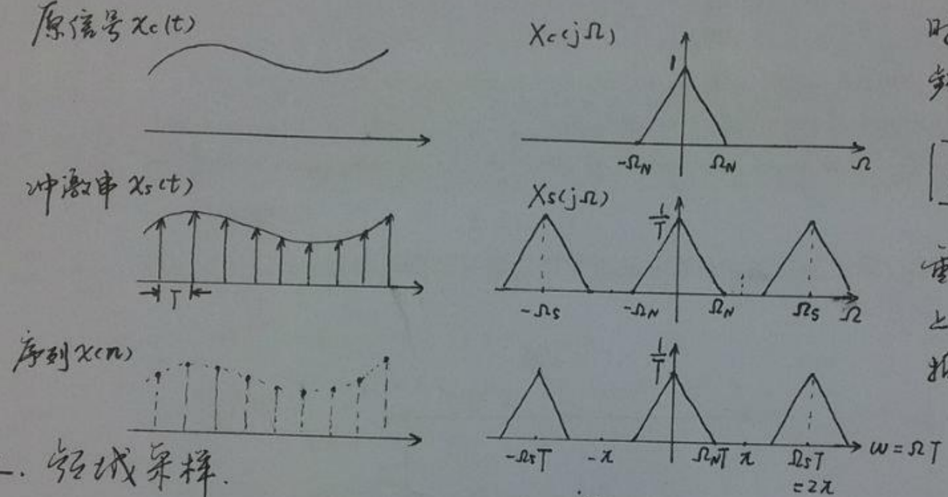
DSP 复习攻略

110226班 辛晨 著

前言

DSP是一门连贯性很强的学科。我坚信，要学好这门学科，形成一个完整的知识体系是十分重要的。经过认真的思考和总结，我终于完成了这篇复习攻略。希望大家看完之后，不但能记住公式，会做题，还能对这门课程有更全面的了解。

一、时域采样



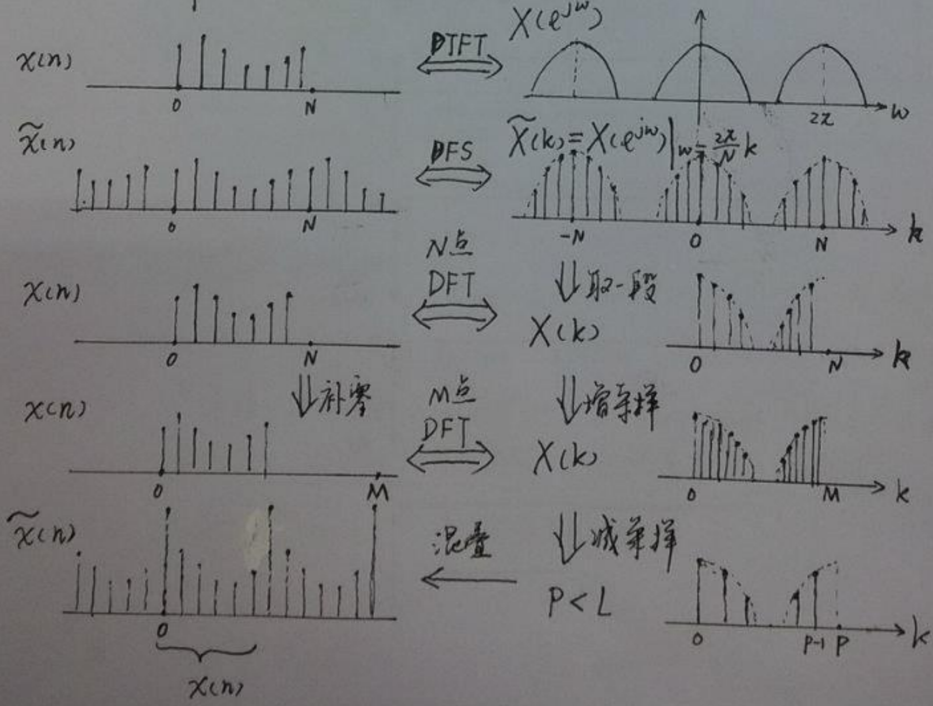
时域采样，频域周期延拓。

$$\boxed{\omega=\Omega T}$$

重构系统需在频谱上有T倍的增益以抵消$\frac{1}{T}$的作用。

$\Omega_N T>\pi$，则会混叠

二、频域采样



频域采样，时域周期延拓。

采样间隔：$\omega=\frac{2\pi}{N}$

相对于连续时间信号，$\omega=\Omega T \Rightarrow \boxed{\Omega=\frac{2\pi}{NT}}$ 为连续信号DFT分析的样本间隔。

DFT 实现线性卷积：N_1 点序列 $x_1(n)$，N_2 点序列 $x_2(n)$，线性卷积最大长度：N_1+N_2-1.

