



数字信号处理

作者: Pannenets.F

时间: January 3, 2021

分类: 笔记

Je reviendrai et je serai des millions. ——«Spartacus»

特别声明

北航电子信息工程学院在 2020 年秋季学期开设的数字信号处理课程，课程教师为孙国良老师。

Pannenets F January 3, 2021

目录

第一部分 随堂笔记	1
1 绪论	2
1.1 数字信号理论背景	2
1.2 课程内容与脉络	2
2 离散时间信号与系统	3
2.1 离散时间信号	3
2.1.1 定义	3
2.1.2 基本序列	3
2.1.3 基本运算	4
2.2 离散时间系统	5
2.3 线性时不变系统	5
2.4 线性常系数差分方程	6
3 离散时间系统变换域分析	7
3.1 离散时间傅里叶变换	7
3.1.1 基本序列的 DTFT	7
3.1.2 DTFT 主要性质以及定理	8
3.1.3 DTFT 对称性	8
3.2 Z 变换及其反变换	9
3.2.1 收敛域	10
3.2.2 性质	10
3.2.3 Z 反变换	11
3.3 系统函数与频率相应	11
3.3.1 系统函数和因果性与稳定性	12
3.3.2 频率响应	12
3.3.3 幅度响应	12
3.3.4 相位响应	12
3.4 有理 LTI 系统幅相特性	12
3.4.1 幅度特性约束下的系统函数	13
3.4.2 全通系统	13
3.4.3 最小相位系统	13
3.4.4 逆系统与失真补偿	13
3.4.5 线性相位系统	13

3.5	线性相位分解	14
3.6	FIR 和 IIR	14
4	信号采样与重构	15
4.1	理想周期采样重构	15
4.1.1	整体流程	15
4.1.2	采样定理	16
4.1.3	离散和连续 LTI 系统的等效性	16
4.2	抽取和内插	16
4.2.1	信号的整倍数采样	16
4.2.2	整倍内插	18
4.2.3	非整数倍抽取和内插	18
4.2.4	多相结构	18
4.3	工程问题	19
4.4	DA & DA	19
5	离散傅里叶变化	20
5.1	离散傅立叶级数	20
5.2	离散傅立叶变换	20
5.2.1	频域采样	21
5.2.2	内插器公式	21
5.3	离散傅里叶变换	21
5.3.1	对偶性	21
5.3.2	性质	21
5.4	DFT 快速算法	22
5.4.1	戈泽尔算法	22
5.4.2	基 2-FFT	22
5.4.3	线性调频 Z 变换	22
5.5	DFT 的工程应用	22
5.5.1	频谱泄漏	23
5.6	FFT 实现 FIR	23
6	滤波器设计基础	24
6.1	滤波器是什么	24
6.1.1	滤波器基础概念	24
6.1.2	滤波器设计步骤	24
6.1.3	性能指标	24
6.2	滤波器结构	25
6.2.1	IIR 基本结构	25

6.2.2	FIR 基本结构	25
6.3	模拟域设计	25
6.3.1	冲激响应不变法	26
6.3.2	双线性 Z 变换	26
6.3.2.1	频率预畸变	27
6.3.3	数字频带变换	27
6.4	FIR 最优化准则	27
6.4.1	矩形窗	27
6.4.2	三角窗	28
6.4.3	Hanning	28
6.4.4	Hamming	28
6.4.5	Blackman	29
6.4.6	Kaiser	29
第二部分 复习		30
7	离散信号与系统	31
7.1	因果性、记忆性	31
7.2	LTI 系统	31
7.2.1	因果系统	31
7.2.2	稳定系统	31
7.2.3	特征频率与 LTI 系统	31
7.3	差分方程的阶数	32
8	DTFT 变换	33
8.1	频域阶数	33
8.2	系统设计	33
8.3	DTFT 推导细节	33
8.4	DTFT 对称性	35
8.5	变换共轭性质	35
8.6	Z 变换	36
8.7	逆 Z 变换	37
8.7.1	部分分式法	37
8.8	从能量看 Z 变换与 DTFT	38
8.9	Z 变换与时域频域	38
8.10	系统零极点与频率响应	38
8.10.1	幅度响应	38
8.10.2	相位响应	38
8.11	LTI 系统幅相特性分析	39

8.11.1 全通系统	39
8.11.2 最小相位系统	39
8.11.3 系统的补偿	40
8.11.4 线性相位系统	40
8.11.5 广义线性相位系统	40
8.11.5.1 最小相位分解	42
9 信号采样与重构	43
9.1 理想周期采样重构	43
9.1.1 模拟-采样-数字频谱关系	43
9.1.2 信号重构	44
9.1.3 奈奎斯特低通采样定理	45
9.1.4 奈奎斯特带通采样定理	45
9.2 连续信号的离散化	45
9.3 抽取和内插	45
9.3.1 信号整倍数抽取	45
9.3.2 信号整倍数内插	47
9.3.3 非整倍数抽取和内插	47
9.3.4 速率变换的多相结构	48
9.3.5 离散话处理工程问题	49
9.3.5.1 处理对能量的影响	49
10 离散傅里叶变换及其快速算法	50
10.1 四类傅里叶变换	50
10.2 频域采样定理	51
10.3 DFT	52
10.3.1 DFT 性质	52
10.4 FFT	53
10.4.1 基底特性	53
10.5 戈泽尔算法	54
10.6 基 2 FFT	54
10.6.1 时域奇偶抽取	54
10.6.2 频域奇偶抽取	55
10.7 DFT 工程性问题	56
10.7.1 利用 DFT 进行频谱分析	56
10.7.1.1 CTFT	56
10.7.1.2 CTFS	57
10.7.1.3 加窗效应	57
10.7.2 DFT 实现 LTI	57

11 数字滤波器设计与实现	58
11.1 滤波器设计基础	58
11.1.1 FIR 结构	59
11.1.2 IIR 结构	59
11.2 IIR 设计	60
11.2.1 模拟域设计法	60
11.2.2 冲激响应不变法	60
11.2.3 双线性 Z 变换	61
11.2.3.1 频率预畸变	62
11.2.4 数字频带变换	62
11.2.4.1 全通变换	62
11.3 FIR 设计	62
11.3.1 窗函数设计法	63
11.3.2 凯泽窗设计	63
12 复习要点	64
12.1 复习要点	64
12.2 复习题	64
A 零极点幅度相位研究	65

版本更新历史

第一部分

随堂笔记

第一章 绪论

本课程采用的主要教材为奥本海默《离散时间信号处理》，程佩清《数字信号处理教程》。第一本是经典教材，深入浅出，繁杂的内容对于初学者不友好，题目也很经典，翻译较差（考试基本就是换参数）。第二本脉络比较清楚，便于理解。

本门课程通过将数学抽象转换为物理概念，从工程角度思考理论问题。

平时考核占 20% - 30%，其他是期末考试。教辅是李铮，王 8 艳萍，在新主楼 F518。

1.1 数字信号理论背景

什么是数字信号？作用是什么？如何分类？信号处理的核心是什么？

信号的作用是探测、揭示与控制。可以分为随机信号以及确定性信号。由于位宽支持的变大，对精度支持变高了。表示运算与变换，对应工程中的滤波压缩、特征提取。核心运算是傅里叶变换。

已经开过信号与系统之后，为什么学习数字信号处理？

- 精度极高
- 灵活性好
- 可靠性强
- 容易集成
- 时分复用
- 多维处理

在理论分析的基础上，需要有工程实现的能力。库里·图基以及桑德·图基，将 $O(N^2)$ 的算法降低到了 $O(N \log_2 N/2)$ 。

1.2 课程内容与脉络

信号通过前置滤波器以及 A/D 处理进行 DSP 处理，之后进行 D/A 转换最后通过低通滤波器即可。

本课程分为五章，前三部分是基础理论，之后是工程设计：

- 离散信号与系统
- 离散系统变换域分析
- 连续信号的离散处理
- 离散傅里叶变换以及快速算法
- 数字滤波器设计

第二章 离散时间信号与系统

内容提要

□ 六大信号
□ 九种运算

□ 五类系统

2.1 离散时间信号

2.1.1 定义

定义 2.1 仅仅在离散时刻点有定义的信号或不连续的时刻给出函数值的函数，通常用集合表示，记作

$$x = x(n) \leftarrow x_a nT, n \in \mathbb{Z}$$

需要注意第一项这里 n 没有时间的单位，但是没有物理的单位。第二项是采样产生，则代表时间的单位。

2.1.2 基本序列

1. 单位冲激序列

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 0, n \neq n_0 \\ 1, n = n_0 \end{cases}$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 0, n < n_0 \\ 1, n \geq n_0 \end{cases}$$

对单位冲激存在累加差分关系：

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1) \text{ and } u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

3. 窗口序列

$$R_N(n) = G_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, \text{else} \end{cases}$$

和单位阶跃存在减法关系

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N)$$

4. 正余弦序列

$$x(n) = A \cos(\omega_0 \cdot n + \theta_0)$$

注意序列可能不为周期序列，但是仍然称 ω_0 为序列的频率。

5. 指数序列

$$x(n) = A\alpha^n$$

6. 周期序列

$$x(n) = x(n + N)$$

一般来说，线性的系统还有对应的圆周系统，圆周移位、圆周相关等。

2.1.3 基本运算

1. 移位

$$y(n) = x(n - m)$$

2. 反褶

$$y(n) = x(-n)$$

3. 和差

$$y(n) = x_1(n) \pm x_2(n)$$

4. 积商

$$y(n) = x_1(n) \times / \div x_2(n)$$

5. 累加

$$S(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

6. 差分

- 前向差分

$$\Delta x(n) = x(n + 1) - x(n)$$

- 后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n - 1)$$

7. 卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

8. 相关

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(n-\tau) = x(n) \otimes y(-n)$$

可以用来检索原有信号的识别与锁定。

9. 能量

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

10. 功率

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x(n)|^2$$

1

2.2 离散时间系统

- 有无记忆系统

定义 2.2 $y[n]$ 只决定于同一时刻的输入 $x[n]$ 称为无记忆系统；

$y[n]$ 还与其他时刻的输入有关，那就是有记忆系统。

- 线性系统
- 时不变系统
- 因果系统/逆因果系统
- BIBO 意义下的稳定系统

2.3 线性时不变系统

线性时不变系统又称为 LTI 系统，设单位冲激相应为 $h(n) = T[\delta(n)]$

那么

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \text{Linear} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \text{Invariant} \\ &= x(n) \otimes h(n) \end{aligned}$$

这两个特性是卷积存在的充分必要条件。

2.4 线性常系数差分方程

定义 2.3 (线性常系数差分方程)

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

定义 y 的最高阶与最低阶的差值为差分方程的阶数 N 。通常可以使用时域和变换域 (Z) 方法求解。

LCCDE 不一定是线性系统也不一定是时不变系统。

第三章 离散时间系统变换域分析

3.1 离散时间傅里叶变换

内容提要

□ 离散时间傅里叶变换

□ DTFT 性质与定理

□ 基本序列 DTFT

□ 系统函数

定义 3.1 (离散时间傅里叶变换) DTFT/ 离散时间傅立叶变换¹, 应用与非周期信号以及傅里叶频谱的关系。

正变换:

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换:

$$\text{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

DTFT 将离散的序列变换到了一个连续的函数, 对于非周期序列可以收敛, 是一个关于 ω 的周期函数。

在 MATLAB 中, `sinc(x)` 表示 $\sin(x)/x$

在反变换中, 隐藏了关于信号分解的含义:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega \end{aligned}$$

其中关于 n 的只有一项, 将频谱的面积乘以对应离散时刻的分量。

3.1.1 基本序列的 DTFT

单位冲激序列:

$$\delta(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} 1$$

单位常数序列:

$$1 \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

单位阶跃序列:

$$u(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

¹DTFT 是离散傅里叶变换, 切勿混淆

单位指数序列：

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

矩形窗序列：

$$G_N(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$

理想低通滤波器，截止频率为 ω_c

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & -\pi < \omega < -\omega_c \text{ or } \omega_c < \omega < \pi \end{cases}$$

反变换：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\omega_c(n - \alpha)}$$

3.1.2 DTFT 主要性质以及定理

- 线性
- 时序频移导致频域调制： n 在频域只是一个相位系数
- 时域调制导致频域平移
- 时域反褶导致频域反褶
- 时域共轭导致频域共轭以及反褶
- 时域相乘形成频域卷积：

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- 时域卷积导致频域相乘：

$$x(n) \otimes h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- 线性保泛变换/帕塞瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

3.1.3 DTFT 对称性

定义 3.2 (对称序列) 共轭对称序列：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

共轭反对称序列：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

虚实部以及幅相满足：

$$\operatorname{Re}[x_e(n)] = \operatorname{Re}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_e(n)] = -\operatorname{Im}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Re}[x_o(n)] = -\operatorname{Re}[x_o(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_o(n)] = \operatorname{Im}[x_o(-n)]$$

$$|x_e(n)| = |x_e(-n)| \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Arg}[x_e(n)] = -\operatorname{Arg}[x_e(-n)]$$

$$|x_o(n)| = |x_o(-n)| \quad (3.2)$$

$$\operatorname{Arg}[x_o(n)] = \pi - \operatorname{Arg}[x_o(-n)]$$

进行引申，可以将一个序列进行分解，得到一个对称以及一个反对称序列：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (3.3)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

对应的频谱：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (3.4)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$\operatorname{DTFT}[x_e(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] \quad (3.5)$$

$$\operatorname{DTFT}[x_o(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

3.2 Z 变换及其反变换

定义 3.3 (z 变换)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

称 $x(n)$ 为 $x(n)$ 的 Z 变换, 可以记为:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$$

注意, 幂级数收敛时变换才有意义, 需要标注收敛域。

由于存在衰减, 可以变换的范围比 DTFT 更大, 存在 Z 变换不一定存在 DTFT。

Z 变换的充分必要条件是级数绝对可和。

3.2.1 收敛域

对于有限长的序列, 只要每一项有界, 那么级数收敛, 且至少包括有限的 z 平面 (不包括 $z = 0$)。对与和原点关系进行判断。

右边序列 (向右趋近无穷), 存在一个最小的收敛半径, 半径之外全部收敛。无左半轴分量, 为因果序列。

左边序列, 存在一个最大的半径, 之内全部收敛。无右半轴分量, 为反因果序列。

双边序列若收敛, 必在环状区域收敛。

需要注意, 不同的序列其 Z 变换的数学表达式可以完全一致。因此需要给出对应的收敛区间。

3.2.2 性质

- 线性: 时域不重合时收敛域为交集, 其他情况可能消减零极点产生扩大现象。
- 序列移位
- 尺度变化
- 线性加权/Z 域求导

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.7)$$

- 共轭序列
- 序列反褶

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1} \quad (3.8)$$

- 初值定理 (因果序列):

$$\text{for } x(n) = x(n)u(n) \text{ get } \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

- 终值定理:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

- 时域卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)] = X(z)H(z)$$

- Z 域复卷积

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

where $R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+}$

- 周期卷积：将复卷积转换为数学形式明显的形式（围线积分半径固定）

$$v = \rho e^{j\theta}, z = re^{j\omega}$$

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(\rho e^{j\theta})X\left(\frac{r}{\rho}e^{j(\omega-\theta)}\right)\frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- 帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

3.2.3 Z 反变换

定义 3.4 (Z 反变换) 从给定的 Z 变换及其收敛域中还原处原始序列的过程叫做 Z 反变换。

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

实质是求 $X(z)$ 的幂级数展开，通常使用长除法，部分分式，留数（危险积分法）。

部分分式法（重点）

在实际应用中，根据极点进行分解，一般 $X(z)$ 是 z 的有理分式也就是

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \text{ where A and B are polynomials}$$

那么可以展开为

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

$$x(n) = \sum_i \mathcal{Z}^{-1}[X_i(z)]$$

3.3 系统函数与频率相应

LTI 系统可以由其单位冲激相应完整表示， $H(z)$ 称为传递函数或者系统函数，描述了线性时不变系统的特点：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

3.3.1 系统函数和因果性与稳定性

线性时不变系统稳定的充要条件是冲激响应绝对可和，也就是收敛域包括单位圆：

$$\sum |h(-n)| = \sum |h(-n)z^{-n}| < \infty$$

系统因果的充要条件是开放收敛域，即为 $|z| \geq 1$ ，极点全部在单位圆内部。

但是系统函数不能处理非零状态的系统响应，要引入单边 Z 变换进行处理。

3.3.2 频率响应

根据 DTFT 开展，得到

- 单位圆上系统函数是频率响应
- 传递函数存在，但是频率响应可能存在
- LTI 不产生新的频率分量

LTI 系统对输入信号可以看作是对一段频率划分的多个复指数分量信号，是对每个分量响应的和。

数字频率存在天花板。

除比例常数 K 以外，系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

3.3.3 幅度响应

原点处的零极点对幅度无影响，并可以考虑峰谷点以及零极点，远离零极点则会平缓。

3.3.4 相位响应

是对特定的频率进行相位变换。

原点处零极点分别对应超前与滞后。靠近单位圆的零极点会造成较大的群延迟。远离零极点的区域会比较平坦。

3.4 有理 LTI 系统幅相特性

典型的 LTI 系统有，其作用是，

有理系统的幅相特性存在响应的制约。幅度特性已知，那么相位特性仅有有限选择；零极点个数与阶数和相位特性已知，那么也只有有限的幅度特性也是有限选择。若是在最小相位²中，一一对应。

²最小相位指的是在零极点均在单位圆内，对幅度造成的波动最小

3.4.1 幅度特性约束下的系统函数

给定了频率响应的幅度平方特性下：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = C(z), \text{ where } z = e^{j\omega}$$

两部分在 $j\omega$ 的视角共轭，而在 z 的角度是在单位圆内外分布的，零极点以单位圆的镜像映射。

为了使得差分方程为实系数，那么零极点是共轭对或者实数。

3.4.2 全通系统

若系统对所有的频率分量的幅度响应均为非零恒定值，则该系统即为全通系统。那么零极点是镜像映射。

幅度特性不变，因此需要了解其相位特性。

应用：相位均衡器；因果稳定系统的分解分解为全通与最小相位系统的级联；对非稳定系统，可以保证幅度特性不变。

3.4.3 最小相位系统

在幅度特性之外需要确定相位特性，零极点全在单位圆内，以及单位圆外的零点³映射。

特征：最快响应！

- 最小相位延迟
- 最小群延迟
- 最小能量延迟

乘以全通因子后，能量一定会滞后。

3.4.4 逆系统与失真补偿

逆系统：与原系统级联结果为 1： $H_i(z) = 1/H(e^{j\omega})$ 。最小相位系统存在一个因果稳定的逆系统的系统。

若一个信号已经被某个不合要求的频率响应的 LTI 系统所失真，那么可以用一个补偿系统来处理这个失真了的信号。此时幅度失真和相位失真不可能被同时补偿；幅度失真可以利用其最小相位因子完全补偿。

3.4.5 线性相位系统

即相位不失真系统。

其频率响应： $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$ ，相位为 $-\omega\alpha$ 群延时为 α 。

³没有极点，是因为这是 LTI 系统

3.5 线性相位分解

线性系统代表一个零点对应四个零点。

3.6 FIR 和 IIR

FIR 是有限长冲激响应系统，IIR 是无限长冲激响应系统。

第四章 信号采样与重构

内容提要

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| □ 数模频率的对应关系，时域采样对频域的影响 | 否有冗余信息？是否可以进行速率变化？ |
| □ 采样信号如何包含连续信号所有信息？如何无失真恢复信号？是 | □ 离散处理如何等效模拟 LTI 系统？如何提高处理性能？ |

4.1 理想周期采样重构

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想采样：

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

AD 是 CD 的工程近似。

时域 $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 。数字采样 $S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$ 。

4.1.1 整体流程

采样信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

调制采样

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

根据 $\Omega_s = 2\pi/T$ 采样频率，其傅立叶变换

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

那么

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) \otimes S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - k\Omega_s)$$

数字信号的频谱是模拟频谱的映射，数字的频谱是中心频谱的镜像。

4.1.2 采样定理

平移频谱不交叠。

4.1.3 离散和连续 LTI 系统的等效性

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

触底带宽：采样的范围。

4.2 抽取和内插

多速率处理要保证信号的信息不会丢失。抽取是数字域上的采样，内插是数字域上的重构。

4.2.1 信号的整倍数采样

又称降采样，如 图 4.1：

$$x_D(m) = x(mD)$$

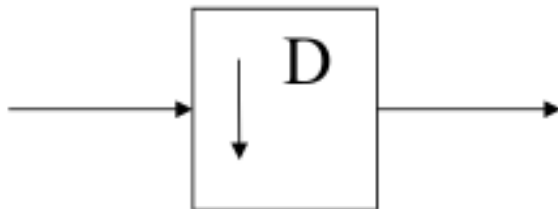


图 4.1: 抽取器或采样压缩器

存在间隔的冲激：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $x'(n) = x(n)\delta_D(n)$, $x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$

其 Z 变换：

$$\begin{aligned}
X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} m i} \right) z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j \frac{2\pi}{D} m i} z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)
\end{aligned}$$

采样周期变化为原有的 D 倍:

$$\begin{aligned}
x_D(n) &\Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(\Omega - k \frac{\Omega_0}{D} \right) \\
&\Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT} \right)
\end{aligned}$$

其对应的模拟滤波器可以这样对待: 转换成一个新的频谱平移

$$\begin{aligned}
X_D(\omega) &= \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - m \frac{2\pi}{T} - i \frac{2\pi}{DT} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m \frac{2\pi}{T} \right)
\end{aligned}$$

为了防止混叠失真, 进行二次的采样, 进行 π/D 滤波之后, 进行 D 倍抽取, 保证频谱一一对应, 信息保证不会丢失。

如何理解波形的等价 (不失真): 可以通过形状的可恢复性进行理解。

为什么抽取信号之后, 能量没有减少? 时间延长了。

时域变化：

$$X_D(n) = v(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn = k)$$

4.2.2 整倍内插

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

补 0 在电路实现较为简单。

内插增加了高频分量，在时域可以看作是迅速变化的波形。

内插在频域的损失是 I 倍，需要补偿能量。

4.2.3 非整数倍抽取和内插

先内插可以收集更多频段的信号。

整体流程：进行 I 内插后进行 D 抽取。

4.2.4 多相结构

希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式，以特定频率倍数为周期：

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots \\ &\quad + h_1z^{-1} + h_5z^{-5} + h_9z^{-9} + h_{13}z^{-13} + \dots \\ &\quad + h_2z^{-2} + h_6z^{-6} + h_{10}z^{-10} + h_{14}z^{-14} + \dots \\ &\quad + h_3z^{-3} + h_7z^{-7} + h_{11}z^{-11} + h_{15}z^{-15} + \dots \\ &= z^0 [h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-1} [h_1 + h_5z^{-4} + h_9z^{-8} + h_{13}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-2} [h_2 + h_6z^{-4} + h_{10}z^{-8} + h_{14}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-3} [h_3 + h_7z^{-4} + h_{11}z^{-8} + h_{15}z^{-12} + \dots] \end{aligned}$$

M 相分解：

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-Mn}$$

$$E_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M)$$

4.3 工程问题

4.4 DA & DA

过采样提升信噪比。

噪声成形量化器，将噪声丢在高频位置。

第五章 离散傅里叶变化

数字处理需要对时域进行采样与截断，频域离散化。

从离散傅里叶级数（DFS）开始，逐步介绍离散傅里叶变换（DFT），以及快速算法。

5.1 离散傅立叶级数

周期序列等价于有限长序列，可以引出抽样定理。

连续信号可以进行连续傅里叶变换，而周期信号需要进行傅里叶级数，时域的周期性造成了频域的离散。时域的离散造成频域的周期性。

CTFS 是主值区间的信号，CTFT 是频域的采样。

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

5.2 离散傅立叶变换

若是一个周期序列，那么不是绝对可和的，不能使用 DTFT。

若是周期为 N 那么：

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

希望展开成离散的傅里叶级数：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = 1, \text{ when } r = mN, 0, \text{ else}$$

定义变换因子的符号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是主值区间的 Z 变换在单位圆的等间隔抽样。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=w\pi k/N}$$

5.2.1 频域采样

频域采样 N 点，得到的是抽样点为 N 的周期延拓。可以用来设计滤波器，若是可以无失真回复原序列，那么可以完整表达 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

5.2.2 内插器公式

$$\frac{1 - \exp -j\omega N}{1 - \exp -j\omega} = \exp -j\omega \frac{N-1}{2} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2}$$

DFS

是对 DTFT 在主值区间的 N 点采样。周期性和离散性是等价的。

5.3 离散傅里叶变换

当只取主值区间时，就可以得到 DFT。

$$\tilde{X}(k) = DFT[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFT[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

规定周期信号和主值区间转换的标记方式： $x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$ ， $\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x[[n]]_N$ 。

5.3.1 对偶性

注意：

$$DFT[X(n)] = Nx((-k))_N R_N(k)$$

得到：

$$IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT[X^*(k)]}$$

5.3.2 性质

- 线性
- 循环移位 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) = W_N^{-mk} \tilde{X}[k]$
- 圆周共轭对称：实序列对应频域圆周共轭对称，虚序列对应频域圆周共轭反对称

- 圆周卷积和：点数有关
- 相关不满足交换律

5.4 DFT 快速算法

几个特点：

- 对称性： $W_N^{nk} = W_N^{-nk}$
- 周期性： $W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$
- 可约性： $W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}$

5.4.1 戈泽尔算法

最典型：利用周期性与对称性。

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{rk} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{rk} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n) = x(n) * W_N^{-kn} u(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(n-r)} u(n-r)$$

$$y_k(n)|_{n=N} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)} u(N-r) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)} = X(k)$$

避免了乘积项 W 的反复计算。

5.4.2 基 2-FFT

适合递归分解，需要分解成特殊基，并且最小子序列无复数运算。

5.4.3 线性调频 Z 变换

新的变换

5.5 DFT 的工程应用

时域加窗：时域乘法

频域加窗：时域卷积

连续时间信号进行分段与分割后可以用过 DFT 进行 CTFT 的逼近，那么有：

$$x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$$

CTFT 近似为：

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT} \cdot T$$

通过截断，得到含有 N 个采样的序列：

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

进一步的，频谱也是需要进行分段离散化的：

$$X(jk\Omega_0) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT}$$

$$= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jnk\frac{2\pi F_0}{f_s}} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = T \left\{ DFT[x(n)]|_{x(n)=x(nT)} \right\}$$

若是逼近 CTFS，将周期切割为 N 点，傅里叶计数近似为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

将 $T_0 = NT$ ，

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} DFT[x(n)]$$

5.5.1 频谱泄漏

时域上的截断（相乘），在频域上表现为周期卷积，这将会对信号的频谱平滑和能量的分散，即频谱泄漏。

窗函数的主瓣宽度为 $2\pi/N$ ，其对应的模拟带宽为：

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{L}$$

模拟频率分辨率为 HZ 定义为

$$\Delta = \frac{1}{L}$$

5.6 FFT 实现 FIR

对于无限长的信号来说，使用块卷积方式，如重叠相加法与重叠保留法。

第六章 滤波器设计基础

6.1 滤波器是什么

6.1.1 滤波器基础概念

LTI 系统的时域卷积和特性造成了频域的滤波效应，主要是指幅度特性，并且滤波器不会造成新的频率分量。

根据频段内的幅度特性分为四类基本滤波器：低通、高通、带通、带阻。

根据实现方式，也就是冲激的形式：分为 IIR（无限长冲激响应系统）与 FIR（有限长单位冲激响应）。

6.1.2 滤波器设计步骤

1. 按照任务要求，确定滤波器的性能指标
2. 用一个因果稳定的离散线性时不变系统按照某一准则去逼近所要得到的性能指标
可以选用 IIR 滤波器也可选用 FIR 滤波器
3. 利用有限精度，选择合适的系统结构来实现
 - 软件实现
 - 硬件实现

6.1.3 性能指标

增益、衰减都使用分贝来描述。

通带指标：在通带中幅度响应以误差 $\pm\alpha$ 逼近 1，这称作通带容限，或者表示为通带波纹 R_p ，通道最大衰减。其中 ω_c 指通带边缘，其幅度特性为 $1 - \alpha_1$ 。波纹一般是最大衰减的两倍。

$$1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \alpha_1$$

$$R_p = -20 \lg \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1} \right)$$

$$\delta_1 = 20 \lg \left| \frac{1}{H(e^{j\omega_c})} \right| = -20 \lg (1 - \alpha_1) = 20 \lg \left| \frac{H_{\max}(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega_c})} \right|$$

阻带指标：阻带中幅度响应以误差 α_2 逼近 0，这叫做阻带容限，阻带波纹为 δ_2 ，最小衰减为 A_s 。在 ω_{st} 的位置，幅值为 α_2 。

$$0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$$

$$\delta_2 = A_s = -20 \lg (\alpha_2)$$

过渡带一般指一段带宽 $|\omega_{st} - \omega_c|$ 一般对其宽度有要求，其幅度特性一般不要求。

6.2 滤波器结构

根据数据流进行系统的搭建。

转置定理，输入输出及其支路方向逆转，再将输入输出交换，结论仍成立。

6.2.1 IIR 基本结构

直接 I 型：输入移位 + 输出移位。

直接 II 型：交换次序，合并支路。

直接 I 型和 II 型共同缺点是结构系数与系统函数的零、极点关系不明显，对滤波器性能控制不直接。

系统的极点在某些临界条件下对系数的变化过于灵敏，从而使系统频率响应对系数的变化过于灵敏，对有限精度（有限字长）运算容易出现不稳定或较大误差。

级联型：便于准确实现滤波器零、极点，调整滤波器频率响应性能与直接 II 型相同具有最少的存储单元。

由于信号是依次通过级联的各个环节，只要一个环节出现了问题，变影响整个系统。

并联型：单独调整并联子系统的极点，子系统信号无交叉，系统稳定。

但是不能单独调节零点。

6.2.2 FIR 基本结构

直接：卷积和公式

转置：存储单元、计算量最少

级联型：分解为二阶因子形式

频率抽样型：

线性相位型：

6.3 模拟域设计

将 S 平面转换到 Z 平面。

步骤：

- 离散指标转换到模拟指标
- 模拟原型滤波器来逼近 $H_c(s)$
- 变换到数字滤波器 $H(z)$
- 数字滤波器进行等效变换后完成性能验证 $H_{eff}(s)$

变换条件：

- 频率响应对应： S 平面虚轴需要映射到 Z 平面单位圆
- 因果稳定： S 左半平面映射到单位圆内部，这样才是一个外圆环

主要方式：

- 冲激响应不变法
- 双线性 Z 变换

6.3.1 冲激响应不变法

方法：使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟单位冲激响应的采样。

$$h(n) = h_c(t)|_{t=nT} = h_c(nT)$$

$$H(z)|_{z=e^r} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

原型：

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

将模拟滤波器分解为极点并联形式，不保证零点对应。采样时间太小时增益过高，需要进行一定衰减，如在系统函数乘以周期。模拟原型滤波器时域通常都无法理想带限，高频采样可以减少混叠。

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

改换到阶跃响应不变法可以减少混叠。

6.3.2 双线性 Z 变换

冲激响应不变法和阶跃响应不变法由于使用了时域上的采样原理，所以不可避免的产生了频率响应混叠失真。

这是一种单值映射。

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

工程中有

$$\Omega = c^* \operatorname{tg}(\omega/2)$$

那么

$$H(z) = H_c(s)|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

变换不影响因果性与稳定性：

$$z = \frac{c+s}{c-s}$$

$$|z| = \sqrt{(c+\sigma)^2 + \Omega^2} / \sqrt{(c-\sigma)^2 + \Omega^2}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

- $\sigma < 0, |z| > 1$
- $\sigma > 0, |z| < 1$
- $\sigma = 0, |z| = 1$

当时频率直接出现了畸变，并且丧失了线性相位特性。

6.3.2.1 频率预畸变

计算在通带、阻带的边缘频率，设计在这些位置满足指标的模拟原型。其中 $2/T_D = c$ 。

$$\Omega_D = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_P}{2}\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

6.3.3 数字频带变换

通过映射转换关系：将数字低通有理系统 z 变成因果稳定的有理系统 Z ，要求：

- 映射是有理函数
- 单位圆相互对应
- 单位圆内部相互对应

$$H_d(Z) = H_L(z)|_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$

z, Z 对应 θ, ω ：

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})| e^{j \arg[G(e^{-j\omega})]}$$

6.4 FIR 最优化准则

严格线性相位！

两种准则：

- 均方误差最小：无偏估计，主要介绍
- 最大误差最小

6.4.1 矩形窗

矩形窗设计法满足最小均方误差准则， $\alpha = (N-1)/2$ 。

若有线性相位约束，窗函数必须保证所截取 $h(n)$ 是对称的。

过渡带带宽正比于主瓣宽度 $4\pi/N$ 。截止频率位于 $(\omega_p + \omega_{st})/2$ 。

但是矩形窗截断造成肩峰为 8.95%，则阻带最小衰减为 -21dB，在工程上远不够。

$$w(n) = R_N(n) \quad W_R(e^{jw}) = W_R(w)e^{j(\frac{N-1}{2})w}$$

6.4.2 三角窗

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

$$W(e^{jw}) = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin\left[\left(\frac{N-1}{4}\right)w\right]}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)} \right]^2 e^{-j(\frac{N-1}{2})w} \approx \frac{2}{N} \left[\frac{\sin\left(\frac{Nw}{4}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)} \right]^2 e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

主瓣宽度 $8\pi/M$ ，突出主瓣。

6.4.3 Hanning

对次瓣进行衰减，主瓣宽度为 $8\pi/N$ ，衰减为 44dB。

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

$$\begin{aligned} W(e^{jw}) &= DTFT[w(n)] \\ &= \left\{ 0.5W_R(w) + 0.25 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \right\} e^{-j(\frac{N-1}{2})w} \\ &= W(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w} \end{aligned}$$

6.4.4 Hamming

53dB。

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_R(n)$$

$$\begin{aligned} W(w) &= 0.54W_R(w) + 0.23 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ &\approx 0.54W_R(w) + 0.23 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N}\right) \right], (\text{当 } N > 1) \end{aligned}$$

6.4.5 Blackman

$$74dB \ 12\pi/N$$

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

$$W(w) = 0.42W_R(w)$$

$$+ 0.25 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] + 0.04 \left[W_R\left(w - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]$$

6.4.6 Kaiser

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$$

β 越大，过渡越大，衰减越大。

第二部分

复习

第七章 离散信号与系统

7.1 因果性、记忆性

是否用到了 $x[n]$ 的未来值/过去值，而不是其他可计算的值。

7.2 LTI 系统

既是线性系统，又是时不变系统，称为 LTI 系统。其充要条件是 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 。
无法直接判断可以假设是一个 LTI 系统：

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{4^n}$$

假设是：

- LTI:

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k] \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n} h_1[k]$$

矛盾！

- TI and Linear:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} &\rightarrow \frac{1}{4^{n-1}} \\ 2 \frac{1}{2^n} &\rightarrow 4 \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$

7.2.1 因果系统

$$h[n] = h[n]u[n]$$

7.2.2 稳定系统

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

7.2.3 特征频率与 LTI 系统

若是有一个无限长的指数信号，那么有一个单频信号：

2.27

$$[e^{j\omega_0 n}] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

但是若是有限长，那么就有引入除去 ω_0 的分量，因此对于一个 LTI 系统来说，放大 $e^{j\omega_0 n}$ 和 $e^{j\omega_0 n}u[n]$ 需要的系统函数是不一样的。

7.3 差分方程的阶数

输出 $y[n-i]$ 最高值和最低值 i 的差值。

LCCDE = linear constant-coefficient difference equation .

第八章 DTFT 变换

8.1 频域阶数

2.42

若是在原有的系统函数多一个 z ，说明原来 $a_0 z^0$ 的位置变成了 $a_0 z^1$ ，也就是 a_n 变成了 a_{n+1} 。同理 z^{-1} 对应 a_{n-1} 。由于使用因果信号， z^{-1} 的形式更合适。

8.2 系统设计

2.56，

需要一个系统时，可以通过其定义入手，配凑式子。同时，对于特定的频率分量，其幅度、角度变换是由其频率响应改变的。

8.3 DTFT 推导细节

$$\begin{aligned} DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

注意 2π 与 $\delta(n)$ 的由来：单位虚数的积分。

将 IDTFT 展开成累加的形式，实际上是将不同频率的分量逐个恢复：

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n} \end{aligned}$$

表 8.1: DTFT 变换对

时域函数	DTFT
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$
$W_N(n)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$
$\frac{w_c \sin[w_c(n - \alpha)]}{\pi w_c(n - \alpha)}$	$e^{-j\omega\alpha}(u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c))$

表 8.2: DTFT 变换性质

性质名称	表达式
线性	
时域平移-频域调制	$x(n - m) \rightarrow e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$
时域调制-频域平移	$e^{jn\omega_0} x(n) \rightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
时域翻折	$x(-n) \rightarrow X(e^{-j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

可以利用帕塞瓦尔定理解决一些求和式子：Slide P83.

8.4 DTFT 对称性

共轭对称与共轭反对称序列定义，实际上是实部、虚部分别的奇偶对称：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

任意序列都可以进行共轭分解：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x(-n) = x_e(-n) + x_o(-n) = x_e^*(n) - x_o^*(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

根据下一小节的性质：

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

同样的对频域函数进行变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

逆变换：

$$DTFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

8.5 变换共轭性质

具有普适性。

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x^*[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*) \\
\mathcal{Z}[x[-n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{-1})^{-n} = X(z^{-1}) \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Re}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{x[n] + x^*[n]}{2}\right] = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Im}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{z[n] - x^*[n]}{2j}\right] = \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]
\end{aligned}$$

8.6 Z 变换

表 8.3: \mathcal{Z} 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

表 8.4: \mathcal{Z} 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha < z < \beta$	$\frac{1}{\beta} < z < \frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a > 0$	$X(z^a)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha^{1/a} < z < \beta^{1/a}$
$x(n \pm m)$	双边 $z^{\pm m} X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$x(n-m)u(n)$	单边 $z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$

见下页

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(n+m)u(n)$	单边 $z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < \left \frac{z}{a} \right < \beta$
$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)v^{-1}dv$ ¹		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty)$$

帕塞瓦尔定理

$$Y(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^* \left(\frac{1}{V^*} \right)_V^{-1} dV$$

8.7 逆 Z 变换

8.7.1 部分分式法

对于有理多项式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$ka^n u(n), |z| > a$$

$$-ka^n u(-n-1), |z| < a$$

¹其中 C 是 $X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

8.8 从能量看 Z 变换与 DTFT

时域频域的能量是一致的，没有发生衰减。

8.9 Z 变换与时域频域

为了解决非零状态系统，使用单边 Z 变换。

系统不改变频率：

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0(n-m)+\phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\
 &= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0})
 \end{aligned}$$

8.10 系统零极点与频率响应

单位圆上的系统函数是频率响应。

8.10.1 幅度响应

- 原点处的零极点幅度无影响
- 经过单位圆上的零点幅度归零，单位圆附近的零点出现谷点
- 经过单位圆上的极点幅度无穷大，单位圆附近的极点出现峰点
- 远离零极点时影响较小

8.10.2 相位响应

- 原点处的零极点对相位影响为线性，极点会引起滞后，零点会引起超前
- 靠近单位圆的零极点会引起较大的波动
- 远离极点零点的位置变换比较平缓
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零

对于圆内外零极点：

- 圆内极点：顺时针经过，相位迅速延后
 - 圆外极点：顺时针经过，相位迅速提前
 - 圆内零点：顺时针经过：相位迅速提前
 - 圆外零点：顺时针经过：相位迅速延后
- 过单位圆零点相位突变 π 。

8.11 LTI 系统幅相特性分析

当给定幅度特性时，总可以通过共轭分解找到一个系统满足要求：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

8.11.1 全通系统

频响恒为 1，其零极点分别为 a 与 $1/a^*$ ：

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

其相位响应为：群延迟为正值，连续相位递减。

$$\begin{aligned} \text{Assume: } a &= re^{j\theta} \\ \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] &= -\omega - 2 \arctg \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] \\ \text{grd} [H_{ap}(e^{j\omega})] &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{-j(\omega - \theta)}|^2} \end{aligned}$$

用途：

- 相位均衡器，用于提高群延迟
- 任何因果稳定系统均可以分解为全通系统和最小相位的级联
- 若是系统不稳定，可以用于交换系统的零极点，而不改变幅度特性

8.11.2 最小相位系统

要求极点在单位圆内（主要考虑系统稳定性），要求零点在单位圆内（主要考虑相位变化最小）。

最小相位系统零极点均在单位圆内，极点往往与系统稳定性联系在一起，零点则往往与系统的延时特性联系在一起。逆系统也是因果稳定的，可以实现幅度和相位失真的完全补偿。

- 最小相位延迟，全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{\min}(z) H_{ap}(z) \\ \arg [H(e^{j\omega})] &= \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] \\ \arg [H(e^{j\omega})] &\leq \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] \\ |\arg [H(e^{j\omega})]| &\geq |\arg [H_{\min}(e^{j\omega})]| \end{aligned}$$

- 最小群延迟，全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值：

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 最小能量延迟，最集中在 $n = 0$ 范围内：

$$\sum_{m=0}^n |h(n)|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2$$

因此：

$$|h(0)| \leq |h_{\min}(0)|$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为最大相位系统。

8.11.3 系统的补偿

幅度失真由最小相位因子补偿，相位失真利用全通因子补偿特定频段。

8.11.4 线性相位系统

定义：群延迟 α 为常数 $\phi(\omega) = -\alpha\omega + \beta$

线性相位响应时域表现为信号平移，波形不发生失真。

不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统。

若是群延迟 α 满足 2α 为整数，那么单位冲激响应严格对称，否则不严格对称，但是仍满足线性相位。

8.11.5 广义线性相位系统

在系统相位存在突变以及固定相位时，仍然存在恒定群延迟。

已知线性相位系统存在对称性，进行分析：

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

$$DTFT[h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta}$$

$$DTFT[h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta}$$

因此， $A(\omega)$ 的对称性决定了 $h(n)$ 的对称性（一致）。

根据对称形式与 2α 的奇偶性，有四类 FIR 线性相位滤波器。

对称冲激响应的系统特性推导：

$$\begin{aligned}
h(n) &= \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n} \\
\text{令 } m &= N-1-n = \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\
&= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})
\end{aligned}$$

得到：

1. 系统零点个数等于系统在原点的极点阶数相等
2. z_i 与 z_i^{-1} 均为零点
3. $h(n)$ 为实数，零点共轭成对

四类，其中 $M = N - 1$ ：

$$\begin{aligned}
H(z) &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \\
H(z) &= \frac{1}{2} \left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\
&= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \\
H(\omega) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} h(n) \left[\frac{(e^{j\omega})^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm (e^{j\omega})^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]
\end{aligned}$$

- I 类： M 为偶数，偶对称： $h(n) = h(M-n)$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{M}{2} - n \right) \omega \right]$$

- II 类： M 为奇数，偶对称，存在特殊零点：

$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

解得 $z = -1, \omega = \pi$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\frac{N}{2} - n = m = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

- III 类: M 为偶数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = \pm 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N-1}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left(\frac{N-1}{2} - m \right) \sin(m\omega)$$

- IV 类: M 为奇数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

对于一个关于 $n = k$ 对称的序列, 其群延时为 k 。

8.11.5.1 最小相位分解

根据零点成对进行分解, 分解到最小相位系统与线性相位系统。

第九章 信号采样与重构

需要解决的问题：

- 数字频率和模拟频率之间的对应关系：时域采样对频域的影响
- 采样定理：能否包含原始信号的所有信息？如何无失真恢复原始信号？是否有冗余信息可以去除？是否可以进行速率的变化？
- 离散处理如何等效为一个模拟 LTI 系统？

9.1 理想周期采样重构

9.1.1 模拟-采样-数字频谱关系

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想时域采样：

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

其中：

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

频域表示为：

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \rightarrow \frac{2\pi}{T_1} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) S(\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_c(\Omega) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned}$$

那么从连续信号采样得到的是原始信号的频谱（带限 Ω_N ）的周期（ Ω_s ）性拓延，当然，这是存在混叠的。

AD 是 CD 的工程近似。

进一步研究其离散采样信号的频谱：

对于采样信号：

$$\begin{aligned}
X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\Omega T)n}
\end{aligned}$$

对于数字信号：

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n}
\end{aligned}$$

经过两种形式的比对，可以得到：

$$X(j\omega) \Big|_{\omega=\Omega T} = X_s(j\Omega)$$

这就得到了一个重要的**频率转换公式**：

$$\Omega T = \omega$$

9.1.2 信号重构

通过理想重构滤波器：

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

其频域形式：

$$H(\omega) = T G_{\omega_c}(\omega)$$

其频率表示为，无混叠时采样点之外也无失真，有混叠时，则采样点之外存在一定失真。

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= x_s(t) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}
\end{aligned}$$

9.1.3 奈奎斯特低通采样定理

若信号的频带满足 $|\omega| < \omega_c$ ，那么以至少 $2\omega_c$ 的速率采样就可以无失真的恢复原始信号。

9.1.4 奈奎斯特带通采样定理

若信号的频带满足 $|f| < \omega_c$ ，那么以至少 $2f_c$ 的速率采样，且满足 $f_s = \frac{4f_0}{2n+1}$ 就可以无失真的恢复原始信号。其中 f_0 为频带中心频率。

9.2 连续信号的离散化

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

实际上处理的系统函数 $H_{eff}(j\Omega)$ 只能处理 $|\Omega| < \pi/T$ 。

9.3 抽取和内插

虽然带通定理降低了采样的速率，但是有时我们需要更高的带宽也就是更快的速度，优点有：

- 处理带宽变宽
- 信号处理的盲区减少
- 量化信噪比可以提升

但是高速率的采样又会造成后续的信号处理速度不匹配，因此又需要降速，但是减少采样又想要不丢失信息。

9.3.1 信号整倍数抽取

其采样序列转变为，通过统一的形式表示一个周期的冲激函数，很是美观、方便：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其 Z 变换:

$$\begin{aligned} X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}mi} \right) z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{D}mi} z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z \frac{1}{D} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right) \end{aligned}$$

当 $D = 1$ 时, 退化到原始的 Z 变换。

从采样的模拟谱来看, 降采样将交叠平移的频率间隔缩小了 D 倍, 因此数字谱也是如此。

$$\begin{aligned} x(n) &\Leftrightarrow X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - k\Omega_0) \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right) \\ x_D(n) &\Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\Omega - k\frac{\Omega_0}{D}\right) \Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT}\right) \end{aligned}$$

这也导致交叠变得更加容易, 原本交叠间隔是 2π , 会变得更小。

最终在数字频域的表现如下, 可以看到平移中心没有变化, 但是频谱已经被稀释(拉伸)了。

$$X_D(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi i}{D}\right)$$

为了**防止混叠**，需要把可能产生混叠的部分滤除，在对数字信号 D 倍抽取之前，先用数字低通滤波器 π/D 滤波。

9.3.2 信号整倍数内插

内插显得很不可思议，对于一个 I 倍的内插结构，就是在原始序列的每两个点之前，插入 $I - 1$ 个零。也就是对于 $x_i(m)$ 来说，除去 m 为 I 的整倍数的点，其余都为 0。

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

类似的，来分析其频谱：

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_I(m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_I(kI) e^{-j\omega Ik} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{-j\omega Ik} = X(e^{j\omega I}) \end{aligned}$$

可见，这里的形式比较简洁，就是简单的将频谱压缩了 I 倍。

将抽取后的频谱进行内插后的频谱进行时域还原，可以得到准确的内插值，提高了时域的分辨率。

类似的，在内插后需要进行低通滤波，防止其搬运频谱也进入之后系统。同时，内插需要增益为 I 。

9.3.3 非整倍数抽取和内插

可以通过如 图 9.1 的系统对信号进行非整倍数的抽取和内插。

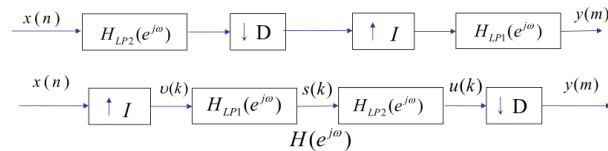


图 9.1: 非整倍数抽取与内插系统

滤波器只需满足在最小频带工作：同时补偿进行内插的增益 I 。需要注意，给定分数后，滤波器频率已经默认给定。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

其时域表示：

$$v(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn-Ik)$$

对时域计算的一点简化：

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn-Ik)$$

$$Dn - Ik \geq 0 \quad k \leq \frac{D}{I}n \quad \text{令：} \quad m = \lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - k, \quad m \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - m\right) h\left(Dn - \lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor I + mI\right)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\lfloor \frac{Dn}{I} \rfloor - m\right) h(mI + Dn \% I)$$

9.3.4 速率变换的多相结构

在高采样率的数据端，数字的滤波器计算量巨大。希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式，以特定频率倍数为周期：

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\
&= h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots \\
&\quad + h_1z^{-1} + h_5z^{-5} + h_9z^{-9} + h_{13}z^{-13} + \dots \\
&\quad + h_2z^{-2} + h_6z^{-6} + h_{10}z^{-10} + h_{14}z^{-14} + \dots \\
&\quad + h_3z^{-3} + h_7z^{-7} + h_{11}z^{-11} + h_{15}z^{-15} + \dots \\
&= z^0 [h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-1} [h_1 + h_5z^{-4} + h_9z^{-8} + h_{13}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-2} [h_2 + h_6z^{-4} + h_{10}z^{-8} + h_{14}z^{-12} + \dots] \\
&\quad + z^{-3} [h_3 + h_7z^{-4} + h_{11}z^{-8} + h_{15}z^{-12} + \dots]
\end{aligned}$$

M 相分解:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l)z^{-Mn} \\
E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l)z^{-n} \\
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M)
\end{aligned}$$

对应的时域表示为:

$$\begin{aligned}
e_l(n) &= h(Mn+l) \\
E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_l(n)z^{-n}
\end{aligned}$$

9.3.5 离散话处理工程问题

9.3.5.1 处理对能量的影响

- 采样降低 T 倍
- 抽取不影响信号功率
- 内插降低 I 倍

第十章 离散傅里叶变换及其快速算法

工程中对时域、频域的处理都只能局限在特定时段、频段内，并且采样和实现都是离散的。需要的变换需要满足时域序列和频域抽样的关系。

10.1 四类傅里叶变换

傅里叶变换的目的是建立**时域表达**和**频域表达**的变换关系，当时间与频率分别为连续、离散时，就得到不同形式的傅里叶变换对：

- 连续时间-连续频率：CTFT

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

- 连续时间-离散频率：CTFS 周期信号为功率信号，能力无限，因此变换需要特殊处理。时域周期化导致频域离散化

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0)$$

- 离散时间-连续频率：DTFT 时域离散导致的频域周期化

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 离散时间-离散频率：DFS 时域周期性离散化，不是绝对可和的：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = 1, \text{ when } r = mN, 0, \text{ else}$$

定义变换因子的符号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是对周期序列主值区间的 Z 变换 / DTFT 在单位圆的等间隔取样。

10.2 频域采样定理

本节考虑：如何利用单位圆抽样恢复原始信号，并且抽样对于时域的影响。

对于任意信号进行频谱单位圆抽样并进行 IDFS 变换得到的序列是

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \right) \\
 &\quad \text{where } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(m - n - rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)
 \end{aligned}$$

这个公式显示了原序列点数、采样点数之间的关系，以及交叠造成的数学形式。若是可以无失真恢复原序列，那么可以完整表达其频谱：

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

那么定义一个因子即可建立从恢复频谱到原频谱的关系：

$$\Phi_k(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \\
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

这个因子存在 N 零点，只有在这些零点处极点才会被抵消，在其他抽样点处都为 0。

10.3 DFT

DFT 是主值区间的采样，DFT 是有限长序列（周期延拓后）的变换。

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) R_N(n)$$

DFT 是其 DTFT 的等长采样的主值区间。

10.3.1 DFT 性质

- 对偶性：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{nk} \right)^*$$

$$\text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} (\text{DFT}[X^*(k)])^*$$

- 圆周对称性
- 线性性
- 循环移位特性：

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

- 频率圆周移位：

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

据此可以得到：

$$\text{DFT} \left[x(n) \cos \left(\frac{2\pi nl}{N} \right) \right] = \frac{1}{2} [X((k-l))_N + X((k+l))_N] R_N(k)$$

$$\text{DFT} \left[x(n) \sin \left(\frac{2\pi nl}{N} \right) \right] = \frac{1}{2} [X((k-l))_N - X((k+l))_N] R_N(k)$$

- 圆周共轭性：若 $x(n)$ 为共轭对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周共轭对称序列： $x(n) = x^*(N-n)$ ；若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周反共轭对称序列： $x(n) = -x^*(N-n)$ ；

- 时域-频域对称性:

$$\text{DFT}[x((-n))_{-k}] = X(N - k)$$

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((N - k)_N) R_N(k) = X^*(N - k)$$

据以上两个式子可以得到实部、虚部的变化，首先定义共轭序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((N - n))_N] R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N - x^*((N - n))_N] R_N(n)$$

那么：

$$\text{DFT}\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k)$$

$$\text{DFT}\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k)$$

$$\text{DFT}\{x_{ep}(n)\} = \text{Re}[X(k)]$$

$$\text{DFT}\{x_{op}(n)\} = j \text{Im}[X(k)]$$

- 圆周卷积和：可交换/点数相关
- 线性卷积和：至少 $N_1 + N_2 - 1$ 点结果
- 时域相乘：

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

- 圆周相关：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n - m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + m) y^*(n)$$

其频谱：

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) \quad R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

利用交叠求 DFT 实际上是搬移，搬移的源是原序列而不是补全的序列。

圆周卷积：翻折-向右平移

10.4 FFT

10.4.1 基底特性

- 对称性：

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk}$$

- 周期性：

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

- 可约性：

$$W_{mN}^{mnk} = W_N^{nk}$$

10.5 戈泽尔算法

将 DFT 转换为卷积：

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{kr} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{-k(N-r)} = x[n] \otimes W_N^{-kn} u[n] = y[n] \Big|_{n=N}$$

分解其 Z 变换：

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \frac{1}{(1-W_N^{-k}z^{-1})(1-W_N^kz^{-1})} * (1 - W_N^kz^{-1}) \\ &= \frac{1}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}} * (1 - W_N^kz^{-1}) \end{aligned}$$

10.6 基 2 FFT

特殊基：

$$W_N^{N/2} = -1$$

$$W_2^0 = 1$$

$$W_2^1 = -1$$

两类 FFT：时间抽取（DIT），频域抽取（DIF）

10.6.1 时域奇偶抽取

首先补零！

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_0^{N-1} x[n]W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned}$$

概括来说，就是在时域进行奇偶分解，在频域进行组合；旋转因子在前，加减在后；整体旋转在前，微调在后。其蝶形图如 **图 10.1**。

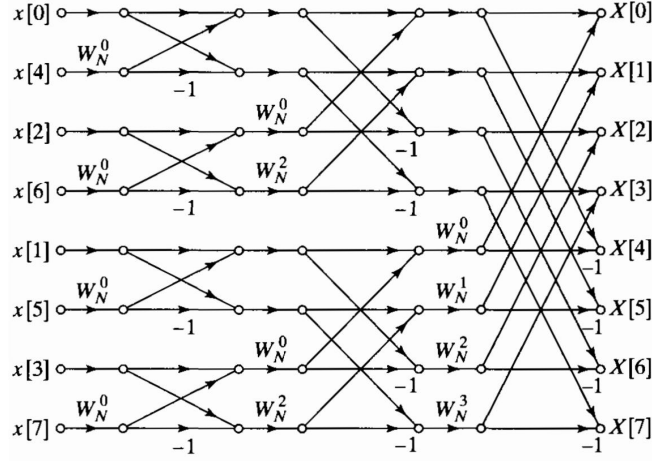


图 10.1: DIT 蝶形图

10.6.2 频域奇偶抽取

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{nk} + x[n + \frac{N}{2}] W_N^{(N/2+n)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}] W_N^{Nk/2}) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}] (-1)^k) W_N^{nk}
 \end{aligned}$$

那么有：

$$\begin{aligned}
 k = 2r, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}]) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_N^{nk} \\
 k = 2r + 1, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_N^{nk}
 \end{aligned}$$

概括来说，就是在时域进行前后分解，在频域进行奇偶分解；加减在前，旋转因子在后；微调在前，整体旋转在后。其蝶形图如 **图 10.2**。

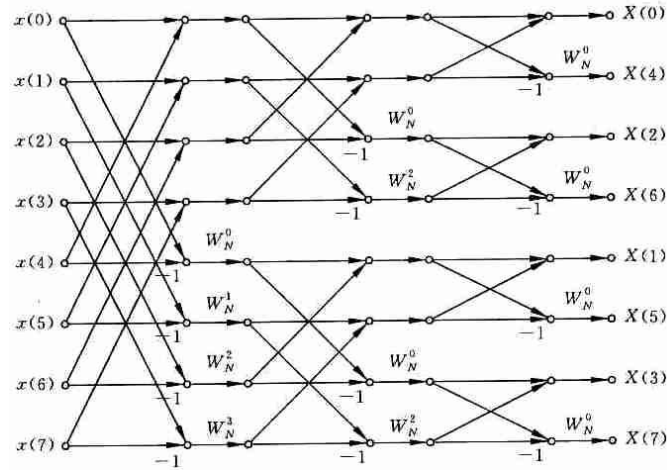


图 10.2: DIF 蝶形图

10.7 DFT 工程性问题

10.7.1 利用 DFT 进行频谱分析

10.7.1.1 CTFT

在采样之前需要加入抗混叠滤波器,降低混叠,采样速率根据抗混叠的带宽决定,需要满足采样定理。过程:时域加窗后进行频域采样。

利用 DFT 对 CTFT 进行逼近,将连续信号采样分段后得到:

$$x(t) \Big|_{t=nT} = x(nT) = x[n]$$

那么 CTFT 近似为:

$$X(j\Omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} T$$

加入长度为 N 的窗:

$$X(j\Omega) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) h[n] e^{-j\Omega nT}$$

进一步离散频率得到:

$$X(jk\Omega_0) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) h[n] e^{-jk\Omega_0 nT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) h[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$X(jk\Omega_0) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) h[n] e^{-jkn2\pi/N} = T \text{DFT}[x[n]]$$

10.7.1.2 CTFS

CTFS 近似:

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} DFT[x(n)]$$

10.7.1.3 加窗效应

时域上的截断（相乘），在频域上表现为周期卷积，这将会对信号的频谱起平滑和能量的分散，即频谱泄漏。

加窗使得频谱平滑或展宽，降低了频率上靠近的正弦信号的分辨能力。

分辨力取决于窗函数的主瓣宽度：

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{L}$$

其分辨力定义为：

$$\Delta = \frac{1}{L}$$

也就是有效时间窗越小，分辨力越高。

由于 DFT 只能看到连续谱的离散点，具有栅栏效应，离散频率值为：

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

因此对应模拟频率来说，步进间隔为：

$$f_k = \frac{f_s}{N}$$

分辨率主要受窗函数主瓣宽度的影响；频谱泄漏主要指副瓣能量泄漏，一般不指主瓣能量的泄漏，主要取决于窗函数的主瓣和副瓣幅值相对比例。进行频谱分析时，往往希望有高分辨率和小频谱泄漏，也就是希望时间窗有小的主瓣宽度和相对小旁瓣幅度。

10.7.2 DFT 实现 LTI

块卷积：重叠相加法（输出），重叠保留法（输入）

第十一章 数字滤波器设计与实现

11.1 滤波器设计基础

滤波器是一个 LTI 系统，通过卷积在频域进行滤波，主要是幅度特性。

基本步骤：

1. 确定离散滤波器的性能指标
2. 用一个因果稳定的离散 LTI 系统去逼近性能指标
3. 利用有限精度，决定实现的系统结构

常见指标：增益 $G = 20 \lg |H(e^{j\omega})|$ ，衰减 $D = -G$ 。

通带指标：

- 在通带中幅度响应以误差 $\pm\alpha_1$ 接近 1， $2\alpha_1$ 称作通带容限。
- 通带波纹：

$$R_p = -20 \lg \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1}$$

- 通带最大衰减：对于归一化的滤波器：

$$\delta_1 = -20 \lg(1 - \alpha_1)$$

对于一般情况：

$$20 \lg \left| \frac{H_{max}(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega_c})} \right|$$

定义最大衰减处的频率为通带截止频率 ω_c

阻带指标：

- 阻带指标：阻带中幅度响应以误差 α_2 逼近 0，这叫做阻带容限
- 阻带波纹为 δ_2 ，最小衰减为 A_s 。在 ω_{st} 的位置，幅值为 α_2 。

数字-模拟指标： $\omega = \Omega T$

有理 LTI 系统函数：离散系统常用表现形式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

系统的指标：

- 不同的计算结构存储与计算次数不同，实现的复杂度与速度也不同
- 不同计算结构的工程应用场景不同

数据流图转置定理：输入输出及其支路方向逆转，结论仍成立。

11.1.1 FIR 结构

特点

- 仅有零点，无极点
- 单位冲激有限长
- 无反馈

直接型：分别延时对 $h[0]$ 到 $h[N-1]$ 做乘法然后累加。

转置直接型：对枝节性进行转置，可以使用最少的存储单元和运算量。

级联型：将系统函数分解为二阶的乘积形式，可以精确控制一对零点，但是乘法次数更多。

频率抽样型：基本公式为

$$H(z) = \frac{1}{N} \underbrace{(1 - z^{-N})}_{H_c(z)} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{H(k) - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}{1 - H_K^*(z)}}_{H_K(z)}$$

$H_c(z)$ 部分通过梳状滤波器实现，之后通过 N 个谐振器实现，在特定的极点位置响应为无穷大。

优点：可以方便控制滤波器频率响应，零极点只取决于抽样的点数，只有点数一致，就可以通过统一结构得到不同的滤波器。

缺点：全部都是复数，增加了乘法次数与存储量。极点都在单位圆上，存在系数量化误差时，极点会移动，有些就无法完全对准，系统不稳定。

线性相位型：只适用于线性相位的 FIR，系数量化误差不会影响线性相位，系数比阶数少一半，乘法运算量少一半。实际结构就是折回型。

11.1.2 IIR 结构

特点

- 有限 Z 平面内有极点
- 无限长冲激
- 存在反馈，递归计算

直接 I 型结构：直接根据定义设计

直接 II 型结构：转置后合并可以共用的延时单元。是 N 阶滤波结构采用的最少延时单元，也称典范型。

但是直接型的结构对零极点控制的关系不明显，性能影响不直观。

级联型结构：将系统分解成二阶级联，可以剔除共轭极点。与直接 II 型有着相同的最少存储单元。便于实现滤波器的零极点，调节系统性能。但是级联系统的稳定性较差。

并联型结构：可以单独调节极点，信号无交叉，有利于系统稳定。不能单独调节零点。

11.2 IIR 设计

方法：模拟域设计，数字域直接设计。

11.2.1 模拟域设计法

步骤：

1. 将离散性能转换为模拟
2. 利用模拟滤波器 $H_c(s)$ 逼近
3. 通过**某种变换**离散到数字滤波器 $H(z)$
4. 对等效滤波器 $H_{eff}(s)$ 进行验证
 - 频率响应对应： S 平面虚轴需要映射到 Z 平面单位圆
 - 因果稳定： S 左半平面映射到单位圆内部，这样才是一个外圆环

主要方式：

- 冲激响应不变法
- 双线性 Z 变换

11.2.2 冲激响应不变法

方法：使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟单位冲激响应的采样。

$$h(n) = h_c(t)|_{t=nT} = h_c(nT)$$

$$H(z)|_{z=e^r} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

原型：

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

将模拟滤波器分解为极点并联形式，不保证零点对应。采样时间太小时增益过高，需要进行一定衰减，如在系统函数乘以周期。模拟原型滤波器时域通常都无法理想带限，高频采样可以减少混叠。对应的频域需要补充增益 T 。

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

改换到阶跃响应不变法可以减少混叠。

11.2.3 双线性 Z 变换

冲激响应不变法和阶跃响应不变法由于使用了时域上的采样原理，所以不可避免的产生了频率响应混叠失真。

这是一种单值映射。

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

数字-模拟频率的对应关系为：

$$\Omega = \tan \frac{\omega}{2}$$

工程中有

$$\Omega = c^* \operatorname{tg}(\omega/2)$$

那么

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

若是低频下要求低频近似，那么 $c = \frac{2}{T}$ 。频率预畸变就是在离散频域上的条件通过上式转换到模拟域。

变换不影响因果性与稳定性：

$$z = \frac{c + s}{c - s}$$

$$|z| = \sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2} / \sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

将 $s - z - e^{j\omega}$ 关系展开得到：

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right)$$

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left[\frac{2e^{-j/2} (j \sin \omega/2)}{2e^{-j\omega/2} (\cos \omega/2)} \right] = \frac{2j}{T_d} \tan(\omega/2)$$

得到

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$

$$\omega = 2 \arctan(\Omega T_d/2)$$

注意这是频率产生畸变，不是线性对应关系。

- $\sigma < 0, |z| > 1$
- $\sigma > 0, |z| < 1$
- $\sigma = 0, |z| = 1$

当时频率直接出现了畸变，并且丧失了线性相位特性。

11.2.3.1 频率预畸变

计算在通带、阻带的边缘频率, 设计在这些位置满足指标的模拟原型。其中 $2/T_D = c$ 。

$$\Omega_D = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_P}{2}\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

11.2.4 数字频带变换

在数字域将设计好的低通滤波器直接转换为各类滤波器。

通过映射转换关系: 将数字低通有理系统 z 变成因果稳定的有理系统 Z , 要求:

- 映射是有理函数
- 单位圆相互对应
- 单位圆内部相互对应

$$H_d(Z) = H_L(z)|_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$

设 θ, ω 分别为 z 和 Z 的数字频率分量:

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})| e^{j \arg[G(e^{-j\omega})]}$$

11.2.4.1 全通变换

需要在单位圆幅度不变, 因此需要全通变换。

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^N \frac{Z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i Z^{-1}}$$

当 ω 从 0 变化到 π , 全通函数的相角变换为 $N\pi$ 。

从低通到低通, $N=1$ 。低通到高通, 需要调节 α 使得 ω 和 θ 相差 π 。

11.3 FIR 设计

严格线性相位!

两种准则:

- 均方误差最小: 无偏估计, 主要介绍
- 最大误差最小

矩形窗满足均方误差最小。

11.3.1 窗函数设计法

若有线性相位约束，窗函数必须保证所截取 $h(n)$ 是对称的。

过渡带带宽正比于主瓣宽度 $4\pi/N$ 。截止频率位于 $(\omega_p + \omega_{st})/2$ 。

但是矩形窗截断造成肩峰为 8.95%，则阻带最小衰减为 -21dB，在工程上远不够。

$$w(n) = R_N(n) \quad W_R(e^{jw}) = W_R(w)e^{j(\frac{N-1}{2})w}$$

几种窗的指标如图 11.1。

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

图 11.1: 窗函数指标

11.3.2 凯泽窗设计

给定过渡带宽 $\Delta\omega$ ，阻带衰减为 $\delta_2 = -20 \log \alpha$ ：

$$M = 2\alpha = \frac{\delta_2 - 7.95}{2.286\Delta\omega}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\delta_2 - 8.7), & \delta_2 \geq 50dB \\ 0.5842(\delta_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\delta_2 - 21), & 21dB < \delta_2 < 50dB \\ 0, & \delta_2 \leq 21dB \end{cases}$$

第十二章 复习要点

12.1 复习要点

- 单边 Z 变换解非零状态 LTI 系统
- 六类基本信号的变换：冲激，阶跃，复指数，指数，窗函数，Sinc 到 DTFT，Z，DFT
- DTFT，Z 变换的奇偶虚实性即对应分解
- DTFT 是 Z 变换的频响
- DTFT 对单频信号的响应
- 全通系统、最小相位系统、线性相位系统（四类）特性（零极点特性）与分解
- 线性相位系统冲激特性
- 采样变换过程，频谱对应关系
- 离散处理等效模拟 LTI 的条件与过程
- DFS，DFT 的计算
- 圆周卷积、圆周移位
- 两类基二算法及其蝶形计算图¹
- DFT 分析中加窗的影响：分辨率、谱泄漏，理解步进率和分辨率能力以及窗长度形状造成的
- 掌握 IIR 设计的冲激响应不变法、双线性 Z 变换等方法
- 着重掌握 FIR 的设计方法
- 转置定理

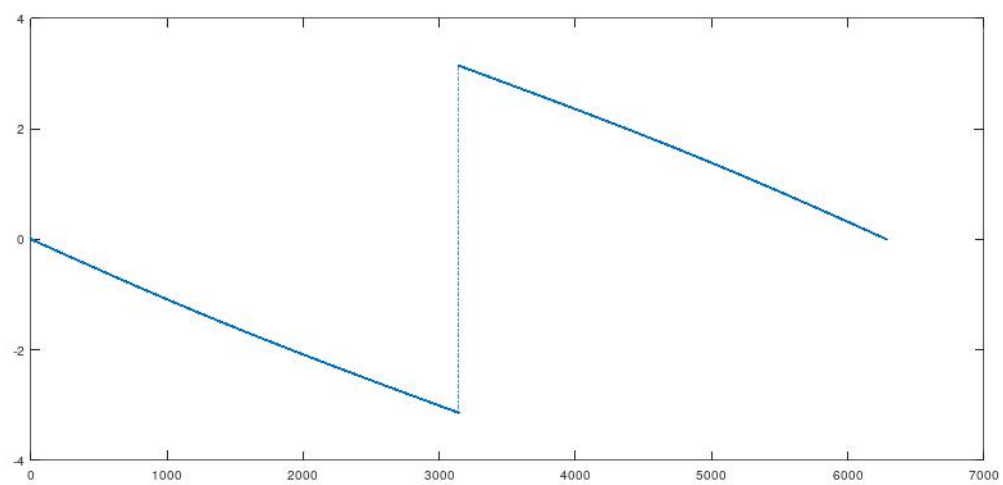
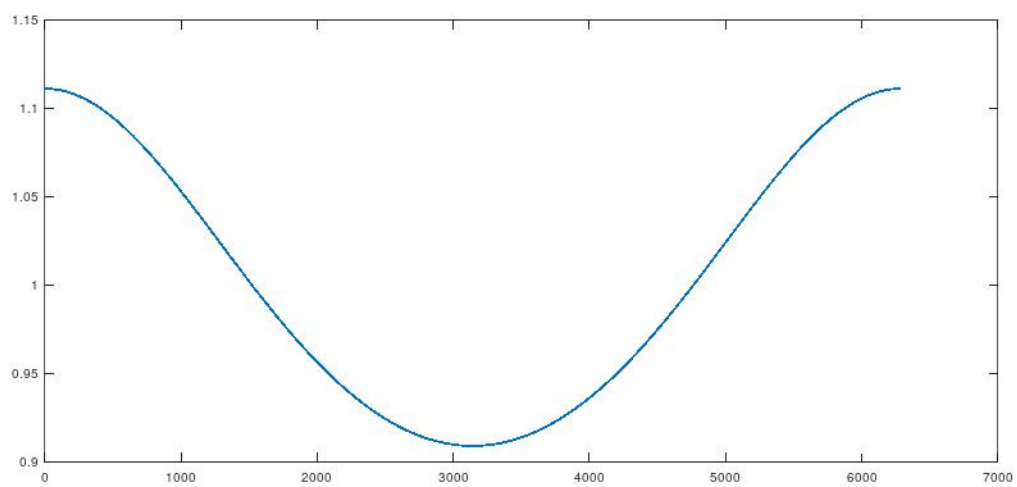
12.2 复习题

2.44, 5.49, 4.8, 4.53, 4.7, 4.34, 4.43, 4.49, 7.33, 9.6, 9.26, 9.27, 9.21, 10.4, 6.36,

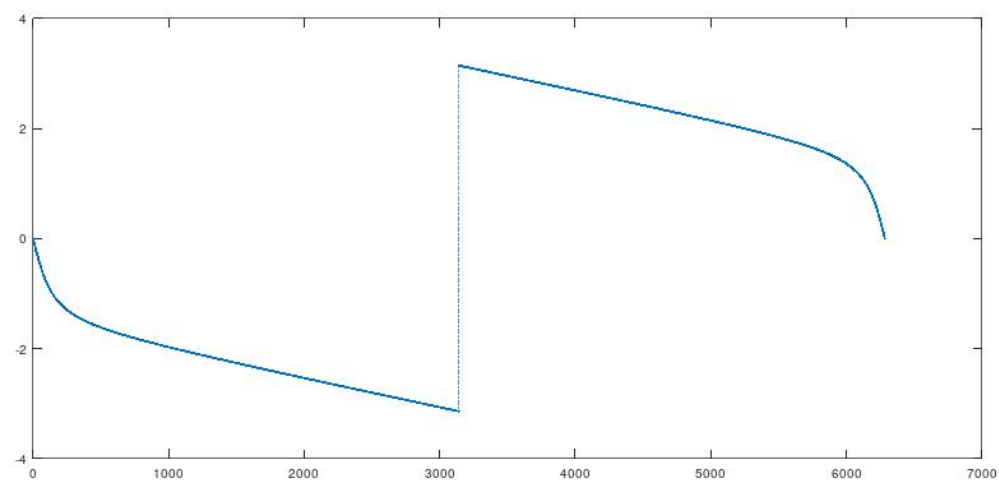
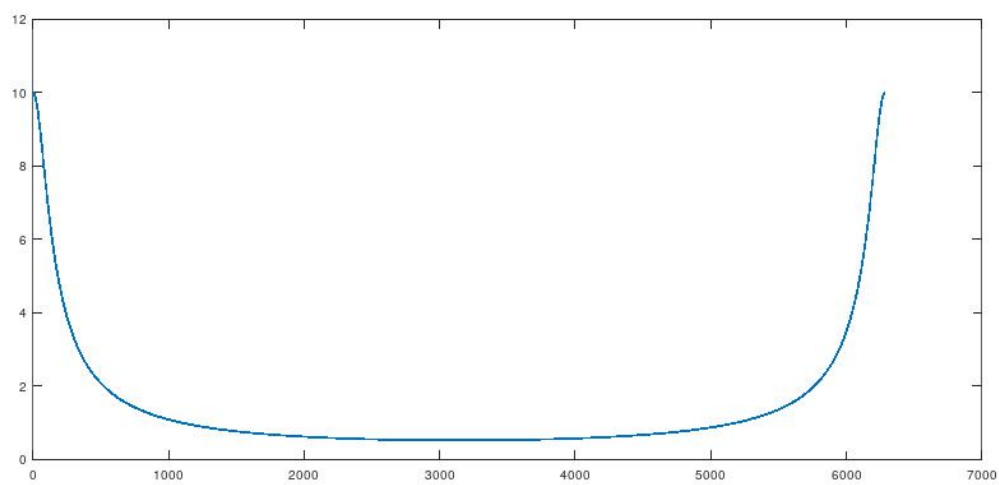
¹见之前图表

附录 A 零极点幅度相位研究

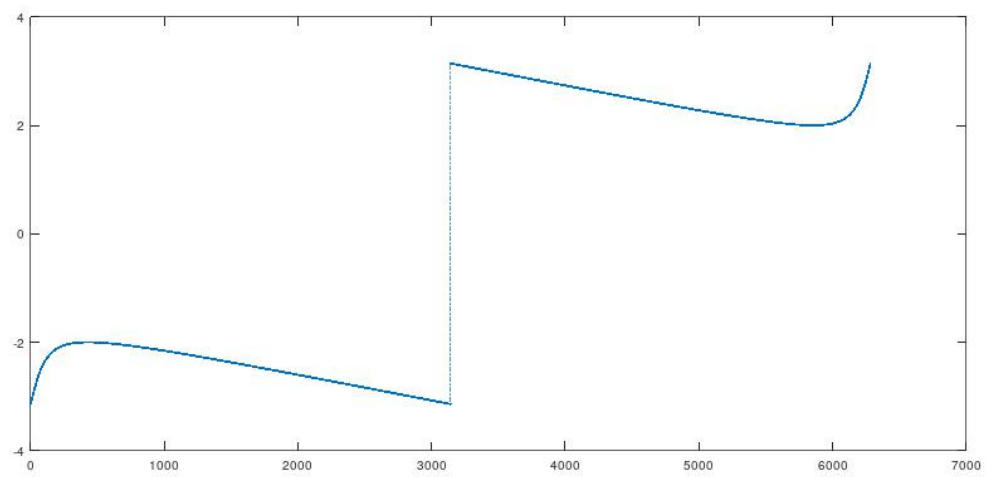
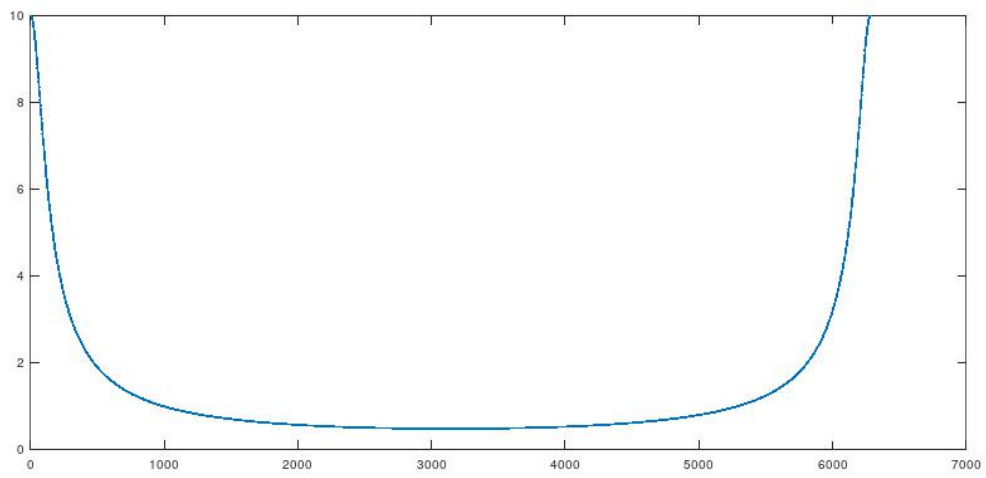
$z = 0.1$ 极点 无零点



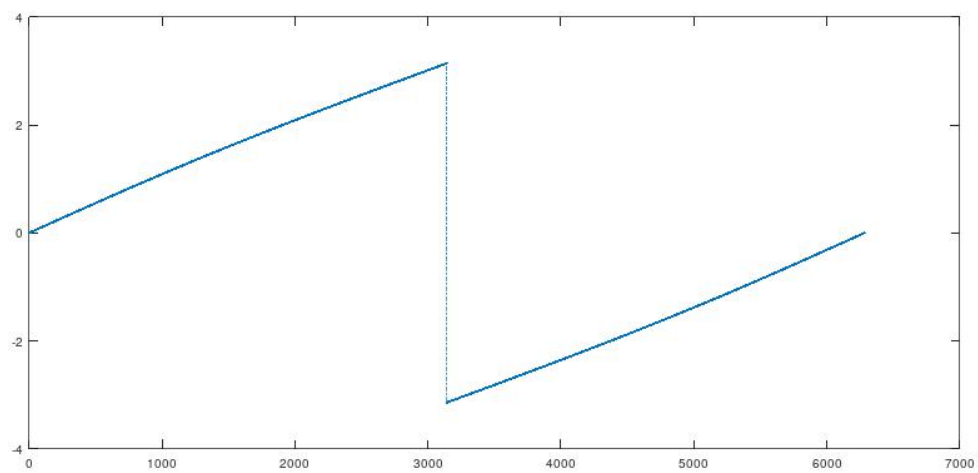
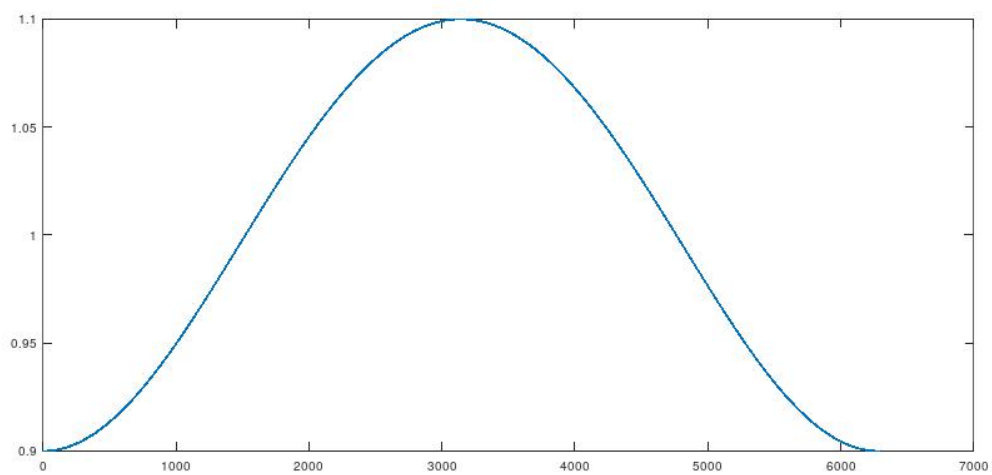
$z = 0.9$ 极点 无零点



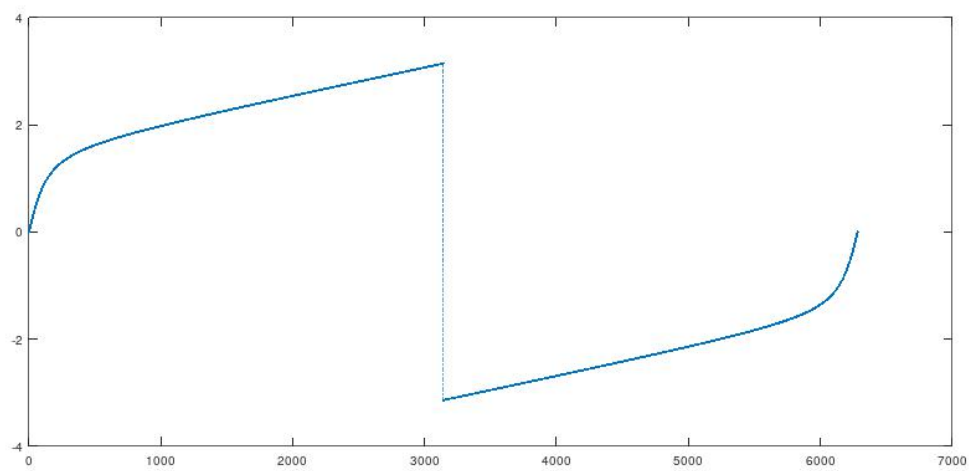
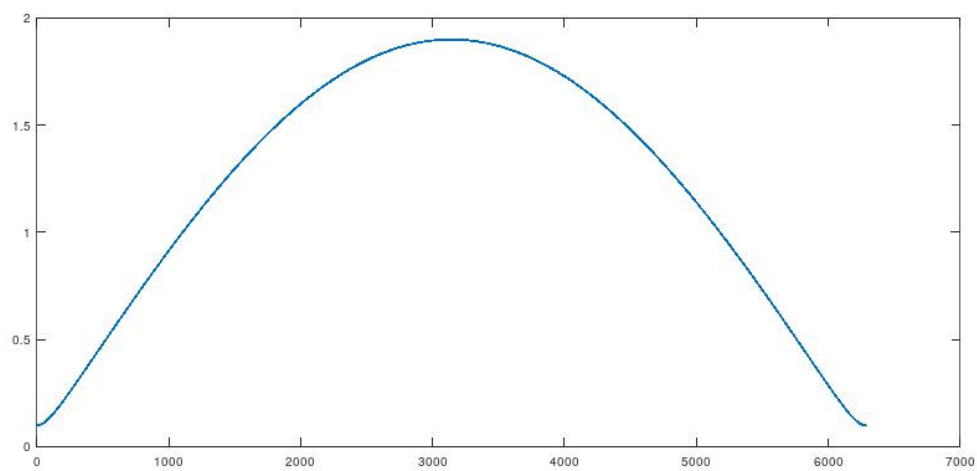
Z = 1.1 极点 无零点



$Z = 0.1$ 零点 无极点



$z = 0.9$ 零点 无极点



$Z = 1.1$ 零点 无极点

