

第一章 离散信号与系统

1.1 因果性、记忆性

是否用到了 $x[n]$ 的未来值/过去值，而不是其他可计算的值。

1.2 LTI 系统

既是线性系统，又是时不变系统，称为 LTI 系统。其充要条件是 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 。

1.2.1 因果系统

$$h[n] = h[n]u[n]$$

1.2.2 稳定系统

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

1.2.3 特征频率与 LTI 系统

若是有一个无限长的指数信号，那么有一个单频信号：

2.27

$$[e^{j\omega_0 n}] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

但是若是有限长，那么就有引入除去 ω_0 的分量，因此对于一个 LTI 系统来说，放大 $e^{j\omega_0 n}$ 和 $e^{j\omega_0 n}u[n]$ 需要的系统函数是不一样的。

1.3 差分方程的阶数

输出 $y[n-i]$ 最高值和最低值 i 的差值。

LCCDE = linear constant-coefficient difference equation .

第二章 DTFT 变换

2.1 频域阶数

2.42

若是在原有的系统函数多一个 z ，说明原来 $a_0 z^0$ 的位置变成了 $a_0 z^1$ ，也就是 a_n 变成了 a_{n+1} 。同理 z^{-1} 对应 a_{n-1} 。由于使用因果信号， z^{-1} 的形式更合适。

2.2 系统设计

2.56 ,

需要一个系统时，可以通过其定义入手，配凑式子。同时，对于特定的频率分量，其幅度、角度变换是由其频率响应改变的。

2.3 DTFT 推导细节

$$\begin{aligned} DTFT^{-1} [X(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

注意 2π 与 $\delta(n)$ 的由来：单位虚数的积分。

将 IDTFT 展开成累加的形式，实际上是将不同频率的分量逐个恢复：

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n} \end{aligned}$$

表 2.1: DTFT 变换对

时域函数	DTFT
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$
$W_N(n)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$
$\frac{w_c \sin[w_c(n - \alpha)]}{\pi w_c(n - \alpha)}$	$e^{-j\omega\alpha}(u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c))$

表 2.2: DTFT 变换性质

性质名称	表达式
线性	
时域平移-频域调制	$x(n - m) \rightarrow e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$
时域调制-频域平移	$e^{jn\omega_0} x(n) \rightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
时域翻折	$x(-n) \rightarrow X(e^{-j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

可以利用帕塞瓦尔定理解决一些求和式子：Slide P83.

2.4 DTFT 对称性

共轭对称与共轭反对称序列定义，实际上是实部、虚部分别的奇偶对称：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

任意序列都可以进行共轭分解：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x(-n) = x_e(-n) + x_o(-n) = x_e^*(n) - x_o^*(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

根据下一小节的性质：

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

同样的对频域函数进行变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

逆变换：

$$DTFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

2.5 变换共轭性质

具有普适性。

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x^*[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*) \\
\mathcal{Z}[x[-n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{-1})^{-n} = X(z^{-1}) \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Re}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{x[n] + x^*[n]}{2}\right] = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \\
\mathcal{Z}[\operatorname{Im}\{x[n]\}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{z[n] - x^*[n]}{2j}\right] = \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]
\end{aligned}$$

2.6 Z 变换

表 2.3: \mathcal{Z} 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

表 2.4: \mathcal{Z} 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha < z < \beta$	$\frac{1}{\beta} < z < \frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a > 0$	$X(z^a)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha^{1/a} < z < \beta^{1/a}$
$x(n \pm m)$	双边 $z^{\pm m} X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$x(n-m)u(n)$	单边 $z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$

见下页

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(n+m)u(n)$	单边 $z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < \left \frac{z}{a} \right < \beta$
$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)v^{-1}dv^1$		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty)$$

帕塞瓦尔定理

$$Y(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^* \left(\frac{1}{V^*} \right)_V^{-1} dV$$

2.7 逆 Z 变换

2.7.1 部分分式法

对于有理多项式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$ka^n u(n), |z| > a$$

$$-ka^n u(-n-1), |z| < a$$

¹其中 C 是 $X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

2.8 从能量看 Z 变换与 DTFT

时域频域的能量是一致的，没有发生衰减。

2.9 Z 变换与时域频域

为了解决非零状态系统，使用单边 Z 变换。

系统不改变频率：

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0(n-m)+\phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\
 &= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0})
 \end{aligned}$$

2.10 系统零极点与频率响应

单位圆上的系统函数是频率响应。

2.10.1 幅度响应

- 原点处的零极点幅度无影响
- 经过单位圆上的零点幅度归零，单位圆附近的零点出现谷点
- 经过单位圆上的极点幅度无穷大，单位圆附近的极点出现峰点
- 远离零极点时影响较小

2.10.2 相位响应

- 原点处的零极点对相位影响为线性，极点会引起滞后，零点会引起超前
- 靠近单位圆的零极点会引起较大的波动
- 远离极点零点的位置变换比较平缓
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零

对于圆内外零极点：

- 圆内极点：顺时针经过，相位迅速延后
 - 圆外极点：顺时针经过，相位迅速提前
 - 圆内零点：顺时针经过：相位迅速提前
 - 圆外零点：顺时针经过：相位迅速延后
- 过单位圆零点相位突变 π 。

2.11 LTI 系统幅相特性分析

当给定幅度特性时，总可以通过共轭分解找到一个系统满足要求：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

2.11.1 全通系统

频响恒为 1，其零极点分别为 a 与 $1/a^*$ ：

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

其相位响应为：群延迟为正值，连续相位递减。

$$\begin{aligned} \text{Assume: } a &= re^{j\theta} \\ \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] &= -\omega - 2 \arctg \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] \\ \text{grd} [H_{ap}(e^{j\omega})] &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{-j(\omega - \theta)}|^2} \end{aligned}$$

用途：

- 相位均衡器，用于提高群延迟
- 任何因果稳定系统均可以分解为全通系统和最小相位的级联
- 若是系统不稳定，可以用于交换系统的零极点，而不改变幅度特性

2.11.2 最小相位系统

要求极点在单位圆内（主要考虑系统稳定性），要求零点在单位圆内（主要考虑相位变化最小）。

最小相位系统零极点均在单位圆内，极点往往与系统稳定性联系在一起，零点则往往与系统的延时特性联系在一起。逆系统也是因果稳定的，可以实现幅度和相位失真的完全补偿。

- 最小相位延迟，全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{\min}(z) H_{ap}(z) \\ \arg [H(e^{j\omega})] &= \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg [H_{ap}(e^{j\omega})] \\ \arg [H(e^{j\omega})] &\leq \arg [H_{\min}(e^{j\omega})] \\ |\arg [H(e^{j\omega})]| &\geq |\arg [H_{\min}(e^{j\omega})]| \end{aligned}$$

- 最小群延迟，全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值：

$$\text{grd} [H(e^{j\omega})] = \text{grd} [H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd} [H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

$$\text{grd} [H(e^{j\omega})] \geq \text{grd} [H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 最小能量延迟，最集中在 $n = 0$ 范围内：

$$\sum_{m=0}^n |h(n)|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2$$

因此：

$$|h(0)| \leq |h_{\min}(0)|$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为最大相位系统。

2.11.3 系统的补偿

幅度失真由最小相位因子补偿，相位失真利用全通因子补偿特定频段。

2.11.4 线性相位系统

定义：群延迟 α 为常数 $\phi(\omega) = -\alpha\omega + \beta$

线性相位响应时域表现为信号平移，波形不发生失真。

不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统。

若是群延迟 α 满足 2α 为整数，那么单位冲激响应严格对称，否则不严格对称，但是仍满足线性相位。

2.11.5 广义线性相位系统

在系统相位存在突变以及固定相位时，仍然存在恒定群延迟。

已知线性相位系统存在对称性，进行分析：

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

$$DTFT [h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega}) e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta}$$

$$DTFT [h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta}$$

因此， $A(\omega)$ 的对称性决定了 $h(n)$ 的对称性（一致）。

根据对称形式与 2α 的奇偶性，有四类 FIR 线性相位滤波器。

对称冲激响应的系统特性推导：

$$\begin{aligned}
h(n) &= \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n} \\
\text{令 } m &= N-1-n = \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\
&= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})
\end{aligned}$$

得到：

1. 系统零点个数等于系统在原点的极点阶数相等
2. z_i 与 z_i^{-1} 均为零点
3. $h(n)$ 为实数，零点共轭成对

四类，其中 $M = N - 1$ ：

$$\begin{aligned}
H(z) &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \\
H(z) &= \frac{1}{2} \left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\
&= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \\
H(\omega) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} h(n) \left[\frac{(e^{j\omega})^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm (e^{j\omega})^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]
\end{aligned}$$

- I 类： M 为偶数，偶对称： $h(n) = h(M-n)$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{M}{2} - n \right) \omega \right]$$

- II 类： M 为奇数，偶对称，存在特殊零点：

$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

解得 $z = -1, \omega = \pi$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\frac{N}{2} - n = m = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

- III 类: M 为偶数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = \pm 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N-1}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left(\frac{N-1}{2} - m \right) \sin(m\omega)$$

- M 为奇数, $h(n) = -h(M-n)$ 特殊零点: $z = 1$ 。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\left(\frac{N}{2} - n = m \right) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

2.11.5.1 最小相位分解

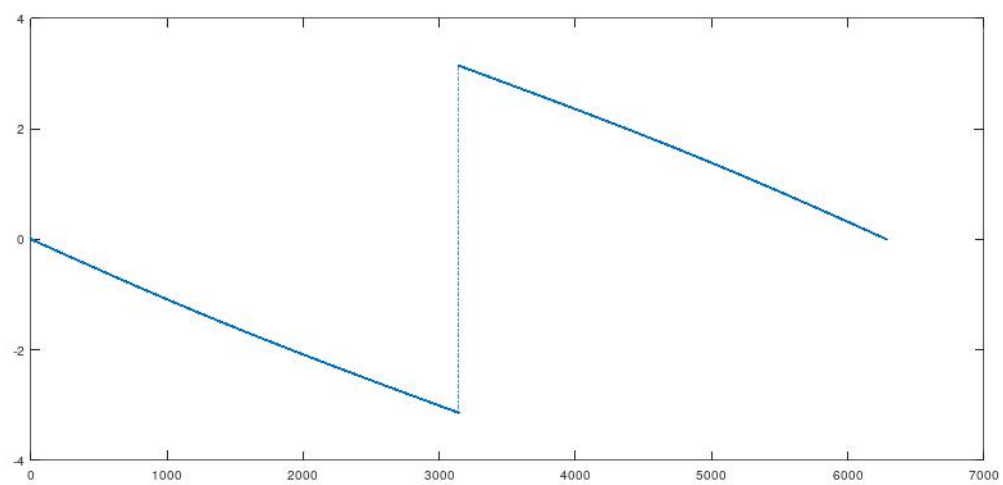
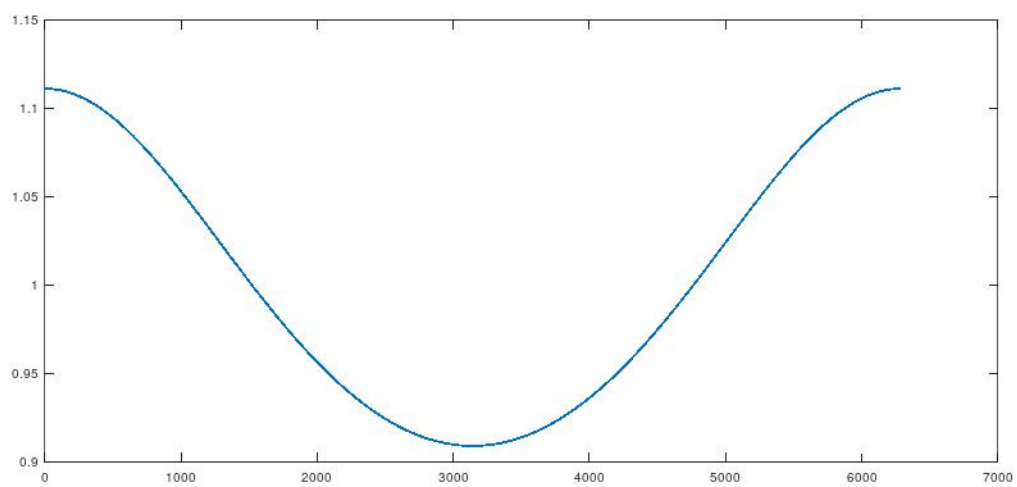
根据零点成对进行分解, 分解到最小相位系统与线性相位系统。

第三章 复习题

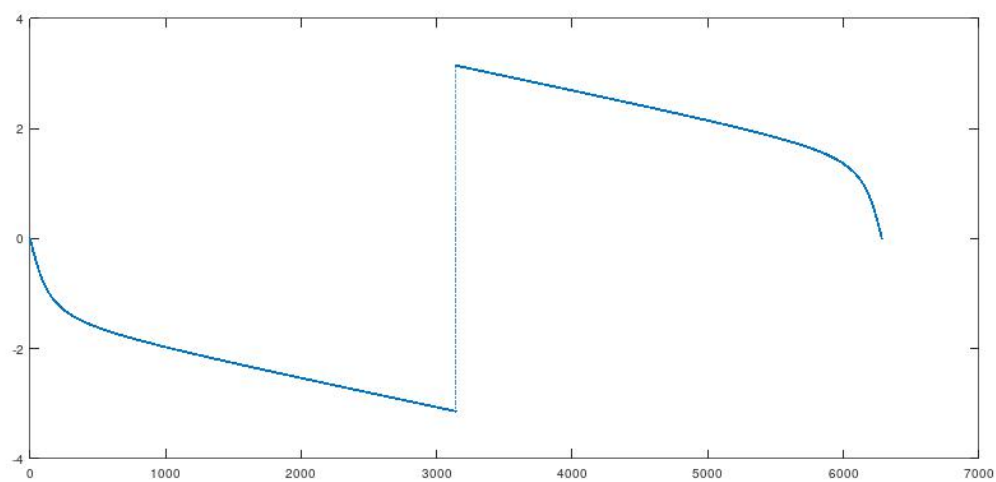
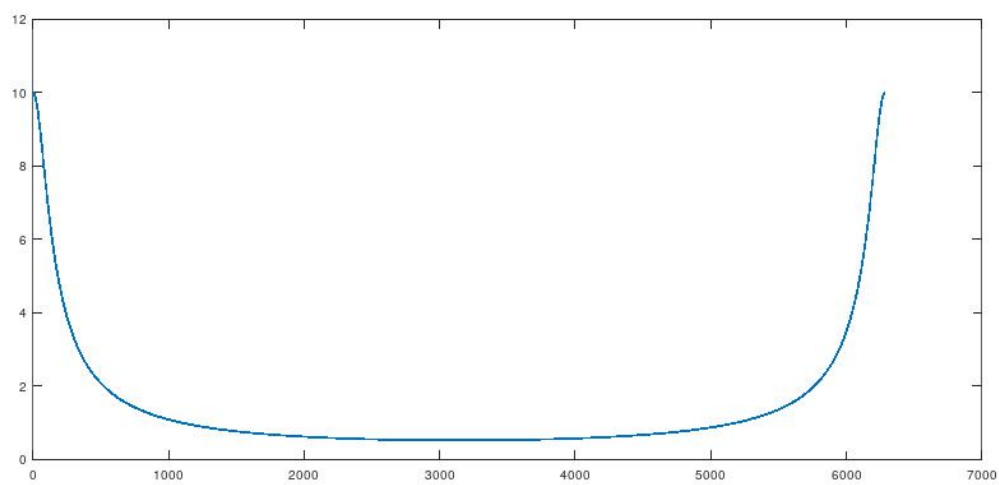
2.44,

附录 A 零极点幅度相位研究

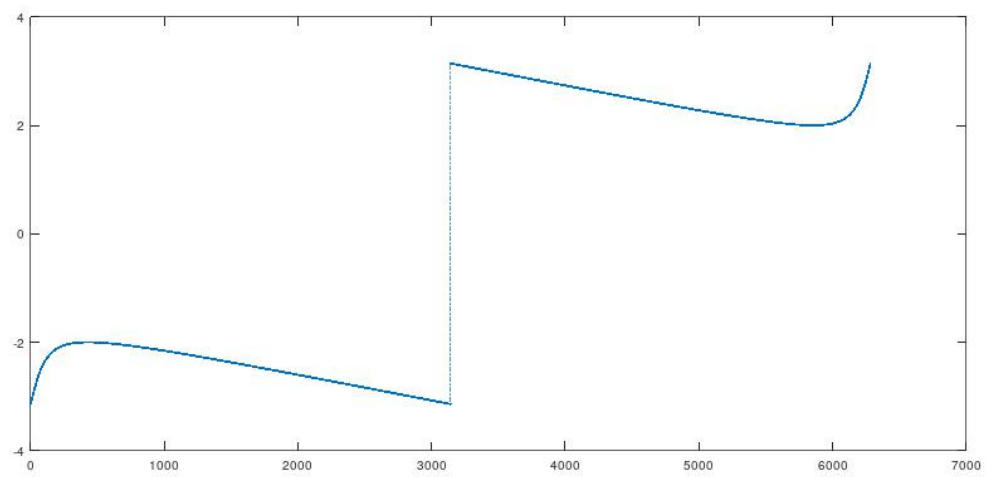
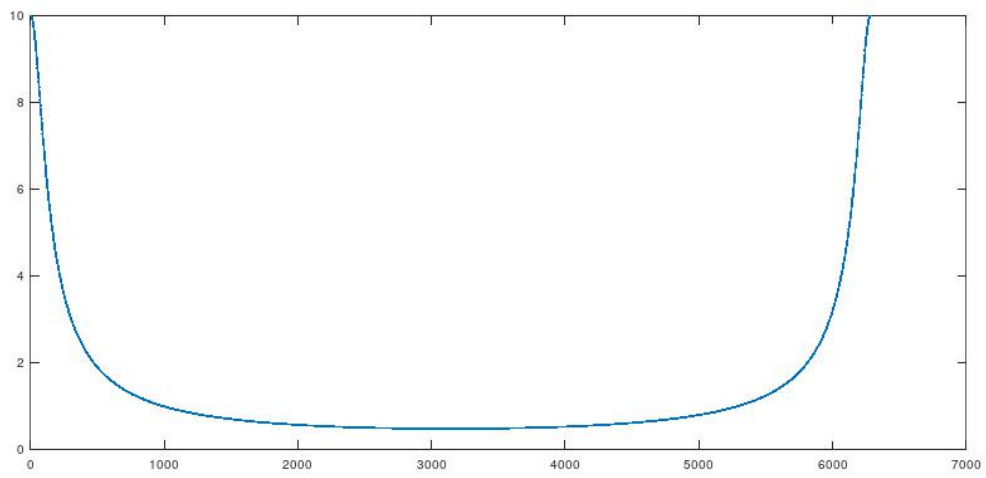
$z = 0.1$ 极点 无零点



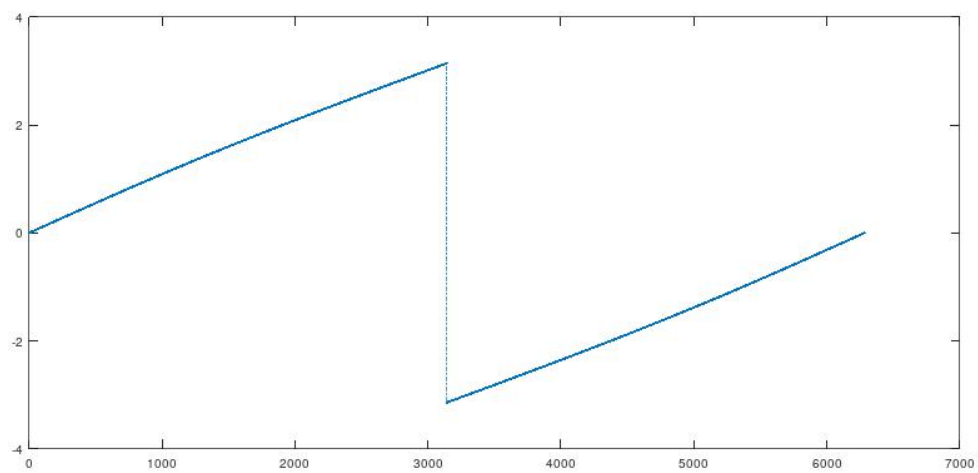
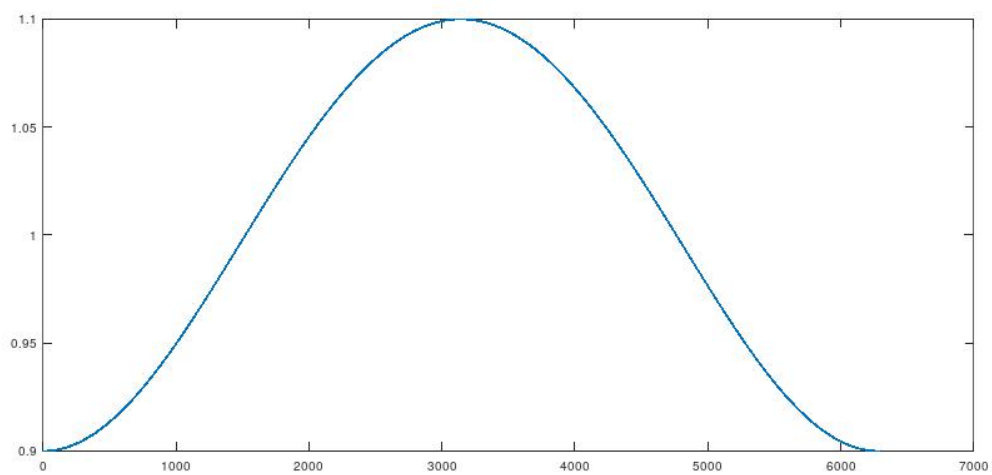
$z = 0.9$ 极点 无零点



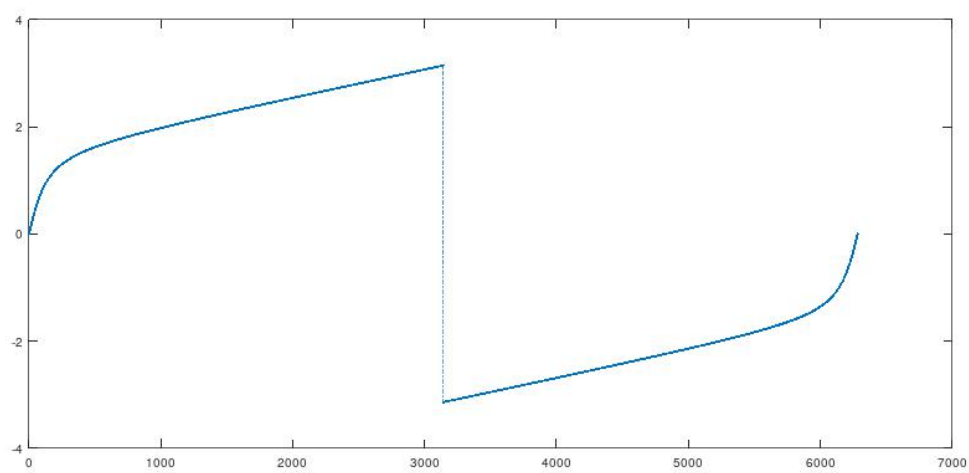
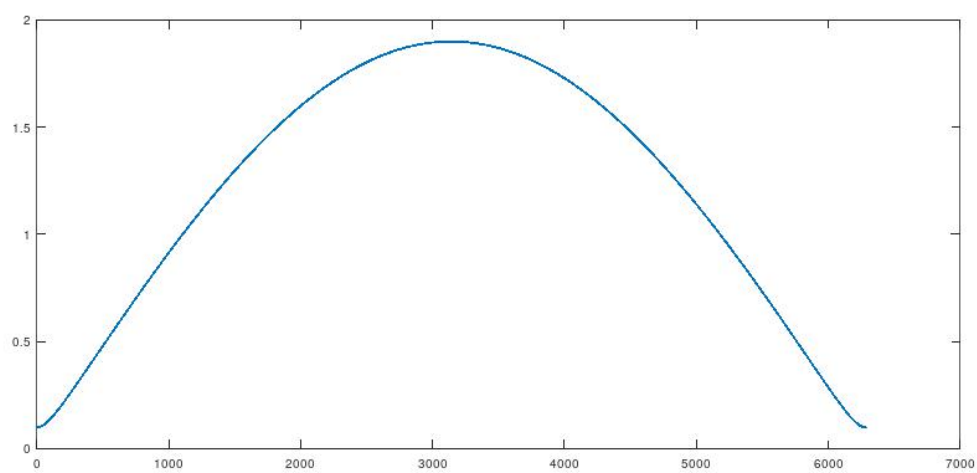
Z = 1.1 极点 无零点



$Z = 0.1$ 零点 无极点



$z = 0.9$ 零点 无极点



$Z = 1.1$ 零点 无极点

