

2.15 考虑图 P2.15 的系统，

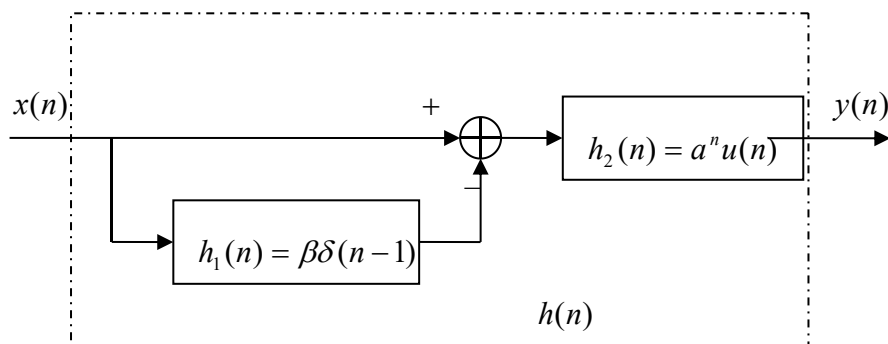


图 P2.15

- 求整个系统的冲激响应 $h[n]$ 。
- 求整个系统的频率响应。
- 给出联系输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 的差分方程。
- 该系统是因果的吗？在什么条件下该系统是稳定的？

解:(a) $h[n] = (1 - h_1[n]) * h_2[n] = (1 - \beta\delta[n-1]) * \alpha^n u[n]$

$$= \alpha^n u[n] - \beta\alpha^{n-1} u[n-1]$$

(b) $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\beta e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} = \frac{1 - \beta e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$

(c) $\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

$$\therefore Y(e^{j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})$$

\therefore 差分方程形式为

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] - \beta x[n-1]$$

- (d) 由于当 $n < 0$ 时, $h[n] = 0$, 所以系统是因果的。

由 (a) 可知, 当 $|\alpha| < 1$ 时, $s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

所以, 当 $|\alpha| < 1$ 时, 系统是稳定的。

2.27 有三个系统 A, B 和 C, 其输入输出如图 P1.21 所示, 试确定是否每一个系统都能是 LTI

的？若你的答案是是的，那么请指出是否还有另外的 LTI 系统也具有给出的输入/输出对关系，清楚地说明你的答案。

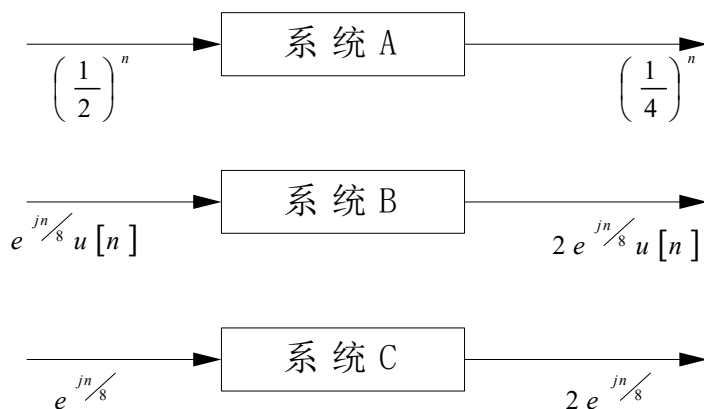


图 P2.21

解：

- 1) 假设系统 A 是 LTI 的，则当输入为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 时，输出应满足

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

而 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$ 为与 n 无关的常数，则应有

$$y_1[n] = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (\text{其中 } k \text{ 是与 } n \text{ 无关的常数})$$

而系统 A 输出为 $\left(\frac{1}{4}\right)^n \neq k \left(\frac{1}{2}\right)^n$

故系统 A 不是 LTI 的。

- 2) 假设系统 B 是 LTI 的，则当输入为 $e^{jn/8} u[n]$ 时，输出应为

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k] e^{j(n-k)/8} u[n-k] = e^{jn/8} \sum_{k=-\infty}^n h_2[k] e^{-jk/8}$$

若 $\sum_{k=-\infty}^n h_2[k] e^{-jk/8} = 2u[n]$ ，即仅当 $h_2[n] = 2\delta[n]$ ，则输出为 $2e^{jn/8} u[n]$ ，故系统 B 可

以是 LTI 的，并且唯一。

- 3) 假设系统 C 是 LTI 的，则当输入为 $e^{jn/8}$ 时，输出应为

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k] e^{j(n-k)/8} = e^{jn/8} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k] e^{-jk/8}$$

若 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k] e^{-jk/8} = 2$, 即 $h_3[n]$ 的 DTFT 在 $H_3(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{8}} = 2$ 即可满足上述的输入输出

的 LTI 对应关系, 而这种选择将会有很多种。系统 C 可以是 LTI, 不唯一。

2.44

2.44 令 $X(e^{j\omega})$ 是信号 $x[n]$ 的傅里叶变换, 如图 P2.44 所示。不需明确求出 $X(e^{j\omega})$ 而完成下列计算:

- 求 $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$
- 求 $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$
- 求 $\angle X(e^{j\omega})$
- 求 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$
- 求出并画出傅里叶变换是 $X(e^{-j\omega})$ 的信号。
- 求出并画出傅里叶变换是 $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 的信号。

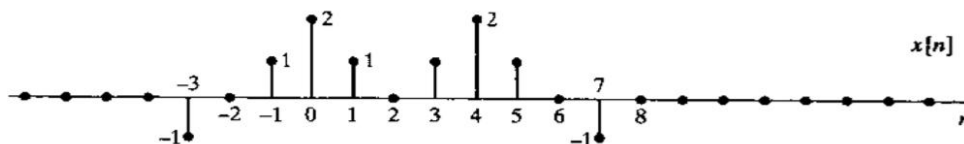


图 P2.44

2.70 有一种常用的数值运算叫做一阶差分, 定义为 $y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$,

这里 $x[n]$ 为一阶差分的输入, $y[n]$ 为输出。

- 证明该系统是线性时不变的;
- 求该系统的冲激响应;
- 求出系统的频率响应, 并画出频率响应图;
- 证明: 若 $x[n] = f[n] * g[n]$, 则

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n])$$

其中 $*$ 记做离散卷积。

- 设计一个系统, 写出冲激响应的表达式 $h_i[n]$ 。要求所设计系统与一阶差分系统级

联时, 能恢复出 $x[n]$, 即要求

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]。$$

- 证明:

设两个输入信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 分别对应输出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 。即

$$y_1[n] = T(x_1[n]) = x_1[n] - x_1[n-1]; \quad y_2[n] = T(x_2[n]) = x_2[n] - x_2[n-1]。$$

(i)线性:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) &= \{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} + \{\alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1]\} \\ &= \alpha \{x_1[n] + x_1[n-1]\} + \beta \{x_2[n] + x_2[n-1]\} \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned}$$

(ii)时变性:

$$T(x[n - n_d]) = x[n - n_d] - x[n - 1 - n_d];$$

$$y[n - n_d] = x[n - n_d] - x[n - 1 - n_d]。$$

即 $T(x[n - n_d]) = y[n - n_d]$ ，故而系统时不变。

(b) 解:

