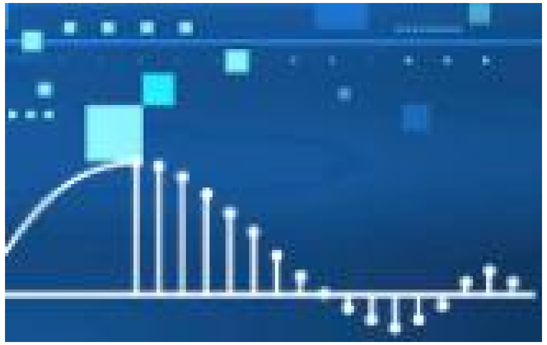
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第 五 章

Contents

数 字 滤 波 器 设 计 与 实 现

FIR 滤波器设计

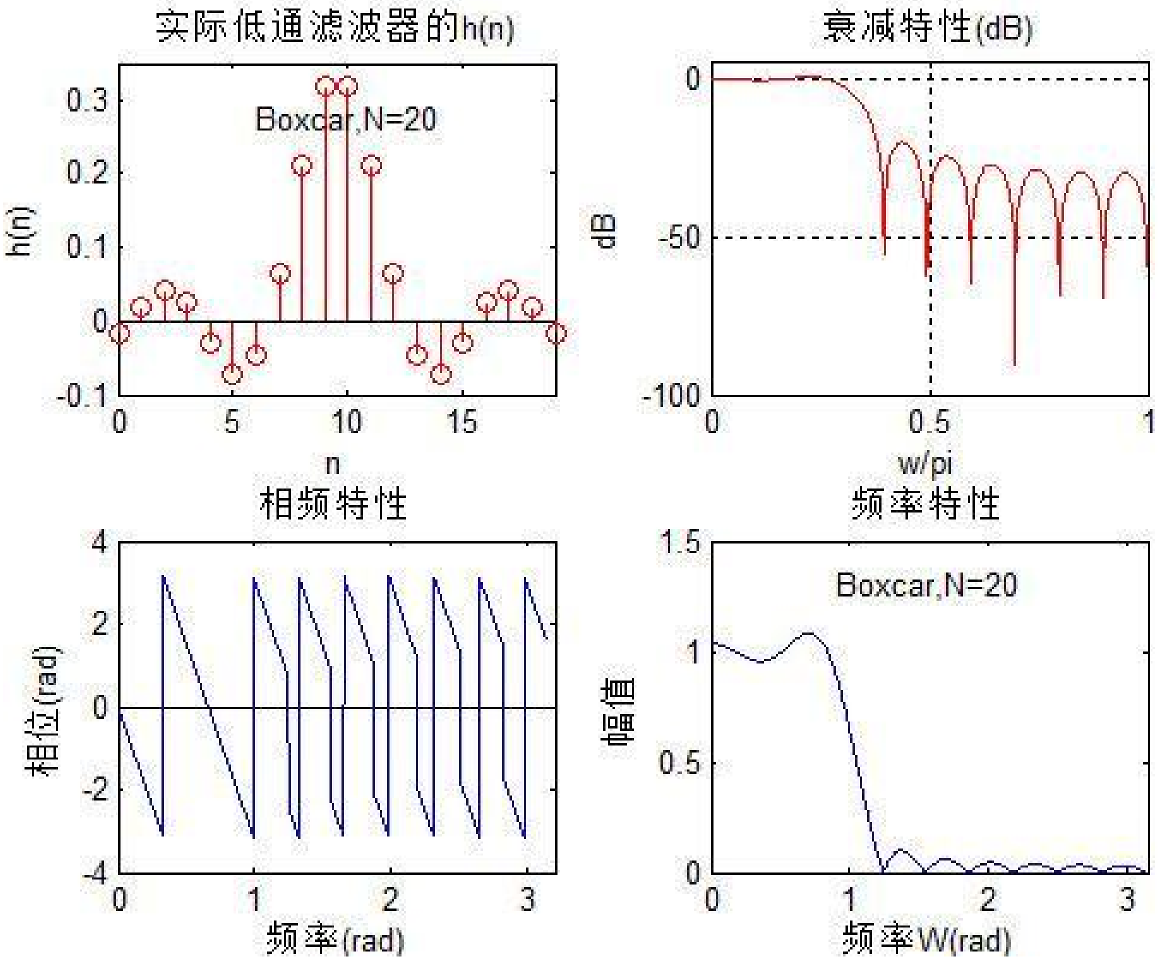
滤波器设计基础

IIR滤波器设计

FIR滤波器设计

- ◆h(n)为有限长序列；
- ◆H(z)在有限Z平面上无极点；
- ◆实现结构以前馈环节为主。
- ◆主要思路寻找冲激响应

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$$



一、FIR滤波器最优化准则

- **IIR**滤波器设计法对**FIR**设计不适用
  - 因为**IIR**滤波器是利用有理分式的系统函数，而**FIR**滤波器的系统函数只是多项式
- **FIR**滤波器主要有两种最优化准则
  - 均方误差最小准则
  - 最大误差最小化准则
- 此处我们主要介绍均方误差最小准则下的滤波器设计。

均方误差最小准则

- 误差能量最小
  - 若用 $H_d(e^{jw})$ 表示要求的频率响应，
  - 用 $H(e^{jw})$ 表示设计得到的滤波器频率响应，
  - 以 $E(e^{jw})$ 表示频率响应误差，即

$$E(e^{jw}) = H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})$$

  - 则均方误差为：

$$e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|E(e^{jw})\right|^2 dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})\right|^2 dw$$

- 设计目的
  - 选择一组 $h(n) = IDTFT[H(e^{jw})]$，使均方误差最小。

$$e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|E(e^{jw})\right|^2 dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})\right|^2 dw$$

- 由于： $H_d(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jwn}$ $H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jwn}$

$$E(e^{jw}) = H_d(e^{jw}) - H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1}[h_d(n) - h(n)]e^{-jwn} + \sum_{\text{其他 } n} h_d(n)e^{-jwn}$$

- 按照帕塞瓦公式有：

$$e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|E(e^{jw})\right|^2 dw = \sum_{n=0}^{N-1}\left|h_d(n) - h(n)\right|^2 + \sum_{\text{其他 } n}\left|h_d(n)\right|^2$$

- 要使e²最小，必须使第一项求和最小，即：

$$\left|h_d(n) - h(n)\right| = 0, 0 \le n \le N-1 \qquad h(n) = \begin{cases} h_d(n), 0 \le n \le N-1 \\ 0, \text{其他 } n \end{cases}$$

- 结论： 矩形窗设计法满足最小均方误差准则。

二、 窗函数设计法

- 用有限长单位冲激响应**h(n)**的滤波器来逼近理想滤波器频率响应。

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jw} \longrightarrow H_d(e^{jw})$$

$$H_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw})e^{jwn}\,dw$$

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

- 指标是在频域提出的
- 设计是在时域进行的

理想低通滤波器

- 我们以一个截止频率为 w_c 的线性相位的理想低通滤波器为例来加以讨论。
- 设滤波器的群延时为 α ,即：

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \le w \le w_c \\ 0 & w_c < w \le \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi}\frac{\sin\left[w_c(n-\alpha)\right]}{w_c(n-\alpha)}$$

线性相位与加窗

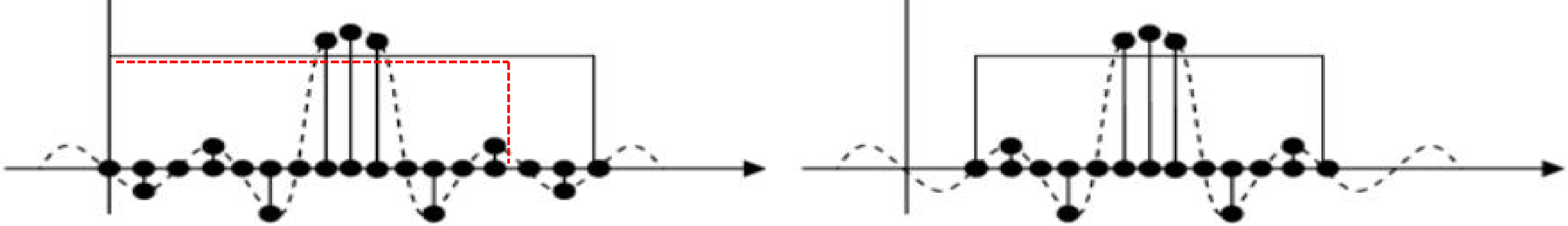
$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

- $h_d(n)$是中心点在α的偶对称无限长非因果序列，要得到有限长的$h(n)$，一种最简单的办法就是取矩形窗$R_N(n)$，即：

$$w(n)=R_N(n)$$

- 若有线性相位约束，窗函数必须保证所截取$h(n)$是对称的。

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{w_c}{\pi}\dfrac{\sin[w_c(n-\frac{N-1}{2})]}{w_c(n-\frac{N-1}{2})} & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

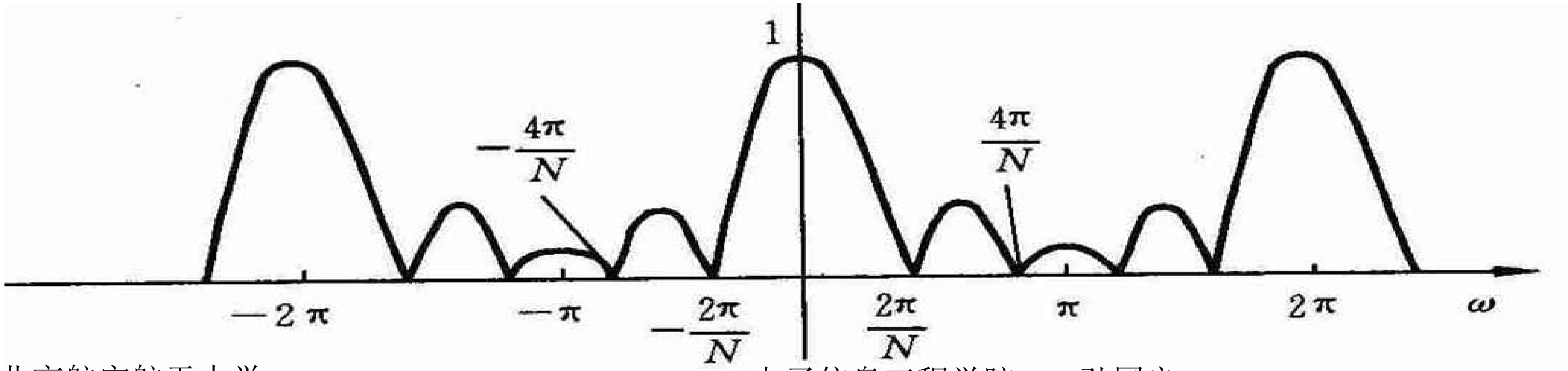


$$\alpha=(N-1)/2$$

加窗对滤波器频率响应的影响

- 窗函数的频率特性为： $W(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-jwn}$
- 对矩形窗，则有： $W_R(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = e^{-jw(\frac{N-1}{2})} \dfrac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$
- 表示成幅度函数与相位函数：

$$W_R(e^{jw}) = W_R(w) e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$



矩形窗所设计滤波器的频率特性

如果将理想频率响应也写成：$H_d(e^{jw}) = H_d(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$

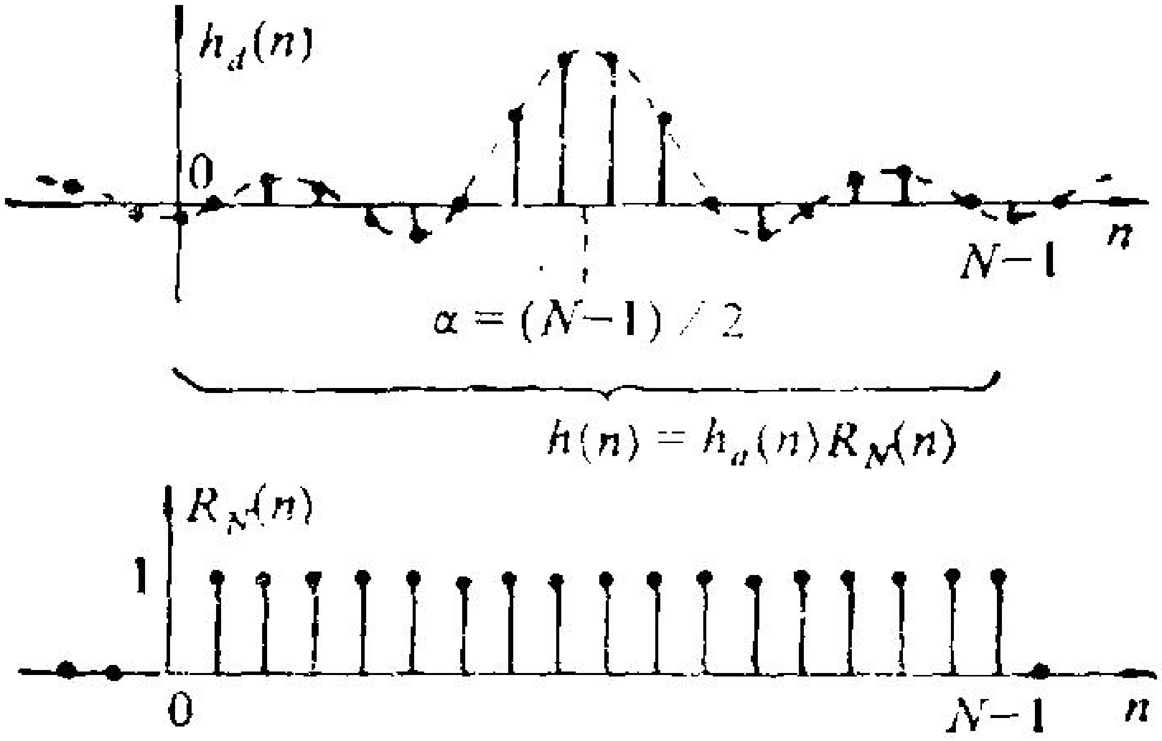
其中： $H_d(w) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

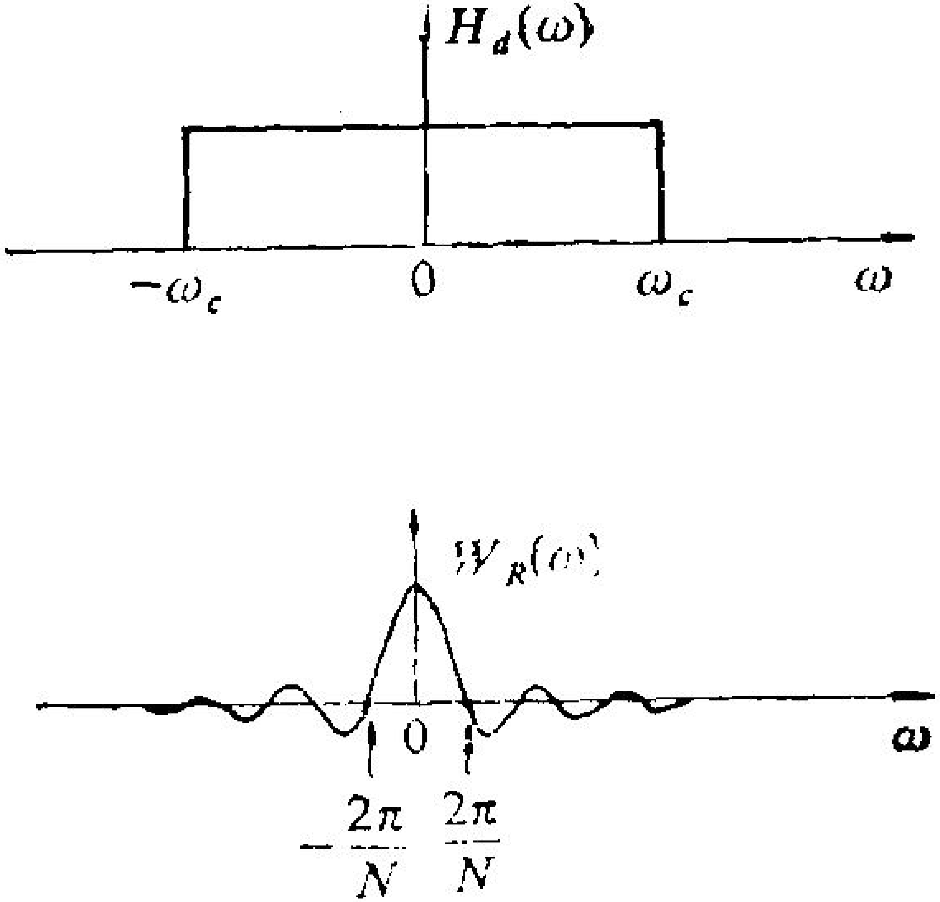
因此，FIR滤波器的频率响应$H(e^{jw})$为：

$$
\begin{aligned}
H(e^{jw}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j(\frac{N-1}{2})\theta} W_R(w-\theta)e^{-j(\frac{N-1}{2})(\omega-\theta)} d\theta \\
&= e^{-j(\frac{N-1}{2})w} * \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(w-\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

显然，FIR滤波器的频率响应也是线性相位的。

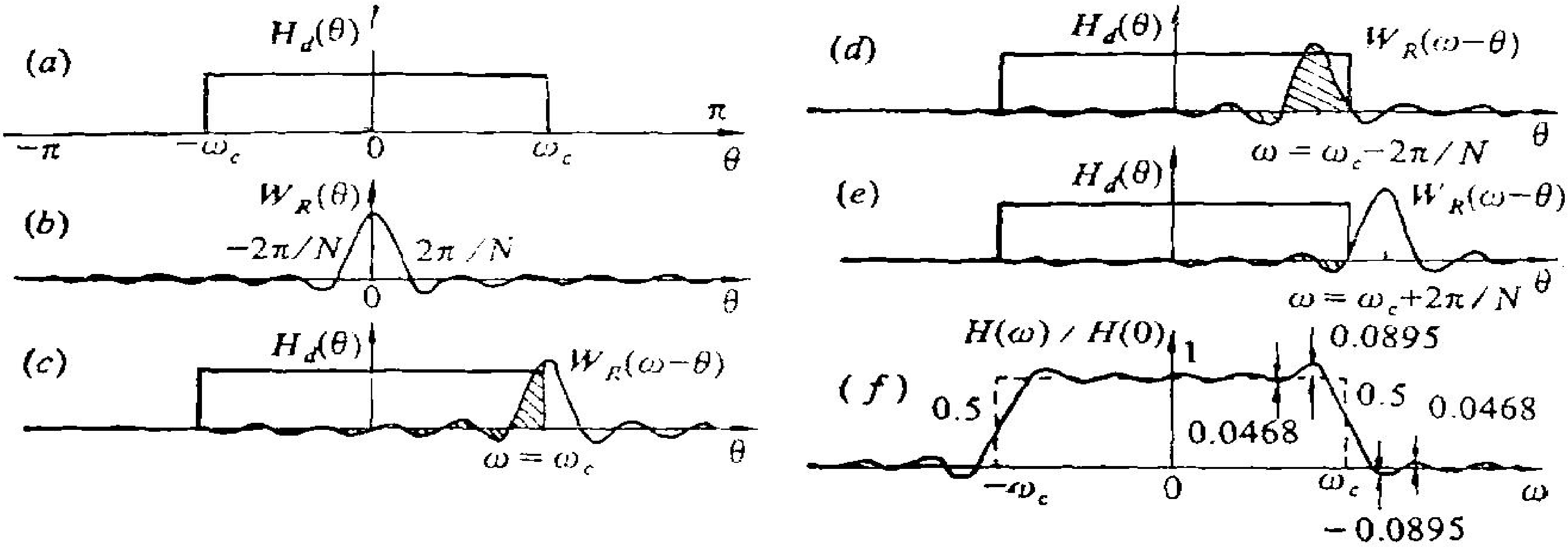
$H_d(n)$及$W(n)$的频谱特性





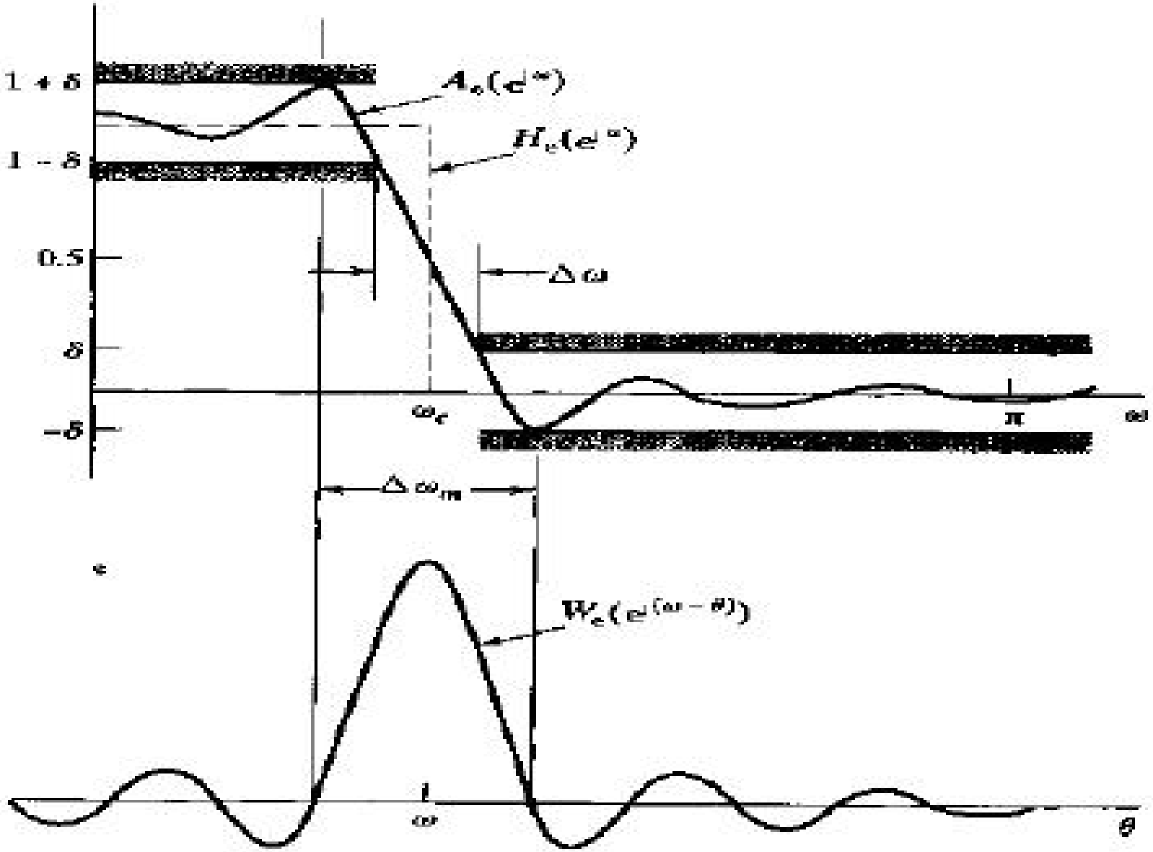
FIR数字滤波器的幅度函数

$$H(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(w-\theta)\, d\theta$$



总结：

- **(1)**理想幅度特性不连续处边沿加宽，形成一个过渡带，“过渡带的宽度”等于窗的频率响应的主瓣宽度（非**3db**带宽），矩形窗设计的滤波器过渡带最窄。
- **(2)**在截止频率两边 $w = w_c \pm \frac{2\pi}{N}$ 出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对面积；
- **(3)**改变矩形窗的长度**N**只能改变窗谱的主瓣宽度、滤波器过度带宽，不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。最大肩峰总是**8.95%**，这种现象称为吉布斯**(Gibbs)**效应。造成所设计的滤波器通带起伏不均匀且波纹过大，阻带衰减不够小，不能满足某些工程要求。



$$W_R(w) = \frac{\sin(\frac{Nw}{2})}{\sin(\frac{w}{2})} \approx \frac{\sin(\frac{Nw}{2})}{\frac{w}{2}} = N\frac{\sin x}{x}$$

（二）、窗的改进及各种常用窗

- 矩形窗截断造成肩峰为**8.95%**，则阻带最小衰减为 **-21db**，在工程上远远不够。为了加大阻带衰减，需要改善窗函数。通常希望满足两项要求:
  - 窗谱主瓣尽可能地窄，以获得较陡的过渡带;
  - 减少窗谱的最大旁瓣的相对面积，使肩峰减小，增大阻带的衰减。

- 在滤波器阶数给定的情况下，两项要求难以同时满足
  - 通常增加主瓣宽度（牺牲过渡带宽）以换取对旁瓣的抑制，得到平坦的通带幅度响应和较小的阻带波纹。
  - 窗函数在边沿处(**n=0**和**n=N-l**附近)比矩形窗变化要平滑而缓慢，窗边沿不再陡峭，则高频分量减小，阻带衰减增大。此时的主瓣宽度却比矩形窗的要宽，造成滤波器幅度函数过渡带的加宽。

常用的窗函数

- **1、矩形窗** $w(n) = R_N(n)$ $W_R(e^{jw}) = W_R(w)e^{=j(\frac{N-1}{2})w}$
- **2、三角形（Bartlett）窗**
-
-

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, \frac{N-1}{2} < n \le N-1 \end{cases}$$

$$W(e^{jw}) = \frac{2}{N-1}\left[\frac{\sin\left[\left(\frac{N-1}{4}\right)w\right]}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right]^2 e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)w} \approx \frac{2}{N}\left[\frac{\sin\left(\frac{Nw}{4}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right]^2 e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)w}$$

- **“≈”在 $N >> 1$ 时成立；主瓣宽度为 $8\pi / M$,阻带最小衰减25db**

3、汉宁（Hanning）窗（升余弦窗）

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n$$

$$\cos nw_0 = \frac{e^{jnw_0} + e^{-jnw_0}}{2}$$

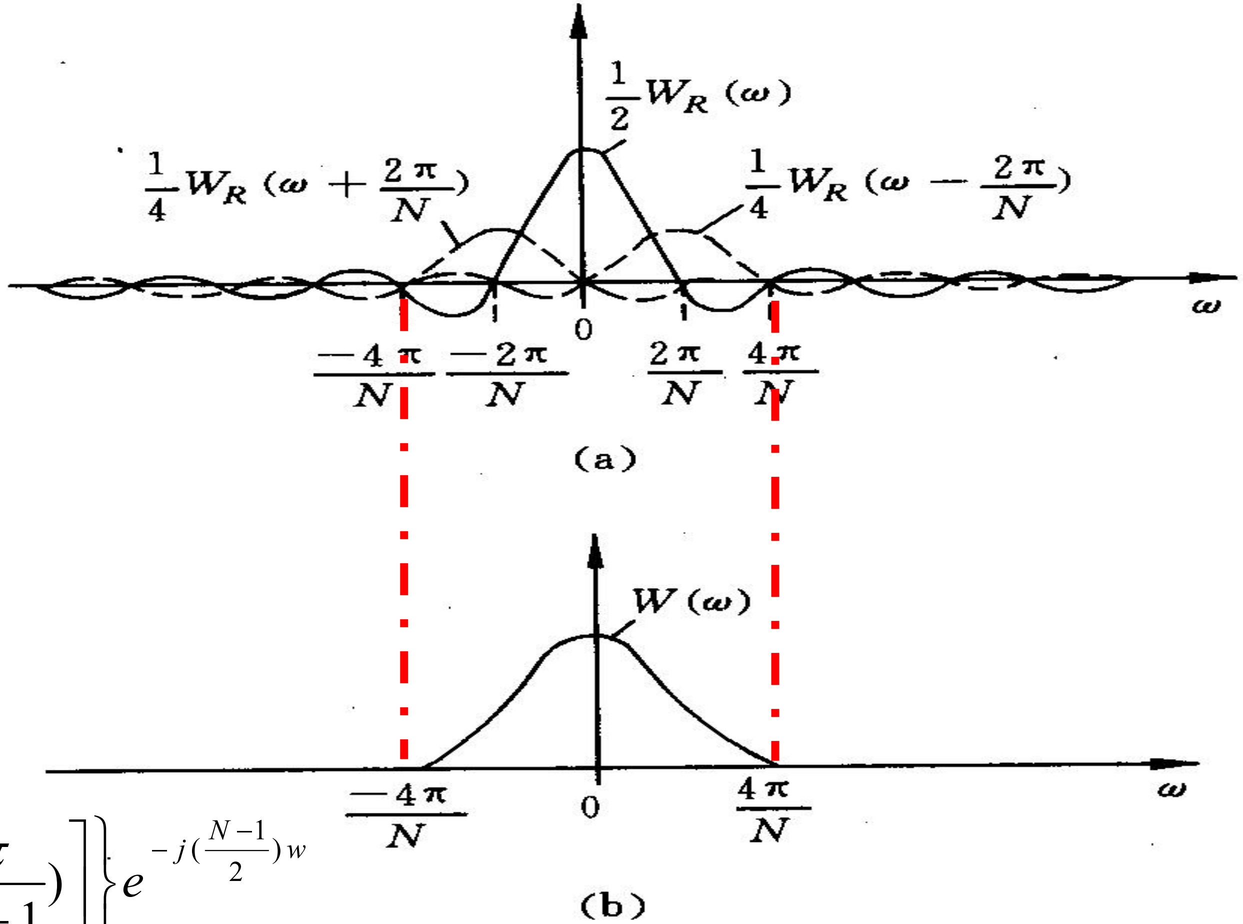
$$e^{jw_0 n}x(n) \Leftrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$W_R(e^{jw}) = W_R(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

$$W(e^{jw}) = DTFT\ [w(n)]$$

$$= \left\{0.5W_R(w) + 0.25\left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R(w + \frac{2\pi}{N-1})\right]\right\}e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

$$= W(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$



主瓣宽度比矩形窗的主瓣宽度增加一倍，即为 $8\pi/N$，但是阻带最小衰减变为**44db**。

4、海明（Hamming）窗（改进的升余弦窗）

- 对升余弦改进，可得到旁瓣更小的效果：
- $$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_R(n)$$
  $$W(w)=0.54W_R(w)+0.23\left[W_R\left(w-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(w+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]$$
  $$\approx 0.54W_R(w)+0.23\left[W_R(w-\frac{2\pi}{N})+W_R(w+\frac{2\pi}{N})\right],(\text{当}N>>1)$$
- **99.963%的能量集中在窗谱的主瓣内，主瓣宽度相同为** $8\pi/N$**，但旁瓣幅度更小，旁瓣峰值小于主瓣峰值的1%，此时阻带最小衰减为53db 。**

5、布拉克曼窗（Blackman）

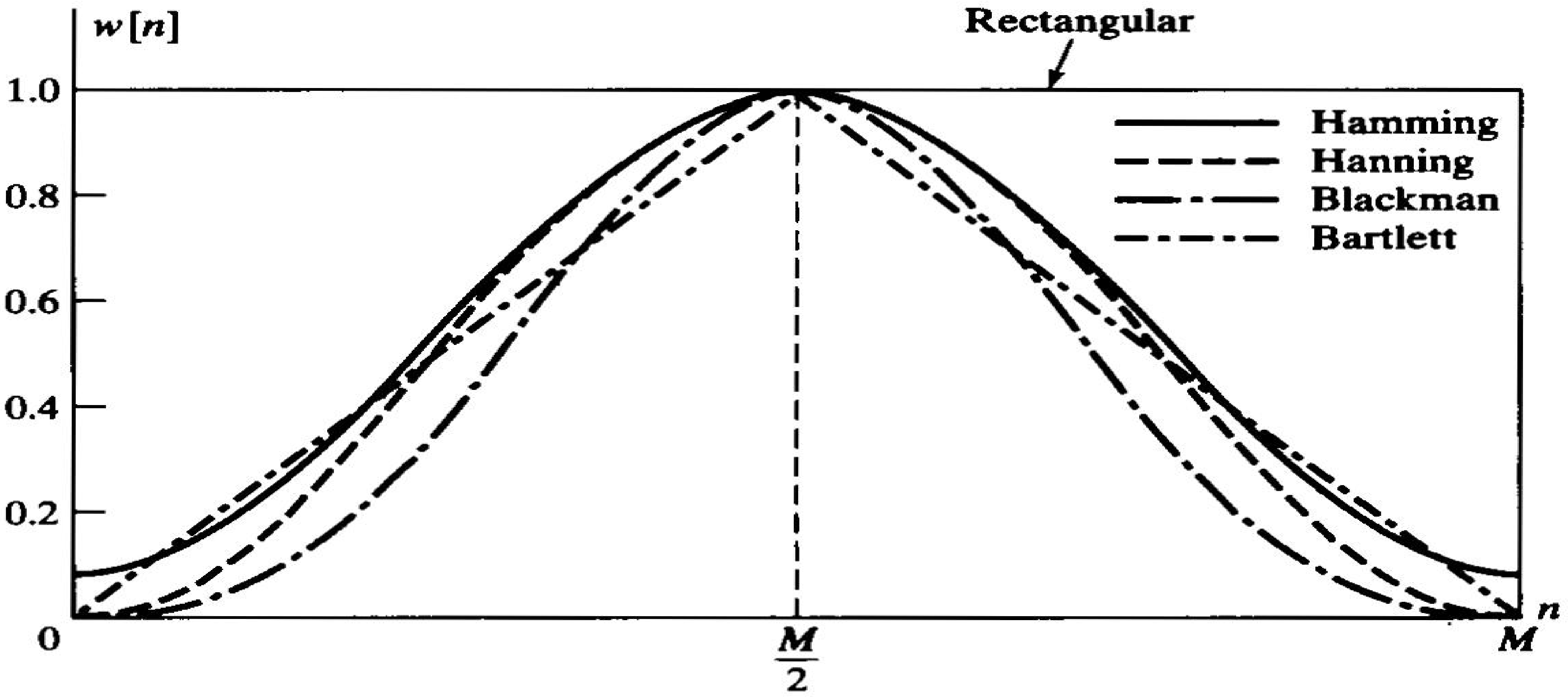
- 为抑制旁瓣，可再加上余弦的二次谐波分量，

$$w(n)=\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

$$W(w)=0.42W_R(w)$$
$$+0.25\left[W_R\left(w-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(w+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]+0.04\left[W_R\left(w-\frac{4\pi}{N-1}\right)+W_R\left(w+\frac{4\pi}{N-1}\right)\right]$$

- 主瓣宽度为矩形窗谱主瓣宽度的三倍，即为 $\frac{12\pi}{N}$，此时，**阻带最小衰减为74db** 。

五种窗函数时域波形

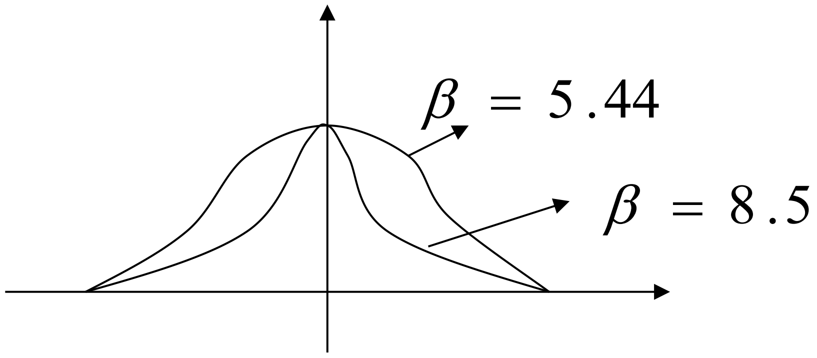


w[n]
Rectangular
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Hamming
Hanning
Blackman
Bartlett
n
M/2
M

6、凯泽窗（Kaiser）

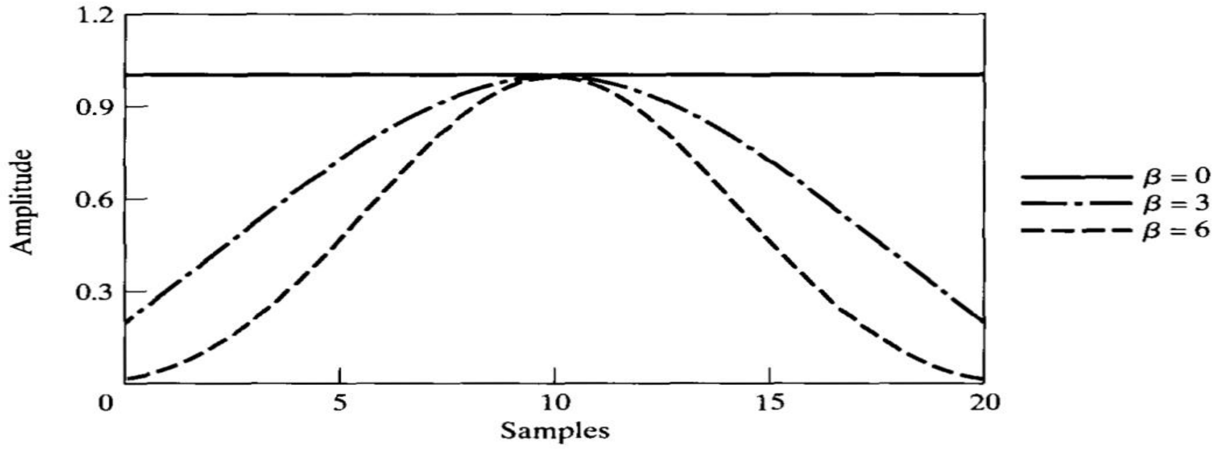
- 一种适应性强的窗，其窗函数的表示式为

$$w(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$$

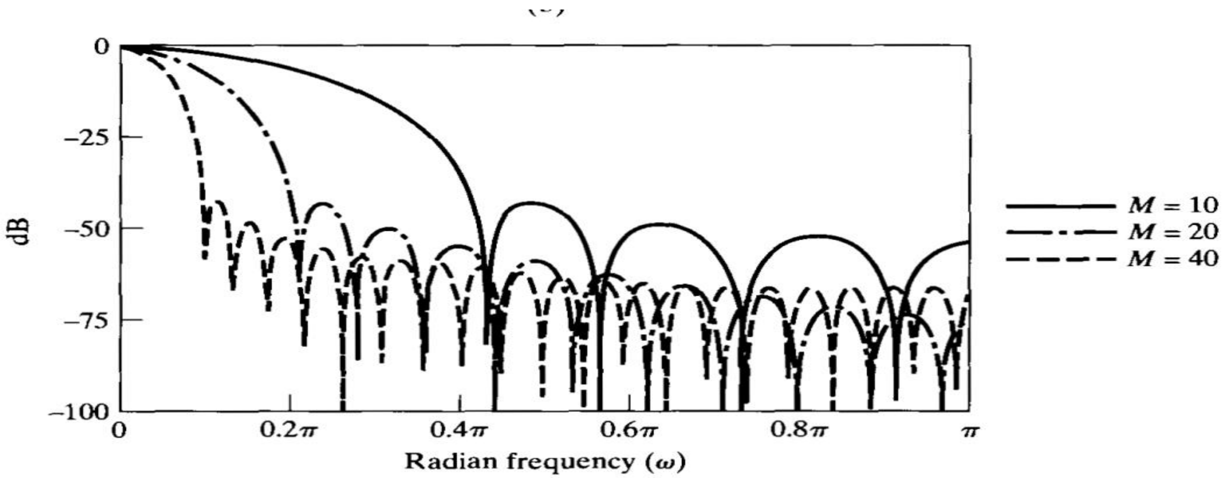


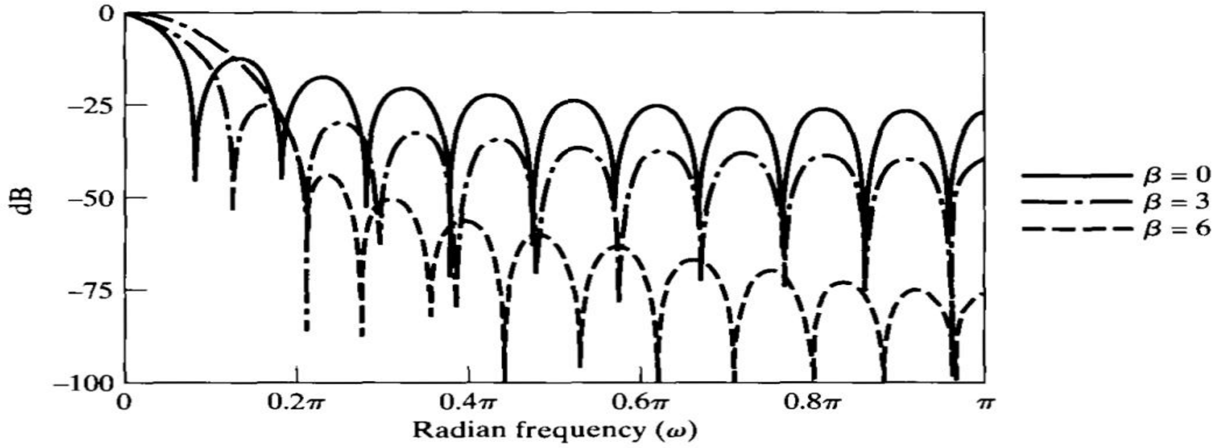
- $I_0(\bullet)$是第一类变形零阶贝塞尔函数，β 是一个可自由选择的参数，它可以同时调整主瓣宽度与旁瓣电平
  - β 越大，则窗越尖锐，而频谱的旁瓣相对越小，但主辩宽度也相应增加。
  - 主瓣宽度同时也可以由窗口长度调节

凯泽窗


Amplitude
1.2
0.9
0.6
0.3
0
5
10
15
20
Samples
$\beta = 0$
$\beta = 3$
$\beta = 6$

(a)


dB
0
−25
−50
−75
−100
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)
$M = 10$
$M = 20$
$M = 40$


dB
0
−25
−50
−75
−100
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
π
Radian frequency (ω)
$\beta = 0$
$\beta = 3$
$\beta = 6$

凯泽窗性能一览表

β	过渡带	阻带最小衰减/dB
2.120	$3.00\pi/N$	-30
3.384	$4.46\pi/N$	-40
4.538	$5.86\pi/N$	-50
5.658	$7.24\pi/N$	-60
6.764	$8.64\pi/N$	-70
7.865	$10.0\pi/N$	-80
8.960	$11.4\pi/N$	-90
10.056	$12.8\pi/N$	-100

凯泽窗函数以n=（N-1）/2为对称中心呈偶对称，两端不为零。

六种窗函数基本参数的比较

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20\log_{10}\delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$

凯泽窗经验设计法

- 给定过渡带宽 Δw，阻带衰减 $\delta_2 = -20\log_{10}\alpha_2(dB)$，则可求得凯泽窗**FIR**滤波器的阶数**N（M=N-1)**和形状参数 β，即

$$M = 2\alpha = \frac{\delta_2 - 7.95}{2.286\,\Delta w}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\delta_2 - 8.7), \delta_2 \geq 50\,dB \\ 0.5842(\delta_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\delta_2 - 21), 21\,dB < \delta_2 < 50\,dB \\ 0, \delta_2 \leq 21\,dB \end{cases}$$

  - 最小阻带衰减只由窗形状决定，不受**N**的影响
  - 而过渡带的宽度则随窗宽**N**的增加而减小。

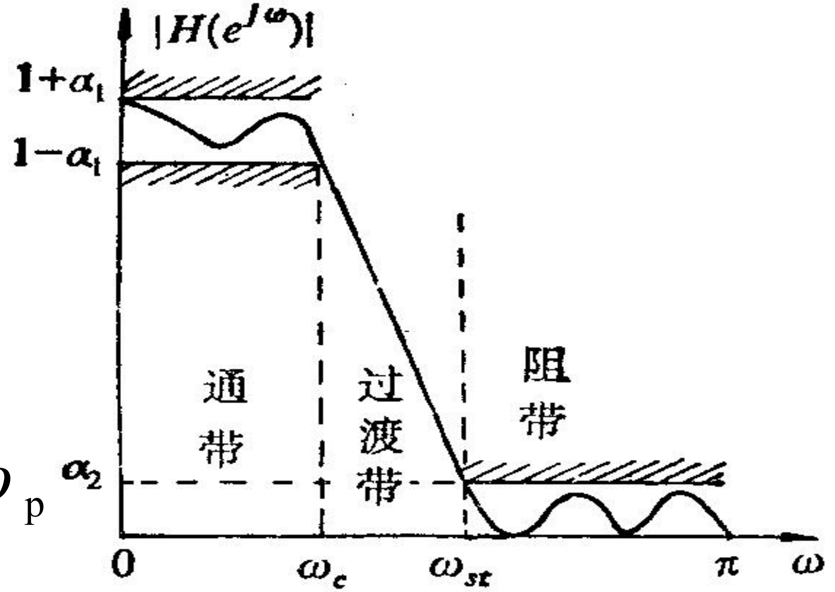
（三）、窗函数法的设计步骤

- 1) 给定所要求的频率响应函数 $H_d(e^{jw})$ ；
- 2) 求理想单位冲激响应：$h_d(n) = IDFT\left[H_d(e^{jw})\right]$
- 3) 由过渡带宽及阻带最小衰减的要求，选定窗的形状参数及N的大小，一般N要通过几次试探而最后确定；
- 4) 求得所设计的FIR滤波器的单位抽样响应

$$h(n) = h_d(n)w(n), n = 0,1,\cdots, N-1$$

- 5) 求 $H\left(e^{jw}\right) = DTFT\left[h(n)\right]$ ，检验是否满足设计要求，否则需重新设计。

窗函数设计举例



- 利用窗函数法设计滤波器，满足指标：

$$1-\delta_1 \le \left|H_{lp}(e^{j\omega})\right| \le 1+\delta_1, \qquad \left|\omega\right| < \omega_p$$

$$\left|H_{lp}(e^{j\omega})\right| \le \delta_2, \qquad \omega_s < \left|\omega\right| \le \pi$$

$$\omega_p = 0.4\pi, \omega_s = 0.6\pi, \delta_1 = 0.01, \delta_2 = 0.001$$

- 解：由于窗函数设计法的通带最大衰减与阻带最小衰减相同。为达到题目预期指标，以阻带最小衰减指标进行设计。

$$A = -20\lg 0.001 = 60\text{dB}, \quad \Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$$

- 由于窗函数设计法在幅度间断点处（过渡带）逼近的对称性，因此所对应的理想低通滤波器的截止频率为 $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.5\pi$

第II类线性相位系统

- 滤波器的单位冲激响应：

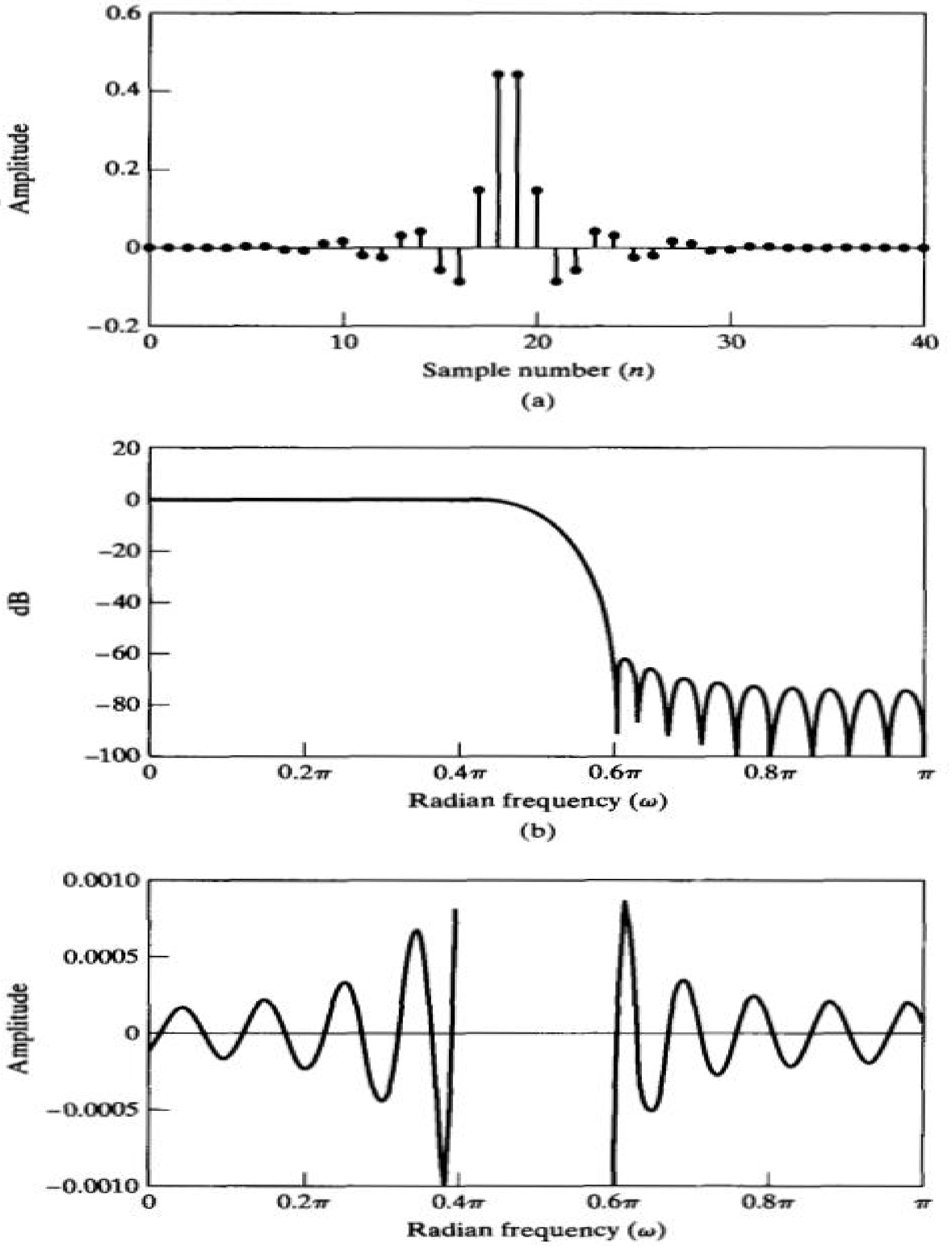
$$h_{hp}[n]=\frac{\sin\omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}\cdot\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{M}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$$

- 由凯泽窗设计公式可得：

$$M=\frac{\delta_2-7.95}{2.286\,\Delta w}$$

$$\beta=\begin{cases}0.1102(\delta_2-8.7),\delta_2\geq 50dB\\ 0.5842(\delta_2-21)^{0.4}+0.07886(\delta_2-21),21dB<\delta_2<50dB\\ 0,\delta_2\leq 21dB\end{cases}$$

$$\beta=5.653,\ \ M=36.238\approx 37$$

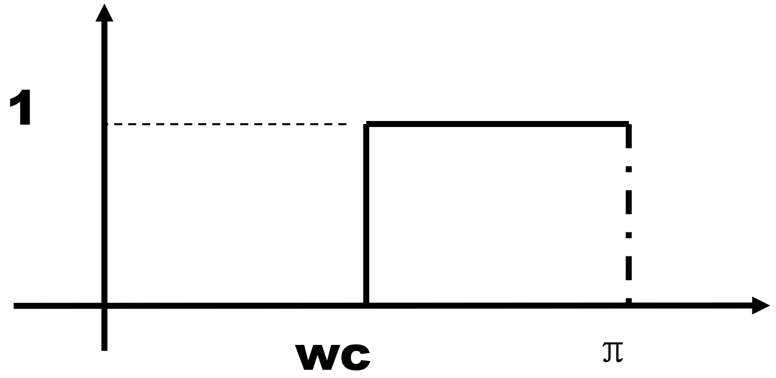


高通滤波器

$$h_{lp}[n]=\frac{\sin\omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(n-M/2)}{\omega_c(n-M/2)}$$

- 理想高通滤波器的频率响应为：

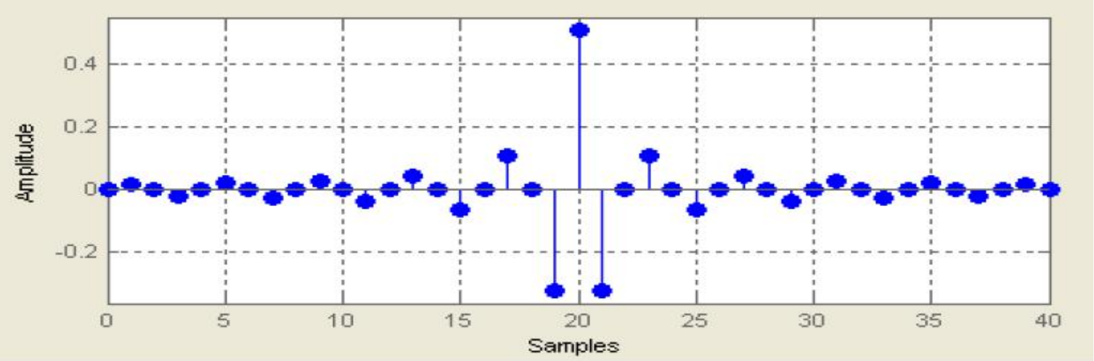
$$H_{hp}(e^{j\omega})=\begin{cases}0 & |\omega|<\omega_c\\ e^{-j\omega M/2} & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

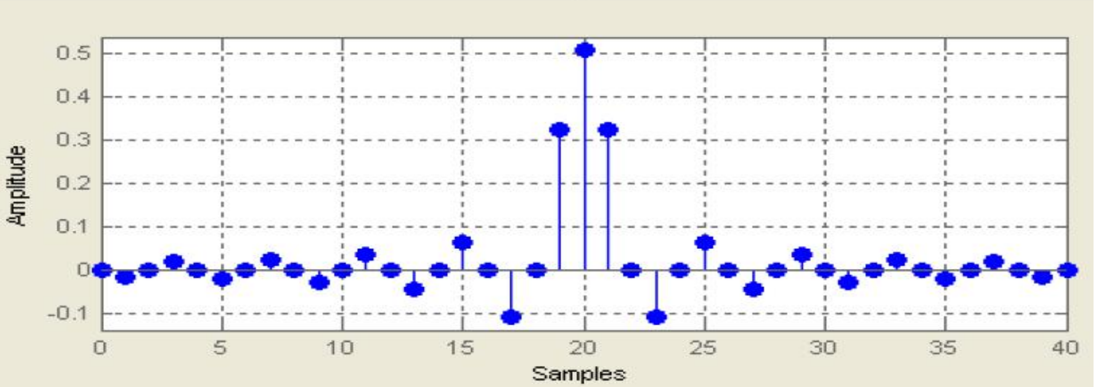


- 其单位冲激响应为（M必须是偶数）

$$h_{hp}[n]=\frac{\sin\pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}-\frac{\sin\omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}$$

$$\begin{cases}1-\dfrac{w_c}{\pi} & n=a\\ -\dfrac{\sin w_c(n-a)}{\pi(n-a)} & n\neq 0\end{cases}$$





窗函数法设计高通滤波器

- 高通滤波器的技术指标：

$$\left|H_{hp}(e^{j\omega})\right| \le \delta_2, \qquad \left|\omega\right| < \omega_s$$

$$1-\delta_1 \le \left|H_{hp}(e^{j\omega})\right| \le 1+\delta_1, \qquad \omega_p < \left|\omega\right| \le \pi$$

$$\omega_s = 0.35\pi, \omega_p = 0.5\pi, \delta_1 = \delta_2 = 0.021$$

- 根据凯泽窗设计公式可得到：

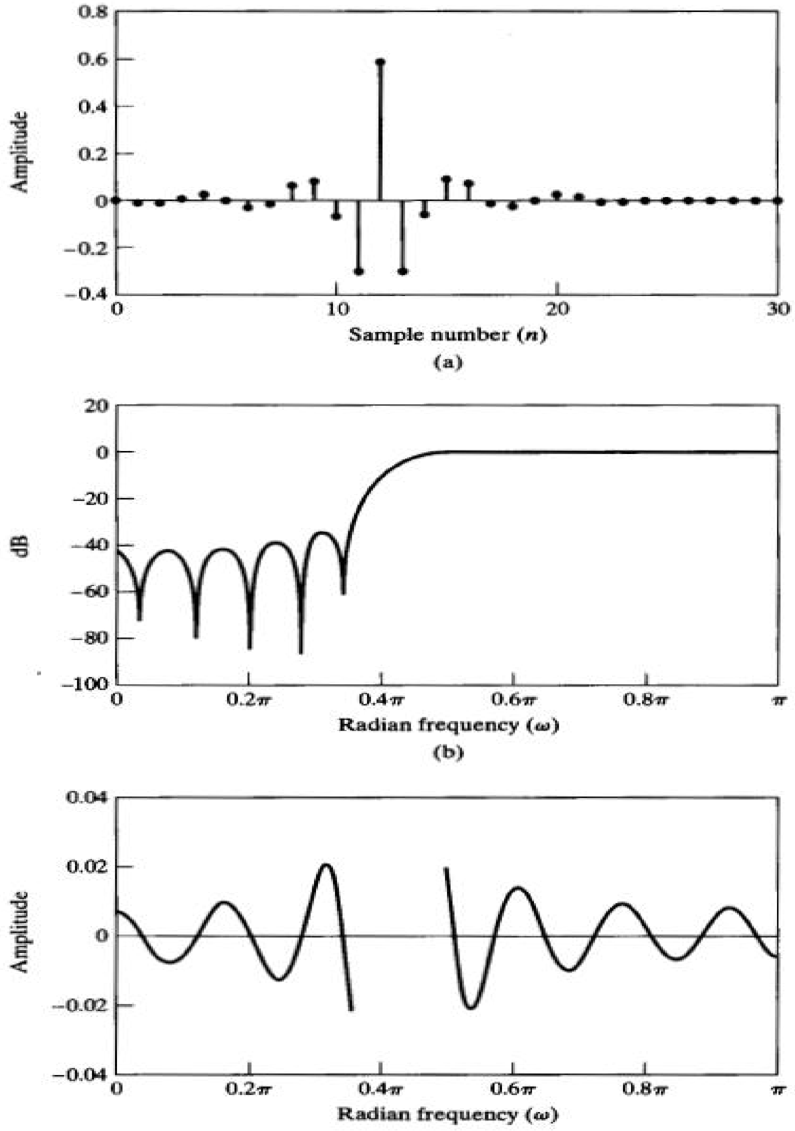
$$\beta = 2.6, \quad M = 24$$

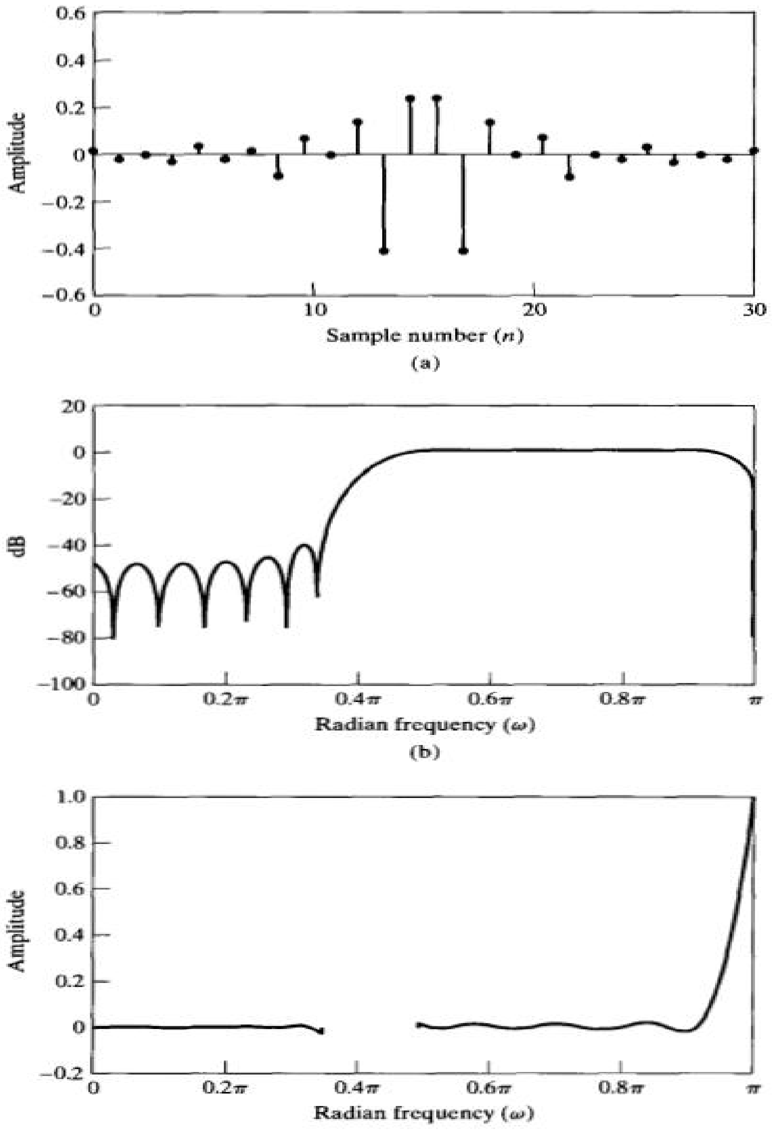
- 由窗函数设计法的对称性可得：

$$\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.425\pi$$

第I类线性相位高通滤波器

- 验证计算可得此时的通带逼近误差为0.0213，高于预定指标0.021
- 可以通过增大β的方法而达到预定指标；也可以保持β不变，改变M。
  - 将M增大至25，调整过渡带变窄而满足指标，但此时为II类线性相位系统，在ω＝π处为零，不适合高通系统。
  - 可以将M增大至26就会解决此问题。

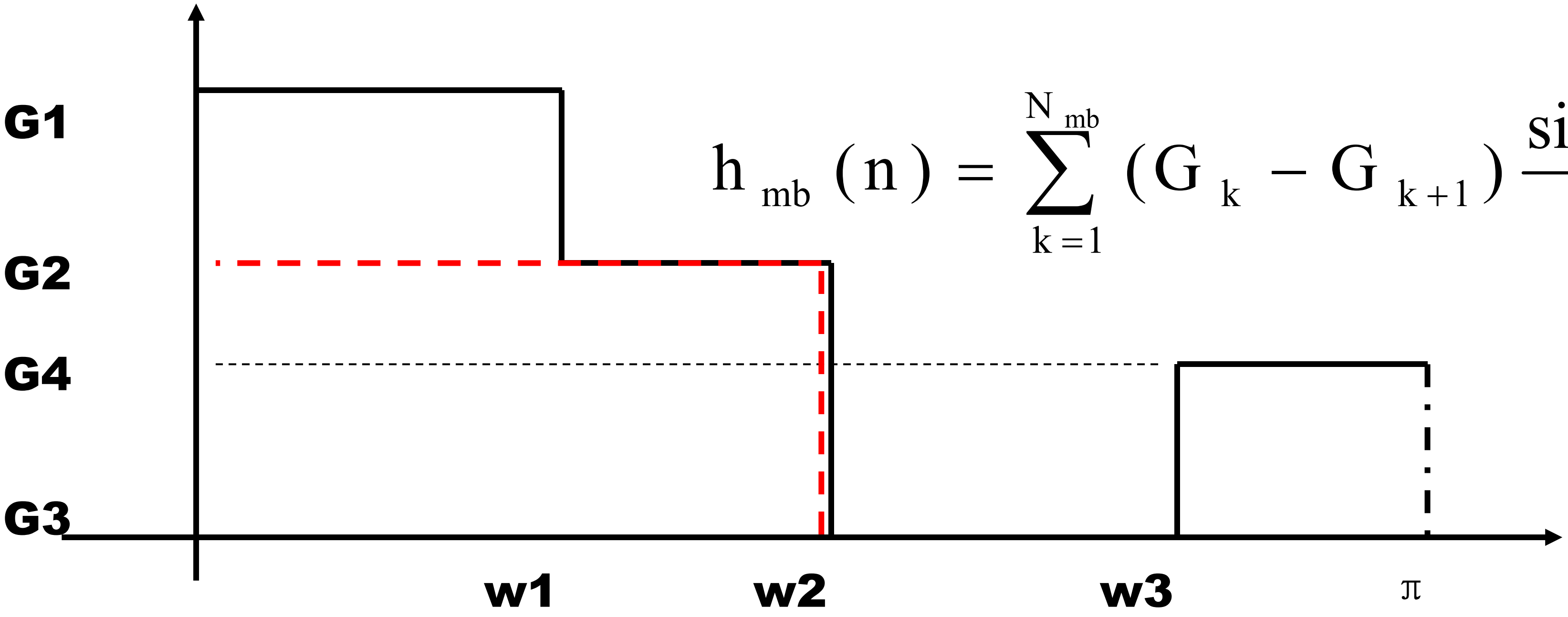




多通带滤波器设计

$$\varphi(\omega) = e^{-j\omega M/2}$$

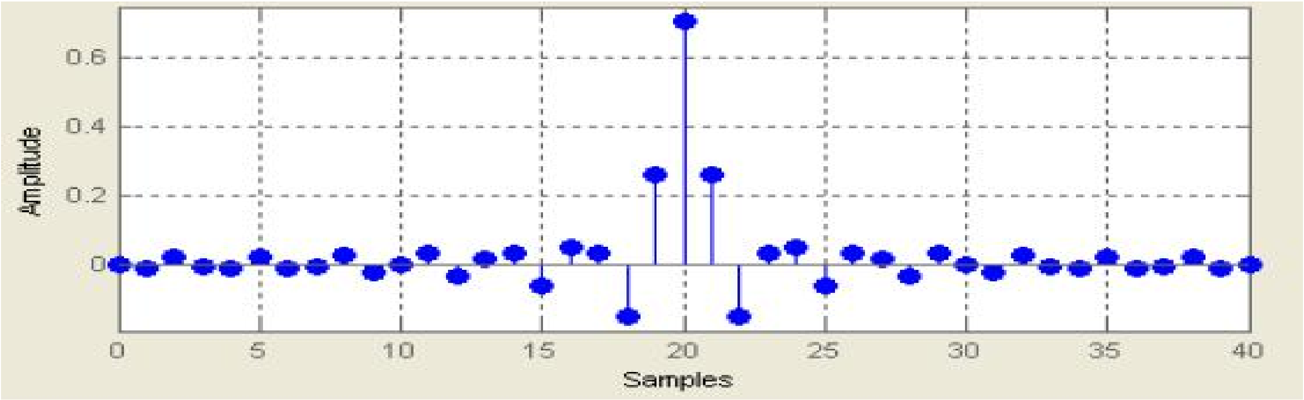
$$h_{mb}(n) = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin \omega_k (n - M/2)}{\pi (n - M/2)}$$



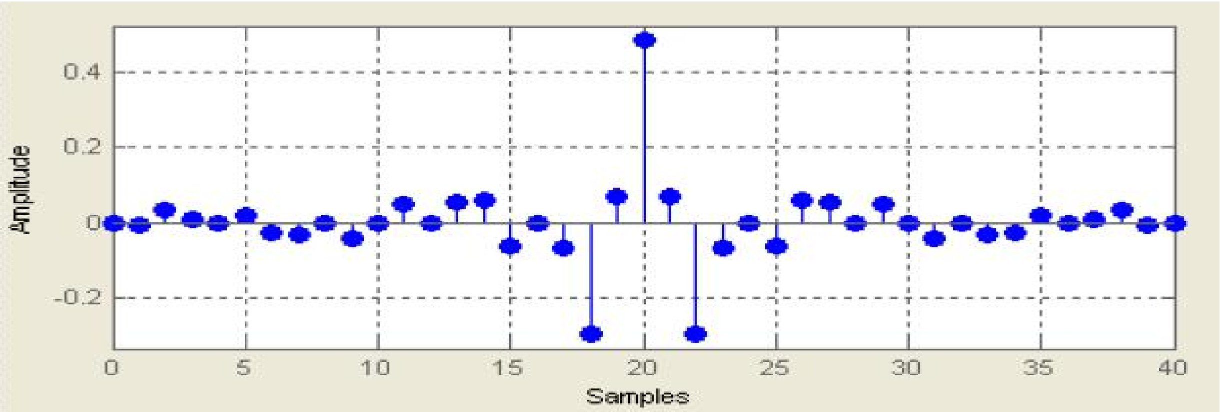
逼近误差与跳变幅度成正比，在设计时需要进行指标的归一化，利用最苛刻的指标进行凯泽窗设计

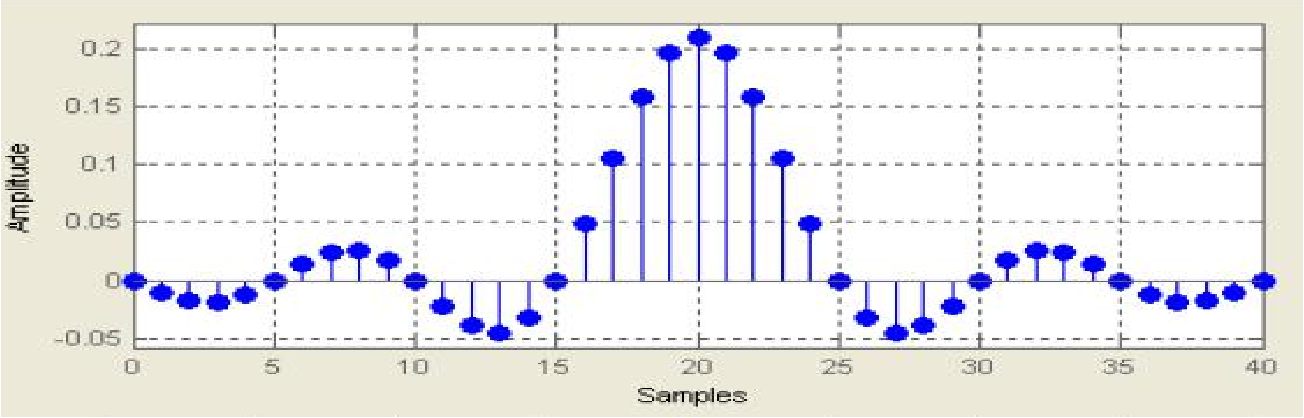
带通,带阻滤波器

A

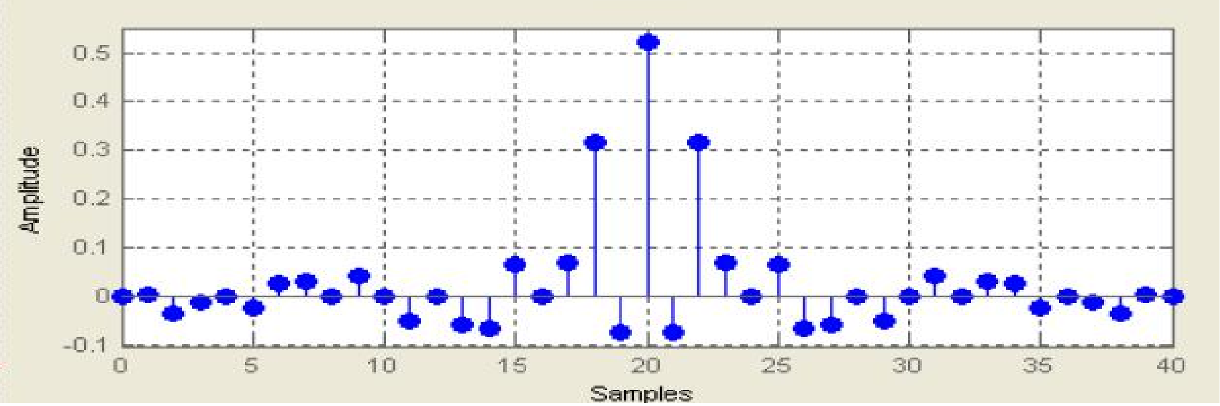


B





C



D

A=w1, C=w2, B=A-C, D=全通-B

离散时间微分器

- 零相微分器：

$$H_{diff}(\omega) = j\omega$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} jw e^{jwn} dw$$

$$= \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w\cos(wn)dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w\sin(wn)dw$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w\sin(wn)dw = -\frac{1}{2\pi n^2}\int_{-n\pi}^{n\pi} x\sin(x)dx$$

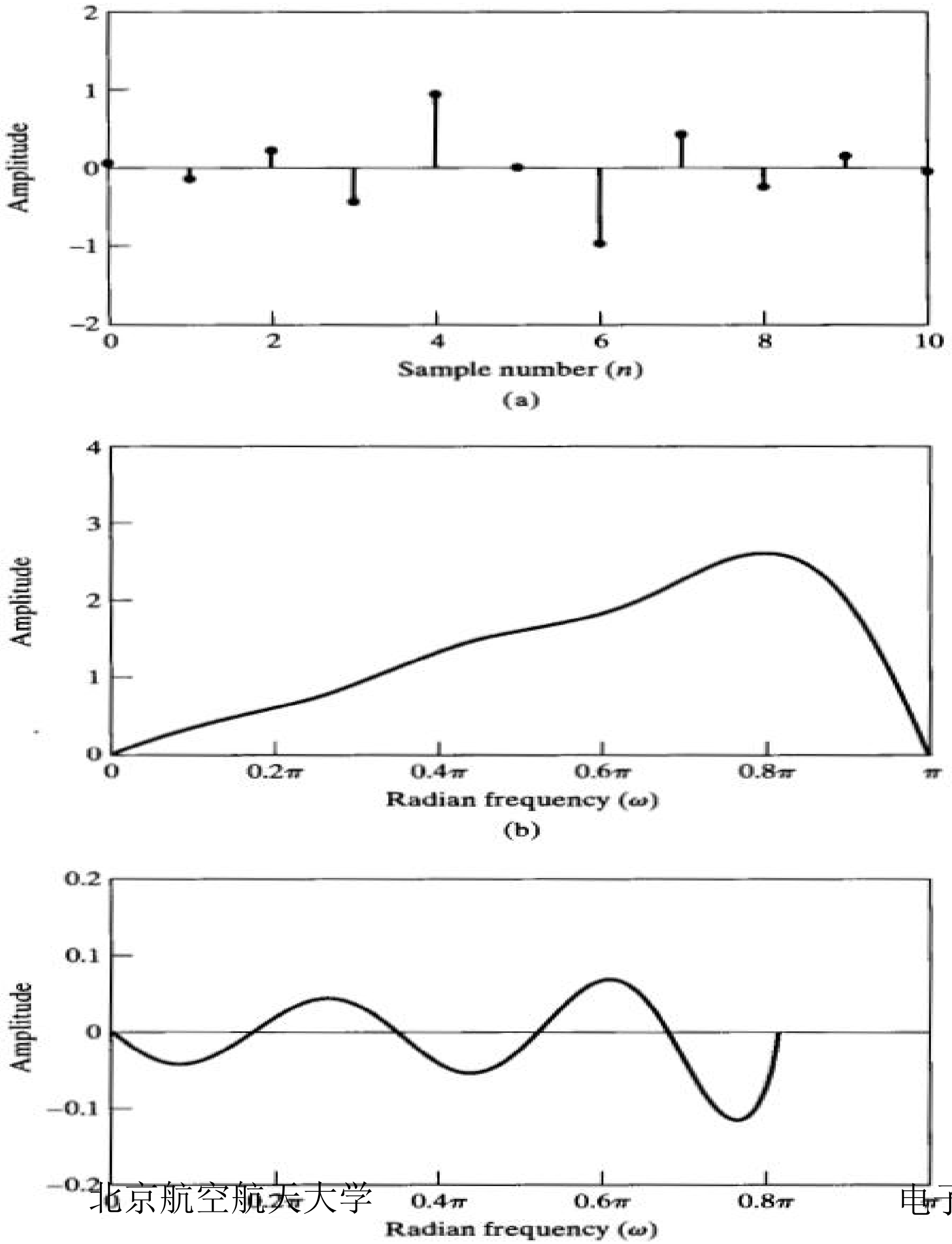
$$= \begin{cases} (-1)^n \dfrac{1}{n} & n \mathrel{!}= 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

- 理想微分器的频率响应为：

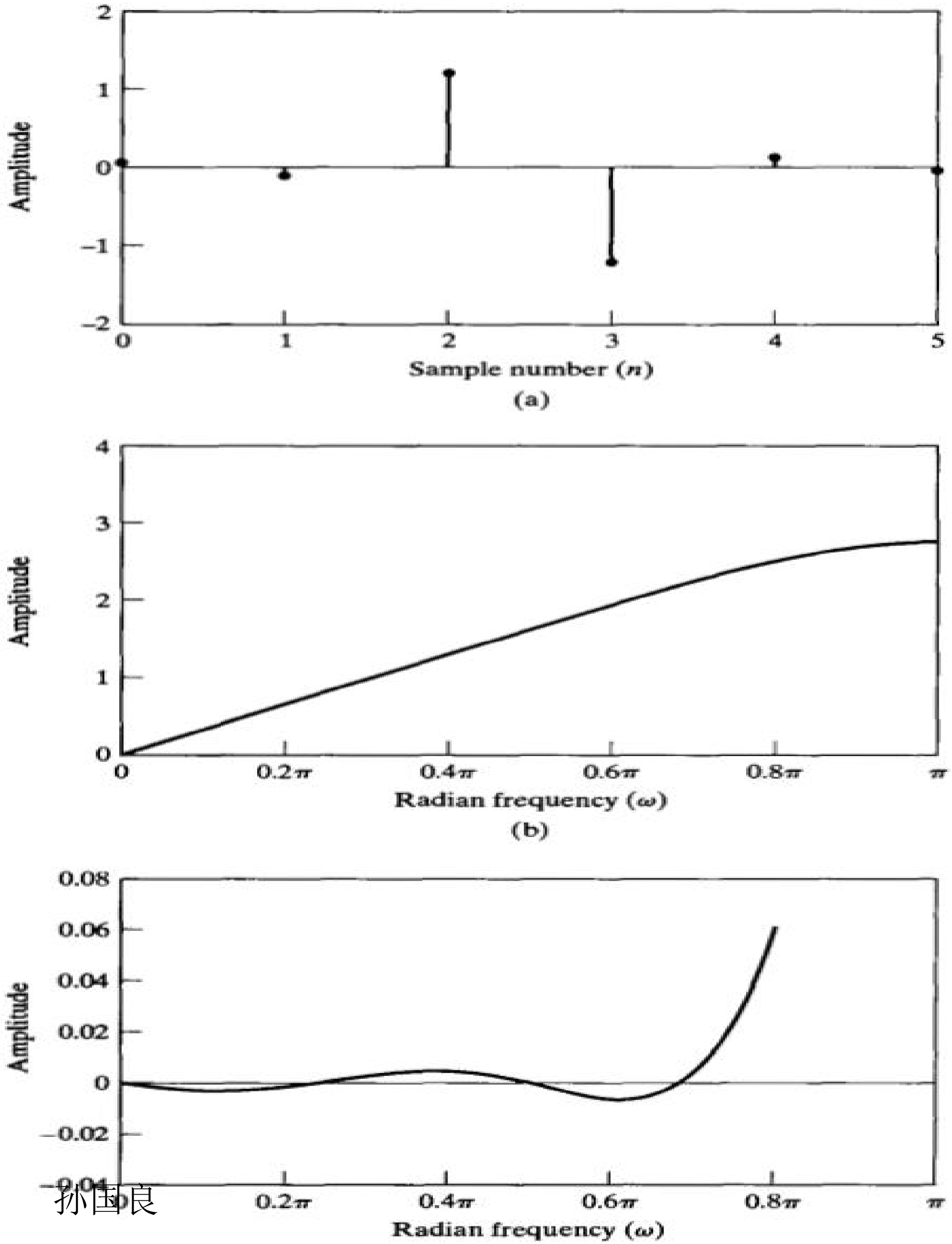
$$H_{diff}(\omega) = (j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega M/2}$$

- 其理想冲激响应为：$$h_{diff}(n) = \frac{\cos\pi(n - M/2)}{(n - M/2)} - \frac{\sin\pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)^2}$$

M=5,b=2.4



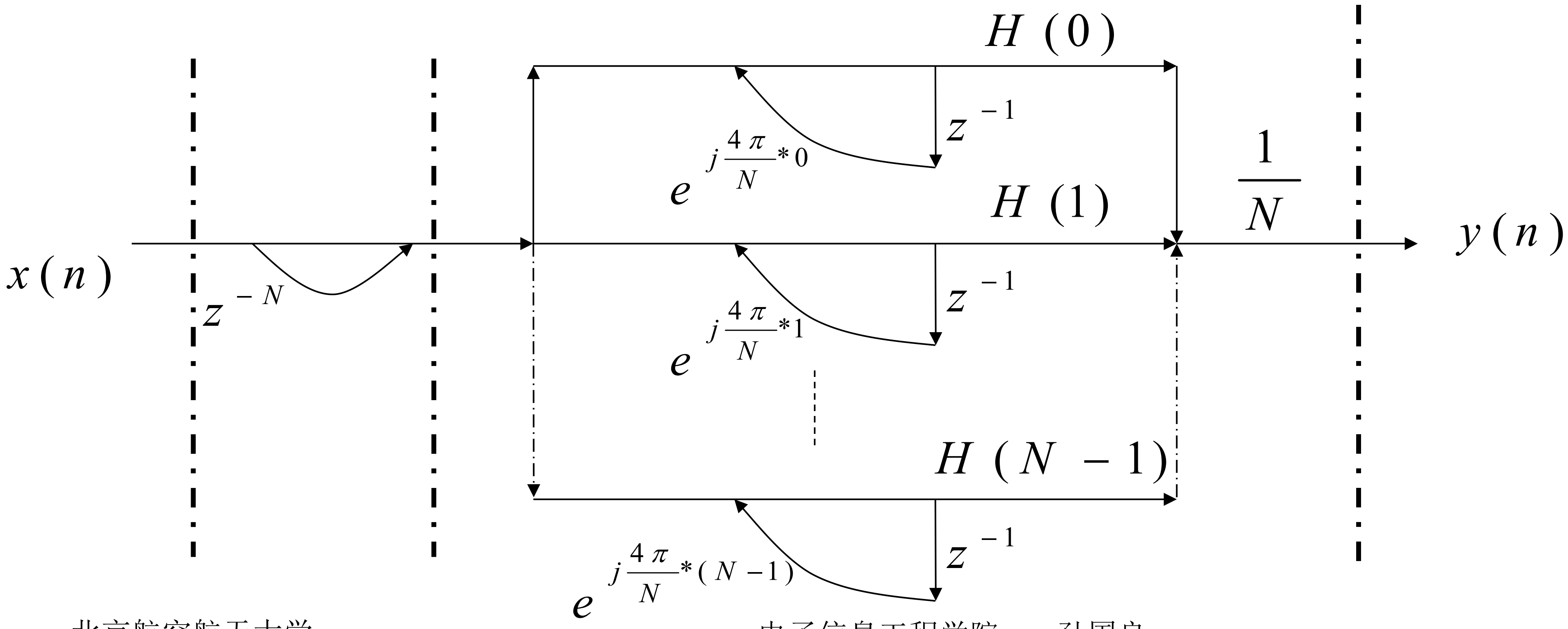
M=10,b=2.4



FIR滤波器---频率抽样设计

- 频域内插公式：

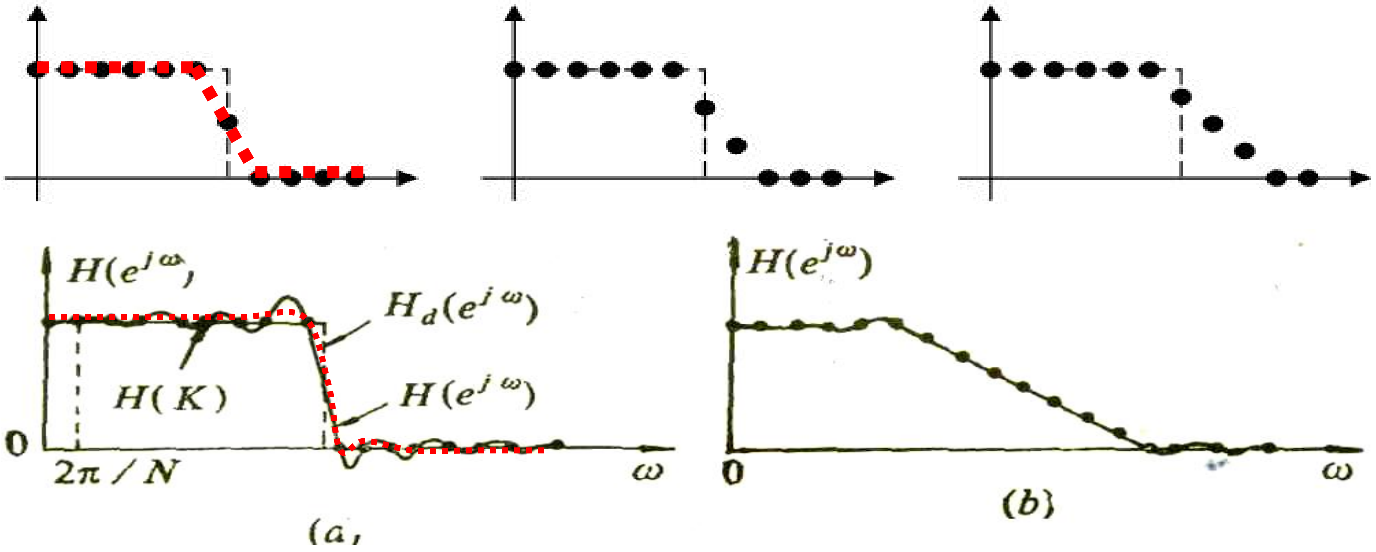
$$H(z)=\frac{1}{N}\underbrace{(1-z^{-N})}_{Hc(z)}\sum_{k=0}^{N-1}\underbrace{\left(\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}\right)}_{H_K(z)}$$



过渡带抽样优化设计

- 频率抽样法优点是可以在频域直接设计，适合于最优化设计
- 频率抽样点上滤波器实际频率响应和理想频率响应数值相等。
- 抽样点之间的频率响应有一定的逼近误差。逼近误差取决于理想频率响应曲线形状，采样点数等。一般过渡带取二、三点抽样值即可得到满意结果。
- 可以直接由频率内插结构实现,同时由频率内插公式求得频率响应；也可以由**H(K)**求得**h(n)**，从而求取单位冲激响应，并实现滤波器

- 在低通设计中，不加过渡抽样点时，阻带最小衰减为**-20dB**，
  - 一点过渡抽样的最优设计，阻带最小衰减可提高到**-40**到**-54dB**左右，
  - 二点过渡抽样的最优设计可达**-60dB**到**-75dB**左右，
  - 三点过渡抽样的最优设计则可达**-80dB**到**-95dB**左右。



频率抽样法设计低通滤波器

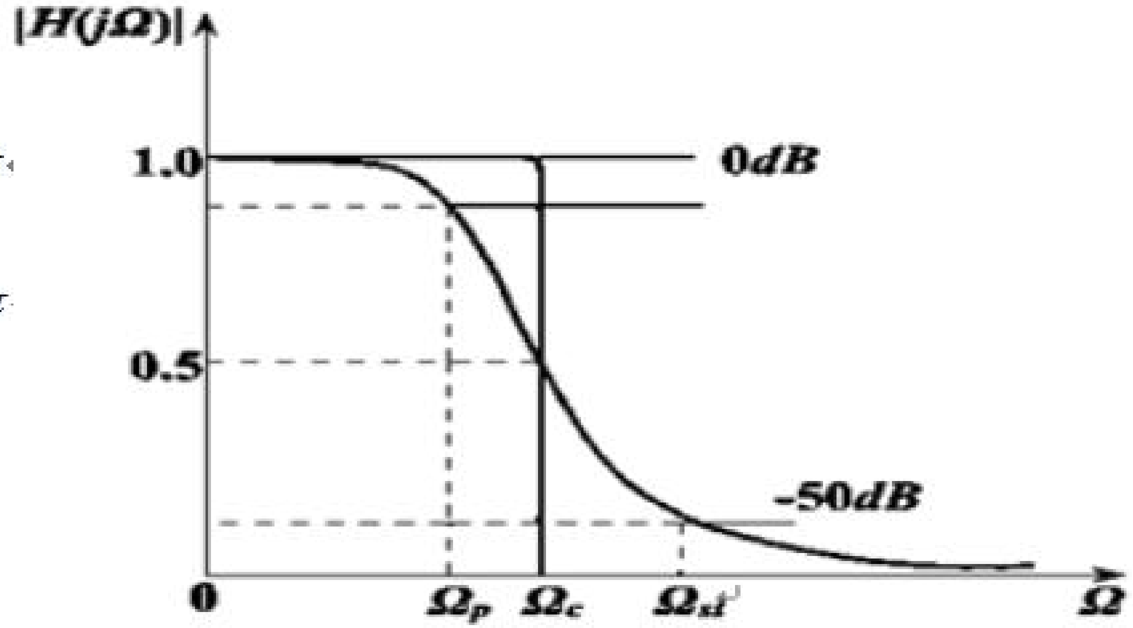
- FIR低通滤波器，希望在采样频率为15kHz，其通带截至频率为1.6kHz，阻带起始频率为3.1kHz，通带波纹小于1db，阻带衰减大于50db。

通带的截止频率为 $w_p = \frac{\Omega_p}{f_s} = 2\pi\frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 2\pi\times\frac{2\pi\times1.6\times10^3}{2\pi\times1.5\times10^4} = 0.213\pi$

阻带的起始频率为 $w_{st} = \frac{\Omega_{st}}{f_s} = 2\pi\frac{\Omega_{st}}{\Omega_s} = 2\pi\times\frac{2\pi\times3.1\times10^3}{2\pi\times1.5\times10^4} = 0.413\pi$

理想低通截止频率 $\Omega_c = \frac{1}{2}(\Omega_p + \Omega_{st}) = 2\pi\times2.35\times10^3 (rad/\sec)$

其对应的数字频率 $w_c = 2\pi\frac{\Omega c}{\Omega s} = 2\pi\times\frac{2\pi\times2.35\times10^3}{2\pi\times1.5\times10^4} = 0.313\pi$



频率抽样 N=30

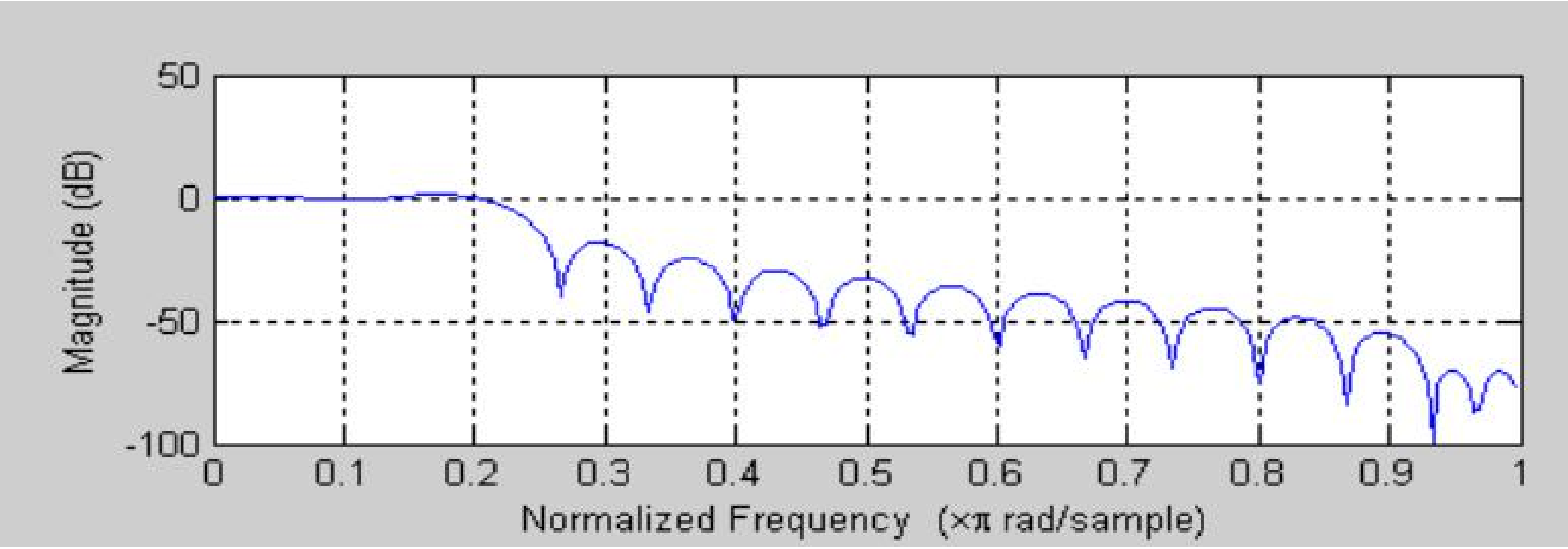
$$w_p=\frac{\Omega_p}{f_s}=2\pi\frac{\Omega_p}{\Omega_s}=2\pi\times\frac{2\pi\times1.6\times10^3}{2\pi\times1.5\times10^4}=0.213\pi$$

$$w_{st}=\frac{\Omega_{st}}{f_s}=2\pi\frac{\Omega_{st}}{\Omega_s}=2\pi\times\frac{2\pi\times3.1\times10^3}{2\pi\times1.5\times10^4}=0.413\pi$$

$$\sigma_2\geq50dB$$

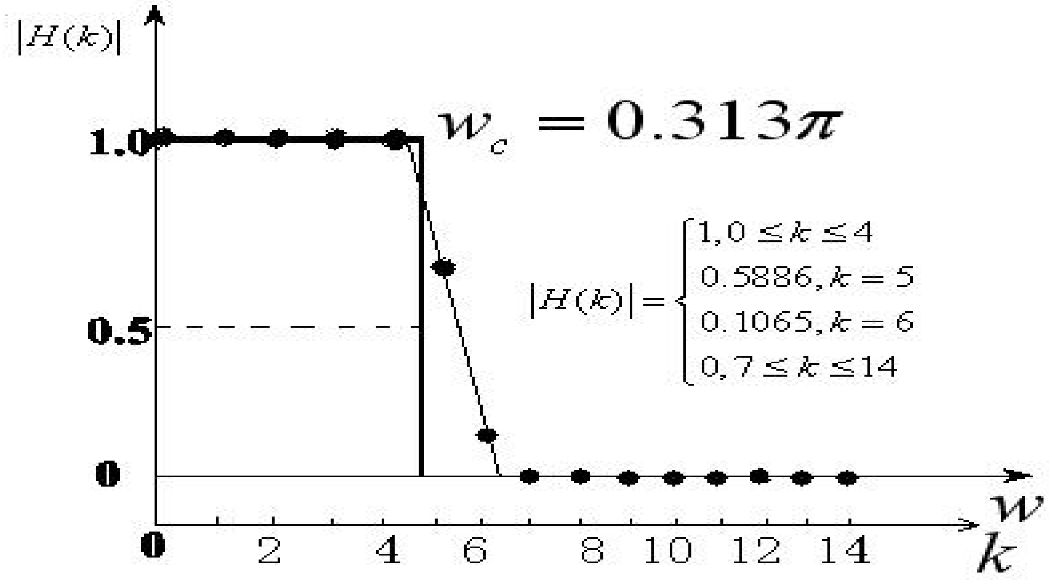
$$|H(k)|=\begin{cases}1 & 0\leq k\leq \mathrm{Int}\left[\dfrac{N\omega_c}{2\pi}\right]=4\\ 0 & 5\leq k\leq\dfrac{N-1}{2}=14\end{cases}$$

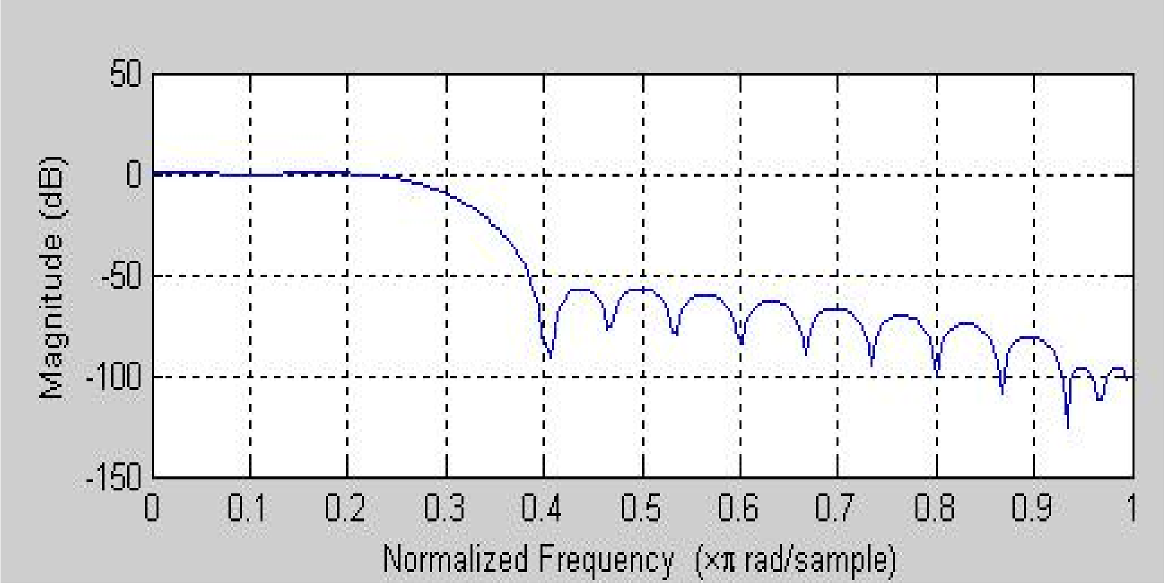
$$H(e^{j\omega})=e^{-j14.5\omega}\left\{\frac{\sin\left(\frac{30\omega}{2}\right)}{30\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{\sin\left[30\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{30}\right)\right]}{30\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{30}\right)}+\frac{\sin\left[30\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{30}\right)\right]}{30\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{30}\right)}\right]\right\}$$



过渡点优化

- 为改善频率特性，以满足指标要求，在通带和阻带交界处安排一个或者几个不等于1的抽样值。
- 此处令： $|H(5)| = 0.5886$ $|H(6)| = 0.1065$





- 优化后最小阻带衰减约为－60dB左右

频率抽样法设计步骤

（1）确定性能要求和滤波器阶数$N=2\pi/\Delta\omega$ 。

（2）根据要求，确定理想频率响应的幅度和相位。

（3）对频率响应在$0\sim2\pi$区间等间隔取样，得到$H(k)$。

（4）根据内插公式，求出$H(z)$的幅频特性曲线。

（5）检查幅频特性是否满足性能要求，若不满足，可调整过渡带取样点值，重复第（2）步，直到满足条件为止。

（6）可以直接用频率抽样结构实现滤波器，也可以对$H(k)$作IDFT求得$h(k)$后选择合适结构实现。

作业：

- 7.5
- 7.15
- 7.16
- 7.33

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn