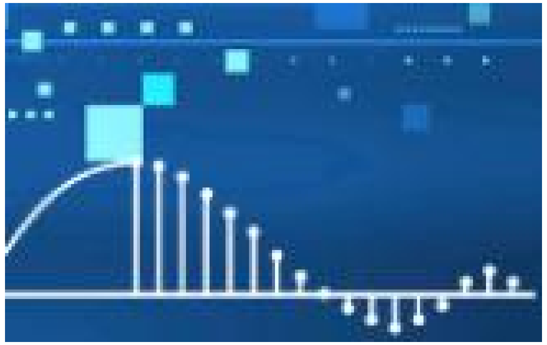
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

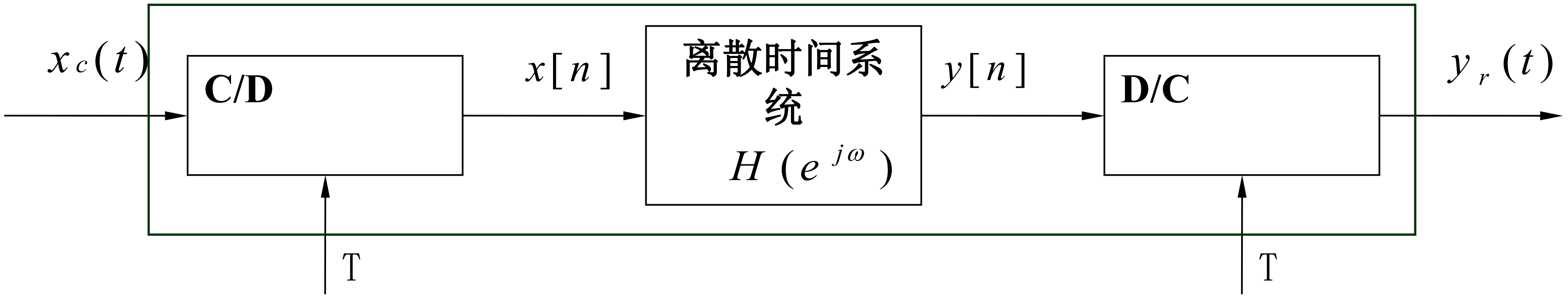
第 三 章

Contents

信号采样与重构

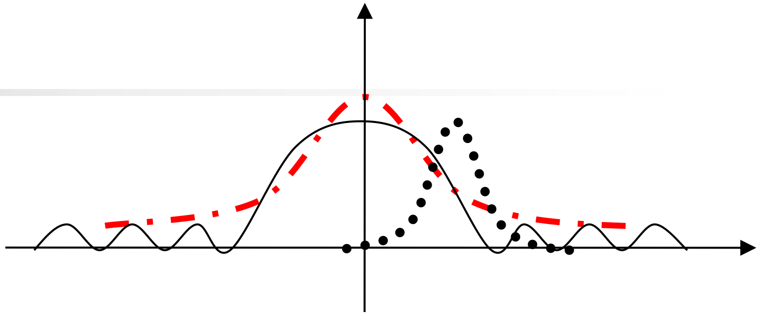
离散化处理工程问题

- 离散LTI系统能等效为连续LTI系统

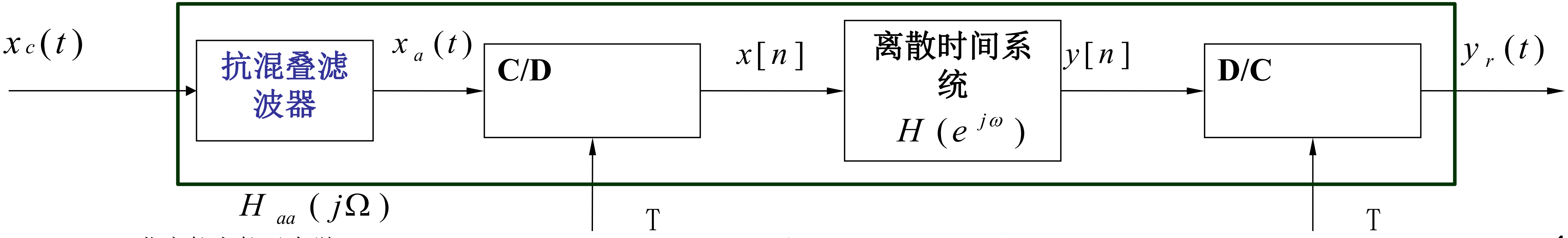


- 等效频率响应为：$H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}$　　$|\Omega| < \pi / T$
- 实际应用中：
  - **输入信号不是真正带限---》预滤波**
  - **C／D转换器存在量化误差---》量化噪声模型**
  - **D／C转换器近似实现存在畸变---》补偿重构**
- 如何使得离散化处理接近模拟LTI特性？

一、消除混叠的预滤波

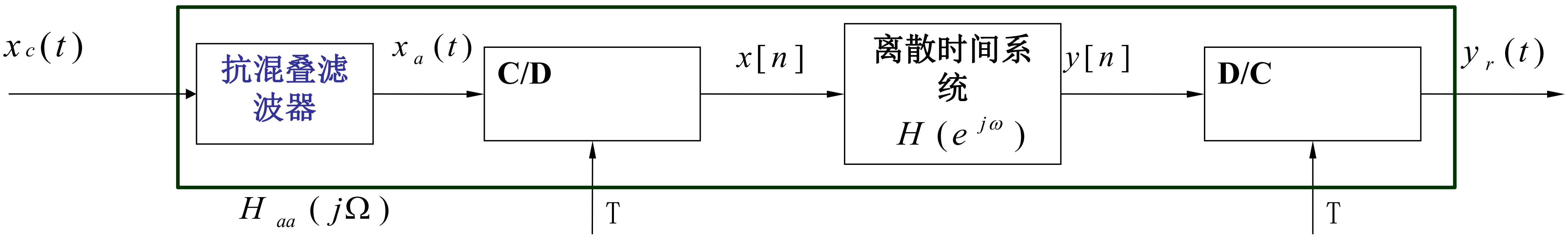


- 工程应用中，采样率设定总是受到干扰：
  - 1、有用信号本身不带限
  - 2、信号本身是带限的，加性噪声也可能占据高频区域；
  - 3、有用信号仅占据小部分带宽
    - 语音在**0**～**20kHz**内有明显分量，对用户来说**3**～**4kHz**足够
- 防止因采样而引起的混叠，必须将输入信号强制限带。
  - 如果系统的采样率一定，则要求输入信号强制限带到低于所要求的采样率一半（又称作系统的处理带宽）。



增加抗混叠后

$$H_{eff}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega) H(e^{j\Omega T})$$

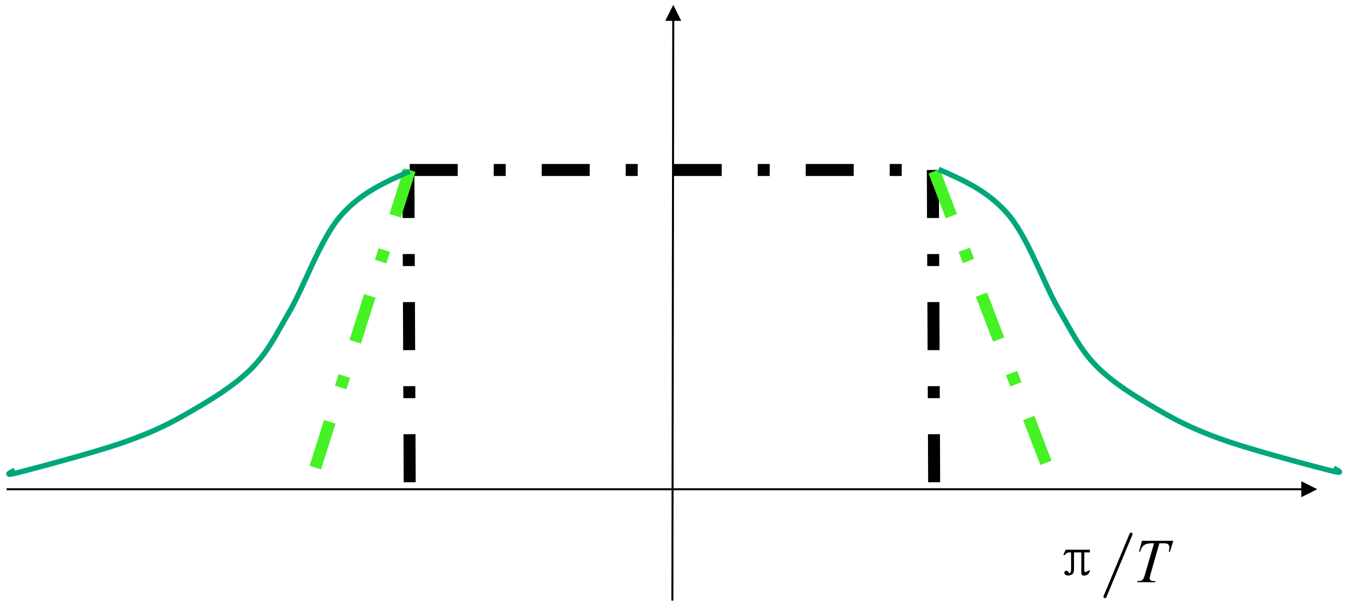


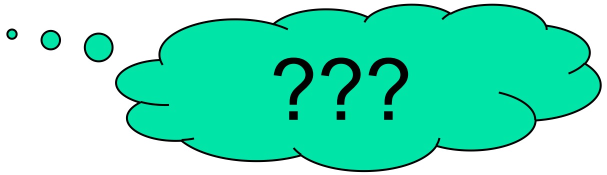
- 限带功能由C / D转换器之前的低通滤波器完成，称为**抗混叠滤波器**，**要求抗混叠滤波器在有效带宽处有足够大的衰减**。
- 理想情况下，理想抗混叠滤波器的频率响应应为：

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 0 & |\Omega| > \Omega_c \\ 1 & |\Omega| < \Omega_c < \pi / T \end{cases}$$

问题

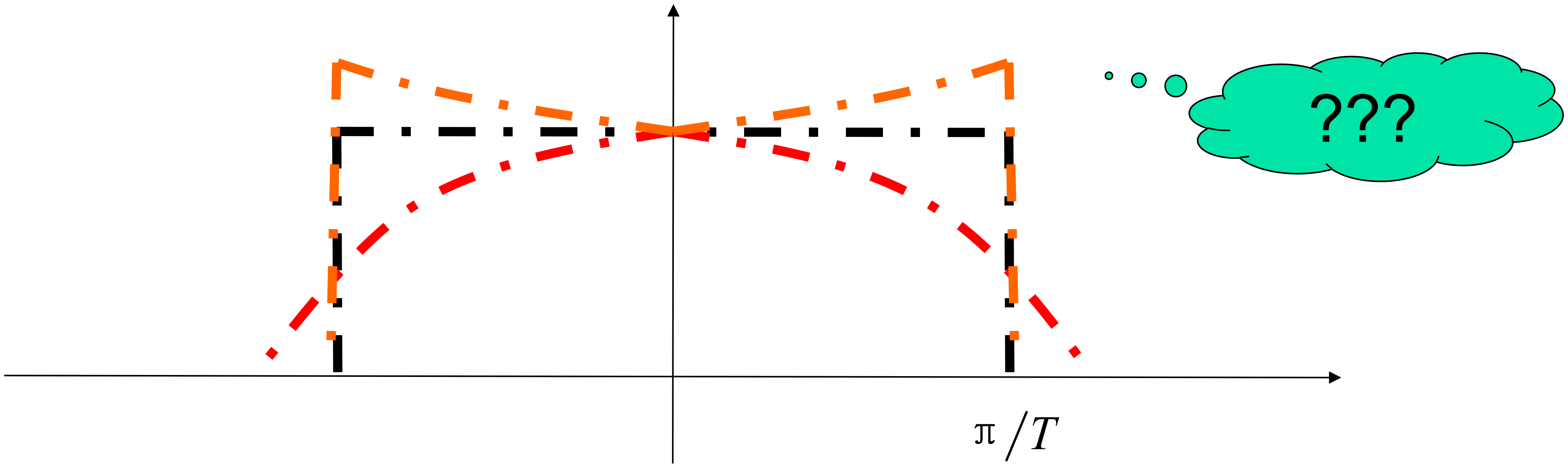
- 期望抗混叠滤波器有锐截止特性。
- 难以实现，且有很严重的非线性相位失真



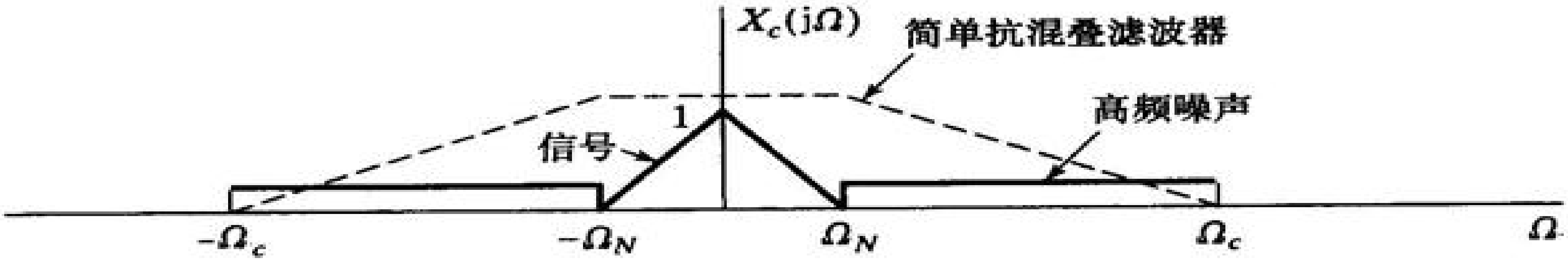


幅度预滚降

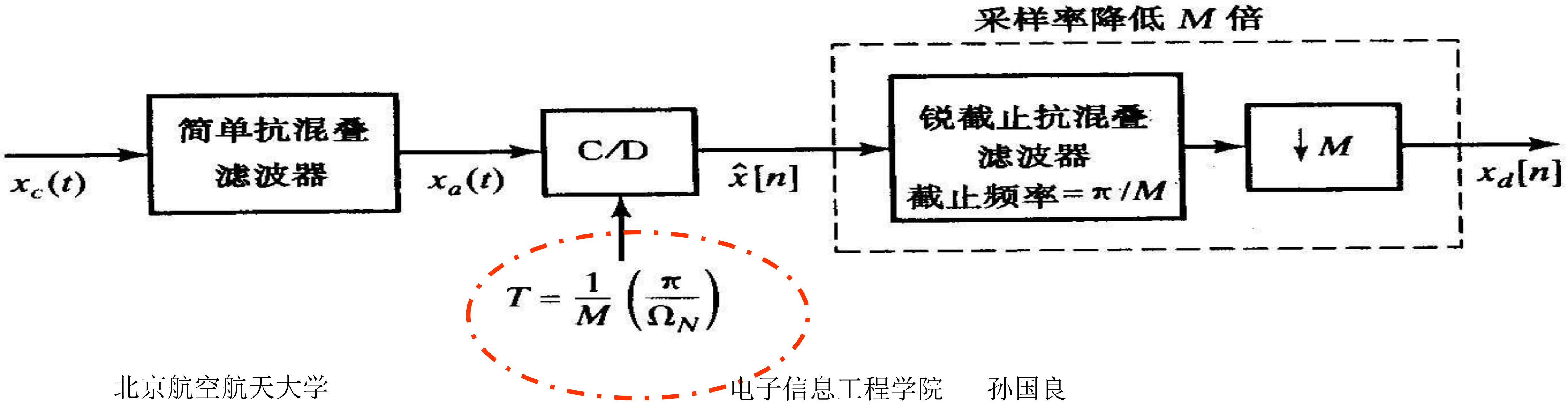
- 为了实现在 π/T 以上的频率响应部分小到可以忽略不计，就需要对 $H_{aa}(j\Omega)$ 特性一开始就进行“滚降”，也即在低于 π/T 的频率上就引入衰减。
  - 这种衰减所带来的幅度失真能够部分的在离散时间系统中补偿

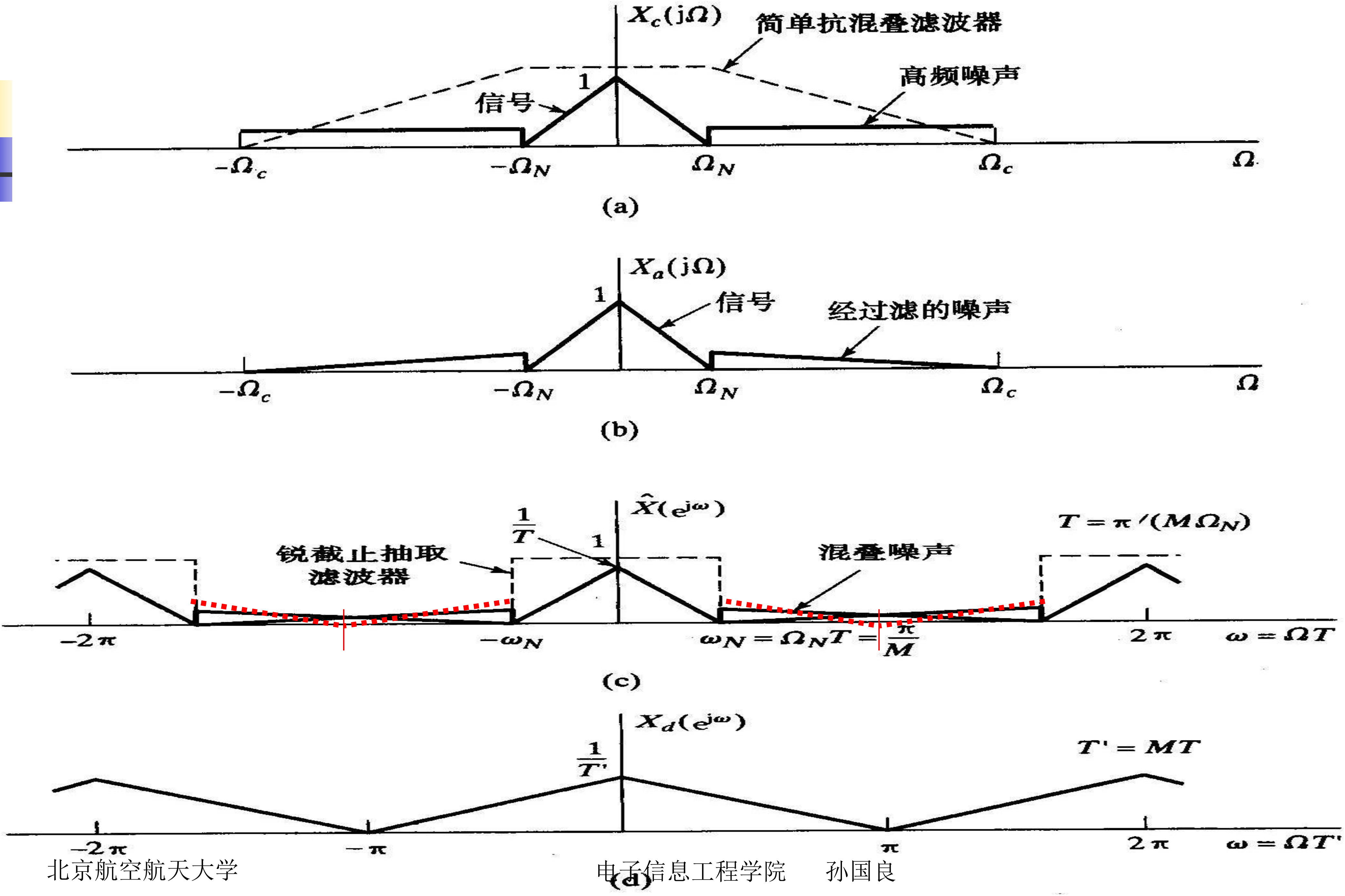


过采样抗混叠



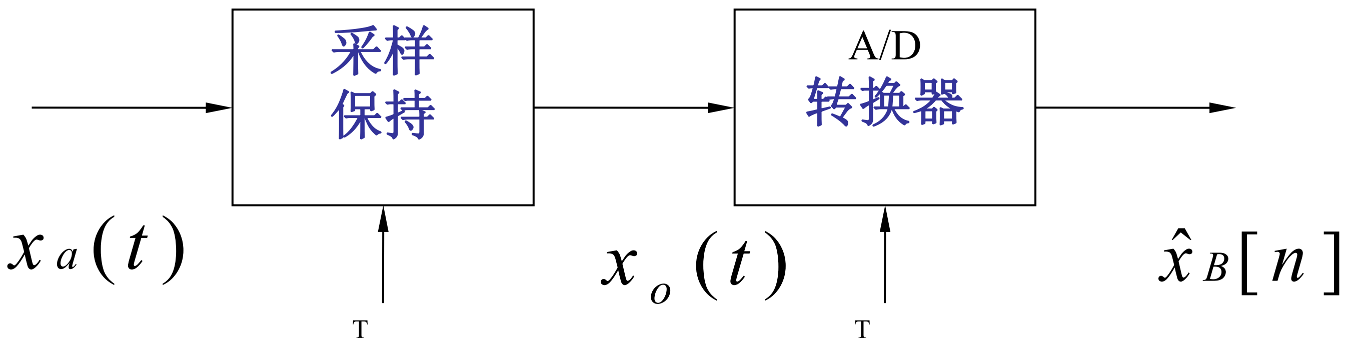
- 采用简单的抗混叠滤波器，使得其在**M**倍的信号带宽处 $M\Omega_N$ 有显著的衰减。
- 用高的采样率 $2M\Omega_N$ 实现**C/D**转换，之后进行**M**倍抽取。




$X_c(j\Omega)$
简单抗混叠滤波器
高频噪声
信号
1
$-\Omega_c$
$-\Omega_N$
Ω_N
Ω_c
Ω
(a)
$X_a(j\Omega)$
1
信号
经过滤的噪声
$-\Omega_c$
$-\Omega_N$
Ω_N
Ω_c
Ω
(b)
$\hat{X}(e^{j\omega})$
$\frac{1}{T}$
1
锐截止抽取
滤波器
混叠噪声
$T=\pi/(M\Omega_N)$
-2π
$-\omega_N$
$\omega_N=\Omega_N T=\frac{\pi}{M}$
2π
$\omega=\Omega T$
(c)
$X_d(e^{j\omega})$
$\frac{1}{T'}$
$T'=MT$
-2π
$-\pi$
π
2π
$\omega=\Omega T'$
(d)

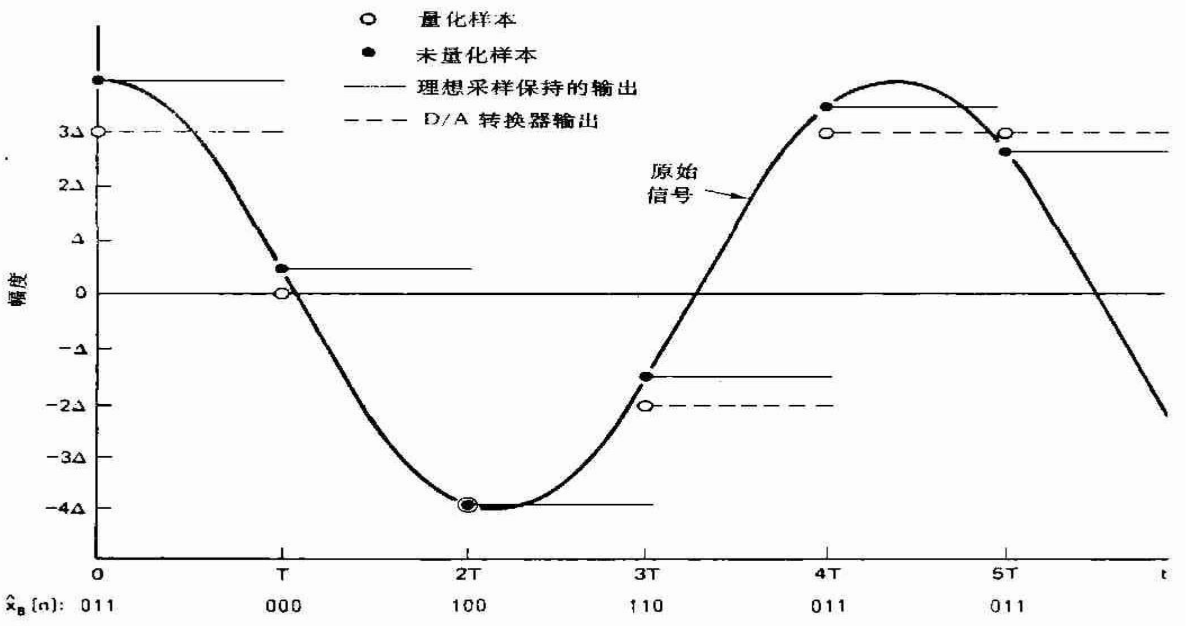
二、A/D采样量化噪声

- 理想C / D转换器将连续时间信号转换为无限精度的离散时间信号。
- 实际中利用数字信号进行处理，即近似为有限精度的序列或量化样本



量化

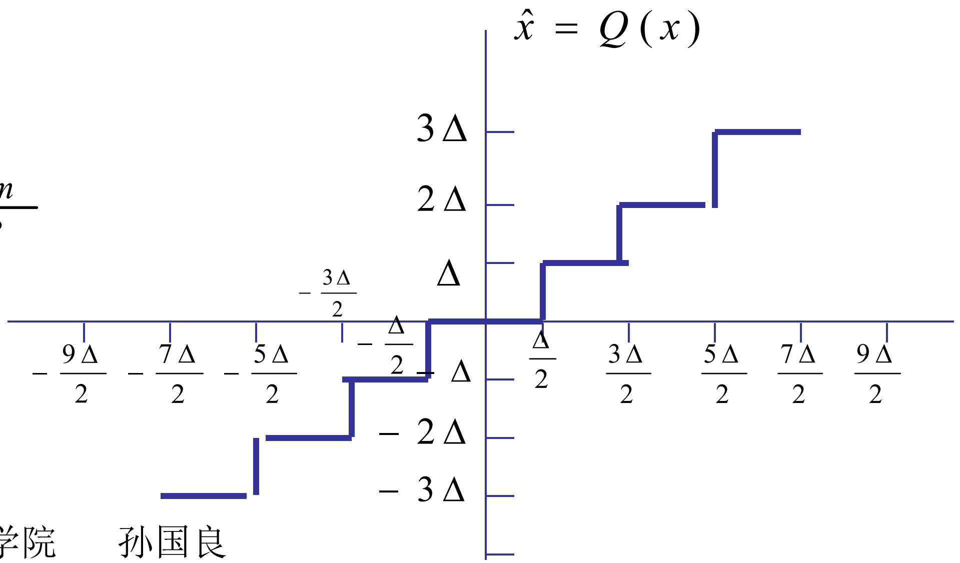
- 量化器是一种非线性系统，能够将输入样本按照某一规则映射到幅值的有限集



量化器量化阶取决于满幅度电平和量化位数有关

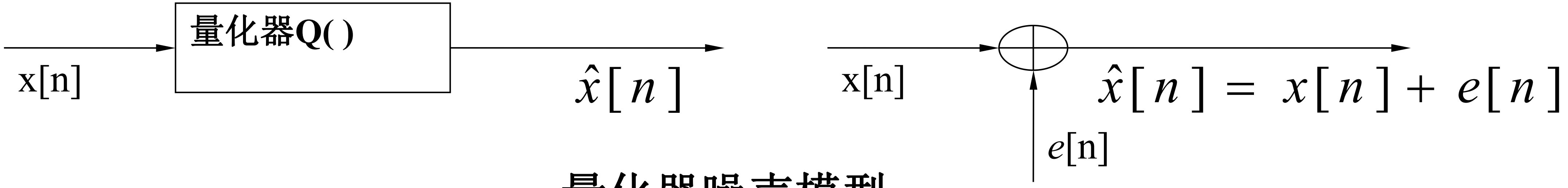
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

$$\hat{x}[n] = \hat{x}_B[n]\Delta$$



量化噪声模型

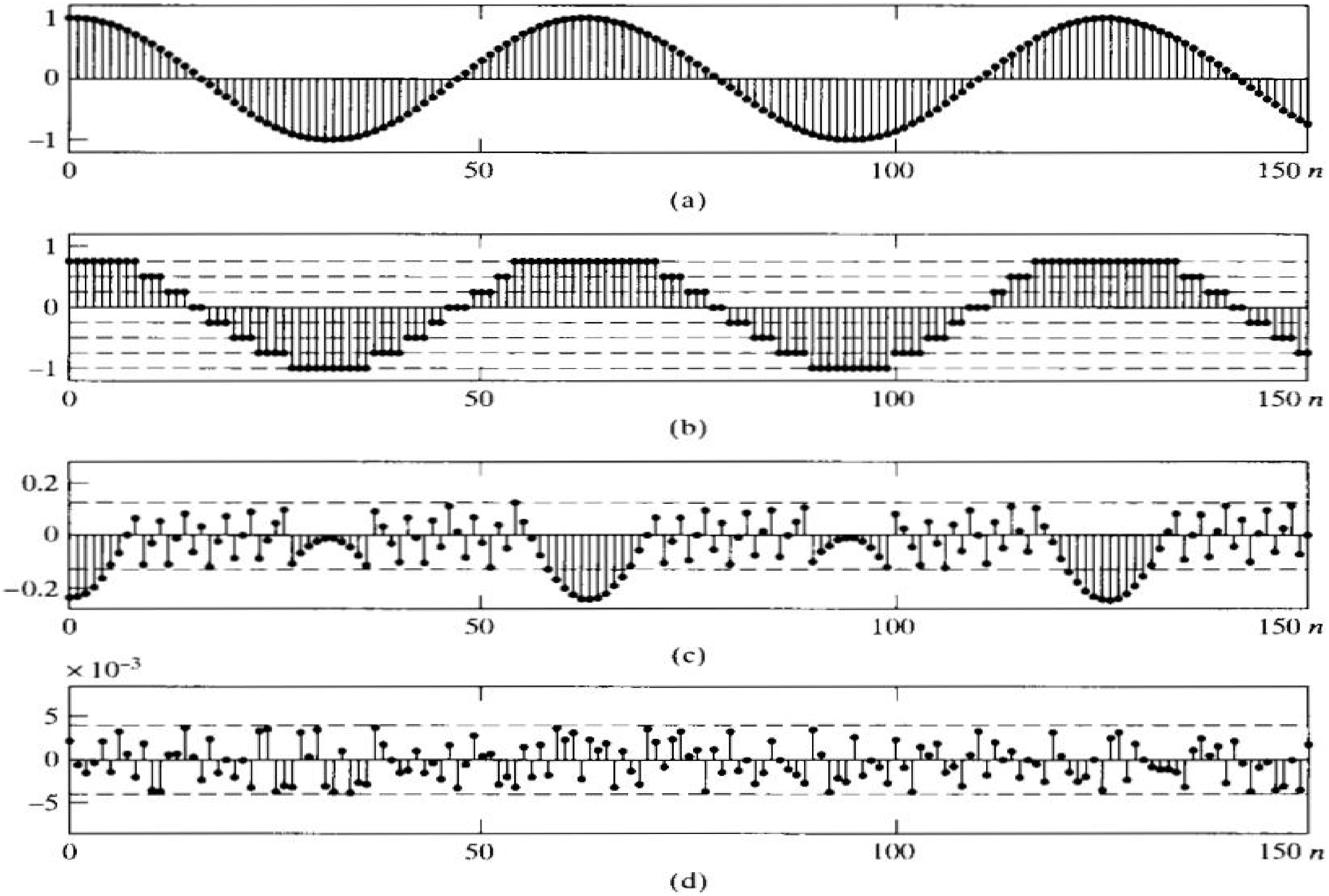
- 一般量化样本不同于样本的真值,其差值就是量化误差：
  - 对于舍入的量化器：$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$
- 量化器的简化模型如图所示。 $-\Delta/2 < e[n] \le \Delta/2$
  - 在大多数情况下，**e(n)**是未知的
  - 统计模型来表示量化效应，，量化误差为加性噪声信号。



量化器噪声模型

加性噪声模型的基本假设

- 1、误差序列e[n]是平稳随机过程。
- 2、误差序列e[n]与序列x[n]不相关。
- 3、误差过程为白噪声，样本之间不相关。
- 4、误差过程概率分布在量化误差范围内均匀分布 。
  - 假设是有条件的：<u>如果信号足够复杂，而量化阶又足够小，以致于从一个样本到另一个样本，信号的幅度很可能横穿过许多量化台阶，那么这个统计模型的假设似乎就愈真实</u>。

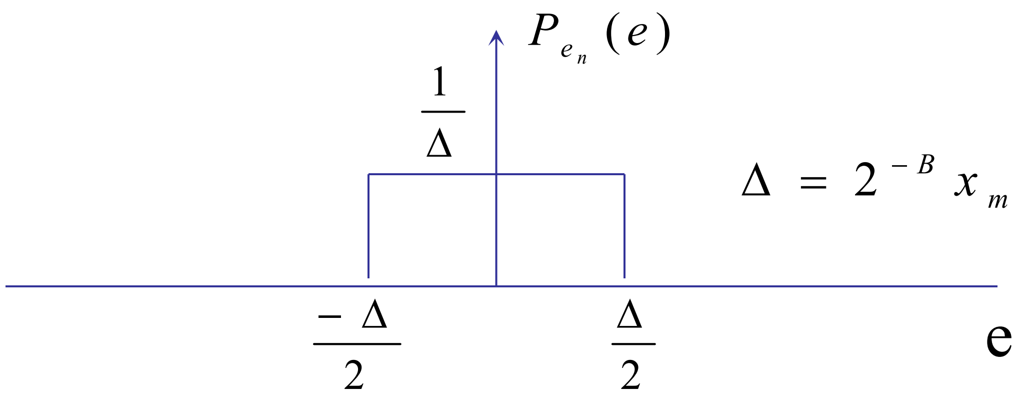

1
0
−1
0
50
100
150 n
(a)
1
0
−1
0
50
100
150 n
(b)
0.2
0
−0.2
0
50
100
150 n
(c)
× 10−3
5
0
−5
0
50
100
150 n
(d)

均匀量化

- **均匀舍入量化噪声是均匀分布的随机变量**

$$-\Delta/2 < e[n] \le \Delta/2$$

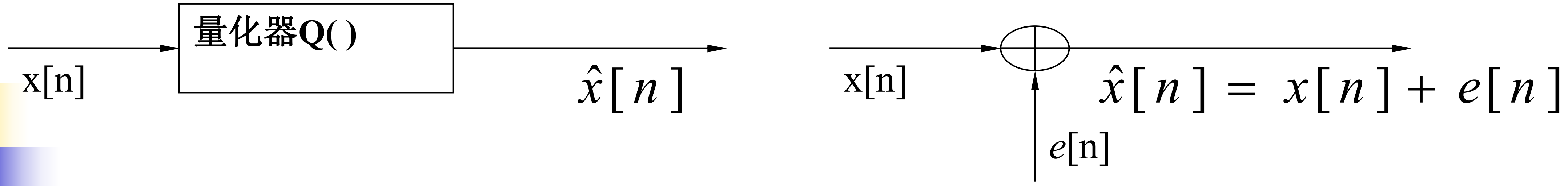
- **量化噪声的一阶概率密度如图所示(如果量化是截尾而不是舍入，那么误差总是负的，并假设从- 到0为均匀概率密度分布)。** Δ



量化噪声功率

- 由于假定噪声样本间是不相关，这样**e[n]**为均匀分布的白噪声序列。
- **e[n]**的均值是零，而其方差为：$\sigma_c^2 = \frac{\Delta^2}{12}$
- 对于一个**(B+1)**位双极性量化器，其满幅度值为 X_m。噪声方差或功率是：

$$\sigma_c^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$



- 加性噪声所污损的一种常用度量是信噪比，定义为信号方差(功率)对噪声功率的比，以**dB**表示
- 一个**(B+1)**位量化器的信噪比是：

$$SNR = 10\lg(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}) = 10\lg(\frac{12 \bullet 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}) = 6.02B + 10.8 - 20\lg(\frac{X_m}{\sigma_x})$$

  - 量化样本的字长每增加一位(也即量化电平数加倍)，信噪比提高**6dB**。

信号幅度匹配

$$SNR = 6B - 1.25\,dB$$

$$SNR = 10\lg(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}) = 10\lg(\frac{12 \bullet 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}) = 6.02B + 10.8 - 20\lg(\frac{X_m}{\sigma_x})$$

- 容易看出当 σ_x 减半时，**SNR**下降**6dB**。
- 因此，仔细地将信号幅度与**A / D**换器的满幅度值匹配是很重要的。
  - 对于像语音和音乐，幅度分布趋向于集中在零附近，并随着幅度的增加很快地跌落。幅度超过均方根值三倍或四倍的概率非常小。
  - 为了避免峰值箝位(如在统计模型中所假设的)，可以在**A / D**转换器之前设置滤波器和放大器增益，以使得 $\sigma_x = X_m/4$
  - 高质量的音乐录制和重放系统中，要获得大约**90～96dB**的信噪比，就要求有**16**位量化

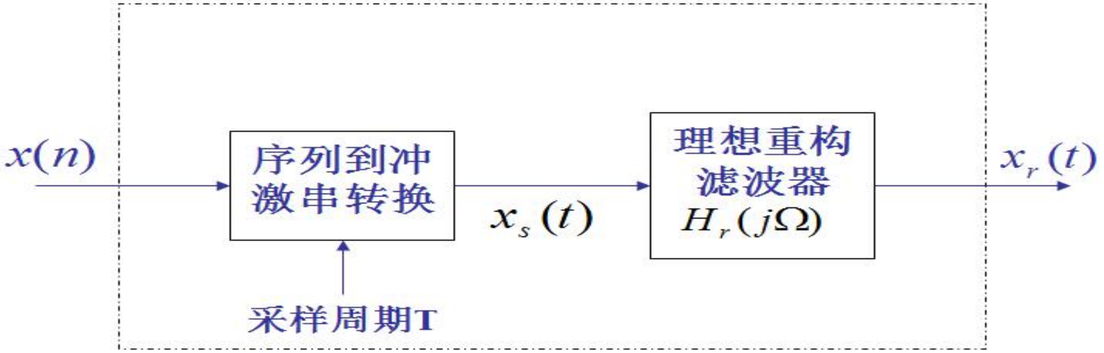
三、D/A转换中的信号失真

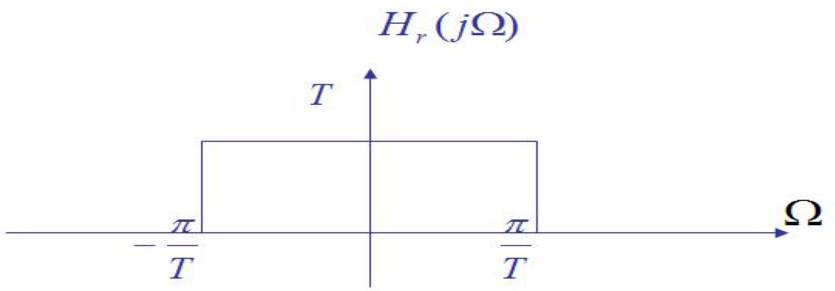
- 理想重构带限信号：

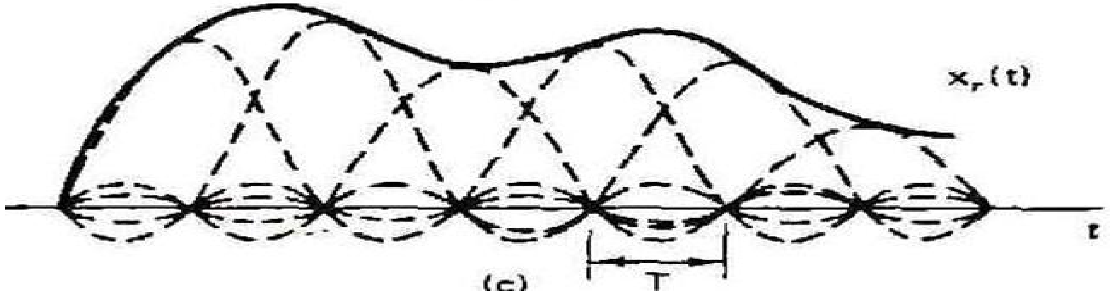
$$X_r(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, |\Omega| < \pi/T \\ 0, |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$





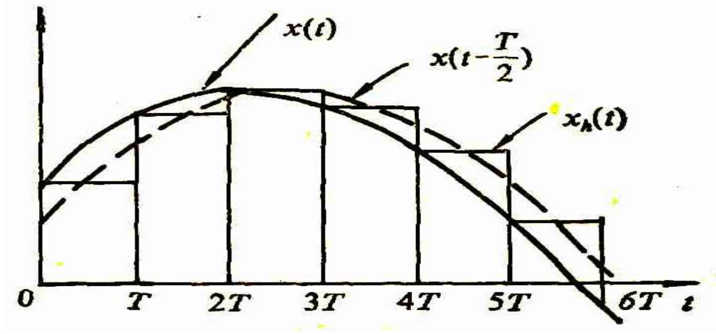


理想D/C的D/A逼近

- **可实现系统近似是数字/模拟转换器(D / A)紧跟着一个补偿重构滤波器。**

$\hat{x}[n]$ → **D/A 转换器** → $x_{DA}(t)$ → **补偿重构滤波** →

$\hat{x}[n]$ → **转换为冲激** → **零阶保持** → $x_{DA}(t)$

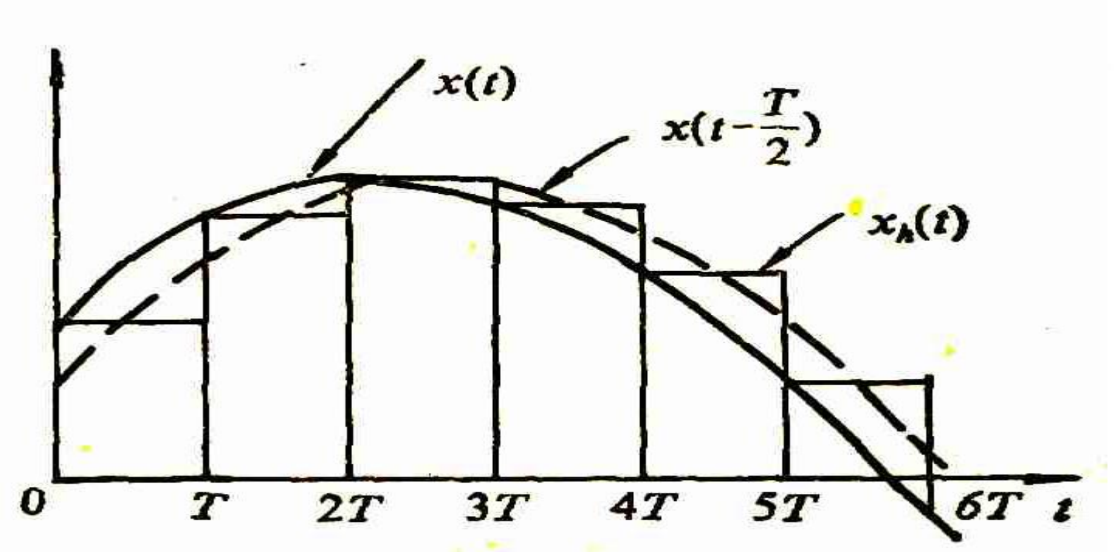


$$x_{DA}(t) == \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_B[n]\Delta h_0(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t-nT)$$

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

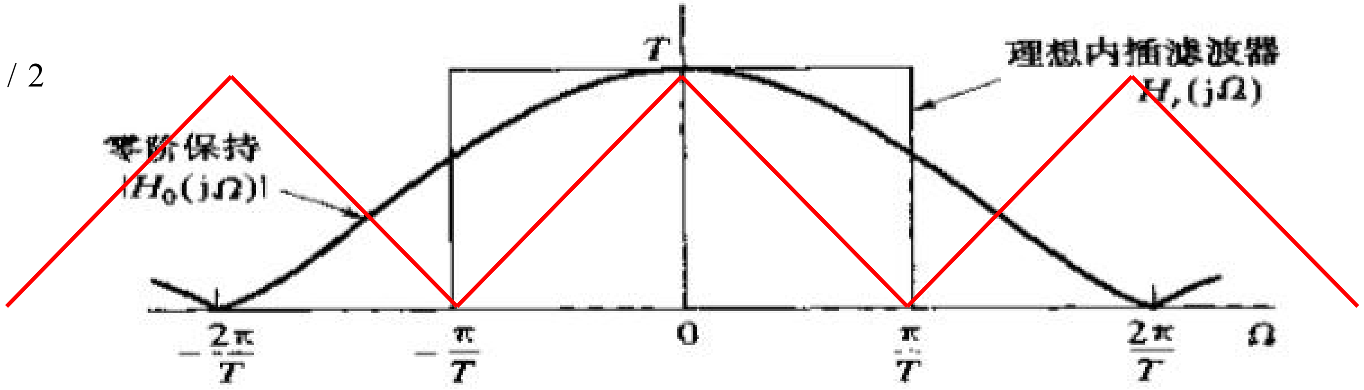
零阶保持器

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{其它} \\ 1 & 0 < t < T \end{cases}$$



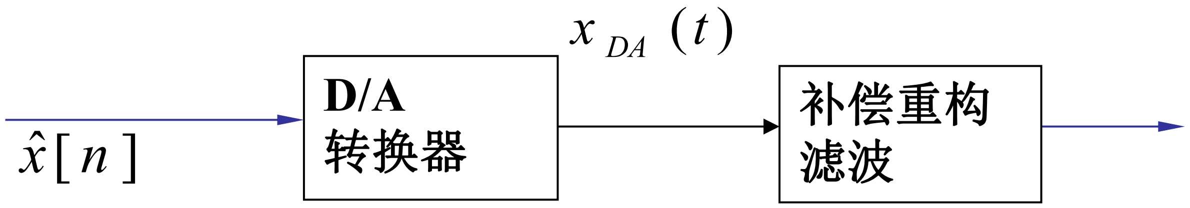
$$H_0(s) = \left(\frac{1 - e^{-TS}}{s}\right)$$

$$H_0(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}$$

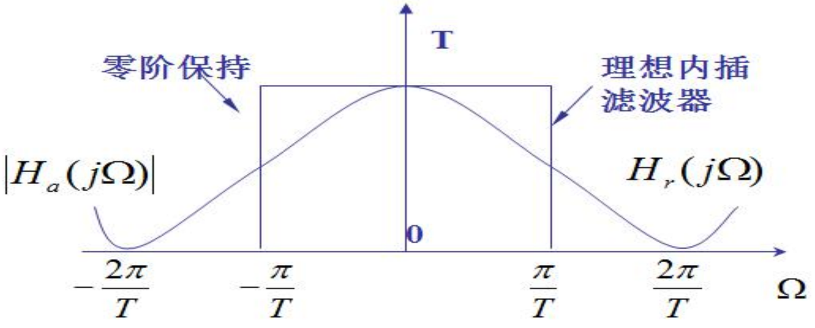


- 零阶保持器不是一个理想的低通滤波器
  - 幅度特性发生畸变；
  - 高频分量仍然能够通过，引入噪声和高频镜像。
  - 信号产生滞后群延迟（**T/2**），对闭环反馈系统的稳定性不利。

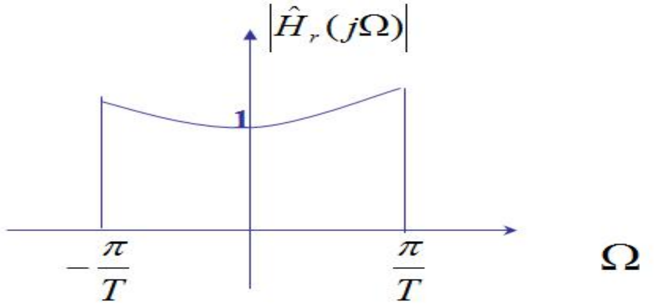
补偿重构滤波器



- 补偿重构滤波器：



$$\tilde{H}_r(j\Omega)=\frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$



$$\tilde{H}_r(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}e^{j\Omega T/2}, |\Omega|<\pi/T\\ 0, |\Omega|>\pi/T\end{cases}$$

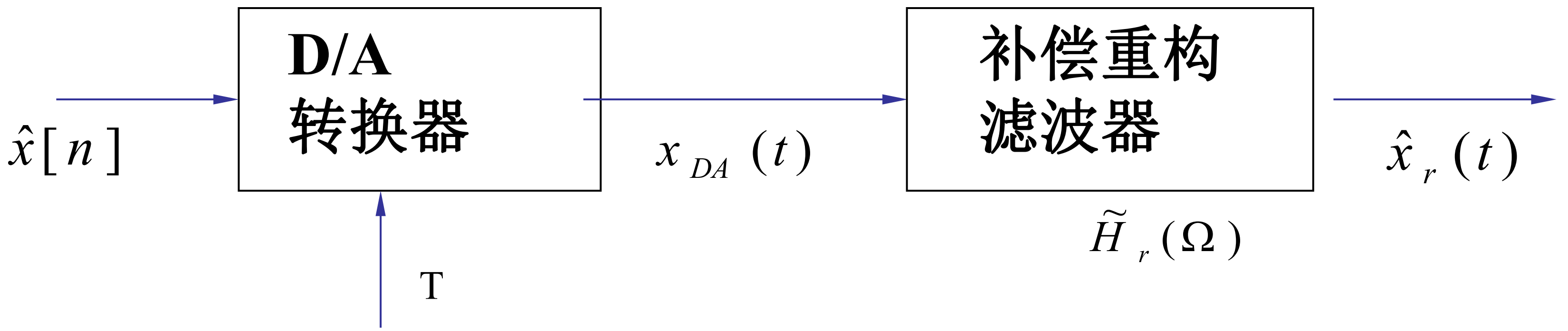
理想补偿重构滤波器，用于紧跟在一个零阶保持重构系统如D/A转换器之后。

$$\hat{x}_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

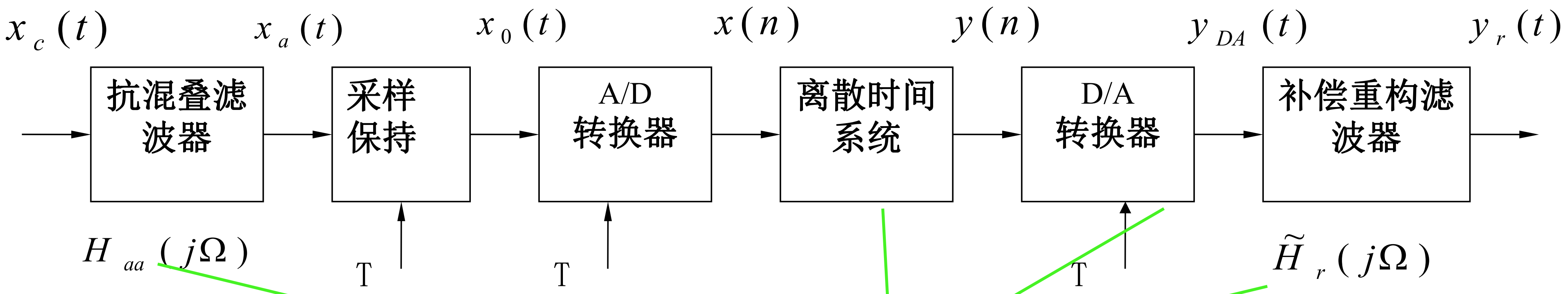
$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t)$$

式中 $e_a(t)$ 是一个带限白噪声信号。



模拟信号数字处理系统的LTI特性

- 如果抗混叠滤波器的输出是带限，并且离散时间系统是LTI的，那么总系统就具有LTI特性

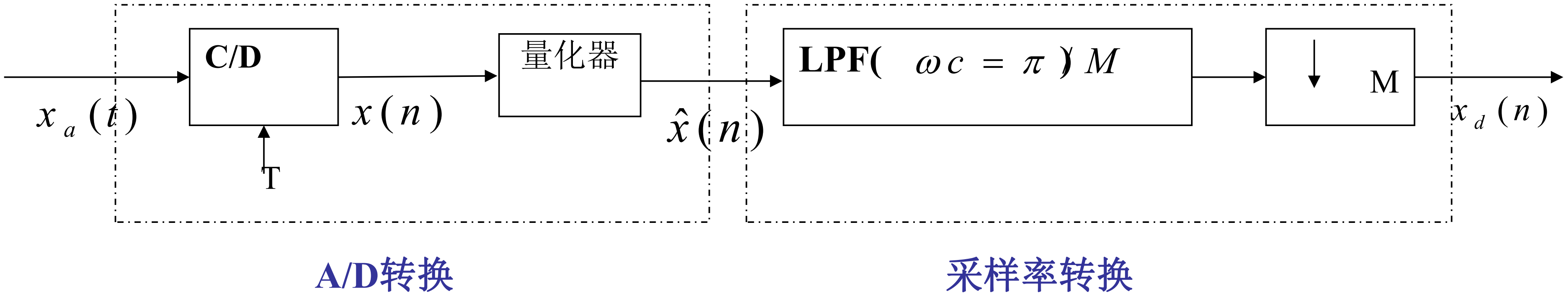


$$y_r(t) = y_a(t) + e_a(t)$$

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

四、过采样A/D转换

- 为研究过采样和量化阶大小之间的关系，考察如下图所示的系统。

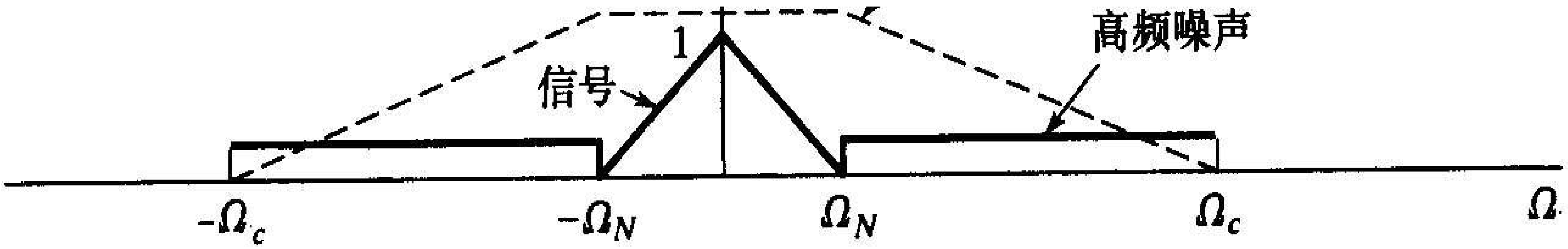


- 此种采样方式下的信噪比？

基本假设

- $x_a(t)$是零均值广义平稳的随机过程
- 功率谱密度记 $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$
- 自相关函数记为 $\phi_{x_a x_a}(\tau)$
- 假设$x_a(t)$已经带限到Ω_N，即

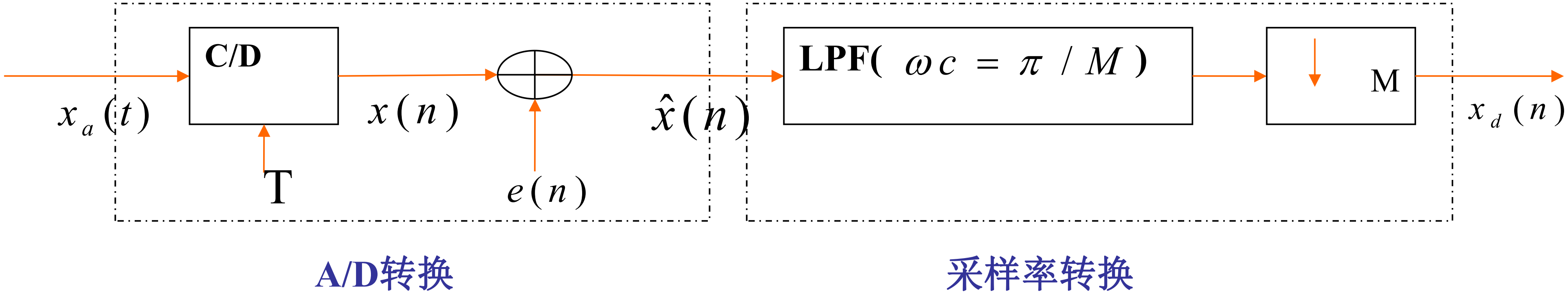
$$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)=0, \qquad |\Omega|\geq \Omega_N$$



过采样+抽取 后信噪比有无改善？

- 假定量化为加性噪声模型， $2\pi/T = 2M\Omega_N$
  - 常数M称为过采样率
- 抽取滤波器增益为1的理想低通滤波器
  - 截止频率为 $\omega_c = \pi/M$

系统等效为：



$x_{da}[n]$

$x_{de}[n]$

输出中的信号分量

- 令 $\phi_{xx}[m]$和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 分别记作 $x[n]$ 的自相关函数和功率谱密度，则有：

$$\phi_{xx}[m]=\varepsilon\{x[n+m]x[n]\}=\varepsilon\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\}=\phi_{x_a x_a}(mT)$$

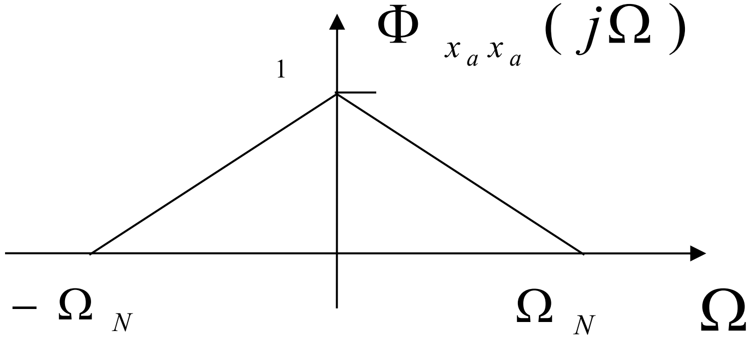
  - 即样本序列的自相关函数就是对应的连续时间信号自相关函数的采样。

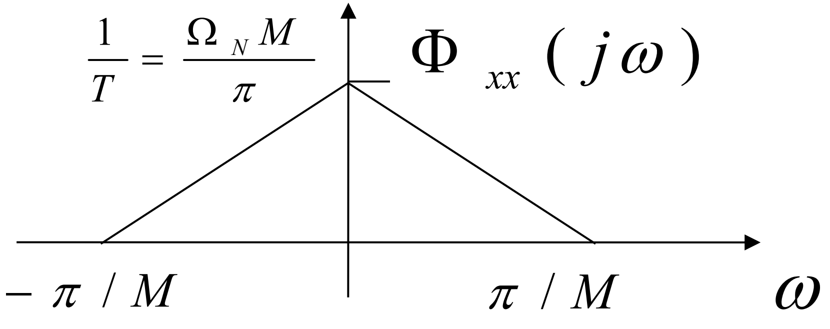
$$\Phi_{xx}(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi_{x_a x_a}\left(j\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

采样信号功率等于模拟信号功率

- 输入带限，过采样M倍的信号功率谱为：

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T}) & |\omega| < \pi / M \\ 0 & \pi / M < |\omega| < \pi \end{cases}$$





$$\varepsilon\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(j\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\frac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_N}^{\Omega_N}\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)d\Omega = \varepsilon\{x_a^2(t)\}$$

抽取对功率影响

- 注意到 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 是带限制 $|\omega| < \pi / M$

$$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\Phi_{xx}(e^{j(\omega-2\pi k)/M}) = \frac{1}{M}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) \qquad |\omega| < \pi$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\{x_{da}^2[n]\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{M}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega = \varepsilon\{x^2[n]\}
\end{aligned}$$

- **结论：输出中信号功率保持不变**

输出中的量化噪声分量

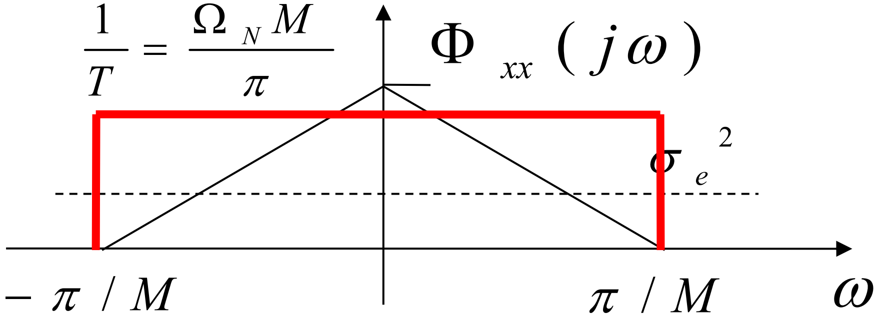
- 假设 $e[n]$ 是一个广义平稳的白噪声过程，其均值为零，方差为$\sigma_e^2=\frac{\Delta^2}{12}$，
- 则 $e[n]$ 的自相关函数和功率谱分别是：

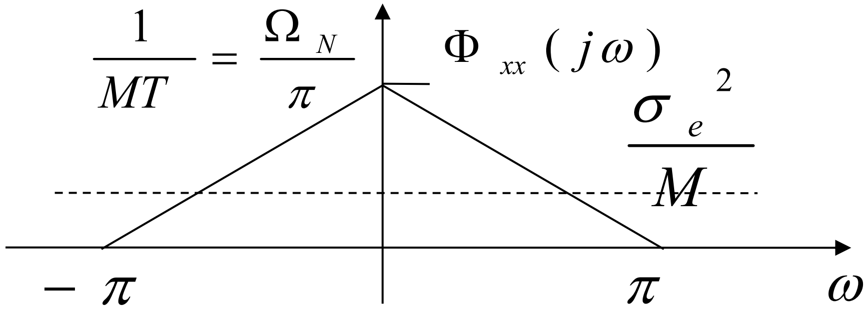
$$\phi_{ee}[m]=\sigma_e^2\delta[m]$$

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega})=\sigma_e^2$$

$$P_{de}=\varepsilon\{x_{de}^2[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_e^2/M\,d\omega$$

$$=\frac{\sigma_e^2}{M}=\frac{1}{12M}\left(\frac{X_m}{2^B}\right)^2$$





抽取前、后信号和量化噪声的功率谱密度

M倍过采样+抽取之后的信噪比

$$SNR = 10\lg(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}}) = 10\lg(\frac{12 \bullet M \bullet 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2})$$

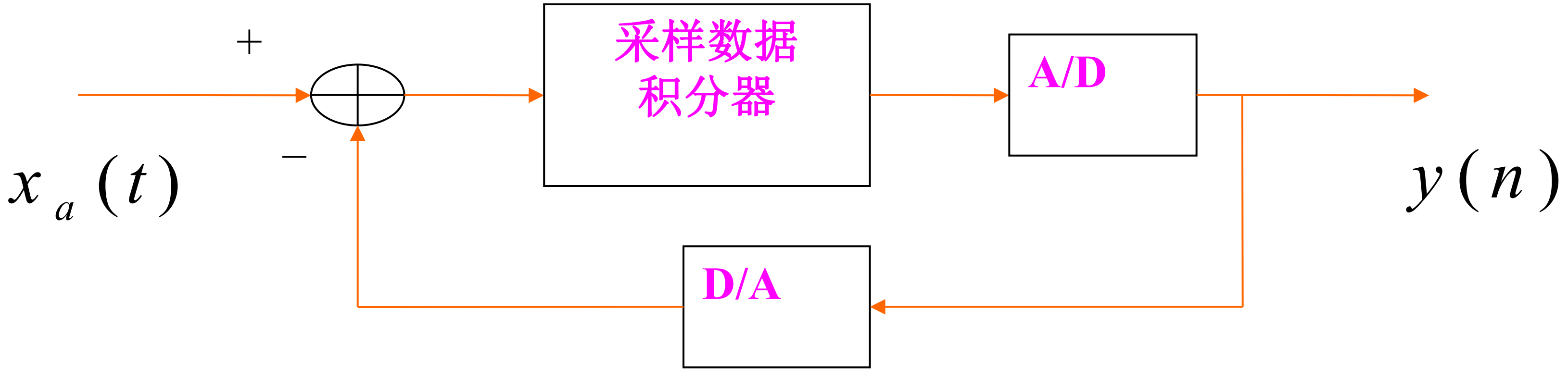
$$= 6.02B + 10\lg M + 10.8 - 20\lg(\frac{X_m}{\sigma_x})$$

- 结论：
- 相同位数条件下，信噪比提升**10logM**分贝
- 在相同信噪比要求下，每将过采样**M**加倍，就可以减少**1/2**位量化位数。

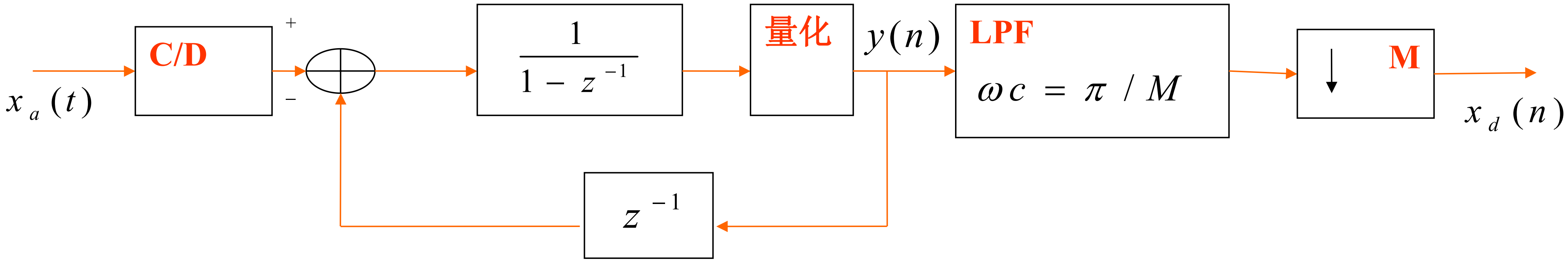
噪声成形的过采样A/D

- 过采样和抽取可以改善信噪比。但是为了实现所需要的量化位数上有明显的减少，就需要很大的过采样率。
  - 例如，为了从16位减少到12位就要求M=256！这似乎是一个相当高的代价。
- 然而，如果把过采样与用反馈噪声谱成形的技术结合起来，可以获得更好的性能。
  - 噪声成形中的基本思想是要改变A/D转换的过程，使得量化噪声的功率谱密度不再是均匀的，将其成形为大部分的噪声功率位于频带 $|\omega| < \pi/M$ 之外的形式。后续的滤波和减采样就将更多的量化噪声功率滤除。

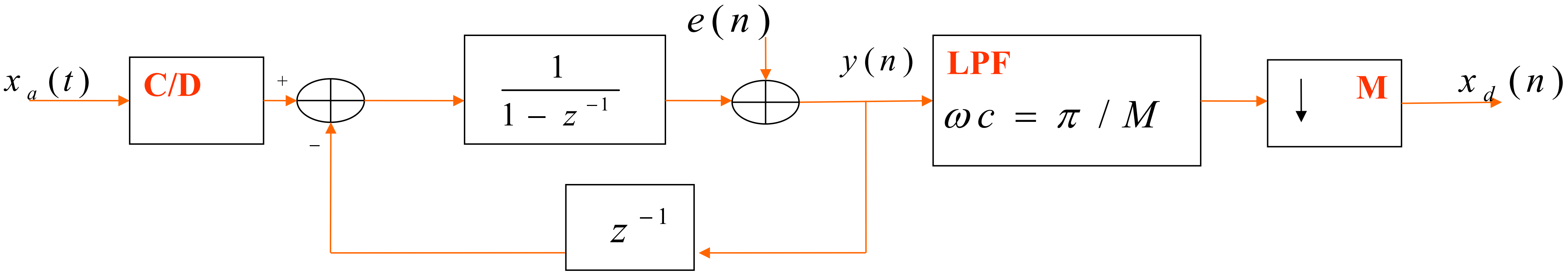
噪声成形量化器（Delta-Sigma）



带量化成形的过采样离散等效结构

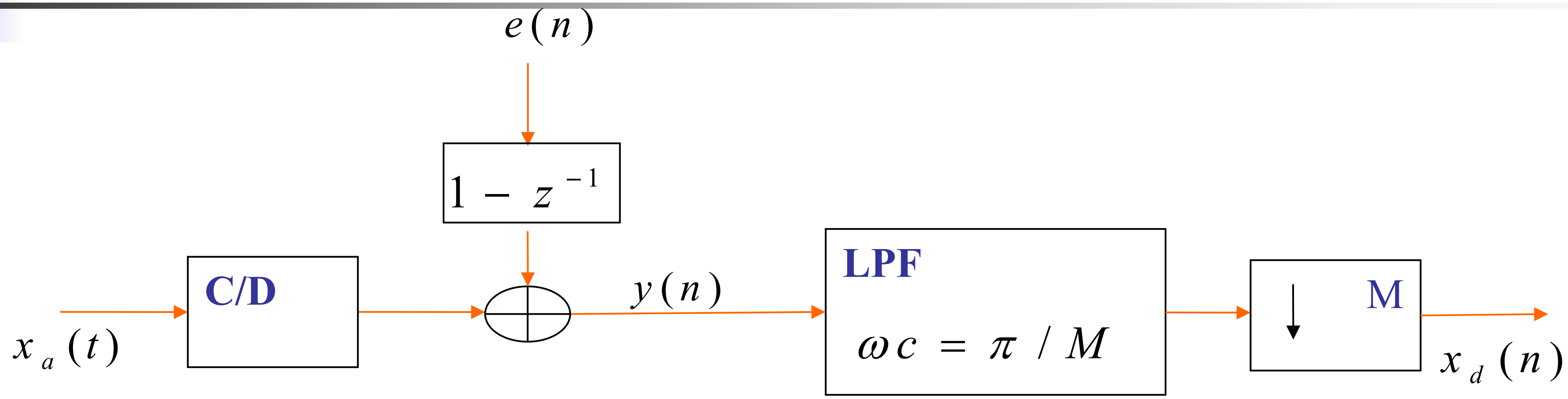


噪声成型后的信号与噪声

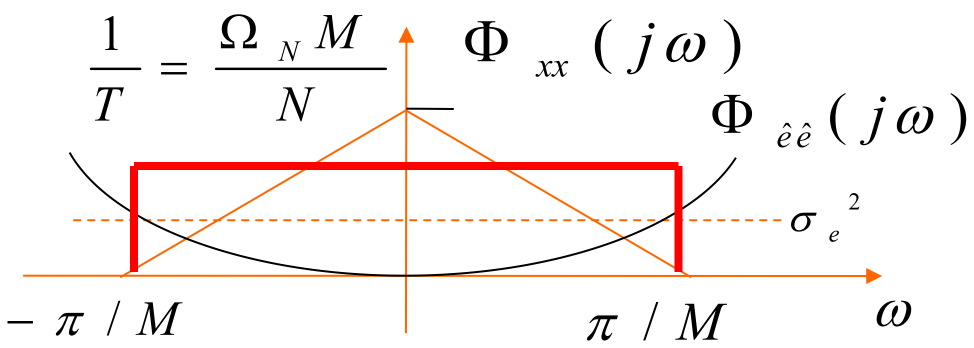


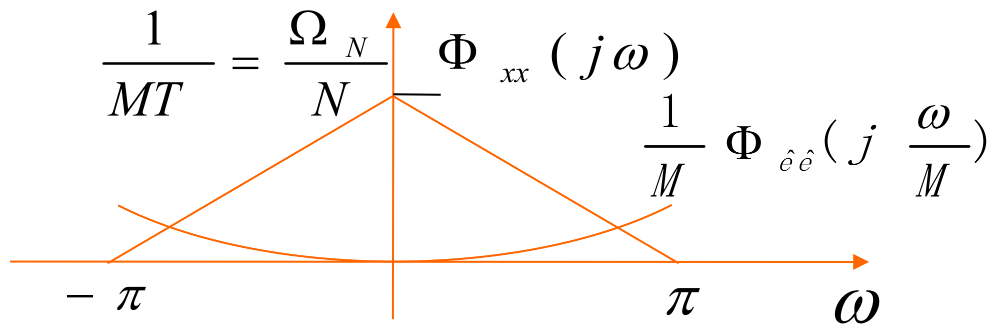
- **y[n]是两个分量之和：**
  - 单独由**x[n]**产生的**y_x(n)**
  - 单独由噪声**e[n]**产生的**ê[n]**。
- 传递函数分别为： $H_x(z) = 1 \quad H_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right)$
- 从而有： $y_x[n] = x[n] \quad \hat{e}[n] = e[n] - e[n-1]$

抽取前、后信号和量化噪声的功率谱密度



$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{jw})=\sigma_e^2\left|H_e(e^{jw})\right|^2=\sigma_e^2\left[2\sin(\omega/2)\right]^2$$





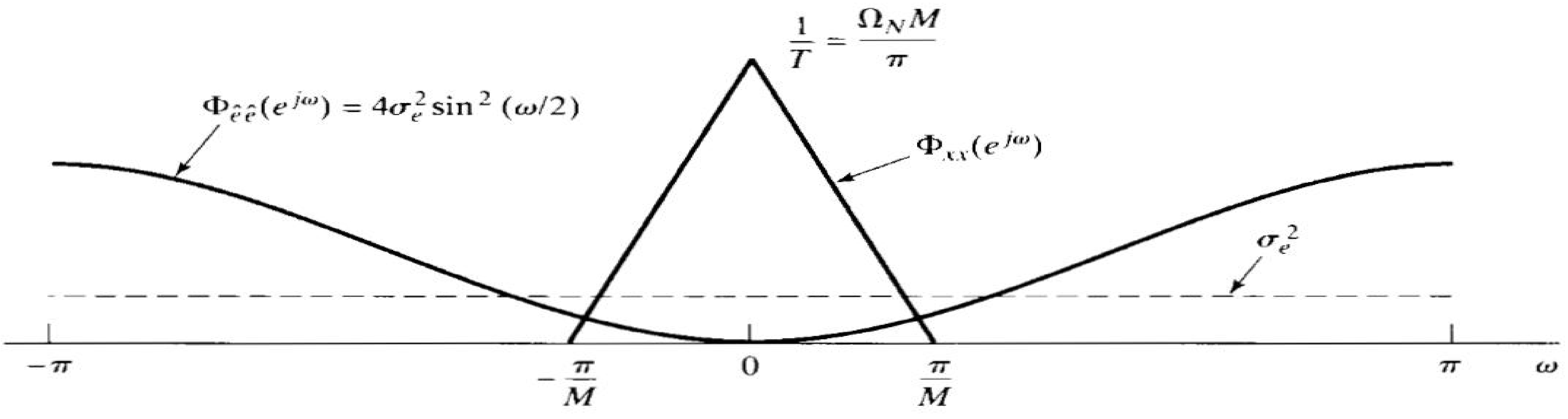


Figure 4.64 The power spectral density of the quantization noise and the signal.

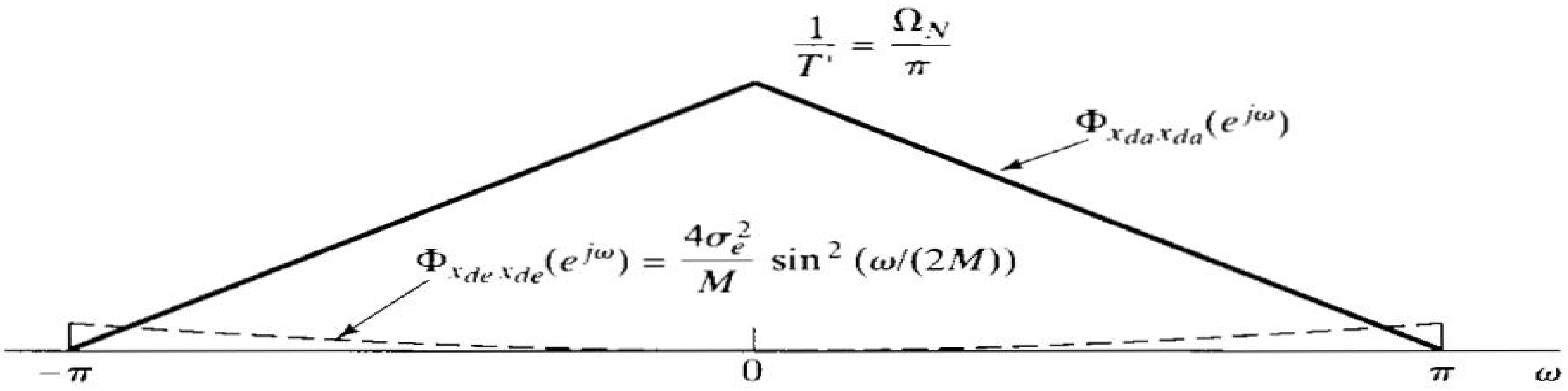


Figure 4.65 Power spectral density of the signal and quantization noise after downsampling.

抽取滤波后量化噪声的功率

- 噪声成型后**总噪声功率增加:** $\varepsilon\left\{\hat{e}^{2}[n]\right\}=2\sigma_e^2$
  - 量化噪声成形使噪声功率比直接过采样情况有**更多功率位于信号带宽**$|\omega|<\pi/M$以外，被后续的低通滤波器滤除。
- 输出中的量化噪声功率是：

$$P_{de}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{\hat{e}\hat{e}}\left(e^{jw}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta^2}{12M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right)\right)^2 d\omega$$

- 假设M足够大，以至满足： $\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right)\approx\frac{\omega}{2M}$
- 从而有： $P_{de}=\frac{\Delta^2}{12}\frac{\pi^2}{3M^3}=\frac{1}{36}\frac{\Delta^2\pi^2}{M^3}$

输出的信噪比为：

M	Direct quantization	Noise shaping
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

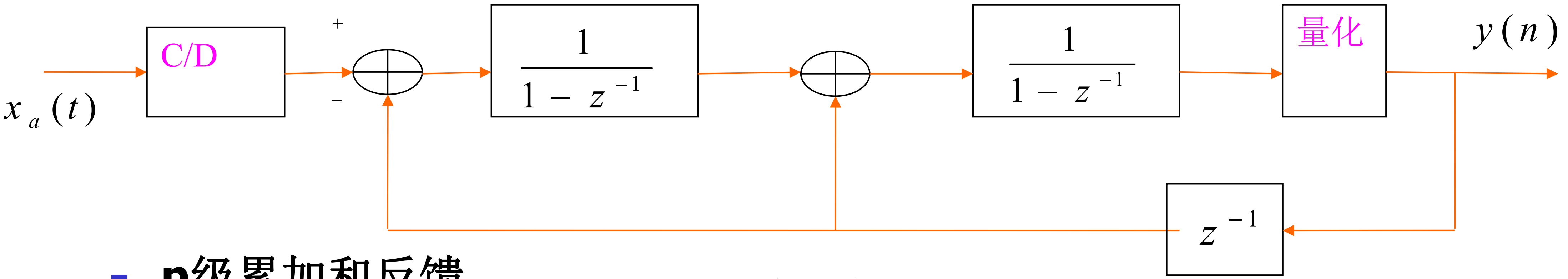
$$SNR = 10\lg\left(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}}\right) = 10\lg\left(\frac{12 \bullet 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\frac{3M^3}{\pi^2}\right)$$

$$= 6.02B + (30\lg M - 5.17) + 10.8 - 20\lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

- 结论：
- 同样量化位数下信噪比提升**30lgM-5.17**
- 利用噪声成形后每加倍过采样率可节省**1.5**比特
  - 直接量化时，每加倍过采样率可以节省**1/2**比特量化

高阶噪声成形

Quantizer order p	Oversampling factor M				
	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5



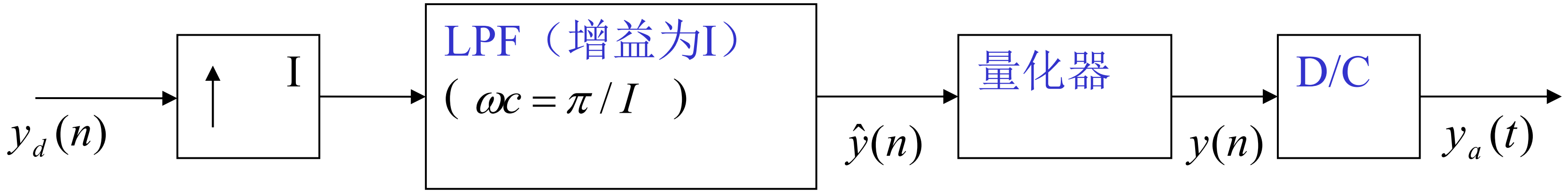
- **p级累加和反馈**

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{jw}) = \sigma_e^2 [2\sin(\omega/2)]^{2p}$$

- 当p=2和M=64时，精度上有13比特提高，也就是说1比特量化器在抽取器的输出端能够实现大约14比特的精度。
- 但大p值易产生不稳定和发生震荡的潜在威胁。

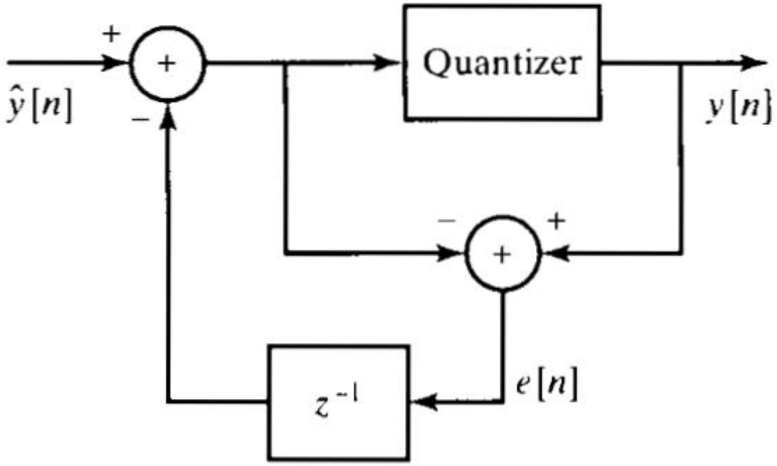
五、D/A中过采样和噪声成形

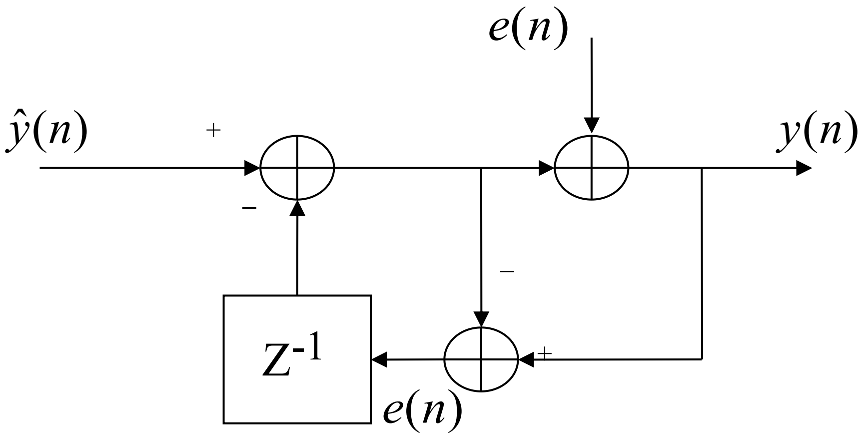
- 为了简化模拟抗混叠滤波和提高精度，信号最初被过采样，但是最后输出 $x_d(n)$ 还是在奈奎斯特采样率下的数据。
- 对于离散时间信号处理来说，总是非常希望最小的采样率，因此以相反的过程来应用同一原理从而改善**D/A**转换是可能的。如图所示：



一阶噪声成形量化器

- 要被转换为连续时间信号的序列 $y_d[n]$ 首先被增采样得到 $\hat{y}[n]$，送到D/A转换器之前再重新量化。





- 如果可以确保量化噪声不占据信号频带的话，那么就能用一个很少位数的简单D/A转换器，这样噪声就能用廉价的模拟滤波滤除。

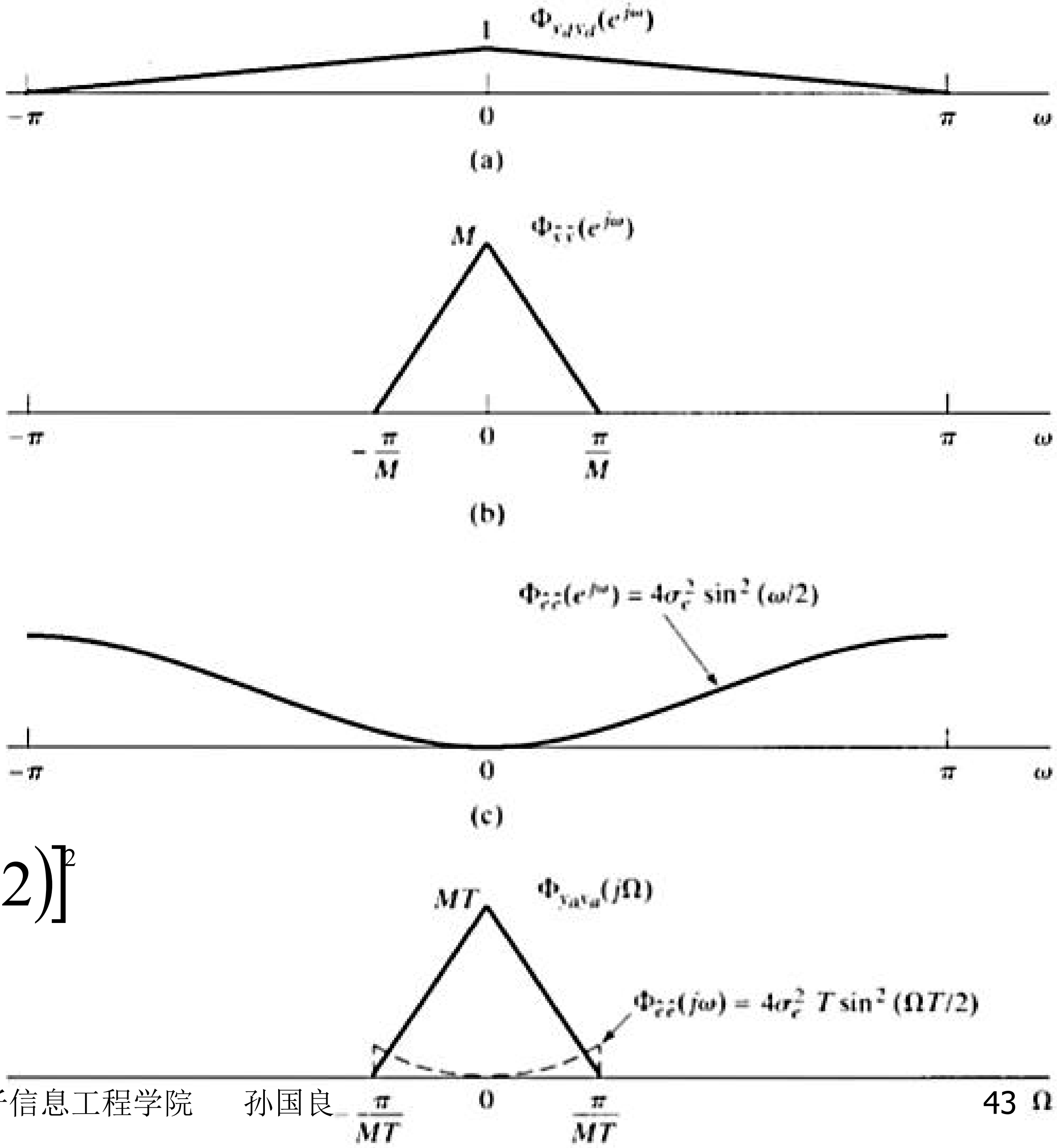
噪声成形量化器

- 从 $\hat{y}[n]$ 到y[n]的传递函数是1。
- 从e[n]到y[n]的传递函数是：

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}$$

- 噪声成形系统输出端量化噪声分量ê[n]功率谱密度

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}\left(e^{jw}\right) = \sigma_e^2\left[2\sin(\omega/2)\right]^2 = \frac{\Delta^2}{12} * \left[2\sin(\omega/2)\right]^2$$



作业

- 4.6
- 4.7
- 4.24
- 4.25
- 4.34
- 4.43
- 4.49

D/A失真分析

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

- 用加性噪声模型来表示量化效应：

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT)$$

- 简化讨论，定义：

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT)$$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t)$$

$$X_s(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j2\pi k/T)$$

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT}$$

$$= (\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn})H_0(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega)$$

$$X_0(j\Omega) = [\frac{1}{T}\sum X_a(j\Omega + j2\pi k/T)]H_0(j\Omega)$$

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn