第一章 离散信号与系统

1.1 因果性、记忆性

是否用到了 $x[n]$ 的未来值/过去值，而不是其他可计算的值。

1.2 LTI 系统

既是线性系统，又是时不变系统，称为 LTI 系统。其**充要条件**是 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 。

1.2.1 因果系统

$h[n] = h[n]u[n]$

1.2.2 稳定系统

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

1.2.3 特征频率与 LTI 系统

若是有一个无限长的指数信号，那么有一个单频信号：
2.27

$$\left[e^{j\omega_0 n}\right] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 + 2k\pi\right)$$

但是若是有限长，那么就有引入除去 ω_0 的分量，因此对于一个 LTI 系统来说，放大 $e^{j\omega_0 n}$ 和 $e^{j\omega_0 n}u[n]$ 需要的系统函数是不一样的。

1.3 差分方程的阶数

输出 $y[n-i]$ 最高值和最低值 i 的差值。

LCCDE = linear constant-coefficient difference equation .

第 二 章 DTFT 变换

2.1 频域阶数

2.42

若是在原有的系统函数多一个 z，说明原来 a_0z^0 的位置变成了 a_0z^1，也就是 a_n 变成了 a_{n+1}。同理 z^{-1} 对应 a_{n-1}。由于使用因果信号，z^{-1} 的形式更合适。

2.2 系统设计

2.56，

需要一个系统时，可以通过其定义入手，配凑式子。同时，对于特定的频率分量，其幅度、角度变换是由其频率响应改变的。

2.3 DTFT 推导细节

$$\begin{aligned} DTFT^{-1}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

注意 2π 与 $\delta(n)$ 的由来：单位虚数的积分。

将 IDTFT 展开成累加的形式，实际上是将不同频率的分量逐个恢复：

$$\begin{aligned} &X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(e^{jk\Delta\omega}\right)e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[X\left(e^{jk\Delta\omega}\right)\Delta\omega\right]}{2\pi}e^{jk\Delta\omega n} \end{aligned}$$

表 2.1: DTFT 变换对

时域函数	DTFT
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega+2k\pi)$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega+2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0+2k\pi\right)$
$W_N(n)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$
$\frac{w_c}{\pi}\frac{\sin\left[w_c(n-\alpha)\right]}{w_c(n-\alpha)}$	$e^{-j\omega\alpha}(u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c))$

表 2.2: DTFT 变换性质

性质名称	表达式
线性	
时域平移-频域调制	$x(n-m)\rightarrow e^{-jwm}X\left(e^{jw}\right)$
时域调制-频域平移	$e^{jnw}x(n) \quad \rightarrow X\left(e^{j(w-w_0)}\right)$
时域翻折	$x(-n)\rightarrow X(e^{-j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right)Y^*\left(e^{jw}\right)dw$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert X\left(e^{jw}\right)\right\rvert^2 dw$

可以利用帕赛瓦尔定理解决一些求和式子：Slide P83.

2.4 DTFT 对称性

共轭对称与共轭反对称序列定义，实际上是实部、虚部分别的奇偶对称：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

任意序列都可以进行共轭分解：

$$\begin{aligned} x(n) &= x_e(n) + x_o(n) \\ x(-n) &= x_e(-n) + x_o(-n) = x_e^*(n) - x_o^*(n) \end{aligned}$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right]$$

根据下一小节的性质：

$$X_e\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$

$$X_o\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$

同样的对频域函数进行变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

$$X_e\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$

$$X_o\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]$$

逆变换：

$$DTFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_e\left(e^{j\omega}\right)$$

$$DTFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_o\left(e^{j\omega}\right)$$

2.5 变换共轭性质

具有普适性。

$$\mathcal{Z}\left[x^{*}[n]\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{*}[n] z^{-n}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^{*}\right)^{-n}\right)^{*}=X^{*}\left(z^{*}\right)$$

$$\mathcal{Z}[x[-n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^{-1}\right)^{-n}=X\left(z^{-1}\right)$$

$$\mathcal{Z}[\operatorname{Re}\{x[n]\}]=\mathcal{Z}\left[\frac{x[n]+x^{*}[n]}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[X(z)+X^{*}\left(z^{*}\right)\right]$$

$$\mathcal{Z}[\operatorname{Im}\{x[n]\}]=\mathcal{Z}\left[\frac{z[n]-x^{*}[n]}{2j}\right]=\frac{1}{2j}\left[X(z)-X^{*}\left(z^{*}\right)\right]$$

