**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**Inst. for Elektro- och Informationsteknik**

**Tentamen 2016-06-02**
**SIGNALBEHANDLING I MULTIMEDIA, ETI265**
**Tid: 08.00-13.00**
**Sal: Vic 1,2 - Hela**

Hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling i signalbehandling och en valfri bok i matematik.
[*Allowed items on exam: calculator, DSP and mathematical tables of formulas*]

Observandum: För att underlätta rättningen: [*In order to simplify the correction:*]
-Lös endast **en** uppgift per blad. [*Only solve one problem per paper sheet.*]
-Skriv namn på **samtliga** blad. [*Please write your name on every paper sheet.*]
Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
[*Statements must be motivated by reasoning and/or equations.*]
Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
[*The points from the tasks will be added to the examination score.*]
Max Tot. poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
[*Max Tot. score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0* ]
Betygsgränser för kursen: 3 ($\geq$3.0p), 4 ($\geq$4.0p), 5 ($\geq$5.0p).
[*Grading; 3 ($\geq$3.0p), 4 ($\geq$4.0p), 5 ($\geq$5.0p).*]

1. Vi har ett snurrande hjul med EN eker vars rotationshastighet vi vill bestämma. Vi målar denna eker med reflektiv färg och belyser den med ett stroboskop (i.e. en blinkande lampa vars blinkningsfrekvens är valbar) i ett mörkt rum. Vi ställer in stroboskopet så att vi ser en stillastående eker och detta sker vid blinkfrekvensen $F_s = 750$ rpm (revolutions per minute). Vi dubblerar $F_s$ (dvs dubblerar blinkningshastigheten på stroboskopet) och får fortfarande samma effekt, dvs vi ser en stillstående eker. Vilka frekvenser i $Hz$ kan vårt hjul snurra med? (0.5p)
[*We have a rotating wheel with ONE spoke and we wish to determine the rotaion speed. We paint the spoke with a reflective colour and we illuminate the wheel with a stroboscope (i.e. a twinkling lamp which allows for an adjustable twinkle speed) in a dark room. We set the stroboscope such that we see a non-rotational spoke, which happens at $F_s = 750$ rpm (revolutions per minute). We double $F_s$ and still see one non-rotational spoke. What frequencies can our wheel rotate at, given in real frequency $Hz$?*]

2. Följande tids-diskreta signaler är givna;
[*The following discrete time signals are given*]

$$x_1(n) = [\,-2 \quad \underset{\uparrow}{1}\,]\,,\quad x_2(n) = [\,2 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad -3 \quad 1 \quad -1\,]\,,\quad x_3(n) = [\,\underset{\uparrow}{1} \quad -1\,]$$

   a) Bestäm resulterande sekvens ur faltningsuttrycket;
   $y(n) = x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$. (0.1p)
   [*Determine the resulting sequence from the convolution;*]

b) Bestäm resulterande modulo 4 sekvens ur faltningsuttrycket;
$x_1(n) \circledast_4 x_2(-n) \circledast_4 x_3(n)$. (0.2p)
[*Determine the resulting modulo 4 sequence from;*]

c) Bestäm en sekvens $s(n)$ i modulo 2 så att följande uppfylls;
$x_1(-n) \circledast_2 s(n) = x_3(n)$. (0.2p)
[*Determine a sequence $s(n)$ such that the following is fulfilled (in modulo 2);*]

3. Följande differensekvation är given,
[*The following difference equation is given,* ]

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

där insignalen $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$ och vi har begynnelsevärdet $y(-1) = 1$. Bestäm utsignalen! (1.0)
[*where the input signal $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$ and initial condition $y(-1) = 1$. Determine the output signal!*]

