第一章 离散时间系统变换域分析

1.1 离散时间傅里叶变换

内容提要

- ❏ 离散时间傅里叶变换
- ❏ DTFT 性质与定理
- ❏ 基本序列 DTFT

定义 1.1 (离散时间傅里叶变换) DTFT/ 离散时间傅立叶变换[1]，应用与非周期信号以及傅里叶频谱的关系。

正变换：

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换：

$$\mathrm{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

DTFT 将离散的序列变换到了一个连续的函数，对于非周期序列可以收敛，是一个关于 ω 的周期函数。

在 MATLAB 中，`sinc(x)` 表示 $\sin(x)/x$

在反变换中，隐藏了关于信号分解的含义：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega \end{aligned}$$

其中关于 n 的只有一项，将频谱的面积乘以对应离散时刻的分量。

1.1.1 基本序列的 DTFT

单位冲激序列：

$$\delta(n) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} 1$$

单位常数序列：

$$1 \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

单位阶跃序列：

$$u(n) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

[1] DFT 是离散傅里叶变换，切勿混淆

单位指数序列：

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2k\pi)$$

矩形窗序列：

$$G_N(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$

理想低通滤波器，截止频率为 ω_c

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ \quad 0, -\pi < \omega < -\omega_c \text{ or } \omega_c < \omega < \pi \end{cases}$$

反变换：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega = \frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\omega_c(n-\alpha)}$$

1.1.2 DTFT 主要性质以及定理

- 线性
- 时序频移导致频域调制：n 在频域只是一个相位系数
- 时域调制导致频域平移
- 时域反褶导致频域反褶
- 时域共轭导致频域共轭以及反褶
- 时域相乘形成频域卷积：

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

- 时域卷积导致频域相乘：

$$x(n) \otimes h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})H(e^{i\omega})$$

- 线性保泛变换/帕塞瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega|$$

1.1.3 DTFT 对称性

定义 1.2 (对称序列) 共轭对称序列：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

共轭反对称序列：

$$x_o(n) = x_o^*(-n)$$

虚实部以及幅相满足：

$\mathrm{Re}\left[x_e(n)\right]=\mathrm{Re}\left[x_e(-n)\right]$

$\mathrm{Im}\left[x_e(n)\right]=-\mathrm{Im}\left[x_e(-n)\right]$

$\mathrm{Re}\left[x_o(n)\right]=-\mathrm{Re}\left[x_o(-n)\right]$

$\mathrm{Im}\left[x_o(n)\right]=\mathrm{Im}\left[x_o(-n)\right]$

$$\begin{aligned}&\left|x_e(n)\right|=\left|x_e(-n)\right|\\&\operatorname{Arg}\left[x_e(n)\right]=-\operatorname{Arg}\left[x_e(-n)\right]\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\left|x_o(n)\right|=\left|x_o(-n)\right|\\&\operatorname{Arg}\left[x_o(n)\right]=\pi-\operatorname{Arg}\left[x_o(-n)\right]\end{aligned}\tag{1.2}$$

进行引申，可以将一个序列进行分解，得到一个对称以及一个反对称序列：

$$\begin{aligned}&x(n)=x_e(n)+x_o(n)\\&x_e(n)=\tfrac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]\\&x_o(n)=\tfrac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]\end{aligned}\tag{1.3}$$

对应的频谱：

$$\begin{aligned}&X\left(e^{j\omega}\right)=X_e\left(e^{j\omega}\right)+X_o\left(e^{-j\omega}\right)\\&X_e\left(e^{j\omega}\right)=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]\\&X_o\left(e^{j\omega}\right)=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right]\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{DTFT}[\ x_e(n)]=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]\\&\mathrm{DTFT}\left[x_o(n)\right]=\tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]\end{aligned}\tag{1.5}$$

推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。

1.2 Z 变换及其反变换

定义 1.3 (z 变换)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

称 $x(n)$ 为 $x(n)$ 的 Z 变换，可以记为：

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$$

注意，幂级数收敛时变换才有意义，需要标注收敛域。

由于存在衰减，可以变换的范围比 DTFT 更大。

1.3 系统函数与频率相应

1.4 LTI 系统的幅相分析