由 $y[n] = x[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} = x[n] * h[n]$ 可得:

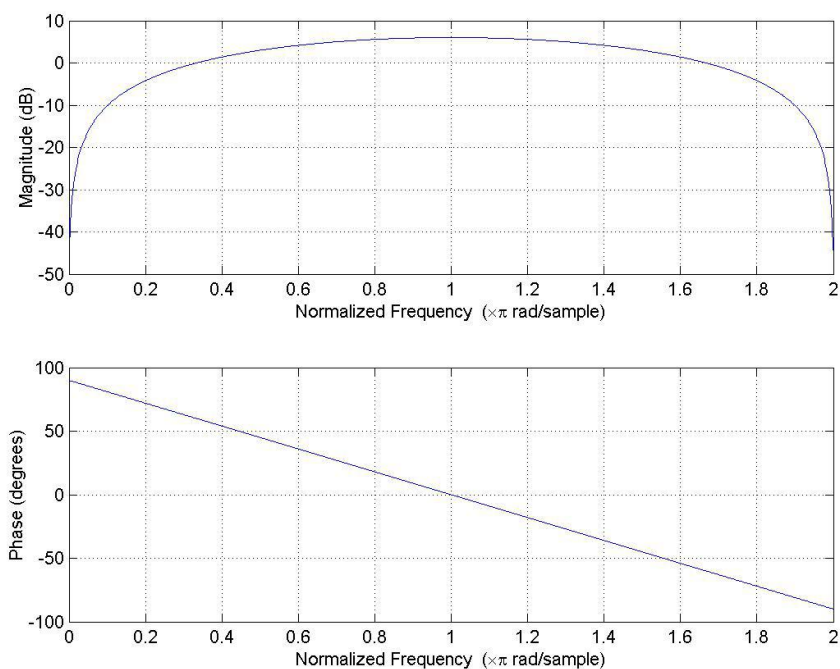
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

(c) 解:

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n]) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$\therefore |H(e^{j\omega})| = 2 - 2 \cos \omega \quad \angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(\tan \frac{\omega}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

频谱图如图解 2.70。



图解 2.70

(d) 证明:

$$\because x[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k]g[k]$$

$$\therefore \nabla(x[n]) = \nabla\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k](\nabla g[n-k])$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k](g[n-k] - g[n-k-1]) = f(n) * \nabla g[n]$$

$$\text{同理: } \nabla(x[n]) = \nabla\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k]g[k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nabla(f[n-k])g[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f[n-k] - f[n-k-1])g[k] = \nabla f(n) * g[n]$$

(e) 令 $h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$, 即:

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = h_i[n] * h[n] * x[n] = x[n]$$

$$\therefore h_i[n] * h[n] = \delta[n]$$

得: $h_i[n] = u[n]$ 。

2.17 (a) 求序列 $r[n]$ 的傅里叶变换

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(b) 考虑序列 $\omega[n]$,

$$\omega[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{2\pi n}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

画出 $\omega[n]$, 并利用 $r[n]$ 的傅里叶变换来表示 $\omega[n]$ 的傅里叶变换。提示: 先利用 $r[n]$ 和

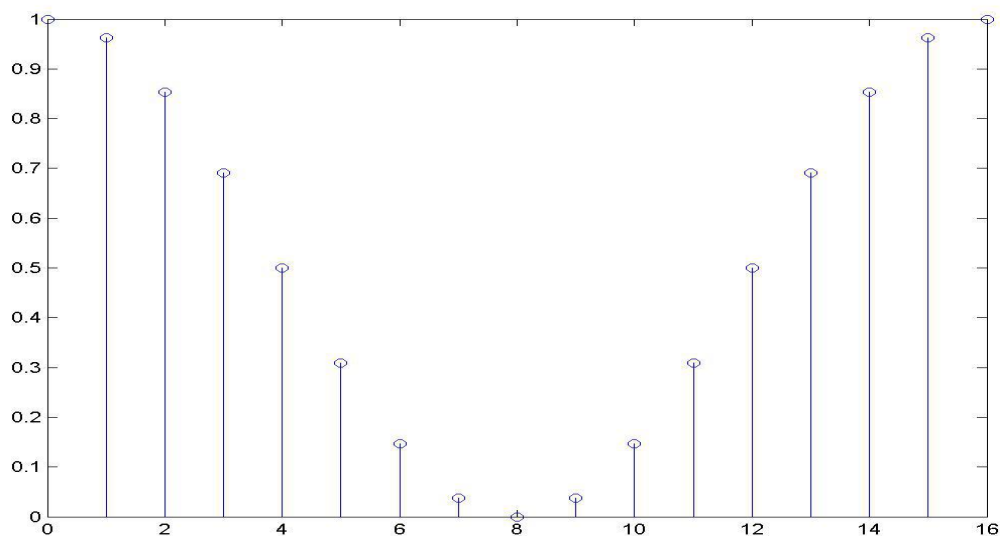
复指数 $e^{j(2\pi n/M)}$ 、 $e^{-j(2\pi n/M)}$ 来表示 $\omega[n]$ 。

(c) 画出 $R(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 的幅度特性。

解:

$$(a) R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\omega \frac{M}{2}}$$

(b) $\omega[n]$ 如图解 2.17-1。



图解 2.28-1 其中 $M = 16$

$$\cos \frac{2\pi n}{M} = \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{2\pi n}{M}} + e^{-j\frac{2\pi n}{M}} \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore F(\cos \frac{2\pi}{M} n) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) \right\} \\ &= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(\omega - \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore F\{w[n]\} = \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(\theta - \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) + \delta(\theta + \frac{2\pi}{M} + 2\pi k) \right\} R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \delta(\theta - \frac{2\pi}{M}) + \delta(\theta + \frac{2\pi}{M}) \right\} R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4} \left\{ R[e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})}] + R[e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})}] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4} R[e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})}] + \frac{1}{4} R[e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})}]$$

(c) $R(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 的幅度特性如图解 2.17-2。

2.77 令 $x[n]$ 和 $y[n]$ 为复序列, $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 为它们的傅立叶变换.

(a) 利用卷积定理(表 2.2 中定理 6)以及表 2.1 中适当的性质,求一个序列,其傅立叶变换是

$$X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}), \text{ 并用 } x[n] \text{ 和 } y[n] \text{ 来表示该序列.}$$

(b) 利用(a)的结果,证明
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \quad (\text{P2.77})$$

(c) 利用式(P2.77),求下列和式的数值解.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

解: (a) $\because F\{y^*[-n]\} = Y^*(e^{j\omega})$

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

$$\therefore F\{x[n] * y^*[-n]\} = X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$$

(b) $\because x[m] * y^*[-m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[m+n]$

$$\text{而 } x[m] * y^*[-m] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega$$

$\therefore m=0$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

(c) $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

$$y^*[n] = \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\therefore Y^*(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\therefore \text{左} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{10} d\omega = \frac{1}{60}$$

2.78 令 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 分别代替一个序列及其傅里叶变换, 利用 $X(e^{j\omega})$ 求 $y_s[n]$ 、 $y_d[n]$ 和

$y_e[n]$ 的变换。并且, 画出每一种情况下, 相应与图 P2.78 所示的 $X(e^{j\omega})$ 的 $Y(e^{j\omega})$ 。

(a) 采样器:

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(b) 压缩器:

$$y_d[n] = x[2n]$$

(c) 扩展器:

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

提示: $y_s[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + (-1)^n x[n]\}$, 而 $-1 = e^{j\pi}$ 。

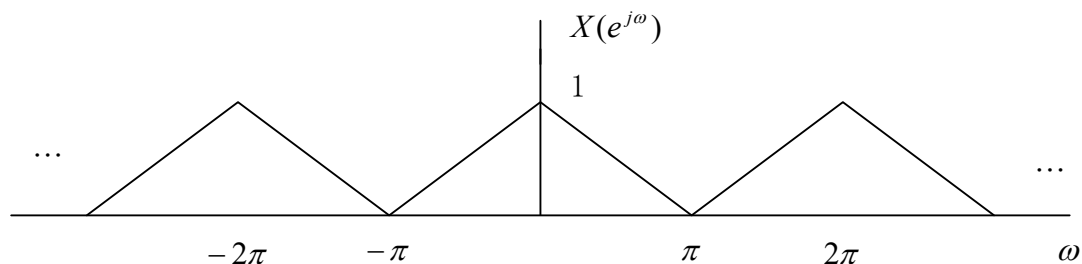
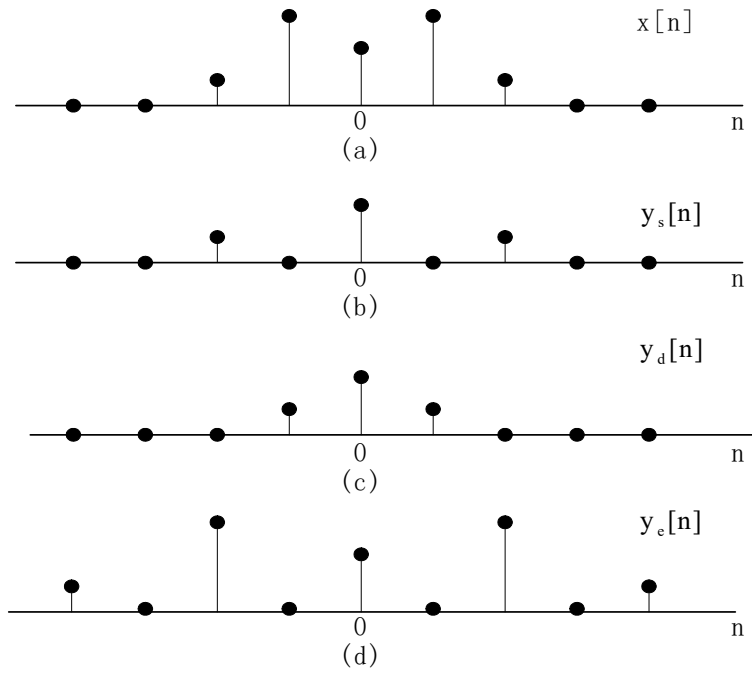


图 P2.78

解:

设 $x[n]$ 图解 2.78-1 (a) 所示, 则相应的 $y_s[n]$ 、 $y_d[n]$ 和 $y_e[n]$ 有如图解 2.36-1 (b)、(c)

和 (d) 所示的信号。



图解 2.78-1

$$(a) \because y_s[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + (-1)^n x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + e^{j\pi n} x[n]\}$$

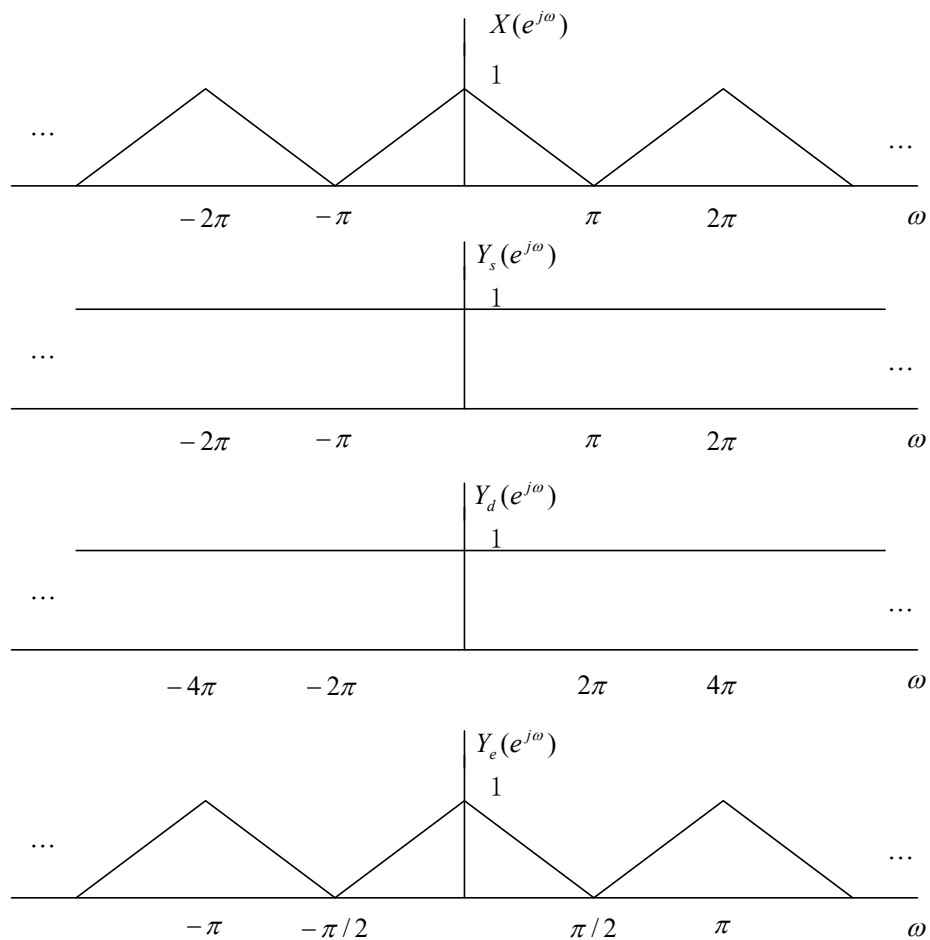
$$\therefore Y_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n] e^{-j2n\omega}$$

$$(b) y_d[n] = x[2n]$$

$$Y_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n] e^{-j2n(\omega/2)} = Y_s(e^{j(\omega/2)})$$

$$(c) Y_c(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_c[n] e^{-jn\omega} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 为偶数}}}^{\infty} x[\frac{n}{2}] e^{-j\frac{n}{2} \cdot 2\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn \cdot 2\omega} = X(e^{j2\omega})$$

故可得相对应的频谱关系如图解 2.78-2。



图解 2.78-2(ys 和 yd 的幅度应为 0.5)

3.9 一个因果的 LTI 系统有冲激响应 $h[n]$ ，它的 z 变换是

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

(a) $H(z)$ 的收敛域是什么？

(b) 系统是稳定的么？请解释。

(a) 某一输入 $x[n]$ ，产生的输出为：

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

求 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 。

(d) 求系统的冲激响应 $h[n]$ 。

$$\text{解:} \because H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})} = \frac{\lambda_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{\lambda_2}{1+0.25z^{-1}};$$

λ_1, λ_2 为待定常数

$|z| > 0.5$ (ROC) 收敛域包括单位圆, 那么序列绝对可和,

因此系统是稳定的。

$$\begin{aligned} \because y[n] \text{ 的 } z \text{ 变换为: } Y(z) &= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1+0.25z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}} \\ &= \frac{1+z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})} \quad 0.25 < |z| < 2 \end{aligned}$$

$$\therefore X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad (\text{收敛域 } |z| < 2) \quad // \text{值得思考}$$

$$\text{解出待定系数为: } \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\therefore h[n] = [2(0.5)^n - (-0.25)^n] \cdot u[n] \quad (\text{中间应该是加号})$$

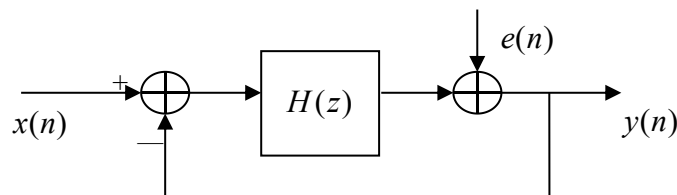
3.29 z 变换 $X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}$, ($z \neq 0$), 求该序列 $x[n]$ 。(用幂级数展开法)

$$\text{解: } \because X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} \quad (z \neq 0)$$

$$X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{m=-\infty}^0 \frac{z^{-m}}{(-m)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^{-n}}{(-n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!},$$

再由 z 变换的定义可得 $x(n) = \frac{1}{(-n)!}u(-n) + \frac{1}{n!}u(n)$ 。

3.40 离散时间系统如图所示:



其中, $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ 为因果 LTI 系统, 试求: $Y(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z)$, 并

且 $H(z)$ 、 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 的稳定性如何?

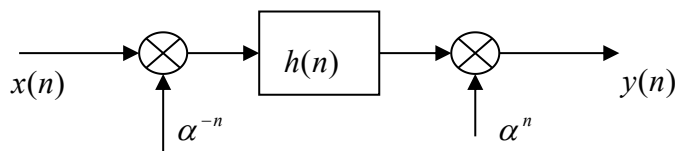
解:

$$Y(z) = [X(z) - Y(z)]H(z) + E(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{X(z)H(z) + E(z)}{1 + H(z)}$$

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} = \frac{1}{z}, H_2(z) = \frac{1}{1 + H(z)} = \frac{z-1}{z}。$$

1. 由于 $H(z)$ 的收敛域为 $\{z \mid |z| > 1\}$, 它的极点在单位圆周上的, 故而为不稳定系统 (临界稳定)。
2. $H_1[Z] = \frac{1}{Z}$, 只有一个 $Z=0$ 的极点在单位圆内, 所以稳定
3. $H_2[Z] = \frac{Z-1}{Z}, \Rightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, 满足绝对可和条件, 稳定

3.41 离散时间系统如图所示:



其中 $h(n)$ 所代表的系统为 LTI 系统, $H(z)$ 的收敛域形式为:

$$0 < r_{\min} < |z| < r_{\max} < \infty$$

- (1) 给出使 $h(n)$ 所代表系统 BIBO 稳定的限制条件
- (2) 整个系统是 LTI 的吗? 若是, 给出其单位冲激响应 $g(n)$
- (3) 整个系统可以是 BIBO 稳定的吗? 给出其限制条件

解:

1. 若系统稳定, 则收敛域应包括单位圆, 即 $r_{\min} < 1$ 且 $r_{\max} > 1$
2. $[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^n = y[n]$

$$k_1x_1[n] + k_2x_2[n] \longrightarrow [k_1x_1[n] + k_2x_2[n]]\alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$$

$$= [k_1x_1[n]]\alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n + [k_2x_2[n]]\alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$$

$$= k_1y_1[n] + k_2y_2[n], \text{ 线性}$$

$$y[n] = (\alpha^{-n}x[n] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$

$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$

$$= \sum_k \alpha^{n-k} x[k] h[n-k]$$

$$y[n-m] = \sum_k \alpha^{n-m-k} x[k] h[n-m-k]$$

$$T\{x[n-m]\}$$

$$= (\alpha^{-n}x[n-m] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$

$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k-m] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$

$$\text{令 } k' = k - m,$$

则 $k = k' + m$ 代入上式可得：

$$T\{x[n-m]\}$$

$$= \sum_k \alpha^{n-k'-m} x[k'] h[n-k'-m]$$

$$T\{x[n-m]\}$$

$$= \sum_k \alpha^{n-k-m} x[k] h[n-k-m]$$

$$= y[n-m]$$

时不变

由前可知：

$$y[n] = (\alpha^{-n}x[n] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$

$$y[n] \cdot \alpha^{-n} = (\alpha^{-n}x[n] \otimes h[n])$$

对上式进行 Z 变换可得：

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z) \cdot H(z)$$

令 $z' = \alpha z$ 可得:

$$Y(z') = X(z') \cdot H\left(\frac{z'}{\alpha}\right)$$

将上式中的 z' 换为 z 可得:

$$Y(z) = X(z) \cdot H\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

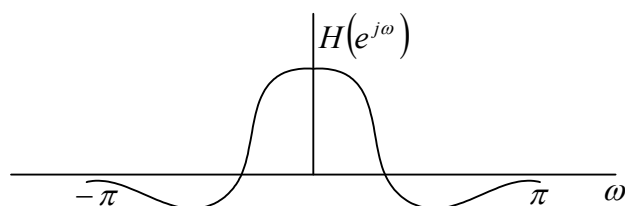
$$g[n] = Z^{-1}\left[H\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right] = \alpha^n h[n]$$

(3) 显然, 系统可以是 BIBO 稳定的

与 (1) 类似, 稳定的条件为:

$$|\alpha| r_{\min} < 1 < |\alpha| r_{\max}$$

5.32 某一稳定的 LTI 系统的傅立叶变换是纯实数且如图 P5.18 所示。问该系统是否有一个稳定的逆系统?



图P5.18

解: 设逆系统频率响应为 $H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$

设 $H(e^{j\omega_0}) = 0$, 取 $\varepsilon > 0$ 的任意小量

则 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(e^{j(\omega_0 - \varepsilon)}) = 0$, 且 $H(e^{j(\omega_0 - \varepsilon)}) > 0$

此时 $H_i(e^{j(\omega_0 - \varepsilon)}) = \frac{1}{H(e^{j(\omega_0 - \varepsilon)})} = +\infty$

$$\therefore H_i(e^{j(\omega_0 - \varepsilon)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i[n] e^{-j(\omega_0 - \varepsilon)n} < \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_i[n]|$$

$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_i[n]| = +\infty$ 所以该逆系统不稳定.

5.33 设序列 $x[n]$ 是一 LTI 系统在输入为 $s[n]$ 时的输出。且该系统可以由下面差分方程描述：

$$x[n] = s[n] - e^{8a} s[n-8],$$

其中 $a > 0$ 。

(a) 求系统函数 $H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$ ，并画出它的零极点分布图，指出相应的收敛域。

(b) 设计一个 LTI 系统，要求可以利用它从 $x[n]$ 中恢复 $s[n]$ ，求该系统的系统函数

$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ，其中 $y[n] = s[n]$ 。找出 $H_2(z)$ 全部可能的收敛域，并且对于每个收敛域讨论其因果性和稳定性。

(c) 求出所有可能的冲激响应 $h_2[n]$ ，使得

$$y[n] = h_2[n] * x[n] = s[n]。 \quad (\text{P5.33-2})$$

(d) 对 (c) 中所确定的全部 $h_2[n]$ ，当 $y[n] = s[n] = \delta[n]$ 时，通过直接计算式 (P5.33-2)

中的卷积讨论。

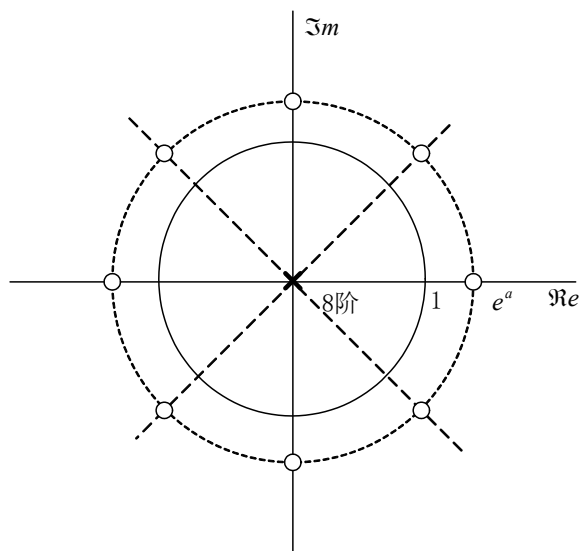
解：

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - e^{8a} z^{-8} \quad a > 0。$$

(a) 零点： $c_k = e^{(8a + i2k\pi)/8} = e^{(a + ik\pi/4)}$ ， $k = 0, 1, \dots, 7$ 。

极点： $d = 0$ ，八阶极点。

零极点分布如图解 5.20 右。



ROC : $|z| \neq 0$ 。

图解 5.33

(b) 由题意应有: $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-8}}$ 。

收敛域的选择有两种可能:

(i) $|z| < e^a$, 其中 $e^a > 1$, 所以此时 $H_2(z)$ 稳定, 非因果。

(ii) $|z| > e^a$, 同样 $e^a > 1$, 所以此时 $H_2(z)$ 不稳定, 但因果。//如果要求因果稳定会怎样?

(c) $h_2[n] = Z^{-1}\{H_2(z)\}$ 。

首先, 证明一个结论: 若 $x[n] \xrightarrow{z} X(z)$,

且 $y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{8}] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$, 则有: $y[n] \xrightarrow{z} X(z^8)$ 。

证明如下:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[8n] z^{-8n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^8)^{-n} = X(z^8)。$$

设 $H_2'(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-1}}$, 则有:

$$h_2'[n] = (e^{8a})^n u[n], \quad |z| > 8a;$$

$$\text{或 } h_2'[n] = -(e^{8a})^n u[-n-1], \quad |z| < 8a。$$

利用上面证明的结论, 即有:

$$h_2[n] = \begin{cases} h_2'[\frac{n}{8}] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}。$$

得:

$$h_2^1[n] = \begin{cases} (e^a)^n u[\frac{n}{8}] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad |z| > e^{8a};$$

$$\text{或 } h_2^2[n] = \begin{cases} -(e^a)^n u[-\frac{n}{8}-1] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad |z| < e^{8a}。$$

(d) 若输入 $s[n] = \delta[n]$, 则:

$$x[n] = \delta[n] - e^{8a} \delta[n-8]。$$

(i) 若通过 $h_2^1[n]$, 则:

$$y[n] = (e^a)^n u[\frac{n}{8}] - e^{8a} (e^a)^{n-8} u[\frac{n-8}{8}] = (e^a)^n \left\{ u[\frac{n}{8}] - u[\frac{n}{8} - 1] \right\},$$

$$n = 8k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

有： $y[n] = \delta[n] = s[n]$ 。

(ii) 若通过 $h_2^2[n]$ ，则：

$$y[n] = -(e^a)^n u[-\frac{n}{8} - 1] + e^{8a} (e^a)^{n-8} u[-\frac{n-8}{8} - 1] = (e^a)^n \left\{ u[-\frac{n}{8}] - u[-\frac{n}{8} - 1] \right\},$$

$$n = 8k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即亦有： $y[n] = \delta[n] = s[n]$ 。

5.59

4.32 已知一个带限的连续时间信号有 60Hz 的分量,这个分量想用图 P4.11 系统把它处理掉,这里 $T = 10^{-4}s$ 。

- (a) 如果要避免混叠,那么模拟信号中能包括的最高频率分量是多少?
 (b) 利用具有如下频率响应的离散时间系统:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{[1 - e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - e^{-j(\omega + \omega_0)}]}{[1 - 0.9e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - 0.9e^{-j(\omega + \omega_0)}]}$$

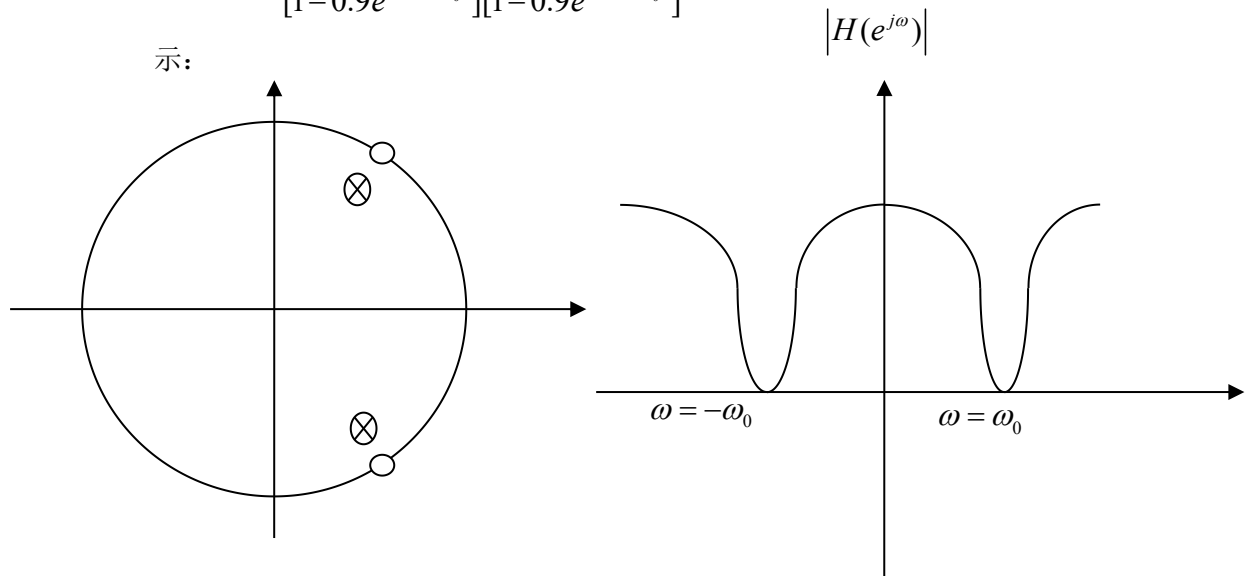
画出 $H(e^{j\omega})$ 的幅度和相位。

- (c) 为了消除 60Hz 的分量, ω_0 应该选什么值?

解:带限时间信号含有 60Hz 的分量, $T = 10^{-4}s$

- (a) 由 Nyquist 采样定理,模拟信号中能包含的最高的频率分量是 5KHz。

- (b) $H(e^{j\omega}) = \frac{[1 - e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - e^{-j(\omega + \omega_0)}]}{[1 - 0.9e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - 0.9e^{-j(\omega + \omega_0)}]}$ 可知系统的零极点图如下所示:



$H(e^{j\omega})$ 的幅度如下图: (ω_0 点的幅度值应为 0)

- (c) 为了消除 60Hz 的频率分量, 当 $\Omega = 2\pi \times 60$, $H(j\Omega) = 0$ 即可

$$\text{对应的数字角频率: } \omega_0 = \Omega T = \frac{2\pi \times 60}{10^4} = 0.012\pi$$

4.34 图 P4.34-1 的 LTI 系统,其 $H(e^{j\omega})$ 是 $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$, $|\omega| \leq \pi$ (半个样本间隔的延迟)

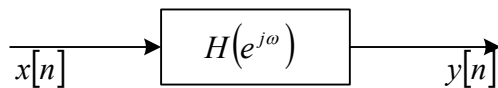


图 P4. 34-1

(a) 求图 P4. 16 系统中的 T 和 $h_c(t)$, 使得该系统等效为图 P4. 34-1 的系统, 后者的 $H(e^{j\omega})$ 如上所给。

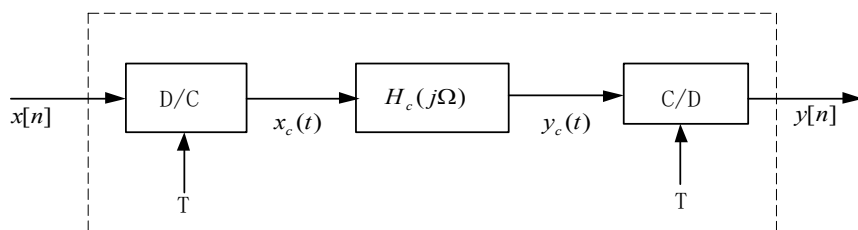


图 P4. 34-2

(b) 当输入序列为 $x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$ 并如图 P4. 34-2 所示时, 求出并画出 $y[n]$ 。

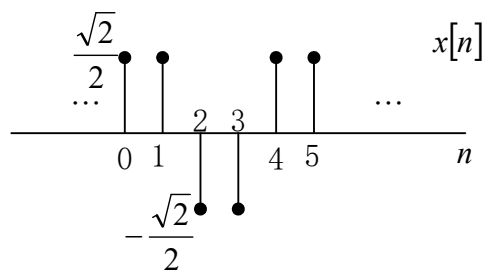


图 P3. 22-2

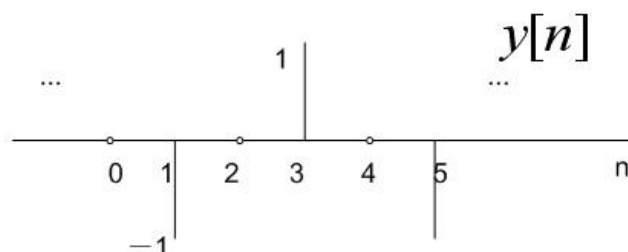
解: (a) $\because H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-\frac{j\Omega T}{2}}$

$$\therefore h_c(t) = \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \left(\Delta = \frac{1}{2}\right)$$

(b) 当输入序列为 $x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$,

$y[n]$ 相当于 $x[n]$ 延时 $\frac{1}{2}$ 后产生的序列，为：

$$y(n) = x(n - 0.5) = \sin(2.5n\pi)$$



7.2 某一离散时间低通滤波器是将重激励响应不变法用于一个连续时间巴特沃兹滤波器而设计出来的。该连续时间滤波器的幅度的平方为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

该离散时间系统的技术指标为：

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0.17783 & 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

假设，设计过程中不存在混叠问题。也就是说，可以通过设计连续时间的巴特沃兹滤波器，以满足离散时间滤波器所要求的技术指标。

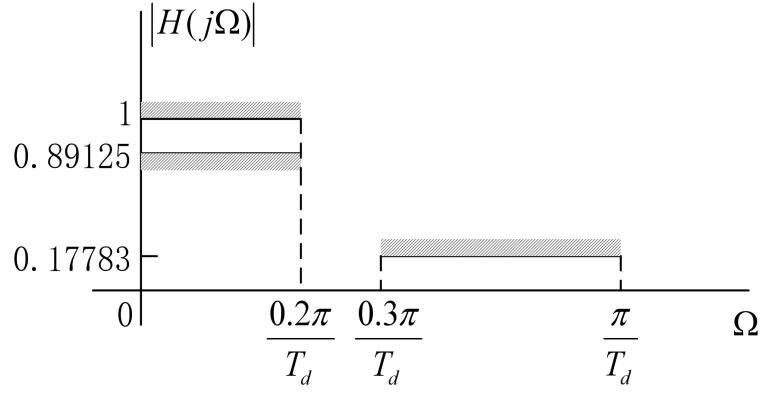
(a) 画出连续时间巴特沃兹滤波器频率响应 $H_c(j\Omega)$ 的幅度容限图，使得用冲激响应不变法 ($h[n] = T_d h_c(nT_d)$) 后所得出的离散时间系统满足给定的技术指标。其中，不必假设 $T_d = 1$ 。

(b) 求整数阶次 N 和量 $T_d\Omega_c$ ，使得连续时间巴特沃兹滤波器可以满足 (a) 中所确定的在通带边沿处的技术指标。

(c) 说明： $T_d \neq 1$ 和 $T_d = 1$ 得出的离散时间系统是一样的。

解：

(a) $H_c(j\Omega)$ 的幅度容限图如图解 7.2a 所示。



图解 7.2a

(b) 如 (a) 中所示, 希望设计的连续时间巴特沃兹滤波器的性能指标为:

$$\begin{aligned} 0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 & \quad 0 \leq |\Omega| \leq \frac{0.2\pi}{T_d} \\ |H_c(j\Omega)| \leq 0.17783 & \quad \frac{0.3\pi}{T_d} \leq |\Omega| \end{aligned} .$$

由巴特沃兹函数的单调性, 应有:

$$H_c(j\frac{0.2\pi}{T_d}) \geq 0.89125 ;$$

$$H_c(j\frac{0.3\pi}{T_d}) \leq 0.17783 .$$

结合巴特沃兹函数的形式 $H_c(j\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$, 将不等式简化为等式:

$$1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c T_d} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125} \right)^2 ;$$

$$1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c T_d} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2 .$$

折衷后 (满足通带指标, 超过阻带指标):

$$N = 6 ; \quad T_d \Omega_c = 0.7032 .$$

即 $H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)^{2N}}$ 的极点均匀分布在半径为 $\Omega_c = 0.7032/T_d$ 的圆上, 其

中 $H_c(s)$ 的极点取左半平面。

第一对极点: $(-0.182 \pm j0.679)/T_d = re^{j\theta_1}/T_d ;$

第二对极点： $(-0.497 \pm j0.497)/T_d = re^{j\theta_2}/T_d$ ；

第一对极点： $(-0.679 \pm j0.182)/T_d = re^{j\theta_3}/T_d$ 。

这样，可得系统函数：

$$H'_c(s) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{(s - re^{j\theta_i}/T_d)(s - re^{-j\theta_i}/T_d)} = \sum_{i=1}^6 \frac{A'_k}{s - re^{j\theta_i}/T_d},$$

其中： $A'_k = A_k/T_d$ ， $A_k = A_k'|_{T_d=1}$ 。

结合 $H_c(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$ 与 $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$ 的对应关系，应有：

$$H'(z) = \sum_{i'=1}^6 \frac{T_d A'_k}{1 - e^{re^{j\theta_i}} z^{-1}} = H(z)。$$

7.33 理想离散时间希尔伯特变换是一个对于 $0 < \omega < \pi$ 引入 $-\pi/2$ 弧度的相移，而对 $-\pi < \omega < 0$ 引入 $\pi/2$ 弧度的相移；幅度相应均为 1。这类系统也称为理想 90 度移相器。

(a) 给出一个理想离散时间希尔伯特变换器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程，改变换器包括稳定的（非零）群时延。画出该系统对于 $-\pi < \omega < \pi$ 的相位响应。

(b) 确定用那种类型的（I、II、III 或 IV）FIR 线性相移系统来逼近（a）中的理想离散时间希尔伯特变换器。

(c) 假设我们要用窗函数法设计一个逼近理想离散时间希尔伯特变换器的线性相移系统。若要求该 FIR 系统 $n < 0$ 和 $n > M$ 时 $h_n[n] = 0$ ，利用（a）中给出的 $H_d(e^{j\omega})$ 求出理想冲激响应 $h_d[n]$ 。

(d) 当 $M=21$ 时该系统的延时是多少？若采用矩形窗，画出这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线。

(e) 当 $M=20$ 时该系统的延时是多少？若采用矩形窗，画出这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线。

解

(a) 由题意得：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{M}{2}\omega} & 0 < \omega < \pi \\ e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{M}{2}\omega} & -\pi < \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} -j \cdot e^{-j\frac{M}{2}\omega} & 0 < \omega < \pi \\ j \cdot e^{-j\frac{M}{2}\omega} & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (7.33a-1)$$

其中 $e^{-j\frac{M}{2}\omega}$ 为群延时项。

(b) I、II 类 FIR 线性相位系统满足：

$H_{1,2}(e^{j\omega})=A_e(e^{j\omega})e^{-j\frac{M}{2}\omega}$ ，其中 $A_e(e^{j\omega})$ 为实偶函数，对照式 (7.33a-1)，很明显，不可用逼近 $H_d(e^{j\omega})$ ；

III、IV 类 FIR 线性相位系统满足：

$H_{1,2}(e^{j\omega})=jA_f(e^{j\omega})e^{-j\frac{M}{2}\omega}$ ，其中 $A_f(e^{j\omega})$ 为实奇函数，对照式 (7.33a-1)，可用逼近 $H_d(e^{j\omega})$ 。

(c) 理想的冲激响应：

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 je^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} je^{j\omega n} d\omega$$

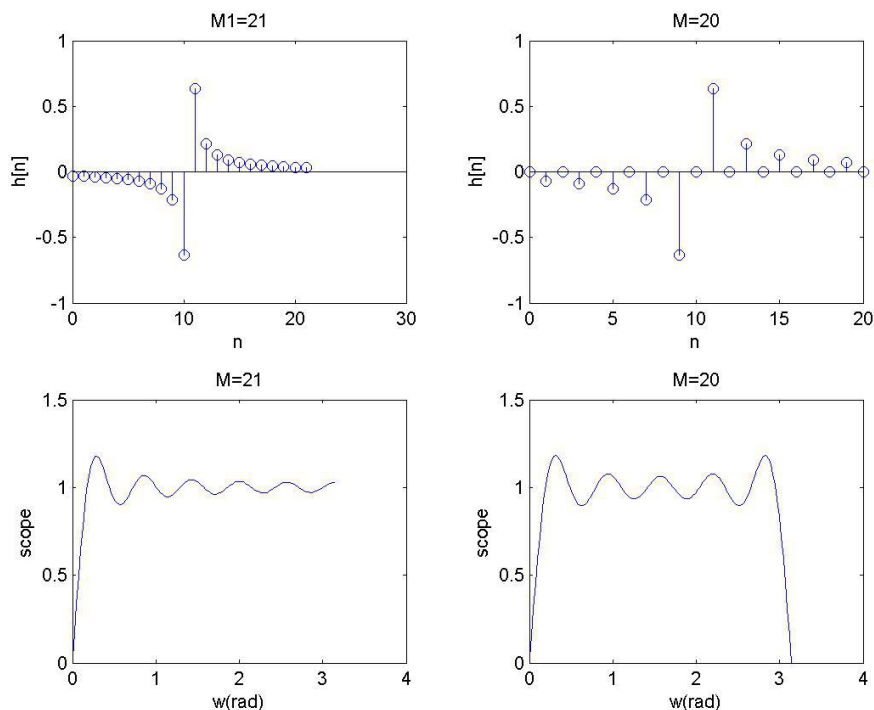
$$= \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

(d) 延时 $\frac{M}{2}=10.5$ 。

冲激响应和频率响应之幅度见图解 7.33。

(e) 延时 $\frac{M}{2}=10$ 。

冲激响应和频率响应之幅度见图解 7.33。



图解 7.33

8.24 考虑实 N 点有限长序列 $x(n)$ ，其傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，DFT 为 $X(k)$ ，若：

$$\text{Im}\{X(k)\} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{是否我们可以得到结论: } \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$$

如果可以, 请详细说明原因。如果不可以, 请举出反例。

解: $X(e^{j\omega})$ 是一个有限长序列 $x(n)$ 的傅立叶变换, $X(k)$ 是一个有限长序列 $x(n)$

的 DFT。若: $\text{Im}\{X(k)\} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

只能说明序列为圆周共轭对称序列;

而 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$ 却要求序列为共轭对称序列, 二者不能等同。

例如: 令 $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n-N+1]$, 那么 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = W_N^k + W_N^{(N-1)k} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right)$$

$$\text{显然, } \text{Im}\{X(k)\} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1。$$

$$\text{而 } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega} + e^{-j\omega(N-1)}, \quad \text{此时 } \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} \neq 0, \quad |\omega| \leq \pi$$

$$\text{观察 } X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \text{ 亦可知。}$$

8.47 设一 8 点实序列

$$x[n] = 0, n < 0, n > 7$$

并设 $X[k]$ 为其 8 点 DFT。

(a) 利用 $x[n]$ 计算

$$\left(\frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j(2\pi/8)kn} \right) \Big|_{n=9}$$

(b) 设

$$v[n] = 0, n < 0, n > 7$$

是一个 8 点实序列, 并设 $V[k]$ 是其 8 点 DFT。

如果当 $k=0, \dots, 7$ 时, 在 $z = 2 \exp(j(2\pi k + \pi)/8)$ 处 $V[k] = X(z)$, 其中 $X(z)$ 是 $x[n]$ 的 z 变换, 试用 $x[n]$ 表示 $v[n]$ 。

(c) 设

$$w[n] = 0, n < 0, n > 3$$

是一个 4 点序列, 并设 $W[k]$ 为其 4 点 DFT。

如果 $W[k] = X[k] + X[k+4]$, 试用 $x[n]$ 表示 $w[n]$ 。

(d) 设

$$y[n] = 0, n < 0, n > 7$$

是一个 8 点序列, 并设 $Y[k]$ 是其 8 点 DFT。

如果

$$Y[k] = \begin{cases} 2X[k], & k = 0, 2, 4, 6 \\ 0, & k = 1, 3, 5, 7 \end{cases}$$

试用 $x[n]$ 表示 $y[n]$ 。

8.47. (a)

$$\frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j \frac{2\pi}{8} k 9} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j \frac{2\pi}{8} k} = x[1].$$

(b)

$$\begin{aligned} V[k] &= X(z) \Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k}{8} + \pi)}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k}{8} + \pi)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k}{8} + \pi)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] (2e^{j \frac{\pi}{4}})^{-n} e^{-j \frac{2\pi k}{8} n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v[n] e^{-j \frac{2\pi k}{8} n}. \end{aligned}$$

We thus conclude that

$$v[n] = x[n] (2e^{j \frac{\pi}{4}})^{-n}.$$

(c)

$$\begin{aligned} w[n] &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 W[k] W_4^{-kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (X[k] + X[k+4]) e^{+j \frac{2\pi}{4} kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k] e^{+j \frac{2\pi}{4} kn} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k+4] e^{+j \frac{2\pi}{4} kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k] e^{+j \frac{2\pi}{4} kn} + \frac{1}{4} \sum_{k=4}^7 X[k] e^{+j \frac{2\pi}{4} kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{+j \frac{2\pi}{8} k 2n} \\ &= 2x[2n]. \end{aligned}$$

We thus conclude that

$$w[n] = 2x[2n].$$

(d) Note that $Y[k]$ can be written as:

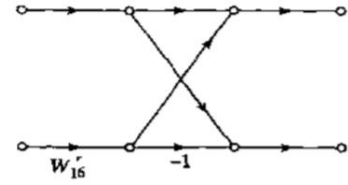
$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k] + (-1)^k X[k] \\ &= X[k] + W_8^{4k} X[k]. \end{aligned}$$

$$y[n] = x[n] + x[((n-4))_8].$$

9.14

9.14 图 P9.14 中的蝶形是从一个 $N=16$ 的按时间抽取的 FFT 中取出得。假设信号流图中 4 级的序号为 $m=1, \dots, 4$ 。则对每一级来说 r 的可能值为多少?

9.15 假设有两个计算序列 $x[n]$ 的 DFT 的程序, 其中 $x[n]$ 有 $N=2^v$ 个非零样本。程序 A 是直接按照 (8.67) 式给出的 DFT 求和定义式来计算 DFT, 且计算时间需 N^2 s。程序 B 按时间抽取 FFT 算



9.27 已知一个长度为 627 的有限长序列 $x[n]$ (即, 当 $n < 0$ 和 $n > 626$ 时, $x[n] = 0$), 且有

任何计算长度为 $N=2^v$ 的序列之 DFT 的 FFT 程序可供使用。

对于一个给定的序列, 我们想在如下频率处计算离散时间傅立叶变换的样本:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 255$$

说明如何由 $x[n]$ 得到一个新的序列 $y[n]$, 使得所提供的 FFT 程序用于 $y[n]$, 在 v 尽可能小的情况下得出所要求的频率样本。

解: 由分析有

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}} &= \sum_{n=0}^{626} x[n] e^{-j(\frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256})n} \\ &= \sum_{n=0}^{626} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{627}n} e^{-j\frac{2\pi k}{256}n} = \sum_{n=0}^{255} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{627}n} e^{-j\frac{2\pi k}{256}n} + \sum_{n=256}^{511} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{627}n} e^{-j\frac{2\pi k}{256}n} + \sum_{n=512}^{626} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{627}n} e^{-j\frac{2\pi k}{256}n} \\ &= \sum_{n=0}^{255} [x(n) e^{-j\frac{2\pi}{627}n} + x(n+256) e^{-j\frac{2\pi}{627}(n+256)} + x(n+512) e^{-j\frac{2\pi}{627}(n+512)}] e^{-j\frac{2\pi k}{256}n} \end{aligned}$$

故由以上分析可知道新序列为:

$$y(n) = x(n) e^{-j\frac{2\pi}{627}n} + x(n+256) e^{-j\frac{2\pi}{627}(n+256)} + x(n+512) e^{-j\frac{2\pi}{627}(n+512)} \quad n = 0, \dots, 255$$

使用 FFT 程序于该序列 $y(n)$, 得到为 $v=8$, $N=2^8$ 点的 DFT $[y(n)]$ 为该给定序列 $x(n)$ 在所给频

率 $\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 255$ 处离散时间傅立叶变换样本。

9.48 某一线性时不变系统的输入和输出满足如下的差分方程:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

假设可以利用一个 FFT 程序来计算长度为 $N=2^v$ 的任何有限长序列的 DFT。试提出一种方法, 它可以用提供的 FFT 程序来计算

$$H(e^{j(\frac{2\pi}{512})k})$$

其中 $H(z)$ 是该系统的系统函数。

解：已知一线性时不变系统的差分方程如下：

$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

两边做 Z 变换

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{512}k}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-j\frac{2\pi}{512}kn}}{1 - \sum_{n=0}^N a_n e^{-j\frac{2\pi}{512}kn}}$$

取 512 点的 FFT 程序既可。

10.9

10.9 下面是三个不同的信号 $x_i[n]$, 每个信号均为两个正弦信号的和：

$$x_1[n] = \cos(\pi n/4) + \cos(17\pi n/64)$$

$$x_2[n] = \cos(\pi n/4) + 0.8\cos(21\pi n/64)$$

$$x_3[n] = \cos(\pi n/4) + 0.001\cos(21\pi n/64)$$

我们希望利用一个加有 64 点矩形窗 $w[n]$ 的 64 点 DFT 来估计每个信号的谱。指出哪一个信号的 64 点 DFT 在加窗后会有两个可区分的谱峰？