4. På följande sidor återfinns fyra pol-nolställe diagram tillsammans med tillhörande amplitudfunktioner, fasfunktioner samt systemdiagram (grafer). Förena figurerna enligt delfrågor nedan. En bonus på upp till 0.2 poäng ges om även korrekta motiveringar ges för frågorna a) till d).
[*On the following pages there are four pole-zero plots. There are also corresponding amplitude responses, phase responses, impulse responses and system diagrams. Combine the the plots according to the subquestions below. An additional bonus of 0.2 points is awarded if you also provide correct motivation for a) to d).*]

a) Kombinera rätt pol-nollställe diagram med tillhörande amplitudfunktion. (0.2)
[*Match the pole-zero plots with the corresponding amplitude response.*]

b) Kombinera rätt pol-nollställe diagram med tillhörande fasfunktion. (0.2)
[*Match the pole-zero plots with the corresponding phase response.*]

c) Kombinera rätt pol-nollställe diagram med tillhörande impulssvar. (0.2)
[*Match the pole-zero plots with the corresponding impulse response.*]

d) Kombinera rätt pol-nollställe diagram med tillhörande systemdiagram (graf). (0.2)
[*Match the pole-zero plots with the corresponding system diagram.*]

Gör högerledet liknämnigt och partialbråksuppdela,

$$Y^{+}(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}+2}{2\left(1-\frac{1}{2}\ z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{7/2}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{-2}{1-\frac{1}{3}\ z^{-1}}$$

$$\stackrel{Z^{-1}}{\to} y(n) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n)$$

4. Svar: – 1-B, 2-C, 3-A, 4-D
   – 1-D, 2-A, 3-B, 4-C
   – 1-B, 2-D, 3-A, 4-C
   – 1-D, 2-B, 3-C, 4-A

5. Svar: a) Vi itererar enligt följande; (ur formelsamling har vi)

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad \text{där } A_0(z) = B_0(z) = 1 \\ B_m(z) &= k_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m=1; \qquad A_1(z) &= A_0(z) + k_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \\ B_1(z) &= k_1 A_0(z) + z^{-1} B_0(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} \\ m=2; \qquad A_2(z) &= A_1(z) + k_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} \\ B_2(z) &= k_2 A_1(z) + z^{-1} B_1(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + z^{-2} \\ m=3; \qquad H(z) &= A_3(z) = A_2(z) + k_3 z^{-1} B_2(z) = \underline{\underline{1 + z^{-3}}} \end{aligned}$$

Detta ger differensekvationen,

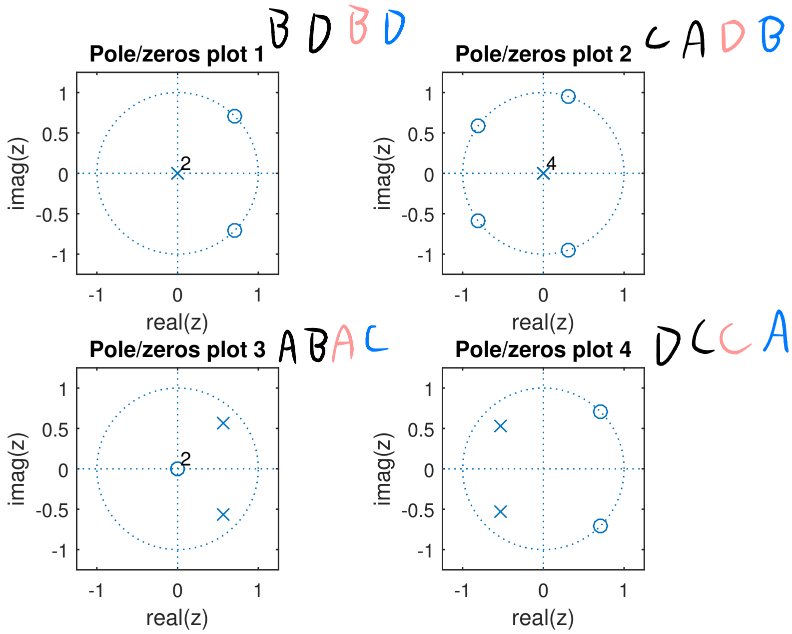
$$y(n) = x(n) + x(n-3)$$

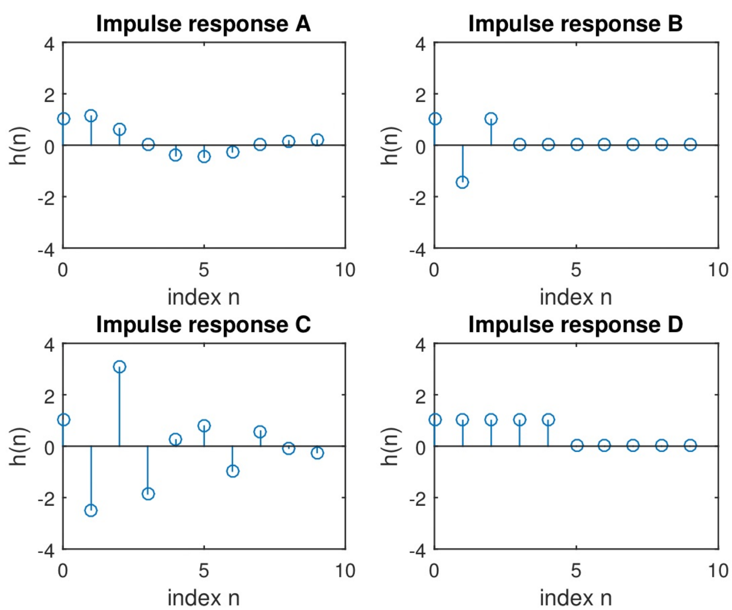
samt impulssvaret,

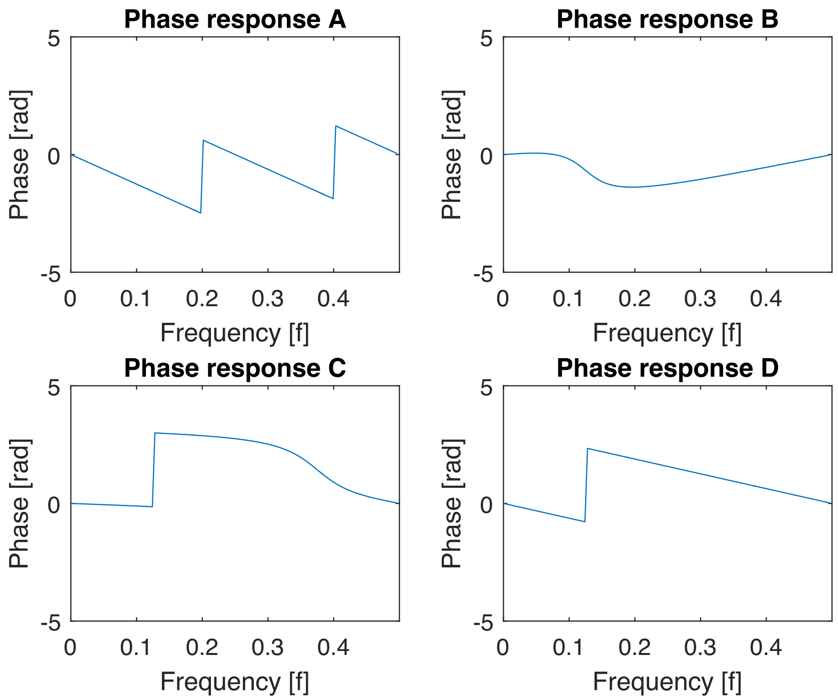
$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-3) = \begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Poler och nollställen fås ur rötter till nämnarpolynomet resp täljarpolynomet i $H(z)$, dvs

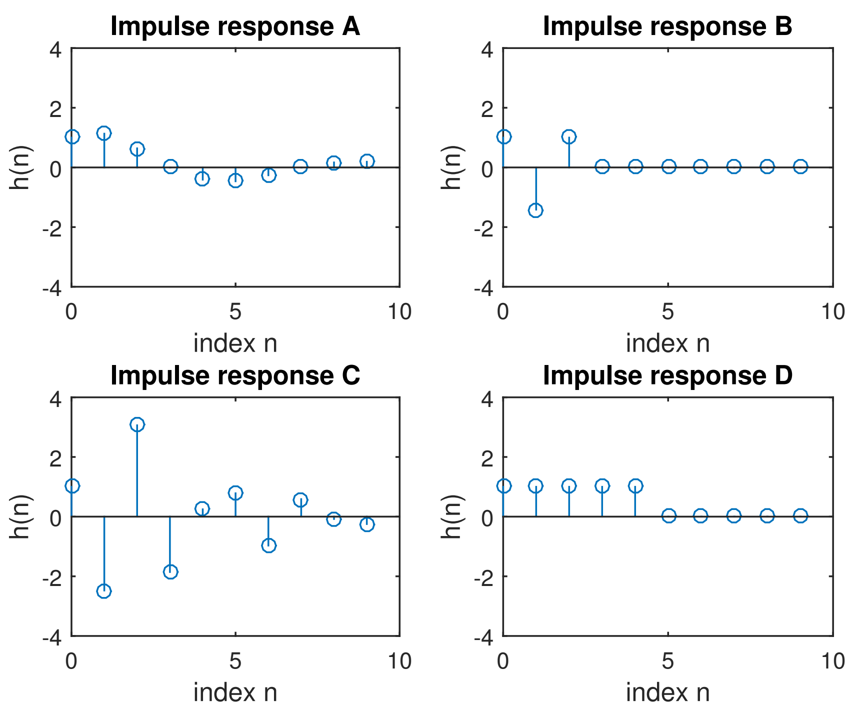
$$H(z) = 1 + z^{-3} = \frac{z^3 + 1}{z^3}$$


Pole/zeros plot 1
B D B D
Pole/zeros plot 2
C A D B
Pole/zeros plot 3
A B A C
Pole/zeros plot 4
D C C A
imag(z)
real(z)

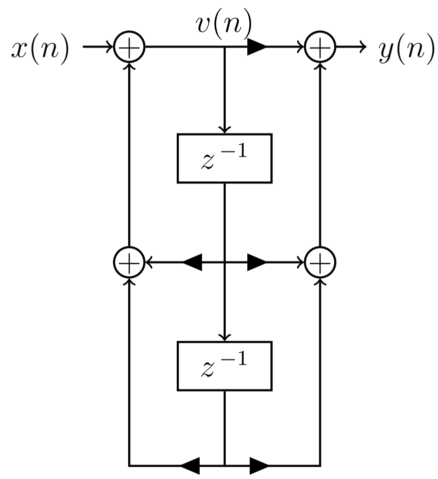

Impulse response A
Impulse response B
Impulse response C
Impulse response D
h(n)
index n


Phase response A
Phase response B
Phase response C
Phase response D
Phase [rad]
Frequency [f]

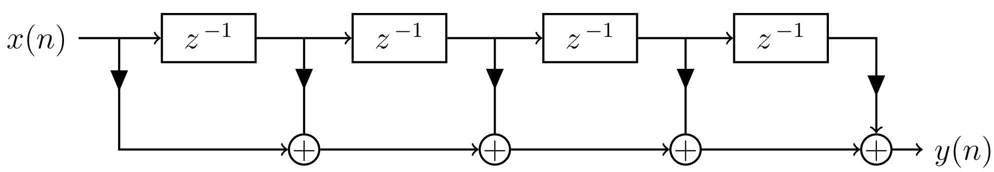
$h(n) =$ $H(z)$


Impulse response A
Impulse response B
Impulse response C
Impulse response D
h(n)
index n

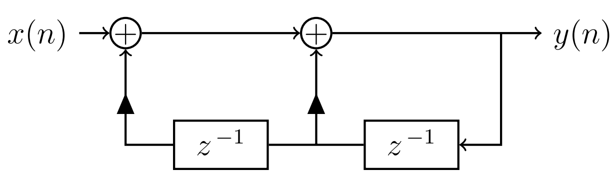
**System diagram A.**



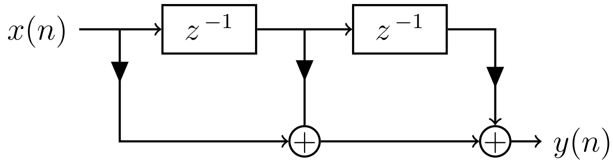

**System diagram B.**




**System diagram C.**




**System diagram D.**



5. En 3:e ordningens tidsdiskret FIR-krets är given på Lattice form, där lattice paramertrarna är givna av;
[*A 3:rd order FIR-system is given in a Lattice form, where the lattice parameters are given by;*]

$$k_i = [k_1,\ k_2,\ k_3] = \left[\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ 1\right]$$

   a) Bestäm motsvarande differensekvation och impulssvar $h(n)$! (0.3)
   [*Determine the corresponding difference equation and impulse response $h(n)$!*]

   b) Bestäm poler och nollställen samt skissa amplitudfunktionen $|H(\omega)|$ och fasfunktionen $arg(H(\omega))$ inom intervallet $-\pi \leq \omega < \pi$! (0.3)
   [*Determine the poles and zeros and sketch $|H(\omega)|$ and $arg(H(\omega))$ within $-\pi \leq \omega < \pi$!*]

   c) Bestäm utsignalen $y(n)$ då insignalen är given av, (0.4)
   [*Determine the output signal $y(n)$, when the input is given by!*]

$$x(n) = 5 + \cos(2\pi/4\, n - \pi/4) \qquad -\infty < n < \infty$$

6. **Utsignalen**, $y(n)$, från ett kausalt LTI-system i vila är givet av,
[*The **output signal**, $y(n)$, from a causal LTI-system at rest is given by,*]

$$y(n) \;=\; [\underset{\uparrow}{2} \quad 6 \quad 6 \quad 2\,]$$

där **insignalen** är given av,
[*when the **input signal** is,* ]

$$x(n) \;=\; [\underset{\uparrow}{1} \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\,]$$

Bestäm systemets impulssvar! (1.0)
[*Determine the impulse response!* ]

**Lycka Till!**

*Please remember to answer the CEQ-questionnaire!*

**SVAR OCH LÖSNINGAR Tentamen, ETI265, 2016-06-02**

1. Svar: Följande ekvationssystem skall uppfyllas [i enheten rpm]

$$1. \quad \tfrac{F}{750} = 0 \pm k_1$$

$$2. \quad \tfrac{F}{1500} = 0 \pm k_2$$

Där $k_1$ och $k_2$ är godtyckliga heltal. Följande frekvens $F$ uppfyller ovanstående ekvationer;

$$F = 1500 \text{ rpm} = 25Hz$$

men även $F = 1500 \cdot k$ rpm $= 25 \cdot k$ Hz, där $k$ är ett heltal, uppfyller ovanstående och samtidigt visar stillastående hjul i samtliga fall.

2. Svar: a)

$$y(n) \quad = \quad [\,-4 \quad 8 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad -10 \quad 8 \quad -4 \quad 1\,]$$

b)

$$y(n) \quad = \quad [\,-\underset{\uparrow}{4} \quad 5 \quad 7 \quad -8\,]$$

c) Definiera den okända sekvensen $s(n)$ enligt,

$$s(n) = s_1\delta(n) + s_2\delta(n-1)$$

En modulo 2 faltning mellan $s(n)$ och $x_1(-n)$ mha tex en faltningstabell ger följande ekvationssystem;

$$s_1 - 2s_2 \quad = \quad 1 \qquad (1)$$

$$-2s_1 + s_2 \quad = \quad -1 \qquad (2)$$

Lösningen av ovanstående ger följande svar;

$$s(n) = \frac{1}{3}\delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1) = \left[\underset{\uparrow}{1/3} \quad -1/3\right]$$

3. Svar: Då vi har begynnelsevärden använder vi $Z^+$-transformen, som applicerad på differensekvationen och insättning av insignalens Z-transform (OBS insignalen är kausal ger Z-transform = $Z^+$-transform) ger,

$$\begin{aligned}
Y^+(z) &= \frac{1}{2}\,Y^+(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\,y(-1) + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
Y^+(z) &= \frac{1}{2}\,z^{-1}Y^+(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
Y^+(z) &= \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)}
\end{aligned}$$

ger 3 st poler i origo samt nollställen enligt,

$$n_{1,2,3} = \sqrt[3]{-1} = e^{j\frac{\pi+2\pi k}{3}} \quad \text{för k=0, 1, 2}$$

=>

$$n_1 = e^{j\pi/3},\ n_2 = -1, n_3 = e^{-j\pi/3}$$

Se pol-nollställe diagram samt amplitud- och fasfunktion, nedan.

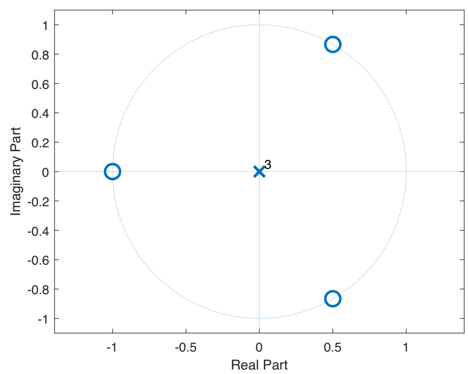



Figure 1: *Pole-Zero plot for task 5b)*

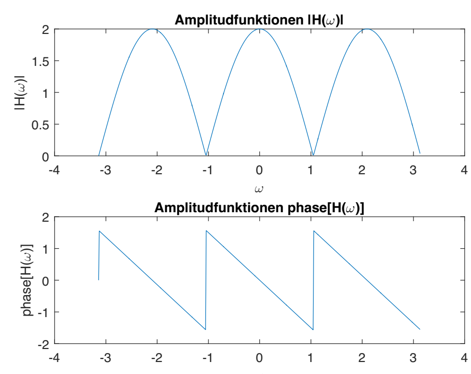



Figure 2: *Amplitude and phase function plot for task 5b)*

c) Insignalen består av en konstant (DC-komponent) med $f_0 = 0$, samt en cosinus komponent med $f_1 = 1/4$. Den är icke-kausal med oändlig längd, dvs alla insvängningsförlopp kan antas ha upphört. Utsignalen ges då av följande uttryck

$$y(n) = |H(\omega)|_{\omega=0} \cdot 5 + |H(\omega)|_{\omega=2\pi/4} \cdot \cos(2\pi\frac{1}{4}n - \pi/4 + arg\,[H(\omega)]_{\omega=2\pi/4})$$

Ovanstående värden ges av,
$H(\omega)|_{\omega=0} = H(z)|_{z=1} = 1 + 1^{-3} = 2$

$H(\omega)|_{\omega=2\pi/4} = H(z)|_{z=e^{j2\pi/4}} = 1 + e^{-j2\pi 3/4} = 1 + i$
dvs $|H(\omega)|_{\omega=2\pi/4} = \sqrt{2}$, $arg\,[H(\omega)]_{\omega=2\pi/4} = \frac{\pi}{4}$ dvs,

$$\underline{y(n) = 10 + \sqrt{2}\cos(2\pi\frac{1}{4}n)}$$

6. Svar: The system function is given by,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

where

$$\begin{aligned} Y(z) &= 2 + 6z^{-1} + 6z^{-2} + 2z^{-3} = 2(1+z^{-1})^3 \\ X(z) &= 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 1z^{-4} = (1+z^{-1})^4 \\ -> &\quad H(z) = \frac{2}{(1+z^{-1})} = 2\frac{1}{(1-(-1)z^{-1})} \end{aligned}$$

which gives

$$h(n) = 2 \cdot (-1)^n u(n)$$