

第一章 离散时间系统变换域分析

1.1 离散时间傅里叶变换

内容提要

□ 离散时间傅里叶变换

□ DTFT 性质与定理

□ 基本序列 DTFT

定义 1.1 (离散时间傅里叶变换) DTFT/ 离散时间傅立叶变换¹，应用与非周期信号以及傅里叶频谱的关系。

正变换：

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换：

$$\text{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

DTFT 将离散的序列变换到了一个连续的函数，对于非周期序列可以收敛，是一个关于 ω 的周期函数。

在 MATLAB 中，`sinc(x)` 表示 $\sin(x)/x$

在反变换中，隐藏了关于信号分解的含义：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega \end{aligned}$$

其中关于 n 的只有一项，将频谱的面积乘以对应离散时刻的分量。

1.1.1 基本序列的 DTFT

单位冲激序列：

$$\delta(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} 1$$

单位常数序列：

$$1 \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

单位阶跃序列：

$$u(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

¹DFT 是离散傅里叶变换，切勿混淆

单位指数序列：

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

矩形窗序列：

$$G_N(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$

理想低通滤波器，截止频率为 ω_c

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & -\pi < \omega < -\omega_c \text{ or } \omega_c < \omega < \pi \end{cases}$$

反变换：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\omega_c(n - \alpha)}$$

1.1.2 DTFT 主要性质以及定理

- 线性
- 时序频移导致频域调制： n 在频域只是一个相位系数
- 时域调制导致频域平移
- 时域反褶导致频域反褶
- 时域共轭导致频域共轭以及反褶
- 时域相乘形成频域卷积：

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- 时域卷积导致频域相乘：

$$x(n) \otimes h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- 线性保泛变换/帕塞瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

1.1.3 DTFT 对称性

定义 1.2 (对称序列) 共轭对称序列：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

共轭反对称序列：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

虚实部以及幅相满足：

$$\operatorname{Re}[x_e(n)] = \operatorname{Re}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_e(n)] = -\operatorname{Im}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Re}[x_o(n)] = -\operatorname{Re}[x_o(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_o(n)] = \operatorname{Im}[x_o(-n)]$$

$$|x_e(n)| = |x_e(-n)| \quad (1.1)$$

$$\operatorname{Arg}[x_e(n)] = -\operatorname{Arg}[x_e(-n)]$$

$$|x_o(n)| = |x_o(-n)| \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Arg}[x_o(n)] = \pi - \operatorname{Arg}[x_o(-n)]$$

进行引申，可以将一个序列进行分解，得到一个对称以及一个反对称序列：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (1.3)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

对应的频谱：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (1.4)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$\operatorname{DTFT}[x_e(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] \quad (1.5)$$

$$\operatorname{DTFT}[x_o(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

1.2 Z 变换及其反变换

定义 1.3 (z 变换)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

称 $x(n)$ 为 $x(n)$ 的 Z 变换, 可以记为:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$$

注意, 幂级数收敛时变换才有意义, 需要标注收敛域。

由于存在衰减, 可以变换的范围比 DTFT 更大, 存在 Z 变换不一定存在 DTFT。

Z 变换的充分必要条件是级数绝对可和。

1.2.1 收敛域

对于有限长的序列, 只要每一项有界, 那么级数收敛, 且至少包括有限的 z 平面 (不包括 $z = 0$)。对与和原点关系进行判断。

右边序列 (向右趋近无穷), 存在一个最小的收敛半径, 半径之外全部收敛。无左半轴分量, 为因果序列。

左边序列, 存在一个最大的半径, 之内全部收敛。无右半轴分量, 为反因果序列。

双边序列若收敛, 必在环状区域收敛。

需要注意, 不同的序列其 Z 变换的数学表达式可以完全一致。因此需要给出对应的收敛区间。

1.2.2 性质

- 线性: 时域不重合时收敛域为交集, 其他情况可能消减零极点产生扩大现象。
- 序列移位
- 尺度变化
- 线性加权/Z 域求导

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (1.6)$$

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (1.7)$$

- 共轭序列
- 序列反褶

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1} \quad (1.8)$$

- 初值定理 (因果序列):

$$\text{for } x(n) = x(n)u(n) \text{ get } \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

- 终值定理:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

- 时域卷积

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)] = X(z)H(z)$$

- Z 域复卷积

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$$\text{where } R_{x-}R_{h-} < |z| < R_{x+}R_{h+}$$

- 周期卷积：将复卷积转换为数学形式明显的形式（围线积分半径固定）

$$v = \rho e^{j\theta}, z = r e^{j\omega}$$

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(\rho e^{j\theta})X\left(\frac{r}{\rho}e^{j(\omega-\theta)}\right)\frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$

- 帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

1.2.3 Z 反变换

定义 1.4 (Z 反变换) 从给定的 Z 变换及其收敛域中还原出原始序列的过程叫做 Z 反变换。

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

实质是求 $X(z)$ 的幂级数展开，通常使用长除法，部分分式，留数（危险积分法）。

部分分式法

在实际应用中，一般 $X(z)$ 是 z 的有理分式也就是

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \text{ where A and B are polynomials}$$

那么可以展开为

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

$$x(n) = \sum_i \mathcal{Z}^{-1}[X_i(z)]$$

1.3 系统函数与频率相应

1.4 LTI 系统的幅相分析