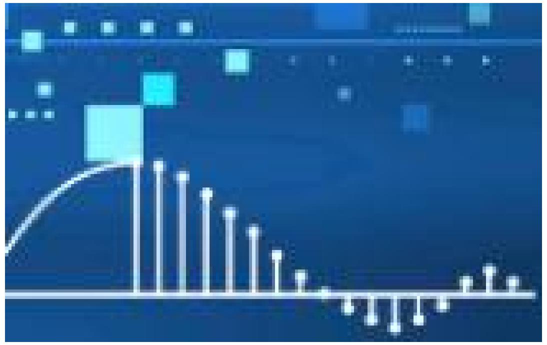
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 五 章

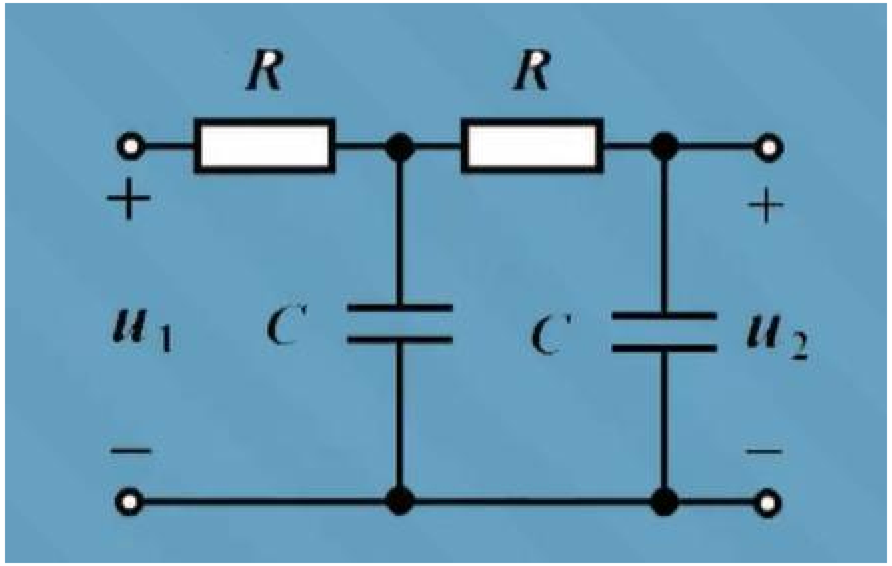
Contents

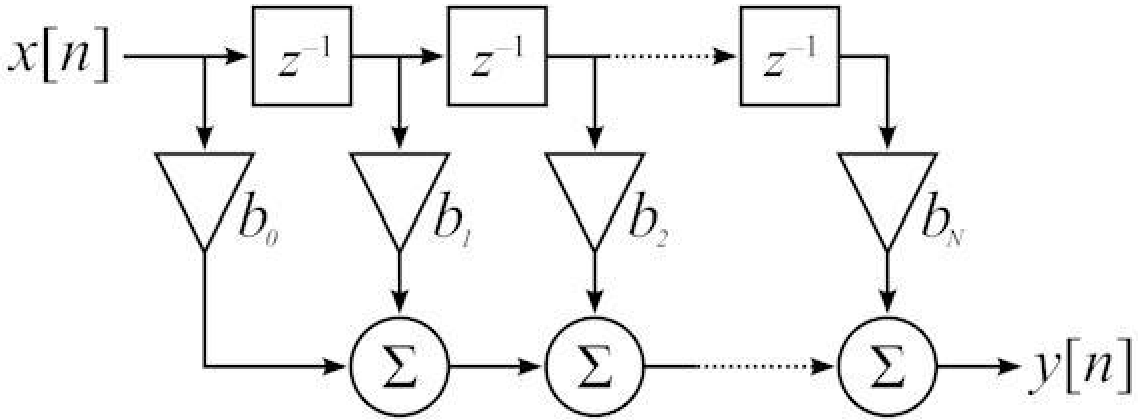
数字滤波器设计与实现

滤 波 器 设 计 基 础

- 滤波器设计基础
- IIR滤波器设计
- FIR滤波器设计

◆滤波器定义
◆滤波器分类
◆性能指标
◆设计方法
◆滤波器实现结构





5.1 滤波器设计基础

- 滤波器定义：
  - 线性时不变系统的时域卷积和特性导致系统在频域上对输入信号的滤波特性

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - 滤波主要是指幅度特性的改变
- 滤波器作用：
  - 增强某一频段信号，衰减另一频段
  - 有用信号提取，噪声及干扰的滤除等

- 滤波器分类
- 频段内幅度特性
  - 低、高通滤波器
  - 带通、阻滤波器
- 冲激响应时限特性
  - “无限长冲激响应系统”，**IIR系统**；
  - “有限长单位冲激响应系统”，**FIR系统**

滤波器设计步骤

- 1、按照任务要求，确定滤波器的性能指标
- 2、用一个因果稳定的离散线性时不变系统按照某一准则去逼近所要得到的性能指标
  - 可以选用**IIR**滤波器→ **IIR**滤波器设计
  - 也可选用**FIR**滤波器→**FIR**滤波器设计
- 3、利用有限精度，选择合适的系统结构来实现
  - 软件实现
  - 硬件实现

滤波器性能指标

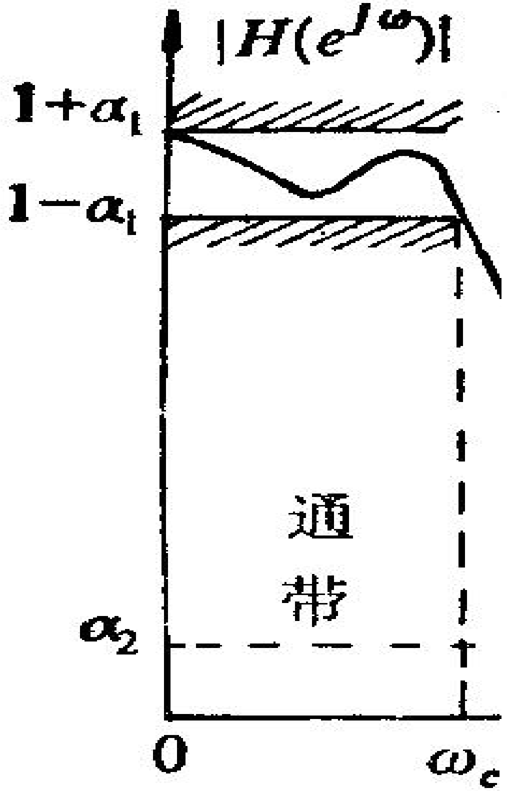
- 滤波器设计是按照某一准则去逼近想要实现的系统，要求对系统进行一定的描述和要求，就是滤波器的性能指标。
  - 滤波器性能要求，主要以频率响应的幅度特性的容差来表征。
  - 增益和衰减是滤波器的重要性能参数，其定义如下：

增益： $$G = 20\lg\left|H(e^{jw})\right|$$

衰减： $$D = -G = -20\lg\left|H(e^{jw})\right|$$

通带指标

- 在通带中，滤波器的幅度响应以误差 $\pm\alpha_1$ 逼近1，这部分误差称为通带容限，或者表示为通带波纹 R_P 、通带最大衰减 δ_1



$$1-\alpha_1 \le \left|H(e^{jw})\right| \le 1+\alpha_1$$

$$R_P = -20\lg\left(\frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1}\right)$$

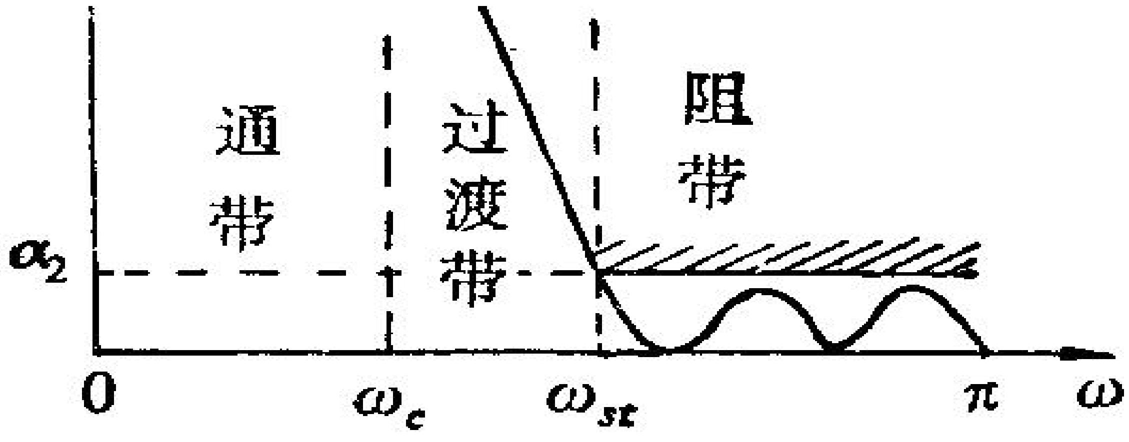
$$\delta_1 = \underbrace{20\lg\left|\frac{1}{H(e^{j\omega_c})}\right| = -20\lg(1-\alpha_1)}_{归一化滤波器} = \underbrace{20\lg\left|\frac{H_{\max}(e^{jw})}{H(e^{j\omega_c})}\right|}_{一般情况}$$

阻带指标

- 同理，在阻带中，滤波器的幅度响应应以误差α_2逼近0，这部分容差称为阻带容限，或者表示为阻带波纹δ_2、阻带最小衰减A_s:

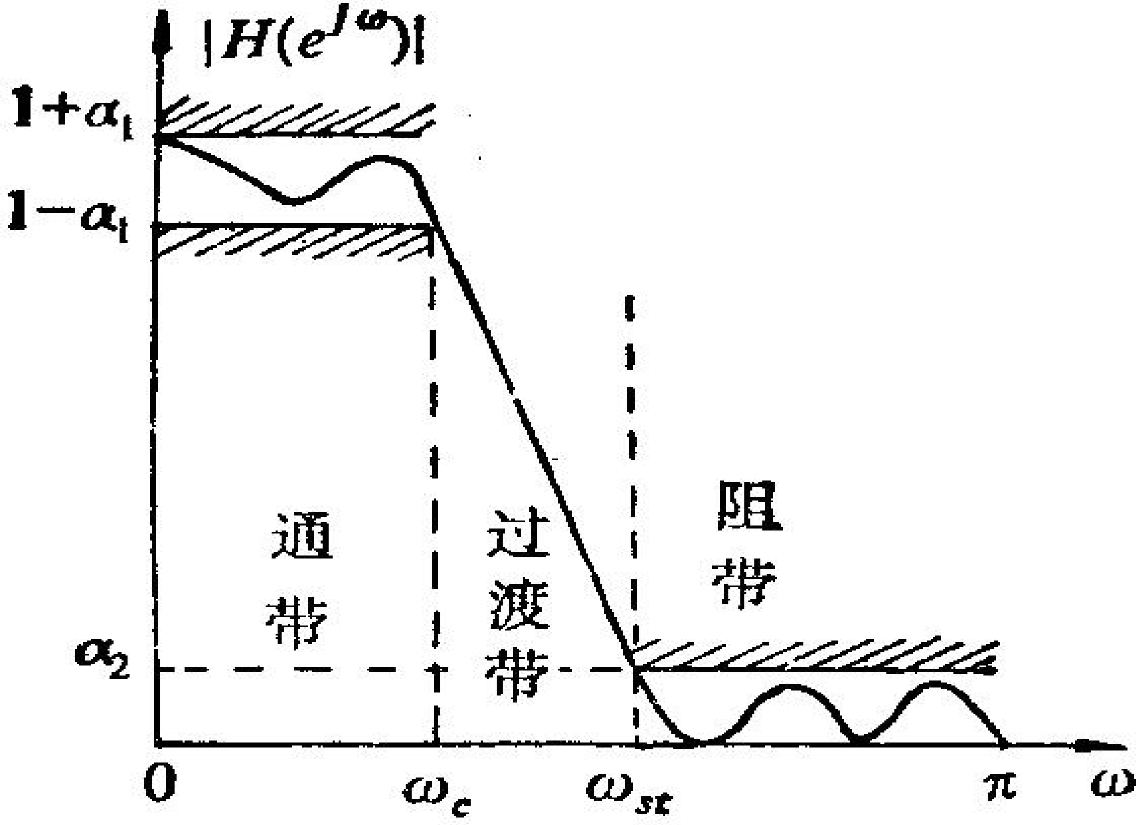
$$0 \le \left|H(e^{jw})\right| \le \alpha_2$$

$$\delta_2 = A_s = -20\lg(\alpha_2)$$



注意

- 通带截止频率在低通情况下为一数值，而在带通情况下为一向量。
- 通常对过渡带的宽度有所要求，而对过渡带内的特性不做要求。
- 数字指标和模拟指标的对应关系



$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

离散时间系统结构

- **有理LTI系统函数：**

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

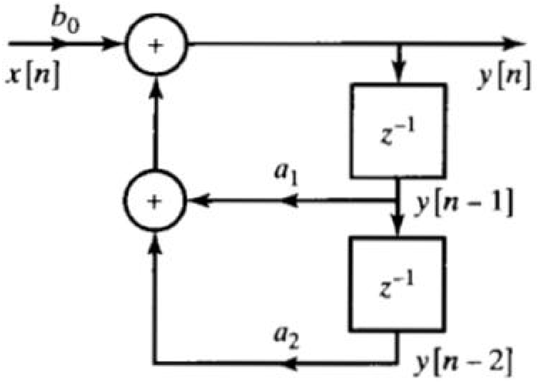
$$y(n)=\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

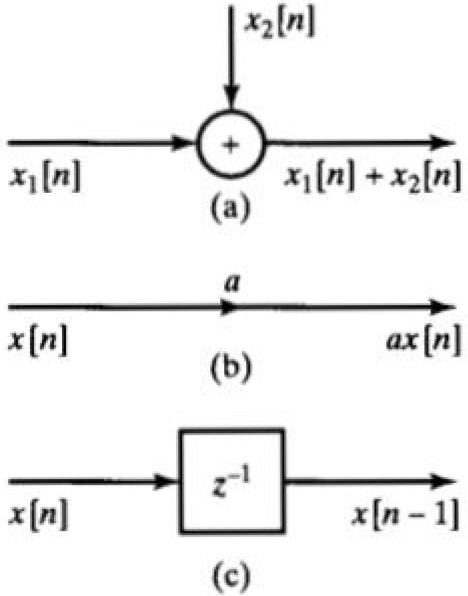
$$Y(z)=\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k} Y(z)+\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

- 研究系统结构的出发点：
  - 同一个离散时间系统，可以用不同结构来实现
  - 不同运算结构，存贮单元和乘法次数不同，即实现的复杂性和运算速度不同
  - 不同运算结构性能及工程适用性不同

系统构成及表示

- 基本运算：单位延时，比例乘， 相加

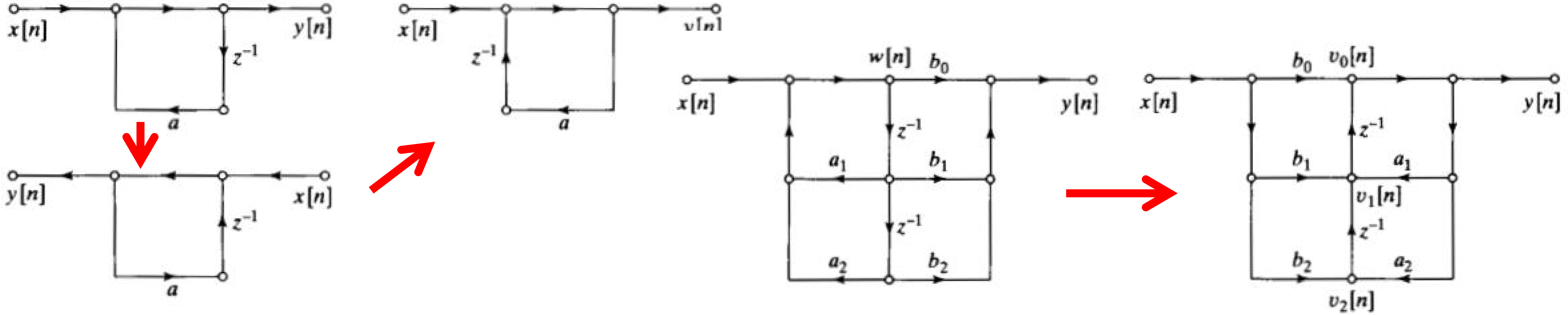




$$H(z)=\frac{b_0}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}.$$

$$y[n]=a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+b_0x[n].$$

- 转置定理：输入输出及支路方向逆转



FIR及IIR系统

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- **FIR：** $H(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$　　$h(n)=b_n \ (n=0, M)$
  - 在有限**Z**平面内没有极点，只有零点
  - 系统的单位冲激响应将是有限长序列
  - 系统结构无反馈环节 → 前馈
  - 也称为全零点或滑动平均系统（**MA**系统）。
- **IIR：** $a_k \neq 0$　　$y(n)=\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$
  - 在有限**Z**平面内有极点
  - 单位冲激响应为无限长序列
  - 系统结构存在反馈环节，需要递归运算；

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

  - 分子只有常数项 b_0，此时有限**Z**平面内只有极点，称为全极点或自回归系统（**AR**系统），否则称之为自回归滑动平均系统（**ARMA**系统）

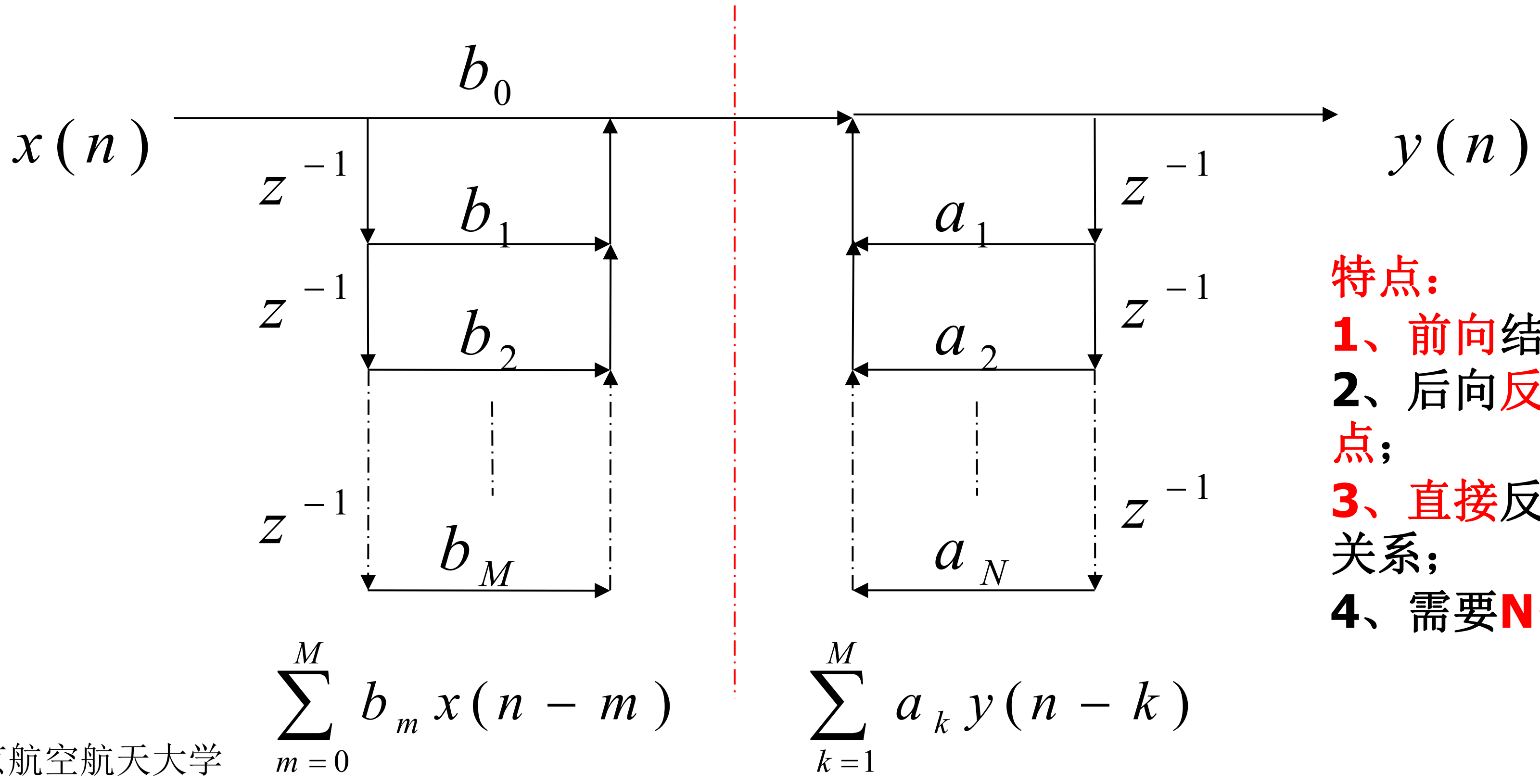
4.2.2 IIR滤波器的基本结构

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- **IIR滤波器主要特点是：**
- 1）$h(n)$为无限长序列；
- 2）$H(z)$在有限Z平面上存在极点；
- 3）实现结构上存在反馈环节，必须采用递归型结构实现。
- **IIR滤波器的结构主要有：**
  - 直接I型、II型、级联型、并联型四种

一、直接I型

- 系统差分方程： $y(n)=\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$
- 容易直接得到：



特点：

1、前向结构实现系统函数的零点；

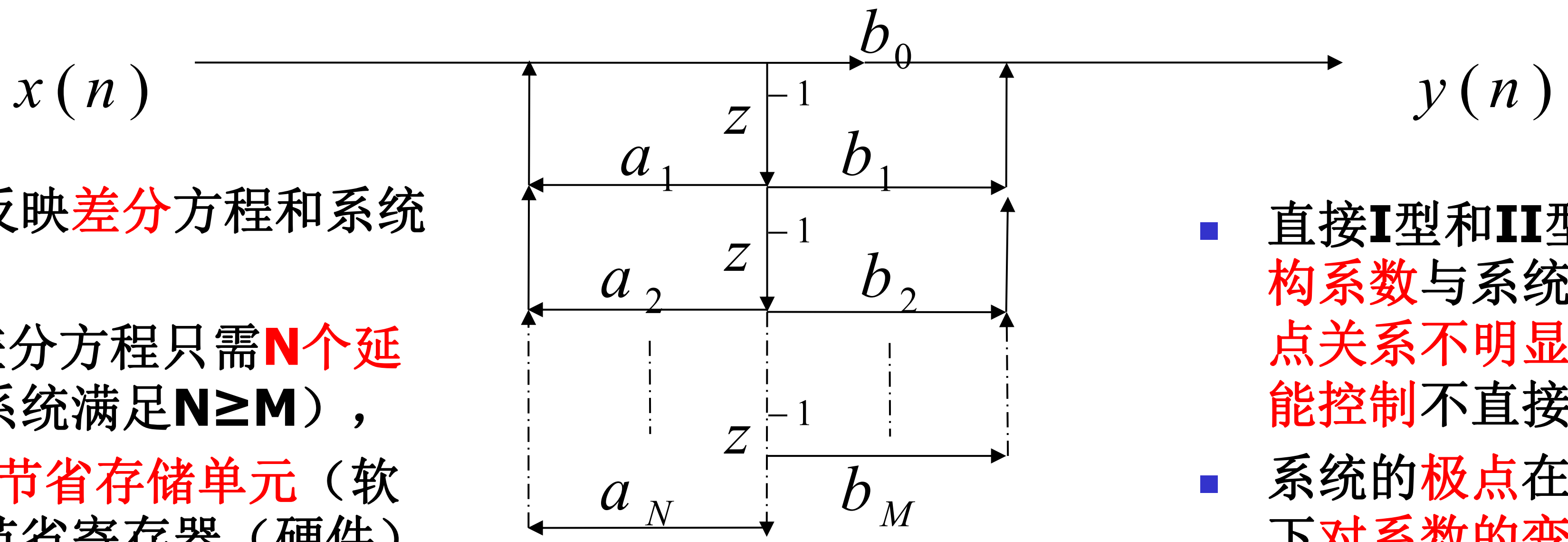
2、后向反馈网络，实现系统的极点；

3、直接反映差分方程和系统参数关系；

4、需要N＋M级延时。

二、 直接II型

- 交换其级联子系统的次序，系统函数不变。合并相同延时支路，称为直接II型结构或典范型结构。



- 仍能直接反映差分方程和系统参数关系；
- 对于N阶差分方程只需N个延时单元（系统满足N≥M），
- 比直接I型节省存储单元（软件），或节省寄存器（硬件）
- 实现N阶滤波器所需的最少延时单元结构，因而又称典范型。

- 直接I型和II型共同缺点是结构系数与系统函数的零、极点关系不明显，对滤波器性能控制不直接。
- 系统的极点在某些临界条件下对系数的变化过于灵敏，从而使系统频率响应对系数的变化过于灵敏，对有限精度（有限字长）运算容易出现不稳定或较大误差。

三、级联型

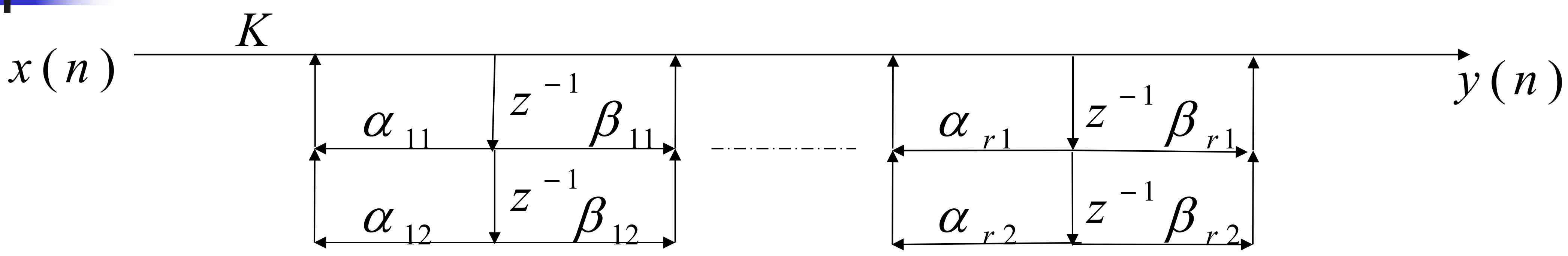
- 系统函数按进行因式分解后得到：

$$H(z)=K\prod_{k}^{r}\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

- 写成二阶系统级联的原因?
  - 二阶系统在某些系数为零时可以表示一阶系统，也可以表示由两个实数所表示的一级系统级联成的二阶系统；
  - 可用用实系统简化实现两个共轭复数极点的系统；
  - 在集成或多路复用时，采用相同形式的子网络结构就更有意义。

级联型

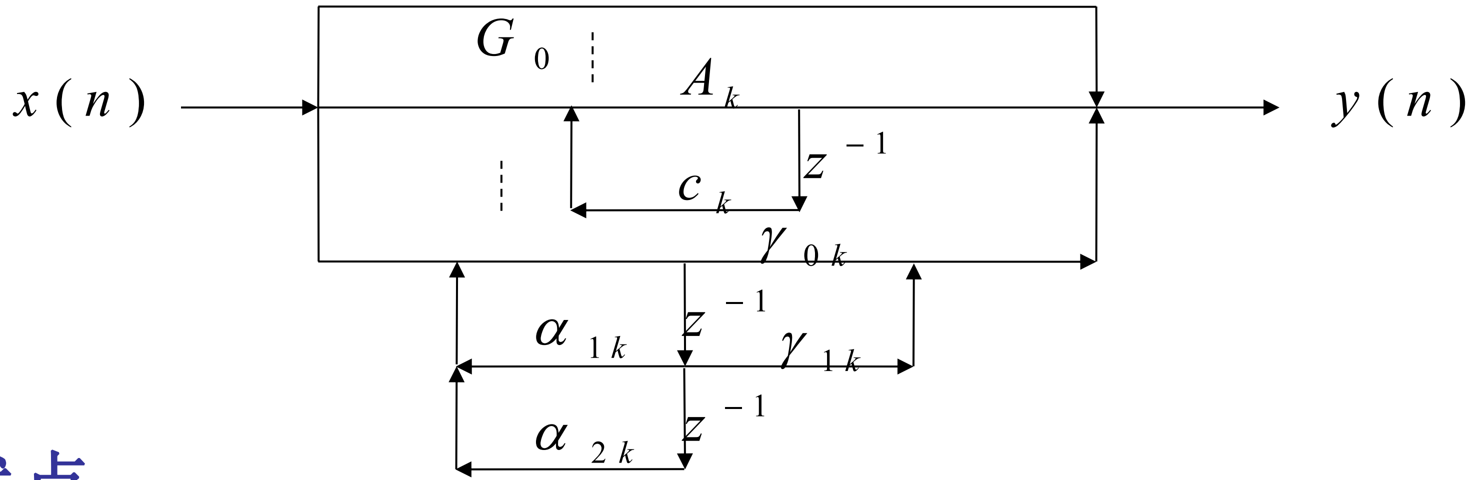
- 由多个二阶环节串联而成；
- 每个二阶基本节都用典范型结构实现



- 优点：
  - 便于准确实现滤波器零、极点，调整滤波器频率响应性能
  - 与直接**II**型相同具有最少的存储单元。
- 缺点：
  - 由于信号是依次通过级联的各个环节，只要一个环节出现了问题，便会影响整个系统的稳定性。

四、并联型

$$H(z)=G_0+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$



- 优点：
  - 可以单独调整并联子系统的一对极点
  - 各子系统间信号无交叉，利于系统的稳定性。
- 缺点：
  - 不能像级联型那样单独调整零点的位置，在要求准确的传输零点的场合下，宜采用级联型结构。

