数字信号处理　第十五周作业

范云潜 18373486

微电子学院 184111 班

日期：2020 年 12 月 18 日

作业内容：9.19，9.21，9.28，9.48；10.1；10.4，10.5，10.9

Problem 9.19

在 8 点 FFT 中，$X(\exp(j6\pi/8))$ 对应的是 $k=3$ 。

根据 Goertzel 算法及其流程图：

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{2\pi\cdot 3}{8} = a \\ -W_8^3 = b \end{cases}$$

解得 $a=-\sqrt{2}, b=\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}$ 。

Problem 9.21

SubProblem a

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_N^k z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-W_N^k z^{-1}}$$

那么：

$$\begin{aligned} y_k[n] &= \sum_{m=0}^{n} x[m]W_N^{k(n-m)} \\ y_k[N] &= \sum_{m=0}^{n} x[m]W_N^{k(N-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{n} x[m]W_N^{-km} \end{aligned}$$

同时：

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \\ X[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(N-k)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{-kn} \end{aligned}$$

显然 $X[N-k]=y_k[N]$ 成立。

SubProblem b

将书中 (9.9 式) 改写为：

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1-W_N^{-k}z^{-1}}{(1-W_N^{-k}z^{-1})(1-W_N^{k}z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \end{aligned}$$

显然，同 (a) 中的系统函数一致，因此两者功能一致。

Problem 9.28

SubProblem a

有效频率间隔为 $\Delta f=\frac{1}{NT}=\frac{10000}{N}\le 50$ ，解得 $N\ge 200$ 。因此最小取 256 。

SubProblem b

对要求进行分析：

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(0.8z) \\ Y(1.25z) &= X(z) \\ y[n](1.25z)^{-n} &= x[n]z^{-n} \\ y[n] &= 1.25^n x[n] \end{aligned}$$

Problem 9.48

步骤如下所示：

1. 对两边取 512 点 FFT，得到向量形式如:
$$Y = A \cdot Y + B \cdot X \to Y = \frac{B}{1-A}X$$
2. 那么 $H(z)$ 的 FFT 为 $\frac{B}{1-A}$ ，取其序列中 $k=2$ 的值!

Problem 10.1

SubProblem a

$$\omega = \frac{150}{10000} \cdot 2\pi = 0.03\pi$$
$$\Omega = \frac{\omega}{T} = 300\pi \text{ rad}/s$$

SubProblem b

$$\omega = \frac{800}{10000} \cdot 2\pi = 0.16\pi$$
$$\Omega = \frac{\omega}{T} = 1600\pi \text{ rad}/s$$

Problem 10.4

SubProblem a

根据实序列变换的对称性: $X[k] = X^*[-k]$ ，又根据 DFT 的周期性:

$$X[200] = X^*[200] = X^*[800]1-j$$

SubProblem b

根据采样关系:

$$X(j\Omega) = TX[k], \text{ where } \Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{w\pi k}{NT}$$

同时，由于此时只存在 $\omega \in [-\pi, \pi]$ ，将 $k=800$ 转换到 $k=200$ 。

$$\Omega_1 = \frac{2\pi 200}{1000}20000 = 8000\pi \text{ rad}/s, X = \frac{1-j}{20000}$$
$$\Omega_2 = \frac{2\pi - 200}{1000}20000 = -8000\pi \text{ rad}/s,$$
$$X = \frac{1+j}{20000}$$

Problem 10.5

$\cos\Omega_0 t$ 对应 $\omega = \frac{2\pi k_0}{TN} = \Omega_0$ ，那么 $T = \frac{2\pi k_0}{N\Omega_0}$ 。此外 $T = \frac{2\pi k_0}{N(2\pi - \Omega_0)}$ 同样满足。

Problem 10.9

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{64}$$
$$\Delta\Omega = \frac{5\pi}{64}$$
$$\Delta\Omega = \frac{5\pi}{64}$$

可以看出第一个间隔太小，虽然第二三个间隔一致，但是第三个次分量幅度极小，难以检测，因此第二个可以分出。