DSP 试卷综合
（汇编了 97 级、98 级，00 级、04 级等试卷试题）

概念题

试判断如下说法的正确性，并简述理由。

1.若一线性时不变离散时间系统的极点全部位于 z 平面的单位圆内，则该系统是稳定系统。**错误，因为非因果信号的收敛域为$z<R$，所以有可能收敛域不包含单位圆。**

2.利用离散傅里叶变换分析连续信号频谱，其频率分辨率只与截取时间长度有关，与窗的形状没有关系。**错误，窗函数的频谱主瓣宽度影响频率分辨率。**

3.线性时不变相位系统可由系统幅度唯一确定。**错误，相位特性还与零点有关。**

4.N 点的实有限长序列$x\left[n\right]$的 DTFT 为$X\left(e^{j\omega}\right)$，DFT 为$X\left[k\right]$，若$\mathrm{Im}\left\{X\left[k\right]\right\}=0$，$k=0,1,\cdots,N-1$，则必有$\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=0$。**错误。仅采样点为实数$\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=0$。**

5.因果最小相位系统的逆系统仍为因果最小相位系统。**正确。**

6.任何系统都可由零时刻的单位冲激响应完全表征。**错误，仅 LTI 系统。**

7.滤波器设计本质上是用一个关于 z 的有理函数在单位圆特性来逼近所有要求的系统频率特性。**正确。**

8.对于实数 FIR 系统来说，若$z_0=re^{j\theta}$为系统零点，则必有$z_0^*=re^{-j\theta}$也为系统的零点。正确。

9.按频率抽取的基 2FFT 比按时间抽取的基 2FFT 的计算量大。**错误，两者计算量相同。**

10.线性时不变离散系统可实现频谱的搬移。**错误，不可实现频谱的搬移。**

11.系统T为两个T_1和T_2的离散时间系统的级联，则

（a）若T_1和T_2均为线性，则T也为线性；（正确）

（b）若T_1和T_2均为时不变的，则T也为时不变的；（正确）

（c）若T_1和T_2均为因果的，则T也为因果的；

（d）若T_1和T_2均为稳定的，则T也为稳定的。

12.若一 LTI 系统的所有极点均在单位圆内，则该系统一定稳定。（错误）

13.升、降采样系统均为 LTI 系统。（错误）

14.可以设计一 LTI 系统实现对输入信号的频谱搬移。（错误）

简答题

1.已知$T\left[x\left[n\right]\right]=x\left[n\right]+3u\left[n-1\right]$，问该系统是否稳定，因果，线性，时不变，无记忆？

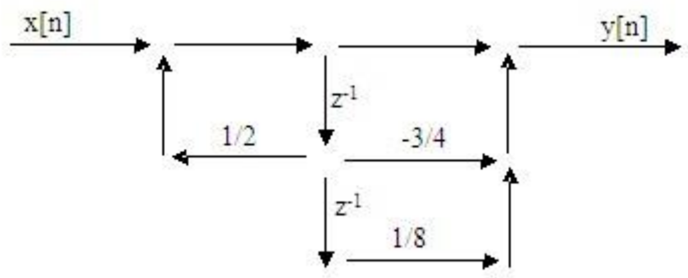
2.压缩器（减采样）是 LTI 系统吗？为什么？

3.一因果有限长序列 $x[n]$ 的 Fourier 变换在 $\omega_k=\frac{2\pi k}{N}$， $k=0,1,\cdots,N-1$ 的采样值为 $X[k]$，在什么条件下可以由 $X[k]$ 重构出 $x[n]$ 的 Fourier 变换 $X(e^{j\omega})$（只要求写出结论）。

4.任一模拟信号经 C/D 变换后，再通过 D/C 后得到的信号是否在原采样点处无失真？为什么？

5.FIR 线性相位系统是否在 $z=-1$ 处必存在零点？为什么？

6.试判断下图所示滤波器是 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器，并说明理由。



7.试问对于一个低通滤波器有哪些技术指标？在同样的指标下，IIR 滤波器实现和 FIR 滤波器实现比较，哪一个阶次高？

8. $X[k]$ 为序列 $x[n]$ 的 N 点 DFT，若 $x[n]=-x[N-1-n]$，试问 $X[0]=?$

如果 N 为偶数，且 $x[n]=-x[N-1-n]$，试问 $X\left[\frac{N}{2}\right]=?$

9.用 DFT 分析时域连续信号 $x_a(t)$ 的频谱，其步骤是：首先对 $x_a(t)$ 采样得到离散序列 $\{x[n],n=0,1,\cdots,M-1\}$，然后求 $x[n]$ 的 DFT 变换。当采用基-2 FFT 算法完成 DFT 时，要求的 FFT 点数 N 是 2^r，如果 N>M，则要对序列 $x[n]$ 补 0，问对序列补 0 后，FFT 处理的结果是否能提高频率分辨率？并说明理由。

卷积

1. 已知 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]$ 为 $h[n]=\begin{cases}1,0\le n\le 6\\0,otherwise\end{cases}$，输入序列为 $x[n]=\begin{cases}a,0\le n\le 4\\0,otherwise\end{cases}$，求系统输出 $y[n]$。

2.已知信号 $x[n]=\begin{cases}\frac{1}{3}n, 0\le n\le 6\\ 0, otherwise\end{cases}$ 和 $h[n]=\begin{cases}n, -2\le n\le 2\\ 0, otherwise\end{cases}$

（a）试画出 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的图形；

（b）求出 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积。

3.设 $x[n]$ 时宽为 6，在 $0\le n\le 5$ 时，$x[n]=\{1,1,1,1,1,1\}$，$y[n]$ 时宽为 3，在 $0\le n\le 2$ 时，$y[n]=\{1,2,3\}$

（1）求 $x[n]$ 与 $y[n]$ 的线卷积；

（2）求 $x[n]$ 与 $y[n]$ 的 6 点循环卷积（圆卷积）。

4.给定 $x_1[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 5\\ 0, otherwise\end{cases}$，$x_2[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 3\\ 0, otherwise\end{cases}$

（1）试求 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线卷积；

（2）试求 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 6 点循环卷积（圆卷积）。

解：$x_1[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 5\\ 0, otherwise\end{cases}$，$x_2[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 3\\ 0, otherwise\end{cases}$

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]=\begin{cases}0, n<0, n>8\\ n+1, 0\le n<3\\ 4, 3\le n<5\\ 9-n, 5\le n\le 8\end{cases}$$

$$y[n]=\{1,2,3,4,4,4,3,2,1\}$$

$$y[n]=x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]x_2[((n-m))_N]R_N(n)$$

$$=\sum_{m=0}^{5}x_1[m]x_2[((n-m))_6]R_6(n)$$

$$y[n]=\{4,4,4,4,4,4\}$$

1.已知某系统的频率响应为$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,0\le|\omega|<0.3\pi\\0,0.3\pi\le|\omega|\le\pi\end{cases}$，系统输入信号为

$x[n]=2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right)+3\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+5\cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$，试确定系统输出$y[n]$。

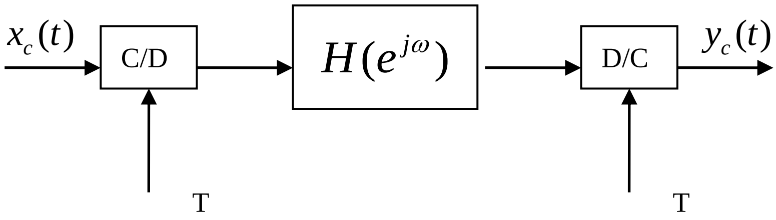
2.设一线性时不变系统的频率响应为$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{j\pi},0<|\omega|<\frac{7\pi}{10}\\0,otherwise\end{cases}$，

若系统输入是$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{5}n}+\frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{5}n}+\frac{1}{4}e^{j\frac{4\pi}{5}n}$，试问输出$y[n]=?$

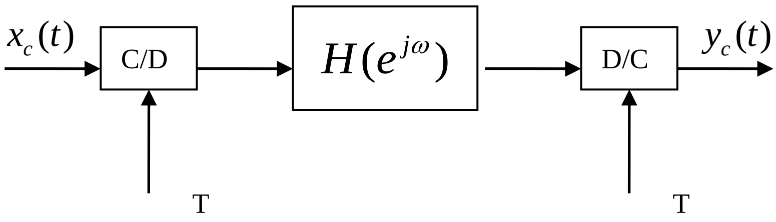
3.设一线性时不变系统的频率响应为$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,\frac{\pi}{10}\le|\omega|\le\frac{7\pi}{10}\\0,otherwise\end{cases}$，

若系统输入是$x[n]=0.8e^{j\frac{2\pi}{5}n}+0.3e^{j\frac{4\pi}{5}n}-0.9e^{-j\frac{2\pi}{5}n}+0.5$，试问输出$y[n]=?$

4.如下系统，已知输入的模拟信号是频率为250Hz，450Hz，1kHz，2.75kHz，4.05kHz的正弦信号的组合，$f_s=\frac{1}{T}=1.5kHz$，$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,|\omega|\le0.5\pi\\0,0.5\pi<|\omega|\le\pi\end{cases}$，输出信号也是正弦信号的组合。试问输出有哪些频率的正弦信号存在？



5.如下图所示系统



其中： $x_c\left(t\right)=2\cos\left(2\pi t\right)+3\cos\left(\frac{13}{3}\pi t\right)+4\cos\left(\frac{31}{5}\pi t\right)$

$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,0\le|\omega|\le\frac{\pi}{4}\\0,\frac{\pi}{4}<|\omega|\le\pi\end{cases}$ ， $T=0.5s$ 求输出 $y_c(t)$。

解： $x_c\left(t\right)=2\cos\left(2\pi t\right)+3\cos\left(\frac{13}{3}\pi t\right)+4\cos\left(\frac{31}{5}\pi t\right)$

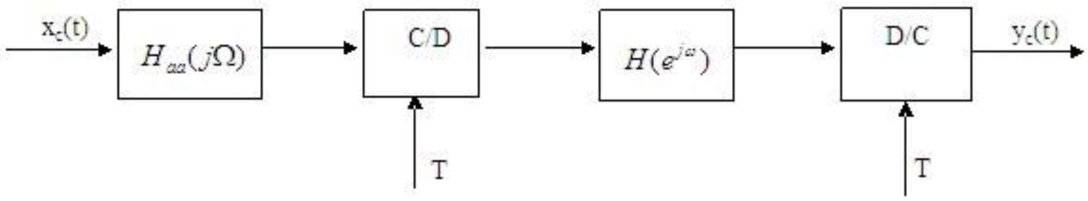
$$X_c\left(j\Omega\right)=\pi\left[2\delta\left(\Omega-2\pi\right)+2\delta\left(\Omega+2\pi\right)+3\delta\left(\Omega-\frac{13}{3}\pi\right)+3\delta\left(\Omega+\frac{13}{3}\pi\right)+4\delta\left(\Omega-\frac{13}{5}\pi\right)+4\delta\left(\Omega+\frac{13}{5}\pi\right)\right]$$

$$T=0.5s,\omega_s=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T}=4\pi$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{3\pi}{T}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

所以 $y_c(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

6.对如下一系统



其中 $f_s=\frac{1}{T}=20$， $H_{aa}\left(j\Omega\right)=\begin{cases}1,|\Omega|<20\times2\pi\\0,otherwise\end{cases}$， $H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1,|\omega|<\frac{1.9}{2}\pi\\0,\frac{1.9}{2}\pi\le|\omega|\le\pi\end{cases}$

假设输入的模拟信号 $x_c\left(t\right)=7\sin\left(45\pi t\right)+5\sin\left(35\pi t\right)+2\sin\left(25\pi t\right)+7\sin\left(15\pi t\right)$

试求输出 $y_c\left(t\right)=?$

7.考虑一 LTI 系统，其频率响应为 $H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-j,0<\omega<\pi\\j,-\pi<\omega<0\end{cases}$，若输入为 $x\left[n\right]=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$，

对全部的 n。求对全部 n 的输出 $y\left[n\right]$。

解：输入信号 $x[n]$ 相应的频域表达式为： $X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

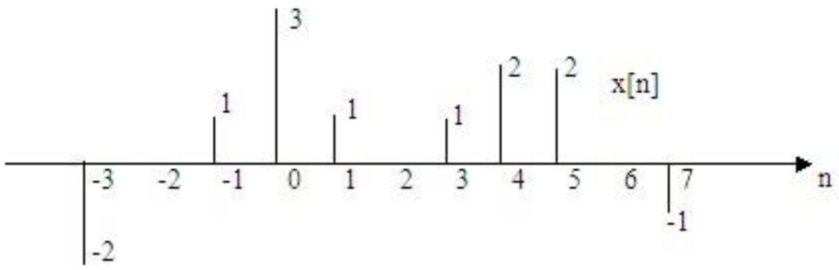
时域卷积对应于频域的相乘：$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{j}{2}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

进行 IDTFT 变换，得到输出的表达式：$y[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

DTFT

1.若 $X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{j\omega}}$，$-1<a<0$，试画出（a）$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$；（b）□ $X\left(e^{j\omega}\right)$。

2.已知 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 是 $x[n]$ 的 DTFT，不需明确求出 $X\left(e^{j\omega}\right)$。



则（1） $X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=0}=?$（2）$\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=?$（3）求出 Fourier 变换为 $\mathrm{Re}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ 的信号。

z 变换

1.试求出 $x[n]=\frac{1}{2}\left(n^2+n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1]$ 的 z 变换。

2.求序列 $x_a[n]=a^{|n|}$，$0<|a|<1$ 的 z 变换及其收敛域，并画出零极点图。（以闭式表示）

解：根据 z 变换公式：

$$X_a(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{1}^{\infty}(az)^n+\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$|a|<1$，$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$。

3.已知序列$x[n]$的 Fourier 变换存在，且它的 z 变换为$X(z)=\dfrac{3}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}}$，确定$x[n]$。

4.已知$X(z)$为$x[n]=(0.4)^n u[n]$的 z 变换。

确定（1）$X(z^2)$的 z 反变换；（2）$(1-z^{-1})X(z^2)$的 z 反变换。

5.求 z 变换的反变换$X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$，$|z|>\dfrac{1}{2}$。

解：$|z|>\dfrac{1}{2}$，显然该系统为因果系统：

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

所以有：$x[n]=\left[-3\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n+4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]\cdot u[n]$

6.一因果 LTI 系统有冲激响应$h[n]$，其 z 变换是$H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}$

（1）$H(z)$的收敛域？系统稳定吗？为什么？

（2）求系统冲激响应$h[n]$。

（3）画出该系统直接 II 型结构框图。

（4）假设某输入$x[n]$输出为$y[n]=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n u[n]-\dfrac{4}{3}\cdot 2^{n-1}u[n-1]$，试给出$x[n]$的 z 变换$X(z)$。

7.在地震信号的测量中，接收信号$y[n]$包含原始信号$x[n]$和两个回波信号：

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$$

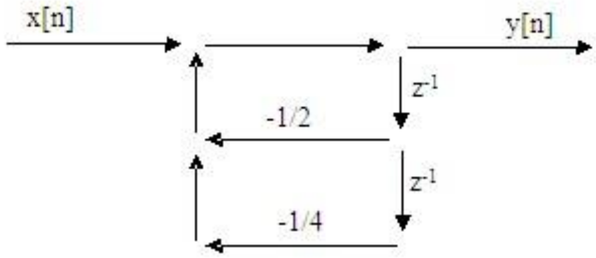
求一能从$y[n]$恢复$x[n]$的可实现的系统函数，并给出直接 II 型的实现结构图。

解：$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

$Y(z)=X(z)+\frac{1}{2}z^{-1}X(z)+\frac{1}{4}z^{-2}X(z)=(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})X(z)$

所以$H(z)=\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1}{(1+\frac{1+\sqrt{3}j}{4}z^{-1})(1+\frac{1-\sqrt{3}j}{4}z^{-1})}$

$H(z)$的极点在单位圆内，所以系统稳定，即此系统是可实现的。



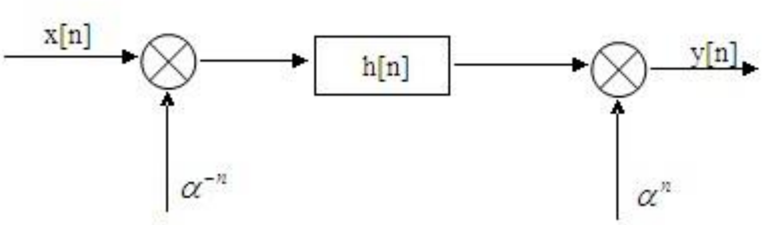
8.一离散 LTI 系统，它的输入$x[n]$和输出$y[n]$满足如下差分方程：

$$y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

该系统是否稳定，是否因果没有限制。试求系统单位冲激响应的可能选择方案。并指出每种方案对应的系统稳定性和因果性。

9.一如下差分方程描述的 LTI 系统$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=x[n]-x[n-1]$，求该系统单位冲激响应$h[0]$的所有可能值。

10.一离散时间系统如图所示



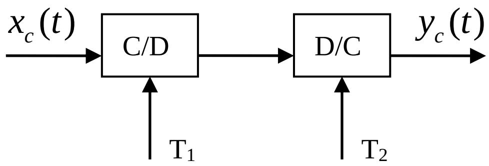
其中$h[n]$所代表的系统为 LTI 系统，$H(z)$的收敛域形式为$0<r_{\min}<|z|<r_{\max}<\infty$

（1）给出使$h[n]$所代表的系统 BIBO 稳定的$r_{\min}$，$r_{\max}$限制条件；

（2）整个系统是 LTI 的吗？若是，给出其单位冲激响应$g(n)$；若不是，为什么？

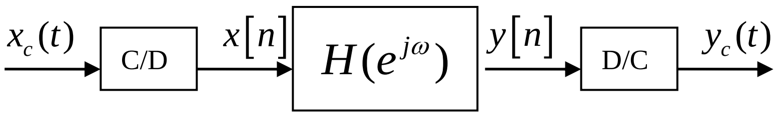
（3）整个系统可以是 BIBO 稳定的么？若是，给出其限制条件；若不是，为什么？

下图中，当$\Omega \geq \frac{\pi}{T}$时，$X_c\left(j\Omega\right)=0$。对于一般情况下，$T_1=T_2$，且$T_1<T$。



试用$x_c\left(t\right)$来表示$y_c\left(t\right)$。

下图表示一利用离散时间系统处理连续信号的整个系统，其中离散时间是一个理想低通滤波器，截止频率为$\frac{\pi}{8}rad/s$。

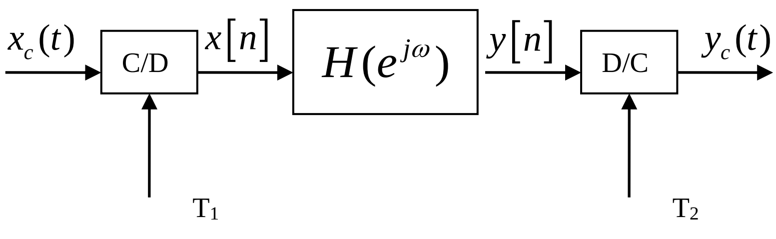


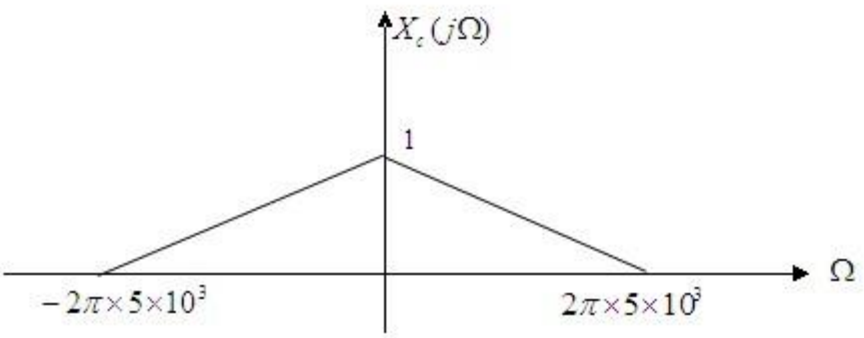
（1）若$x\left(t\right)$带限到 5kHz，为了避免在 C/D 变换器中发生混叠，最大采样周期 T 选多少？

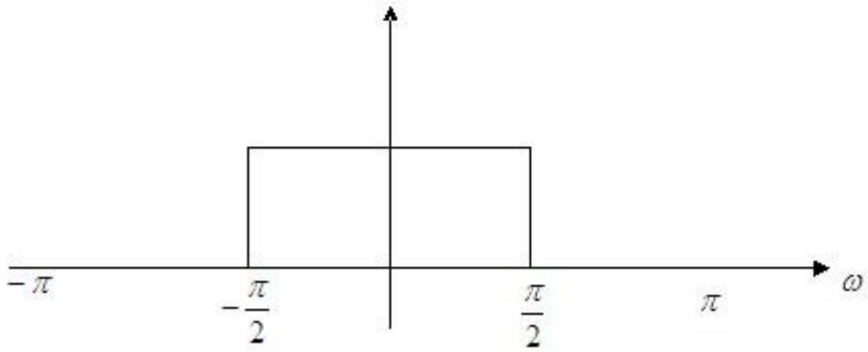
（2）若$\frac{1}{T}=10kHz$，等效连续时间系统的截止频率是多少？

下图系统中$X_c\left(j\Omega\right)$和$H\left(e^{j\omega}\right)$如图所示，对下列两种情况，分别画出$X\left(e^{j\omega}\right)$，$Y\left(e^{j\omega}\right)$，$Y_c\left(j\Omega\right)$

（1）$\frac{1}{T_1}=2\times10^4$，$\frac{1}{T_2}=10^4$（2）$\frac{1}{T_1}=10^4$，$\frac{1}{T_2}=2\times10^4$







一具有实冲激响应的 3 阶 FIR 滤波器（单位冲激响应长度为 4）的频率响应为$H\left(e^{j\omega}\right)$，已知$H\left(e^{j0}\right)=2$，$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=7-j3$和$H\left(e^{j\pi}\right)=0$，试确定$H(z)$。

线性相位系统

某时刻宽为$M+1$的 FIR 系统的单位冲激响应具有如下特性：$h[n]=h[M-n]$，$0\le n\le M$，（M 为偶数）

（1）画出其直接的实现结构；

（2）试证该系统的频率响应为$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega M/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2}a[k]\cos\omega k\right)$。

其中$a[0]=h[M/2]$，$a[k]=2h\left[(M/2)-k\right]$，$k=1,2,\cdots,M/2$

滤波器设计：

1.FIR 滤波器设计的频率抽样方法是：给定理想滤波器的频谱特性$H\left(e^{j\omega}\right)$，对其抽样可得

$H\left[k\right]=H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}}$，$k=0,1,\cdots,N-1$。对$H\left[k\right]$做 IDFT 得到$h\left(n\right)$作为 FIR 滤波器的单位冲激响应。

（1）试求该 FIR 滤波器的系统函数$H\left(z\right)$；

（2）试画出该滤波器的实现结构图。（参数可以用复数）

2.一离散时间系统的系统函数为：$H\left(z\right)=\frac{2}{1-e^{-0.2}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-0.4}z^{-1}}$

（1）假设是由冲激响应不变法取$T_d=2$设计得到，试求设计可能的参考模拟滤波器的系统函数$H_c\left(s\right)$。

（2）假设是由双线性变换法取$T_d=2$设计得到，试求设计可能的参考模拟滤波器的系统函数$H_c\left(s\right)$。

解：$H\left(z\right)=\frac{2}{1-e^{-0.2}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-0.4}z^{-1}}=2\left(\frac{1}{1-e^{-0.2}z^{-1}}-\frac{0.5}{1-e^{-0.4}z^{-1}}\right)$

（1）冲激响应不变法：$\left|z\right|>e^{-0.2}$

$$h\left[n\right]=2\left[e^{-0.2n}u\left[n\right]-\frac{1}{2}e^{-0.4n}u\left[n\right]\right]=2\left[e^{-0.1\times2n}-\frac{1}{2}e^{-0.2\times2n}\right]u\left[2n\right]$$

所以$h_a\left(nT_d\right)=\left[e^{-0.1\times nT_d}-\frac{1}{2}e^{-0.2\times nT_d}\right]u\left(nT_d\right)$

所以$h_a(t)=\left[e^{-0.1t}-\frac{1}{2}e^{-0.2t}\right]u\left(t\right)$

所以：$H_a\left(s\right)=\frac{1}{s+1}-\frac{0.5}{s+0.2}$，$h\left(n\right)=T_dh_c\left(nT_d\right)$

或$H_a\left(s\right)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+0.2}$，$h\left(n\right)=h_c\left(nT_d\right)$

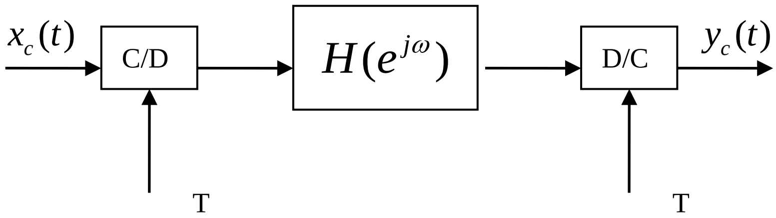
（2）双线性变换法：$H\left(z\right)=H_a\left(s\right)\Big|_{s=c\frac{1-z}{1+z}}$

因为$c=1$，所以$H\left(z\right)=H_a\left(s\right)\Big|_{s=\frac{1-z}{1+z}}$

所以$H_a(s)=H(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}=\dfrac{2}{1-e^{-0.2}\dfrac{1+s}{1-s}}-\dfrac{1}{1-e^{-0.4}\dfrac{1+s}{1-s}}$

$$=\frac{2(1+s)}{(1-e^{-0.2})+(1+e^{-0.2})s}-\frac{2(1+s)}{(1-e^{-0.4})+(1+e^{-0.4})s}$$

3.对如下一系统



$H(e^{j\omega})$要求为一个 I 类广义线性相位数字低通滤波器，性能指标为：$\omega_p=0.3\pi$，$\omega_s=0.4\pi$，通带误差$\delta_1=0.0001$，阻带误差$\delta_2=0.0005$，用 Kaiser 窗法设计滤波器。

（1）写出使用 Kaiser 窗法设计的理想单位冲击响应$h_d[n]$及所设计的该滤波器的$h[n]$。

（2）该滤波器的群延迟是多少？

（3）若图中系统采样周期是$T=1ms$，试给出该系统等效模拟滤波器的实际性能指标。

（4）输入分别为$\cos(100\pi t)$，$\cos(200\pi t)$，$\cos(400\pi t)$，$\cos(800\pi t)$，$\cos(1000\pi t)$，哪些信号可以通过该等效模拟滤波器？哪些会被滤掉？哪些会处在过渡带内？

注：Kaiser 窗

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0\left[\beta\left(1-\left[(n-\alpha)/\alpha\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)}, 0\le n\le M\\ 0, otherwise\end{cases}$$

式中，$I_0(\cdot)$为零阶修正 Bessel 函数，$\alpha=\dfrac{M}{2}$，

$$A=-20\log_{10}\delta$$

$$\beta=\begin{cases}0.1102(A-8.7), A>50\\ 0.5842(A-21)^{0.4}+0.07886(A-21), 21\le A\le 50\\ 0.0, A<21\end{cases}$$

$$M=\frac{A-8}{2.285\Delta\omega}$$

DFT 与 FFT

1.一个稳定的线性时不变系统可用下面的差分方程描述：

$$y[n]=\sum_{k=1}^{p}a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{r}b_k x[n-k]$$

试指出如何用 N 点 DFT 和简单的算术运算来确定系统频率响应$H\left(e^{j\omega}\right)$在单位圆的均分点上的（即$\omega_k=\frac{2\pi k}{N}$，$k=0,1,\cdots,N-1$）的 N 个取样。（假定$p,r<N$）

2.对 N 点序列$x[n]$作 N 点 DFT，$X[k]=DFT\{x[n]\}$。对于每一个 k，$X[k]$可以看成$x[n]$通过一单位冲激响应$h_k[n]$的 FIR 滤波器在 N 时刻的输出。

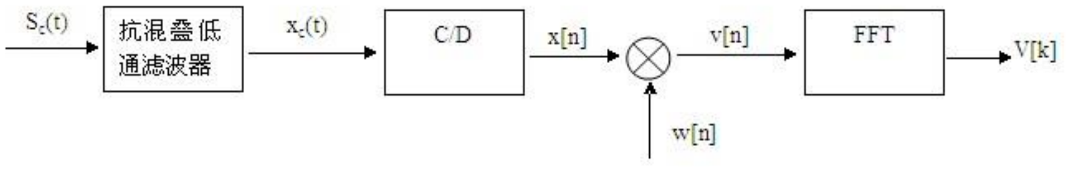
（1）试问$h_k[n]=?$

（2）试问该滤波器的频率响应$H_k\left(e^{j\omega}\right)=?$

（3）当$k=0$时，该滤波器是高通、带通还是低通？

3.已知一长度为 627 的有限长复序列$x[n]$（即$n<0$和$n>626$时，$x[n]=0$）且有一计算$N=2^r$的序列之 DFT 的 FFT 程序可以使用。我们想计算$X\left(e^{j\omega}\right)$在$\omega_k=\frac{2\pi}{627}+\frac{2\pi}{256}k$，$k=0,1,\cdots,255$的值，说明如何由$x[n]$得出一个新序列$y[n]$，使得可以将所提供的 FFT 程序用于$y[n]$，在 r 尽可能小的情况下得到$X\left(e^{j\omega}\right)$。

4.用一基-2 FFT 处理器来估算信号最高频率$\le 1.25kHz$实模拟信号的频谱的基本过程如下图所示：



其中$w[n]$是窗函数，我们要求频率分辨率$\le 5Hz$，分别对于矩形窗、Hamming 窗和 Blackman 窗的情况确定：

（1）理想抗混叠滤波器的频率特性$H_{aa}(j\Omega)=?$

（2）采样频率$f_s=?$

（3）采样点数 $N=?$

（注：矩形窗、Hamming 窗和 Blackman 窗的主瓣分别是 $\dfrac{4\pi}{N}$，$\dfrac{8\pi}{N}$ 和 $\dfrac{12\pi}{N}$）

5.以 $T=0.01s$ 对 $x_c(t)=A\cos\left(\Omega_0 t\right)$ 采样，采样满足采样定理，得到 $x\left[n\right]=x_c(nT)$，$n=0,1,\cdots,63$。对其作 64 点 DFT，有 $\left|X\left(3\right)\right|=\left|X\left(61\right)\right|=5$，其它 $\left|X\left(k\right)\right|=0$。

试确定 A 和 Ω_0。

解：根据Ω和 k 的关系，$\omega=\Omega T=\dfrac{2\pi}{N}k\Rightarrow\Omega=\dfrac{2\pi k}{NT}$

因为 DFT 的中点对称性，对于 64 点的 DFT，仅仅前 32 点就能反映出整个信号的特征，所以根据已知条件可得：

$\Omega=\dfrac{2\pi k}{NT}=\dfrac{2\pi\cdot 3}{64\cdot 0.01}=\dfrac{75\pi}{8}$（$9.375\pi$、29.452 也正确）

根据 DFT 公式，$X\left(k\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x\left[n\right]W_N^{nk}$

$$X\left(3\right)=\sum_{n=0}^{63}x\left[n\right]W_{64}^{3n}=\sum_{n=0}^{63}A\cos\left(\Omega nT\right)e^{-j2\pi\cdot 3n/64}$$

$$=\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{63}\left(e^{j\Omega nT}+e^{-j\Omega nT}\right)e^{-j6\pi n/64}$$

$$=\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{63}\left(1+e^{-j3\pi/16}\right)$$

$$=\frac{A}{2}\cdot 64=5$$

（$\Omega nT=\dfrac{75\pi}{8*100}=\dfrac{3\pi n}{32}$，$\dfrac{2\pi*3n}{64}=\dfrac{3\pi n}{32}$）

所以有：$A=\dfrac{5}{32}$

所以 $A=\dfrac{5}{32}$，$\Omega=\dfrac{75\pi}{8}$　$x\left(t\right)=\dfrac{5}{32}\cos\left(\dfrac{75\pi}{8}t\right)$

6.一时间连续的实信号 $x_c\left(t\right)$ 带宽限制在 5kHz 以下（即对于 $\left|\Omega\right|>2\pi\left(5000\right)$，$X_c\left(j\Omega\right)=0$）以每秒 10000 个样本的采样率对信号 $x_c\left(t\right)$ 进行采样，得到一序列 $x\left[n\right]=x_c\left(nT\right)$，当 N=1024 个样本 $x\left[n\right]$ 时可以用基-2 FFT 来计算 1024 点 DFT $X\left[k\right]$。

（1）在 $X[k]$ 中，k=150 与什么连续频率相对应？

（2）在 $X[k]$ 中，k=800 与什么连续频率相对应？

（3）在基-2 FFT 运算中，蝶形运算总数目是多少？

证明题

1.证明：若 $x_1[n]$，$x_2[n]$ 是因果稳定的实序列，则有：

$$\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right) X_2\left(e^{j\omega}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right) d\omega \int_{-\pi}^{\pi} X_2\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

证：设 $X\left(e^{j\omega}\right) = X_1\left(e^{j\omega}\right) X_2\left(e^{j\omega}\right)$，$x[n] = \mathscr{F}^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

$x_1[n] = \mathscr{F}^{-1}\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}$，$x_2[n] = \mathscr{F}^{-1}\left\{X_2\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

$$\therefore x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n-m]$$

因为 $x_1[n]$，$x_2[n]$ 是因果稳定的实序列

所以 $n<0, x_1[n] = x_2[n] = 0$

所以 $x[n] = \sum_{m=0}^{n} x_1[m] x_2[n-m]$

$x[0] = x_1[m] x_2[-m]$

又因为 $n<0, x_2[n] = 0$

所以 $x[0] = x_1[0] x_2[0]$

又因为 $x[0] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) d\omega$

所以 $\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) X_2\left(e^{j\omega}\right) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) d\omega = 2\pi x[0]$

而 $x_1[0] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right) d\omega$，$x_2[0] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2\left(e^{j\omega}\right) d\omega$

所以 $2\pi x[0] = 2\pi x_1[n] x_2[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right) d\omega \int_{-\pi}^{\pi} X_2\left(e^{j\omega}\right) d\omega$

2.设 $y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n]$，证明：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n]\right)$。

3.试推导时域抽取基-2 FFT 算法，并画出 8 点的 FFT 计算流图。

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_{N/2}^{rk}$$

$$=G[k]+W_N^kH[k]$$

其中 $\begin{cases} G[k]=\sum\limits_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_{N/2}^{rk} \\ H[k]=\sum\limits_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_{N/2}^{rk} \end{cases}$

$G[k]$ 和 $H[k]$ 分别是 $x[2r]$ 和 $x[2r+1]$ 的 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT，周期为 $\frac{N}{2}$ 。

所以：$G\left[\frac{N}{2}+k\right]=G[k]$，$H\left[\frac{N}{2}+k\right]=H[k]$

又因为：$W_N^{(N/2+k)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+k\right)}=-W_N^k$

$$X\left[k+\frac{N}{2}\right]=G\left[k+\frac{N}{2}\right]+W_N^{k+\frac{N}{2}}H\left[k+\frac{N}{2}\right]=G[k]-W_N^kH[k]$$

所以 $\begin{cases} X[k]=G[k]+W_N^kH[k] \\ X\left[k+\frac{N}{2}\right]=G\left[k+\frac{N}{2}\right]-W_N^kH\left[k+\frac{N}{2}\right] \end{cases}$，$k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

8 点的 FFT 计算流图见教材