第一章 信号采样与重构

内容提要

- ❏ 数模频率的对应关系，时域采样对频域的影响
- ❏ 采样信号如何包含连续信号所有信息？如何无失真恢复信号？是否有冗余信息？是否可以进行速率变化？
- ❏ 离散处理如何等效模拟 LTI 系统？如何提高处理性能？

1.1 理想周期采样重构

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想采样：

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(\mathrm{t} - nT)$$

AD 是 CD 的工程近似。

时域 $s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 。数字采样 $S(\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$ 。

1.1.1 整体流程

采样信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

调制采样

$$\begin{aligned}
x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\
&= x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)
\end{aligned}$$

根据 $\Omega_s = 2\pi/T$ 采样频率，其傅立叶变换

$$S(\mathrm{j}\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k\Omega_s\right)$$

那么

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) \otimes S(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s)$$

数字信号的频谱是模拟频谱的映射，数字的频谱是中心频谱的镜像。

1.1.2 采样定理

平移频谱不交叠。

1.1.3 离散和连续 LTI 系统的等效性

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\Omega T}$$

触底带宽：采样的范围。

1.2 抽取和内插

多速率处理要保证信号的信息不会丢失。抽取是数字域上的采样，内插是数字域上的重构。

1.2.1 信号的整倍数采样

又称降采样，如 **图 ??**：

$$x_D(m) = x(mD)$$

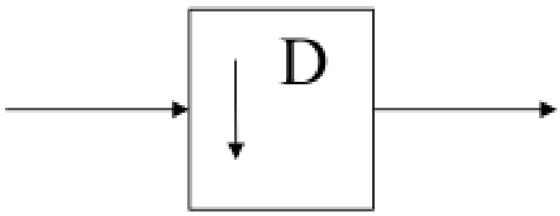

图 1.1: 抽取器或采样压缩器

存在间隔的冲激：

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \ldots\ldots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $x'(n) = x(n)\delta_D(n)$ ，$x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$

其 Z 变换，

$$\begin{aligned}
X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D(n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta_D(m) z^{-m/D} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}mi} \right) z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{D}mi} z^{-m/D} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)^{-m} \\
&= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X\left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D}i} \right)
\end{aligned}$$