第一章 信号采样与重构

内容提要

- ❏ 数模频率的对应关系，时域采样对频域的影响
- ❏ 采样信号如何包含连续信号所有信息？如何无失真恢复信号？是否有冗余信息？是否可以进行速率变化？
- ❏ 离散处理如何等效模拟 LTI 系统？如何提高处理性能？

1.1 理想周期采样重构

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想采样：

$$x_s(t)=x_c(t)*s(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(\mathrm{t}-nT)$$

AD 是 CD 的工程近似。

时域 $s(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 。数字采样 $S(\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_0)$ 。

1.1.1 整体流程

采样信号

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

调制采样

$$\begin{aligned}x_s(t)&=x_c(t)s(t)\\&=x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)\end{aligned}$$

根据 $\Omega_s=2\pi/T$ 采样频率，其傅立叶变换

$$S(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\Omega_s\right)$$

那么

$$X_s(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega)\otimes S(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j\Omega-kj\Omega_s)$$

数字信号的频谱是模拟频谱的映射，数字的频谱是中心频谱的镜像。

1.1.2 采样定理

平移频谱不交叠。

1.1.3 离散和连续 LTI 系统的等效性

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\Omega T}$$

触底带宽：采样的范围。

1.2 抽取和内插

多速率处理要保证信号的信息不会丢失。抽取是数字域上的采样，内插是数字域上的重构。

1.2.1 信号的整倍数采样

又称降采样，如 **图 ??**：

$$x_D(m) = x(mD)$$

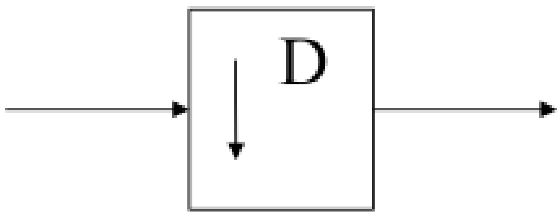

图 1.1: 抽取器或采样压缩器

存在间隔的冲激：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \ldots\ldots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $x'(n) = x(n)\delta_D(n)$ ，$x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$

其 Z 变换，

$$
\begin{aligned}
X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta_D(m) z^{-m/D} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m)\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}mi} \right) z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{D}mi} z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X\left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)
\end{aligned}
$$

采样周期变化为原有的 D 倍：

$$
x_D(n) \Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc\left(\Omega - k\frac{\Omega_0}{D} \right)
$$

$$
\Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Xc\left(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT} \right)
$$

其对应的模拟滤波器可以这样对待：转换成一个新的频谱平移

$$
\begin{aligned}
X_D(\omega) &= \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\frac{\omega}{DT} - k\frac{2\pi}{DT}) \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_C(\frac{\omega}{DT} - m\frac{2\pi}{T} - i\frac{2\pi}{DT}) \\
&= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_C(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m\frac{2\pi}{T})
\end{aligned}
$$

为了防止混叠失真，进行二次的采样，进行 π/D 滤波之后，进行 D 倍抽取，保证频谱一一对应，信息保证不会丢失。

如何理解波形的等价（不失真）：可以通过形状的可恢复性进行理解。

为什么抽取信号之后，能量没有减少？时间延长了。

时域变化：

$$
X_D)n) = v(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn = k)
$$

1.2.2 整倍内插

$$
x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \cdots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}
$$

补 0 在电路实现较为简单。

内插增加了高频分量，在时域可以看作是迅速变化的波形。

内插在频域的损失是 I 倍，需要补偿能量。

1.2.3 非整数倍抽取和内插

先内插可以收集更多频段的信号。

整体流程：进行 I 内插后进行 D 抽取。

1.2.4 多相结构

希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式：

$$
\begin{aligned}
&H(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \\
&= h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \cdots \\
&+ h_1 z^{-1} + h_5 z^{-5} + h_9 z^{-9} + h_{13} z^{-13} + \cdots \\
&+ h_2 z^{-2} + h_6 z^{-6} + h_{10} z^{-10} + h_{14} z^{-14} + \cdots \\
&+ h_3 z^{-3} + h_7 z^{-7} + h_{11} z^{-11} + h_{15} z^{-15} + \cdots \\
&= z^0 \left[h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \cdots\right] \\
&+ z^{-1} \left[h_1 + h_5 z^{-4} + h_9 z^{-8} + h_{13} z^{-12} + \cdots\right] \\
&+ z^{-2} \left[h_2 + h_6 z^{-4} + h_{10} z^{-8} + h_{14} z^{-12} + \cdots\right] \\
&+ z^{-3} \left[h_3 + h_7 z^{-4} + h_{11} z^{-8} + h_{15} z^{-12} + \cdots\right]
\end{aligned}
$$