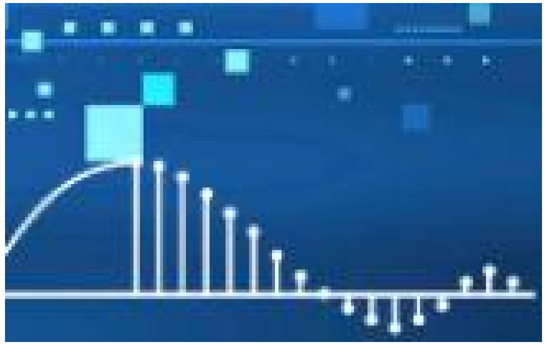
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第五章

Contents

数字滤波器设计与实现

IIR 滤波器设计

滤波器设计基础

IIR滤波器设计

FIR滤波器设计

- ◆h(n)为无限长序列；
- ◆H(z)在有限Z平面上存在极点；
- ◆实现结构上存在反馈环节，必须采用递归型结构实现。

- ◆主要思路寻找H(z),确定系数a_k,b_m

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

4.3 IIR数字滤波器设计

- **IIR滤波器很重要**
  - 相对**FIR**滤波器，**IIR**滤波器对于实现同样幅度性能来说是阶数最少系统。
- **IIR滤波器设计目标是系统函数H(z)**
- **IIR滤波器通常有两大类设计方法**
  - 模拟域设计
  - 数字域直接设计

一、 模拟域设计法

- 将连续域系统变换成满足预订指标的离散时间系统是传统中常用的一类方法：
  - 连续时间系统的设计方法成熟
  - 有很多经验公式可资利用
- 设计步骤：
  - 将离散系统性能技术指标转化为模拟指标
  - 利用模拟滤波器$H_c(s)$来逼近（模拟原型滤波器），
  - 通过某种变换离散为数字滤波器$H(z)$，
  - 数字滤波器等效的模拟滤波器$H_{eff}(s)$性能验证（模拟等效滤波器）

变换需要具备的条件

- 变换即是需要将S平面映射到Z平面，必须满足两个基本条件：
  - 1)$H_a(s)$ 频率响应与$H(z)$频率响应对应，也就是S平面虚轴要映射为Z平面单位圆；
  - 2）因果稳定的$H_a(s)$ 要映射为因果稳定的 $H(z)$，即S平面的左半平面要映射为Z平面的单位圆内部。
- 满足上面的映射有很多种，主要有两种方法：
  - 冲激响应不变法、
  - 双线性Z变换

1、冲激响应不变法

- 方法：使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟滤波器单位冲激响应的采样，即：

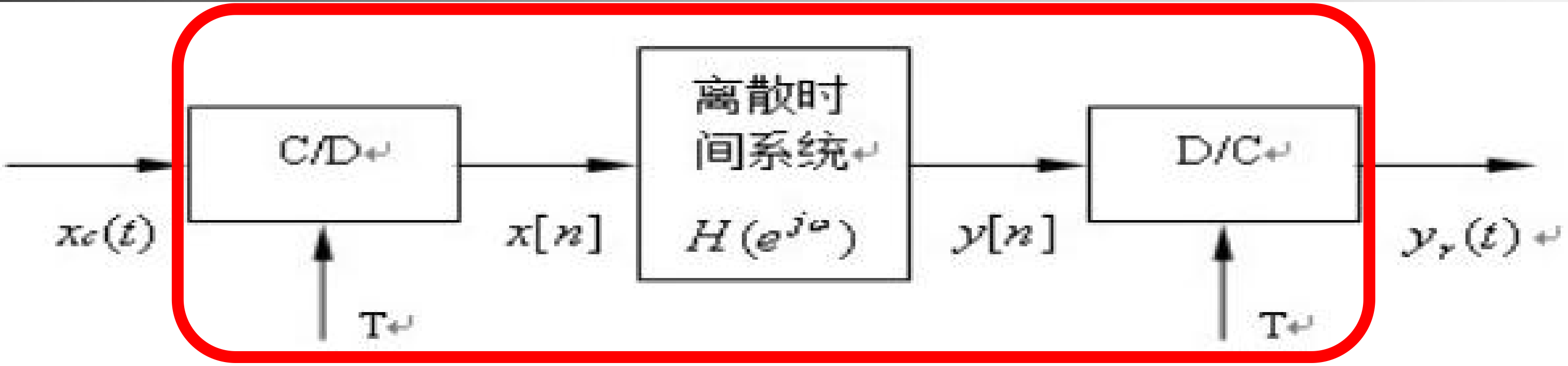
$$h(n) = h_c(t)\big|_{t=nT} = h_c(nT)$$

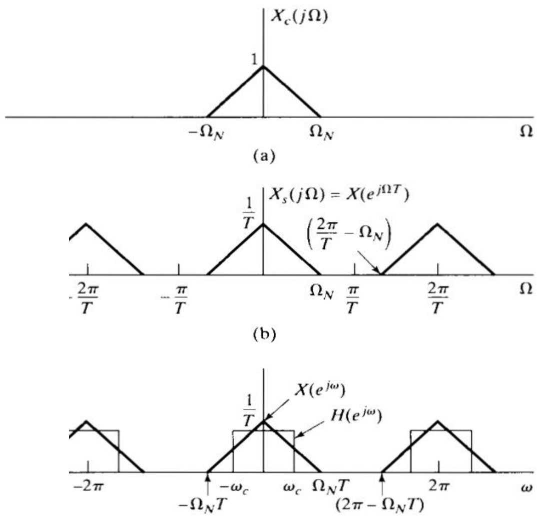
- 利用上述关系找到模拟滤波器对应的离散时间系统函数**(采样定理)**

$$z = e^{sT}$$

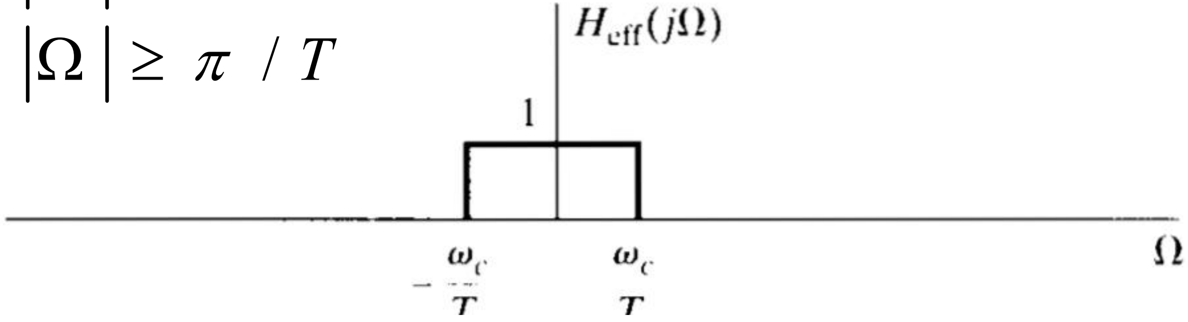
$$H(z)\big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - j\frac{2\pi k}{T})$$

设计依据：离散与连续LTI系统的等效



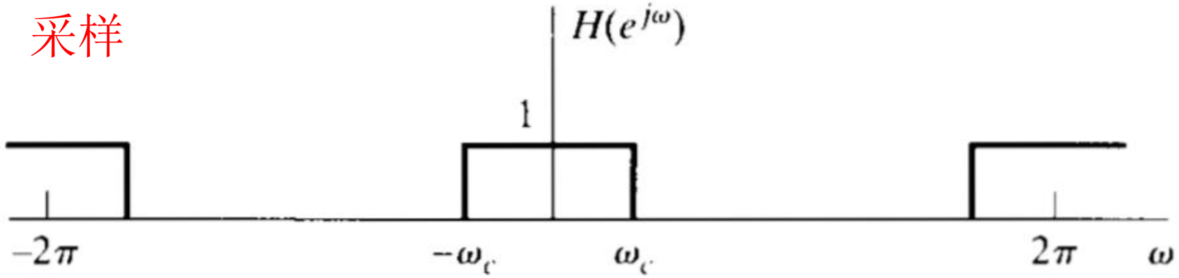


$$\boxed{H_{eff}(j\Omega)} = \begin{cases} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$



$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}(j\Omega)\big|_{\Omega=\omega/T}$$

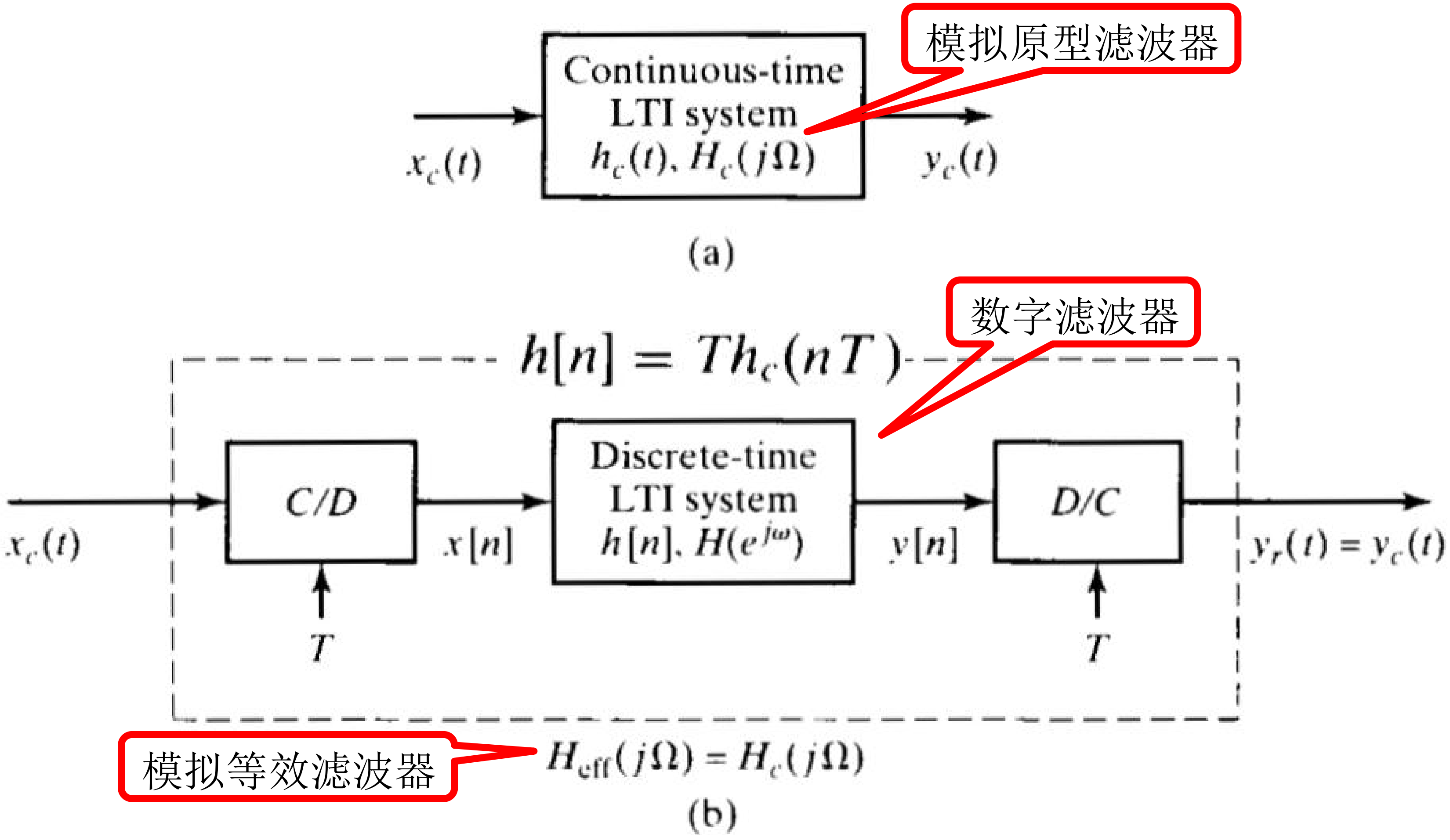
采样



$$h(n) = T \times h_{eff}(t)\big|_{t=nT}$$

$$H_{eff}(j\Omega) = 0 \qquad |\Omega| \geq \pi/T$$

冲激响应不变法设计数字滤波器



i）系统函数H(z)求取方法

- 模拟滤波器分解为一阶极点系统的并联形式，即：

$$H_c(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$$

- 则其单位冲激响应为：$h_c(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)$
- 系统函数为：

$$H(z)=Z[h(n)]=Z[h_c(nT)]$$

$$=Z[\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k nT}u(nT)]=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$$

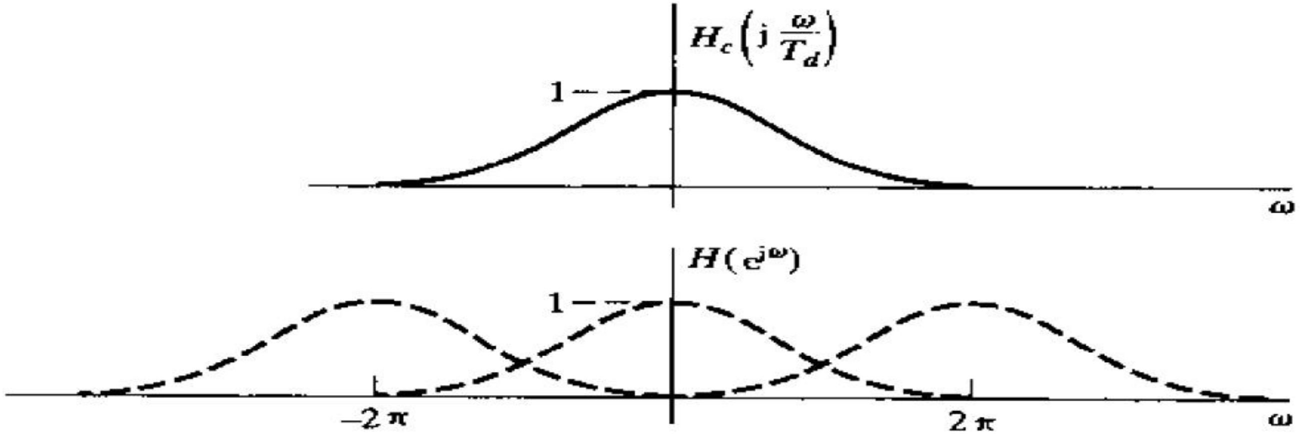
ii) 注意问题

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c\left(j\frac{\omega - 2k\pi}{T}\right)$$

- a）可以保证S平面与Z平面极点对应，但不能保证零点对应； $\omega = \Omega T$
- b）频率响应与采样间隔成反比，当采样时间太小时，系统增益过高，故采用修正的冲激响应不变法：

$$h(n) = T h_a(nT) \qquad H(z) = T\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- c) 模拟原型滤波器时域通常都无法理想带限，时域采样导致频谱混叠



1、提高采样频率将减小混叠

2、阶跃响应不变法也可以减小混叠

扩展：阶跃响应不变法 $g(n)=g_a(t)|_{t=nT}=g_a(nT)$

- 数字阶跃响应对应于模拟滤波器阶跃响应采样

$$G(z)=\frac{z}{z-1}H(z) \qquad G_a(s)=\frac{1}{s}H_a(s)$$

$$G_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k} \qquad g_a(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)$$

$$H(z)$$

$$=\frac{z-1}{z}G(z)=\frac{z-1}{z}Z[g(n)]=\frac{z-1}{z}Z[g_a(nT)]$$

$$=\frac{z-1}{z}\underbrace{Z\{L^{-1}[Ga(s)]|_{t=nT}\}}_{\text{采用冲激响应不变法}}=\frac{z-1}{z}\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$$

ii) 注意问题

- a) 仍为采样关系，所以仍然满足： $z = e^{sT}$

- $\omega = \Omega T$

- b) 数字滤波器的频率响应为：

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{jw}-1}{e^{jw}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{H_a\left(j\Omega - \frac{2k\pi}{T}\right)}{\boxed{j\left(\Omega - \frac{2k\pi}{T}\right)}}$$

- 阶跃响应不变法仍然不可避免混叠现象
- 由于 $1/S$ 因子的存在，使得幅度响应与频率成反比因此混叠现象比冲激响应不变法要弱。

例题：

- 离散处理连续时间信号的系统框图如下：

- 其中，数字滤波器要求如下：

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1 \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi \qquad (7.15a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783 \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi \qquad (7.15b)$$

- 假设Td=1，试用冲激响应不变法设计一个具有巴特沃兹滤波特性，满足上述要求的数字滤波器

解：

- （1）首先将数字滤波器技术指标变换成**模拟原型滤波器**的技术指标 $|H_c(j\Omega)|$

$$0.89125 \le |H_c(j\Omega)| \le 1 \qquad 0 \le |\Omega| \le 0.2\pi \qquad (7.14a)$$

$$|H_c(j\Omega)| \le 0.17783 \qquad 0.3\pi \le |\Omega| \le \pi \qquad (7.14b)$$

- 由于有混叠现象的存在可能导致指标恶化，设计完成后，需要对滤波器性能进行评估

模拟原型滤波器确定

- 模拟巴特沃兹滤波器的幅度响应是频率单调函数

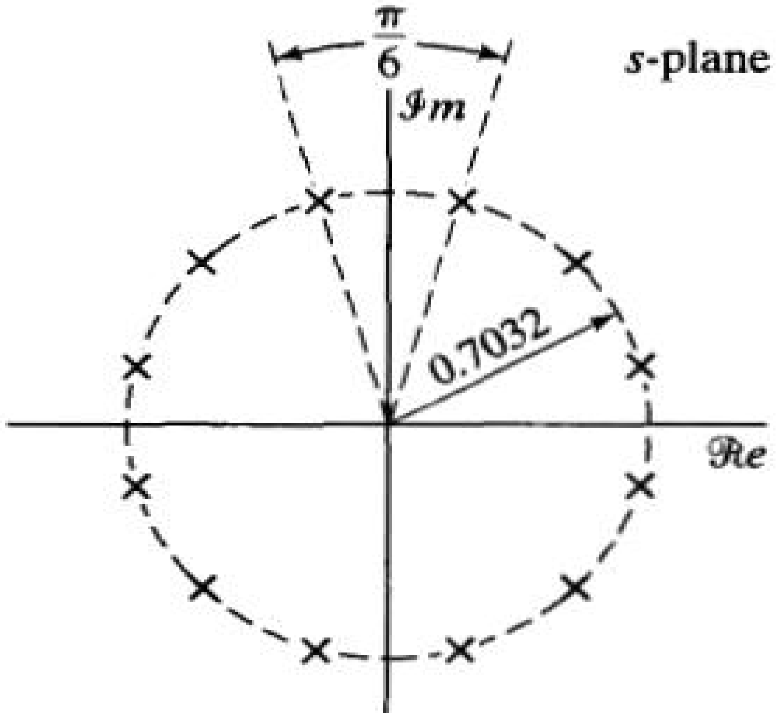
$$|H_c(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

$$|H_c(j0.2\pi)|\geq 0.89125$$
$$|H_c(j0.3\pi)|\leq 0.17783$$

- 方程解是N＝5.8858和 Ω_c=0.70474。
- 取N＝6得 Ω_c ＝0.7032。
  - 取此值，则完全可以满足通带指标并超过（连续时间滤波器）阻带指标（0.0289）。给离散时间滤波器得混叠留有余地

巴特沃兹 $H_c(s)H_c(-s)=1\Big/\left[1+\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$

- 12个极点均匀分布在半径
- Ω_c =0.7032的圆周上



第一对极点： $-0.182\pm j(0.679)$

第二对极点： $-0.497\pm j(0.497)$

第三对极点： $-0.679\pm j(0.182)$

$$H_c(s)=\frac{0.12093}{(S^2+0.3640S+0.4945)(S^2+0.9945S+0.4945)(S^2+1.3585S+0.4945)}$$

数字滤波器求取

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{T_d A_k}{1-e^{s_k T_d}z^{-1}}$$

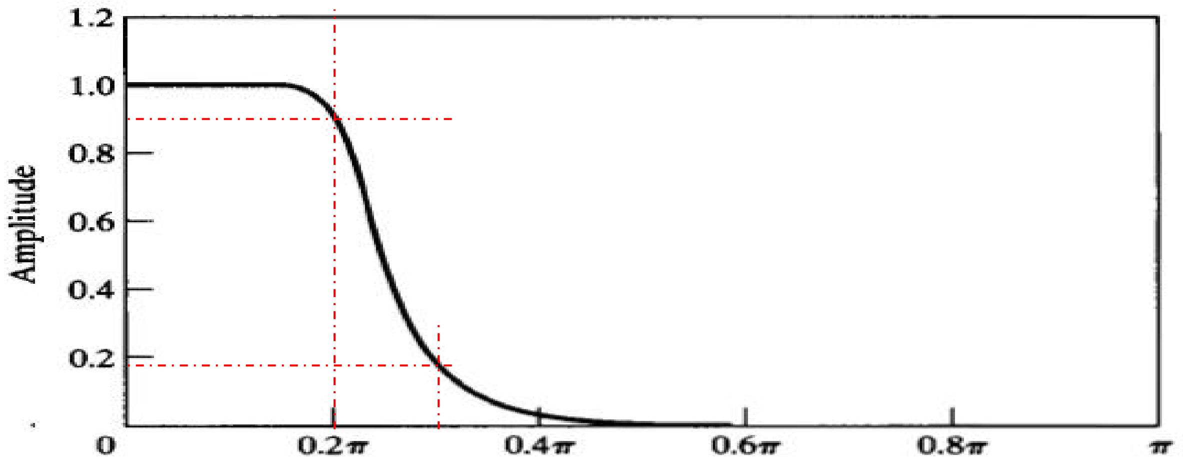
- 如果我们把 $H_c(s)$ 示成一个部分分式展开式并然后将各共轭对结合在一起，则得出离散时间滤波器的系统函数

$$H(z)=\frac{0.2871-0.4466z^{-1}}{1-1.2971z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.1428+1.1455z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}}+\frac{1.8557-0.6303z^{-1}}{1-0.9972z^{-1}+0.2570z^{-2}}$$

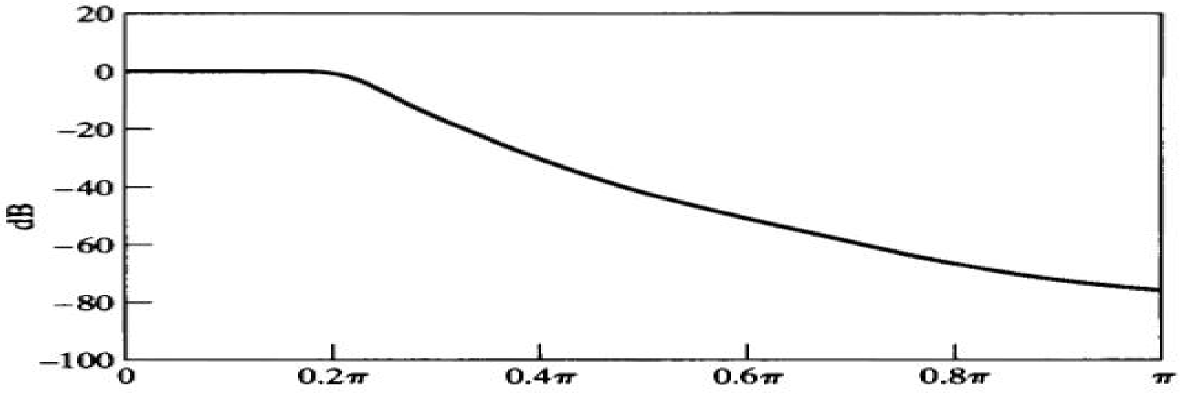
  - 显而易见，用冲激响应不变法设计得到的系统函数可直接用并联形式实现。
  - 如果需要用串联形式或直接形式，则应当用适当的方法将分散的各个二阶项组合起来。

频率响应验证

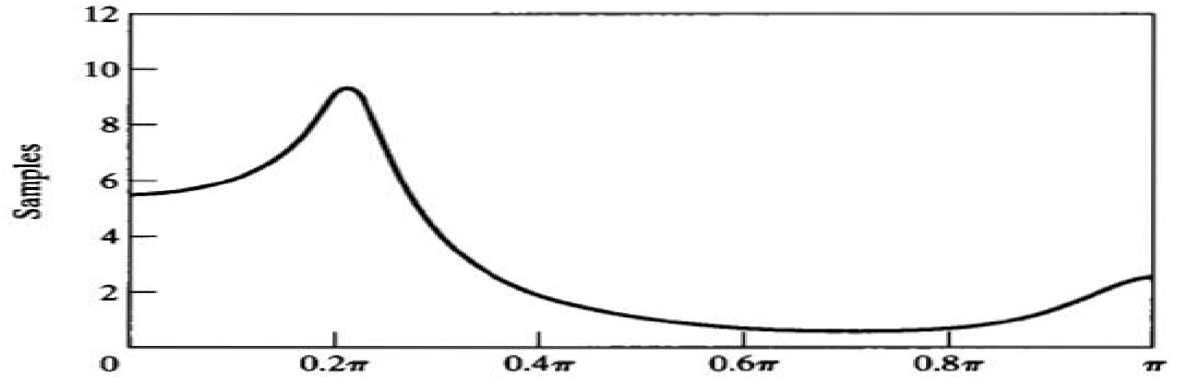
- 采样引入的混叠造成离散时间滤波器在通带边缘、阻带边缘处可能超过指标，需要进行验证
- 如果由于混叠使所得出的离散时间滤波器不能满足技术指标，则可试用较高阶的滤波器，或者保持阶次不变而调整滤波器的参数。



（图7.6b）幅度（dB）



（图7.6a）对数幅度（dB）



（图7.6c）群延迟

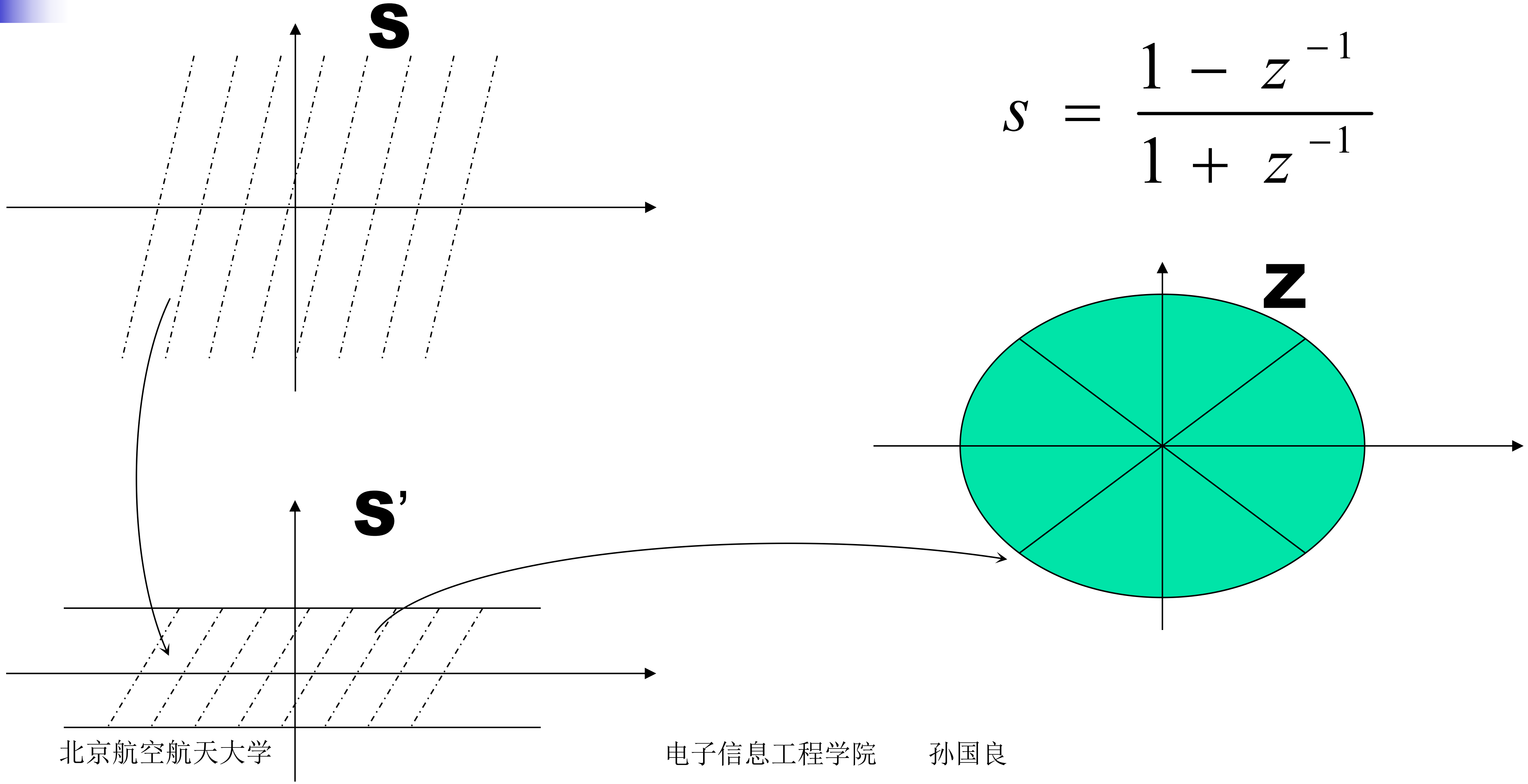
2、双线性Z变换

- 冲激响应不变法和阶跃响应不变法由于使用了时域上的采样原理，所以不可避免的产生了频率响应混叠失真。
  - 其原因也可以解释成S到Z平面的多值映射问题。
- 为了克服这一缺点，引入单值映射（双线性变换），使得S平面的虚轴单值的映射到单位圆上。

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

双线性Z变换处理过程

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



第一映射关系：

S $\Rightarrow$ S'

$$\Omega = tg\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)$$

$$j\Omega = jtg\left(\frac{\Omega' T}{2}\right) = \frac{j\sin\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{j\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)}}{e^{j\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{\Omega' T}{2}\right)}} = \frac{1 - e^{-j\Omega' T}}{1 + e^{-j\Omega' T}}$$

$$s = \frac{1 - e^{-s' T}}{1 + e^{-s' T}} = th\left(\frac{s' T}{2}\right)$$

第二映射关系：　　S’ $\longrightarrow$ Z

$$z = e^{s'T}$$

- 所以s与z的映射为：

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$j\Omega = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \qquad j\Omega = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}$$

$$j\Omega = \frac{j\sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} \qquad \Omega = tg(\frac{\omega}{2})$$

- 复变函数中的**双线性变换**。

双线性Z变换对应关系

$$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- 数字频率与模拟原型滤波器频率对应关系为：$\Omega = tg(\omega/2)$
  - 工程中为设计需要通常引入待定常数：$\Omega = c * tg(\omega/2)$
  - 1）为使模拟频率 Ω_c 与数字频率 ω_c对应：$c=\Omega_c / tg(\omega_c/2)$
  - 2）若要使模拟原型滤波器与模拟等效滤波器频率的低频特性相近：

$$\omega = \Omega T$$

$$\Omega = c * tg(\frac{\omega}{2}) \approx c * tg(\frac{\Omega T}{2}) \qquad c=\frac{2}{T}$$

- 从而改进的双线性变换为：$H(z)=H_c(s)\Big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$s = c\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

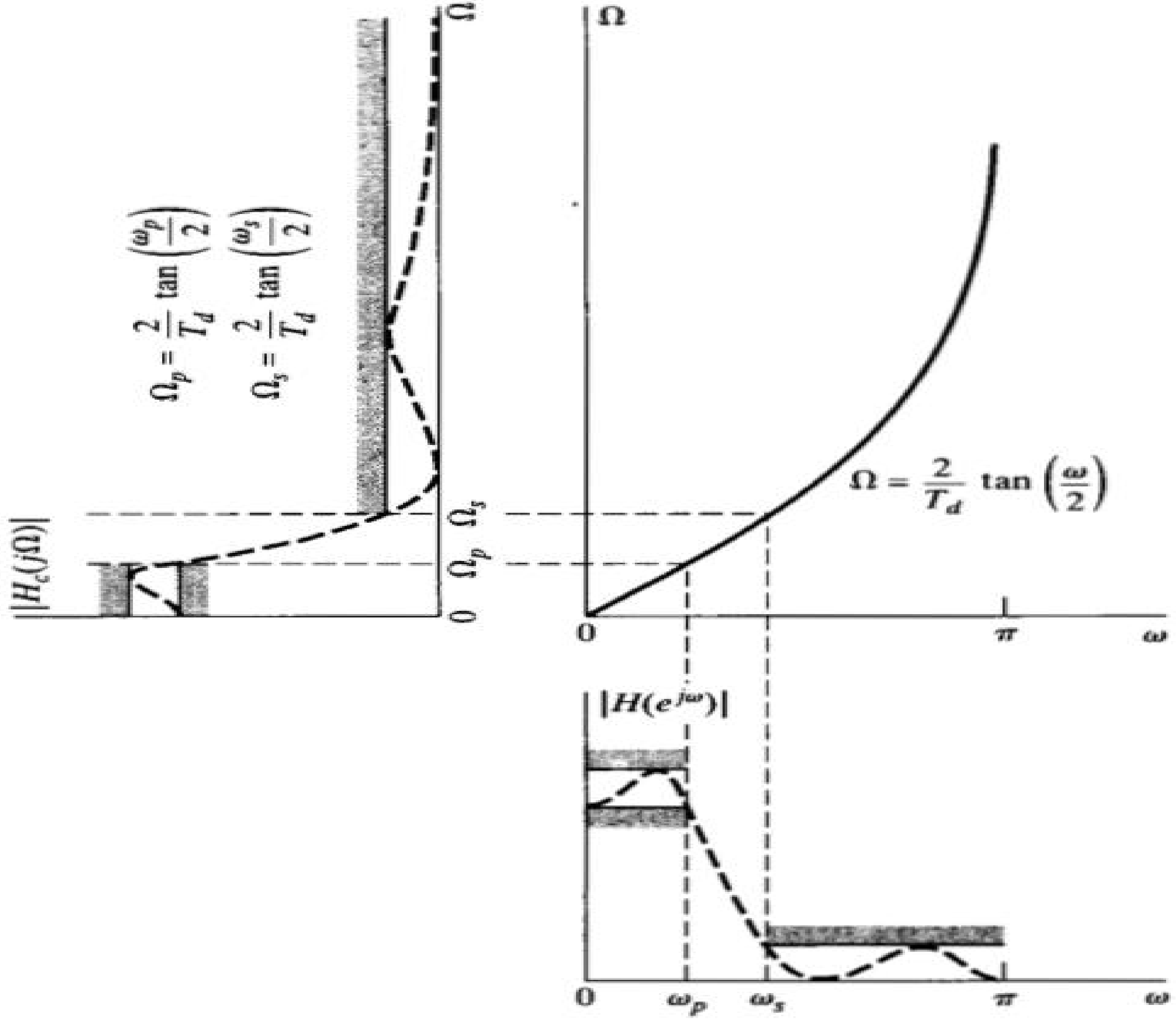
ii) 注意问题

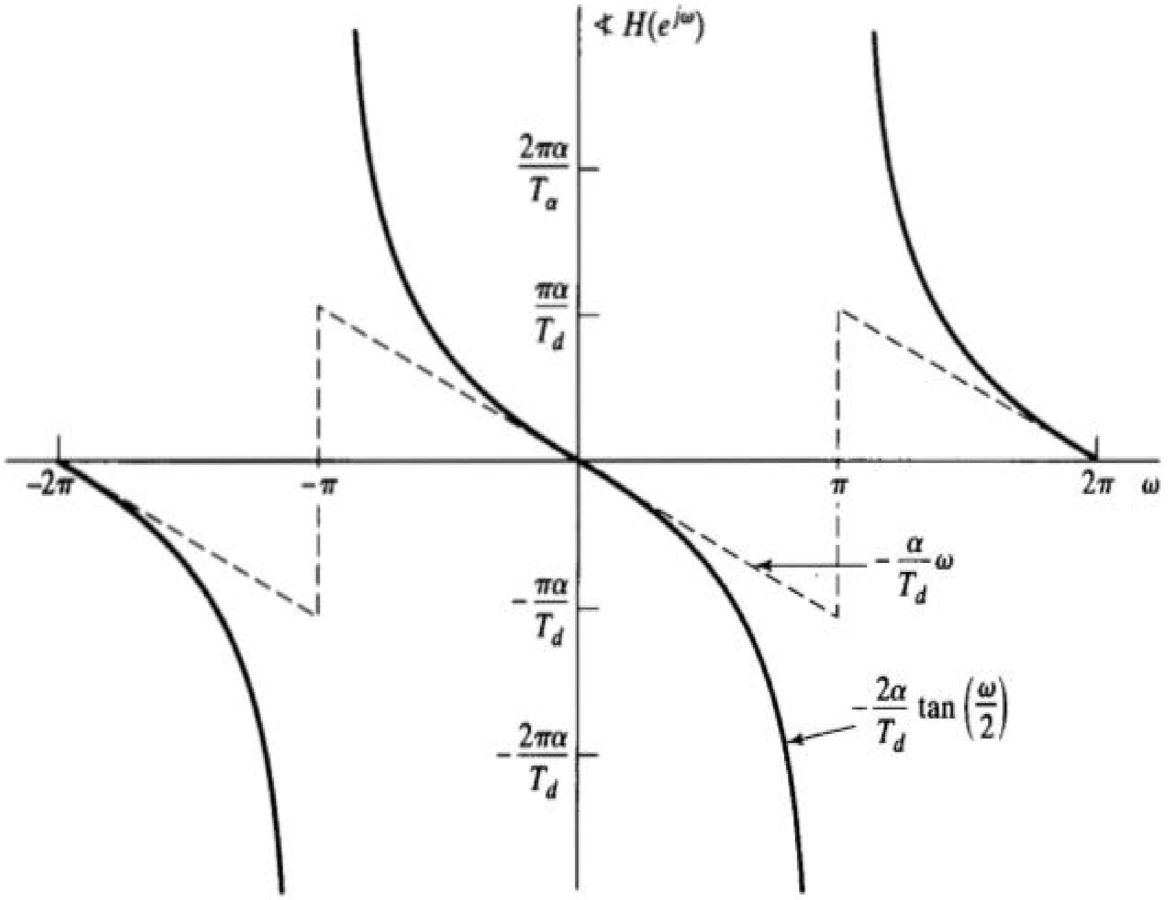
- **a)** 变换对因果、稳定性的影响
- 由于：$z = \dfrac{c + s}{c - s}$ 所以：

$$|z| = \sqrt{(c+\sigma)^2 + \Omega^2} \Big/ \sqrt{(c-\sigma)^2 + \Omega^2}$$

- 因此：
  - 当$\sigma < 0$ 时，$|z| > 1$ ；
  - 当$\sigma > 0$ 时，$|z| < 1$ ；
  - 当$\sigma = 0$ 时，$|z| = 1$ ；
  - 不改变模拟系统的因果性和稳定性。

- **b)** 双线性变换消除了混叠现象，但是由于数字频率和模拟频率之间严重的畸变，使其限于设计具有分段恒定幅频特性的滤波器，同时也丧失了模拟滤波器的某些优点，如线性相位特性。





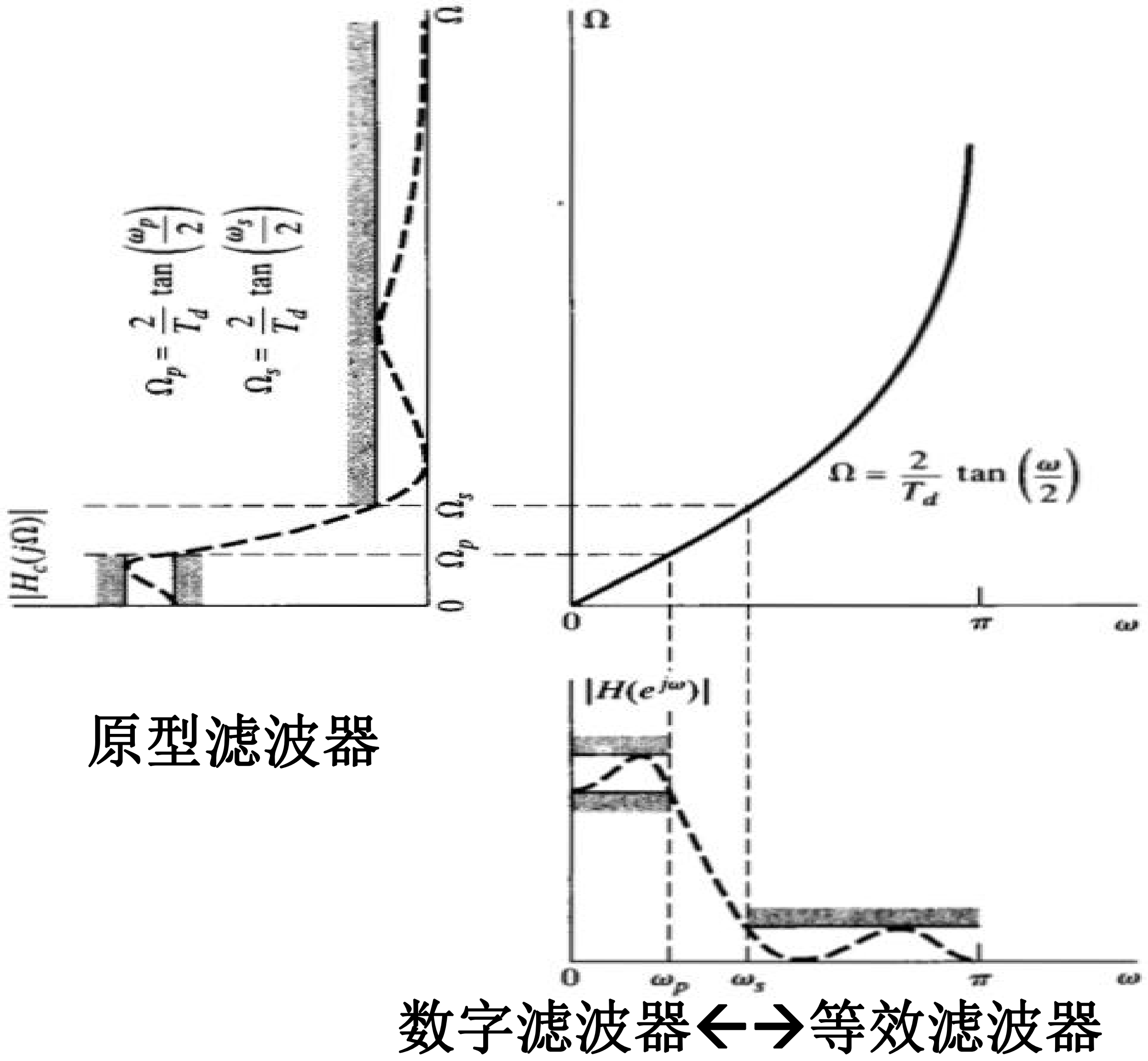
c) 频率预畸变

- 某些工程应用往往要求在多个数字频率处的有多种幅度特性
  - 首先按照这些数字频率计算相应的模拟原型滤波器频率

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

  - 设计在这些模拟频率处满足指标的模拟原型滤波器
  - 最后通过双线性变换获得数字滤波器



例题：针对上题，若Td=1,请采用双线性变换进行数字滤波器的设计，要求数字滤波器的低频特性与模拟滤波器的低频特性类似；并给出上述系统处理连续信号的通带截止频率和阻带起始频率；

- 解：频率预畸变：

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1 \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783 \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi$$

$$0 \le \Omega \le \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \le \Omega \le \infty$$

$$\omega_p = 0.2\pi \qquad \Omega_p = 0.2\pi / T_d = 0.2\pi$$

$$\omega_s = 0.3\pi \qquad \Omega_s = 0.3\pi / T_d = 0.2\pi$$

- 模拟原型滤波器指标：

$$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \ge 0.89125$$

$$|H_c(j2\tan(0.15\pi))| \le 0.17783$$

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0.89}\right)^2$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0.178}\right)^2$$

$$N=\frac{\log\left[\dfrac{\left(\left(\frac{1}{0.178}\right)^2-1\right)}{\left(\left(\frac{1}{0.89}\right)^2-1\right)}\right]}{2\log\left[\dfrac{\tan(0.15\pi)}{\tan(0.1\pi)}\right]}=5.30466$$

选取N=6，$\Omega_c=0.76622$　　双线性变换法不必担心混叠问题。

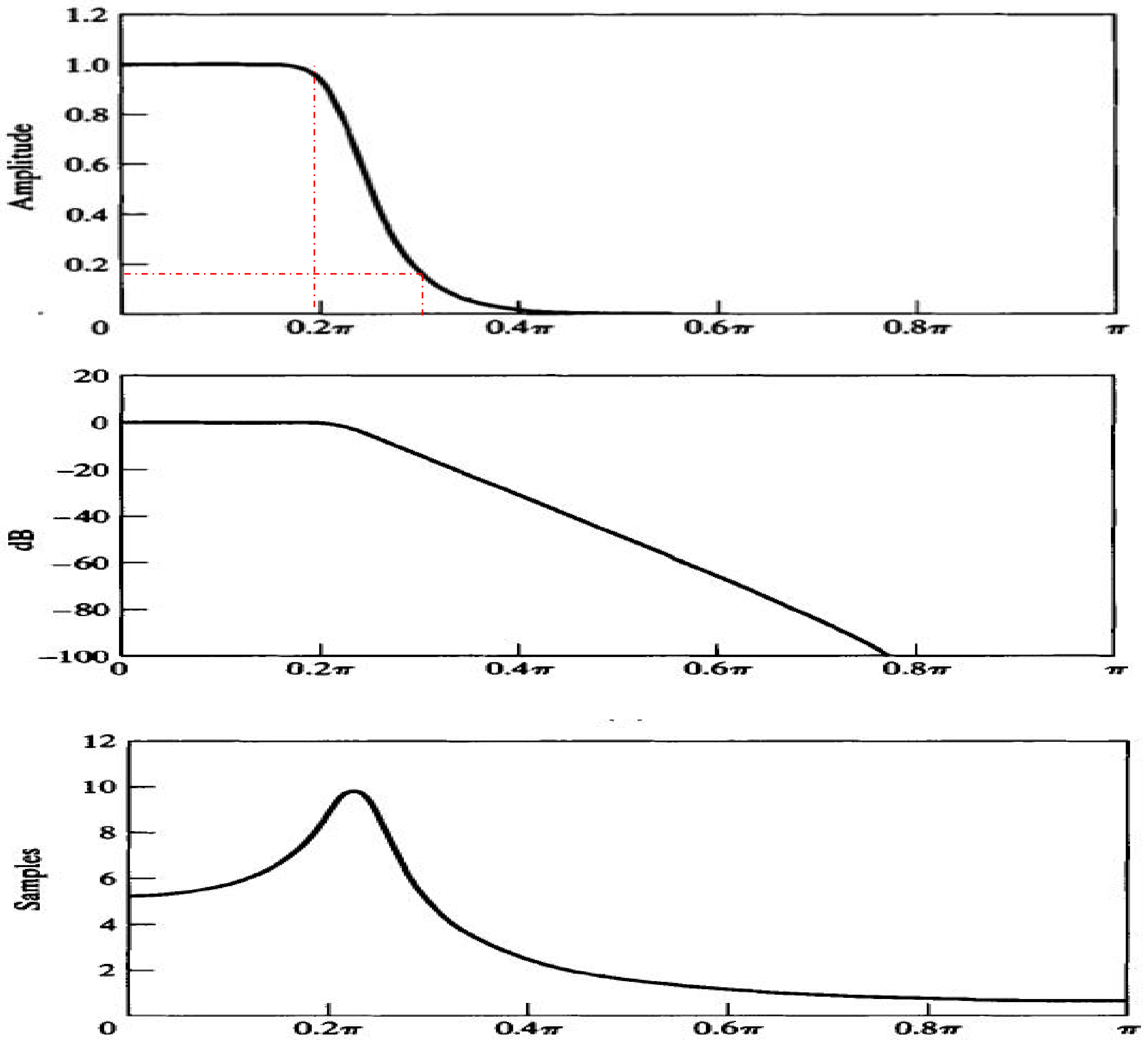
$$H_c(s)=\frac{0.20238}{(s^2+0.3996s+0.5871)(s^2+1.0836s+0.5871)(s^2+1.4802s+0.5871)}$$

$$s=\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

频率响应

- 双线性变换所设计滤波器的幅度响应要比原始连续时间滤波器幅度响应下降快。
- 在 $\omega = \pi$ 处特性对应于原型滤波器在频率无穷大处的特性。
- 连续巴特沃兹滤波器在 $s = \infty$ 处有一个六阶零点，所以离散时间滤波器在 $\omega = \pi$ 处也有一个六阶零点。



作业

- 7.2
- 7.4
- 7.22

IIR 数字域设计

- 离散时间系统并不是依赖于连续时间系统的采样，数字滤波器完全有自己一套独立的设计方法，即数字域设计。
- 数字域又可以分为离散时间域和数字频域两种概念，因此就存在两大类设计方法。
- （一）数字频域设计
  - 零极点设计法
  - 幅度平方函数法
- （二）数字时域设计
  - 帕德逼近法
  - 波形成型滤波器

零极点累试法

- 根据幅度特性确定零极点的大概位置，再按照确定的零极点写出其系统函数
- 画出其幅度特性，并与希望的滤波器幅度特性进行比较，如不满足要求，可通过移动零极点位置或增加(减少)零极点，进行修正
- 例题：请根据零极点的特点设计一个数字滤波器，用它来完成对模拟信号的选频。要求采样率为500Hz时能完成以下的模拟信号处理指标：
  - **（1）完全滤除模拟信号的直流成分和250Hz成分**
  - **（2）有用信号的中心频率是20Hz，**
  - **（3）滤波器的3dB带宽是10Hz。**

零极点设计法

- 解：计算出几个关键的模拟信号频率及其对应的数字角频率

模拟信号频率(Hz)	0	15	20	25	250
数字角频率(π/sample)	0	0.06	0.08	0.1	1

- 为实现指标(1)，单位圆的ω=0和π处各设置一个零点

$$z_1 = e^{j0} = 1 \text{和} z_2 = e^{j\pi} = -1$$

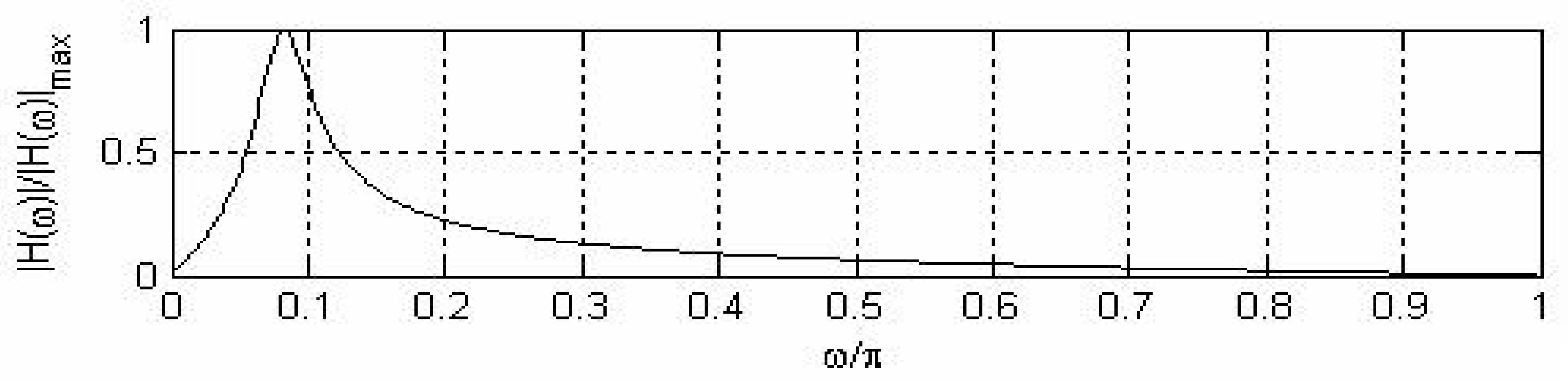
- 为实现指标(2)，单位圆的ω=0.08π处设置极点。极点共轭对称。

$$p_1 = re^{j0.08\pi} \text{和} p_2 = re^{-j0.08\pi}$$

- 极点半径r需要经过计算和分析才能确定。将这些零极点代入因式的系统函数

$$H(z) = \frac{\prod_{m=1}^{2}(z - z_m)}{\prod_{n=1}^{2}(z - p_n)}$$

经过尝试，得到**r=0.94**，其归一化幅频特性为



系统函数是

$$H(z)=\frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.94e^{j0.08\pi})(z-0.94e^{-j0.08\pi})}$$

$$\approx\frac{1-z^{-2}}{1-1.821z^{-1}+0.884z^{-2}}$$

幅度平方函数法

- 与模拟域幅度平方设计滤波器一样，利用幅度平方函数在某些约束条件下来导出系统函数。
- 假设：

$$\left|H(e^{jw})\right|^2 = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1+A_N^2(w)}$$

- 数字巴特沃兹滤波器

$$A_N^2(\omega) = \left(\frac{tg\left(\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)}\right)^{2N} \longleftrightarrow H_d(j\Omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- 契比雪夫滤波器

$$A_N^2(\omega) = \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{tg\left(\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)}\right)$$

- 幅度响应固然有了，如何得到系统函数呢？
- 由于：

$$tg^2(\frac{\omega}{2}) = \frac{1-\cos w}{1+\cos w} = \frac{1-\frac{1}{2}(e^{jw}+e^{-jw})}{1+\frac{1}{2}(e^{jw}+e^{-jw})} = -\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 \Big|_{z=e^{jw}}$$

- 将上式带入幅度平方函数后，即可得：

$$H(z)H^*(\frac{1}{z^*})$$

- 选取单位圆内的极点即可组成可实现因果稳定系统。

（二） 时域设计法

- 在离散时域中设计数字滤波器，即是给出所要求系统的若干时刻单位冲激响应

$$h_d(n) \qquad\qquad n = 1,2,\ldots M$$

- 设计系统，使得所设计系统的单位冲激响应**h(n)**在上述时刻尽量逼近理想的单位冲激响应**h_d(n)**。

1、帕德逼近法

- 设计目的
  - 根据时域上最接近$h_d(n)$的单位冲激响应 来求得系统函数H(z)
  - 也就是在$h(n)=h_d(n)$ n=1,2,…,K的条件下求得系统函数的待定系数 a_j和 b_i

$$H(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}h(n)z^{-n}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}}$$

系数方程

$$H(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}h(n)z^{-n}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}}$$

- 设滤波器系统函数为：
- 则可得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}h(n)z^{-n}\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}=\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{j=0}^{N}a_j h(n-j)\right]z^{-n}=\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}$$

- 所以有： $\sum_{j=0}^{N}a_j h(n-j)=b_n \qquad n=0,1,2,\ldots,M$
  - （可以利用时域卷积定理来分析）

系数求解

- 若令$a_0=1$，则共需要**N+M+1**个方程。根据上面的方程就可以得到这些系数。

- $$\sum_{j=0}^{N} a_j h(n-j)=0 \qquad n=M+1, M+2, \dots, M+N \longrightarrow a_j\,(j=1,2,\dots,N)$$

$$\sum_{j=0}^{N} a_j h(n-j)=b_n \qquad n=0,1,\dots,M \longrightarrow b_i\,(i=0,1,\dots,M)$$

- 因而可以得到系统函数：

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}}$$

例题

- 假设磁悬浮列车掠过桥墩的地基震动脉冲响应$h_d(n)=\{5, 2, 1, 0.5\}$。请你用帕德逼近法设计两种无限脉冲响应系统函数$H(z)$：
  - 二阶全极点
  - 单零点和单极点
- 要求设计的系统$h(n)$在$n=0\sim2$时等于地基震动脉冲响应$h_d(n)$。

二阶全极点系统

- 待求系统为：$H_1(z)=\dfrac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$

$$\begin{cases} h_d(1)+h_d(0)a_1=0 \\ h_d(2)+h_d(1)a_1+h_d(0)a_2=0 \\ b_0=h_d(0) \end{cases}$$

$$b_0=5,\quad a_1=-0.4,\quad a_2=-0.04$$

$$H_1(z)=\frac{5}{1-0.4z^{-1}-0.04z^{-2}}$$

单零点、单极点系统

- 待求系统为：$H_2(z) = \dfrac{b_0 + \mathrm{b}_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$

$$\begin{cases} h_d(2) + h_d(1)a_1 = 0 \\ b_0 = h_d(0) \\ b_1 - h_d(0)a_1 = h_d(1) \end{cases}$$

$$b_0 = 5,\quad b_1 = -0.5,\quad a_1 = -0.5$$

$$H_2(z) = \frac{5 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$h_1(n)$和$h_2(n)$在$n=0\sim2$范围都等于$h_d(n)$；而$h_1(3)=0.48$，$h_2(3)=0.5$。

2、波形形成滤波器

- 针对特定输入，要求特定输出的滤波器设计，叫做波形形成滤波器。是帕德逼近法基础上的时域直接设计。
  - 设 $x(0)、x(1)、...x(M-1)$ 是输入，
  - $y_d(0)、y_d(1)、...y_d(N-1)$ 为希望的系统输出
  - $y(0)、y(1)、...y(N-1)$ 为所设计系统的输出
- 按照最小均方准则确定最优单位冲激响应，即：

$$E=\sum_{n=0}^{N-1}[y(n)-y_d(n)]^2=\min$$

- 系统为因果系统，输入**x(n)**为因果序列，所以：$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(n-m)h(m)$

$$E=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{n}x(n-m)h(m)-y_d(n)]^2=\min$$

$$E=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{n}x(n-m)h(m)-y_d(n)]^2=\min$$

- 由拉格朗日定理可知上式成立的条件是：

$$\frac{\partial E}{\partial h(i)}=0 \qquad i=0,1,2,...,K$$

  - 由上面的方程式即可求得最优的单位冲激响应
  - 再由帕德逼近法可最终获得系统函数**H(z)**。

$$\sum_{n=0}^{N-1}2\left[\sum_{m=0}^{n}h(m)x(n-m)-y_d(n)\right]x(n-i)=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{n}h(m)x(n-m)x(n-i)=\sum_{n=0}^{N-1}y_d(n)x(n-i)$$

$$\sum_{m=0}^{n}h(m)\sum_{n=0}^{N-1}x(n-m)x(n-i)=\sum_{n=0}^{N-1}y_d(n)x(n-i)$$

维纳-霍夫方程

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-1)x(n) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-K)x(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-1) & \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n-1) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-K)x(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-K) & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-1)x(n-K) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n-K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(K) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-1) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-\mathrm{K}) \end{pmatrix}$$

例题

- 要求在给定输入$x(n)$={3，1}的情况下，输出$y_d(n)$={1,0.25,0.1,0.01}。
- 解 设$h(n)$长度为$K+1$=4

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 0.85 \\ 0.31 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

$$h(n) = \{0.333, -0.0278, 0.0426, -0.0109\}$$

$$H(z) = \frac{0.333 + 0.0330 z^{-1}}{1 + 0.1824 z^{-1} - 0.1126 z^{-2}}$$

3、数字频带变换

- 如要设计数字高通、带通、带阻滤波器，可将模拟滤波器转换相应类型数字滤波器。也可以直接在数字频域内将设计好的数字低通滤波器通过频带变换为各种类型的滤波器。
- 如果给定数字低通原型滤波器的系统函数，则我们的任务是通过映射变换得到期望滤波器。
- $$H_d(Z) = H_L(z)\big|_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$
- 其中的变换关系需要将一个因果稳定的数字低通有理系统变成因果稳定的有理系统。因此，要求：
  - 1、映射关系必须为有理函数；
  - 2、z平面的单位圆要对应Z平面的单位圆；
  - 3、z平面的单位圆内部要对应Z平面的单位圆内部

频带变换公式---全通变换

- 设θ和ω分别为z、Z平面的数字频率分量，则可得：

$$e^{-j\theta}=\left|G(e^{-j\omega})\right|e^{j\arg[G(e^{-j\omega})]}$$

- 由此可见映射关系在单位圆上的幅度恒等于1，这样的有理函数就是我们曾经提到过的全通函数，因而可以表示为：

$$z^{-1}=G(Z^{-1})=\pm\prod_{i=1}^{N}\frac{Z^{-1}-\alpha_i^*}{1-\alpha_i Z^{-1}}$$

- 为保证变换前后的稳定性不改变，需要$\left|\alpha_i\right|<1$。
  - 可以证明，当ω从0变化到π时，全通函数的相角变化量为Nπ。
  - 选择合适的N和a_i就可以实现各种变换。

数字低通—数字低通

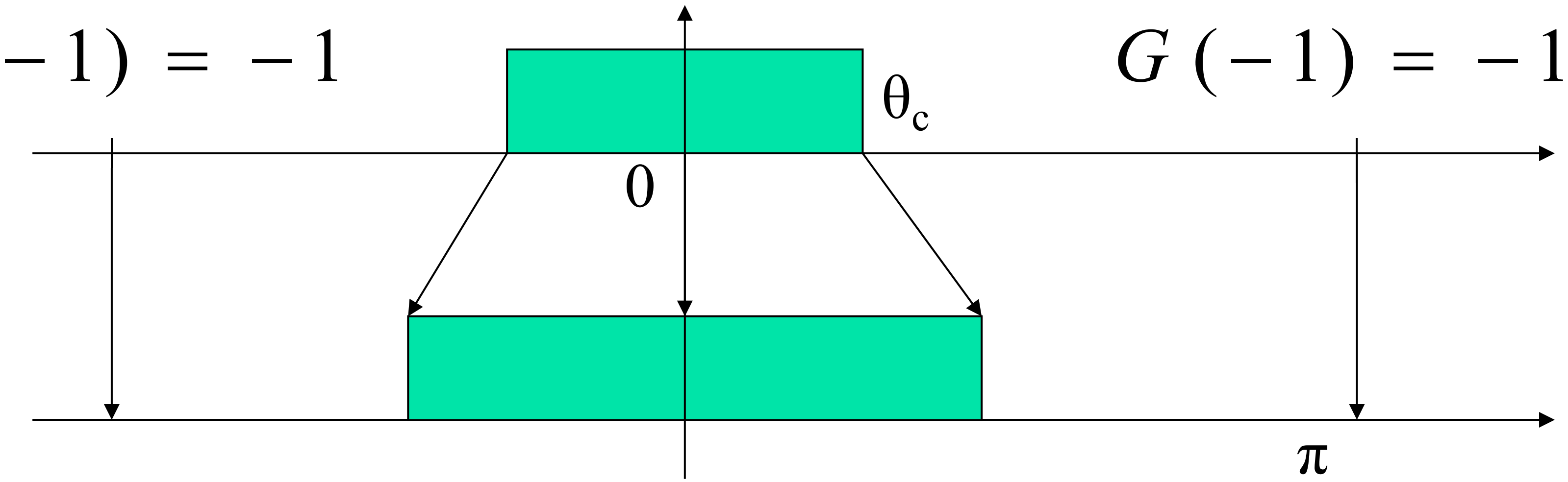
- 变换前后皆为低通，不同之处是通带截至频率。
- 由于θ和ω均是从0变化到π，因此N应取作1，故变换关系为一阶全通函数：

$$G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$\alpha = \sin\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right) / \sin\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)$$

$$G(-1) = -1 \qquad G(-1) = -1$$



$$G(1) = 1$$

数字低通—数字高通

低通变高通只需将频率响应平移180度，即将z用-Z代替即可，即：

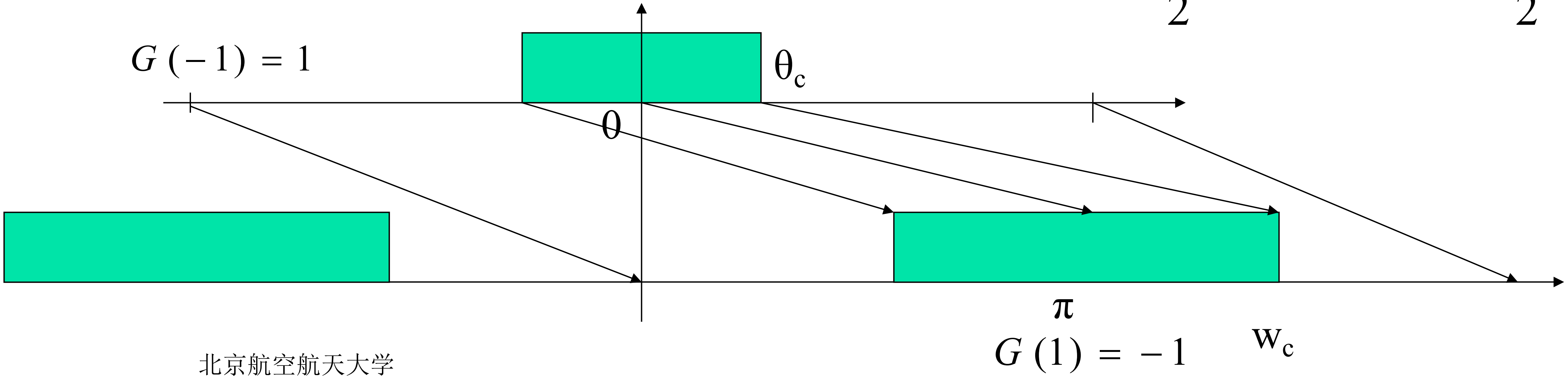
$$H_0(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H(-z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H_0(e^{j(\omega+\pi)})$$

$$G(Z^{-1}) = -\left(\frac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}\right)$$

$$G(e^{-j(\pi+\omega_c)}) = e^{-j(\theta_c)}$$

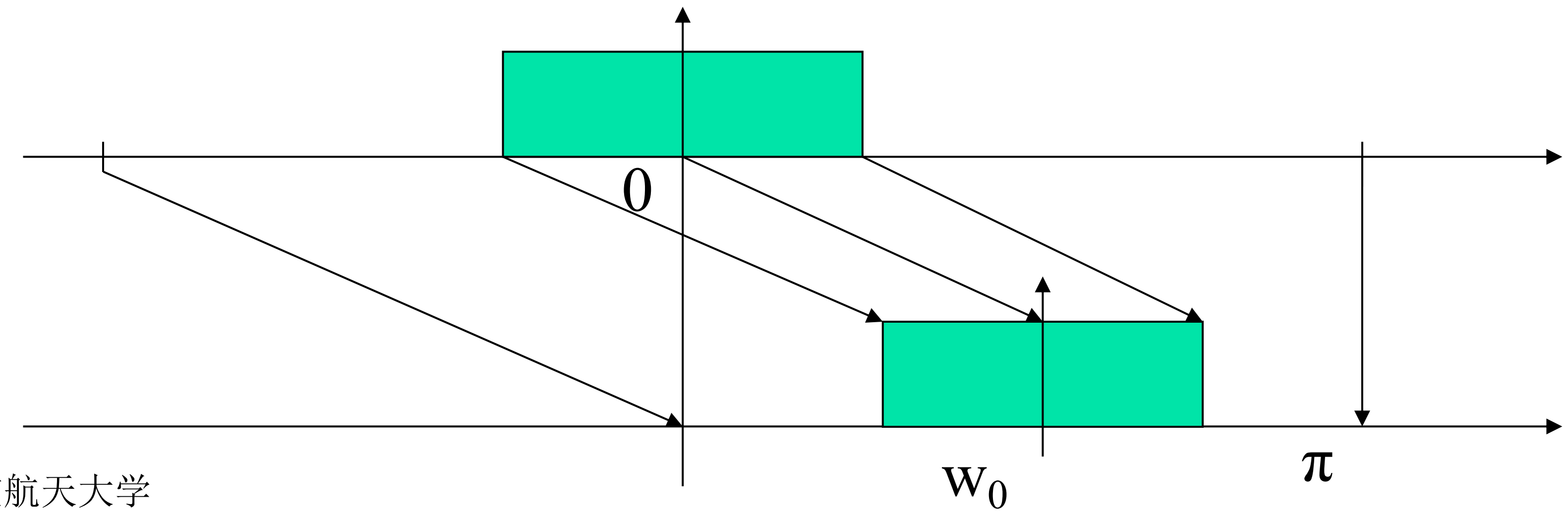
$$\alpha = -\cos\left(\frac{\theta_c+\omega_c}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta_c-\omega_c}{2}\right)$$



数字低通—数字带通

- 低通与带通滤波器之间频率关系如下所示：

低通频率	0	$-\theta_c$	θ_c	$-\pi$
带通频率	ω_0（中心频率）	ω_1（上截止频率）	ω_2（下截止频率）	$\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$



- 由于ω 从0变化到π， θ从- π变化到π，因此N应取作2

$$z^{-1}=G(Z^{-1})=\pm\frac{Z^{-1}-\alpha^*}{1-\alpha Z^{-1}}\bullet\frac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha^* Z^{-1}}=\pm\frac{Z^{-2}+\gamma_1 Z^{-1}+\gamma_2}{\gamma_2 Z^{-2}+\gamma_1 Z^{-1}+1}$$

- 然后将对应频率点的对应关系带入上述变换式就可以求得变换参数。典型的变换式为：

$$G(Z^{-1})=-\frac{Z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}Z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+1}$$

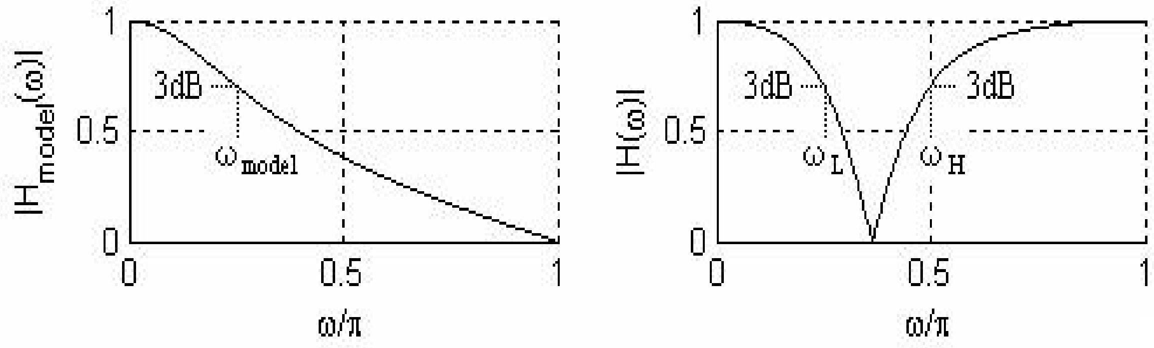
$$\alpha=\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)/\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)$$

$$k=ctg\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)tg\frac{\theta_c}{2}$$

数字低通到各型滤波器的转换

变换类型	$G(z^{-1})$	变换参数
低通—低通	$\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$	$\alpha=\frac{\sin\left(\frac{\theta_c-\omega_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_c+\omega_c}{2}\right)}$
低通—高通	$-\left(\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}\right)$	$\alpha=-\frac{\cos\left(\frac{\omega_c+\theta_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c-\theta_c}{2}\right)}$
低通—带通	$-\left[\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}\right]$	$\alpha=\frac{\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)}$ $k=\mathrm{ctg}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\theta_c}{2}$
低通—带阻	$\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{k+1}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$	$\alpha=\frac{\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)}$ $k=\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\theta_c}{2}$

例题：低通→带阻



- 请用数字低通滤波器作为模型，设计一个数字带阻滤波器

$$H_{model}(z)=\frac{0.293+0.293z^{-1}}{1-0.414z^{-1}}\quad (它的\ 3dB\ 截止频率\quad \omega_c=0.25\pi)$$

- **带阻滤波器3dB下边界频率ω_L=0.25π上边界频率ω_H=0.5π。**

$$\begin{cases} a=\dfrac{\cos[(0.5\pi+0.25\pi)/2]}{\cos[(0.5\pi-0.25\pi)/2]}\approx 0.414 \\ k=\tan\left(\dfrac{0.25\pi}{2}\right)\tan\left(\dfrac{0.5\pi-0.25\pi}{2}\right)\approx 0.172 \end{cases}$$

$$G(Z^{-1})\leftrightarrow\frac{0.706-0.706z^{-1}+z^{-2}}{1-0.706z^{-1}+0.706z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{0.293+0.293\cdot\dfrac{0.706-0.706z^{-1}+z^{-2}}{1-0.706z^{-1}+0.706z^{-2}}}{1-0.414\cdot\dfrac{0.706-0.706z^{-1}+z^{-2}}{1-0.706z^{-1}+0.706z^{-2}}}$$

$$\approx\frac{0.706-0.585z^{-1}+0.706z^{-2}}{1-0.585z^{-1}+0.412z^{-2}}$$

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn