第一部分

复习

第一章 离散信号与系统

1.1 因果性、记忆性

是否用到了 $x[n]$ 的未来值/过去值，而不是其他可计算的值。

1.2 LTI 系统

既是线性系统，又是时不变系统，称为 LTI 系统。其**充要条件**是 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 。

无法直接判断可以假设是一个 LTI 系统：

$$\frac{1}{2^n} \to \frac{1}{4^n}$$

假设是：

- LTI：

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k] \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n} h_1[k]$$

矛盾！

- TI and Linear：

$$\frac{1}{2^{n-1}} \to \frac{1}{4^{n-1}}$$
$$2\frac{1}{2^n} \to 4\frac{1}{4^n}$$

1.2.1 因果系统

$h[n] = h[n]u[n]$

1.2.2 稳定系统

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

1.2.3 特征频率与 LTI 系统

若是有一个无限长的指数信号，那么有一个单频信号：

2.27

$$\left[e^{j\omega_0 n}\right] \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 + 2k\pi\right)$$

但是若是有限长，那么就有引入除去 ω_0 的分量，因此对于一个 LTI 系统来说，放大 $e^{j\omega_0 n}$ 和 $e^{j\omega_0 n}u[n]$ 需要的系统函数是不一样的。

1.3 差分方程的阶数

输出 $y[n-i]$ 最高值和最低值 i 的差值。

LCCDE = linear constant-coefficient difference equation .

第 二 章 DTFT 变换

2.1 频域阶数

2.42

若是在原有的系统函数多一个 z ，说明原来 a_0z^0 的位置变成了 a_0z^1 ，也就是 a_n 变成了 a_{n+1} 。同理 z^{-1} 对应 a_{n-1} 。由于使用因果信号，z^{-1} 的形式更合适。

2.2 系统设计

2.56，

需要一个系统时，可以通过其定义入手，配凑式子。同时，对于特定的频率分量，其幅度、角度变换是由其频率响应改变的。

2.3 DTFT 推导细节

$$
\begin{aligned}
DTFT^{-1}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)}d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(k-n) = x(n)
\end{aligned}
$$

注意 2π 与 $\delta(n)$ 的由来：单位虚数的积分。

将 IDTFT 展开成累加的形式，实际上是将不同频率的分量逐个恢复：

$$
\begin{aligned}
&X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(e^{jk\Delta\omega}\right)e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[X\left(e^{jk\Delta\omega}\right)\Delta\omega\right]}{2\pi}e^{jk\Delta\omega n}
\end{aligned}
$$

表 2.1: DTFT 变换对

时域函数	DTFT
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega+2k\pi)$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega+2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0+2k\pi\right)$
$W_N(n)$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$
$\frac{w_c}{\pi}\frac{\sin\left[w_c(n-\alpha)\right]}{w_c(n-\alpha)}$	$e^{-j\omega\alpha}(u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c))$

表 2.2: DTFT 变换性质

性质名称	表达式
线性	
时域平移-频域调制	$x(n-m)\rightarrow e^{-jwm}X\left(e^{jw}\right)$
时域调制-频域平移	$e^{jnw}x(n)\quad\rightarrow X\left(e^{j(w-w_0)}\right)$
时域翻折	$x(-n)\rightarrow X(e^{-j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right)Y^*\left(e^{jw}\right)dw$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert X\left(e^{jw}\right)\right\rvert^2 dw$

可以利用帕赛瓦尔定理解决一些求和式子：Slide P83.

2.4 DTFT 对称性

共轭对称与共轭反对称序列定义，实际上是实部、虚部分别的奇偶对称：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

任意序列都可以进行共轭分解：

$$\begin{aligned} x(n) &= x_e(n) + x_o(n) \\ x(-n) &= x_e(-n) + x_o(-n) = x_e^*(n) - x_o^*(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right] \\ x_o(n) &= \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right] \end{aligned}$$

根据下一小节的性质：

$$\begin{aligned} X_e\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right] \\ X_o\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right] \end{aligned}$$

同样的对频域函数进行变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

$$\begin{aligned} X_e\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right] \\ X_o\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right] \end{aligned}$$

逆变换：

$$DTFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_e\left(e^{j\omega}\right)$$

$$DTFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_o\left(e^{j\omega}\right)$$

2.5 变换共轭性质

具有普适性。

$$\mathcal{Z}\left[x^*[n]\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^*\right)^{-n}\right)^*=X^*\left(z^*\right)$$
$$\mathcal{Z}[x[-n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^{-1}\right)^{-n}=X\left(z^{-1}\right)$$
$$\mathcal{Z}[\mathrm{Re}\{x[n]\}]=\mathcal{Z}\left[\frac{x[n]+x^*[n]}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[X(z)+X^*\left(z^*\right)\right]$$
$$\mathcal{Z}[\mathrm{Im}\{x[n]\}]=\mathcal{Z}\left[\frac{z[n]-x^*[n]}{2j}\right]=\frac{1}{2j}\left[X(z)-X^*\left(z^*\right)\right]$$

2.6 Z 变换

表 2.3: $\mathscr{Z}$ 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|<a$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2-z\cos\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$

表 2.4: $\mathscr{Z}$ 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\frac{1}{\beta}<\|z\|<\frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a>0$	$X(z^a)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha^{1/a}<\|z\|<\beta^{1/a}$
$x(n\pm m)$	双边 $z^{\pm m}X(z)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$x(n-m)u(n)$	单边 $z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right]$	$\|z\|>a$	$\|z\|>a$

见下页

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(n+m)u(n)$	单边 $z^m\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$	$\|z\|>a$	$\|z\|>a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z)$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\|z\|<\beta$
$a^n x(n)$	$X(\frac{z}{a})$	$\alpha<\|z\|<\beta$	$\alpha<\left\|\frac{z}{a}\right\|<\beta$
$x_1(n)\otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\frac{z}{v})X_2(v)v^{-1}\mathrm{d}v$[1]		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=x(\infty)$$

帕塞瓦尔定理

$$Y(z)|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)h^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{V^*}\right)_V^{-1}dV$$

2.7 逆 Z 变换

2.7.1 部分分式法

对于有理多项式

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$ka^n u(n),|z|>a$$

$$-ka^n u(-n-1),|z|<a$$

[1]其中 C 是 $X_1(\frac{z}{v})X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

2.8 从能量看 Z 变换与 DTFT

时域频域的能量是一致的，没有发生衰减。

2.9 Z 变换与时域频域

为了解决非零状态系统，使用单边 Z 变换。
系统不改变频率：

$$
\begin{aligned}
& y(n)=x(n)^{*} h(n) \\
& =\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j\left[\omega_0(n-m)+\phi\right]}=e^{j\left[\omega_0 n+\phi\right]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j \omega_0 m} \\
& =e^{j\left[\omega_0 n+\phi\right]} H\left(e^{j \omega_0}\right)=x(n) H\left(e^{j \omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

2.10 系统零极点与频率响应

单位圆上的系统函数是频率响应。

2.10.1 幅度响应

- 原点处的零极点幅度无影响
- 经过单位圆上的零点幅度归零，单位圆附近的零点出现谷点
- 经过单位圆上的极点幅度无穷大，单位圆附近的极点出现峰点
- 远离零极点时影响较小

2.10.2 相位响应

- 原点处的零极点对相位影响为线性，极点会引起滞后，零点会引起超前
- 靠近单位圆的零极点会引起较大的波动
- 远离极点零点的位置变换比较平缓
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零

对于圆内外零极点：

- 圆内极点：顺时针经过，相位迅速延后
- 圆外极点：顺时针经过，相位迅速提前
- 圆内零点：顺时针经过：相位迅速提前
- 圆外零点：顺时针经过：相位迅速延后

过单位圆零点相位突变 π 。

2.11 LTI 系统幅相特性分析

当给定幅度特性时，总可以通过共轭分解找到一个系统满足要求：

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=H\left(e^{j\omega}\right)H*\left(e^{j\omega}\right)=H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

2.11.1 全通系统

频响恒为 1，其零极点分别为 a 与 $1/a^*$：

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}=-a^*\left(\frac{z-\frac{1}{a^*}}{z-a}\right)$$

其相位响应为：群延迟为正值，连续相位递减。

$$\begin{aligned}&\text{Assume:}\quad a=re^{j\theta}\\&\arg\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]\\&=-\omega-2\operatorname{arctg}\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]\\&grd\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]\\&=\frac{1-r^2}{\left|1-re^{-j(\omega-\theta)}\right|^2}\end{aligned}$$

用途：

- 相位均衡器，用于提高群延迟
- 任何因果稳定系统均可以分解为全通系统和最小相位的级联
- 若是系统不稳定，可以用于交换系统的零极点，而不改变幅度特性

2.11.2 最小相位系统

要求极点在单位圆内（主要考虑系统稳定性），要求零点在单位圆内（主要考虑相位变化最小）。

最小相位系统零极点均在单位圆内，极点往往与系统稳定性联系在一起，零点则往往与系统的延时特性联系在一起。逆系统也是因果稳定的，可以实现幅度和相位失真的完全补偿。

- 最小相位延迟，全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小：

$$\begin{aligned}H(z)&=H_{\min}(z)H_{ap}(z)\\\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]&=\arg\left[H\min\left(e^{j\omega}\right)\right]+\arg\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]\\\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]&\le\arg\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]\\\left|\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]\right|&\ge\left|\arg\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]\right|\end{aligned}$$

- 最小群延迟，全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值：

$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\operatorname{grd}\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]+\operatorname{grd}\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$
$$\operatorname{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]\geq\operatorname{grd}\left[H_{\min}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

- 最小能量延迟，最集中在 $n=0$ 范围内：

$$\sum_{m=0}^{n}|h(n)|^2\leq\sum_{m=0}^{n}|h_{\min}(m)|^2$$

因此：

$$|h(0)|\leq|h_{\min}(0)|$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为最大相位系统。

2.11.3 系统的补偿

幅度失真由最小相位因子补偿，相位失真利用全通因子补偿特定频段。

2.11.4 线性相位系统

定义：群延迟 α 为常数 $\phi(\omega)=-\alpha\omega+\beta$

线性相位响应时域表现为信号平移，波形不发生失真。

不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统。

若是群延迟 α 满足 2α 为整数，那么单位冲激响应严格对称，否则不严格对称，但是仍满足线性相位。

2.11.5 广义线性相位系统

在系统相位存在突变以及固定相位时，仍然存在恒定群延迟。

已知线性相位系统存在对称性，进行分析：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A(\omega)e^{-j(\omega\alpha-\beta)}$$
$$DTFT\quad[h(\alpha-n)]=H\left(e^{-j\omega}\right)e^{-j\omega\alpha}=A(\omega)e^{j\beta}$$
$$DTFT\quad[h(n+\alpha)]=H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega\alpha}=A(-\omega)e^{j\beta}$$

因此，$A(\omega)$ 的对称性决定了 $h(n)$ 的对称性（一致）。

根据对称形式与 2α 的奇偶性，有四类 FIR 线性相位滤波器。

对称冲激响应的系统特性推导：

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \pm h(N-1-n) \quad 0 \le n \le N-1 \\
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} \\
\text{令} m = N-1-n &= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m} \\
&= \pm z^{-(N-1)} H\left(z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

得到:

1. 系统零点个数等于系统在原点的极点阶数相等
2. z_i 与 z_i^{-1} 均为零点
3. $h(n)$ 为实数，零点共轭成对

四类，其中 $M=N-1$:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \pm z^{-(N-1)} H\left(z^{-1}\right) \\
H(z) &= \frac{1}{2}\left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H\left(z^{-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{n}\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^{n}\right] \\
&= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right] \\
H(\omega) &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} h(n)\left[\frac{\left(e^{j\omega}\right)^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm \left(e^{j\omega}\right)^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]
\end{aligned}
$$

- I 类：M 为偶数，偶对称：$h(n)=h(M-n)$

$$
H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{M}{2}-n\right)\omega\right]
$$

- II 类：M 为奇数，偶对称，存在特殊零点：

$$
H(z)=z^{-M} H\left(z^{-1}\right)
$$

解得 $z=-1,\omega=\pi$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\frac{N}{2}-n=m=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

- III 类：M 为偶数，$h(n)=-h(M-n)$ 特殊零点：$z=\pm1$ 。

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\\(\frac{N-1}{2}-n=m)&=\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\sin(m\omega)\end{aligned}$$

- IV 类：M 为奇数，$h(n)=-h(M-n)$ 特殊零点：$z=1$ 。

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\\&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\\(\frac{N}{2}-n=m)&=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\sin\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\end{aligned}$$

对于一个关于 $n=k$ 对称的序列，其群延时为 k 。

2.11.5.1 最小相位分解

根据零点成对进行分解，分解到最小相位系统与线性相位系统。

第 三 章 信号采样与重构

需要解决的问题:

- 数字频率和模拟频率之间的对应关系: 时域采样对频域的影响
- 采样定理: 能否包含原始信号的所有信息? 如何无失真恢复原始信号? 是否有冗余信息可以去除? 是否可以进行速率的变化?
- 离散处理如何等效为一个模拟 LTI 系统?

3.1 理想周期采样重构

3.1.1 模拟-采样-数字频谱关系

一般采样都是不可逆的，为了不丢失信息，需要进行约束。

理想时域采样:

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(\mathrm{t} - nT)$$

其中:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

频域表示为:

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT_1\right) \rightarrow \frac{2\pi}{T_1} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\omega_1\right)$$

$$\begin{aligned}
X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) S(\Omega) \\
&= \frac{1}{T} X_c(\Omega) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - n\Omega_0)
\end{aligned}$$

那么从连续信号采样得到的是原始信号的频谱（带限 Ω_N）的周期（Ω_s）性拓延，当然，这是存在混叠的。

AD 是 CD 的工程近似。

进一步研究其离散采样信号的频谱:

对于采样信号:

$$
\begin{aligned}
X_{\mathrm{s}}(j\Omega) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t)e^{-j\Omega t}dt \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-j\Omega t}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)e^{-j\Omega t}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j(\Omega T)n}
\end{aligned}
$$

对于数字信号：

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega n}
\end{aligned}
$$

经过两种形式的比对，可以得到：

$$
X(j\omega)\Big|_{\omega=\Omega T} = X_s(j\Omega)
$$

这就得到了一个重要的**频率转换公式**：

$$
\Omega T = \omega
$$

3.1.2 信号重构

通过理想重构滤波器：

$$
h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}
$$

其频域形式：

$$
H(\omega) = TG_{\omega_c}(\omega)
$$

其频率表示为，无混叠时采样点之外也无失真，有混叠时，则采样点之外存在一定失真。

$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= x_s(t) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t-nT) \otimes h_r(t) \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)h_r(t-nT) \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}
\end{aligned}
$$

3.1.3 奈奎斯特低通采样定理

若信号的频带满足 $|\omega| < \omega_c$ ，那么以至少 $2\omega_c$ 的速率采样就可以无失真的恢复原始信号。

3.1.4 奈奎斯特带通采样定理

若信号的频带满足 $|f| < \omega_c$ ，那么以至少 $2f_c$ 的速率采样，且满足 $f_s = \frac{4f_0}{2n+1}$ 就可以无失真的恢复原始信号。其中 f_0 为频带中心频率。

3.2 连续信号的离散化

$$
X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T}
$$

实际上处理的系统函数 $H_{eff}(j\Omega)$ 只能处理 $|\Omega| < \pi/T$ 。

3.3 抽取和内插

虽然带通定理降低了采样的速率，但是有时我们需要更高的带宽也就是更快的速度，优点有：

- 处理带宽变宽
- 信号处理的盲区减少
- 量化信噪比可以提升

但是高速率的采样又会造成后续的信号处理速度不匹配，因此又需要降速，但是减少采样又想要不丢失信息。

3.3.1 信号整倍数抽取

其采样序列转变为，通过统一的形式表示一个周期的冲激函数，很是美观、方便：

$$\delta_D(n)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi}{D}ni}=\begin{cases}1 & n=0,\pm D,\pm 2D,\ldots\ldots\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其 Z 变换：

$$\begin{aligned}X_D(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_D(n)z^{-n}\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta_D(m)z^{-m/D}\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(x(m)\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi}{D}mi}\right)z^{-m/D}\\&=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{j\frac{2\pi}{D}mi}z^{-m/D}\\&=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)^{-m}\\&=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)\\&=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)^{-m}\\&=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}i}\right)\end{aligned}$$

当 $D=1$ 时，退化到原始的 Z 变换。

从采样的模拟谱来看，降采样将交叠平移的**频率间隔缩小**了 D 倍，因此数字谱也是如此。

$$x(n)\Leftrightarrow Xs(\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Xc\left(\Omega-k\Omega_0\right)\quad\Leftrightarrow X(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Xc\left(\frac{\omega}{T}-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$x_D(n)\Leftrightarrow X_{DS}(\Omega)=\frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Xc\left(\Omega-k\frac{\Omega_0}{D}\right)\Leftrightarrow X_D(\omega)=\frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Xc\left(\frac{\omega}{DT}-k\frac{2\pi}{DT}\right)$$

这也导致交叠变得更加容易，原本交叠间隔是 2π ，会变得更小。

最终在数字频域的表现如下，可以看到平移中心没有变化，但是频谱已经被稀释（拉伸）了。

$$X_D(\omega)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X\left(\frac{\omega-2\pi i}{D}\right)$$

为了**防止混叠**，需要把可能产生混叠的部分滤除，在对数字信号 D 倍抽取之前，先用数字低通滤波器 π/D 滤波。

3.3.2 信号整倍数内插

内插显得很不可思议，对于一个 I 倍的内插结构，就是在原始序列的每两个点之前，插入 $I-1$ 个零。也就是对于 $x_i(m)$ 来说，除去 m 为 I 的整倍数的点，其余都为 0 。

$$x_I(m)=\begin{cases} x\left(\dfrac{m}{I}\right) & (m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

类似的，来分析其频谱:

$$\begin{aligned} & X_I\left(e^{j\omega}\right) \\ & =\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_I(m) e^{-j\omega m} \\ & =\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_I(kI) e^{-j\omega Ik} \\ & =\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{-j\omega Ik}=X(e^{j\omega I}) \end{aligned}$$

可见，这里的形式比较简洁，就是简单的将频谱压缩了 I 倍。

将抽取后的频谱进行内插后的频谱进行时域还原，可以得到准确的内插值，提高了时域的分辨率。

类似的，在内插后需要进行低通滤波，防止其搬运频谱也进入之后系统。同时，内插需要增益为 I 。

3.3.3 非整倍数抽取和内插

可以通过如 **图** 3.1 的系统对信号进行非整倍数的抽取和内插。

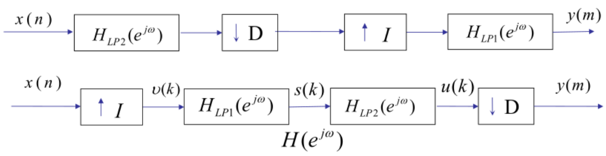


图 3.1: 非整倍数抽取与内插系统

滤波器只需满足在最小频带工作：同时补偿进行内插的增益 I 。需要注意，给定分数后，**滤波器频率已经默认给定**。

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} I \quad |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right) \\ 0 \quad \text{else} \end{cases}$$

其时域表示：

$$v(n)=\begin{cases} x(n/I) \quad n=0,\pm I,\pm 2I\cdots \\ 0 \qquad\qquad \text{else} \end{cases}$$

$$u(n)=v(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)v(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)x(k/I)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n)=u(Dn)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(Dn-Ik)$$

对时域计算的一点简化：

$$y(n)=u(Dn)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(Dn-Ik)$$

$$Dn-Ik\geq 0 \quad k\leq\frac{D}{I}n \quad \text{令：} \quad m=\lfloor\frac{Dn}{I}\rfloor-k, \quad m\geq 0$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\lfloor\frac{Dn}{I}\rfloor-m\right)h\left(Dn-\lfloor\frac{Dn}{I}\rfloor I+mI\right)$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x\left(\lfloor\frac{Dn}{I}\rfloor-m\right)h\left(mI+Dn\%I\right)$$

3.3.4 速率变换的多相结构

在高采样率的数据端，数字的滤波器计算量巨大。希望将数据转换到频率较低的位置进行计算，来降低功耗。

多相滤波器：将 Z 变化转化为多相形式，以特定频率倍数为周期：

$$
\begin{aligned}
&H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \\
&=h_0+h_4 z^{-4}+h_8 z^{-8}+h_{12} z^{-12}+\cdots \\
&+h_1 z^{-1}+h_5 z^{-5}+h_9 z^{-9}+h_{13} z^{-13}+\cdots \\
&+h_2 z^{-2}+h_6 z^{-6}+h_{10} z^{-10}+h_{14} z^{-14}+\cdots \\
&+h_3 z^{-3}+h_7 z^{-7}+h_{11} z^{-11}+h_{15} z^{-15}+\cdots \\
&=z^0\left[h_0+h_4 z^{-4}+h_8 z^{-8}+h_{12} z^{-12}+\cdots\right] \\
&+z^{-1}\left[h_1+h_5 z^{-4}+h_9 z^{-8}+h_{13} z^{-12}+\cdots\right] \\
&+z^{-2}\left[h_2+h_6 z^{-4}+h_{10} z^{-8}+h_{14} z^{-12}+\cdots\right] \\
&+z^{-3}\left[h_3+h_7 z^{-4}+h_{11} z^{-8}+h_{15} z^{-12}+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

M 相分解:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-Mn} \\
E_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn+l) z^{-n} \\
H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l\left(z^M\right)
\end{aligned}
$$

对应的时域表示为:

$$
\begin{aligned}
e_l(n) &= h(Mn+l) \\
E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_l(n) z^{-n}
\end{aligned}
$$

3.3.5 离散话处理工程问题

3.3.5.1 处理对能量的影响

- 采样降低 T 倍
- 抽取不影响信号功率
- 内插降低 I 倍

第四章 离散傅里叶变换及其快速算法

工程中对时域、频域的处理都只能局限在特定时段、频段内，并且采样和实现都是离散的。需要的变换需要满足时域序列和频域抽样的关系。

4.1 四类傅里叶变换

傅里叶变换的目的是建立**时域表达**和**频域表达**的变换关系，当时间与频率分别为连续、离散时，就得到不同形式的傅里叶变换对：

- 连续时间-连续频率：CTFT

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

- 连续时间-离散频率：CTFS 周期信号为功率信号，能力无限，因此变换需要特殊处理。时域周期化导致频域离散化

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$
$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$
$$X(j\Omega)=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}X(jk\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0)$$

- 离散时间-连续频率：DTFT 时域离散导致的频域周期化

$$X\left(e^{j\Omega T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$
$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

- 离散时间-离散频率：DFS 时域周期性离散化，不是绝对可和的：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}rn}=\frac{1}{N}\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}}=1,\ \text{when } r=mN, 0,\ \text{else}$$

定义变换因子的符号：$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$
$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是对周期序列主值区间的 Z 变换 / DTFT 在单位圆的等间隔取样。

4.2 频域采样定理

本节考虑：如何利用单位圆抽样恢复原始信号，并且抽样对于时域的影响。

对于任意信号进行频谱单位圆抽样并进行 IDFS 变换得到的序列是

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)}\right) \\
&\qquad \text{where } \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(m-n-rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)
\end{aligned}
$$

这个公式显示了原序列点数、采样点数之间的关系，以及交叠造成的数学形式。若是可以无失真恢复原序列，那么可以完整表达其频谱：

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right) z^{-n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}\right) \\
&= \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}\right)
\end{aligned}
$$

那么定义一个因子即可建立从恢复频谱到原频谱的关系：

$$
\Phi_k(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\cdot\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z) \\
X\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k\left(e^{j\omega}\right)
\end{aligned}
$$

这个因子存在 N 零点，只有在这些零点处极点才会被抵消，在其他抽样点处都为 0 。

4.3 DFT

DFS 是主值区间的采样，DFT 是有限长序列（周期延拓后）的变换。

$$X(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots N-1$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)R_N(n)$$

DFT 是其 DTFT 的等长采样的主值区间。

4.3.1 DFT 性质

- 对偶性：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{nk}\right)^*$$

$$\text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\left(DFT[X^*(k)]\right)^*$$

- 圆周对称性
- 线性性
- 循环移位特性：

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

- 频率圆周移位：

$$IDFT\left[X((k+l))_N R_N(k)\right] = W_N^{nl}x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}x(n)$$

据此可以得到：

$$DFT\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[X((k-l))_N + X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

$$DFT\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[X((k-l))_N - X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

- 圆周共轭性：若 $x(n)$ 为共轭对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周共轭对称序列：$x(n) = x^*(N-n)$ ；若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，那么 $x((n))_N$ 称为圆周反共轭对称序列：$x(n) = -x^*(N-n)$ ；

- 时域-频域对称性：

$$\text{DFT}[x((-n))_{-k}] = X(N-k)$$

$$DFT\left[x^*(n)\right] = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$$

据以上两个式子可以得到实部、虚部的变化，首先定义共轭序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n) R_N(n) = \frac{1}{2}\left[x((n))_N + x^*((N-n))_N\right] R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n) R_N(n) = \frac{1}{2}\left[x((n))_N - x^*((N-n))_N\right] R_N(n)$$

那么：

$$DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k)$$

$$DFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_{op}(k)$$

$$DFT\left\{x_{ep}(n)\right]\} = \mathrm{Re}[X(k)]$$

$$DFT\left\{x_{op}(n)\right]\} = j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

- 圆周卷积和：可交换/点数相关
- 线性卷积和：至少 N_1+N_2-1 点结果
- 时域相乘：

$$Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

- 圆周相关：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m) y^*(n)$$

其频谱：

$$R_{xy}\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) Y^*\left(e^{j\omega}\right) \quad R_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

利用交叠求 DFT 实际上是搬移，搬移的源是原序列而不是补全的序列。

圆周卷积：翻折-向右平移

4.4 FFT

4.4.1 基底特性

- 对称性：

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk}$$

- 周期性：

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

- 可约性：

$$W_{mN}^{mnk} = W_N^{nk}$$

4.5 戈泽尔算法

将 DFT 转换为卷积：

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N-1}x[r]W_N^{kr}=W_N^{-kN}\sum_{r=0}^{N-1}x[r]=\sum_{r=0}^{N-1}x[r]W_N^{-k(N-r)}=x[n]\otimes W_N^{-kn}u[n]=y[n]\Big|_{n=N}$$

分解其 Z 变换：

$$\begin{aligned}&H_k(z)=\tfrac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\tfrac{1}{\left(1-W_N^{-k}z^{-1}\right)\left(1-W_N^{k}z^{-1}\right)}*\left(1-W_N^kz^{-1}\right)\\&=\tfrac{1}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}}*\left(1-W_N^kz^{-1}\right)\end{aligned}$$

4.6 基 2 FFT

特殊基：

$$\begin{aligned}W_N^{N/2}&=-1\\W_2^0&=1\\W_2^1&=-1\end{aligned}$$

两类 FFT：时间抽取（DIT），频域抽取（DIF）

4.6.1 时域奇偶抽取

首先补零！

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}\\&=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\end{aligned}$$

概括来说，就是在时域进行奇偶分解，在频域进行组合；旋转因子在前，加减在后；整体旋转在前，微调在后。其蝶形图如 **图** 4.1 。

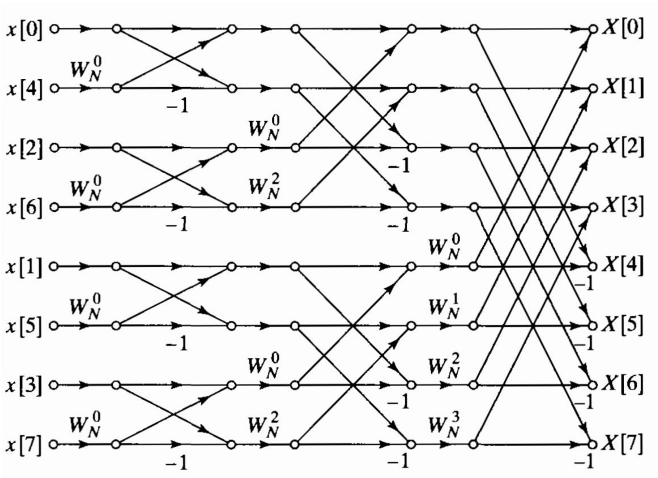


图 4.1: DIT 蝶形图

4.6.2 频域奇偶抽取

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \\
&= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{nk} + x[n+\frac{N}{2}]W_N^{(N/2+n)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+\frac{N}{2}]W_N^{Nk/2})W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+\frac{N}{2}](-1)^k)W_N^{nk}
\end{aligned}
$$

那么有:

$$
\begin{aligned}
k = 2r, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+\frac{N}{2}])W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n]W_N^{nk} \\
k = 2r+1, X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] - x[n+\frac{N}{2}])W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n]W_N^{nk}
\end{aligned}
$$

概括来说，就是在时域进行前后分解，在频域进行奇偶分解；加减在前，旋转因子在后；微调在前，整体旋转在后。其蝶形图如 **图** 4.2 。

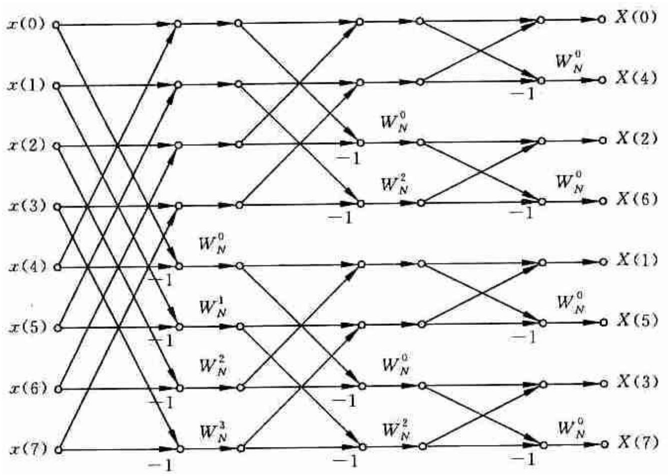


图 4.2: DIF 蝶形图

4.7 DFT 工程性问题

4.7.1 利用 DFT 进行频谱分析

4.7.1.1 CTFT

在采样之前需要加入抗混叠滤波器, 降低混叠, 采样速率根据抗混叠的带宽决定, 需要满足采样定理。过程: 时域加窗后进行频域采样。

利用 DFT 对 CTFT 进行逼近, 将连续信号采样分段后得到:

$$x(t)\Big|_{t=nT} = x(nT) = x[n]$$

那么 CTFT 近似为:

$$X(j\Omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}T$$

加入长度为 N 的窗:

$$X(j\Omega) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)h[n]e^{-j\Omega nT}$$

进一步离散频率得到:

$$X(jk\Omega_0) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)h[n]e^{-jk\Omega_0 nT} = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)h[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$X(jk\Omega_0) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)h[n]e^{-jkn2\pi/N} = T\text{DFT}[x[n]]$$

4.7.1.2 CTFS

CTFS 近似：

$$X\left(jk\Omega_0\right) \approx \frac{T}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}DFT[x(n)]$$

4.7.1.3 加窗效应

时域上的截断（相乘），在频域上表现为周期卷积，这将会对信号的频谱起平滑和能量的分散，即频谱泄漏。

加窗使得频谱平滑或展宽，降低了频率上靠近的正弦信号的分辨能力.

分辨力取决于窗函数的主瓣宽度：

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{L}$$

其分辨力定义为：

$$\Delta = \frac{1}{L}$$

也就是有效时间窗越小，分辨力越高。

由于 DFT 只能看到连续谱的离散点，具有栅栏效应，离散频率值为：

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

因此对应模拟频率来说，步进间隔为：

$$f_k = \frac{f_s}{N}$$

分辨率主要受窗函数主瓣宽度的影响；频谱泄漏主要指副瓣能量泄漏，一般不指主瓣能量的泄漏，主要取决于窗函数的主瓣和副瓣幅值相对比例。进行频谱分析时，往往希望有高分辨率和小的频谱泄漏，也就是希望时间窗有小的主瓣宽度和相对小旁瓣幅度。

4.7.2 DFT 实现 LTI

块卷积：重叠相加法（输出），重叠保留法（输入）

第 五 章 数字滤波器设计与实现

5.1 滤波器设计基础

滤波器是一个 LTI 系统，通过卷积在频域进行滤波，主要是幅度特性。

基本步骤：

1. 确定离散滤波器的性能指标
2. 用一个**因果稳定**的离散 LTI 系统去逼近性能指标
3. 利用有限精度，决定实现的系统结构

常见指标：增益 $G = 20\lg|H(e^{j\omega})|$ ，衰减 $D = -G$ 。

通带指标：

- 在通带中幅度响应以误差 $\pm\alpha_1$ 接近 1 ，$2\alpha_1$ 称作通带容限。
- 通带波纹：

$$R_p = -20\lg\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

- 通带最大衰减：对于归一化的滤波器：

$$\delta_1 = -20\lg(1-\alpha_1)$$

对于一般情况：

$$20\lg\left|\frac{H_{max}(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega_c})}\right|$$

定义最大衰减处的频率为通带截止频率 ω_c

阻带指标：

- 阻带指标：阻带中幅度响应以误差 α_2 逼近 0 ，这叫做阻带容限
- 阻带波纹为 δ_2 ，最小衰减为 A_s 。在 ω_{st} 的位置，幅值为 α_2 。

数字-模拟指标：$\omega = \Omega T$

有理 LTI 系统函数：离散系统常用表现形式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

系统的指标：

- 不同的计算结构存储与计算次数不同，实现的复杂度与速度也不同
- 不同计算结构的工程应用场景不同

数据流图转置定理：输入输出及其支路方向逆转，结论仍成立。

5.1.1 FIR 结构

特点

- 仅有零点，无极点
- 单位冲激有限长
- 无反馈

直接型：分别延时对 $h[0]$ 到 $h[N-1]$ 做乘法然后累加。

转置直接型：对枝节性进行转置，可以使用最少的存储单元和运算量。

级联型：将系统函数分解为二阶的乘积形式，可以精确控制一对零点，但是乘法次数更多。

频率抽样型：基本公式为

$$H(z)=\frac{1}{N}\underbrace{\left(1-z^{-N}\right)}_{Hc(z)}\sum_{k=0}^{N-1}\underbrace{\frac{H(k)}{1}\frac{-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}{H_K^{-}(z)}}_{H_k(z)}$$

5.1.2 IIR 结构

特点

- 有限 Z 平面内有极点
- 无限长冲激
- 存在反馈，递归计算

直接 I 型结构：直接根据定义设计

直接 II 型结构：转置后合并可以共用的延时单元。是 N 阶滤波结构采用的最少延时单元，也称典范型。

但是直接型的结构对零极点控制的关系不明显，性能影响不直观。

级联型结构：将系统分解成二阶级联，可以剔除共轭极点。与直接 II 型有着相同的最少存储单元。便于实现滤波器的零极点，调节系统性能。但是级联系统的稳定性较差。

并联型结构：可以单独调节极点，信号无交叉，有利于系统稳定。不能单独调节零点。

5.2 IIR 设计

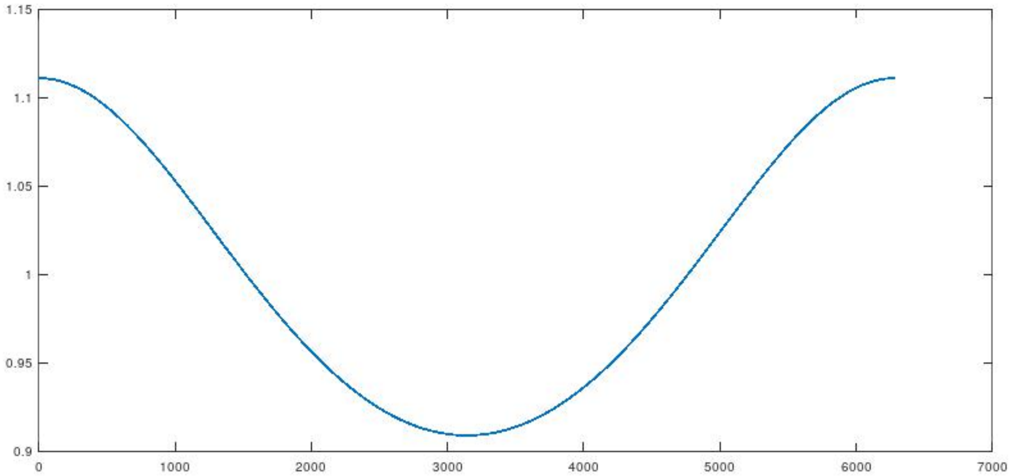
5.3 FIR 设计

第 六 章 复习题

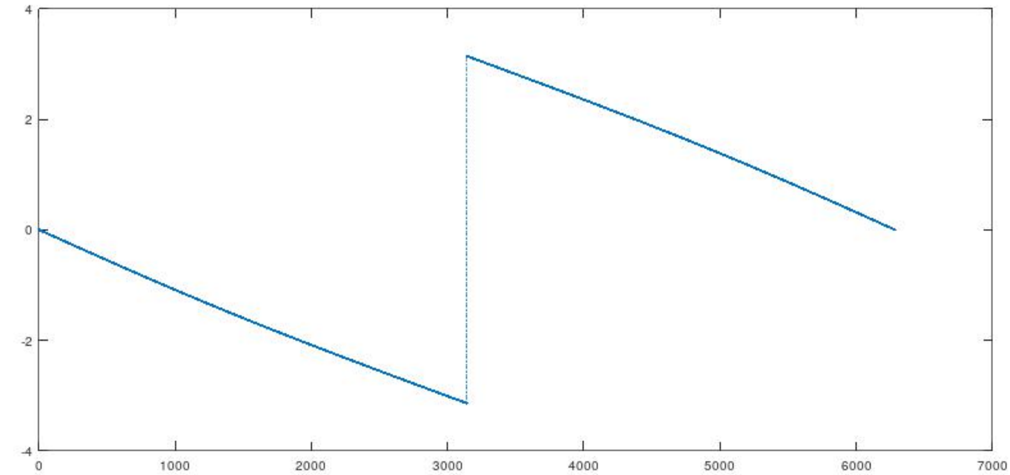
2.44，5.49，4.8，4.53，4.7，4.34，4.43，4.49，7.33，9.6，9.26，9.27，9.21，10.4，

附录 A 零极点幅度相位研究

Z = 0.1 极点 无零点

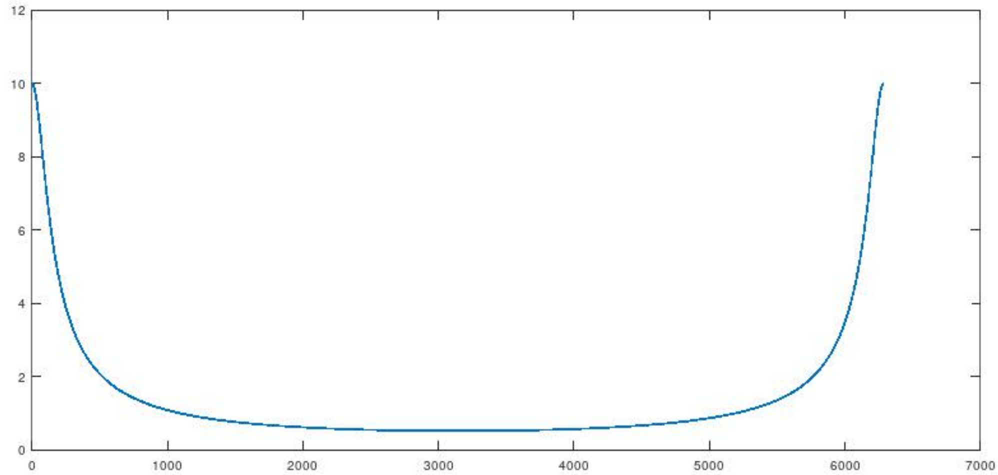


1.15
1.1
1.05
1
0.95
0.9
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

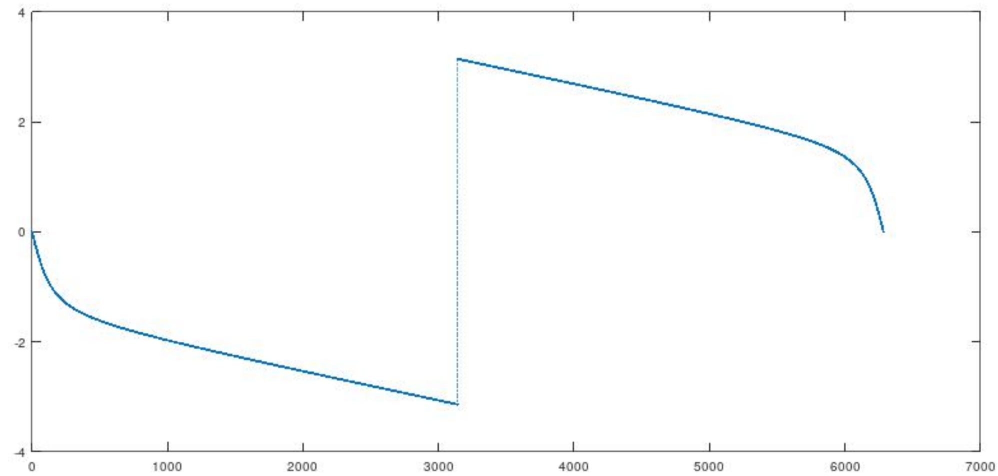


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.9 极点 无零点

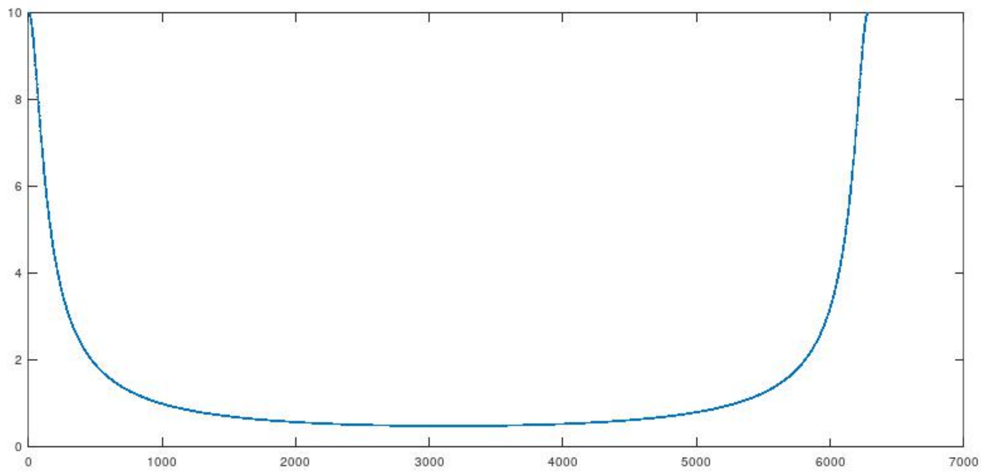


12
10
8
6
4
2
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

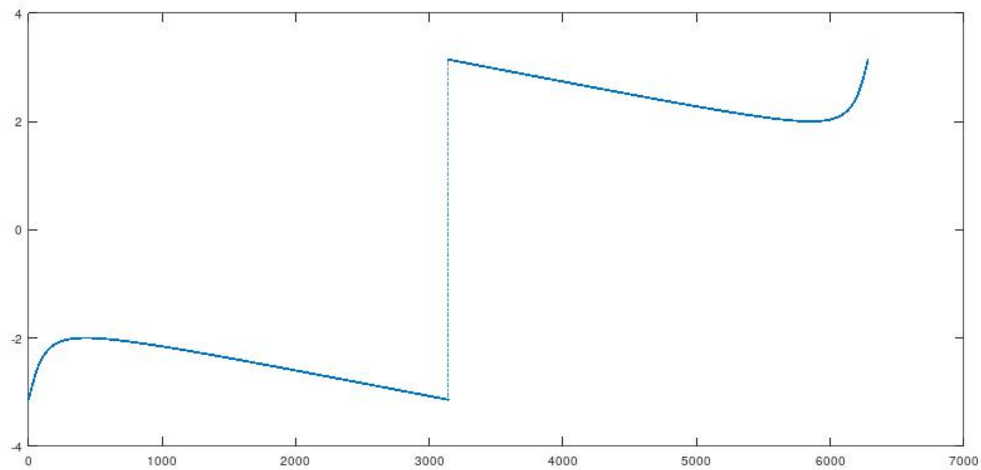


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 1.1 极点 无零点

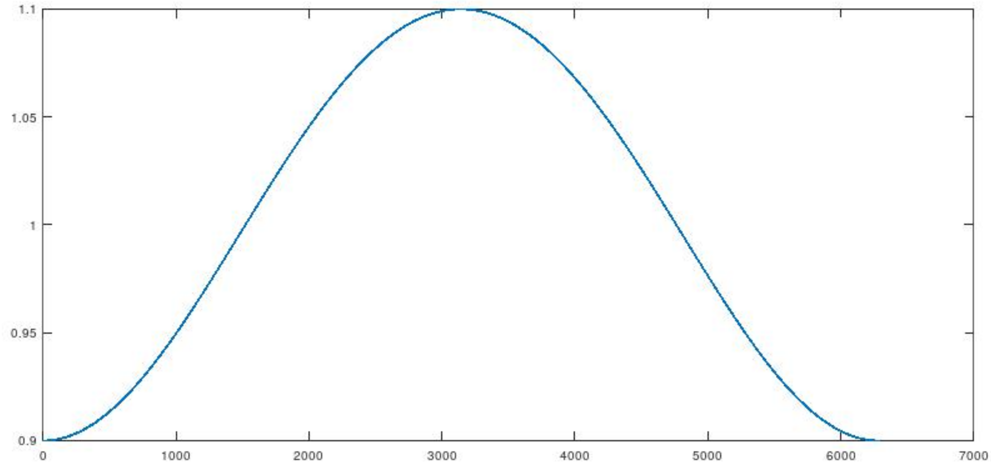


10
8
6
4
2
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

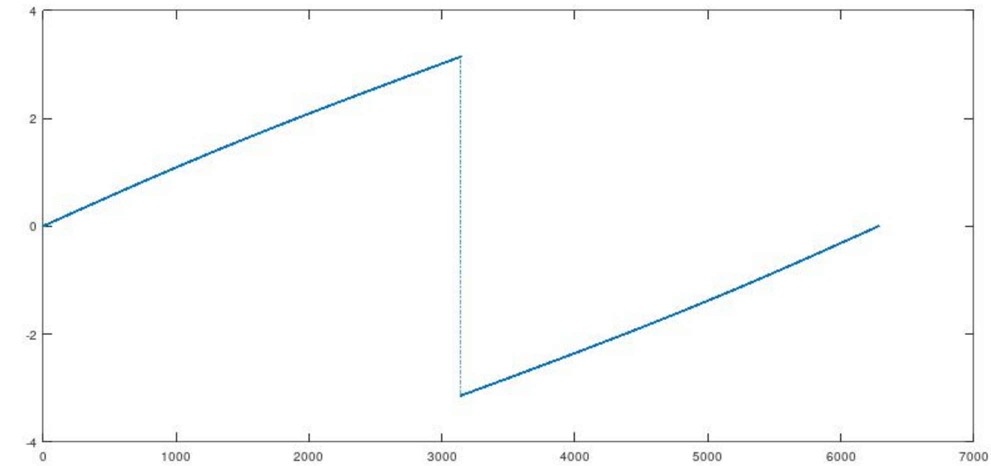


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.1 零点 无极点

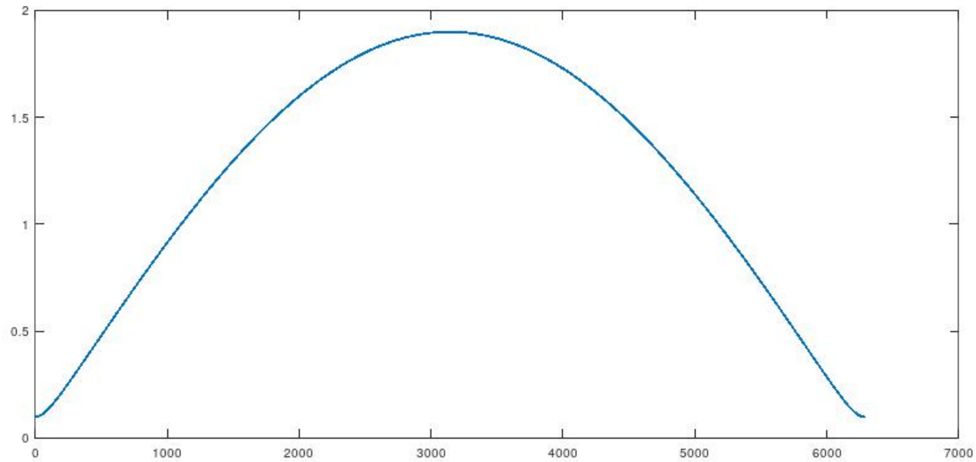


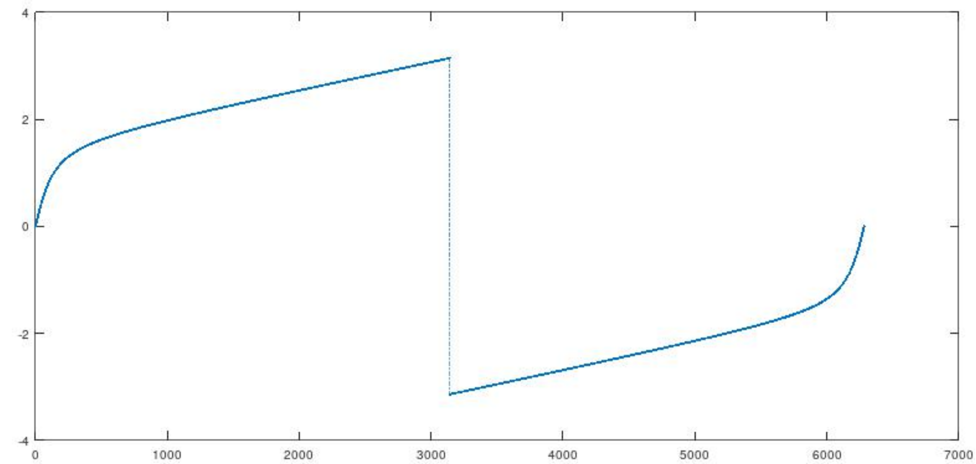
1.1
1.05
1
0.95
0.9
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000



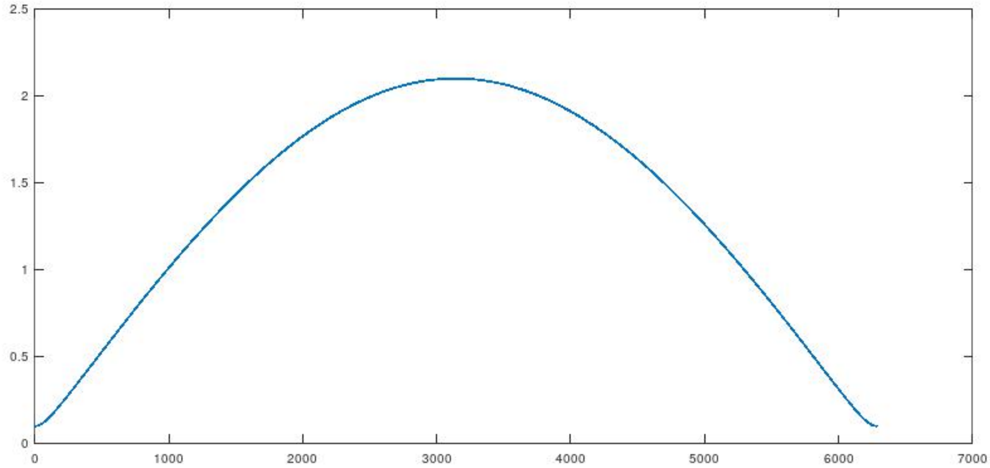
4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 0.9 零点 无极点

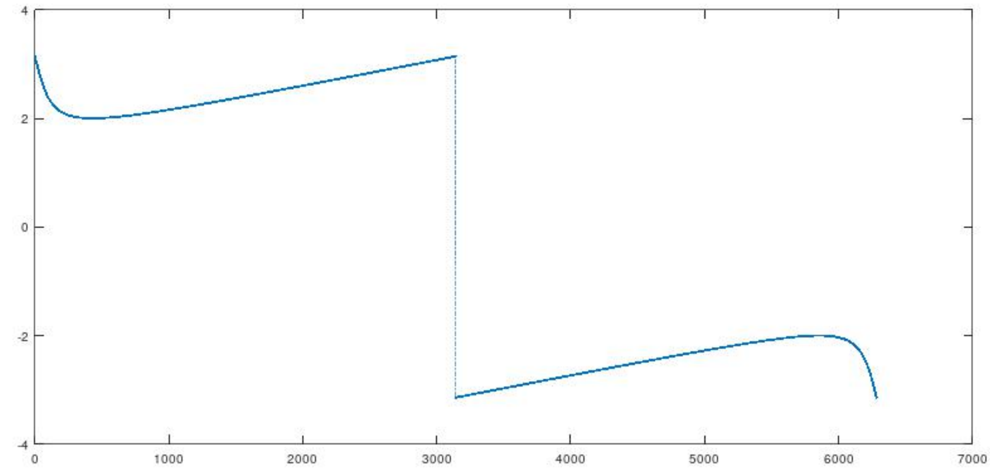

2
1.5
1
0.5
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000


4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000

Z = 1.1 零点 无极点



2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000



4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000