数字信号处理　第六周作业

范云潜 18373486

微电子学院 184111 班

日期：2020 年 10 月 17 日

作业内容：2.32, 2.33, 2.42, 3.40, 3.41, 5.1, 5.4, 5.12;

Problem 2.32

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \cos\frac{\pi}{2}n = \frac{1}{2}(e^{j\frac{n\pi}{2}} + e^{-j\frac{n\pi}{2}}) \\
H(e^{j\frac{\pi}{2}}) &= e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{1+e^{-j\pi}+4e^{-2j\pi}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = e^{-j\frac{\pi}{4}}8 \\
H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) &= e^{j\frac{3\pi}{4}}\frac{1+e^{j\pi}+4e^{2j\pi}}{1+\frac{1}{2}e^{j\pi}} = -e^{-j\frac{\pi}{4}}8 \\
y[n] &= 4(e^{j\frac{\pi}{2}n-j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{2}n-j\frac{\pi}{4}})
\end{aligned}
$$

Problem 2.33

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \cos(\frac{3\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{j(\frac{3\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{3\pi n}{2}+\frac{\pi}{4})})
\end{aligned}
$$

幅度响应恒为 1，仅考虑相位响应：

$$
\arg H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{2\pi}{3} = -\arg H(e^{-j\frac{3\pi}{2}})
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2}(e^{j(\frac{3\pi}{2}n+\frac{11}{12}n)} + e^{-j(\frac{3\pi n}{2}+\frac{11\pi}{12})}) \\
&= \cos(\frac{3\pi n}{2} + \frac{11\pi}{12})
\end{aligned}
$$

Problem 2.42

SubProblem a

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] \otimes (h_2[n] + h_1[n] \otimes h_2[n]) \\
h[n] &= h_2[n] + h_1[n] \otimes h_2[n] \\
&= \alpha^n u[n] + \beta\alpha^{n-1}u[n-1]
\end{aligned}
$$

SubProblem b

转换到变换域：

$$
\begin{aligned}
H(z) &= H_1(z)H_2(z) + H_2(z) \\
H_1(z) &= \beta\frac{1}{z} \\
H_2(z) &= \frac{z}{z-\alpha} \\
\therefore\ H(z) &= \frac{z+\beta}{z-\alpha}
\end{aligned}
$$

SubProblem c

展开得到：

$$
(1-\alpha/z)Y(z) = (1+\beta/z)X(z)
$$

进行逆变换

$$
y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] + \beta x[n-1]
$$

SubProblem d

因果；在 $|\alpha| < 1$ 时稳定，此时极点在单位圆内。

Problem 3.40

SubProblem a

变换域:

$$H(z)(X(z)-W(z))+E(z)=W(z)$$

$$W(z)=X(z)\frac{H(z)}{1+H(z)}+E(z)\frac{1}{1+H(z)}$$

SubProblem b

$$H_1(z)=\frac{1/(z-1)}{1+1/(z-1)}=\frac{1}{z}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1+1/(z-1)}=\frac{z-1}{z}$$

SubProblem c

由于是因果系统，z 向外扩展。$H(z)$ 在单位圆上存在极点，因此不稳定；$H_1(z), H_2(z)$ 极点在单位圆内部，因此稳定。

Problem 3.41

SubProblem a

稳定，$r_{min}<1<r_{max}$

SubProblem b

$v[n]=a^{-n}x[n], w[n]=y[n]a^{-n}$

变换域:

$V(z)=X(az), W(z)=Y(az)$

$\therefore\ G(az)=H(z), G(z)=H(z/a)$

$\therefore\ g[n]=a^n h[n]$

SubProblem c

收敛域带入：$0<r_{min}<|z/a|<r_{max}<\infty$，即：$0<|ar_{min}|<|z|<|ar_{max}|<\infty$。

Problem 5.1

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{10}e^{-j\omega n}=\frac{\sin(11\omega/2)}{\omega/2}e^{-5\omega}$$

对于 $X(e^{j\omega})$ 的每一频率取值，都有 $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})$，由于 ω 在此区间连续，因此需要满足 $y[n]=x[n]$ 且截止频率覆盖整个频段，$\omega_c=\pi$。

Problem 5.4

SubProblem a

$$\begin{aligned}
X(z)&=\frac{z}{z-1/2}-\frac{z}{z-2}, 1/2<|z|<2\\
Y(z)&=6\frac{z}{z-1/2}, |z|>\frac{3}{4}\\
H(z)&=\frac{Y(z)}{X(z)}\\
&=\frac{z-2}{z-3/4}, |z|>\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

零极点如 **图 1**

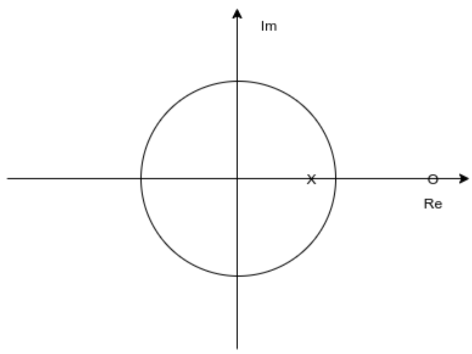

图 1: 零极点图

SubProblem b

$H(z)=\frac{z}{z-3/4}-\frac{2}{z}\frac{z}{z-3/4}$

$h[n]=(\frac{3}{4})^n u[n]-2(\frac{3}{4})^{n-1}u[n-1]$

SubProblem c

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-2/z}{1-3/(4z)}$$

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]=x[n]-2x[n-1]$$

Problem 5.12

SubProblem a

极点：$z=\pm 0.9j$ 在单位圆内，因此稳定。

SubProblem b

单位圆外的因子：$z=\pm 3$，那么

$$H_{ap}=\frac{1-9z^{-2}}{1-z^{-2}/9}$$

$$H_1(z)=\frac{1+0.2z^{-1}}{1+0.8z^{-2}}(1-\frac{1}{9}z^{-2})$$