若 $x_3(n) = x_1(n) \circledN x_2(n)$，则 $\tilde{x}_3(n)$ 是 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 线性卷积的 N 点周期延拓（理解！）

只要 $N \geq N_1+N_2-1$，则 $x_3(n)$ 就是 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的线性卷积.

三. 各变换性质总结

Z变换	DTFT	连续时间傅立叶变换	DFS	DFT
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$	$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	$\tilde{x}(n) \leftrightarrow \tilde{X}(k)$. N点	$x(n) \leftrightarrow X(k)$. N点
$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*)$	$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$		$\tilde{x}^*(n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(-k)$	$x^*(n) \leftrightarrow X^*[((-k))_N]$
$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(\frac{1}{z^*})$	$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$ $x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$		$\tilde{x}^*(-n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(k)$	$x^*[((-n))_N] \leftrightarrow X^*(k)$
$x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$	$x(n-n_0) \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$	$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$	$\tilde{x}(n-m) \leftrightarrow W_N^{km}\tilde{X}(k)$	$x[((n-m))_N] \leftrightarrow W_N^{km}X(k)$
$z_0^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{z_0})$	$e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	$e^{j\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X[j(\Omega-\Omega_0)]$	$W_N^{-ln}\tilde{x}(n) \leftrightarrow \tilde{X}(k-l)$	$W_N^{-ln}x(n) \leftrightarrow X[((k-l))_N]$
$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$	$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$	$tx(t) \leftrightarrow j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$		
$\delta(n) \leftrightarrow 1$	$\delta(n) \leftrightarrow 1$	$\delta(t) \leftrightarrow 1$		
$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$			
	$1 \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$	$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$		
	$\frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \leftrightarrow \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$	$\frac{\sin\Omega_c t}{\pi t} \leftrightarrow \begin{cases} 1, & \lvert\Omega\rvert \leq \Omega_c \\ 0, & \lvert\Omega\rvert > \Omega_c \end{cases}$		
	$\begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{T}{2}}$		
	$x_1(n)$, $x_2(n)$ 线性卷积 $\leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$	$x_3(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ $\leftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega) \cdot X_2(j\Omega)$	$\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ 周期卷积 $\leftrightarrow \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$	$x_1(n)$, $x_2(n)$ 循环卷积 $\leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$
	$x_1(n) \cdot x_2(n)$ $\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ 周期卷积	$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ $\leftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$	$\tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$ $\leftrightarrow \frac{1}{N}(\tilde{X}_1(k), \tilde{X}_2(k)$ 周期卷积$)$	$x_1(n) \cdot x_2(n)$ $\leftrightarrow \frac{1}{N}(X_1(k), X_2(k)$ 循环卷积$)$
		$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$	$\tilde{X}(n) \leftrightarrow N\tilde{x}(-k)$	$X(n) \leftrightarrow Nx[((-k))_N]$
	变换一端的共轭对称分量对应另一端的实部，共轭反对称分量对应另一端的虚部×j。对实函数或实序列，有：实偶虚奇.			

注：① DTFT 定义：$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

② 帕塞瓦尔定理：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

③ DFS 定义：$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn}$

$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn}$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 可将 $\frac{2\pi k}{N}$ 作为整体的看.

四. 离散 LTI 系统分析与设计.

1. 系统函数:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\,\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}\quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{零点}\ c_k,\ \text{极点}\ 0.\\ \leftarrow \text{极点}\ d_k,\ \text{零点}\ 0.\end{array}$$

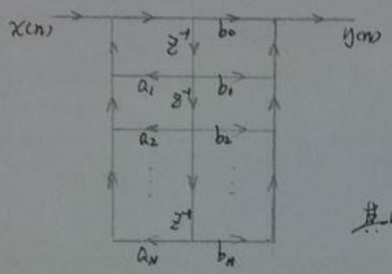
2. 因果: ROC位于外侧. 稳定: ROC包含单位圆.

逆系统存在条件: $H(z)$, $\frac{1}{H(z)}$ 收敛域重合.

若稳定因果系统逆系统稳定因果, 则为最小相位系统.

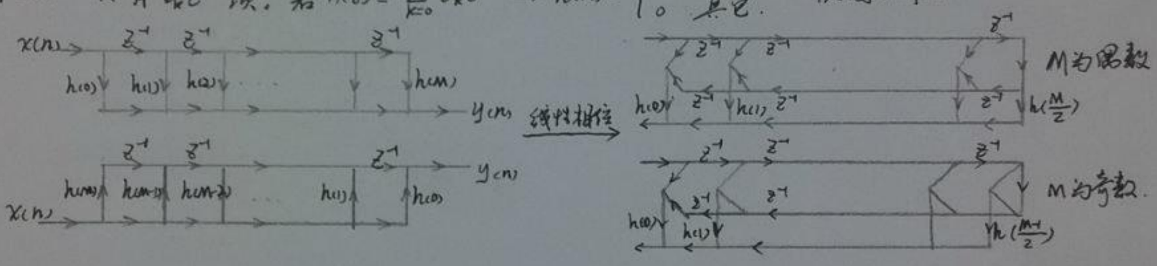
3. 分类:

① IIR: 有 $\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$ 项。若 $H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$, 流图如下.

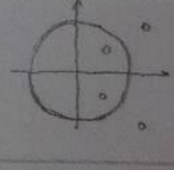


其它流图一般以其为基本单元.

② FIR: 只有 $b_k z^{-k}$ 项. 若 $H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \rightarrow h(n)=\begin{cases} b_n & 0\le n\le M \\ 0 & 其它 \end{cases}$ 流图如下.



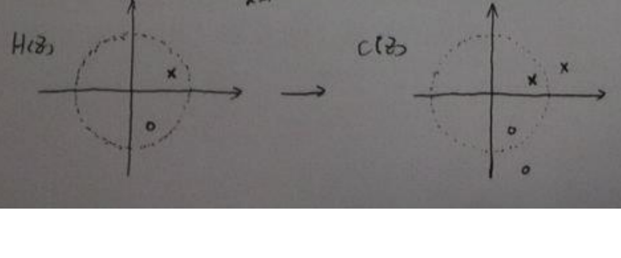
I 类	M: 偶数	偶对称	$\beta=0$ 或 π $(\varphi=\beta-\omega\alpha)$		群延迟 $\frac{M}{2}$;
II 类	M: 奇数	偶对称	$\beta=0$ 或 π	必有零点 $z=-1$. $\omega=\pi$ 时 $H(e^{j\omega})=0$	零点必成对出现, 如:
III 类	M: 偶数	奇对称	$\beta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$	必有零点 $z=-1$. $\omega=\pi$ 时 $H(e^{j\omega})=0$	
IV 类	M: 奇数	奇对称	$\beta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$		



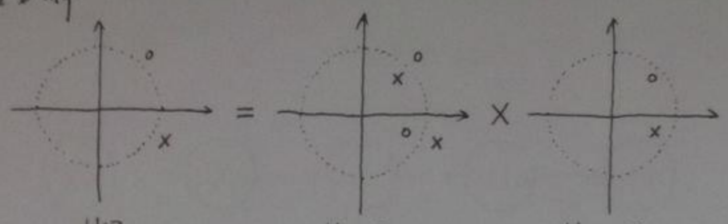
4. 幅度平方函数

$$|H(e^{j\omega})|^2=H(z)H^*(\tfrac{1}{z^*})\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$C(z)=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z)}$$ 零极点以共轭倒数对形式出现



5. 全通分解



$H(z) = H_{ap}(z) \times H_{min}(z)$

$H_{ap}(z)$ ⇓ $\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$，零极点满足 $a\cdot b^*=1$，幅度为1，群延迟为正

$H_{min}(z)$ ⇓ $H_{min}(z)$ 如果不加 $H_{ap}(z)$ 的相位，⇒ 则相位滞后最小，故称最小相位滞后。

分解过程：① 找出零极点 $|z|>1$ 中的项。

② 使分母中的这些项 z^{-1} 系数为1。

③ 按 $\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$ 对这些项进行配全。

④ 分离。

注：$\frac{1}{z^{-1}}$，z^{-1} 不包含于 $H_{min}(z)$ 中。

6. 滤波器设计

(1) IIR. ① 脉冲响应不变法 $\boxed{\omega=\Omega T}$

离散　　连续

$H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T})$　$|\omega|\le\pi$

$h(n) = Th_c(nT)$

设 $H_c(s)=\frac{A_k}{s-s_k}$

$\Rightarrow H(z)=\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$

② 双线性变换法 $\boxed{\Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})}$

$s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$

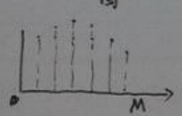
注：巴特沃思滤波器 $|H_c(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$

(2). FIR.

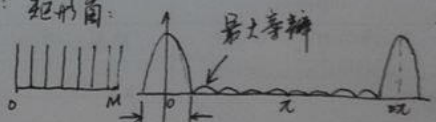
$\boxed{\text{引入}}$：IIR设计的困难 → 用FIR逼近IIR → 截取 $h_d(n)$ 的一段

$h(n) = h_d(n)\cdot w(n)$ → 窗的特性影响逼近效果

$h_d(n)$：所需脉冲响应　$w(n)$：窗



例：矩形窗：



频谱零点为 $\frac{2\pi}{M+1}k$ $(k\neq 0)$

主瓣宽度：$\frac{4\pi}{M+1}$

⇓ 对应于 $h(n)$ 频谱。

← 肩峰：位于 $\omega_c\pm\frac{2\pi}{M+1}$

过渡带宽度 = 主瓣宽度

肩峰振荡幅度取决于旁瓣相对幅度

结论 ⇒

> 主瓣尽量窄，旁瓣相对幅度尽量小

用于DFT分析 ⇐

> 分辨率取决于主瓣宽度，频谱泄漏程度取决于旁瓣相对幅度。
> 注意：补零无法提高分辨率。

五. 快速算法: FFT.

1. 基本原理: 对称性: $(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk}$

周期性: $W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$

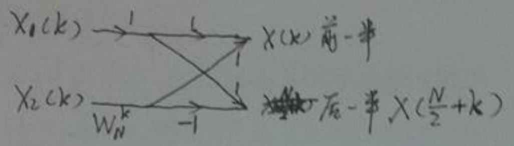
$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$, $W_N^k = W_{\frac{N}{k}}$

2. 按时间抽取:

① 一步蝶形运算:

$$X(k)=\begin{cases}X_1(k)+W_N^kX_2(k) & \text{前一半}\\ X_1(k)-W_N^kX_2(k) & \text{后一半}\end{cases}$$

其中, $x_1(n)$ 为偶数序列, $x_2(n)$ 为奇数序列.



运算量: 复乘: $\frac{N^2}{2}$, 复加: $\frac{N^2}{2}$

较之N点DFT减少一半.

$$\begin{pmatrix}X_m(k)\\X_m(j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & W_N^r\\1 & -W_N^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{m-1}(k)\\X_{m-1}(j)\end{pmatrix}$$

② 全过程: 流图略.

1). 蝶形级数: $L=\log_2 N$.

2). 运算量: 复乘: $\frac{N}{2}\log_2 N$. 复加: $N\log_2 N$.

3) 倒位序: $3 \to 011 \to 110 \to 6$. 输入倒位序.

4). 运算两节点距离: 2^{m-1}. m表示级数.

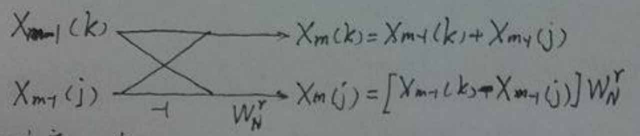
W_N^r 中的 r: 每级相邻两个r相差 2^{L-m} (L: 蝶形总级数).

5). 存储: 用同一存储器, 同址计算.

存序列: N个单元. 存系数 W_N^r: $\frac{N}{2}$个单元. 共 $\frac{3}{2}N$个存储单元.

3. 按频率抽取: 流图略.

① 一步蝶形运算:



运算量与上面相同.

$$\begin{pmatrix}X_m(k)\\X_m(j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\W_N^r & -W_N^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{m-1}(k)\\X_{m-1}(j)\end{pmatrix}$$

矩阵与上式互为转置.

② 倒位序: 输出

③ 两节点距离: 2^{L-m}.

④ W_N^r 中的 r: 每级相邻两个r相差 2^{m-1}.

⑤ 同为原位运算.

4. IFFT 实现:

① 改程序: W_N^{+nk} 替换为 W_N^{-nk}. 乘 $\frac{1}{N}$.

② 不改程序: $X(k) \to X^*(k) \to DFT[X^*(k)] \to \{DFT[X^*(k)]\}^* \cdot \frac{1}{N}$.