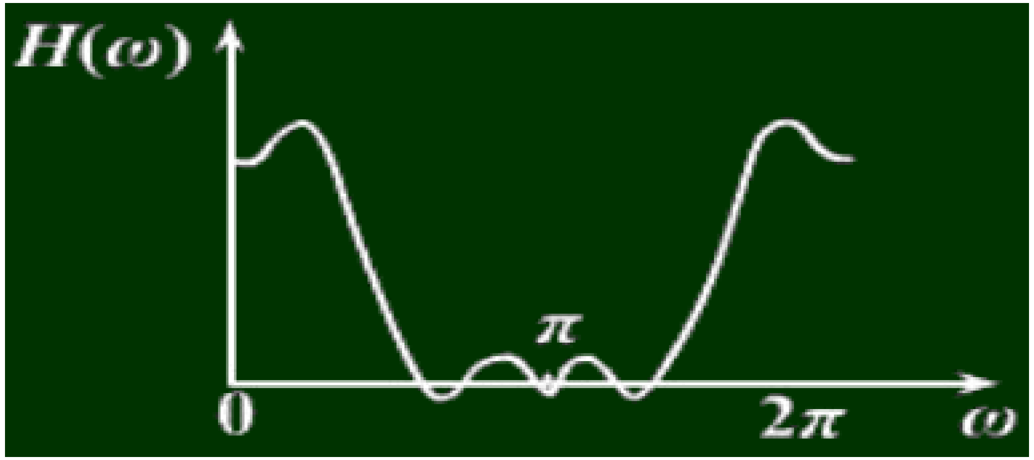
令 $\frac{N-1}{2}-n=m$

$$H(\omega)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos(m\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a(k) \cos \omega k \right)$$

$$\begin{cases} a(0) = h(\frac{M}{2}) \\ a(k) = 2h(\frac{M}{2} - k) \quad k = 1,2,\ldots,\frac{M}{2} \end{cases}$$

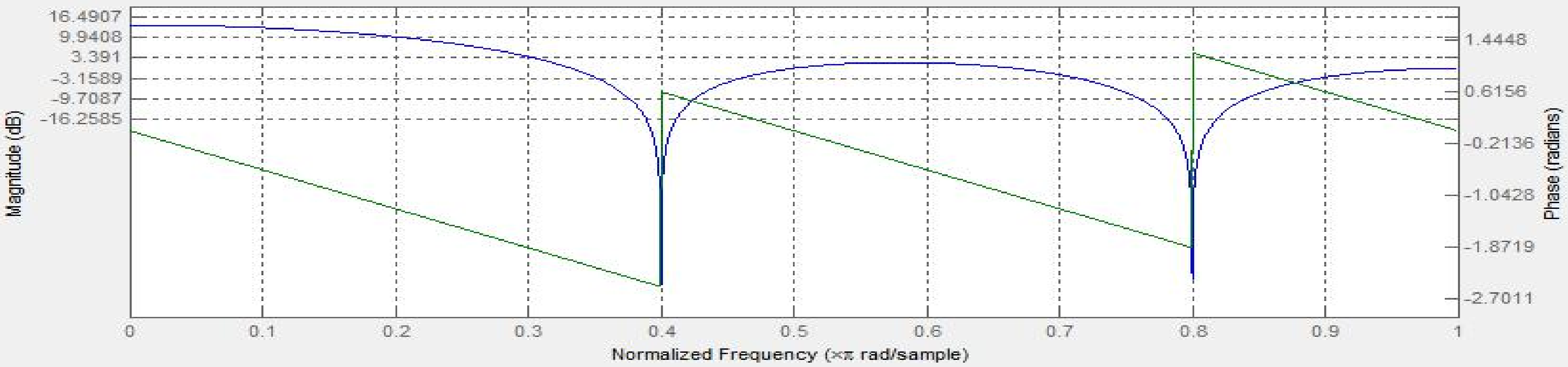




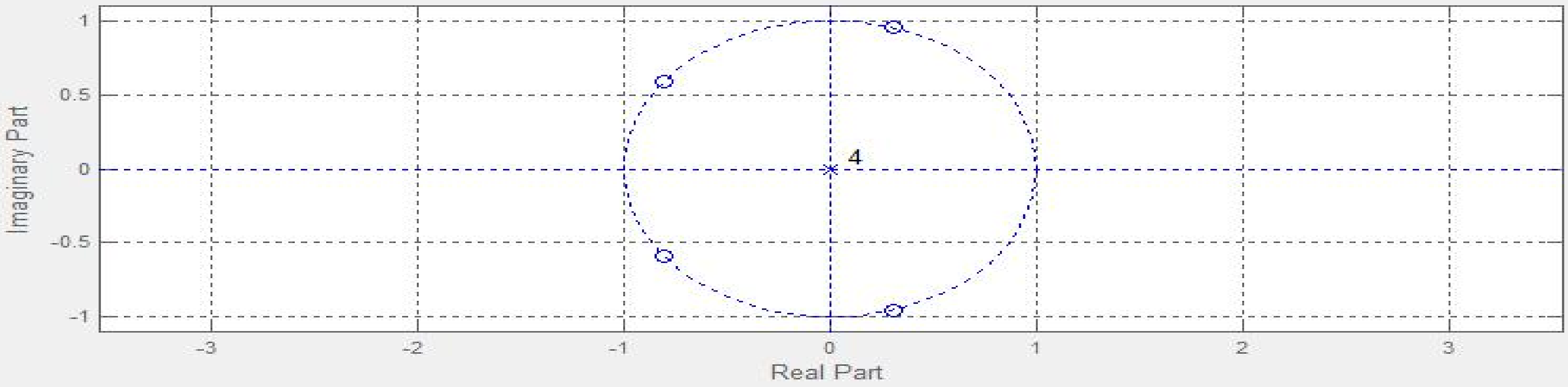
$\because \cos(\omega n)$对$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$对$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

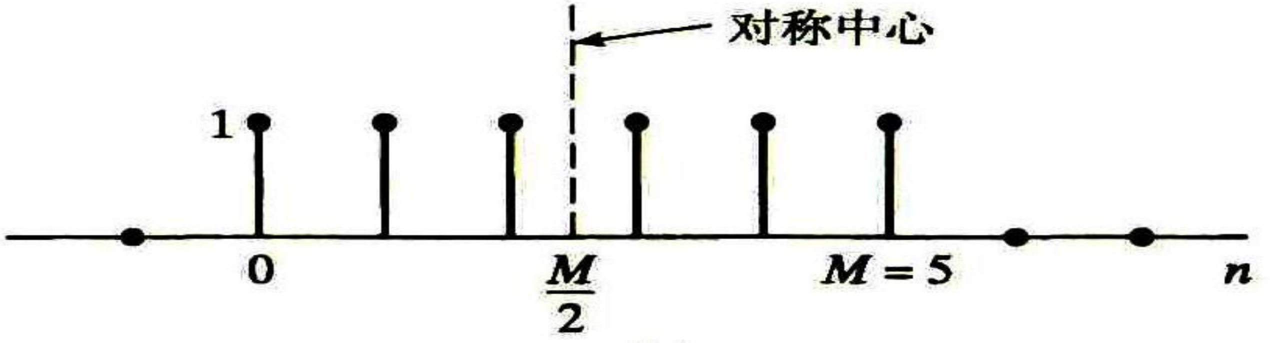
Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot



II类：



M 为奇数 ，偶对称

$h(n)=h(M-n) \quad 0\le n\le M \qquad H(z)=z^{-M}H(z^{-1})$

- **特殊零点：Z=-1**

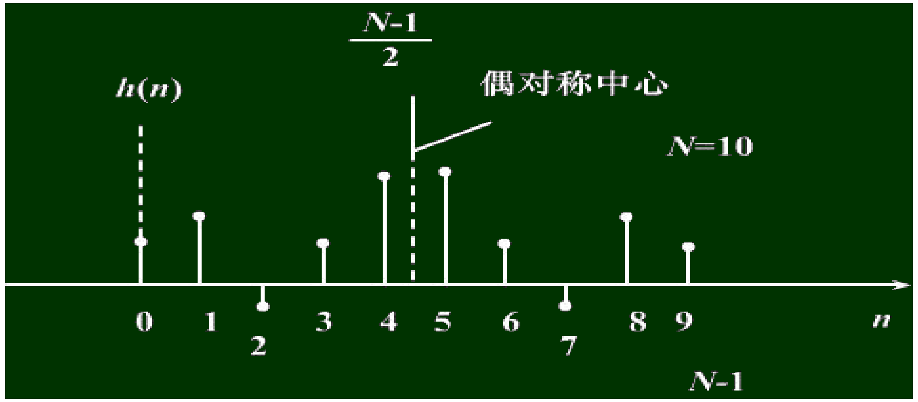
$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

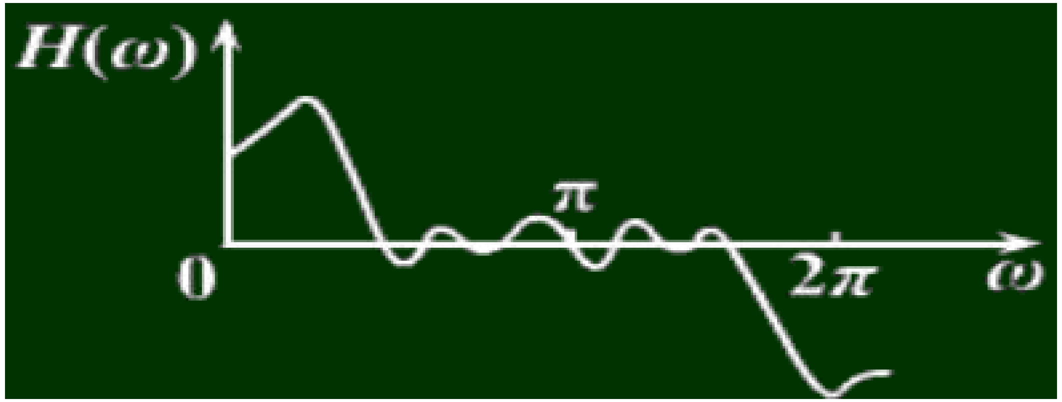
$$令\ \frac{N}{2}-n=m \quad = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \qquad b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right) \quad n=1,\ldots,\frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b(k)\cos\omega(k-\frac{1}{2})\right)$$

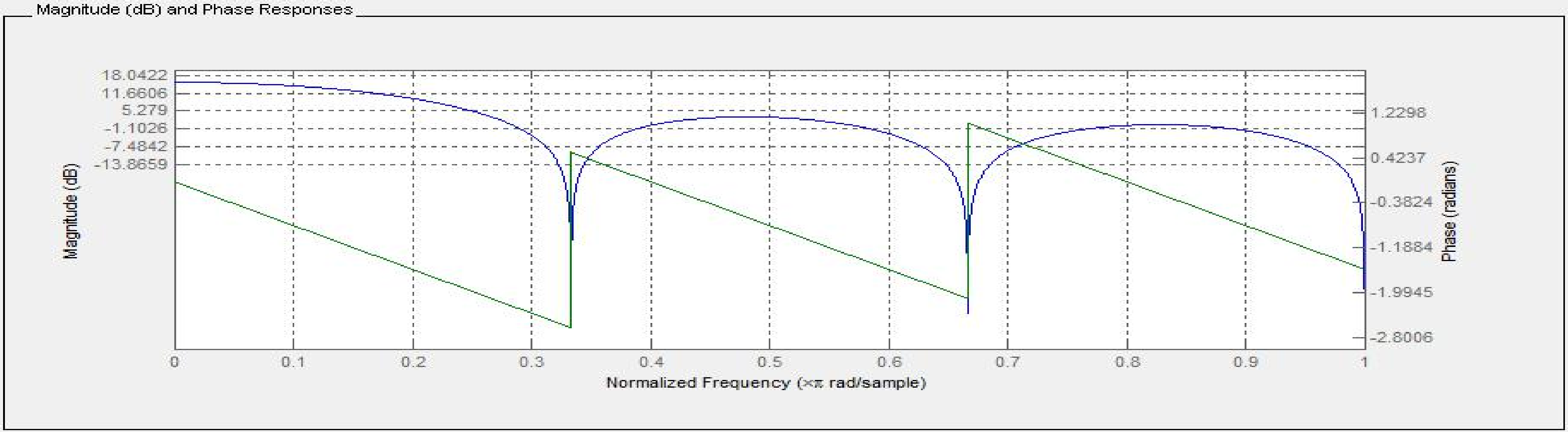
$$b(k) = 2h(\frac{N}{2}-k) \qquad k = 1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

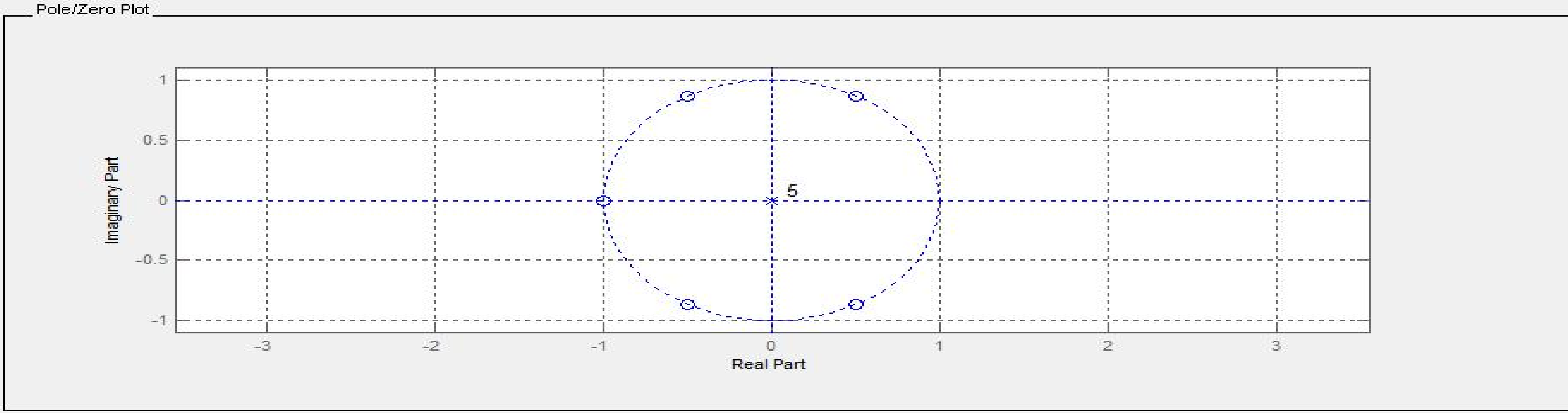




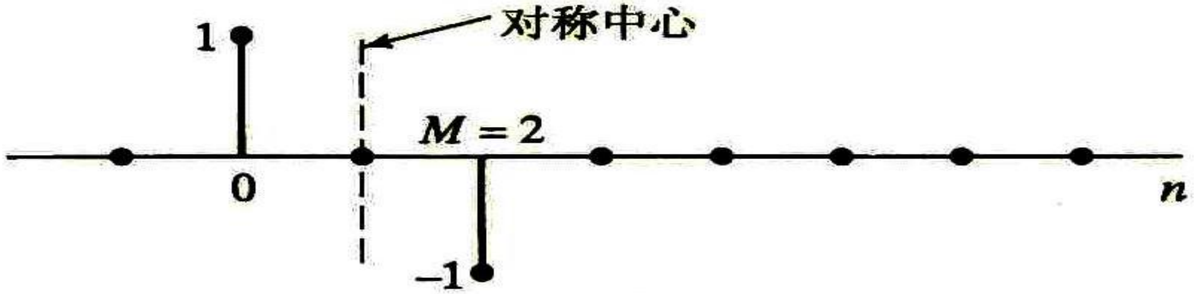
$H(\omega)$对$\omega=0,\ 2\pi$呈偶对称

$H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称 $\quad \omega=\pi$ 时 $\quad \cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=0$


Magnitude (dB) and Phase Responses
18.0422
11.6606
5.279
-1.1026
-7.4842
-13.8659
Magnitude (dB)
1.2298
0.4237
-0.3824
-1.1884
-1.9945
-2.8006
Phase (radians)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)


Pole/Zero Plot
1
0.5
0
-0.5
-1
Imaginary Part
5
-3
-2
-1
0
1
2
3
Real Part

III类：



M 为偶数

$$h(n) = -h(M-n) \qquad 0 \le n \le M \qquad H(z) = -z^{-M}H(z^{-1})$$

特殊零点：z=+,-1

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because \sin\left\{\left[\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right]\omega\right\} = \sin\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = -\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

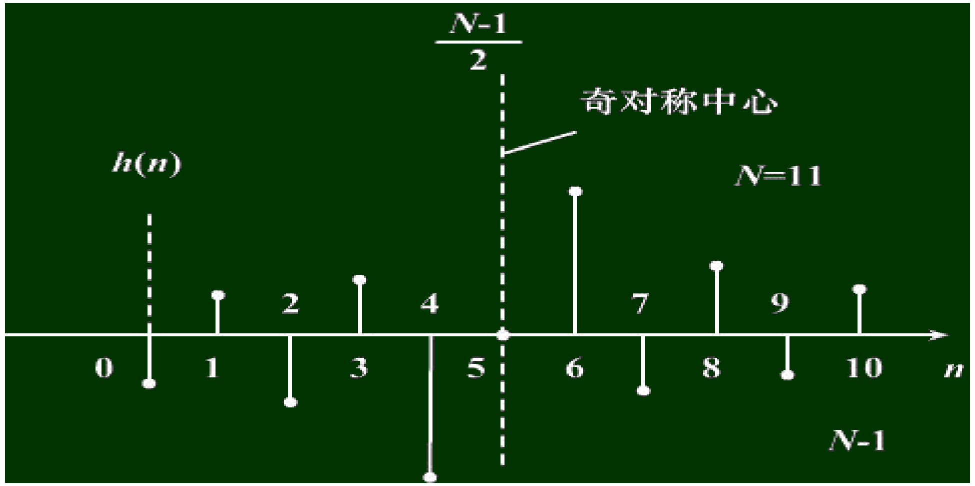
$$\therefore \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \text{对} \frac{N-1}{2} \text{呈奇对称}$$

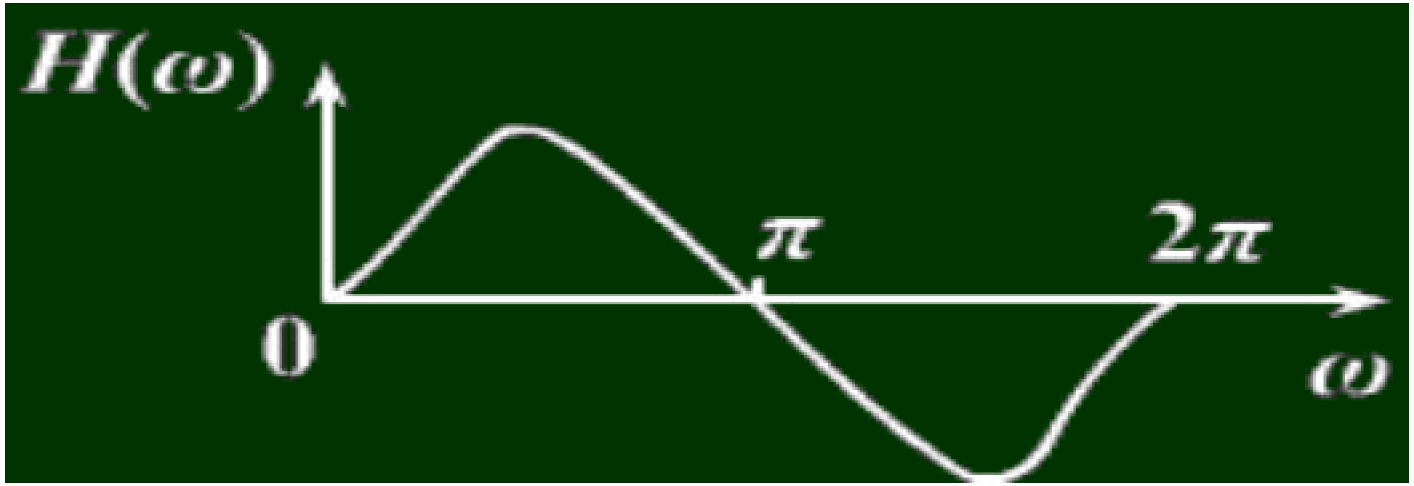
$$h(n)\text{奇对称且}N\text{为奇数} \quad \therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0 \qquad H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\text{令} \frac{N-1}{2}-n=m \qquad = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\sin(m\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\left(\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c(k)\sin\omega k\right)$$

$$c(k) = 2h\left(\frac{M}{2}-k\right) \qquad k = 1,2,\ldots,\frac{M}{2}$$

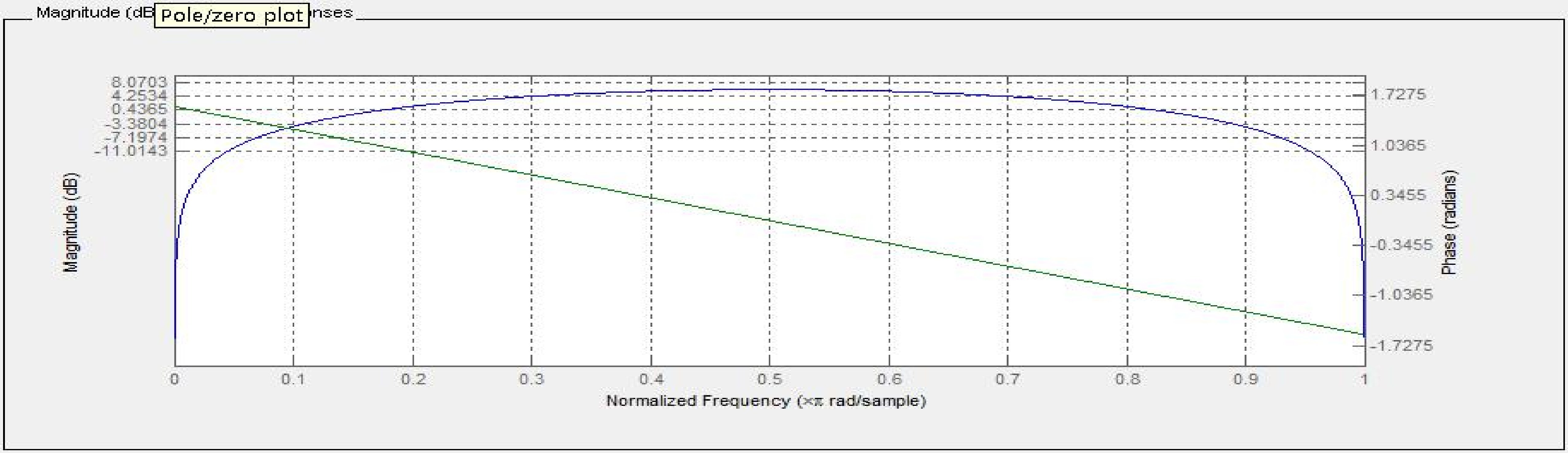


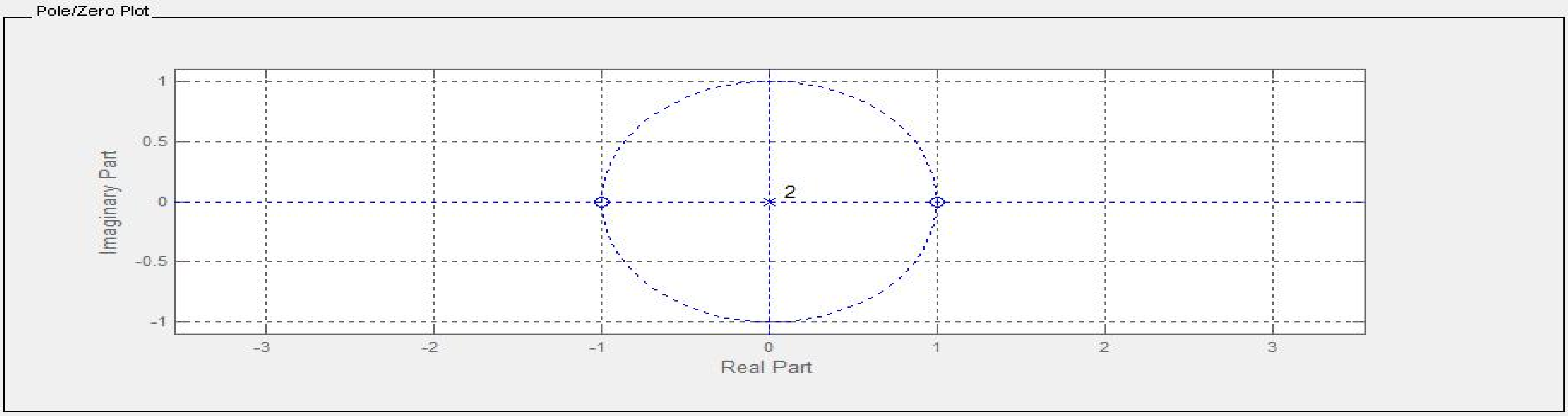


$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi$ 时 $\quad \sin(\omega n) = 0$

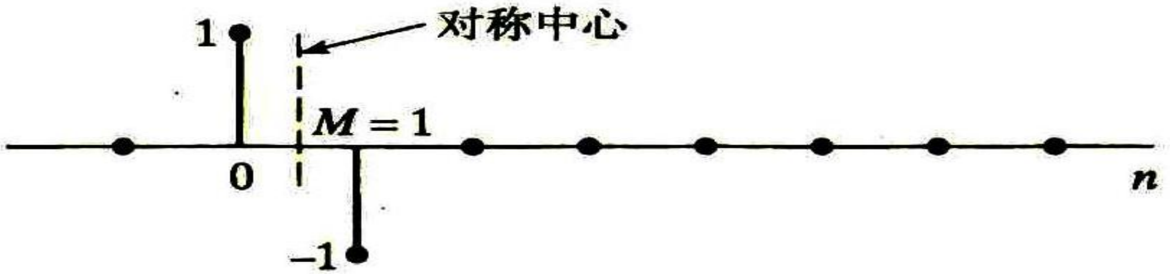
因$\sin(\omega n)$对$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈奇对称

故$H(\omega)$对$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi$呈奇对称


Magnitude (dB
Pole/zero plot
nses
8.0703
4.2534
0.4365
-3.3804
-7.1974
-11.0143
Magnitude (dB)
1.7275
1.0365
0.3455
-0.3455
-1.0365
-1.7275
Phase (radians)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)


Pole/Zero Plot
1
0.5
0
-0.5
-1
Imaginary Part
2
-3
-2
-1
0
1
2
3
Real Part

IV类：



M 为奇数

$h(n) = -h(M - n) \qquad 0 \le n \le M \qquad H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$

- **特殊零点：Z=1**

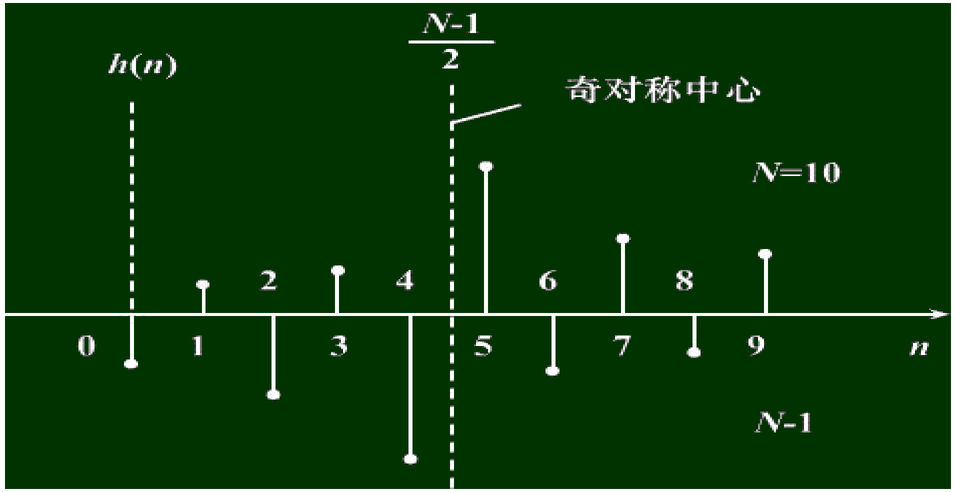
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

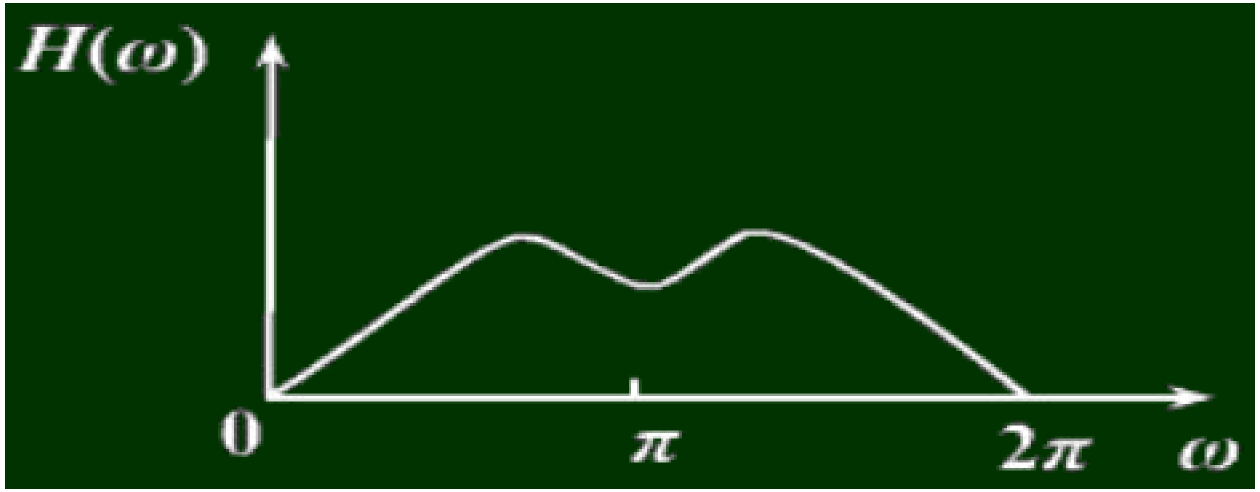
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N}{2} - n = m \qquad = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right)\sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega M}{2}-\frac{\pi}{2})}\left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} d(k)\sin\ \omega(k-\frac{1}{2})\right)$$

$$d(k) = 2h(\frac{N}{2}-k) \qquad k = 1,2,\ldots,\ \frac{N}{2}$$



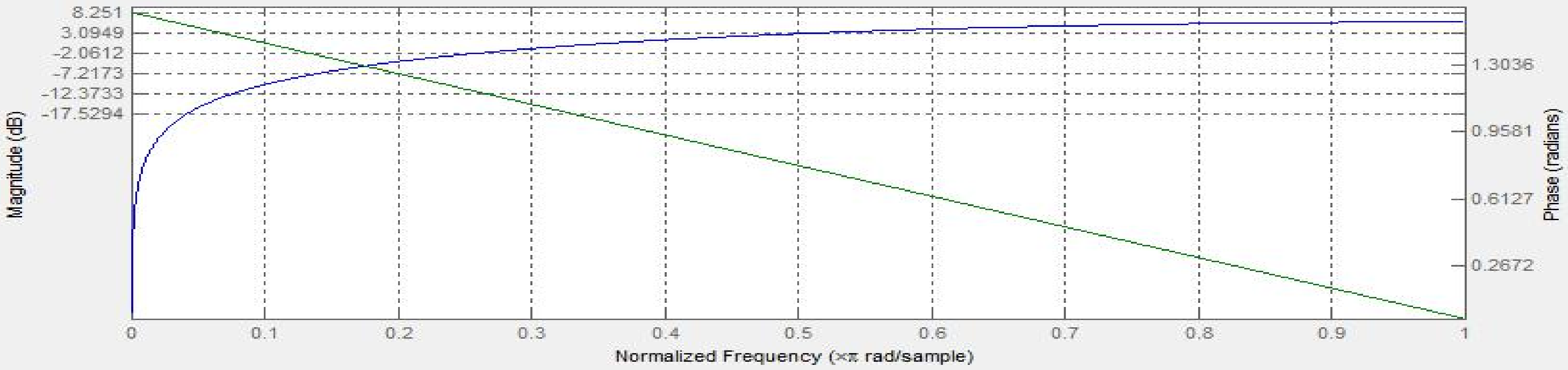


$\omega = 0,\ 2\pi$ 时 $\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$

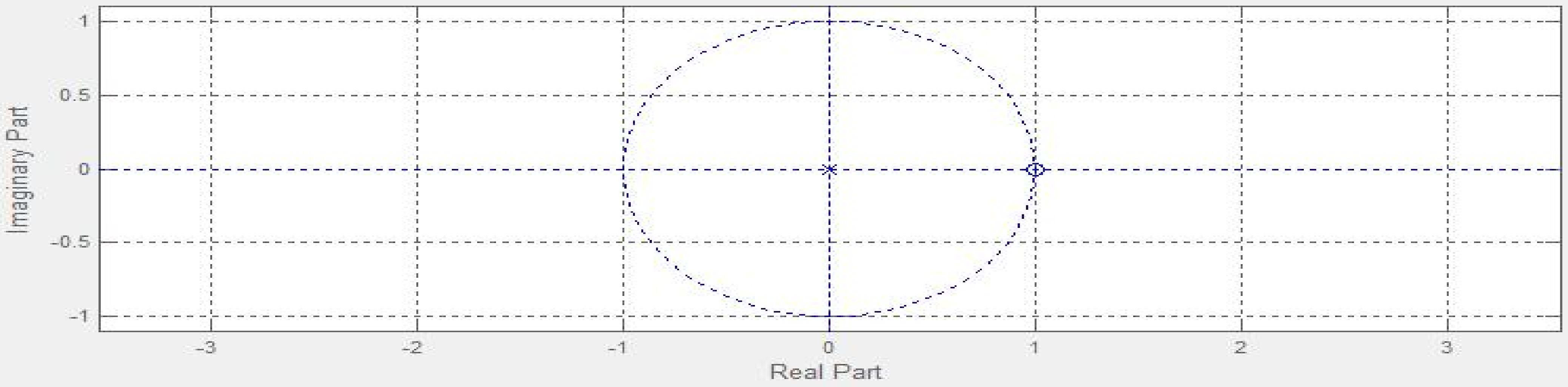
$H(\omega)$对$\omega = 0,\ 2\pi$呈奇对称

$H(\omega)$对$\omega = \pi$呈偶对称

Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot



总结

- 在不考虑幅度失真的情况下，线性相位系统不会导致信号波形的失真；
- 实线性相位系统的单位冲激响应具有对称性；
- 有理的因果广义线性系统是FIR系统；
    - 第I类系统适合设计所有滤波器；
    - 第II类系统不适合设计高通滤波器；
    - 第III类系统不适合设计低通和高通滤波器；
    - 第IV类系统不适合设计低通滤波器。

作业

- 5.15
- 5.33
- 5.59

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn