LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2018-05-31
SIGNALBEHANDLING i MULTIMEDIA, EITA50
Tid: 08.00-13.00
Sal: Vic 1A

Hjälpmedel: Miniräknare och en valfri formelsamling i signalbehandling eller matematik.
Allowed items: calculator, DSP and mathematical tables of formulas

Viktigt: För att underlätta rättningen: *In order to simplify the correction:*
Lös endast **en** uppgift per blad. *Only solve* ***one*** *problem per paper sheet.*
Skriv kod+personlig identifierare på **samtliga** blad.
Write your code+personal identifier on ***every*** *paper sheet.*
Påståenden ska motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
Statements must be motivated by reasoning and/or equations.
Poängen från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
The points from the tasks will be added to the examination score.
Max total poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
Max total score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
Betygsgränser: 3 ($\geq$3.0p), 4 ($\geq$4.0p), 5 ($\geq$5.0p).
Grading: 3 ($\geq$3.0p), 4 ($\geq$4.0p), 5 ($\geq$5.0p).

convolution
circular
z- transform
DTFT
DFT

1. Ett LTI-system beskrivs av följande tidsdiskreta impulssvar
An LTI system is described by the following discrete impulse response

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{0} \quad -1 \quad -3 \quad 2 \quad -2\,],$$

a) Bestäm systemets differensekvation. $y(n) = -x(n-1) - 3x(n-2) + 2x(n-3) - 2x(n-4)$ (0.1p)
Determine the system's difference equation. $H(z) = -z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4}$

b) Bestäm systemfunktionen $H(z)$. $H(\omega) = -e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega} + 2e^{-3j\omega} - 2e^{-4j\omega}$ (0.1p)
Determine the system function, $H(z)$. $H(k) = -e^{-j2\pi\frac{k}{8}} - 3e^{-j2\pi\frac{k}{4}} + 2e^{-j2\pi\frac{3k}{8}} - 2e^{-j2\pi\frac{k}{2}}$

c) Bestäm Fouriertransformen, $H(\omega)$, samt DFT, $H(k)$, med $N = 8$. (0.1p)
Determine the Fourier transform, $H(\omega)$, and the DFT, $H(k)$, with $N = 8$.

d) Bestäm den linjära autokorrelationen, $r_{hh}(n)$. $r_{hh}(n) = h(k) * h(-k)$ (0.1p)
Determine the linear auto-correlation function, $r_{hh}(n)$. $[0\ 2\ 4\ -7\ \underline{18}\ -7\ 4\ 2\ 0]$

e) Bestäm utsignalen, när insignalen är given av (0.1p)
Determine the output signal, when the input signal is given by

$$y(n) = [\underline{-1}\ -2\ 4\ -6\ 1\ -4\ 2\,] \quad x(n) = [\,1 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad 1 \quad -1\,].$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
 & & & \underline{0} & -1 & -3 & 2 & -2 & & & \\
-1 & 1 & \underline{-1} & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & 1 & & & & & & \underline{-1} \\
 & & & 1 & -1 & 1 & & & & & -2 \\
 & & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & & 4 \\
 & & & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & -6 \\
 & & & & & -1 & 1 & -1 & & & 7 \\
 & & & & & & -1 & 1 & & & -4 \\
 & & & & & & & -1 & & & 2
\end{array}$$

LÖSNINGAR EITA50, 2018-05-31

Lösning 1 a) Differensekvationen är *The difference equation is*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) => y(n) = -x(n-1) - 3x(n-2) + 2x(n-3) - 2x(n-4)$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$

b) Definitionen av Z-transfomen ger *The definition of the Z transform gives*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = -z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4}$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

c) Fouriertransformen är *The Fourier transform is*

$H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$$\begin{aligned} H(w) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} &= -e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega} + 2e^{-3j\omega} - 2e^{-4j\omega} = \\ &= -e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega} + 4e^{(j7/2\omega+\pi/4)} sin(\omega/2) \end{aligned}$$

DFT med $N = 8$ är *The DFT with* $N = 8$ *is*

$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi kn/N}$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j2\pi kn/N} = -e^{-2j\pi k/8} - 3e^{-4j\pi k/8} + 2e^{-6j\pi k/8} - 2e^{-8j\pi k/8}$$

d) Den linjära autokorrolationen är *The linear auto correlation is*

$$r_{hh}(n) = h(n) * h(-n) = [\, 2 \quad 4 \quad -7 \quad \underset{\uparrow}{18} \quad -7 \quad 4 \quad 2 \,].$$

e) Utsignalen beräknas genom en faltning *The output signal is calculated with a convolution*

$$y(n) = h(n) * x(n) = [\, 0 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad -2 \quad 4 \quad -6 \quad 7 \quad -4 \quad 2 \,].$$

Lösning 2 Sampeltakten ges av lösningen till följande ekvation
The sample rate is given by the solution to the following equiation

$$F_s(\frac{12}{F_s} \pm k\frac{1}{E}) = F$$

där F är den uppfattade frekvensen, E är antalet ekrar och k är ett heltal. Lösningarna blir (för $k = -1$)
where F *is the percieved frequency,* E *the number of spokes, and* k *is an integer. The solutions are (for* $k = -1$*)*

a)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 0 \quad => F_s = 5 \cdot 12 = 60$$

b)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 2 \quad => F_s = 5 \cdot (12 - 2) = 50$$

$2 = 12 - \frac{k}{5}F_s$ $\quad \frac{k}{5}F = 10$

$F_s = \frac{50}{k}$

2. Ett hjul med fem ekrar roterar med 12 varv/sekund motsols (+12 Hz). En videokamera med inställbar sampeltakt, F_s, mellan 50-80 bilder/sekund, spelar in hjulets rörelse. Bestäm den valbara sampeltakten, F_s, så att följande **uppfattade** rotationshastigheter erhålls:

5 spokes   15 Hz   60 Hz

A wheel with five spokes is rotating with 12 rotations/second (+12 Hz). A video camera with adjustable sample rate, F_s, between 50-80 pictures/second, records the wheel movement. Determine the adjustable sample rate so that the following ***observed*** *rotation speeds are achieved:*

sampling

a) Rotationshastigheten 0 varv/sekund. $F_s = 60$ p/s (0.1p)
Rotation speed 0 rotations/second.

b) Rotationshastigheten 2 varv/sekund motsols (+2 Hz). $F_s = 50$ p/s (0.2p)
Rotation speed 2 rotations/second counter clockwise (+2 Hz).

c) Rotationshastigheten 2 varv/sekund medsols (−2 Hz). $F_s = 70$ p/s (0.2p)
Rotation speed 2 rotations/second clockwise (−2 Hz).

$Y(z) = Y(z)\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}y(-1) + X(z)$ $X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$

3. Följande differensekvation är given
The following difference equation is given

$Y(z) = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

$y(n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u(n) + 3(\frac{1}{2})^n u(n) - 2(\frac{1}{3})^n u(n)$
$= \frac{7}{2}(\frac{1}{2})^n u(n) - 2(\frac{1}{3})^n u(n)$

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

z-transform

där insignalen är $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$ och begynnelsevärdet är $y(-1) = 1$. Bestäm utsignalen. (1.0)
where the input signal is $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$ and the initial condition is $y(-1) = 1$. Determine the output signal.

$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{3}{16}z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-\frac{3}{4})(z-\frac{1}{4})}$

4. Ett linjärt, tidsinvariant system beskrivs med differensekvationen
A linear, time-invariant system is described by the difference equation

$x_1(n)$ $X_1(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$ $Y_1(z) = \frac{z^3}{(z-\frac{3}{4})(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$

z-transform
+
response

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}y(n-2) = x(n)$$

$y_1(n) = \frac{9}{2}(\frac{3}{4})^n u(n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n u(n) - 4(\frac{1}{2})^n u(n)$

Bestäm utsignalen då
Determine the output signal when

$H(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega} + \frac{3}{16}e^{-2j\omega}}$ $H(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1 + j - \frac{3}{16}} = \frac{1}{\frac{13}{16} + j}$ $|H(\frac{\pi}{2})| = \frac{\frac{13}{16} - j}{1.66} = 0.776$

$\angle H = -50.9^\circ$

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) + sin(2\pi\frac{1}{4}n), \quad -\infty \le n \le \infty$$

$= \frac{}{2}$

$y_2(n) = 0.776 \sin(\frac{\pi}{2}n - 50.9^\circ)$ (1.0p)

$y(n) = \frac{9}{2}(\frac{3}{4})^n u(n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n u(n) - 4(\frac{1}{2})^n u(n) + 0.776 \sin(\frac{\pi}{2}n - 50.9^\circ)$

c)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = -2 \quad => F_s = 5 \cdot (12+2) = 70$$

Lösning 3 Problemet innehåller begynnelsevärden och då används Z^+-transformen. Insignalen är kausal, vilket innebär att Z^+-transformen = Z-transformen. Lösningen är
The problem contains initial values and then the Z^+-transform is used. The input signal is causal, which means that the Z^+-transformen = Z-transform. The solution is

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\,Y^+(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\,y(-1) + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\,z^{-1}Y^+(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)}$$

Partialbråksuppdelning ger
Partial fractions give

$$Y^+(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}+2}{2\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{7/2}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}} + \frac{-2}{1-\frac{1}{3}\,z^{-1}}$$

$$\stackrel{Z^{-1}}{\to}\ y(n) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Lösning 4 Z-transformera differensekvationen *Z transform the difference equiation*

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\,y(n-2) = x(n)$$

$$Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\,z^{-2}\right) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{3}{16}\,z^{-2}\right)}\,X(z)$$

Poler *Poles*

$$p_{1,2} = \begin{cases} 1/4 \\ 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\,z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}\,z^{-1}\right)}\,X(z)$$

Låt *Let*

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

där *where*

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
x_2(n) &= \sin\left(2\pi\frac{1}{4}\,n\right)
\end{aligned}
$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\,z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{3}{4}\,z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}}$$

Systemets förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen f=$\frac{1}{4}$ ges av
The system's gain and phase change at the frequency f=$\frac{1}{4}$ is given by

$$H\left(w = 2\pi\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1-e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + \frac{3}{16}\,e^{-j2\frac{\pi}{4}\,2}} = \frac{1}{\frac{13}{16}+j} = 0.776e^{-j0.888}$$

Inverstransformering ger
Inverse transformation gives

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n) + 0.776\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\,n - 0.888\right)$$

Lösning 5 Metoden heter overlap-and-add.
The method is called overlap-and-add.

Insignalen delas upp i block av längden $L = 4$. Filtret har längden $M = 4$. Den maximala längden av ett resulterande block är $N = L + M - 1 = 7$.
The input signal is partitioned into blocks of length $L = 4$. The filter has the length $M = 4$. The maximal length of a resulting block is $N = L + M - 1 = 7$.

Insignalen delas upp i tre block, som vart och ett faltas med filtret. Utsignalen ges av addition av resultaten av de enskilda faltningarna.
The input signal is partitioned into three blocks, and each of these are convoluted with the filter. The output signal is given by addition of the results of each convolution.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccc}
x_1 * h & = & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & & & & & & & & \\
x_2 * h & = & & & & & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & & & & \\
x_3 * h & = & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & \\
x * h & = & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

1 0 2 1

0
1 0
0 1 0
1 0 1 0
1 0 1
1 0
1

0
1
0
3
1
2
1

5. Vad kallas metoden som kan användas för att dela upp en lång eller oändlig insignal i kortare block av längden L, filtrera varje block separat med ett filter $h(n)$, och sedan rekonstruera den kompletta utsignalen? (0.1p)
What is the method called that can be used to separate a long or infinite signal into short blocks of length L, filter each block separately with a filter $h(n)$ and then reconstruct the complete output signal?

streaming convolution

$x_1(n) = \{1\ 0\ 1\ 1\}$ $x_2(n) = \{1\ 0\ 1\ 0\}$ $x_3(n) = \{0\ 1\ 0\ 1\}$

En insignal ges av
An input signal is given by

21 15

$$x(n) = \{\ 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\ \} \tag{1}$$

Ett filter ges av
A filter is given by

1 0 3 2 2 3 1
1 0 3 1 2 1 0
0 1 0 3 1 2 1

$$h(n) = \{\ 1\quad 0\quad 2\quad 1\ \} \tag{2}$$

1 0 3 2 3 3 4 1 2 2 0 3 1 2 1

Dela upp insignalen i block av längden fyra. Vad är den maximala längden av de resulterande utsignalsblocken om man filtrerar med det givna filtret? (0.1p)
Partition the input signal in blocks of length four. What is the maximal length of the resulting output blocks when using the filter given above?

Använd metoden för att blockfiltrera insignalen (med blocklängd 4) och rekonstruera utsignalen $y(n) = x(n) * h(n)$. (0.8p)
Use the method to block filter the input (with block length 4) and reconstruct the output $y(n) = x(n) * h(n)$.

6. Att tidsfördröja en signal motsvaras av att multiplicera Z-transformen med z^{-1}. Bevisa att om $y(n) = x(n-1)$ så är $Y(z) = z^{-1}X(z)$. (1.0p)
Time delaying a signal corresponds to multiplying the Z transform with z^{-1}. Show that if $y(n) = x(n-1)$, then $Y(z) = z^{-1}X(z)$.

z-transform

$y(n) = x(n-1)$

Lycka Till! *Good Luck!*

$Z[x(n-1)]$

Lösning 6 Använd definitionen av Z-transformen. Sätt in $x(n-1)$, multiplicera med $z^{-1}z^{1}(=1)$, bryt ut z^{-1}, byt variabel $m = n-1$ och identifiera Z-transformen av $X(z)$.
Use the definition of the Z transform. Put in $x(n-1)$ and multiply with $z^{-1}z^{1}(=1)$, break out z^{-1}, substitute the variable $m = n-1$ and identify the Z transform of $X(z)$.

$$
\begin{aligned}
y(n) = x(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) &= \sum_n y(n) z^{-n} && (3)\\
&= \sum_n x(n-1) z^{-n} && (4)\\
&= z^{-1} \sum_n x(n-1) z^{-(n-1)} && (5)\\
&= z^{-1} \sum_m x(m) z^{-m} && (6)\\
&= z^{-1} X(z) && (7)
\end{aligned}
$$