4.2.3 FIR滤波器的基本结构

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

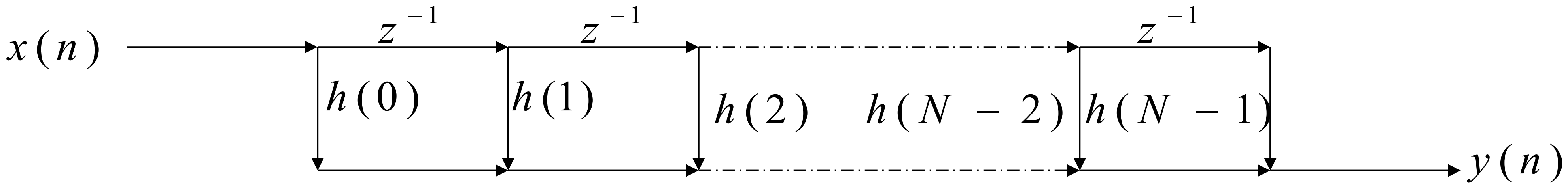
- FIR滤波器主要有如下特点：
  - 1）单位冲激响应h(n)在有限个n值处不为零；
  - 2）系统函数在有限Z平面处处收敛，全部极点都在z=0处（因果系统）；
  - 3）主要是非递归结构，没有输出到输入的反馈
    - 有些结构中（例如频率抽样结构）也包含有反馈部分。
- FIR滤波器的实现结构主要有：
  - 横截型、级联型、频率抽样型、线性相位型

一、直接型（卷积型、横截型）

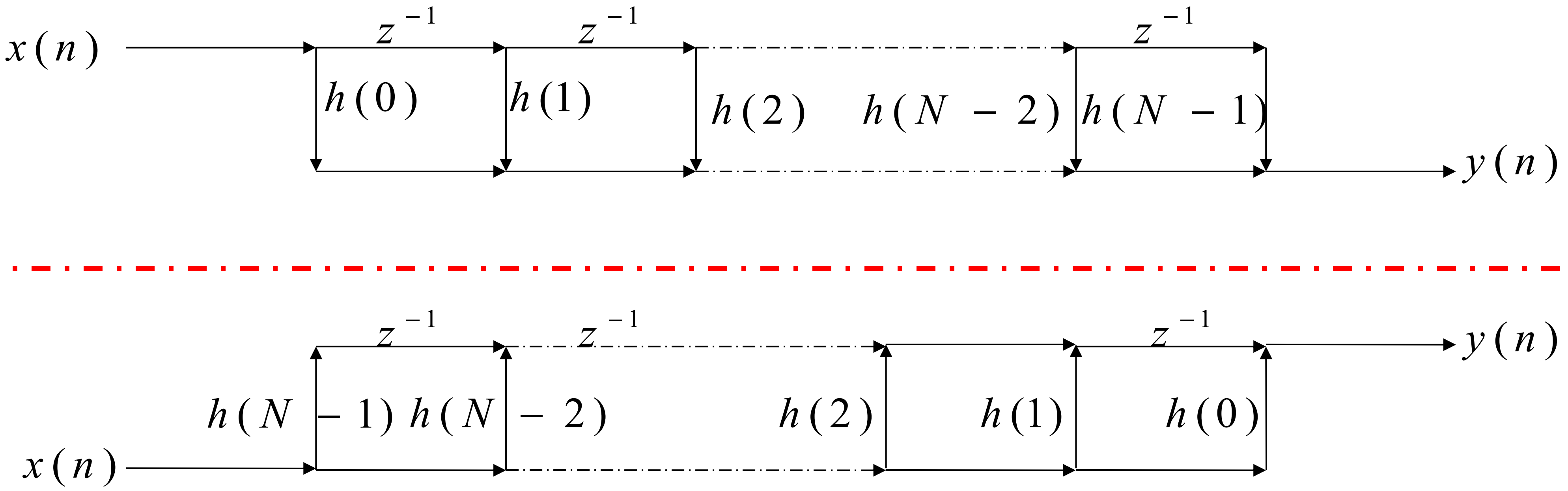
- 由系统函数可得差分方程表达式为：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)h(m) = x(n) * h(n)$$

- 上式实际是线性移不变系统的卷积和公式，也是$x(n)$延时的横向结构,称为横截型结构或卷积型结构，也可称为直接型结构。



应用转置定理可得到转置直接型结构



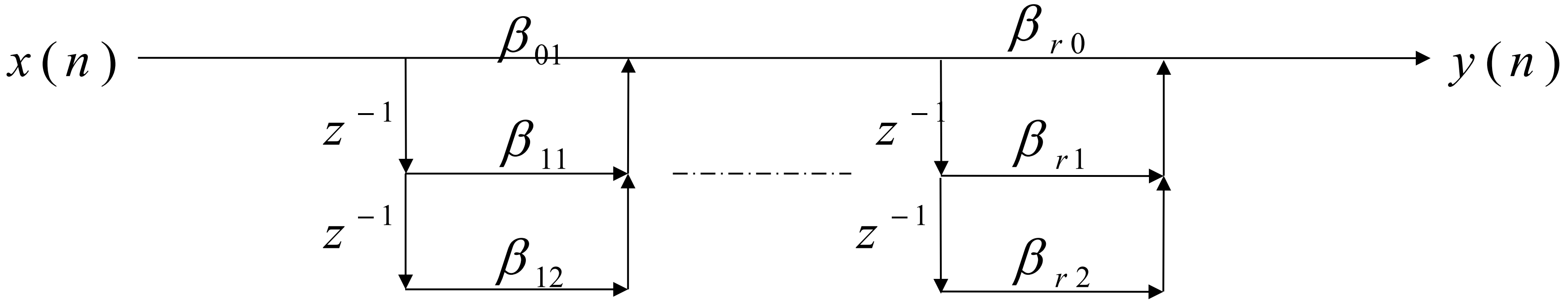
- 单位冲激响应与系统结构参数对应；
- 系统参数与零点的对应关系不明显，系统的频率特性不易控制；
- 存储单元及运算量最少。

二、级联型

- 将系统函数分解成实系数二阶因子的乘积形式：

$$H(z)=\prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}$$

- 级联结构如图所示

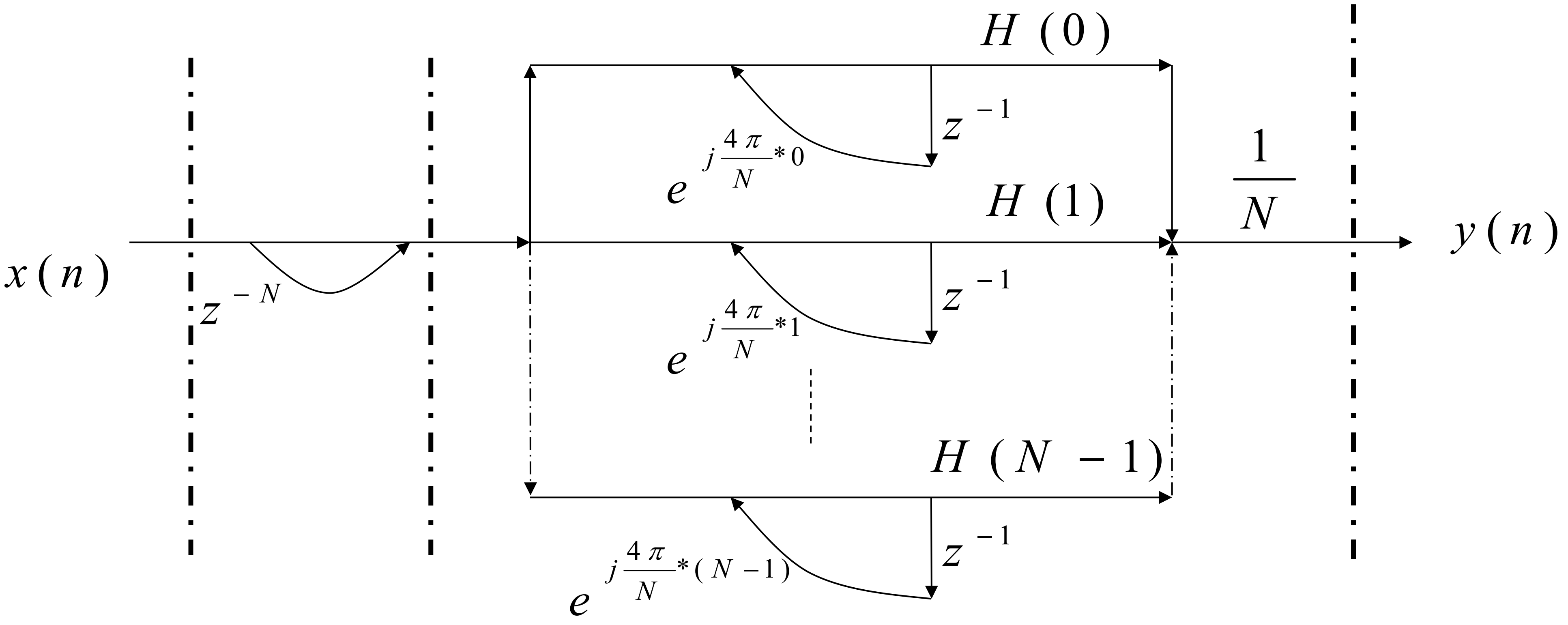


- 级联子系统独立控制一对零点，便于精确控制零点特性
- 所需系数比卷积型多，乘法次数多。

三、 频率抽样型

$$H(z)=\frac{1}{N}\underbrace{(1-z^{-N})}_{Hc(z)}\sum_{k=0}^{N-1}\underbrace{\left(\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}\right)}_{H_K(z)}$$

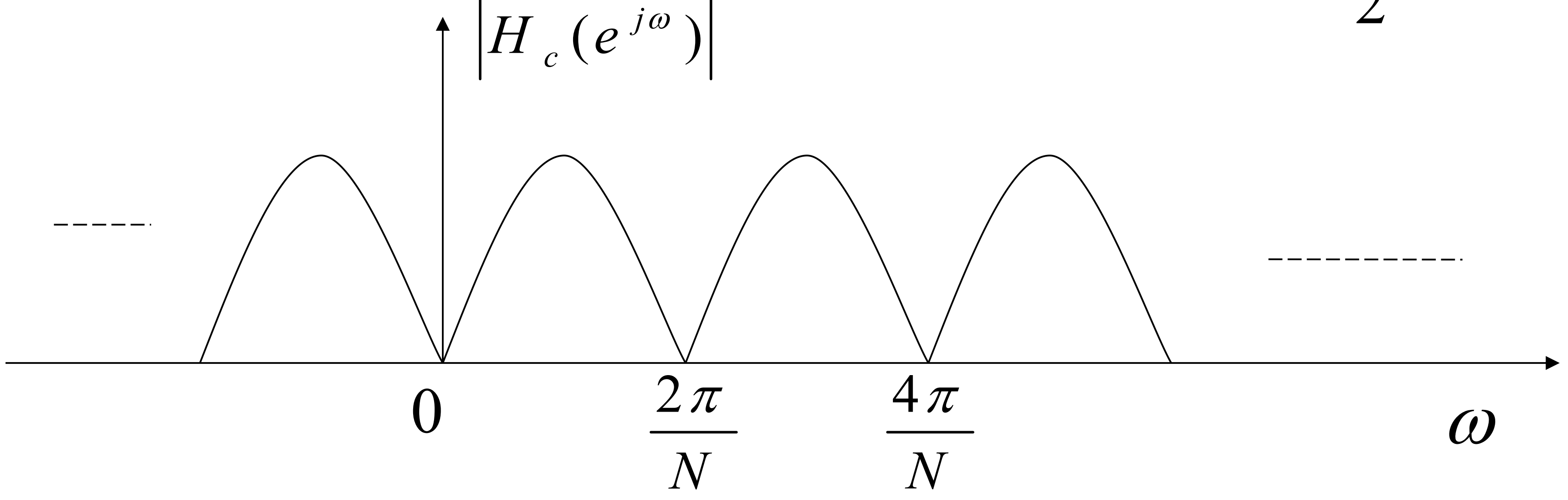
- 频率内插公式为FIR滤波器提供了频率抽样型结构。



梳状滤波器

- 级联第一部分是**N**节延时单元构成的**梳状滤波器**，频率响应为：

$$H_c(e^{j\omega}) = 2\sin(\frac{\omega N}{2})e^{-j\frac{\omega N}{2}+\frac{\pi}{2}}$$



谐振器

- 级联的第二部分由**N**个一阶网络并联而成，每个一阶网络都是在单位圆上一个极点的谐振器：
- $$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$
  - 在 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 处响应为无穷大，即无损耗谐振器。
  - 该谐振器的极点刚好与梳状滤波器的一个零点相抵消，使得该频点处的响应为 $H(k)$。

频率抽样法的特点

- 优点：
  - 频率抽样结构系数 $H(k)$ 就是滤波器在 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 处频率响应；
  - 可以很方便的控制滤波器的频率响应；
  - 零、极点数目只取决于单位抽样响应的点数；
  - 只要单位冲激响应点数相同，就可以利用同一梳状滤波器、同一结构的谐振器得到各种不同的滤波器，因而是高度模块化的。
- 缺点：
  - 结构中所乘的系数都是复数，增加了乘法次数和存储量
  - 所有极点都在单位圆上，当存在系数量化误差时，极点会移动；
  - 有些极点就不能被梳状滤波器的零点所抵消（零点由延时单元决定，不受量化的影响），系统就不能保持稳定

四、线性相位型

- 线性相位型结构与刚才所介绍的其他结构不同，它不是对所有FIR系统通用的结构，只适用线性相位的FIR系统。
  - 对于第一类线性相位系统，其单位冲击响应长度为奇数，且满足偶对称特性，即：

$$h(n)=h(M-n) \qquad n=0,1,2\ldots,M$$

$$y(n)$$

$$=\sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{(M/2)-1} h(k)[x(n-k)+x(n-M+k)]+h(\frac{M}{2})x(n-\frac{M}{2})$$

- 同理，对于第二类线性相位系统，则有：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{(M-1)/2}h(k)[x(n-k)+x(n-M+k)]$$

- 对于第三类线性相位系统，其单位冲激为奇对称，则有：

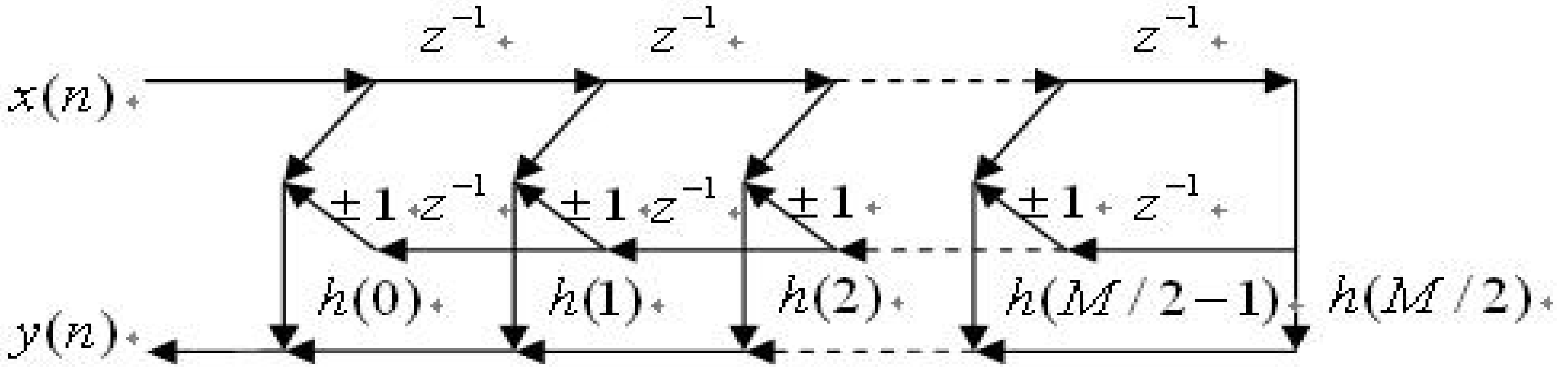
$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{(M/2)-1}h(k)[x(n-k)-x(n-M+k)]+h(M/2)x(n-M/2)$$

- 对于第四类线性相位系统，同理有：

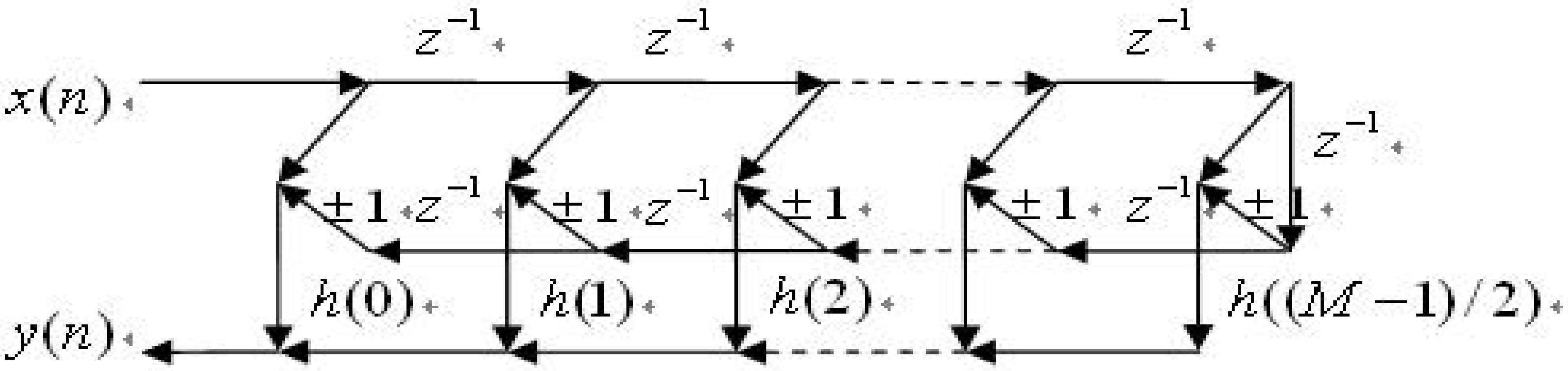
$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{(M-1)/2}h(k)[x(n-k)-x(n-M+k)]$$

线性相位结构

- ✓ 线性相位结构对称，其系数的量化误差不影响系统的线性相位特性；
- ✓ 系数比系统的阶数少一半，乘法运算量比横截型运算量减少一半



第一、三类线性相位结构



第二、四类线性相位结构

作业

- 6.19
- 6.21
- 6.27
- 6.36

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn