第 一 章 离散傅里叶变化

数字处理需要对时域进行采样与截断，频域离散化。

从离散傅里叶级数（DFS）开始，逐步介绍离散傅里叶变换（DFT），以及快速算法。

1.1 离散傅立叶级数

周期序列等价于有限长序列，可以引出抽样定理。

连续信号可以进行连续傅里叶变换，而周期信号需要进行傅里叶级数，时域的周期性造成了频域的离散。时域的离散造成频域的周期性。

CTFS 是主值区间的信号，CTFT 是频域的采样。

$$X\left(e^{j\Omega T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

1.2 离散傅立叶变换

若是一个周期序列，那么不是绝对可和的，不能使用 DTFT 。

若是周期为 N 那么：

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$$

希望展开成离散的傅里叶级数：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} rn} &=\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r) n} \\
&=\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r) n}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} rn}=\frac{1}{N} \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N} rN}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}}=1, \text{ when } r=mN, 0, \text{ else}$$

定义变换因子的符号：$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N} nk}=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是主值区间的 Z 变换在单位圆的等间隔抽样。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=w\pi k/N}$$

1.3 频域采样

频域采样 N 点，得到的是抽样点为 N 的周期延拓。可以用来设计滤波器，若是可以无失真回复原序列，那么可以完整表达 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

1.4 内插器公式

$$\frac{1-\exp -j\omega N}{1-\exp -j\omega} = \exp -j\omega\frac{N-1}{2}\frac{\sin\omega N/2}{\sin\omega/2}$$