2.6 Z 变换

表 2.3: $\mathscr{Z}$ 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|>a$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|<a$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^2-z\cos\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$

表 2.4: $\mathscr{Z}$ 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\dfrac{1}{\beta}<\|z\|<\dfrac{1}{\alpha}$
$x(\dfrac{n}{a}), a>0$	$X(z^a)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha^{1/a}<\|z\|<\beta^{1/a}$
$x(n\pm m)$	双边 $z^{\pm m}X(z)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$x(n-m)u(n)$	单边 $z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$	$\|z\|>a$	$\|z\|>a$

见下页

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(n+m)u(n)$	单边 $z^m\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$	$\|z\|>a$	$\|z\|>a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$a^n x(n)$	$X(\frac{z}{a})$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\left\|\frac{z}{a}\right\|<\beta$
$x_1(n)\otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\frac{z}{v})X_2(v)v^{-1}\mathrm{d}v$[1]		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=x(\infty)$$

帕塞瓦尔定理

$$Y(z)|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)h^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{V^*}\right)_V^{-1}dV$$

2.7 逆 Z 变换

2.7.1 部分分式法

对于有理多项式

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$ka^n u(n),|z|>a$$

$$-ka^n u(-n-1),|z|<a$$

[1]其中 C 是 $X_1(\frac{z}{v})X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

2.8 从能量看 Z 变换与 DTFT

时域频域的能量是一致的，没有发生衰减。

2.9 Z 变换与时域频域

为了解决非零状态系统，使用单边 Z 变换。

系统不改变频率：

$$y(n) = x(n)^{*}h(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j[\omega_0(n-m)+\phi]} = e^{j[\omega_0 n+\phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

$$= e^{j[\omega_0 n+\phi]} H\left(e^{j\omega_0}\right) = x(n) H\left(e^{j\omega_0}\right)$$

2.10 系统零极点与频率响应

单位圆上的系统函数是频率响应。

2.10.1 幅度响应

- 原点处的零极点幅度无影响
- 经过单位圆上的零点幅度归零，单位圆附近的零点出现谷点
- 经过单位圆上的极点幅度无穷大，单位圆附近的极点出现峰点
- 远离零极点时影响较小

2.10.2 相位响应

- 原点处的零极点对相位影响为线性，极点会引起滞后，零点会引起超前
- 靠近单位圆的零极点会引起较大的波动
- 远离极点零点的位置变换比较平缓
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零

对于圆内外零极点：

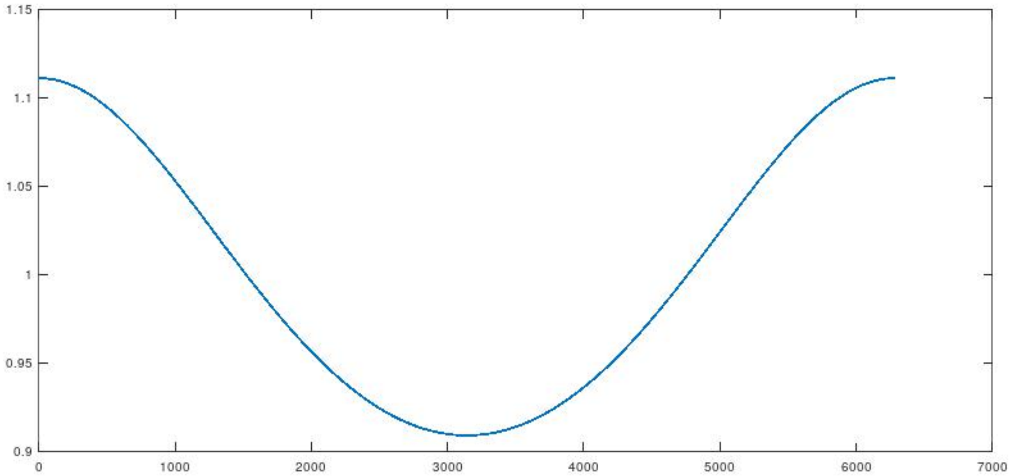
- 圆内极点：顺时针经过，相位迅速延后
- 圆外极点：顺时针经过，相位迅速提前
- 圆内零点：顺时针经过：相位迅速提前
- 圆外零点：顺时针经过：相位迅速延后

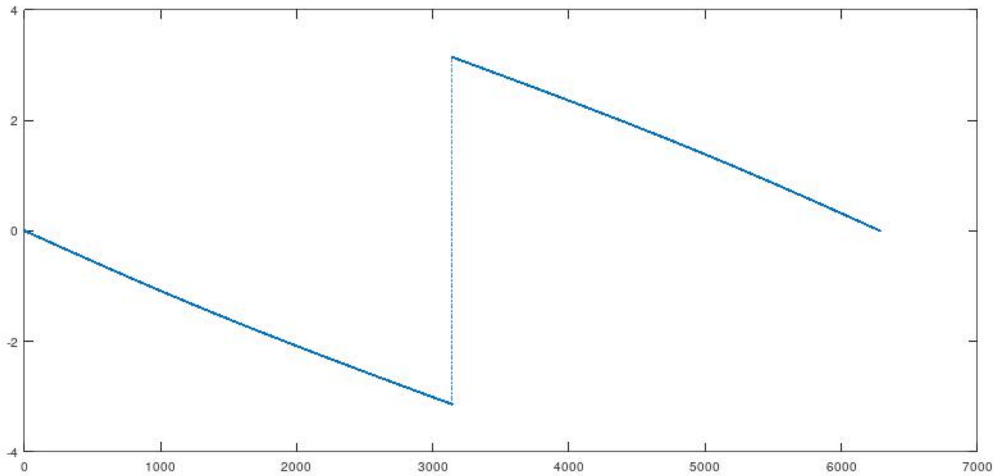
第 三 章 复习题

2.44，

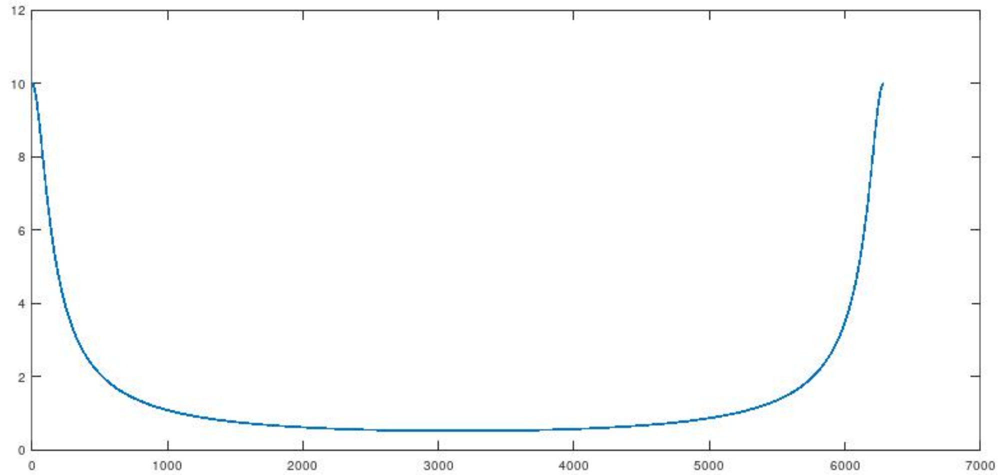
附录 A 零极点幅度相位研究

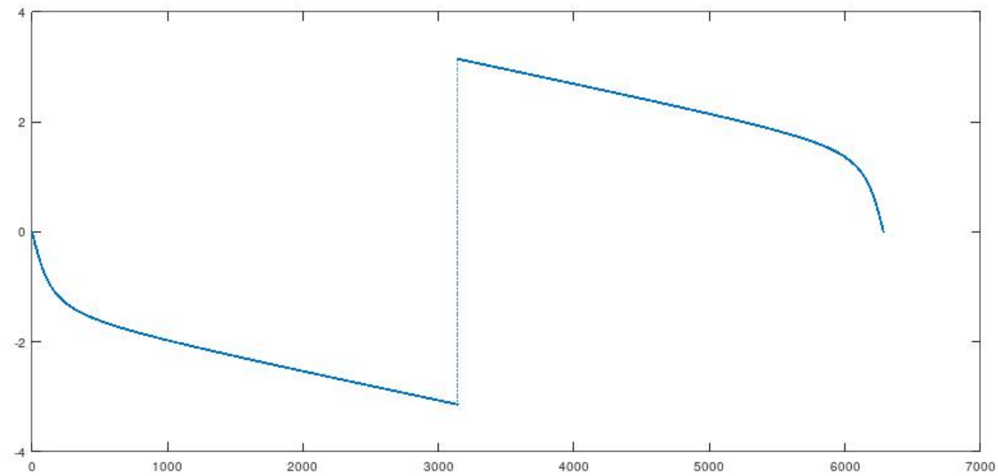
Z = 0.1 极点 无零点


1.15
1.1
1.05
1
0.95
0.9
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

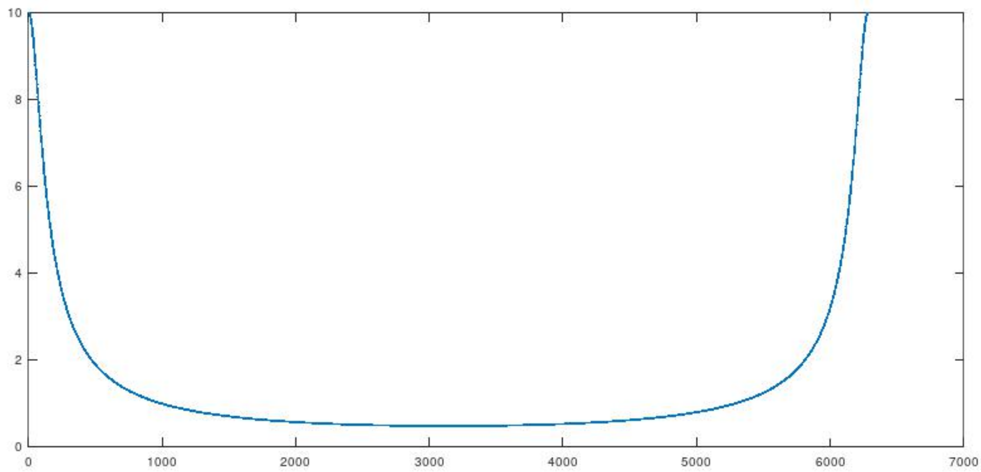

4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.9 极点 无零点

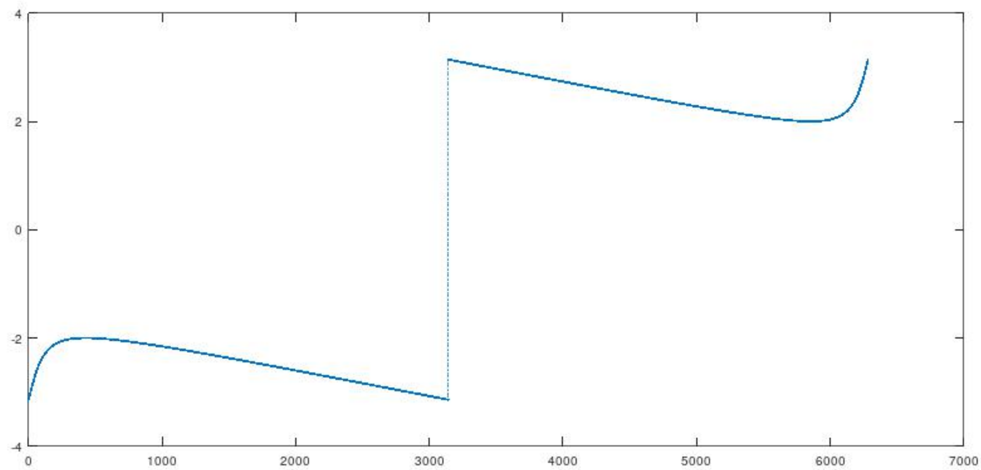

12
10
8
6
4
2
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 1.1 极点 无零点

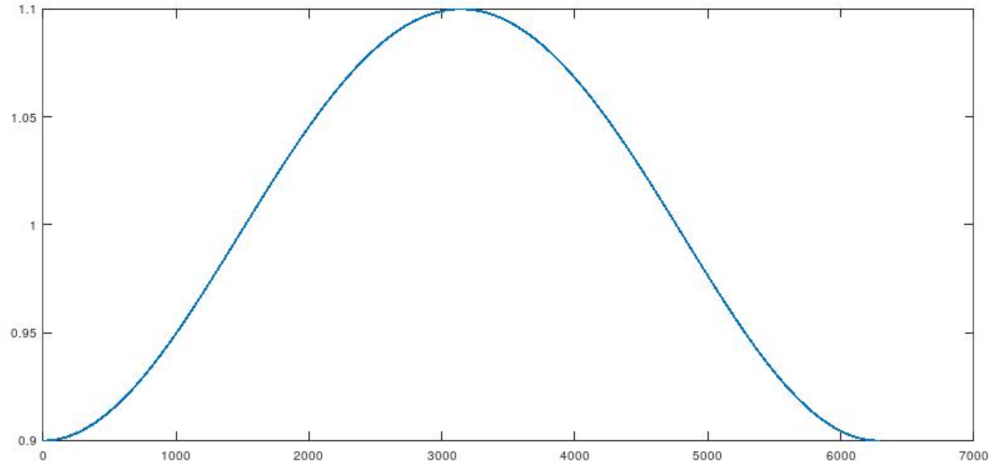


10
8
6
4
2
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

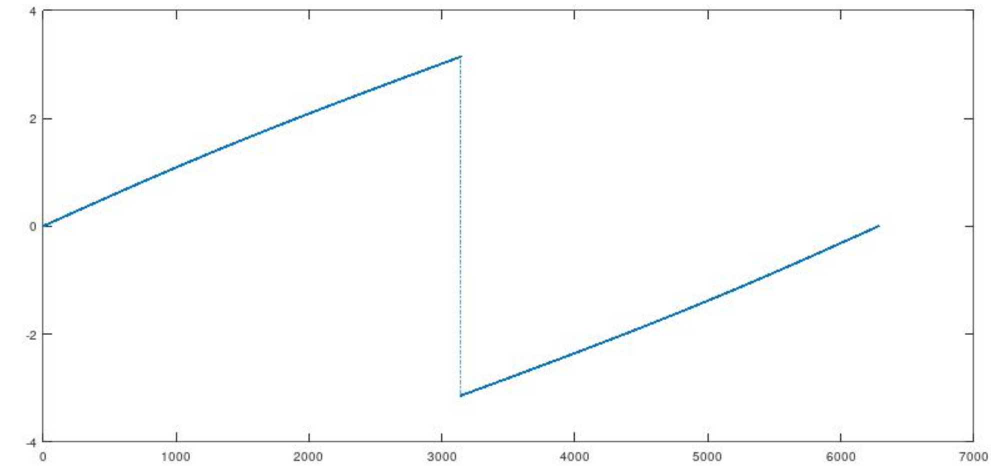


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.1 零点 无极点

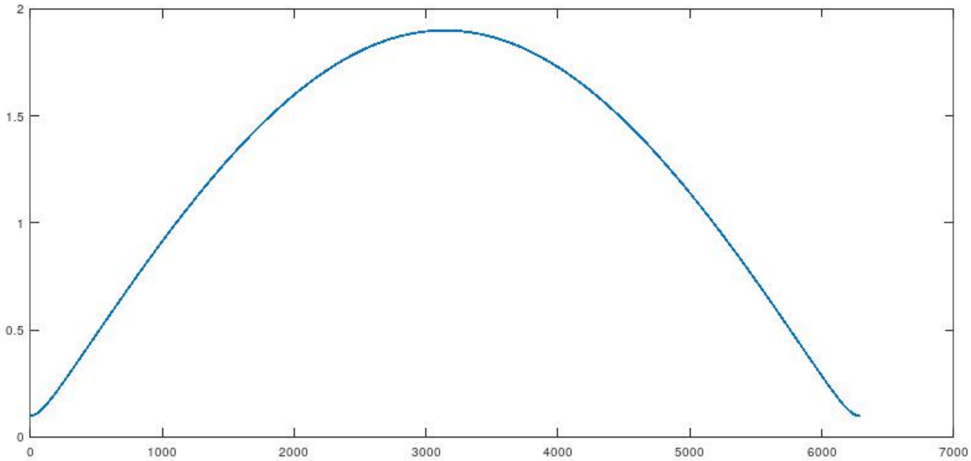


1.1
1.05
1
0.95
0.9
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

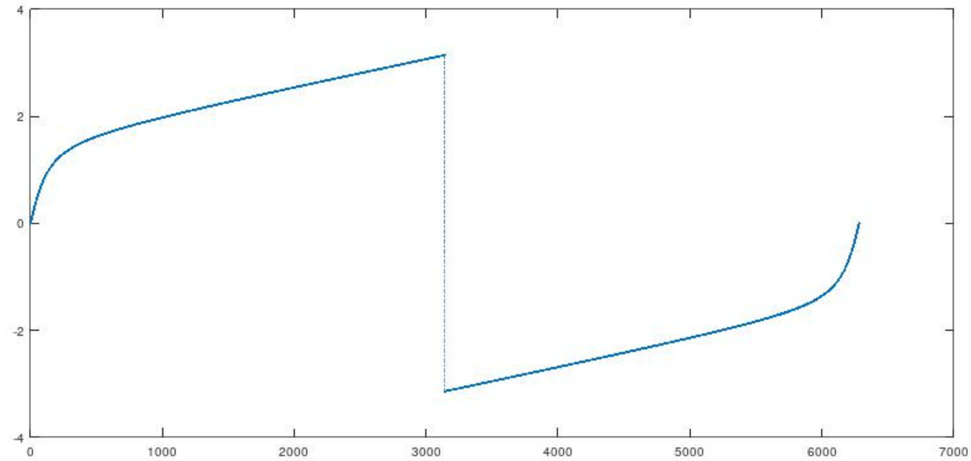


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.9 零点 无极点

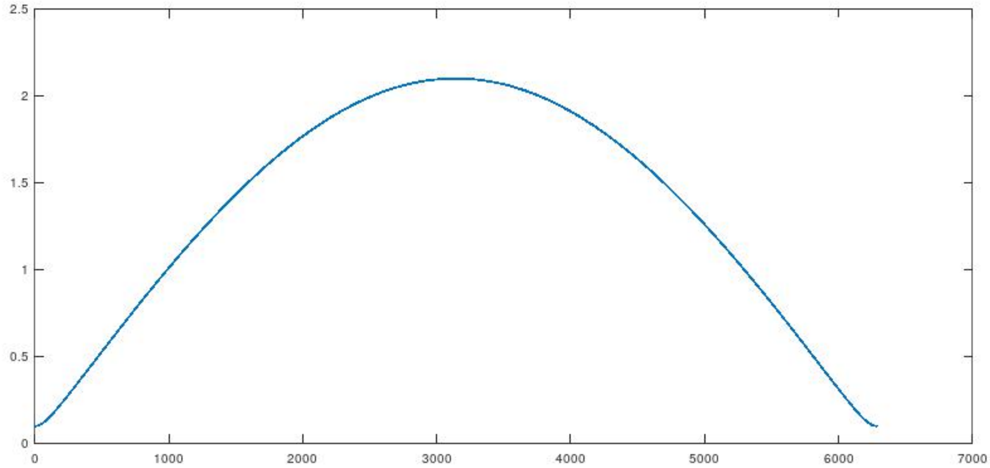


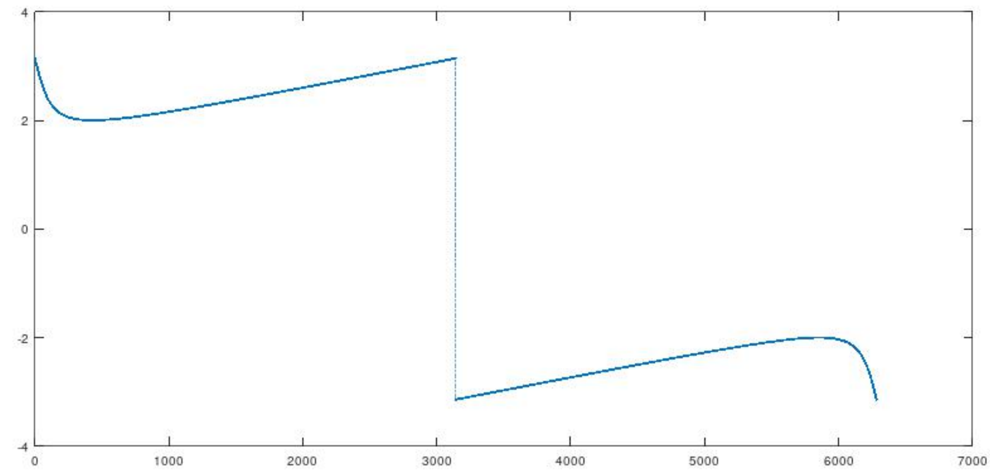
2
1.5
1
0.5
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000



4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 1.1 零点 无极点


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000