

第一章 信号采样与重构

内容提要

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| □ 数模频率的对应关系，时域采样对频域的影响 | 否有冗余信息？是否可以进行速率变化？ |
| □ 采样信号如何包含连续信号所有信息？如何无失真恢复信号？是 | □ 离散处理如何等效模拟 LTI 系统？如何提高处理性能？ |

1.1 理想周期采样重构

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想采样：

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

AD 是 CD 的工程近似。

时域 $s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 。数字采样 $S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$ 。

1.1.1 整体流程

采样信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

调制采样

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

根据 $\Omega_s = 2\pi/T$ 采样频率，其傅立叶变换

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

那么

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) \otimes S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - k\Omega_s)$$

数字信号的频谱是模拟频谱的映射，数字的频谱是中心频谱的镜像。

1.1.2 采样定理

平移频谱不交叠。

1.1.3 离散和连续 LTI 系统的等效性

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

触底带宽：采样的范围。

1.2 抽取和内插

多速率处理要保证信号的信息不会丢失。抽取是数字域上的采样，内插是数字域上的重构。

1.2.1 信号的整倍数采样

又称降采样，如 图 1.1：

$$x_D(m) = x(mD)$$

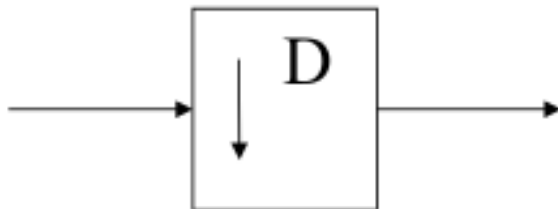


图 1.1: 抽取器或采样压缩器

存在间隔的冲激：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $x'(n) = x(n)\delta_D(n)$, $x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$

其 Z 变换：

$$\begin{aligned}
X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} m i} \right) z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j \frac{2\pi}{D} m i} z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)
\end{aligned}$$

采样周期变化为原有的 D 倍:

$$\begin{aligned}
x_D(n) &\Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(\Omega - k \frac{\Omega_0}{D} \right) \\
&\Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT} \right)
\end{aligned}$$

其对应的模拟滤波器可以这样对待: 转换成一个新的频谱平移

$$\begin{aligned}
X_D(\omega) &= \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega}{DT} - m \frac{2\pi}{T} - i \frac{2\pi}{DT} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m \frac{2\pi}{T} \right)
\end{aligned}$$

为了防止混叠失真, 进行二次的采样, 进行 π/D 滤波之后, 进行 D 倍抽取, 保证频谱一一对应, 信息保证不会丢失。

如何理解波形的等价 (不失真): 可以通过形状的可恢复性进行理解。

为什么抽取信号之后, 能量没有减少? 时间延长了。

时域变化：

$$X_D(n) = v(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn = k)$$

1.2.2 整倍内插

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

补 0 在电路实现较为简单。

内插增加了高频分量，在时域可以看作是迅速变化的波形。

内插在频域的损失是 I 倍，需要补偿能量。

1.2.3 非整数倍抽取和内插

先内插可以收集更多频段的信号。

整体流程：进行 I 内插后进行 D 抽取。

1.2.4 多相结构

希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式，以特定频率倍数为周期：

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots \\ &\quad + h_1z^{-1} + h_5z^{-5} + h_9z^{-9} + h_{13}z^{-13} + \dots \\ &\quad + h_2z^{-2} + h_6z^{-6} + h_{10}z^{-10} + h_{14}z^{-14} + \dots \\ &\quad + h_3z^{-3} + h_7z^{-7} + h_{11}z^{-11} + h_{15}z^{-15} + \dots \\ &= z^0 [h_0 + h_4z^{-4} + h_8z^{-8} + h_{12}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-1} [h_1 + h_5z^{-4} + h_9z^{-8} + h_{13}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-2} [h_2 + h_6z^{-4} + h_{10}z^{-8} + h_{14}z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-3} [h_3 + h_7z^{-4} + h_{11}z^{-8} + h_{15}z^{-12} + \dots] \end{aligned}$$

M 相分解：

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-Mn}$$

$$E_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M)$$

1.3 工程问题

1.4 DA & DA

过采样提升信噪比。

噪声成形量化器，将噪声丢在高频位置。