

Some

Author: Pannenets.F

Date: December 27, 2020

Je reviendrai et je serai des millions. «Spartacus»

Chapter 1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

绪论

Contents

- 1、课程教材
- 2、学习方法
- 3、考核方式
- 4、教辅答疑

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



本节内容



一

数字信号理背景知识



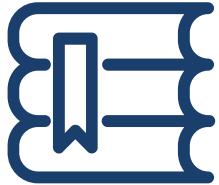
二

课程内容及脉络



三

数字处理应用实例



■课程教材

- 《离散时间信号处理》 奥本海姆
- 《数字信号处理教程》 程佩清

课程教材

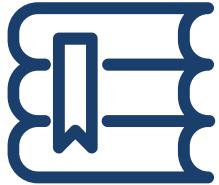
学习方法

考核方式

教辅答疑

■学习方法

- 数学抽象转化为物理概念
- 从工程角度思考理论问题



■考核方式

■过程考核: 20-30%

■期末考试: 70-80%

■教辅答疑

■教辅: 李铮、王艳萍

■地点: 新主楼F518

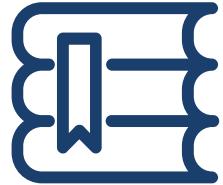
课程教材

学习方法

考核方式

教辅答疑

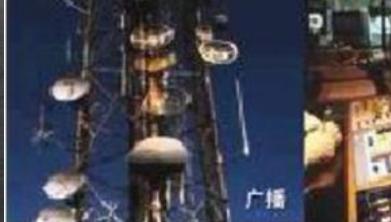
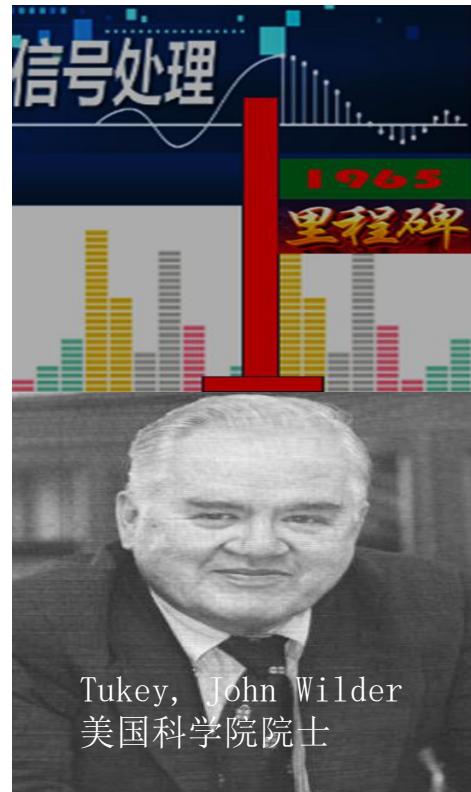
数字处理应用？？？



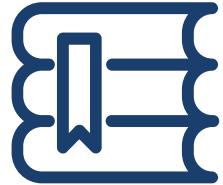
背景知识

课程内容

应用示例



关于信号



- 信号定义及作用?
 - 探测、揭示、控制
- 信号的分类?
 - 四大类
 - 两大类
 - 课程名称和教材名称? ? ?
- 信号处理的核心?
 - 表示、运算、变换
 - 滤波、压缩、特征提取



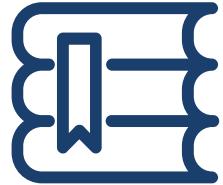
<http://forum.book.sina.com.cn/>

背景知识

课程内容

应用示例

数字处理的优点



- 精度极高
- 灵活性好
- 可靠性强
- 容易集成
- 时分复用
- 多维处理



背景知识

课程内容

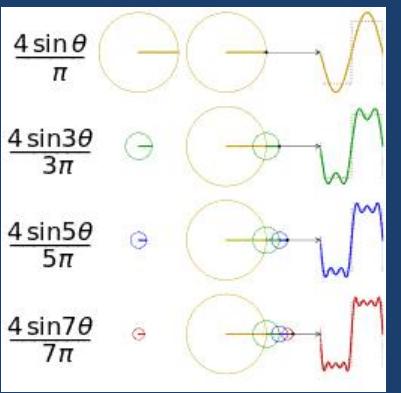
应用示例



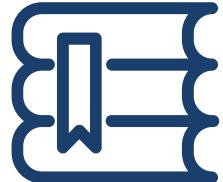
背景知识

课程内容

应用示例

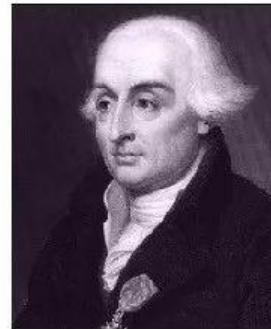


数字处理的发展

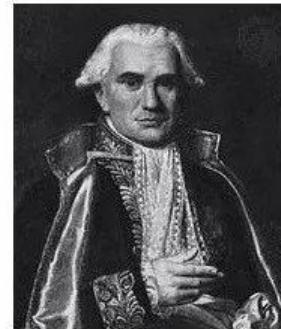


理论分析

- 牛顿 1643~1727
- 拉格朗日 1736~1813
- 拉普拉斯 1749~1827
- 傅里叶 1768~1830



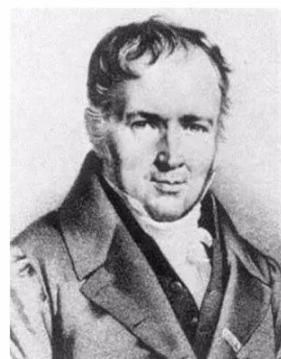
拉格朗日（左）



蒙日（右）



拉普拉斯（左）

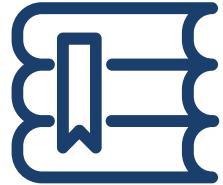


泊松（右）

工程实现（运算量）

- 库利-图基（计算数学）
- 桑德-图基

课 程 脉 络

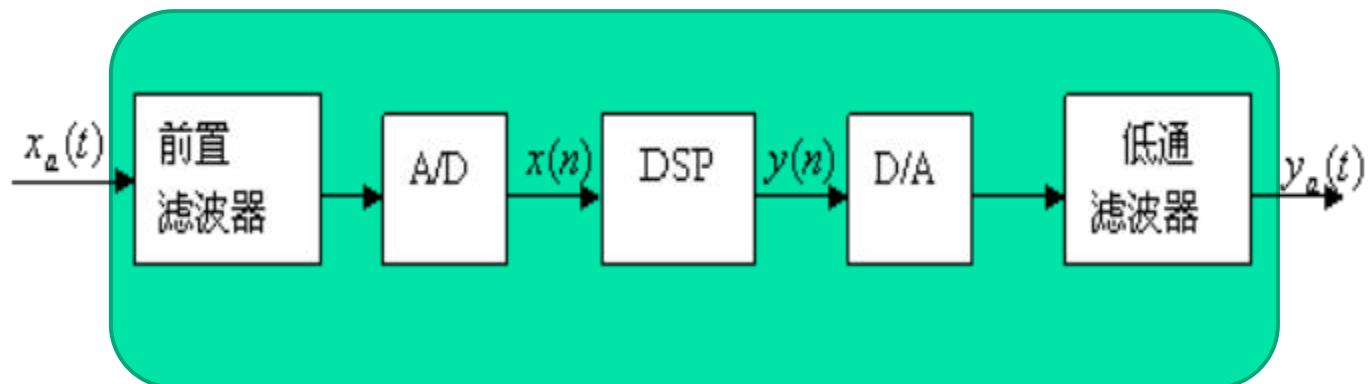


信号滤波, 谱分析

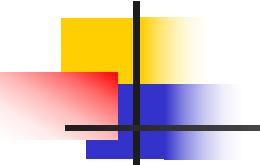
背景知识

课程内容

应用示例



工程用连续信号的离散处理结构



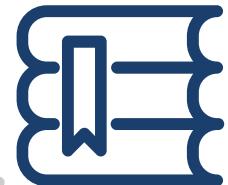
基础理论

- 第一章 离散信号与系统
 - 基本的离散时间序列
 - 离散时间系统概念、性质
 - 差分方程与离散时间系统
- 第二章 离散系统变换域分析
 - DTFT、Z变换
 - 系统行数和频率响应
 - LTI系统幅相特性分析
- 第三章 连续信号的离散处理
 - 信号采样和重构
 - 多率转换技术
 - 实际处理中需要注意的问题

工程设计

- 第四章 离散傅立叶变换及快速算法
 - 离散傅立叶变换
 - 快速算法 (FFT)
 - DFT用于系统实现及信号分析
- 第五章 数字滤波器设计
 - 系统结构
 - IIR数字滤波器设计 (时域和频域)
 - FIR数字滤波器设计 (时域和频域)

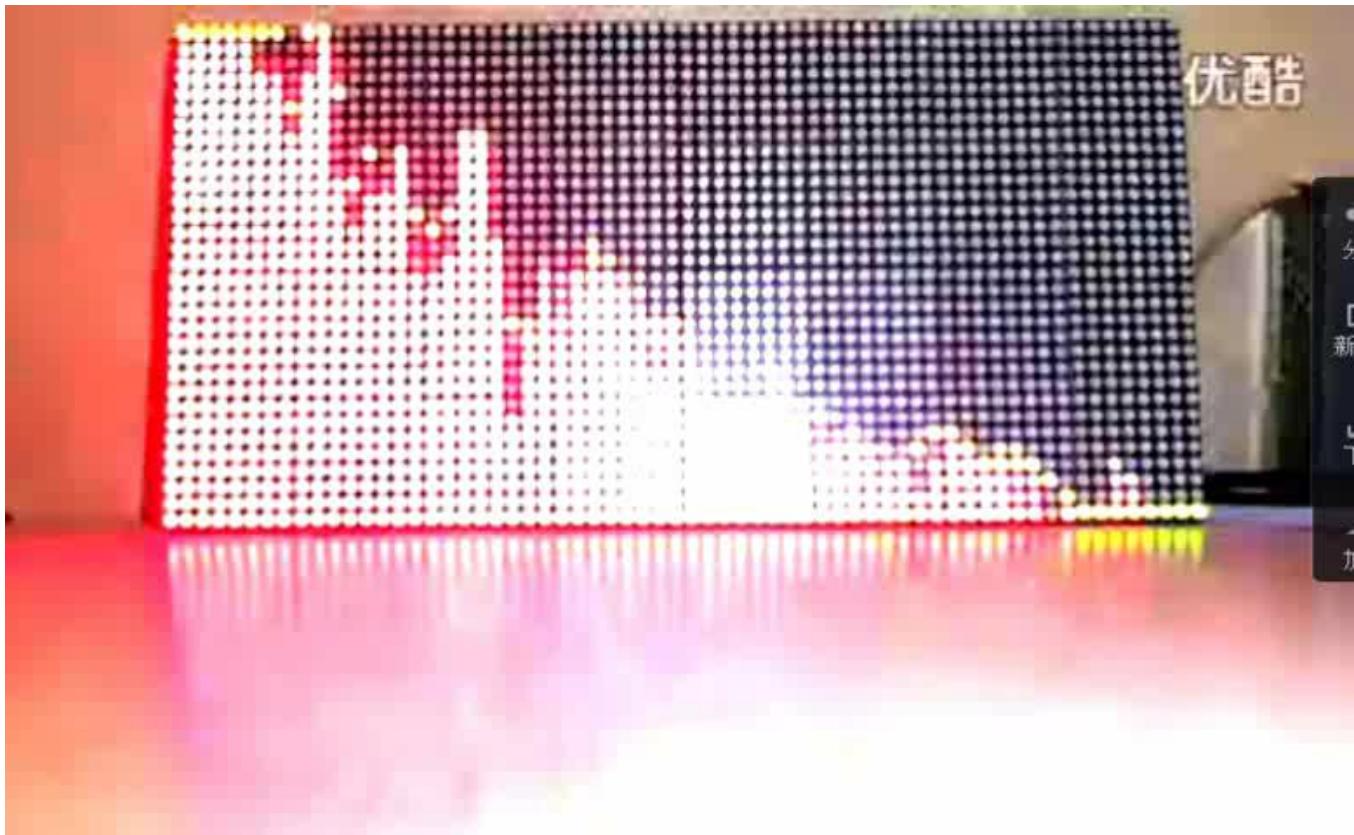
课 程 脉 络



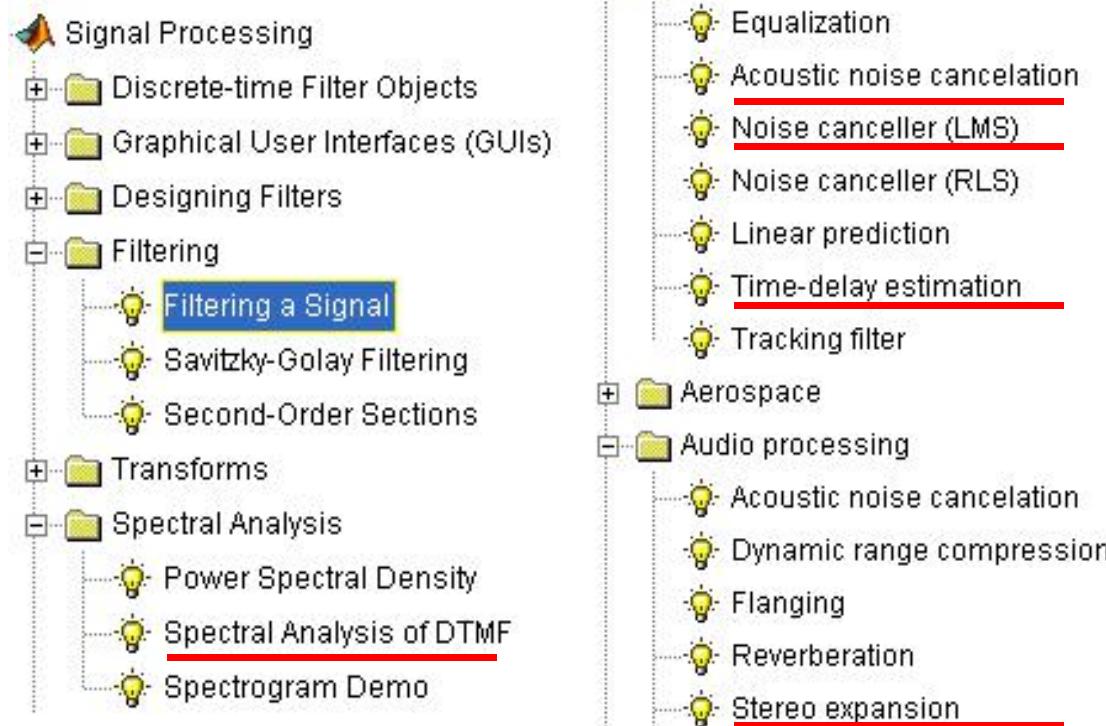
背景知识

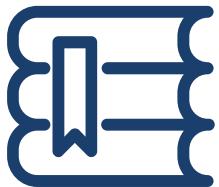
课程内容

应用示例

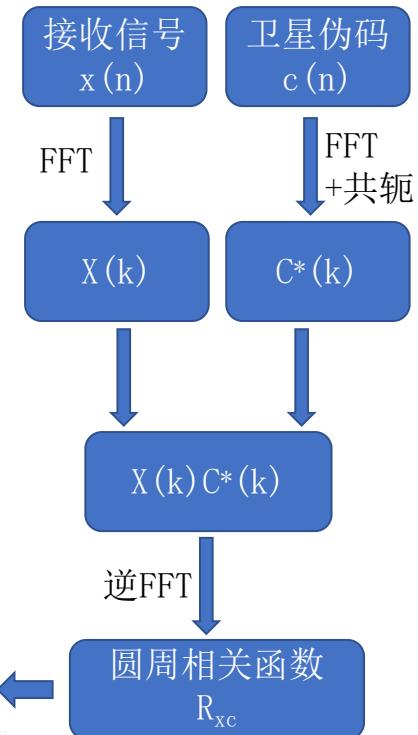
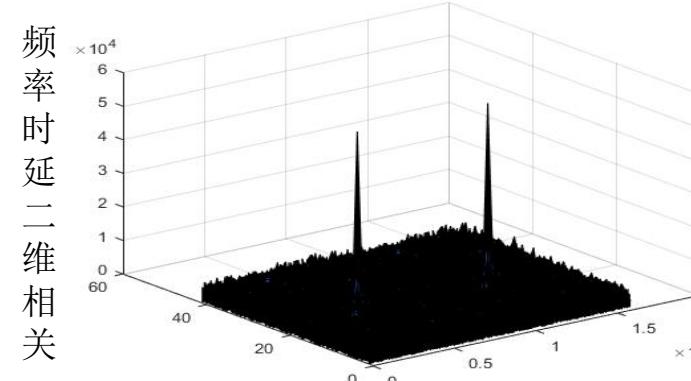
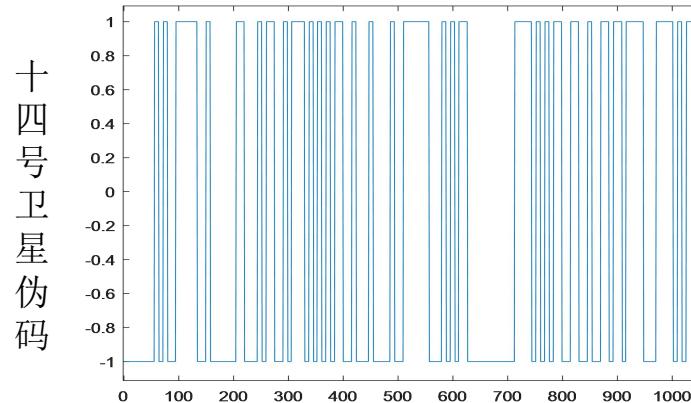
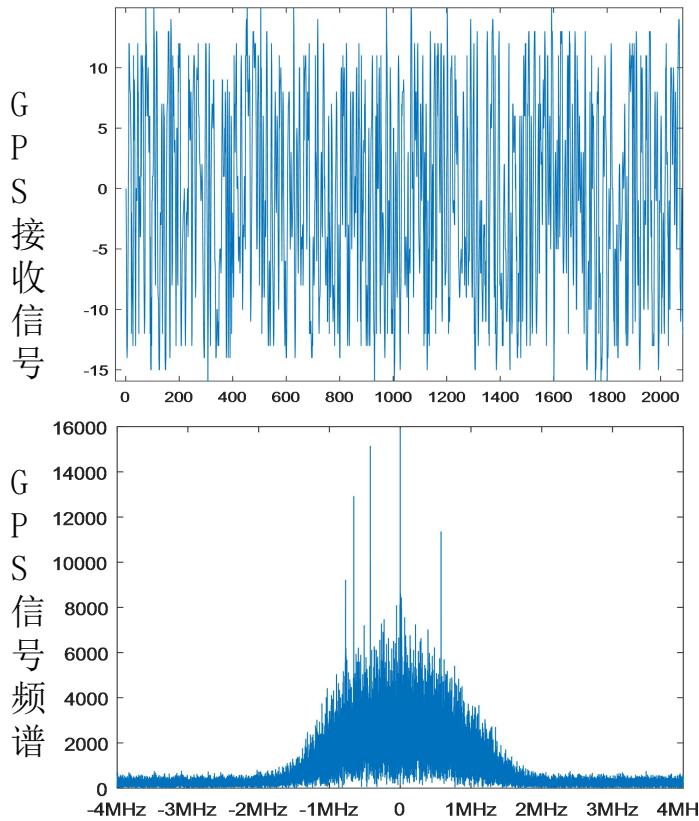


示例





FFT 用于 GPS 卫星信号捕获





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email : mrsgl@buaa.edu.cn

北京航空航天大学 孙国良

Chapter 2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第一章

Contents

离散时间信号与系统

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间信号



二

离散时间系统



三

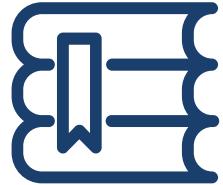
线性时不变系统



四

线性常系数差分方程

离散时间信号（序列）



- 定义？描述方式？
- 基本序列有哪些？
- 序列的运算形式？



离散时间信号

离散时间系统

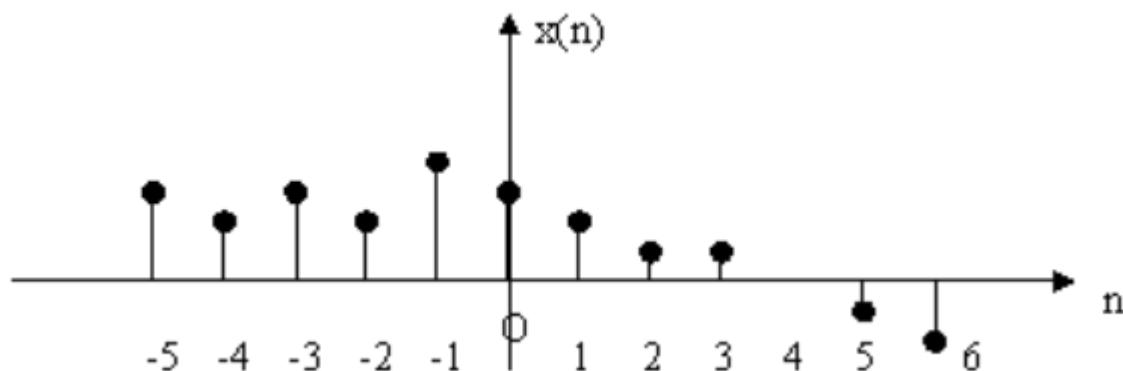
线性时不变系统

线性常系数差分方程

1.1.1 离散时间信号定义

- 仅在离散时刻点上有意义的信号或不连续瞬时刻给出函数值的函数
- 通常用集合来表示，记作：
 - $x=\{x(n)\} \leftarrow \{x_a(nT)\} \quad (-\infty < n < +\infty)$
 - 图形表达：

(i)



1.1.2 基本序列

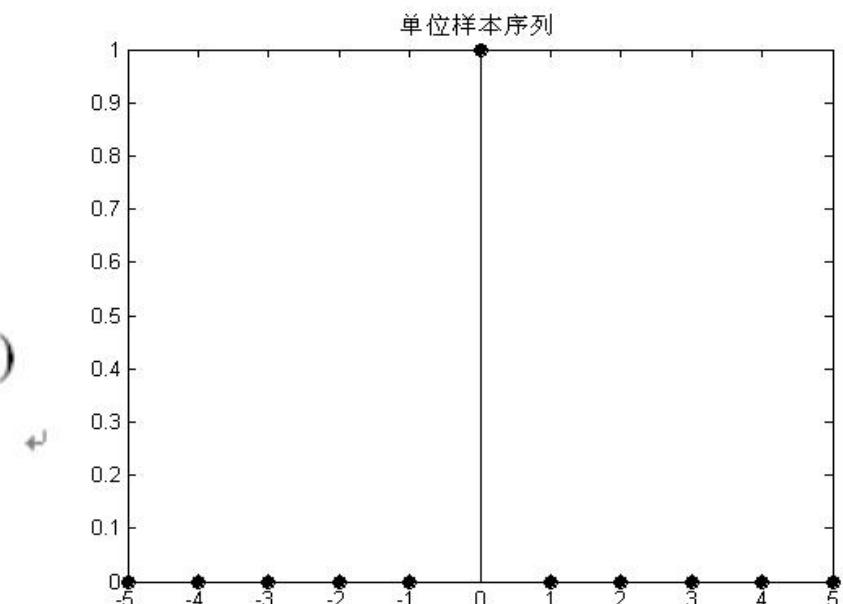
■ 1、单位冲激（抽样、样本）序列

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 0 & \cdots n \neq n_0 \\ 1 & \cdots n = n_0 \end{cases}$$

i

i

```
function[x,n]=impseq(n0,n1,n2)
n=[n1:n2];
x=[(n-n0)==0];
```



2、单位阶跃序列

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ 1 & n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)u(n - k) = \delta(n) * u(n)$$

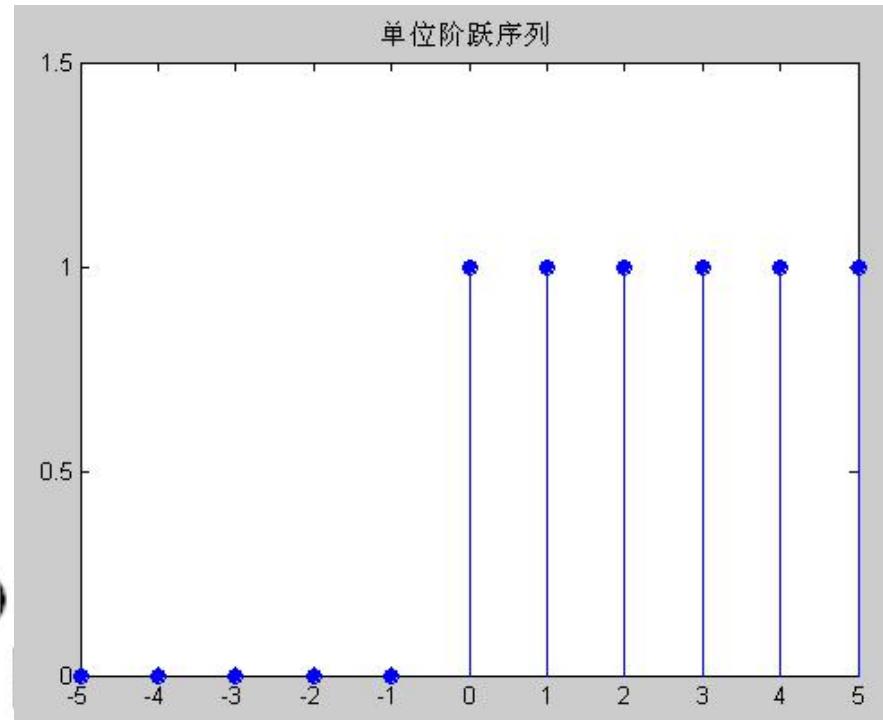
function[x,n] = stepseq(n₀,n₁,n₂)

n = [n1:n2];

x = [(n - n0) >= 0];

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



基本序列

■ 3、矩形窗序列

$$R_N(n) = G_N(n) = \begin{cases} 0 & \dots\text{其它} \\ 1 & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) = u(n) - u(n-N)$$

■ 4、正弦（三角）序列

$$x(n) = A \cos(\omega_0 * n + \theta_0)$$

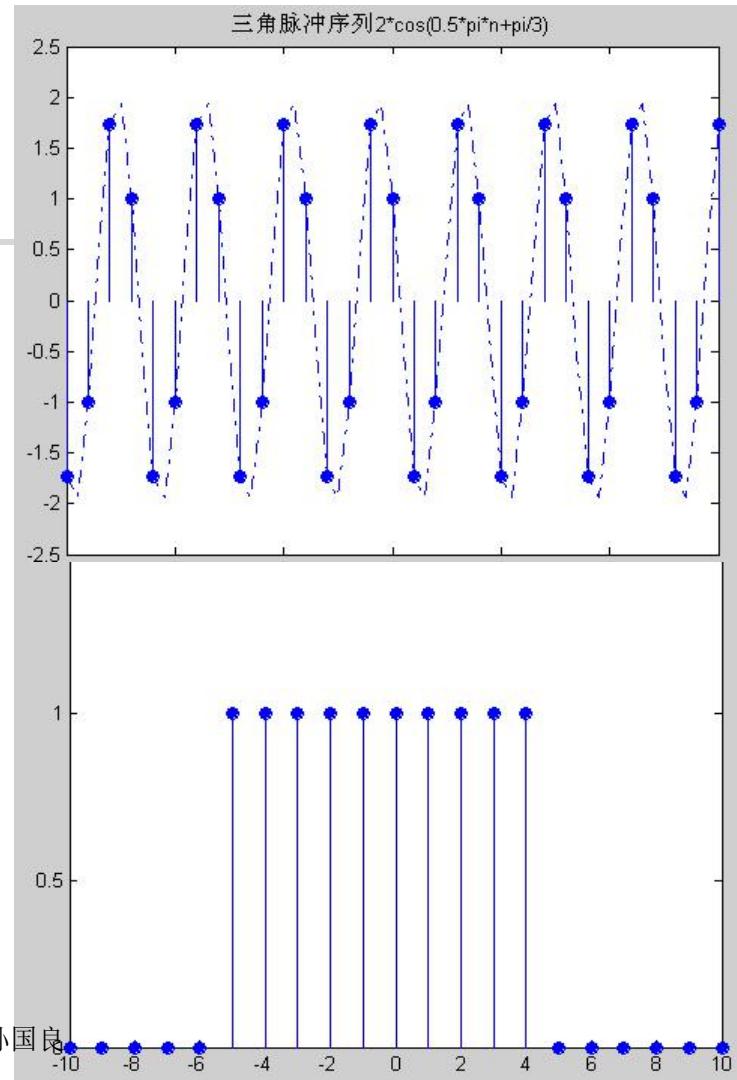
i

■ 5、指数序列

$$x(n) = A \alpha^n$$

■ 6、周期序列

$$x(n) = x(n+N)$$



关于三角序列的频率和周期

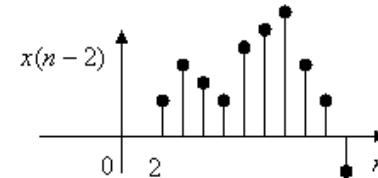
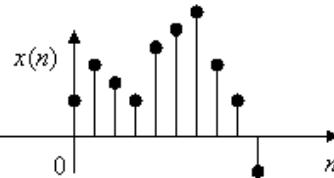
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为整数时,} & N = \frac{2\pi}{\omega_0}; \\ \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为有理数时,} & N > \frac{2\pi}{\omega_0}, N = \frac{2\pi}{\omega_0} * k = \frac{Q}{P} * k = Q \\ \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 为无理数时,} & N \text{ 不存在, 为非周期序列} \end{cases}$$

- 无论N是否存在, ω_0 皆称为序列的频率。

1.1.3 序列基本运算

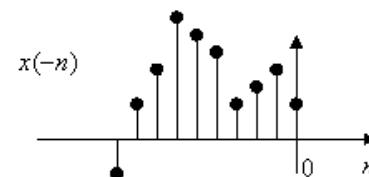
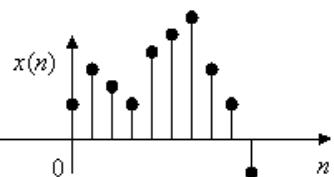
- 1、移位

$$y(n) = x(n - m)$$



- 2、翻褶

$$y(n) = x(-n)$$



- 3、和、差

$$y(n) = x_1(n) \pm x_2(n)$$

(i)

- 4、积、商

$$y(n) = x_1(n) \times \div x_2(n)$$

序列基本运算

- 5、累加 $S(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

- 6、差分

- 前向差分: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

- 后向差分: $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$



- 7、卷积和

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \cdot h(m)$$

例题

- 已知下面两个序列：

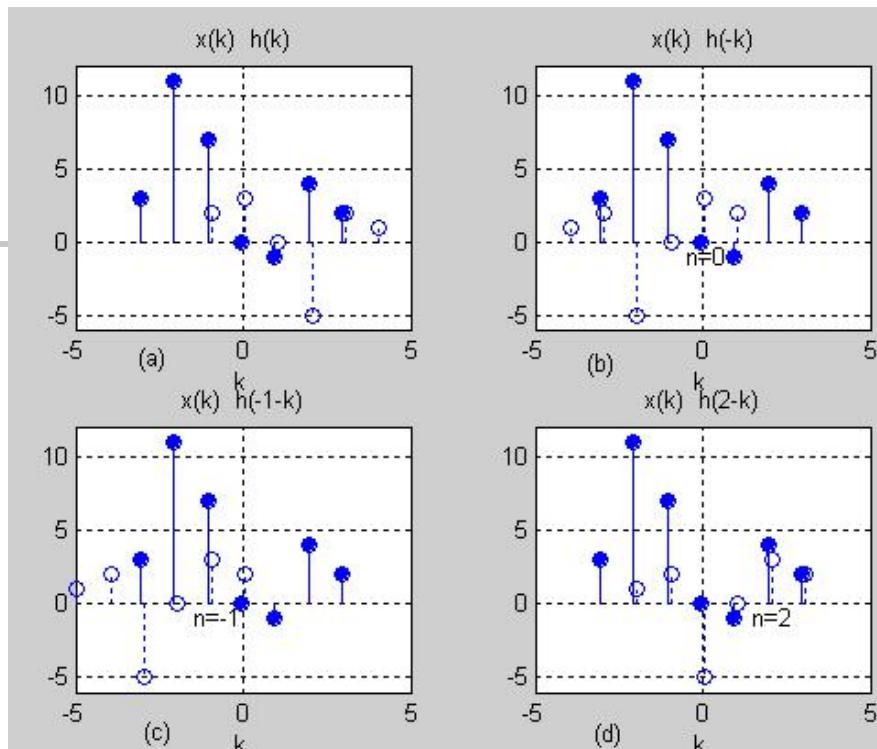
$$x(n) = [3, 11, 7, \underset{\uparrow}{0}, -1, 4, 2]; -3 \leq n \leq 3$$

$$h(n) = [2, \underset{\uparrow}{3}, 0, -5, 2, 1]; -1 \leq n \leq 4$$

- 试求卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

方法一、定义法

$$\begin{aligned} & \sum_k x(k)h(-1-k) \\ &= 3 \times (-5) + 11 \times 0 + 7 \times 3 + 0 \times 2 \\ &= 6 = y(-1) \end{aligned}$$



$$y(n) = \{6, 31, 47, 6, \underset{\uparrow}{-5}, 1, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\}$$

- 注意: $y(n)$ 的起始点（第一个非零样本）是由 $n=-3+(-1)=-4$ 给出的，而最后一点（最后一个非零样本）是由 $n=3+4=7$ 给出的。

$$x(n) = [3, 11, 7, \underset{\uparrow}{0}, -1, 4, 2]; -3 \leq n \leq 3$$

$$h(n) = [2, \underset{\uparrow}{3}, 0, -5, 2, 1]; -1 \leq n \leq 4$$

方法二：对位相乘求和法

x(n):	3	11	7	0	-1	4	2		h(n)			
	3	11	7	0	-1	4	2	1				
	6	22	14	0	-2	8	4	2				
	15	-55	-35	0	5	-20	-10	-5				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i			
9	33	21	0	-3	12	6		3				
6	22	14	0	-2	8	4		2				
y(n):	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2

$$y(n) = \{6, 31, 47, 6, -\underset{\uparrow}{51}, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\} \quad (\text{请思考 } n=0 \text{ 的定时信息如何确定?})$$

8、序列相关

- 相关是对两个序列相似程度的一种度量，在信号处理中应用广泛。
- 已知两个有限能量的实值序列 $x(n)$ 和 $y(n)$,其互相关是一个序列：

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(n - \tau) = x(n) * y(-n)$$

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x(n - \tau) = x(n) * x(-n)$$

例题

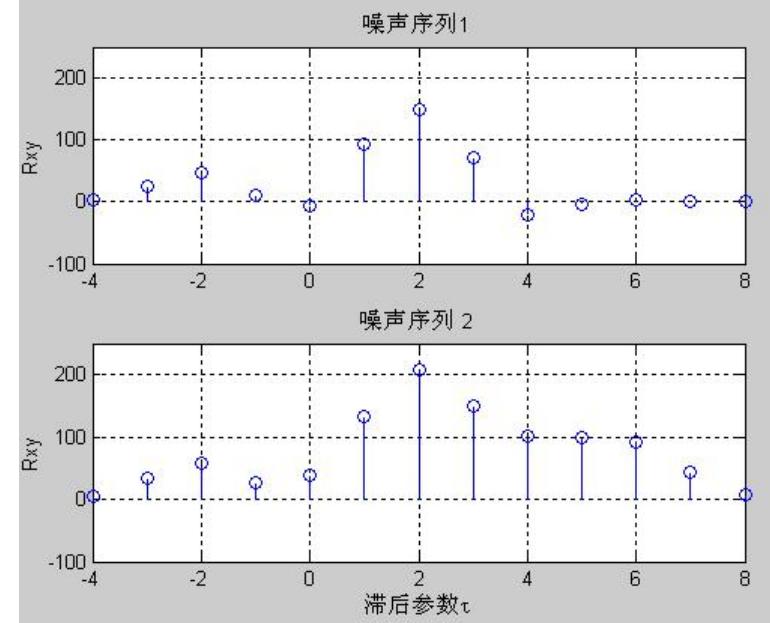
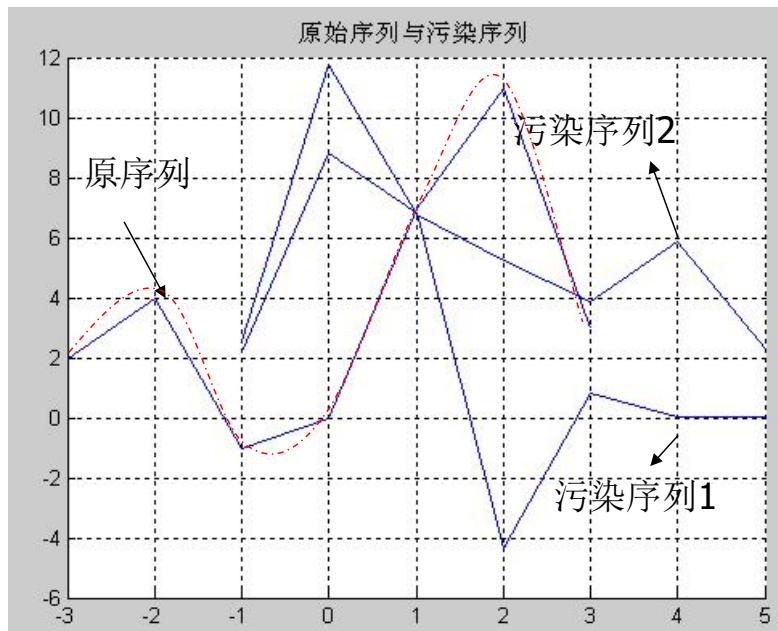
- 设 $x(n)$ 是原序列， $y(n)$ 是受到噪声污损并移位的序列：

$$x(n) = [3, 1 \underset{\uparrow}{1}, 7, 0, -1, 4, 2]$$

$$y(n) = x(n - 2) + w(n)$$

- $w(n)$ 是均值为0，方差为1的高斯随机序列。
- 计算 $y(n)$ 和 $x(n)$ 之间的互相关。

雷达信号中目标的识别与锁定



9、序列能量和功率

- 能量：

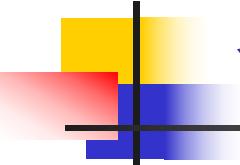
$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- 能量有限的信号称为能量信号

- 功率：

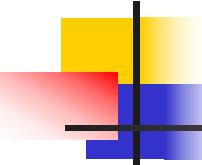
$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{-N}^{+N} |x(n)|^2$$

- 能量无限，但功率有限的信号称为功率信号



习题（第二版）

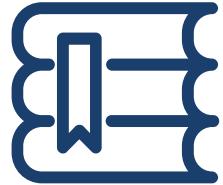
- 课后作业1:
- 2.1, 2.2, 2.3,
- 2.12, 2.21, 2.22, **2.55**



复习题

- 1、写出 $y(n)=x(n)*h(n)$ 卷积和数学表达
- 2、假设 $x(n)$ 区间是 (i, j) ， $h(n)$ 区间是 (p, q) ，给出 $y(n)$ 的区间；
- 3、假设 $x(n)=h(n)=u(n)-u(n-5)$ ，求 $y(n)$

离散时间系统



离散时间信号

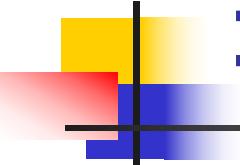
离散时间系统

线性时不变系统

线性常系数差分方程

- 系统定义?
- 描述方式?
- 基本系统有哪些?





1.2 离散时间系统

- 数学上，离散时间系统定义为一种**变换**或**算子**
 - 把输入序列按照**某种规则映射**为输出序列

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

- 注：**DFT**也可看作一种系统

1、无（有）记忆系统

- $y[n]$ 只决定于同时刻的输入 $x[n]$, 称为无记忆系统。
 - 如：纯阻性网络、组合电路等
- $y[n]$ 不仅与同时刻的输入 $x[n]$ 有关，而且与其他时刻输入序列值有关，则称该系统为有记忆系统。
 - 如容（感）抗网络，时序电路，差分/平均系统等。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n - k)$$

2、(非)线性系统

- 离散时间系统如果同时满足可加性和齐次性

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

$$T\{k * x(n)\} = k * T\{x(n)\}$$

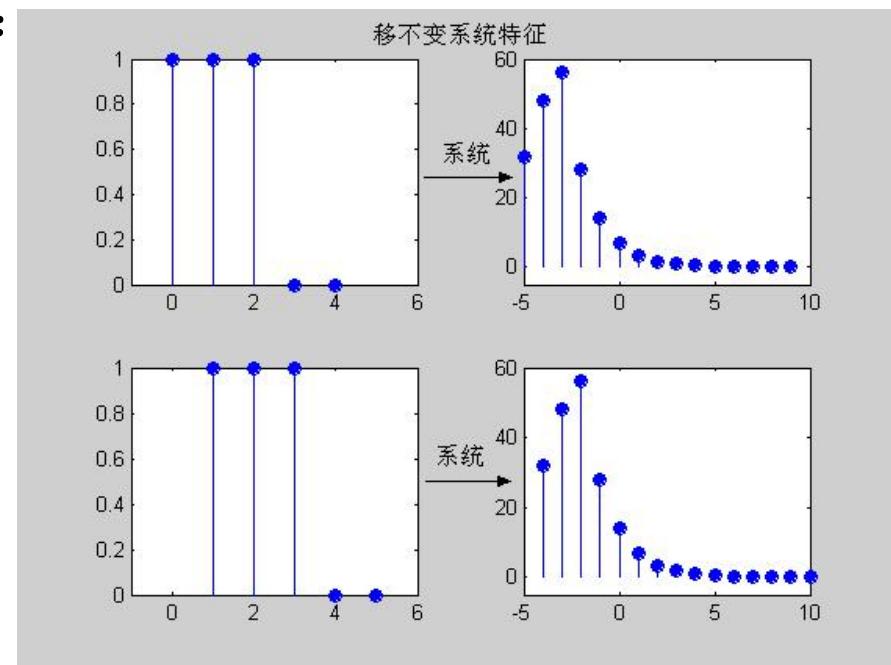
$$T\left\{\sum_i k_i * x_i(n)\right\} = \sum_i k_i * T\{x_i(n)\}$$

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$

3、时（不）变系统

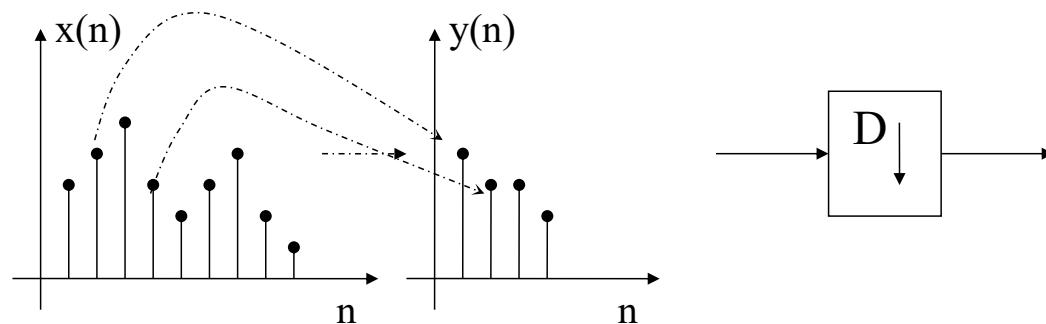
- 如果输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟，若： $T\{x(n)\} = y(n)$
- 则有：
 $T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0)$
- 称为时不变系统。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n - k)$$



例题

- 由下列关系定义的系统称为压缩器
- $y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty$ M 是一个正整数。



- 证明压缩器系统是时变系统

$$T[x(n-m)] = x(Mn-m) \neq y(n-m) = x[M(n-m)]$$

4、(非)因果系统

- 输出序列在 n_0 时刻的值仅仅取决于 $n \leq n_0$ 时刻的输入序列，则系统称为因果系统。
- 所有的实时可实现系统，也就是自然界中真实存在的系统皆为因果系统。
- 非因果系统通常是理论探讨或滞后实现，如前向差分系统即为非因果系统。

5、(非) 稳定系统

- 对任何一个**有界的输入序列**

$$|x(n)| \leq B_x < +\infty$$

- 系统的**输出序列都是有界的**,

$$|y(n)| \leq B_y < +\infty$$

- 则称系统为**BIBO**意义下的稳定系统。

-

- 现实世界中的大部分系统均为稳定系统
- 非稳定需要系统本身有无穷大的能量
- 所有的无源系统均为稳定系统，如电话，整流器等。

例题 判断系统是否是线性? 时不变?

$$T(x[n]) = g[n]x[n]$$

$$T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$$

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) \\ = g[n](\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) \\ = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned}$$

$$T(x[n - n_0]) = g[n] \cdot x[n - n_0] \neq y[n - n_0] = g[n - n_0] \cdot x[n - n_0]$$

$$T(x[n - m]) = \sum_{k=n_0}^n x[k - m] \stackrel{k'=k-m}{=} \sum_{k'=n_0-m}^{n-m} x[k'] \neq \sum_{k=n_0}^{n-m} x[k]$$

若 n_0 为负无穷, 结果为何?

例题

- 有一个系统的输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$,且满足下列差分方程:

$$y[n] = ny[n - 1] + x[n]$$

- 该系统是因果的且满足初始松弛条件, 即若 $n < n_0$,
 $x[n]=0$, 则 $y[n]=0$, $n < n_0$ 。
- (a) 若 $x(n)=\delta(n)$, 求 $y[n]$ (对全部的 n) 。
- (b) 系统是线性的吗? 试证明之。
- (c) 系统是时不变的吗? 试证明之。

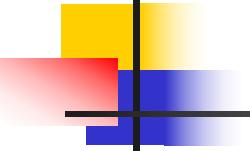
系统单位冲激响应

- 解: (a)

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- 由于: $n < 0$ $y[n] = 0$ $x(n) = \delta(n)$

$$y[0] = \delta[0] = 1 \quad y[n] = \begin{cases} 0 & n \leq 1 \\ 1 & n = 0 \\ n! & n \geq 1 \end{cases}$$


$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- (b) 因为 $y'[n] = T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = ny'[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
 $\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = n(\alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1]) + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
 $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$
 $y[n] = ny[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
- 所以 $y'[n] = y[n]$ 即: $T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

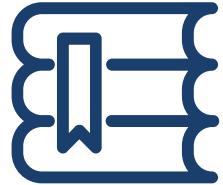
- (c) 系统输出的时移: $y[n - n_0] = (n - n_0)y[n - n_0 - 1] + x[n - n_0]$

系统输入延时后得到的输出: $y'(n) = T(x[n - n_0])$

$$y'(n) = ny'[n-1] + x[n-n_0]$$

所以: $y'(n) \neq y[n - n_0]$

线性时不变系统



离散时间信号

离散时间系统

线性时不变系统

线性常系数差分方程

- 为何典型？
- 基本性质？



1.3 线性时不变系统 (LTI)

- 既是线性系统，又是时不变系统，称为LTI系统
- 设系统单位冲击响应为： $h(n) = T\{\delta(n)\}$

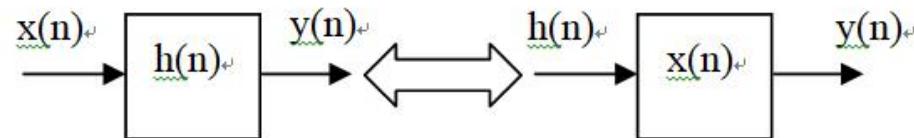
$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right\}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\} \text{(叠加性)}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \text{(时不变性)}$$

- $y(n) = x(n) * h(n)$ 质变：**充分且必要**

性质一： 交换律

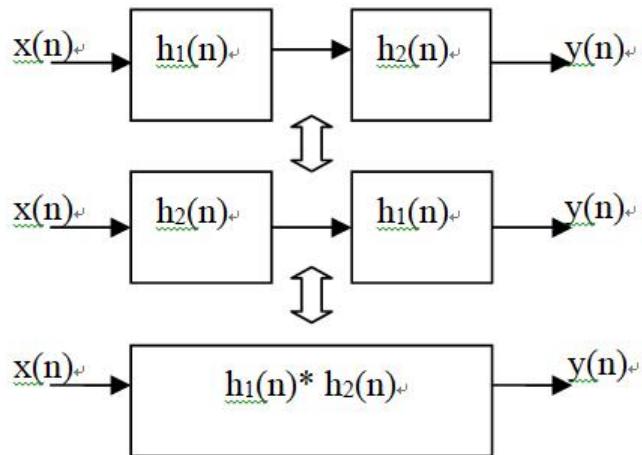


$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$\Delta y(n) = \Delta x(n) * h(n) = \Delta h(n) * x(n)$$

$$y(n-m) = x(n-m) * h(n) = h(n-m) * x(n)$$

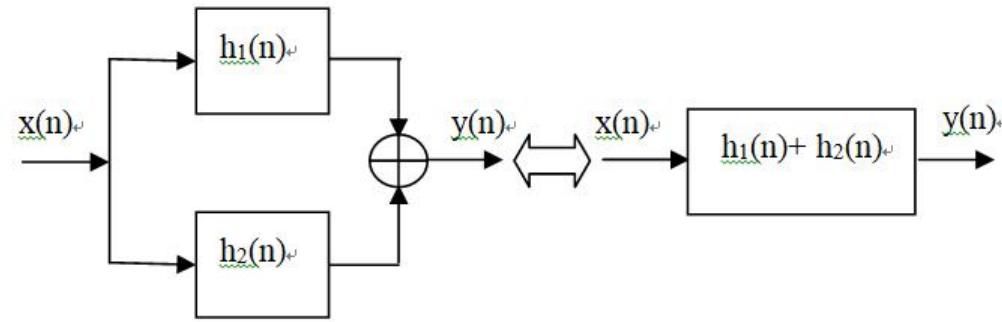
性质二：结合律



$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h_1(n) * h_2(n) \\&= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\&= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\&= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n)\end{aligned}$$

$$y(n) * u(n) = [x(n) * u(n)] * h(n) = [h(n) * u(n)] * x(n)$$

性质三：分配律



$$y(n)$$

$$= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

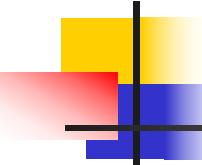
$$= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$$

定理一、**LTI**系统为因果系统的充要条件是: $h(n) = h(n)u(n)$

- 充分性: 若 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 则有 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$
 $y(n)$ 仅与 $m < n$ 时的 $x(m)$ 有关, 系统因果。
- 必要性: 若系统为因果系统, 假设 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 则有:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- 假设条件下, 第二个求和式中至少有一项不为零, 即 $y(n)$ 至少和 $m > n$ 中的某一个 $x(m)$ 有关, 不符合因果系统的定义, 所以假设不成立



定理二：LTI系统为稳定系统充要条件是： $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$

- 充分性：任意有界输入 $x(n) < N$ ，得到：

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = NM < +\infty$$

所以输入有界，输出必有界

- 必要性：若系统稳定，而 $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$

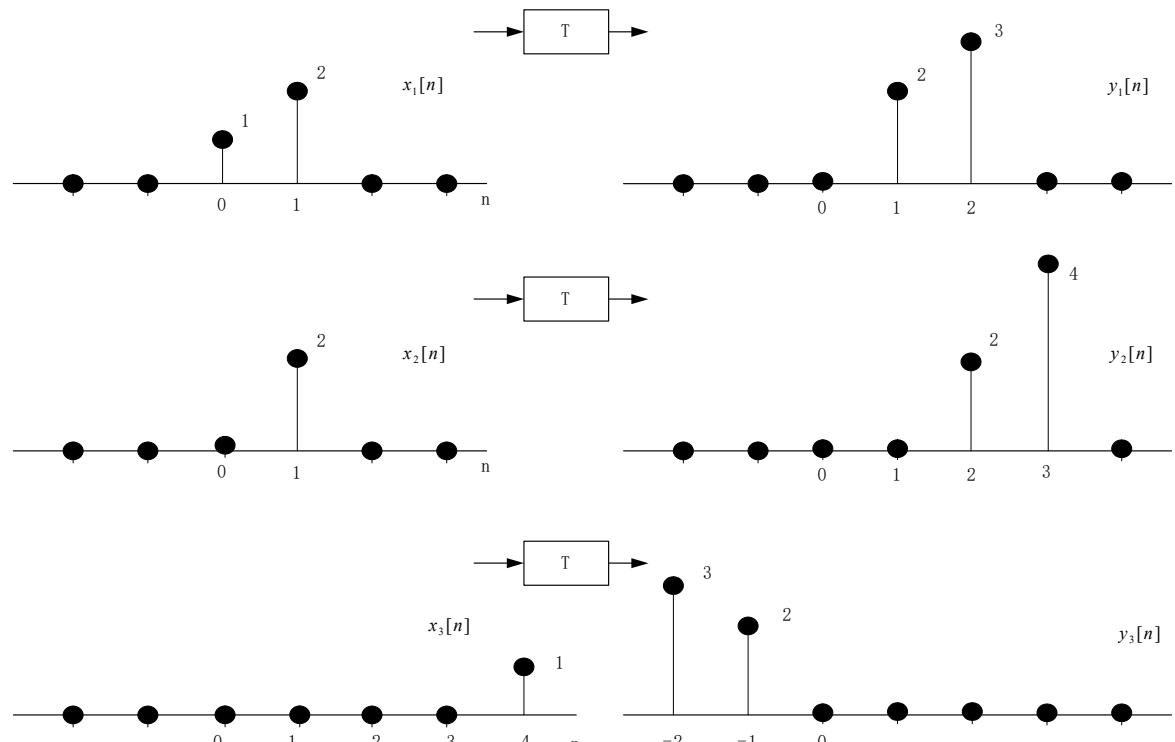
输入 $x(n) = sign(h(-n))^\infty$

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = \infty$$

不符合BIBO稳定的条件，假设不成立

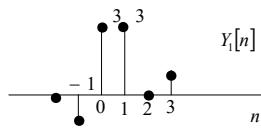
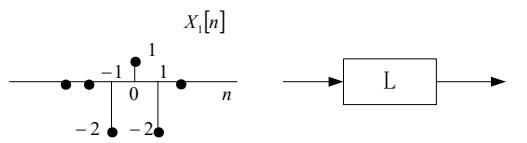
例题

- 图中T是时不变系统，输入响应如图
- (a) 确定系统是否为线性。
- (b) 系统的单位冲激响应是什么？
- (c) 对任意输入，输出能唯一确定吗？

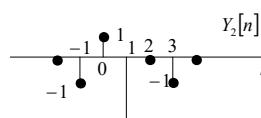
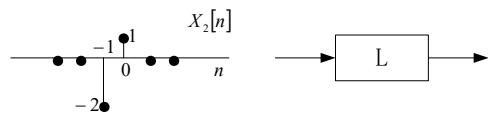
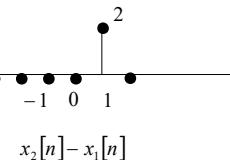


例题

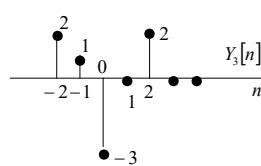
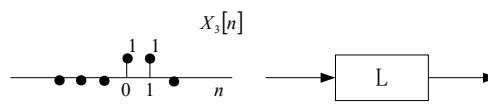
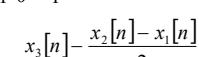
L 为线性系统，输入输出对应如图所示，问：
 (a) 系统 L 是否时不变的？
 (b) 系统的单位冲激响应是什么？



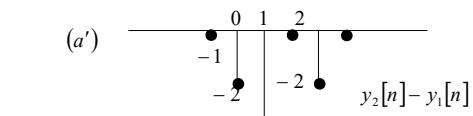
(a)



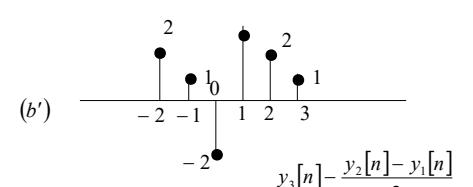
(b)



(a')



(b')

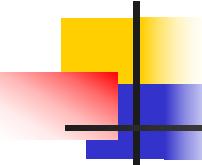


1.4 线性常系数差分方程

- 离散时间LTI系统通常由常系数线性差分方程表示：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

- **线性:**差分方程中只含输入、输出序列的一次项，不含高次项及交叉乘积项。否则为非线性方程
- **i** ■ **阶数:** $y(n)$ 的最高值和最低值之差，上述阶数为N。



求解途径

- 离散时域解法:

- 迭代法，此种方法只能给出比较形象的的不完整数值解，不容易得到闭合形式的数学描述公式。
- 时域经典解法，即求齐次解和特解，再由边界系数确定齐次解与特解的待定系数。
- 卷积和法，主要用于求解系统的零状态解。

- 变换域方法:

- 与连续系统的拉普拉斯变换法类似，采用Z变换方法来求解差分方程，在实际应用中较常用。

LCCDE与LTI的关系

- 例：常系数线性差分方程为 $y(n) - ay(n-1) = x(n)$
- (1) 若系统为松弛状态，求系统单位冲激响应；
- (2) 若系统初始状态为: $y(0) = 1$, 系统是否为LTI?

■ (1) 系统单位冲激响应

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

- 依次
$$h(0) = a * h(-1) + 1 = 0 + 1 = 1$$
 - 迭代
$$h(1) = a * h(0) + 0 = a + 0 = a$$
$$h(2) = a * h(1) + 0 = a^2 + 0 = a^2$$
$$\vdots$$
 - 求得:
$$h(n) = a * h(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$
- 由数学归纳法得到
$$h(n) = \begin{cases} a^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

(2) $y(0)=1$ 时

$$\begin{cases} x_1(n) = \delta(n) \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \quad y_1(n) = a^n * u(n)$$

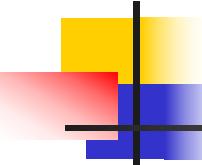
$$\begin{cases} x_2(n) = \delta(n-1) \\ y_2(0) = 1 \end{cases} \quad y_2(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$x_2(n) = x_1(n-1) \quad y_2(n) \neq y_1(n-1) \quad \text{时变}$$

$$\begin{cases} x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \\ y_3(0) = 1 \end{cases} \quad y_3(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

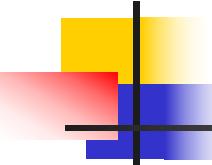
$$y_1(n) + y_2(n) = 2a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n) \quad \text{非线性}$$



LCCDE与LTI的关系

- 对上面的例子而言
 - 当边界条件为 $y(0)=1$ 时，系统是时变的；
 - 当边界条件 $y(0)=0$ 时，系统是线性但不是时不变系统；
 - 当边界条件为 $y(-1)=0$ 时，系统才是线性时不变系统。
- 常系数线性差分方程，并不一定代表线性系统，也不一定代表时不变系统。
- 边界条件决定了常系数线性差分方程和线性时不变系统之间的对应关系。只有当系统为零状态，才相当于一个线性时不变系统。

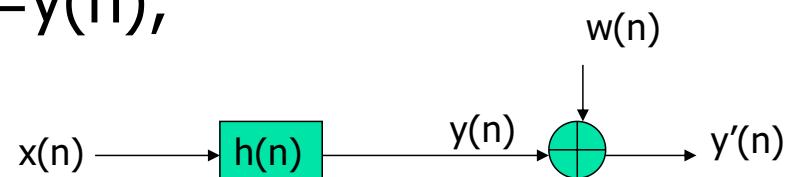


习题（第二版）

- 课后作业2:
- 2.15, 2.20, 2.25,
- 2.27, 2.42, **2.56**

思考题（反卷积用于系统辨识）

- $x(n) * h(n) = y(n);$



- 已知 $x(n), y(n)$ 条件下求 $h(n)$



谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 3

3.1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

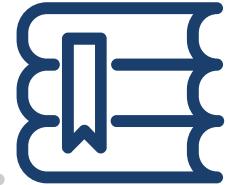
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

离散时间傅里叶变换 (DTFT)



离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

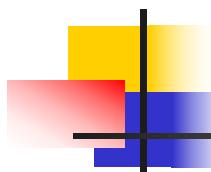
系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义？涵义？
- 基本序列的DTFT？
- DTFT的主要性质定理？

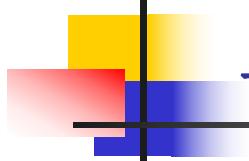


学习方法：
结论比过程重要！！！



一、DTFT及逆变换定义

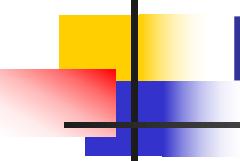
- 序列的傅立叶变换 (DTFT) 用来表示离散时间非周期信号及其傅立叶频谱之间的关系。
- 正变换: $DTFT [x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$
- 反变换: $DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$
 - 由于三角函数的周期性, 反变换积分区间可以为任何一个周期区间。



二、DTFT反变换推导

$$\begin{aligned} DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(k-n) = x(n) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-n)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = Sa[\pi(n-k)] = \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



DTFT反变换隐藏的涵义:信号分解

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n}\end{aligned}$$

三、典型序列的傅立叶变换：

- (一) 单位冲激序列

$$DTFT [\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = x(0)e^{-j\omega 0} = 1$$

- (二) 单位常数序列

$$x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2k\pi) \rightarrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n} d\omega \\ = 1$$

- (三) 单位阶跃序列

$$DTFT [u(n)] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2k\pi)$$

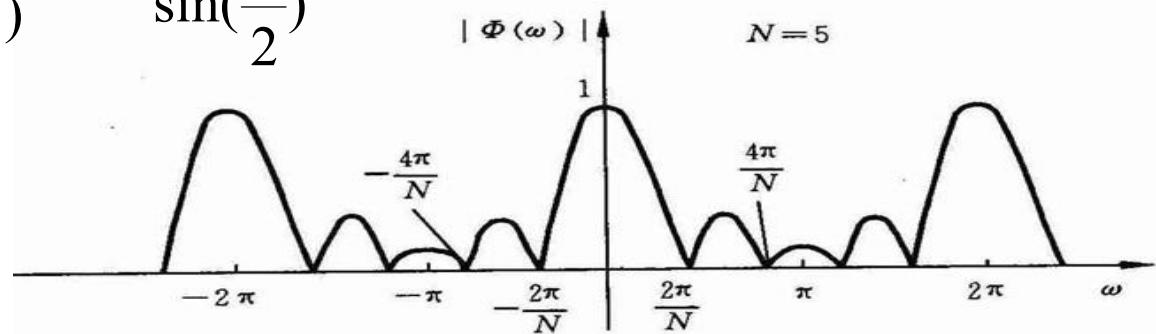
- (四) 指数序列

$$DTFT [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

矩形窗的DTFT

$$DTFT[W(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

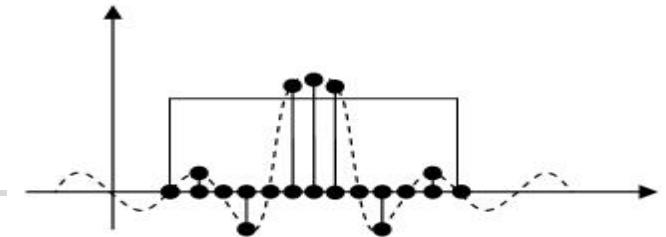
$$= \frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}} (e^{j\frac{N\omega}{2}} - e^{-j\frac{N\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$$



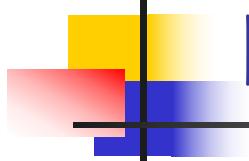
理想低通滤波器

- 截止频率为 w_c 的理想低通滤波器

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \leq w \leq w_c \\ 0 & w_c < w \leq \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$



$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin[w_c(n-\alpha)]}{w_c(n-\alpha)}$$



四、序列傅立叶变换的主要性质

- 1、线性

$$ax(n) + bh(n) \longrightarrow aX(e^{jw}) + bH(e^{jw})$$

- 2、时域平移->频域调制

$$x(n - m) \longrightarrow e^{-jwm} X(e^{jw})$$

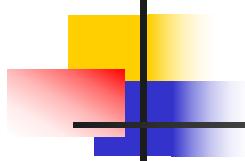
- 3、时域调制->频域平移

$$e^{jn\omega_0} x(n) \longrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$\begin{aligned} DTFT[x(-n)] &= X(e^{-j\omega}) \\ DTFT[x^*(n)] &= X^*(e^{-j\omega}) \\ DTFT[x^*(-n)] &= X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

- 4、时域翻褶

$$x(-n) \longrightarrow X(e^{-jw})$$



■ 5、时域相乘

$$x(n)h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$$

■ 6、时域卷积

$$x(n) * h(n) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

■ 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

8、DTFT的对称性

- 共轭对称序列:
- 共轭反对称序列:
- 可以证明:

$$\operatorname{Re}[x_e(n)] = \operatorname{Re}[x_e(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_e(n)] = -\operatorname{Im}[x_e(-n)]$$

$$|x_e(n)| = |x_e(-n)|$$

$$\operatorname{Arg}[x_e(n)] = -\operatorname{Arg}[x_e(-n)]$$

$$x_e(n) = {x_e}^*(-n)$$

$$x_o(n) = -{x_o}^*(-n)$$

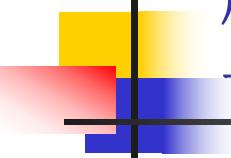
$$\operatorname{Re}[x_o(n)] = -\operatorname{Re}[x_o(-n)]$$

$$\operatorname{Im}[x_o(n)] = \operatorname{Im}[x_o(-n)]$$

$$|x_o(n)| = |x_o(-n)|$$

$$\operatorname{Arg}[x_o(n)] = \pi - \operatorname{Arg}[x_o(-n)]$$

共轭反对称序列的性质如何？？



序列共轭分量的傅立叶变换 与序列傅立叶变换的共轭分量

$$\begin{aligned}DTFT[x(-n)] &= X(e^{-j\omega}) \\DTFT[x^*(n)] &= X^*(e^{-j\omega}) \\DTFT[x^*(-n)] &= X^*(e^{j\omega})\end{aligned}$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$DTFT[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$DTFT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{-j\omega})$$

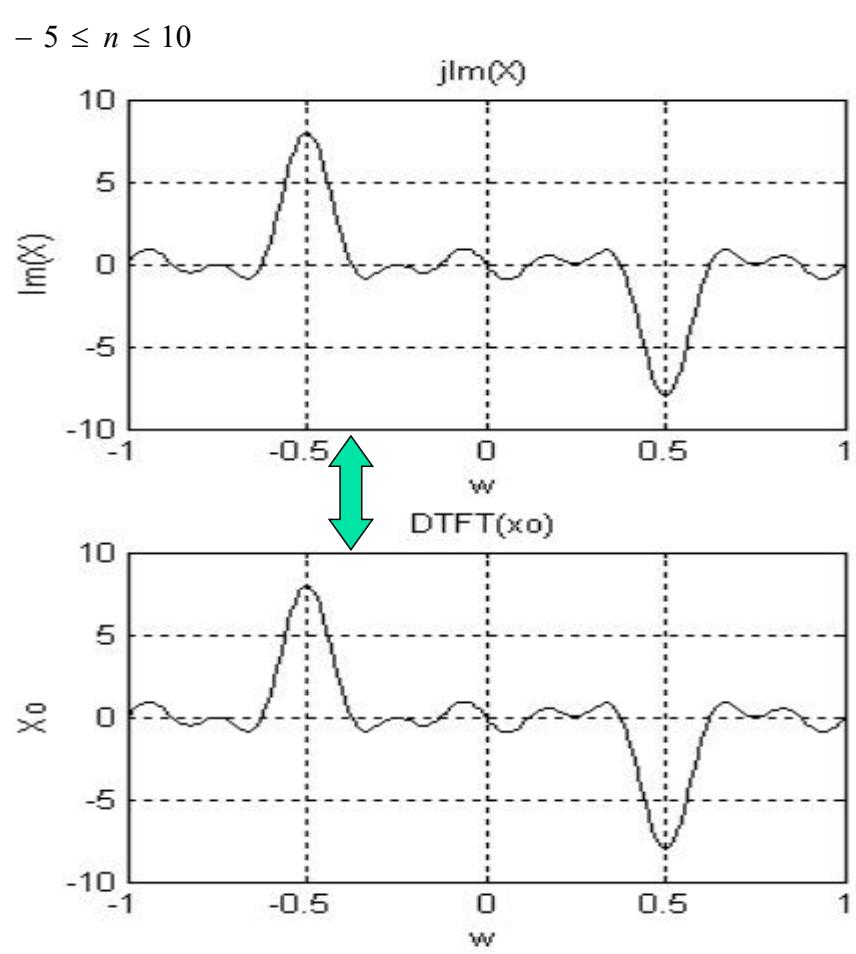
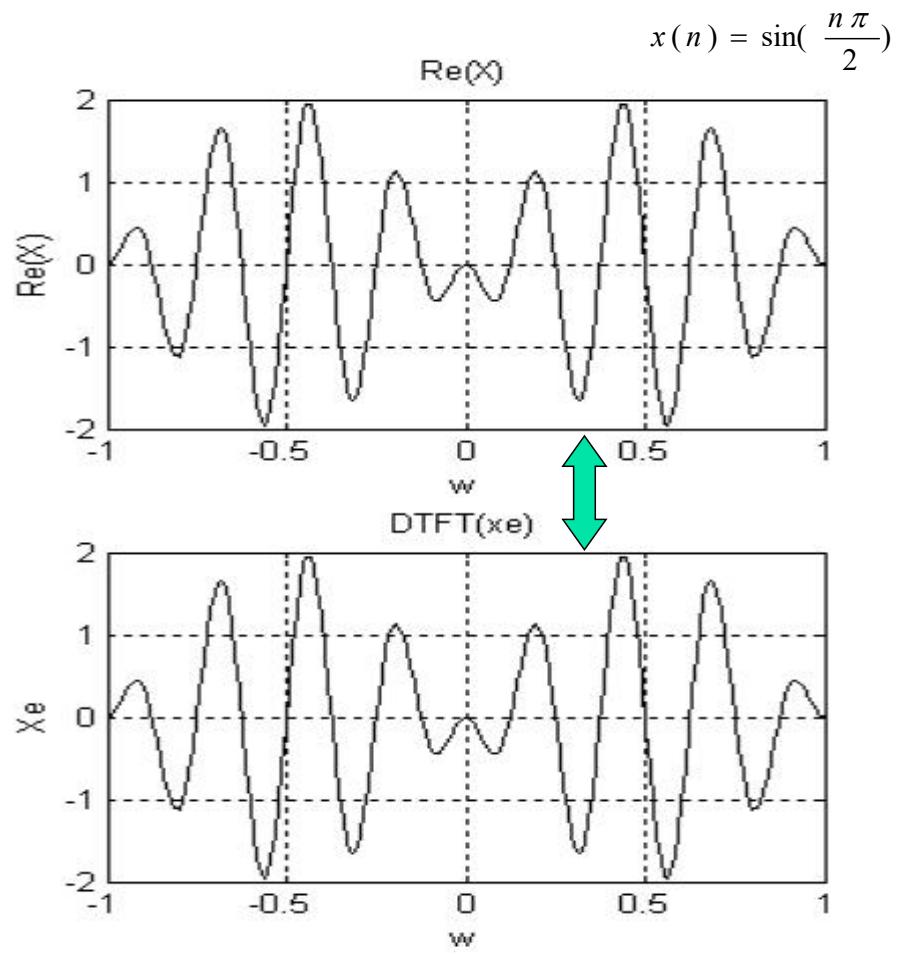
$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

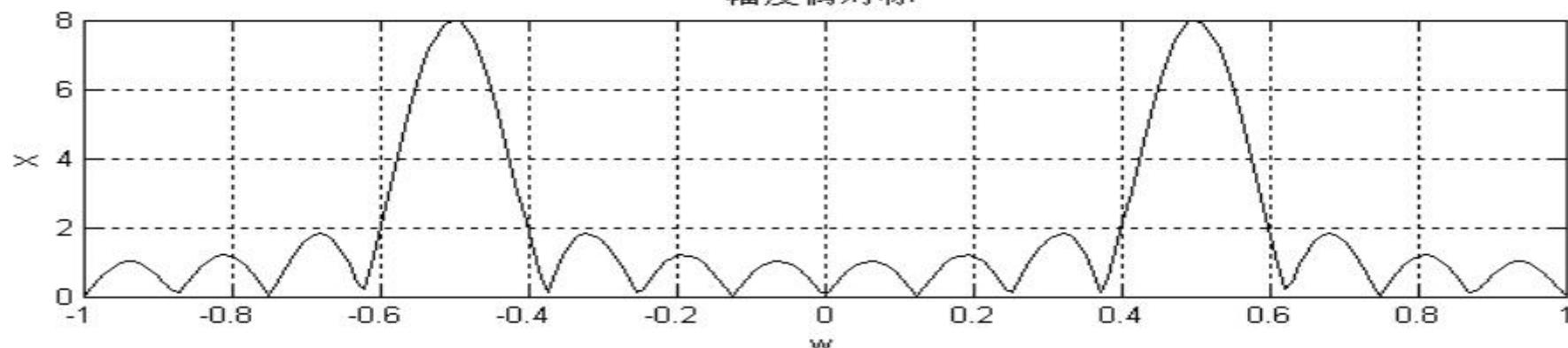
$$DTFT\{\text{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{j \text{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

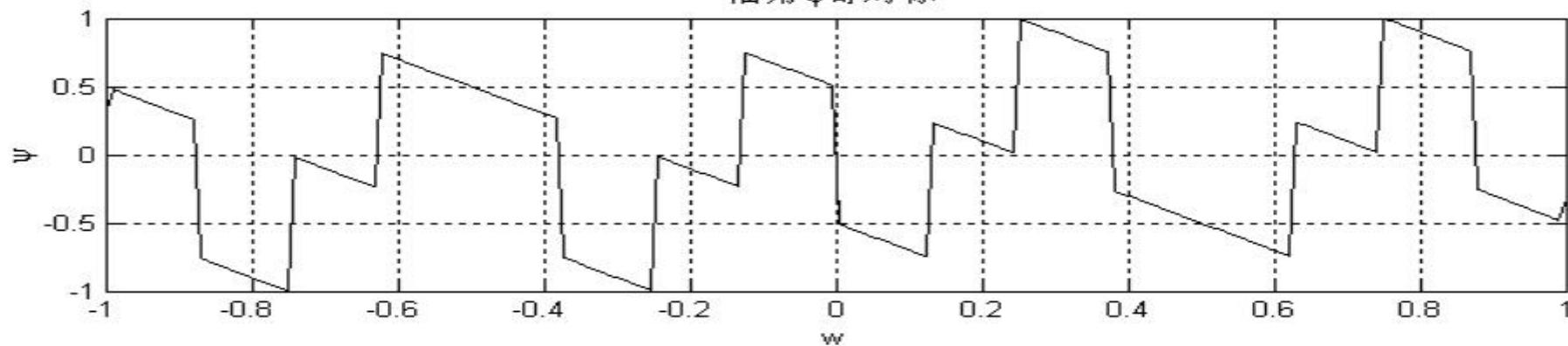
推论：实序列傅立叶变换是共轭对称的，即实部是偶对称，虚部是奇对称；幅度是偶对称，幅角是奇对称。



幅度偶对称



幅角 ψ 奇对称



CTFT Vs DTFT

表 1 连续时间和离散时间的典型基本信号傅立叶变换对比

连续信号 $x(t)$	CTFT $X(j\omega)$	离散信号 $x(n)$	主周期内的 DTFT $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$\delta(n - r)$	$e^{-ir\Omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi(\omega)$	$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-i\Omega}} + \pi(\Omega)$
$e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{a + i\omega}$	$a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}$
$te^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(a + i\omega)^2}$	$na^n u(n), a < 1$	$\frac{ae^{-i\Omega}}{(1 - ae^{-i\Omega})^2} = \frac{ae^{i\Omega}}{(e^{i\Omega} - a)^2}$
$\tau Sa(\frac{\tau t}{2})$	$2\pi G_\tau(\omega)$	$\frac{\Omega_c}{\pi} Sa(\Omega_c n)$	$G_{2\Omega_c}(\Omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$e^{i\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$

例题1：求和式

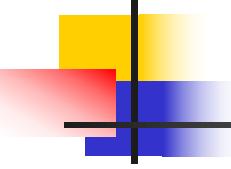
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

■ 解：

$$\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{2\pi n} \Leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$y^*[n] = \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{5\pi n} \Leftrightarrow Y^*(e^{-j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\therefore Y^*(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{5} & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \therefore \text{左} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{10} d\omega = \frac{1}{60}$$



例题2

- 令 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 分别代替一个序列及其傅里叶变换，利用
- $X(e^{j\omega})$ 表示如下序列的傅立叶变换

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

- 解： $y_s[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + (-1)^n x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + e^{j\pi n} x[n]\}$

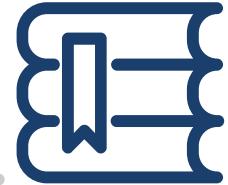
$$Y_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega - \pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n] e^{-j2n\omega}$$

例题3

- 若实序列 $x[n]$ 的DTFT为 $X(w)$, 且
- $X(0.2)=9e^{-j0.7}$;
- 1) $X(-0.2)=?$
- 2) 若 $y(n)=x(-n+2)$, 求 $Y(-0.2)$;



Z 变 换 及 反 变 换



离散时间傅里叶变换

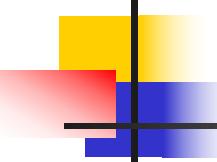
Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

- 定义
- 收敛域?
- 性质定理
- 反变换





一、Z变换定义及收敛域

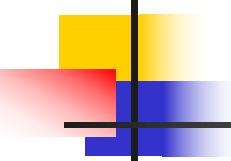
- 设序列为 $x(n)$, 则**幂级数**:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- 称为序列 $x(n)$ 的**Z变换**, 其中**z**为变量。也可记作:

$$Z[x(n)] = X(z)$$

- **幂级数收敛时, Z变换才有意义。** Z变换收敛的所有**z**值的集合称为**收敛域**。
- 在收敛域内, **Z变换处处解析**, 不含任何奇异点。



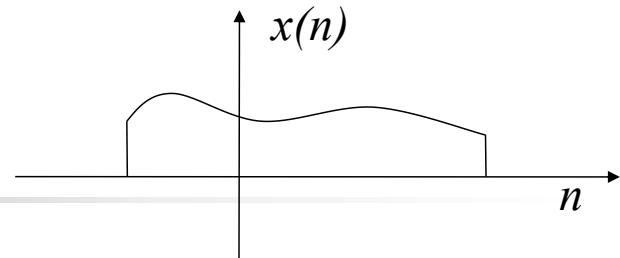
二、不同序列的收敛域

- 根据级数理论，幂级数收敛的充分且必要条件是该级数绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

- 对于不同形式的序列，其收敛域的形式亦有所不同，分类讨论如下

1、有限长序列

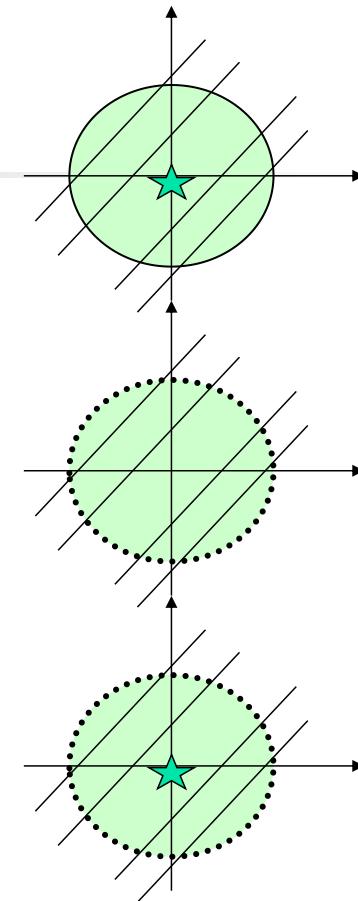


$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- $X(z)$ 为有限项级数之和，只要级数的每一项有界，则级数就是收敛的。
- 收敛域至少包括有限Z平面

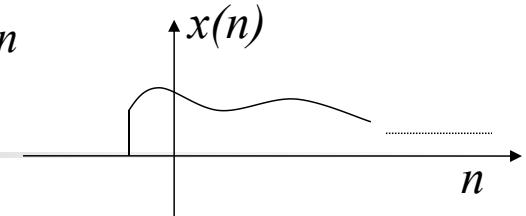
$$0 < |z| < \infty$$

- 根据区间的不同，级数有可能在原点和无穷远出现奇异点，故仍可细分为如下三种情况：
- 1)、正半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和无穷远点；
- 2)、负半轴有限长序列，其收敛域为有限Z平面和原点；
- 3)、跨原点有限长序列，则收敛域仅为有限Z平面；



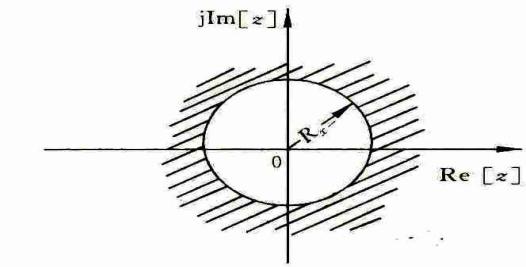
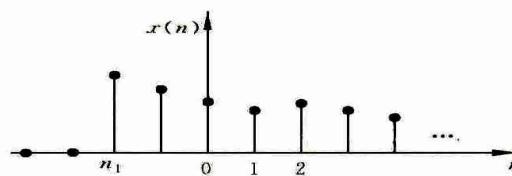
2、右边序列

$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n_1 \leq n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



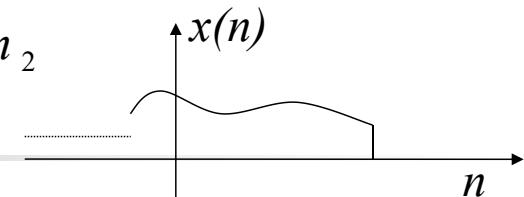
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 第一部分若存在，则为一负半轴有限长序列，其收敛域为不包括无穷远点的所有Z平面。第二部分是z的负幂级数，由阿贝尔定理可知，存在一个最小的收敛半径，在此半径外的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不为零的有限半径处向外扩张的有限Z平面；若 $n_1 \geq 0$ ，还要包括无穷远点，此时的序列为因果序列。



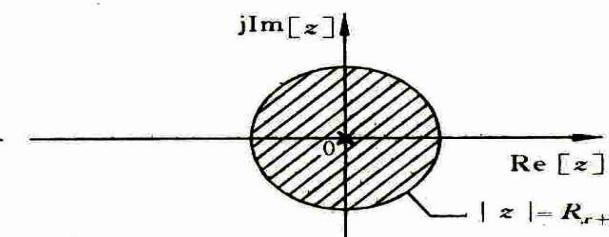
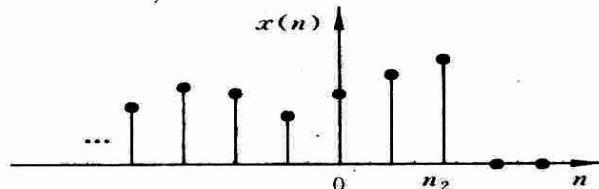
3、左边序列

$$x(n) = \begin{cases} \text{有值} & n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} = \left\langle \sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n} \right\rangle + \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n}$$

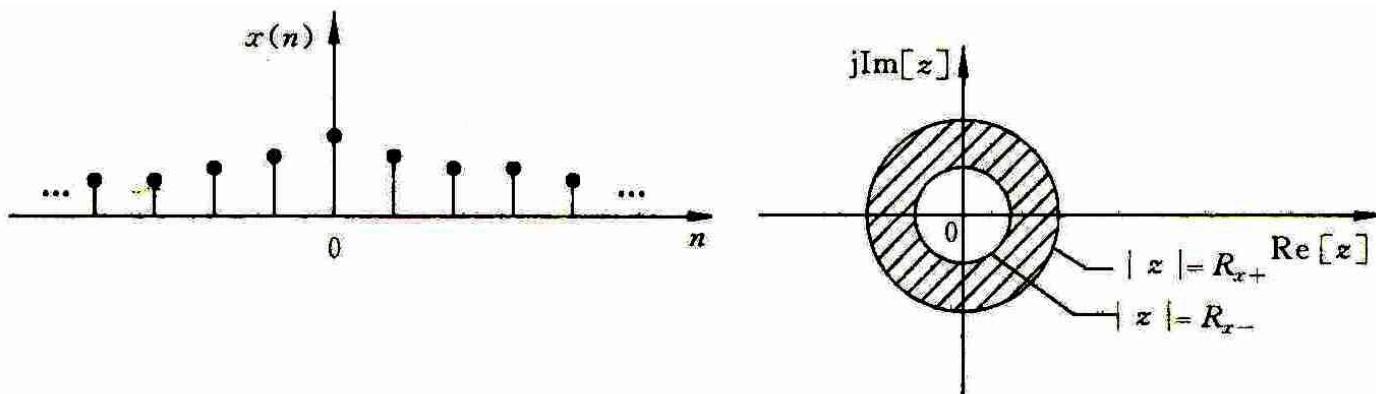
- 若第一部分存在，则为正半轴有限长序列，其收敛域为不包括原点的所有Z平面。第二部分是z的正幂级数，由阿贝尔定理知，存在一个最大的收敛半径，在此半径内的任何点级数都绝对收敛。
- 收敛域至少从某一不有限半径处向内收敛的圆形区域；在 $n_2 \leq 0$ 时（反因果序列），还包括原点。



4、双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

- 收敛域应该是正半轴序列与负半轴序列收敛域的重叠
- 若有收敛域必为环状区域，否则处处不收敛

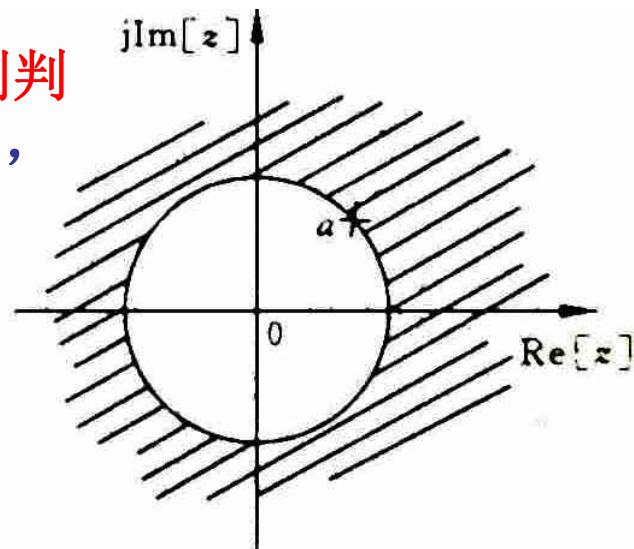


Ex: 求 $x(n) = a^n u(n)$ Z变换及收敛域。

■ 解: $Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_0^{+\infty} (az^{-1})^n$

■ 这是一个无穷项等比级数求和, 由比例判定法可知, 只有在 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时, 级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$



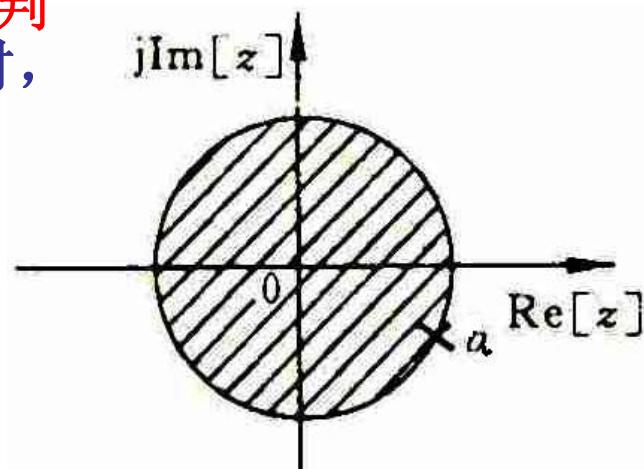
Ex: 求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ Z变换及收敛域。

■ 解:

$$Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

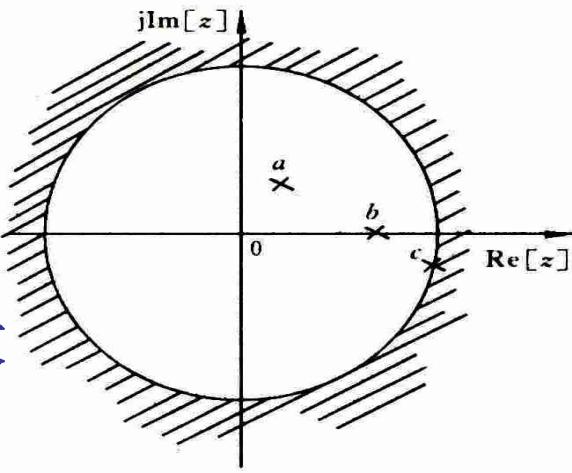
■ 这是一个无穷项等比级数求和, 由**比例判定法**可知, 只有在 $|a^{-1}z| < 1$, 即 $|z| < |a|$ 时, 级数收敛为:

$$Z[x(n)] = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

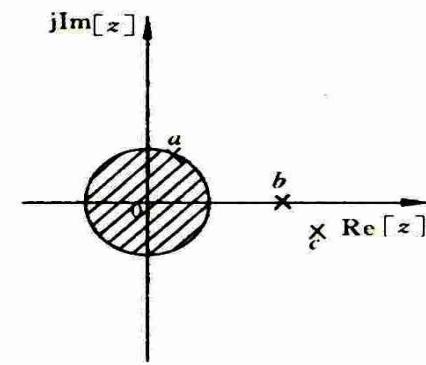


结论：

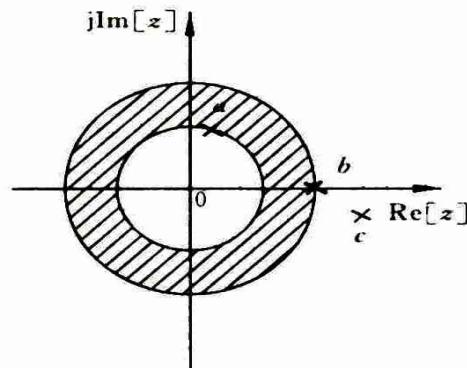
- 不同的序列其Z变换的数学表达式可以完全一致。
- 对于一个序列而言，仅仅用其Z变换来表示是不够充分的，必须同时给出其Z变换的收敛范围。
- 同一个Z变换函数，当收敛域不同时，代表时轴上性质不同的序列。



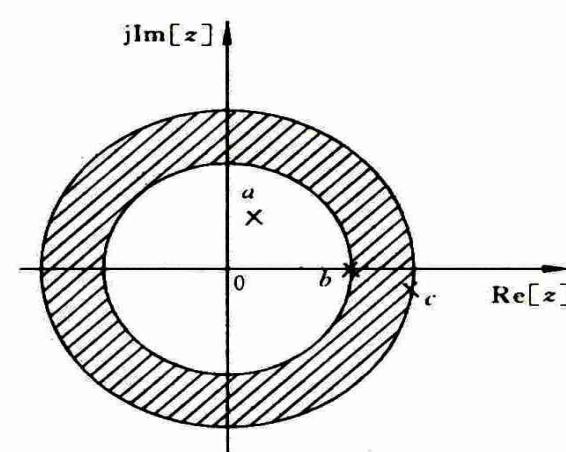
(a)



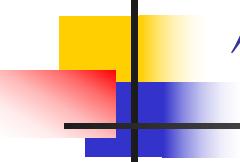
(b)



(c) 204教研室 孙国良



(d)



例题1: $X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \quad 0.5 < |z| < 2$ 求x(n)

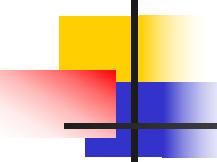
- 解: 由可知有两个一阶极点, 可展成

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_2 z^{-1}}$$

$$A_1 = \operatorname{Re} s[X(z)/z] \Big|_{z=z_1} = \frac{4}{3}, A_2 = \operatorname{Re} s[X(z)/z] \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{3}$$

- 由收敛域可知, 对应第一极点 $z_1=2$ 为反因果序列, 对应第二极点 $z_2=0.5$ 为因果序列, 所以原始序列为:

$$x(n) = -\frac{4}{3}2^n u(-n-1) - \frac{1}{3}0.5^n u(n)$$



三、Z变换性质定理

■ 1、线性

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \quad R_- < |z| < R_+$$

■ 需要注意：

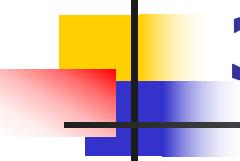
- 若参与和运算的序列在时域上不重合，则相加后的和序列的收敛域为各个序列的收敛域的交集
- 若不满足上述条件，则线性组合过程中两个序列Z变换的零、极点可能会互相抵消，导致收敛域的扩大。

2、序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

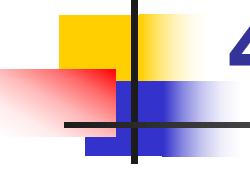
- 序列的移位仅对**有限长、单边**序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点处的是否收敛有影响。
- 对于**双边序列**，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以**收敛域不发生变化**。



3、Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

- 在尺度变换中，若a为实数，则零、极点在Z平面上沿径向运动；
 - 若a为单位复数，则零、极点在以原点为圆心的园上旋转；
 - 若a为任意复数，则零、极点既有径向伸缩，又有角度旋转。

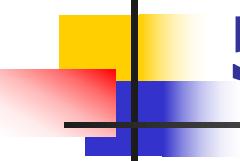


4、序列线性加权（Z域求导）

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[n^m x(n)] = (-z \frac{d}{dz})^m [X(z)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

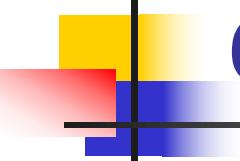
- 序列的线性加权对收敛域的影响与序列的**移位相类似**，仅对有限长、单边序列（左边序列、右边序列）在原点和无穷远点的是否收敛有影响。
- 对于双边序列，由于它的收敛域为环形域，不包括原点和无穷远点，所以收敛域也不发生变化。



5、共轭序列

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

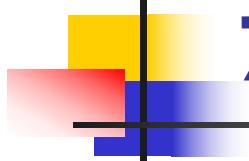
- 此处要注意，原序列**Z**变换极点的共轭是共轭序列**Z**变换的极点。
- 由于共轭关系仅关于**X**轴对称，不影响极点矢径的长度，
因而不改变收敛半径和收敛域。



6、序列翻褶

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R_{x+}^{-1} < |z| < R_{x-}^{-1}$$

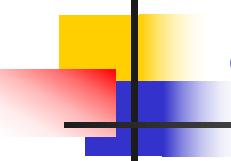
- 序列的翻褶导致Z变换的收敛域以单位圆为基准作镜像映射



7、初值定理（因果序列）

$$x(n) = x(n)u(n) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots] \\ &= x(0) \end{aligned}$$

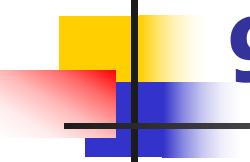


8、终值定理

- 若序列为因果序列，并且极点处于单位圆以内（若恰好在单位圆上，则最多可在 $z=1$ 处有一阶极点），则：

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) (z^{-(n-1)} - z^{-n}) \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-(n-1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{m=-1}^{+\infty} x(m+1) z^{-m} - \sum_{m=-1}^{+\infty} x(m) z^{-m} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] z^{-m} \right\} = \sum_{m=-1}^{+\infty} [x(m+1) - x(m)] \lim_{z \rightarrow 1} z^{-m} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots [x(n) - x(n-1)] \} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)
\end{aligned}$$



9、时域卷积和

$$Z\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

$$|z| > \text{Max}(1, R_{x-})$$

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = Z[y(n)] = X(z)H(z) \quad \max(R_{x-}, R_{h-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{h+})$$

- 若时域为卷积和，则 Z 域是相乘，乘积的收敛域是 $X(z)$ 收敛域和 $H(z)$ 收敛域的交集。

- 上述结论在两个卷积和序列无零、极点对消的情况下才成立。若出现零、极点对消，则收敛域将会扩大。
- 利用卷积和定理，可以求LTI系统的响应。

例题2

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

- 因果系统输出为：

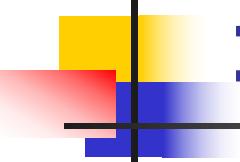
$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

- 求系统输入的X(z)
- 解：

$$\begin{aligned} \because y[n] \text{ 的 } z \text{ 变换为: } Y(z) &= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 + 0.25z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \\ &= \frac{1 + z^{-1}}{(1 + 0.25z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad 0.25 < |z| < 2 \end{aligned}$$

$$\therefore X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad |z| < 2$$

为什么?



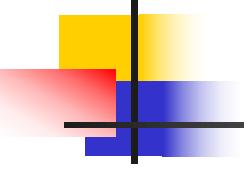
10、时域相乘（Z域复卷积）

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$
$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n)h(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

$$R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+}$$



证明：

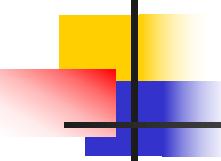
$$\begin{aligned} Y(z) &= Z[x(n)h(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(v)v^{n-1}dv\right]z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)H(v)z^{-n}v^{n-1}dv\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}H(v)v^{-1}dv\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv \end{aligned}$$

周期卷积

- 为了使复卷积数学意义明显，令围线为一个以原点为圆心的圆，即： $v = \rho e^{j\theta}, z = re^{j\omega}$
- 则复卷积公式变为：

$$Y(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(\rho e^{j\theta}) X\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\omega-\theta)}\right) \frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}$$
$$\stackrel{r=const}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- 由于积分是在 π 到 $-\pi$ 的周期上进行的，所以称为**周期卷积**。



11、帕塞瓦定理

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)] \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$R_{x-} R_{h-} < 1 < R_{x+} R_{h+}$$

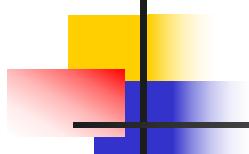
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*(v^{*-1})v^{-1}dv$$

$$Z[h^*(n)] = H^*(Z^*)$$



$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$Y(z) \Big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$



若积分围线取为单位圆，即：

$$v = e^{j\omega}$$

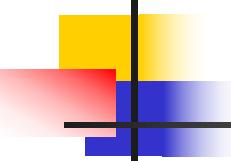
则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

再进一步，若令 $h(n) = x(n)$ ，则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

上式表明：时域中序列的能量与变换域中频谱的能量是一致的。

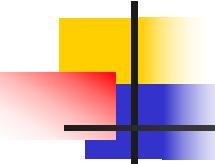


四、 Z反变换

- 从给定的**Z变换**及其**收敛域**中还原出原始序列**x(n)**, 称为**Z反变换**

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

- **Z反变换的实质是求X(z)的幂级数展开式**, 通常有三种方法: 长除法、部分分式法、留数法(围线积分法)。



部分分式法

- 在实际应用中，一般**X(z)**是**z**的**有理分式**:

$$X(z) = B(z) / A(z)$$

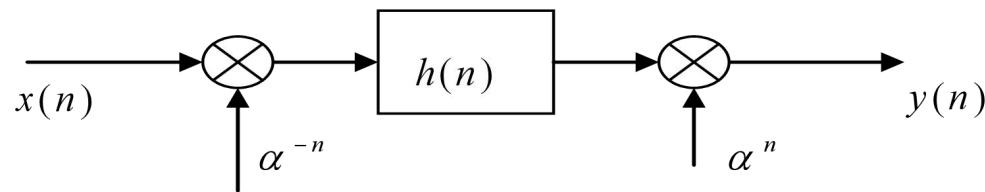
- **A(z)**及**B(z)**都是变量**z**的**实系数多项式**，并且**没有公因式**，
则可展成部分分式形式

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

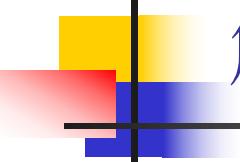
$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_i Z^{-1}[X_i(z)]$$

例题3

- 离散系统如下， $h(n)$ 为LTI系统



- 1) 整个系统是否为LTI?
- 2) 若系统是LTI的，请给出系统的单位冲激响应 $g(n)$



解答：

$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^n = y[n]$$

■ 1) $k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \longrightarrow [k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$

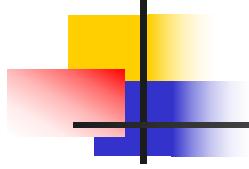
$$[k_1 x_1[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n + [k_2 x_2[n]] \alpha^{-n} \otimes h[n] \cdot \alpha^n$$
$$k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$$

$$y[n] = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$

$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$
$$= \sum_k \alpha^{n-k} x[k] h[n-k]$$

$$T\{x[n-m]\}$$
$$= (\alpha^{-n} x[n-m] \otimes h[n]) \cdot \alpha^n$$
$$= \left(\sum_k \alpha^{-k} x[k-m] h[n-k] \right) \cdot \alpha^n$$

$$y[n-m] = \sum_k \alpha^{n-m-k} x[k] h[n-m-k]$$


$$[x[n] \bullet \alpha^{-n}] \otimes h[n] \bullet \alpha^n = y[n]$$

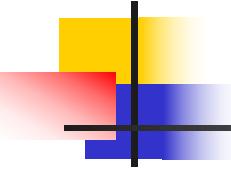
■ 2) $g[n] = \{\delta(n)\alpha^{-n} * h[n]\} * \alpha^n = h[n] * \alpha^n$

$$y[n] \cdot \alpha^{-n} = (\alpha^{-n} x[n] \otimes h[n])$$

$$Y(\alpha z) = X(\alpha z) \cdot H(z)$$

$$Y(z') = X(z') \cdot H\left(\frac{z'}{\alpha}\right)$$

$$g[n] = Z^{-1}[H\left(\frac{z}{\alpha}\right)] = \alpha^n h[n]$$



信号变换小结：

- 变换是从另一个维度来审视信号
- DTFT隐含有周期性，以及信号频谱分解的概念
- Z变换需要注意收敛域问题
- 卷积特性是信号变换中的主要性质
- 对称性对于实信号的变换很重要
- 结论比过程重要，但是过程要能自己走通

作业：

- 2.8
- 2.11
- 2.17
- 2.44

- 3.1(b)、(g)
- 3.3
- 3.4
- 3.6(c)
- **3.9**
- 3.28





谢 谢

授课教师：孙国良

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

3.2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

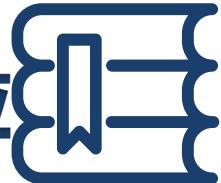
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

系统函数与频率响应



离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

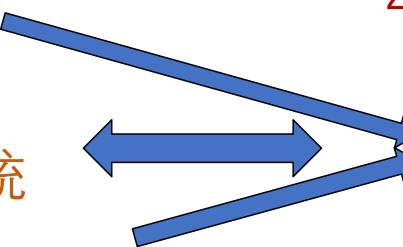
LTI系统幅相特性分析

- 1.1 信号
 - 六大信号
 - 九大运算



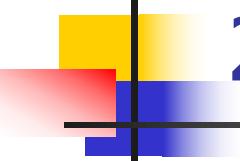
- 2.1 DTFT
- 2.2 Z变换

- 1.2 系统
 - 五大类
- 1.3 LTI系统
 - 卷积
- 1.4 差分方程



- 2.3 LTI
 - 系统函数(稳定、因果)
 - 频率响应
 - 频率定义
 - 特征函数
 - 滤波
 - 幅度、相位





2.3 LTI 系统函数和频率响应

- 2.3.1 系统函数
 - 定义
 - 因果稳定性考察
 - 差分方程
- 2.3.2 频率响应
 - 定义
 - 特征函数
 - 零、极点对频率响应的影响

2.3.1 LTI的系统函数

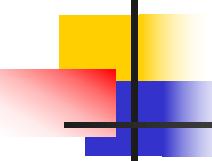
- 一、系统函数定义
- LTI系统可以由其单位冲激响应来完整表示，即：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = \downarrow X(z)H(z)$$

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

- **H(z)**描述了系统输入输出之间的关系，称之为传递函数或系统函数。

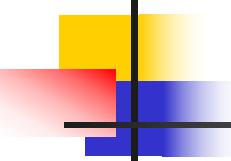


二、系统函数与因果、稳定性的关系

- 线性时不变系统稳定的充分必要条件是：冲激响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \xrightarrow{|z|=1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

- 如果系统函数的收敛域包括单位圆，则系统是稳定的，反之亦成立；即系统的频率响应存在且连续。
- LTI因果稳定的充分必要条件是： $|z| \geq 1$ ，收敛域必须包括单位圆及单位圆外的所有区域，系统函数的全部极点必须在单位圆内部。



例题1

- 设序列 $x(n)$ 是LTI系统在输入为 $s(n)$ 时的输出, 系统可以由下面差分方程描述:

$$x[n] = s[n] - e^{8a} s[n - 8] \quad a > 0$$

- 1) 求系统函数 $H_1(z)$, 并画出它的零极点分布图, 指出相应的收敛域
- 2) 设计一个LTI系统 $H_2(z)$, 要求可以利用 $x(n)$ 恢复 $s(n)$, 求该系统的系统函数并讨论其因果性和稳定性。
- 3) 求出所有可能的单位冲激响应 $h_2(n)$

解：

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - e^{8a} z^{-8}$$

$$c_k = e^{(8a + i 2k\pi)/8} = e^{(a + ik\pi/4)}$$

ROC $|z| \neq 0$

■ 2) $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-8}}$

■ 收敛域的选择有两种可能：

- (i) $|z| < e^a$, 此时 $H_2(z)$ 稳定, 非因果。
- (ii) $|z| > e^a$, 此时 $H_2(z)$ 不稳定, 但因果

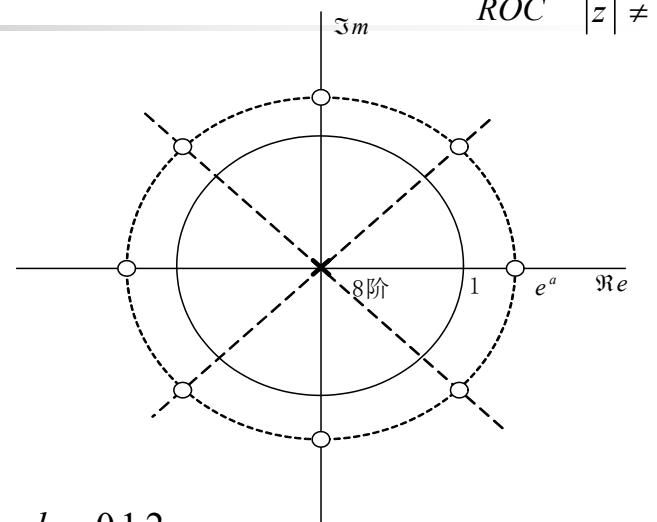
■ 3) $H_2(z) = \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-1}}$ $H_2(z) = H'_2(z^8)$

$$h_2[n] = (e^{8a})^n u[n] \quad |z| > e^{8a}$$

$$h_2[n] = -(e^{8a})^n u[-n-1] \quad |z| < e^{8a}$$

$$h_2^1[n] = \begin{cases} (e^a)^n u[\frac{n}{8}] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$h_2^2[n] = \begin{cases} -(e^a)^n u[-\frac{n}{8} - 1] & n = 8k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



三、系统函数与差分方程的关系

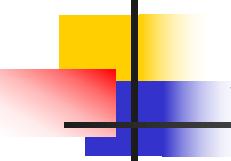
- 零状态时为**LTI**系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

- 系统函数为: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$

- 差分方程和系统函数系数对应;
- 仅由差分方程得来的**系统函数**并没有给定**收敛域**, 因而可代表不同系统;
 - **差分方程**并不唯一确定一个**LTI**系统的单位抽样响应, 需要有相应的**边界条件**;
 - **系统函数**仅描述了**系统在零状态下的情况**, 即可以用于解决零状态的常系数线性差分方程, 对于非零状态则无法解决



用于非零状态的单边Z变换

- 系统函数无法处理非零状态下的系统响应
 - 假设系统零状态，采用**双边Z变换**。
- 为了解决上述问题，将对双边Z变换进行变形，构成**单边Z变换**，如下：

$$X^+(z) = Z^+ [x(n)] = Z[x(n)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

其时移特性如下：

$$Z^+ [x(n - k)]$$

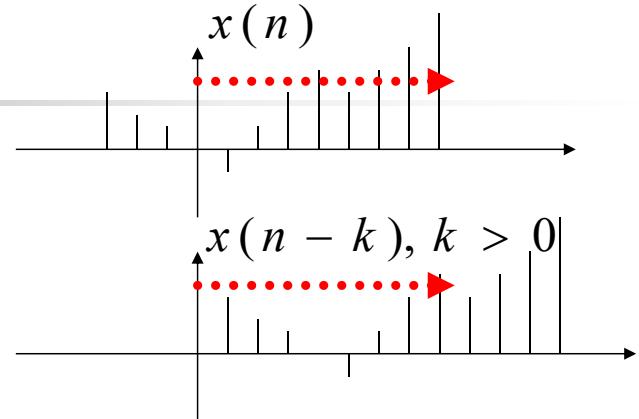
$$= Z[x(n - k)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - k)z^{-n}$$

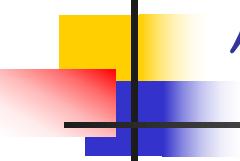
$$= \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + z^{-k} X^+(z)$$

$$= x(-k) + x[-(k-1)]z^{-1} + x[-(k-2)]z^{-2} + \dots + x(-1)z^{-(k-1)} + z^{-k} X^+(z)$$





例题2：求解差分方程

$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

- 其中: $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

- 初始条件为: $y(-1) = 4, y(-2) = 10$

-

- 解: 对差分方程两边同时进行单边Z变换, 得到:

$$Y^+(z) - \frac{3}{2}[y(-1) + z^{-1}Y^+(z)] + \frac{1}{2}[y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y^+(z)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

■ 将初始条件代入后可得：

$$Y^+(z) \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})$$

■ 所以：

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]} = \underbrace{\frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{(1 - 2z^{-1})}{\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right]}}_{\text{零输入响应}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{齐次解}} + \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}}}_{\text{特解}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{暂态解}} = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{暂态解}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{稳态解}} + \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}}}_{\text{稳态解}} \end{aligned}$$

2.3.2 频率响应

- 由DTFT卷积和性质

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

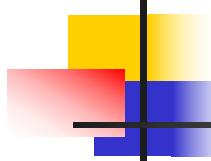
$$H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) / X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$$

$$grd[H(e^{j\omega})] = -\frac{d \arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

- 1、单位圆上的系统函数是频率响应。
- 2、传递函数存在，频率响应未必存在；
- 3、任意信号通过**LTI**系统不会产生新频率分量。



一、LTI特征函数

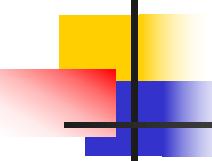
- 设LTI输入的复指数序列为：

$$x(n) = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \quad -\infty < n < +\infty$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j[\omega_0(n-m) + \phi]} = e^{j[\omega_0 n + \phi]} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} \\ &= e^{j[\omega_0 n + \phi]} H(e^{j\omega_0}) = x(n) H(e^{j\omega_0}) \end{aligned}$$

- 1、输出信号与输入为同频信号，
- 2、输出信号幅度受频率响应的幅值加权，
- 3、输出信号相位为输入信号的“相位”与系统相位响应之和



频谱及频率的再解释

■ 信号的频率分量 (DTFT再解释)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

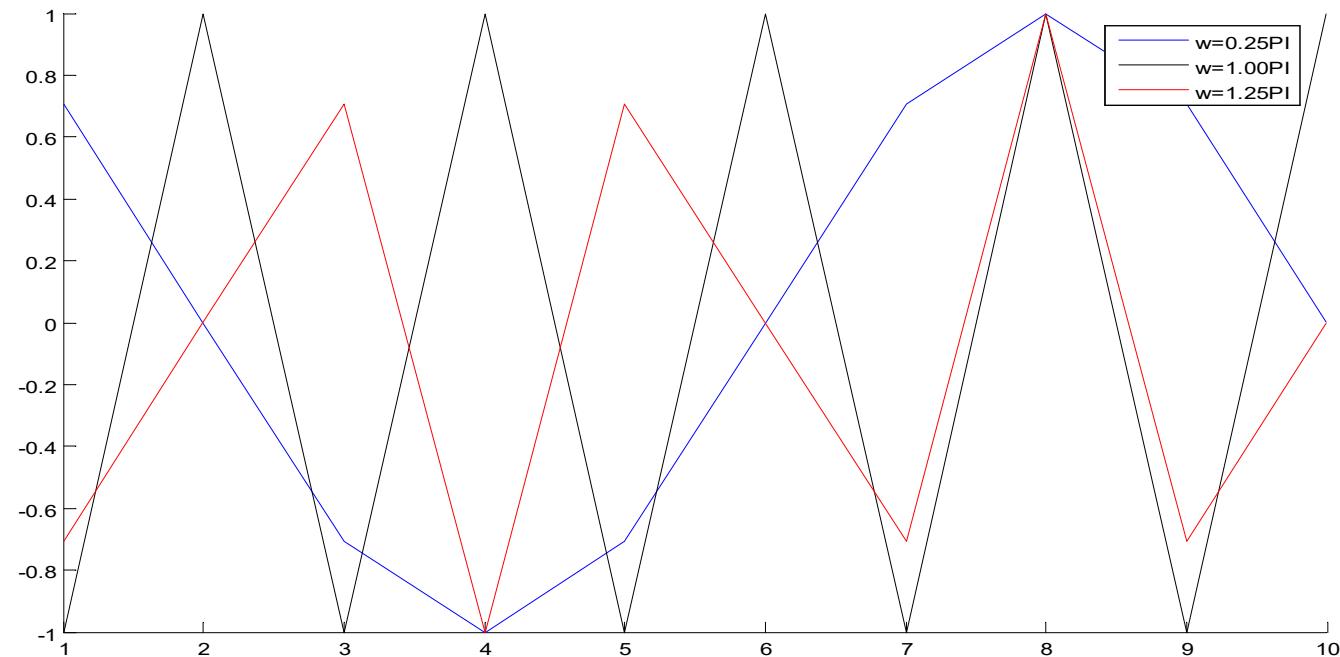
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega]}{2\pi} e^{jk\Delta\omega n}$$

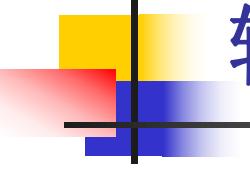
$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\Delta\omega}) H(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X(e^{jk\Delta\omega}) \Delta\omega] e^{jk\Delta\omega n}}{2\pi} H(e^{jk\Delta\omega})$$

- 1、输入信号可看作在频域上分段划分的许多个复指数分量信号
- 2、系统响应是系统对输入信号的每一个复指数分量响应之和

数字频率概念及最高频率





输入为正、余弦信号

- 设

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A[e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}]}{2}$$

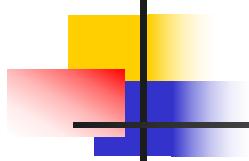
- 由复信号的情况，则得系统的输出为：

$$y(n) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{-j\omega_0})]$$

$$y(n) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} H(e^{-j\omega_0})]$$

- 假设 $h(n)$ 是实序列，则 $H(e^{j\omega})$ 满足共轭对称条件，幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 为偶对称，相角 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 为奇对称。所以有：

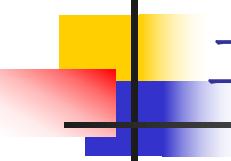
$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} \left| H(e^{j\omega_0}) \right| [e^{j(\omega_0 n + \phi)} e^{j \arg[H(e^{j\omega_0})]} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)} e^{-j \arg[H(e^{j\omega_0})]}] \\ &= A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \frac{[e^{j(\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])} + e^{-j(\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})])}]}{2} \\ &= A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \cos \{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\} \end{aligned}$$

- 
- 例题3: LTI系统由零状态的差分方程描述:

$$y(n)-2y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)$$

- 若输入 $x(n)=\cos(0.3n)+\sin(1.4n)$, 请求系统输出 $y(n)$

- 例题4: LTI系统频率响应为: $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\omega - 1 & |\omega| < 0.5\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- 若输入 $x(n)=\cos(0.3\pi n)+\sin(1.4\pi n)$, 请求系统输出 $y(n)$



二、系统零极点与频率响应的关系

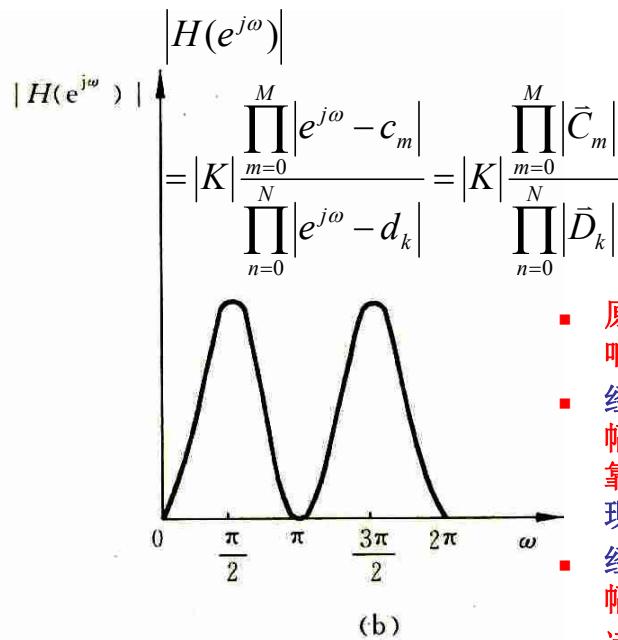
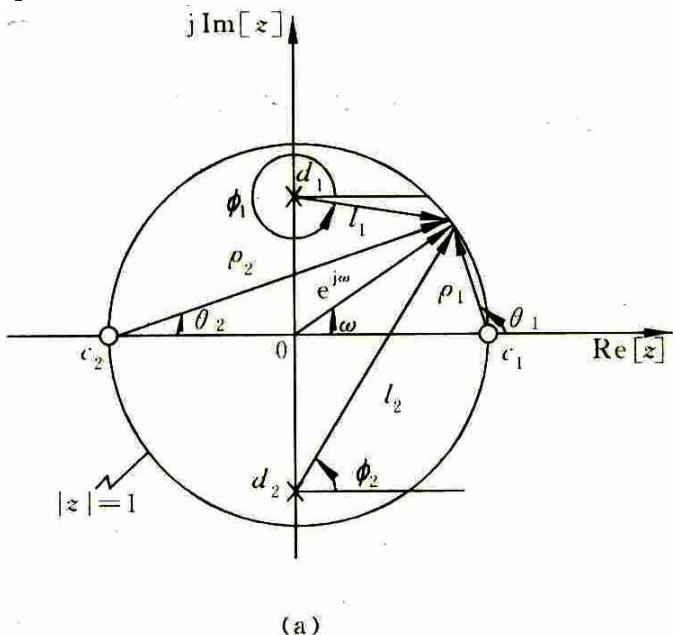
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=0}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{n=0}^N (1 - d_n z^{-1})} = K \cdot z^{N-M} \frac{\prod_{m=0}^M (z - c_m)}{\prod_{n=0}^N (z - d_n)}$$

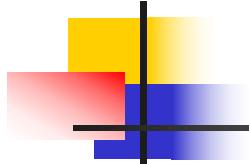
- 式中 c_m 是系统的零点, d_k 是系统的极点, 它们都由差分方程的系数 a_k 和 b_m 决定。
- 除比例常数 K 以外, 系统函数完全由它的全部零点、极点来确定。

幅度响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = K \cdot e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=0}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{n=0}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$



- 原点处的零、极点对幅度响应无任何影响。
- 经过单位圆上的一个零点，幅度响应就变为零，经过靠近单位圆的零点则会出现谷点；
- 经过单位圆附近的极点时幅度响应就会出现峰点
- 远离极点和零点的区域幅度特性会比较平坦



相位响应

$$\arg[H(e^{j\omega})]$$

$$= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{n=0}^N \arg[e^{j\omega} - d_n]$$

$$= \arg[K] + (N - M)\omega + \sum_{m=0}^M \arg[\bar{C}_m] - \sum_{n=0}^N \arg[\bar{D}_n]$$

$$= \arg[K] + \sum_{m=0}^M \{\arg[\bar{C}_m] - \omega\} - \sum_{n=0}^N \{\arg[\bar{D}_n] - \omega\}$$

- 原点处的零、极点对相位响应为线性作用，极点为正群延迟（滞后），零点为负群延迟（超前）。
- 靠近单位圆的零点和极点会造成相位的剧烈变化，导致较大的群延迟；
- 远离极点和零点的区域相位特性会比较平坦
- 单位圆外部零点或极点造成相位连续增长，而单位圆内零极点对相位影响则随频率周期性归零。

一阶差分系统

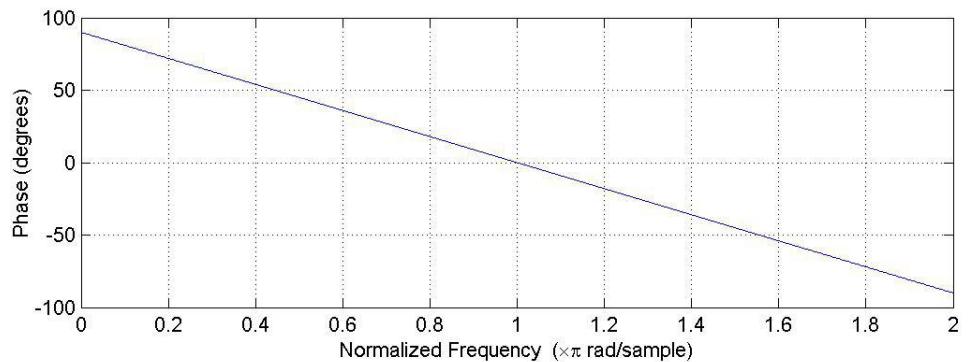
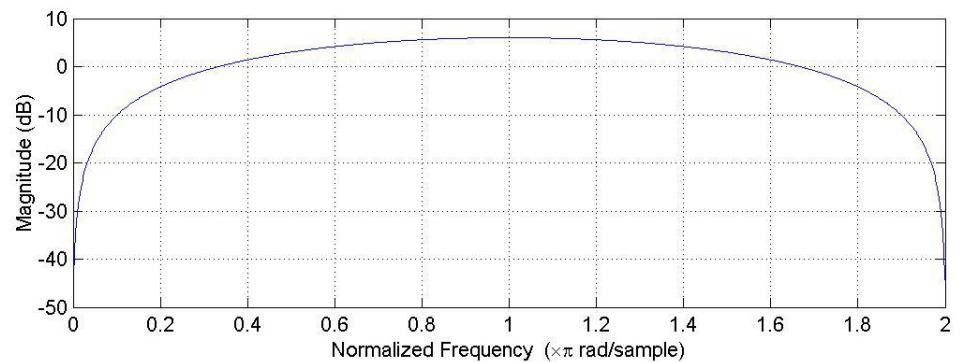
$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n])$$

$$= 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 2 - 2 \cos \omega$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c \tan \frac{\omega}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

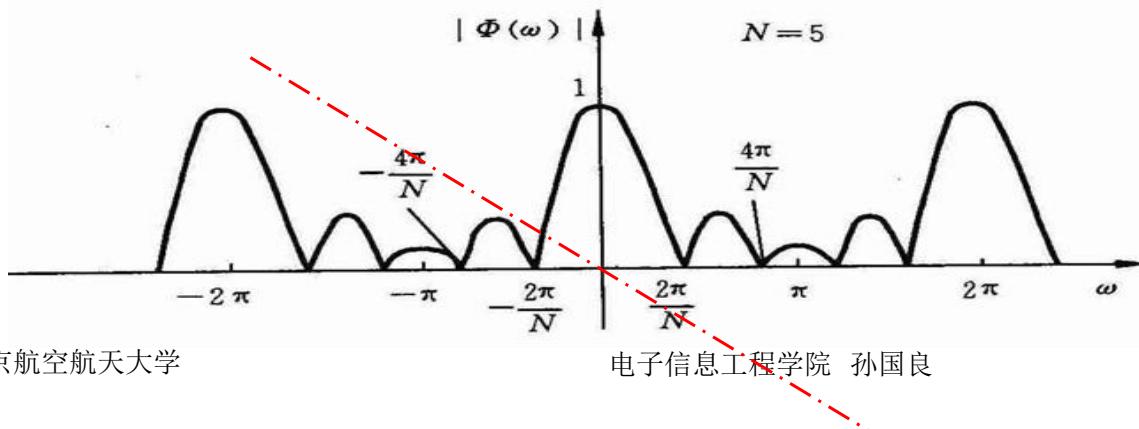


滑动平均滤波器

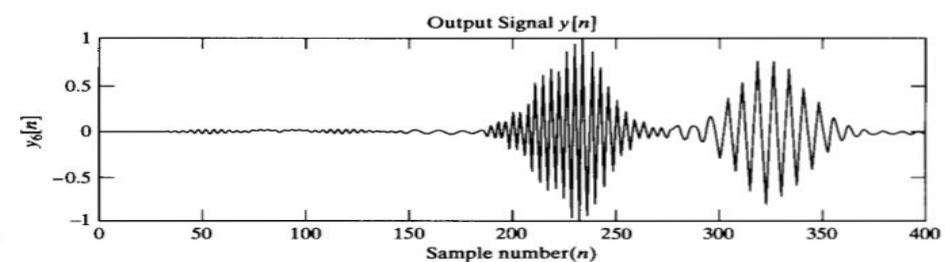
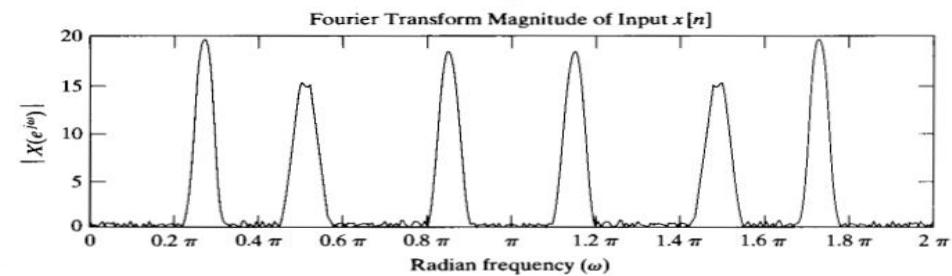
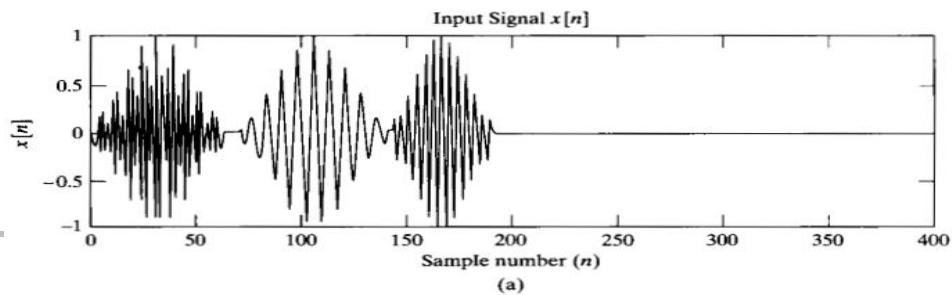
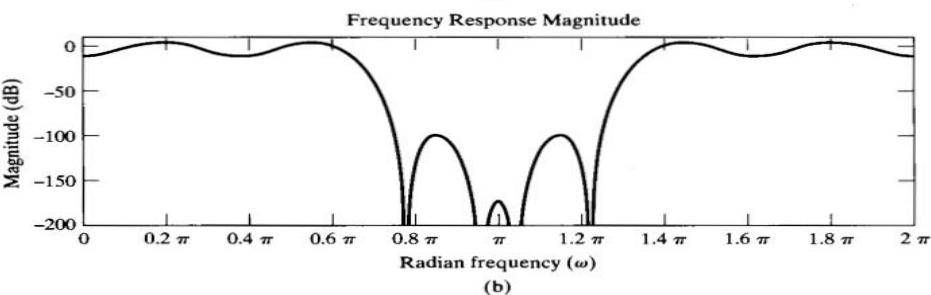
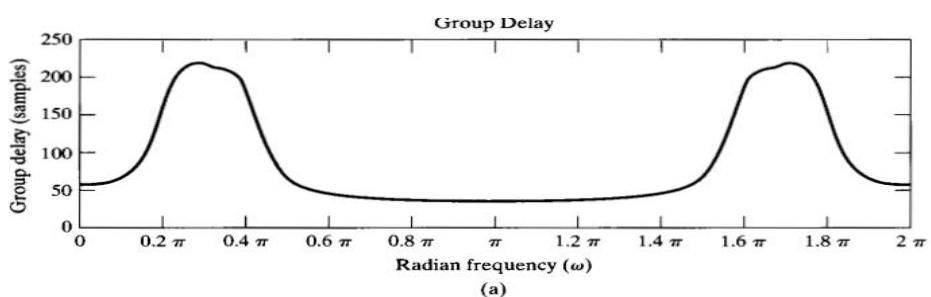
$$y(n) = \frac{1}{5} \sum_{m=0}^4 x(n-m)$$

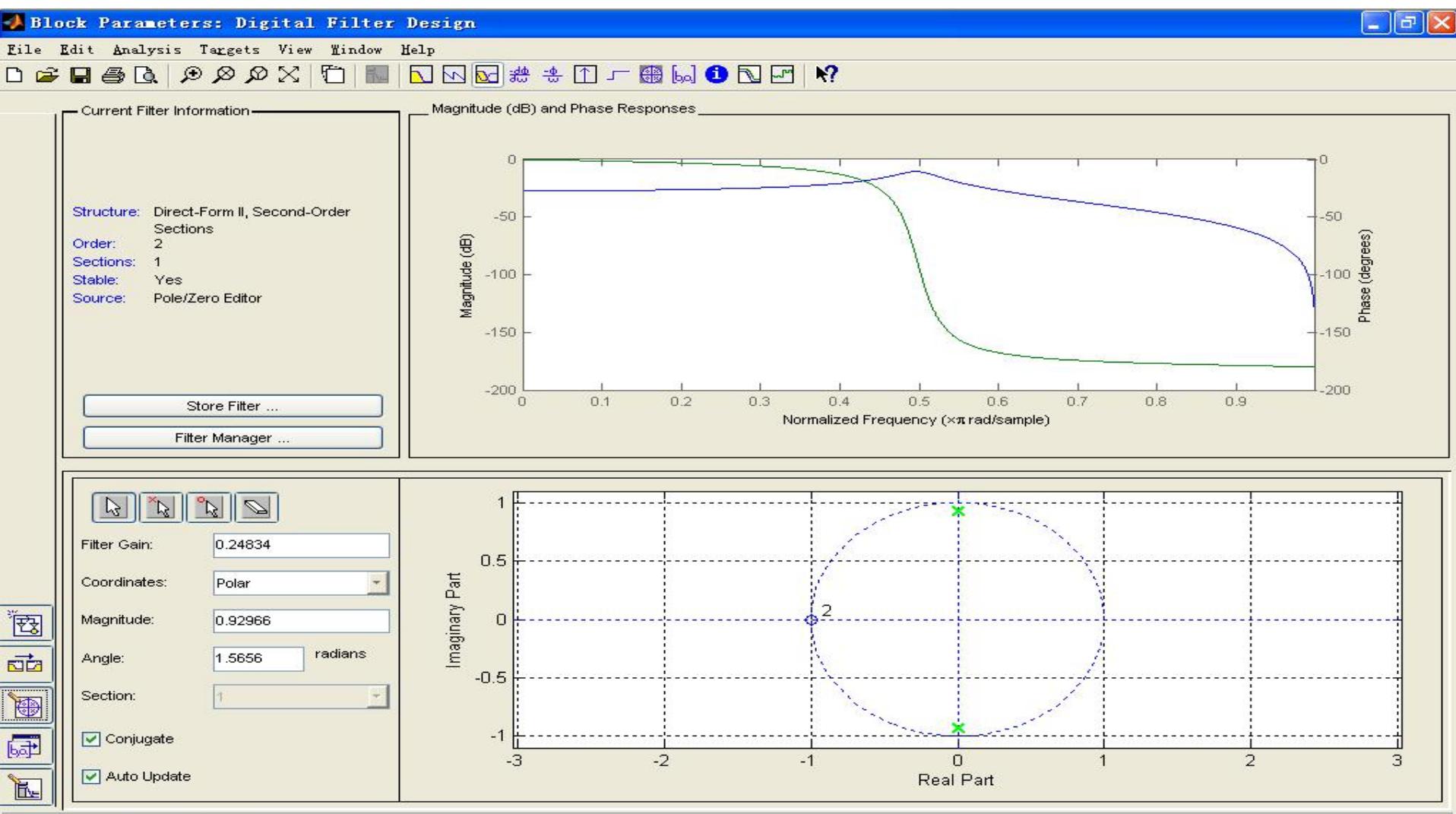
- $h(n) = u(n) - u(n-5);$

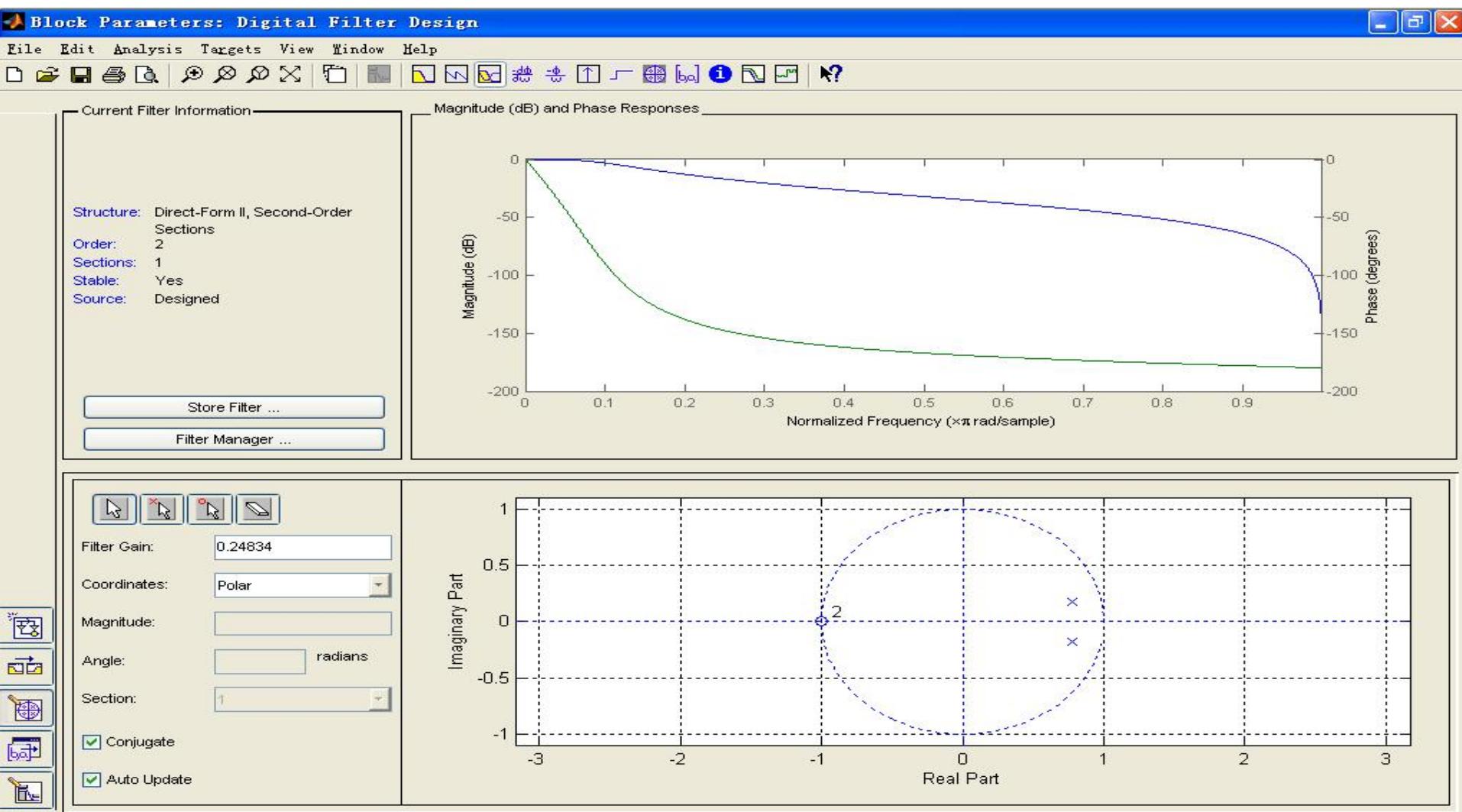
$$W_R(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = e^{-jw(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$



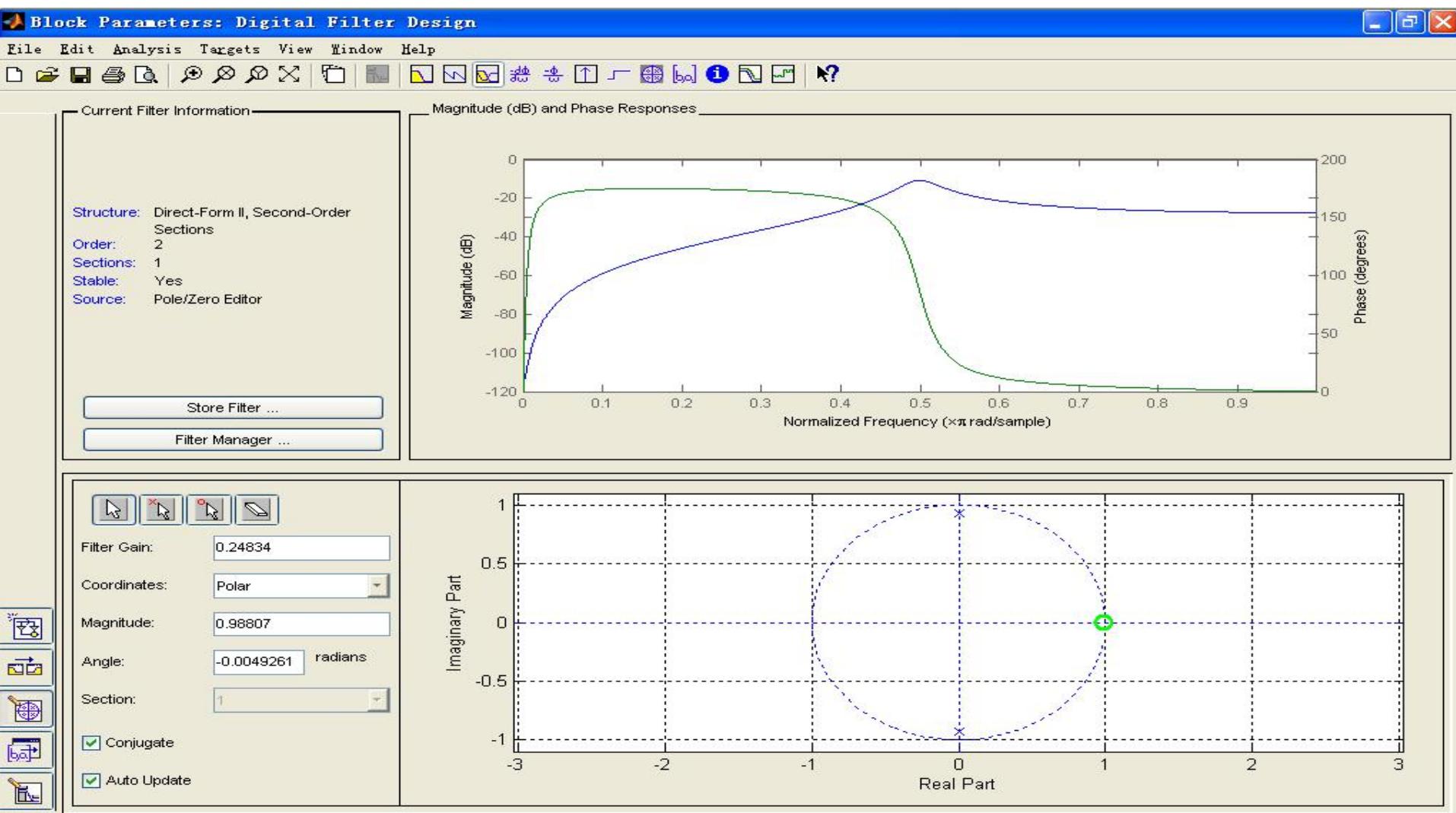
增益和群延迟的理解

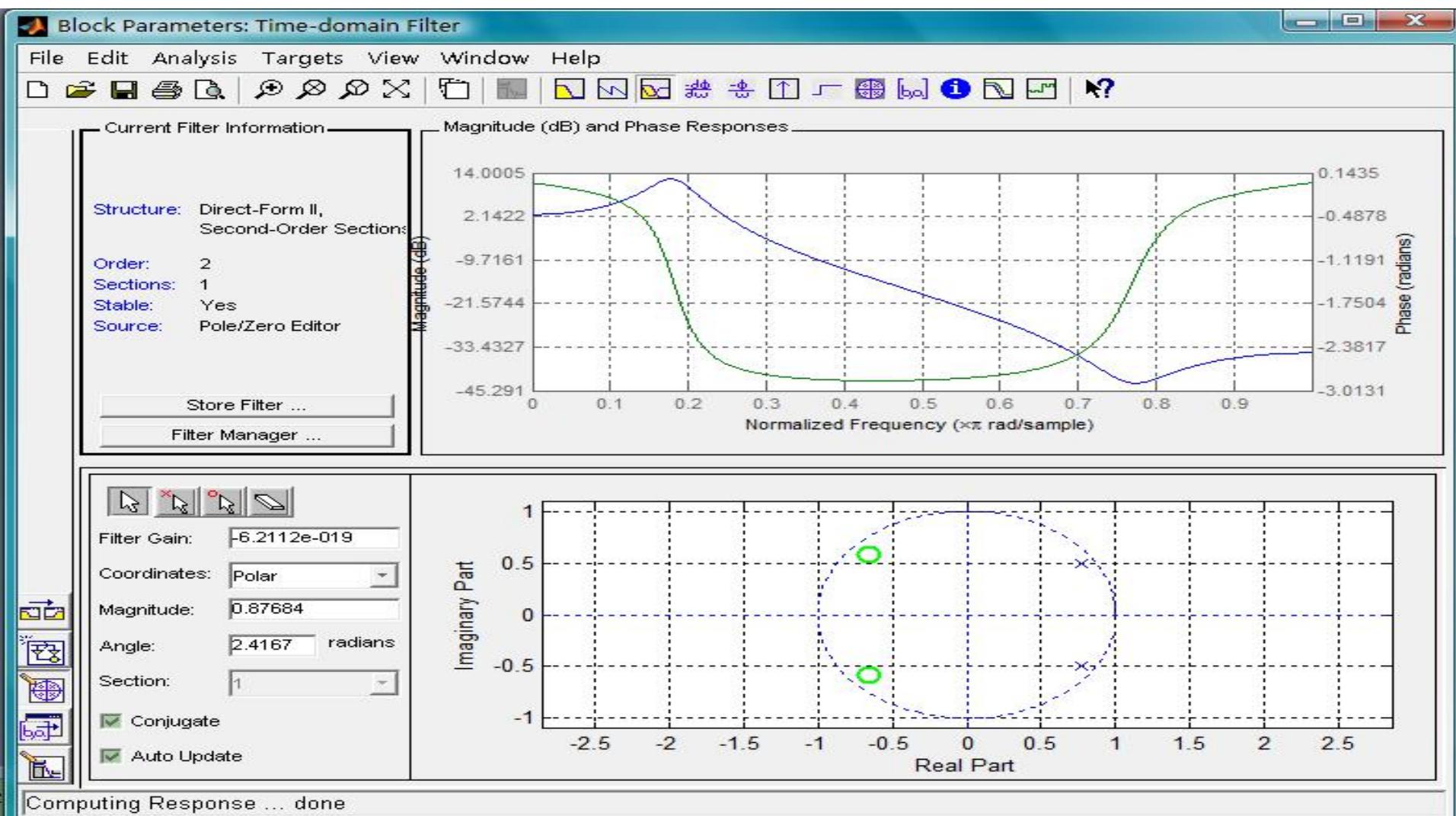


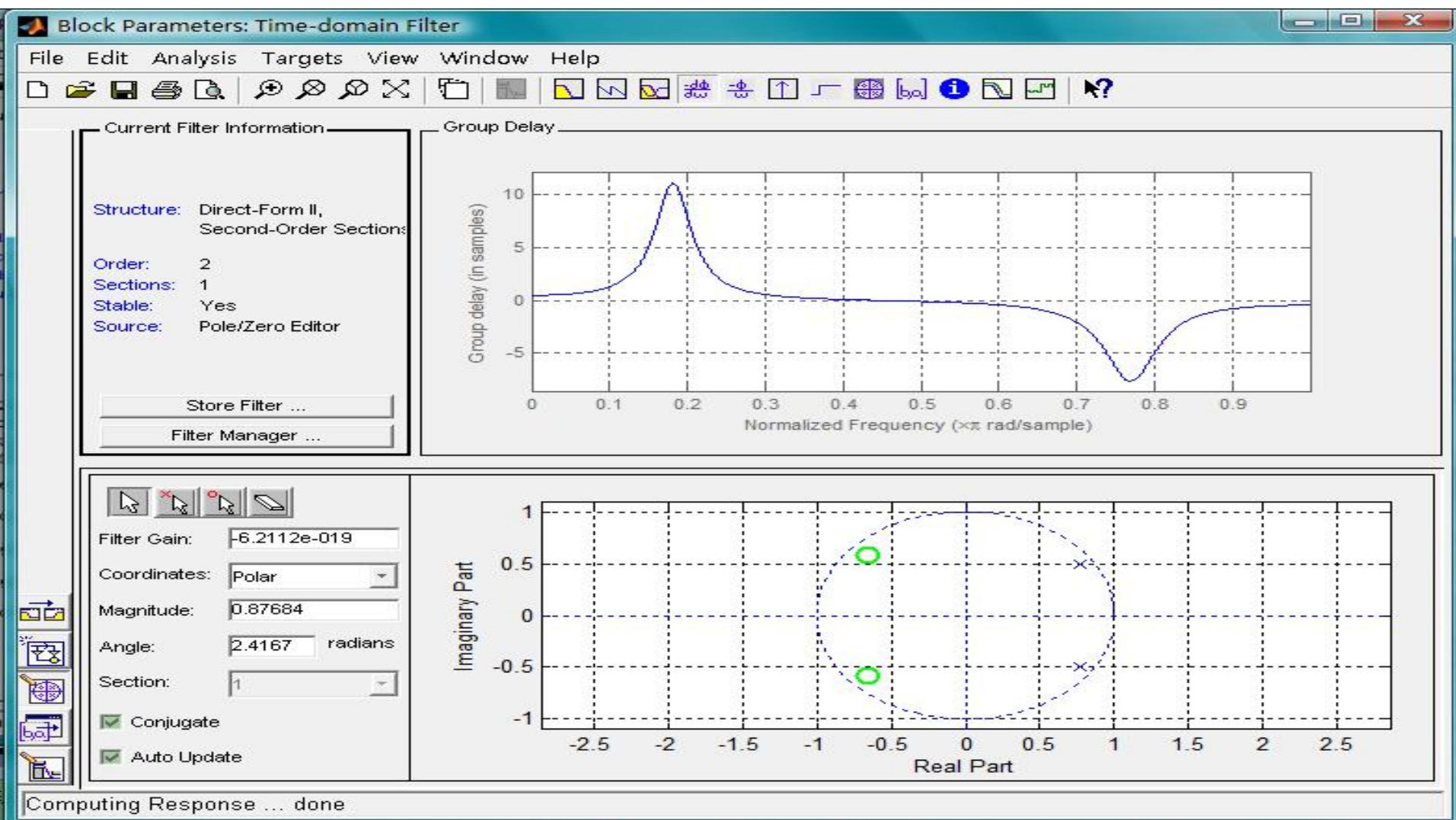


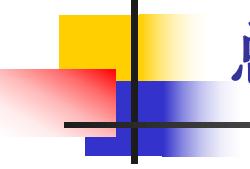


Designing Filter Done









总结：

- 系统函数
 - 前提 LTI
 - 因果稳定性的约束
 - 与差分方程的关系
- 频率响应
 - 稳定的LTI
 - 对输入信号的作用
 - 频谱分量
 - 特征函数
 - 增益和相位及群延迟
 - 与零极点的关系
 - 幅度与零极点
 - 相位与零极点

作业

- 2.32
- 2.33
- 2.42

- 3.40
- 3.41
- 5.1 5.4 5.12





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

3.3



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第二章

Contents

离散时间系统 变换域分析

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散时间傅里叶变换



二

Z变换及反变换



三

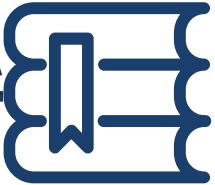
系统函数与频率响应



四

LTI系统幅相特性分析

LTI系统幅相特性分析



- 典型频响的LTI系统有哪几类？
- 具体表现形式和作用是什么？

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 一般来说关于幅度特性的了解并没有给出任何有关相位的信息；两者独立。然而，**有理LTI系统**幅度和相位特性间存在制约

- 如果幅度特性已知，与其有关的相位特性仅有有限种选择。
- 如果零极点个数（阶数）和相位特性已知（线性相位），除了幅度加权因子外，也仅有有限可数种幅度特性可供选取。
- 在特殊条件下（如最小相位），幅度与相位特性一一对应。

离散时间傅里叶变换

Z变换及反变换

系统函数与频率响应

LTI系统幅相特性分析

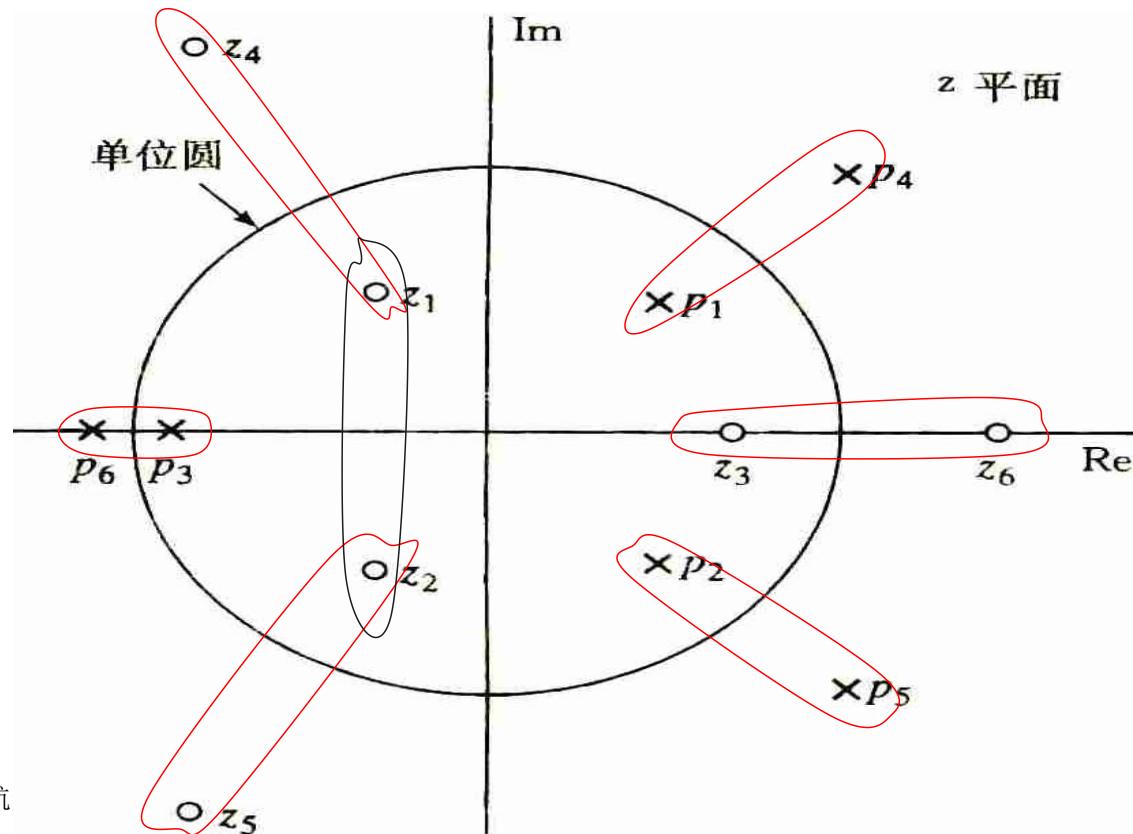
幅度特性约束下的系统函数

■ 给定频率响应的幅度平方特性下

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- 尽量使由幅度平方响应演化出来的零、极点在单位圆内外皆有
- 使得总能够选择出一个物理可实现的系统来满足幅度响应的要求。

Ex: 设由系统幅度响应所引导的 $C(z)$ 的零、极点如图所示，若系统为常实系数线性差分方程所确定的因果稳定系统，试确定其系统的零、极点。



EX: 具有相同C(z)的LTI系统

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

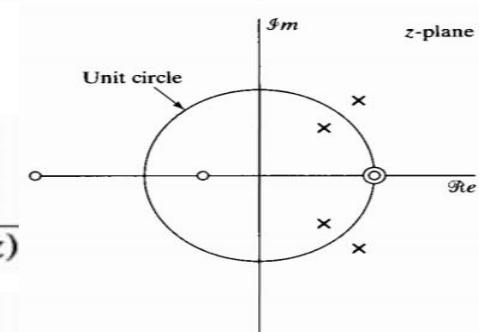
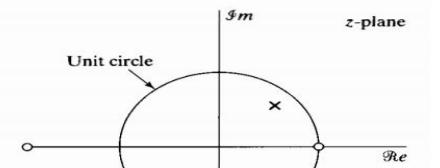
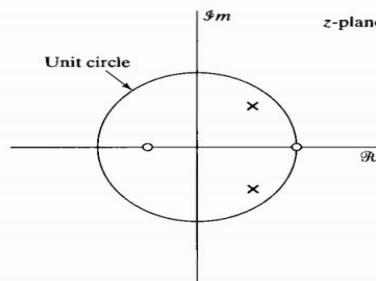
$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}.$$

$$C_1(z) = H_1(z)H_1^*(1/z^*)$$

$$= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})2(1 - z)(1 + 0.5z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)}$$

$$C_2(z) = H_2(z)H_2^*(1/z^*)$$

$$= \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)}.$$



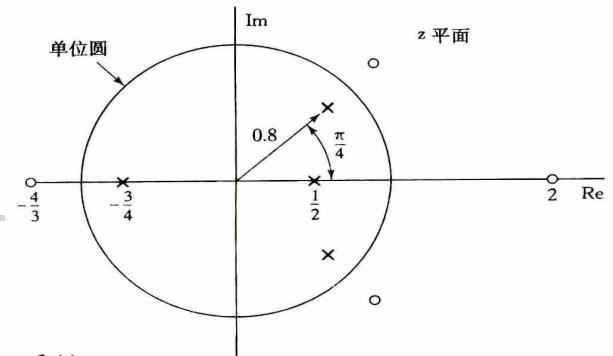
一、全通系统

- 若系统对所有的频率分量的幅度响应均为非零恒定值，则该系统即为全通系统。

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

- 幅度响应为：

$$\begin{aligned} |H_{ap}(e^{j\omega})| &= \left| H_{ap}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| e^{-j\omega} \left(\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right) \right| = \left| e^{-j\omega} \right| \left| \frac{x^*}{x} \right| = 1 \end{aligned}$$



- 通常，全通系统就是由上式扩展来的：

$$\begin{aligned}
 H_{ap}(z) &= A \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad \xrightarrow{\text{实冲激响应系统}} \\
 &= A \prod_{k=1}^{Nr} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{(N-Nr)/2} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k^* z^{-1}} = A \frac{Z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)}
 \end{aligned}$$

- $D(z)$ 为实系数多项式，所以

$$D(e^{j\omega}) = D^*(e^{-j\omega}) \quad |H_{ap}(z)|_{z=e^{j\omega}} = A(const)$$

- 全通系统的零点与极点呈共轭倒数对关系。
- 全通系统是从其幅度响应特性定义，但相位响应却更重要。

相位响应

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = -a^* \left(\frac{z - \frac{1}{a^*}}{z - a} \right)$$

- 令: $a = re^{j\theta}$

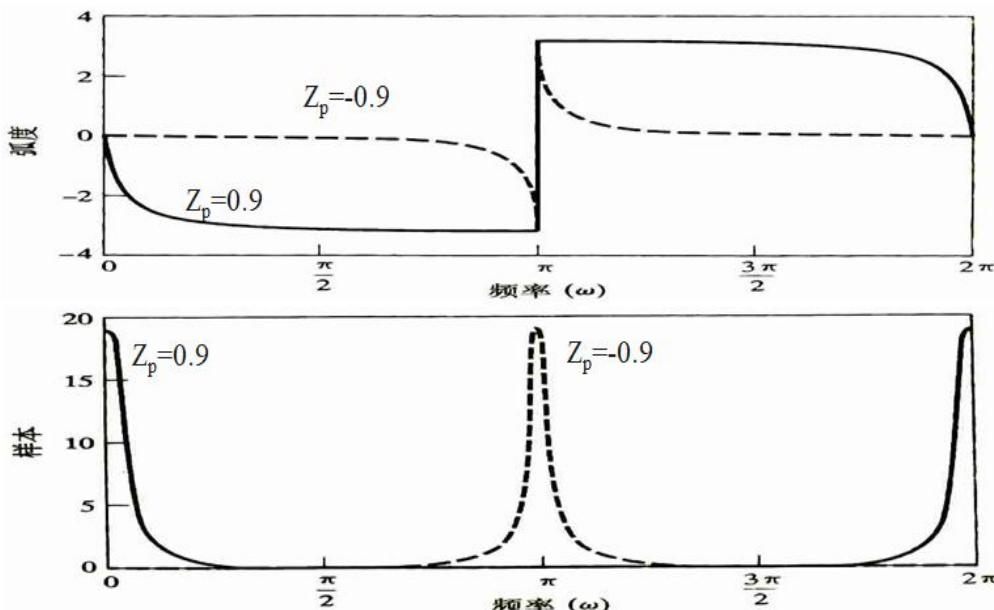
$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$= -\omega - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right]$$

$$grad[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{-j(\omega - \theta)}|^2}$$

- 群延迟为正值, 连续相位递减。



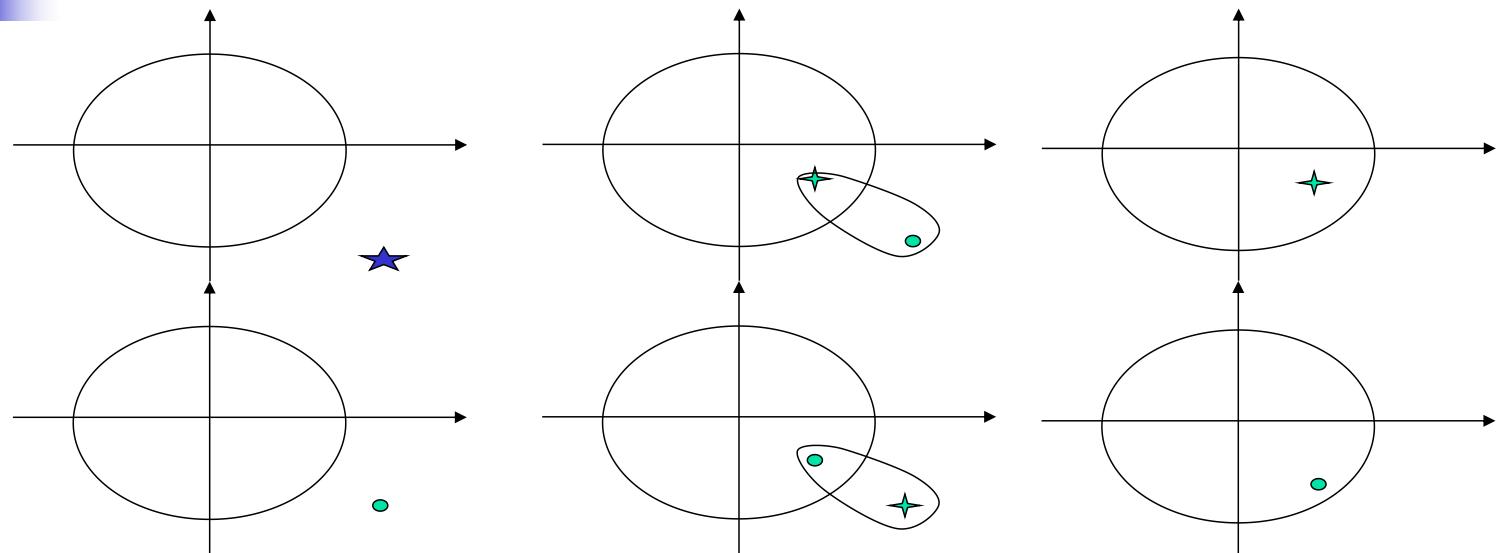
- 对于高阶因果全通系统而言，由于：

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^N \arg[H_{api}(e^{j\omega})]$$

$$grd[H_{ap}(e^{j\omega})] = \sum_{i=1}^N grd[H_{api}(e^{j\omega})]$$

- 同样具有**群延迟为正值**，**连续相位负递减**的特性。
- 全通系统在实际中有如下用途：
 - **1、用作相位均衡器**，对系统相位、群延迟失真进行补偿；
 - **2、任何因果稳定系统皆可分解为全通系统和最小相位系统的级联；**
 - **3、若所设计的系统是非稳定的，可用其交换零、极点，使系统**稳定**，而保证系统的幅度特性不变。**

非稳定系统调整为稳定系统



非最小相位系统调整为最小相位系统

二、最小相位系统

- LTI有理系统，其频率响应的幅度特性不能唯一确定该系统。原因何在？
 - 稳定、因果性要求并没有对零点作约束
 - 假如某一系统具有给定的幅度特性，则该系统与任何可选择的全通因子级联将不影响它的幅度特性。
- 逆向思维：
 - 是否任何因果稳定有理系统函数是由一个决定幅度特性的基本核被一系列全通因子包裹着？即系统是全通系统和某一类基本系统（最小相位系统）级联的形式？即：

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

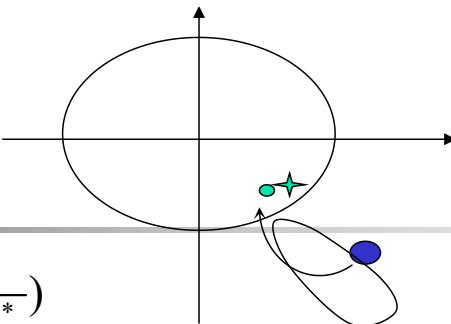
- 寻找的线索？全通因子的零点都在单位圆外

LTI系统全通分解 证明:

- 假设 $H(z)$ 为因果稳定非最小相位系统，将有 r 个零点在单位圆外 (z 在单位圆内)，其余的零、极点都在单位圆内。
- 在单位圆内的零、极点将构成最小相位系统 $H_1(z)$ ，那么 $H(z)$ 就能表示成：

$$H(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^r \left(z - \frac{1}{c_k} \right)$$

$$H(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^r \left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)$$



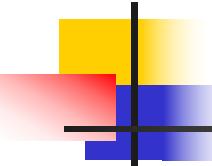
$$= H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-c_k^* \frac{\left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)}{(z - c_k)} \right] \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right]$$

$$= H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right] \prod_{k=1}^r \left[-c_k^* \frac{\left(z - \frac{1}{c_k^*} \right)}{(z - c_k)} \right]$$

$$= \left\{ H_1(z) \prod_{k=1}^r \left[-\frac{1}{c_k^*} (z - c_k) \right] \right\} \prod_{k=1}^r \left[\frac{\left(z^{-1} - c_k^* \right)}{(1 - c_k z^{-1})} \right] = H_{\min}(z) H_{ap}(z)$$

结论：

- 1) $H_{ap}(z)$ 由单位圆外的零点和其单位圆内的共轭倒数极点组成。
- 2) 最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 的零极点全部都在单位园内；不仅包含 $H(z)$ 中位于单位圆内的零、极点，而且也包含了与单位圆外那些零点镜像到单位圆内的共轭倒数零点。
- 3) 将最小相位系统位于单位圆内的零点反射到单位圆外与它们成共轭倒数的位置上而形成一个非最小相位系统。它们都具有相同幅度特性。



最小相位系统的性质

- “最小相位”名词代表这类系统三个**本质特征**:
 - 最小相位延迟
 - 最小群延迟
 - 最小能量延迟

1、最小相位滞后

- 由系统的全通分解知:
- 可以进一步得到:

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] \leq \arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$$

$$|\arg[H(e^{j\omega})]| \geq |\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]|$$

- 全通系统总是使最小相位系统的连续相位减小（滞后）
- 对于具有相同幅度响应的所有系统而言，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的相位滞后。

2、最小群延迟

- 注意到具有相同幅度响应系统的群延迟为：

$$grd [H(e^{j\omega})] = grd [H_{\min}(e^{j\omega})] + grd [H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- 由于全通系统的群延迟对于所有的频率皆为正值，所以：

$$grd [H(e^{j\omega})] \geq grd [H_{\min}(e^{j\omega})]$$

- 因此在具有相同幅度响应的所有系统中，全部零、极点在单位圆内的系统实现具有最小的群延迟。

3、最小能量延迟

- 对于具有相同幅度响应的所有系统，该性质包含有两部分内容：
 - 1) 初值能量最大，即初值能量延迟最小：
 - 2) 部分能量最大，即部分能量延迟最小：

$$\sum_{m=0}^n |h(n)|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2$$

- 最小相位系统的部分能量最集中在**n=0**周围，也就是说，**最小相位系统的能量在所有相同幅度响应函数的系统中延迟最小**，也称为**最小能量延迟系统**。

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z) = H_{\min}(z) \frac{(z^{-1} - z_k^*)}{(1 - z_k z^{-1})} \quad \frac{H(z)}{(z^{-1} - z_k^*)} = \frac{H_{\min}(z)}{(1 - z_k z^{-1})} = Q(z)$$

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}) \quad H(z) = Q(z)(z^{-1} - z_k^*)$$

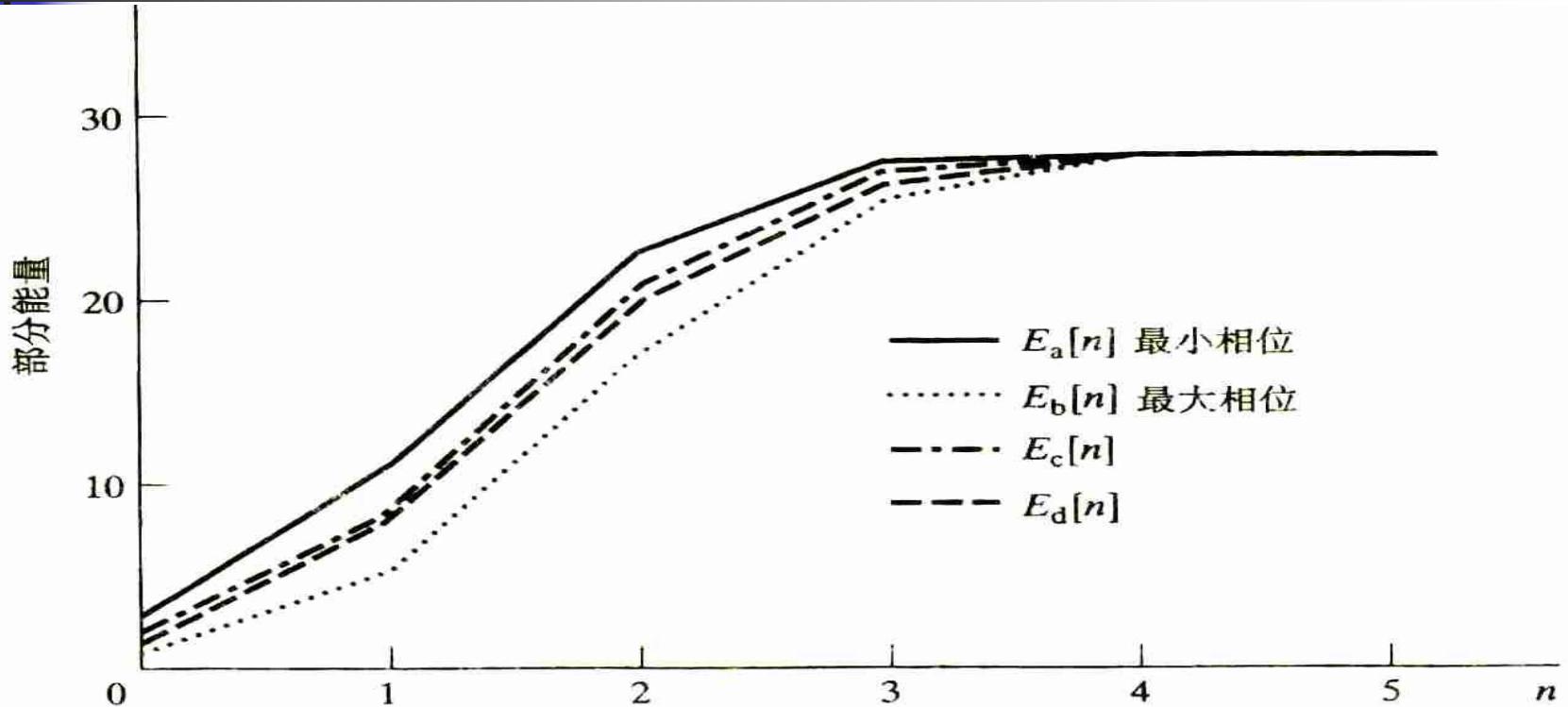
$$h_{\min}[n] = Z^{-1}\{H_{\min}(z)\} = q[n] - z_k \cdot q[n-1]$$

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = q[n-1] - z_k^* \cdot q[n]$$

$$z_k = a + jb$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 = \sum_{m=0}^n \left\{ |h_{\min}[m]|^2 - |h[m]|^2 \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \left\{ |q[m] - (a + jb) \cdot q[m-1]|^2 - |q[m-1] - (a - jb) \cdot q[m]|^2 \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \left\{ (1 - a^2 - b^2) \cdot [q^2[m] - q^2[m-1]] \right\} = (1 - |z_k|^2)q_n^2 \end{aligned}$$

最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统，因此该系统也称为**最大相位系统**。



逆系统与失真补偿

■ 逆系统

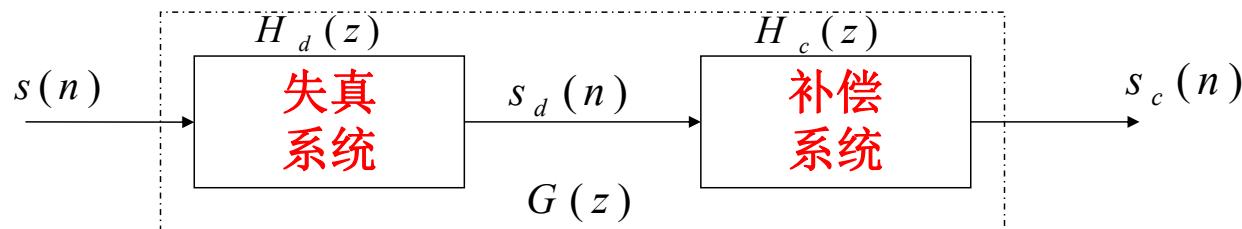
- 系统函数为 $H(z)$ 的LTI系统，其对应的逆系统定义为它与原系统级联后的总系统函数为1，即： $H_i(z) = 1/H(z)$
 - 原系统是有理系统，逆系统零极点分别是原系统极零点；
 - 若原系统和逆系统的频率响应存在，满足

$$H_i(e^{j\omega}) = 1 / H(e^{j\omega})$$

- 要求存在逆系统是合理的，譬如通信接收系统是发射系统的逆系统，才能无失真的恢复发射信息

信号传输失真

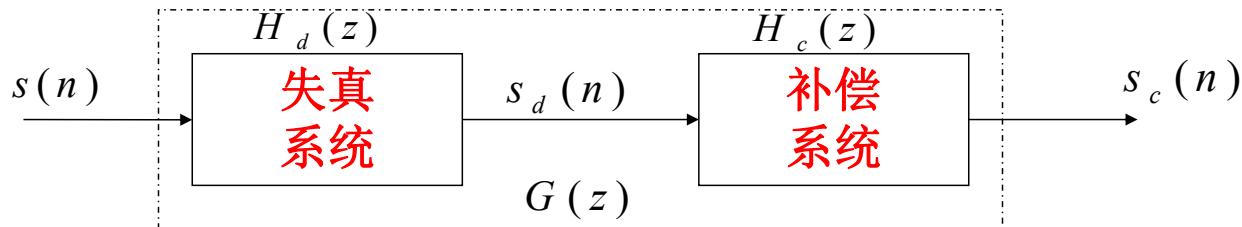
- 若一个信号已经被某个不合要求的频率响应的**LTI**系统所失真，那么可以用一个**补偿**系统来处理这个**失真了**的信号，如图所示。



- 传输失真包括**幅度失真**和**相位失真**两大类；
- 所有系统都存在逆系统，但并非所有因果稳定系统都有因果稳定的逆系统；
- 最小相位系统本身是因果稳定的，并且也有一个因果和稳定的逆系统，从而可以实现幅度和相位失真的**完全补偿**。

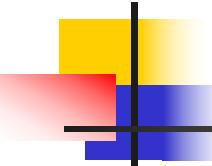
信号失真的补偿

- 若信号被某个**非最小相位的LTI**系统所失真，可以用一个**补偿**系统来补偿信号的**失真**。



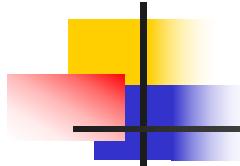
- 此时幅度失真和相位失真不可能被同时补偿；幅度失真可以利用其最小相位因子完全补偿：
- $$H_d(z) = H_{d \min}(z)H_{ap}(z)$$
- 相位失真可利用全通因子在某些有效频段进行补偿和平衡；

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d \min}(z)}$$



作业

- 5.12
- 5.14
- 5.18
- 5.22



■ 1.求单位冲激响应

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

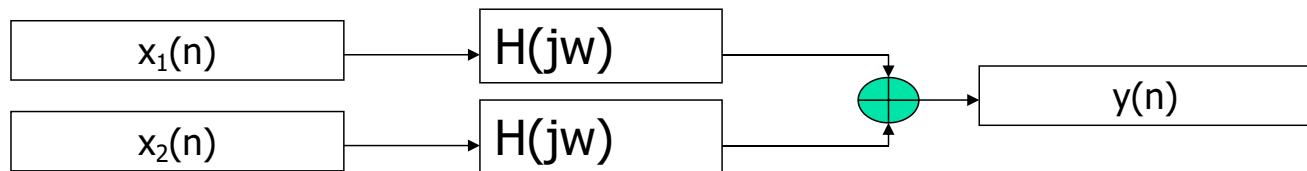
■ 2、求 $h(n-a)$ 的DTFT

三、 线性相位系统

- 在设计滤波器和其它系统中，往往希望系统在某一频带范围内具有近似**恒定的幅度**和**零相位**特性，以使信号通过时该频带信号**不失真**。
- 但是：
 - 1) 对因果系统而言，零相位是几乎是奢望。
 - 2) 相位失真使信号在时域的波形有很大的畸变，即便幅度响应为恒定时亦是如此。

Example1: 相位响应对信号的影响

- 双频信号经过**实**LTI系统



$$x_1(n) = A_1 \cos(\omega_1 n + \varphi_1), \quad x_2(n) = A_2 \cos(\omega_2 n + \varphi_2)$$

$$\text{suppose : } |H(e^{j\omega})| = 1, A_1 = A_2 = 1, \varphi_1 = \varphi_2 = 0;$$

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

$$y(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi(\omega_1)) + \cos(\omega_2 n + \varphi(\omega_2))$$

Example1: 相位失真对信号的影响

w1=0.03

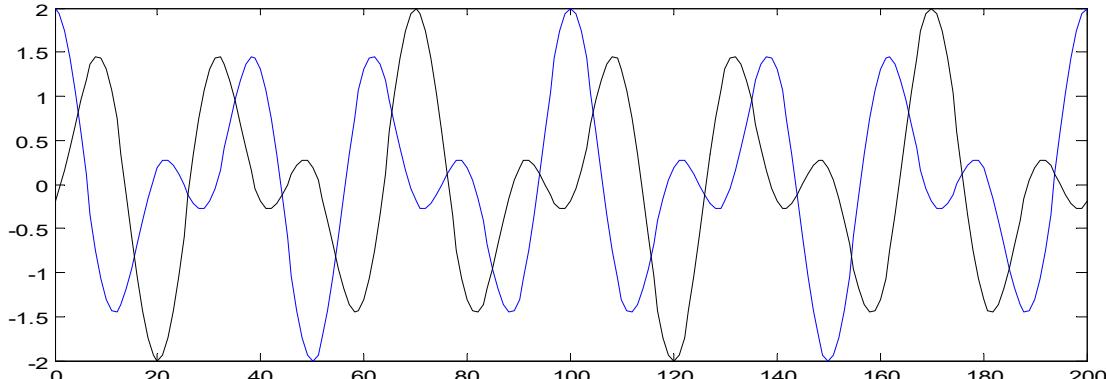
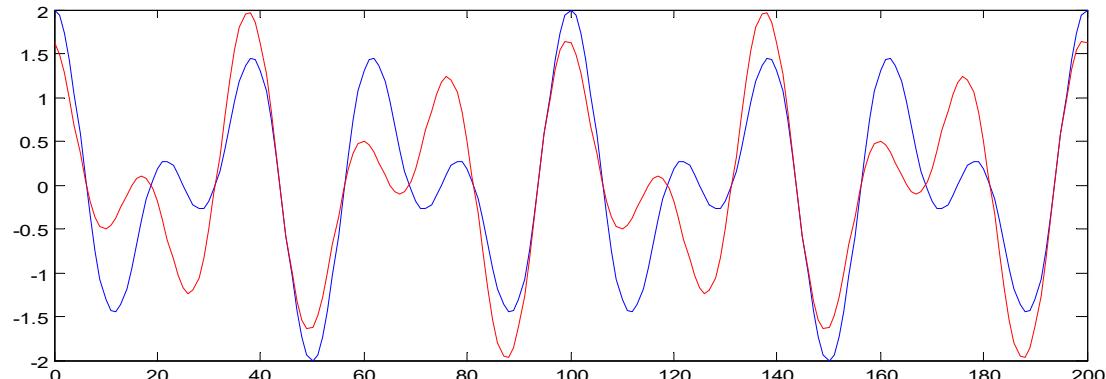
w2=0.05

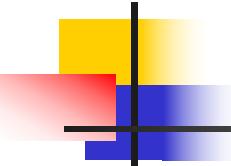
$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -38$$

$$\varphi(\omega_1) = \omega_1 * -70$$

$$\varphi(\omega_2) = \omega_2 * -70$$





初步认知：

- 非线性相位响应使信号有很大的波形畸变，即使幅度响应为恒定时亦是如此；
- 线性相位响应在时域上表现的是整个信号的时间平移，信号的波形不发生失真。
- 不考虑幅度响应条件下，线性相位系统即是所要寻找的物理可实现的无失真传输系统
- 下一步？
 - 如何寻找适合实用要求的线性相位系统？

一、基本定义

- 基本定义:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 相位响应

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$$

- 群延迟

$$grd[H(e^{j\omega})] = -\frac{d \arg[H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

- 线性相位->群延迟为常数

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega + \beta \quad (\alpha, \beta = const)$$

二、线性相位系统的时域特征

- 考虑一个LTI系统，其频率响应为：

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi$$

- 相位和群延迟分别如下：

$$\arg[H_{id}(e^{j\omega})] = -\omega\alpha$$

$$grd[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha$$

- 单位冲激响应为：

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n - \alpha)] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

$$h_{id}(n) = Sa[\pi(n - \alpha)] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

■ 对任意输入 $x(n)$, 系统的输出为:

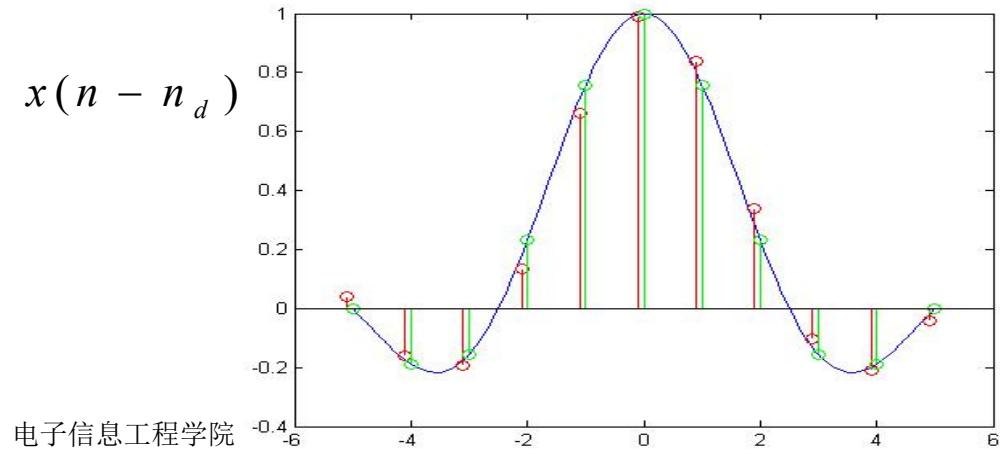
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n - k - \alpha)]$$

■ 1) 若 α 为整数, 则有:

$$h_{id}(n) = \delta(n - n_d)$$

$$y(n) = x(n) * \delta(n - n_d) = x(n - n_d)$$

■ 2) 若 α 为非整数实数?



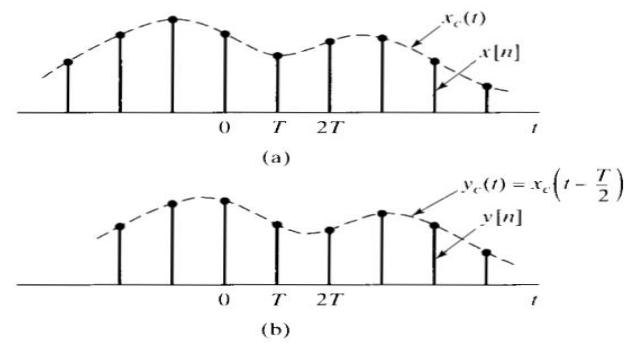
群延迟为非整数

- 系统输出

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(n - k - \alpha)]$$

- 相当于对如下模拟信号在 nT 的采样序列:

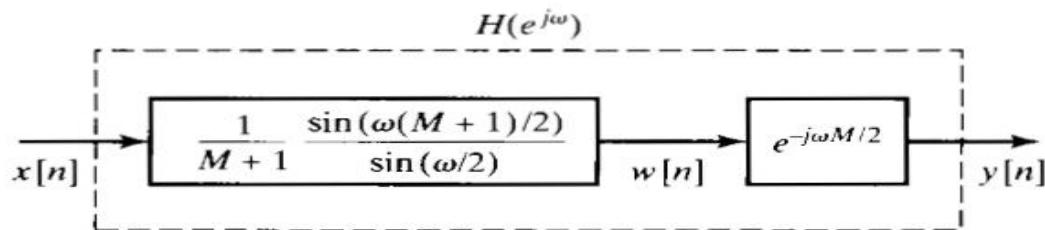
$$\begin{aligned} y_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(t - \alpha T - kT) / T] \\ &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT) Sa[\pi(t - kT) / T] \right\} * \delta(t - \alpha T) = x_c(t) * h_c(t) \end{aligned}$$



非整数延迟 (4.10) ---滑动平均系统

- $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)$
- $h(n) = u(n) - u(n-N)$

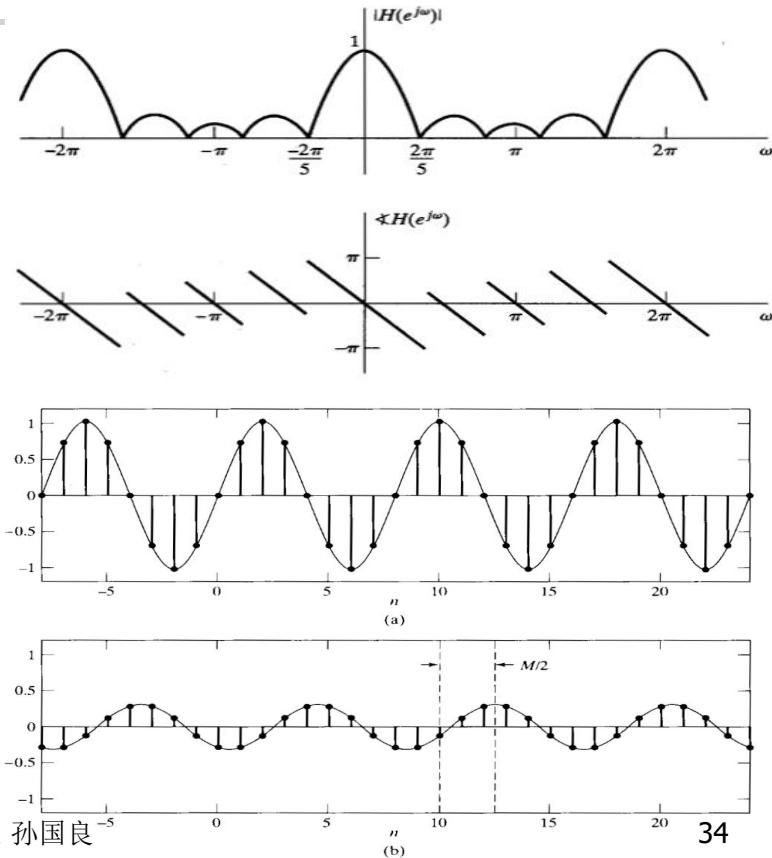
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi.$$



北京航空航天大学

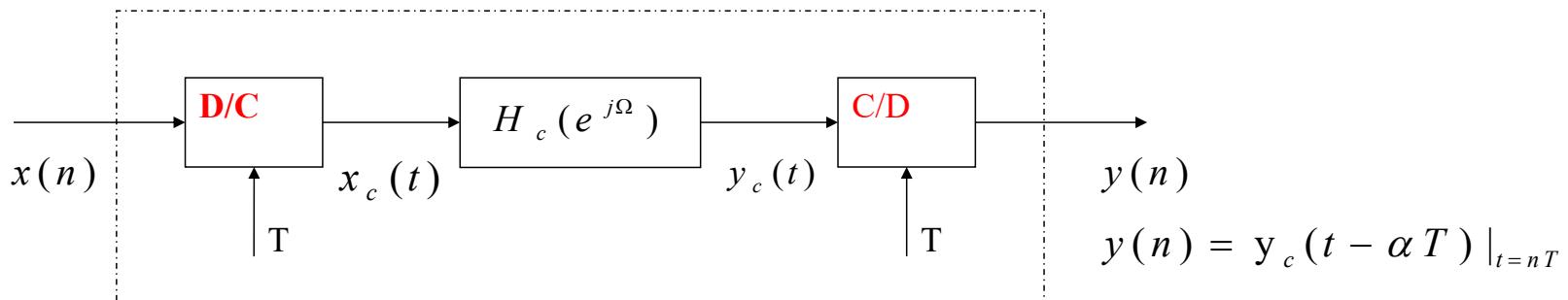
$$x[n] = \cos(0.25\pi n)$$

电子信息工程学院 孙国良



$$\begin{aligned}
 y_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Sa[\pi(t - \alpha T - kT)/T] \\
 &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT) Sa[\pi(t - kT)/T] \right\} * \delta(t - \alpha T) = x_c(t) * h_c(t)
 \end{aligned}$$

容易看出，正是序列 $x_c(t)$ 的重构信号，是频率响应为 $h_c(t)$ 系统的单位冲激响应 $H_c(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\alpha T}$



由上面的讨论可以看出，若LTI系统具有随输入频率而相位呈线性变化的特性，那么它将是一个理想的延迟系统，其中的 α 代表了延迟量。

- 上面讨论的是具有全通特性的**LTI**线性相位系统，对于更为一般的情况：

- $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$
- 如对于线性相位的低通滤波器而言：
-
- $$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$
- 相应的单位冲激响应为：

$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n - \alpha)] = \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

由单位冲激响应:

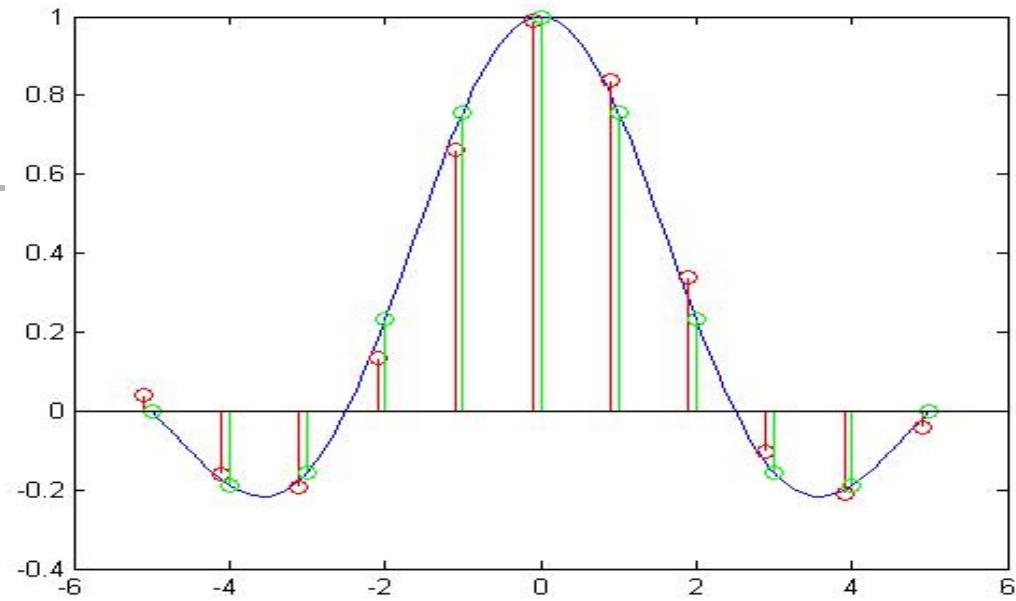
$$h_{id}(n) = \text{Sa}[\omega(n - \alpha)] \\ = \frac{\sin \omega(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad -\infty < n < +\infty$$

可以得到:

$$h_{id}(\alpha + n) = h_{id}(\alpha - n)$$

$$h_{id}(2\alpha - n) = h_{id}(n)$$

如果 α 为整数，则单位冲激响应关于 偶对称；若 α 不为整数，则单位冲激响应关于 π 不是严格意义上的对称，但是仍然是线性相位和恒定群延迟。



广义线性相位

- 线性相位的概念加以推广是有意义的。
 - 线性相位系统具有许多优点，但是其范畴较窄。
 - 现实当中的许多系统不一定满足上面的定义，如滑动平均系统、微分系统等，但均有信号相位不失真的特性。
- 广义线性相位系统

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

- 如果不顾及由 $A(e^{j\omega})$ 的正负交替带来的相位突变及 带入的固定相位， 则系统具有恒定群延迟。

广义线性相位时频关系

$$h(n) \implies H(e^{j\omega}) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$h(n) = h^*(n) \implies H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

$$\implies |H(\omega)| = |H(-\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

实条件

$$DTFT [h(\alpha - n)] = H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha}$$

$$DTFT [h(n + \alpha)] = H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha - n) = h(n + \alpha) &\implies -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha \\ &\implies \varphi(\omega) = -\omega\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha - n) = -h(n + \alpha) &\implies -\varphi(\omega) - \omega\alpha = \varphi(\omega) + \omega\alpha + \pi \\ &\implies \varphi(\omega) = -\omega\alpha - \pi / 2 \end{aligned}$$

广义线性相位时频关系

- 由广义相位定义和DTFT时移特性知：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(\omega)e^{-j(\omega\alpha - \beta)} \\ DTFT [h(\alpha - n)] &= H(e^{-j\omega})e^{-j\omega\alpha} = A(\omega)e^{j\beta} \\ DTFT [h(n + \alpha)] &= H(e^{j\omega})e^{j\omega\alpha} = A(-\omega)e^{j\beta} \end{aligned}$$

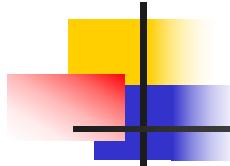
- 若A(w)为奇函数，则h(n)奇对称；
- 若A(w)为偶函数，则h(n)偶对称。

广义线性相位序列未必是实对称序列，也未必是对称序列。

实对称序列必定是线性相位序列；
扩展了线性相位的适用范围。

三、因果广义线性相位系统

- 对**实系统**而言，无论狭义线性相位，还是广义线性相位，都要求单位冲激响应序列**对称**。
- 如果再要求系统是**有理**、**因果**的，**对称性**将意味着 $\alpha >= 0$ 和 $h(n)$ 必须为**时域带限**，即有限长冲激响应 (**FIR**) 系统。
 - 因果无限长冲激响应 (**IIR**) 系统也能够具有广义线性相位，但是**系统函数不是有理的**。
- 根据对称形式和 **M=2** α 为奇、偶情况，划分**四类**具有广义线性相位的**FIR** 系统。



四大类线性相位滤波器

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{令 } m = N-1-n} &= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\ &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

系统零点特性

$$H(z) := \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

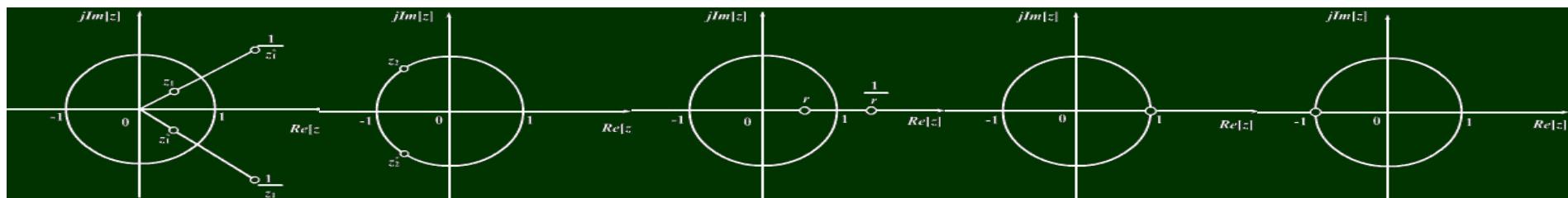
1) 系统零点的个数等于系统在原点的极点阶数

2) 若 $z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点, 则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i) = 0 \quad \therefore H(z_i^{-1}) = \pm z_i^{(N-1)} H(z_i) = 0$$

3) $h(n)$ 为实数, 则零点共轭成对

即 $z_i^*, 1/z_i^*$ 也是零点

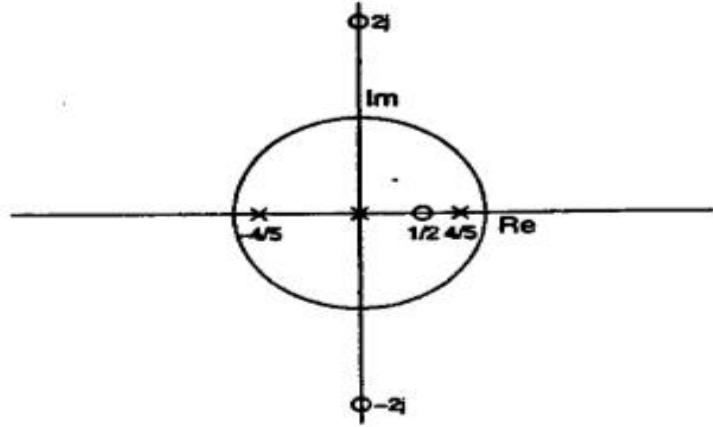


最小相位及线性相位分解(5.45)

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})}$$

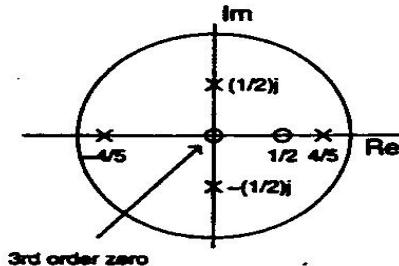
$$H(z) = H_{\min}(z)H_{lin}(z)$$

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

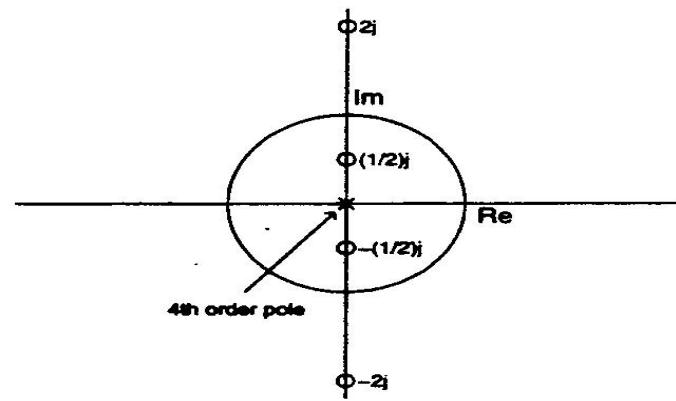


子信息

$$H_2(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}$$



$$H_{lin}(z) = (1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + 4z^{-2})$$



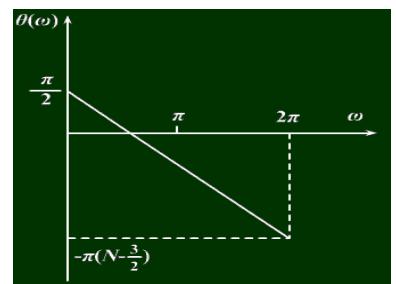
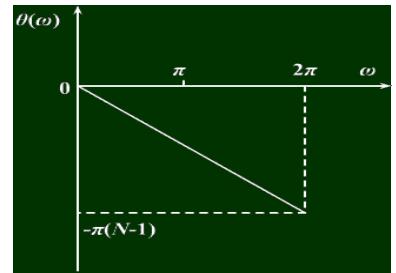
频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} "+" & e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ "- " & j e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \end{cases}$$

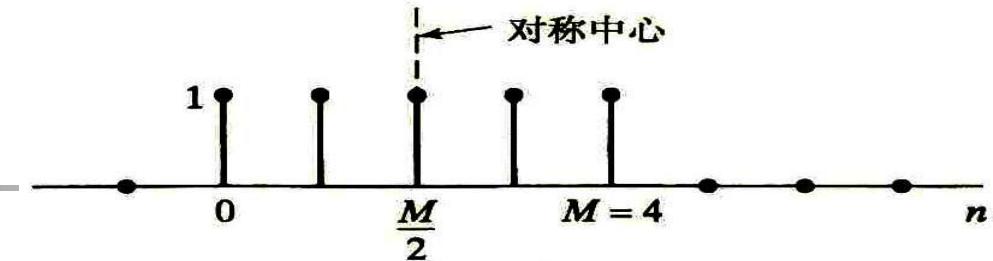
由 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

得 $H(z) = \frac{1}{2} [H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\ &= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \end{aligned}$$



I类:



M 为偶数 , 偶对称

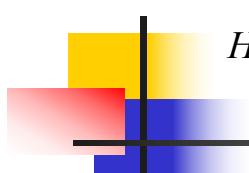
$$h(n) = h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\because \cos \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} = \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] = \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

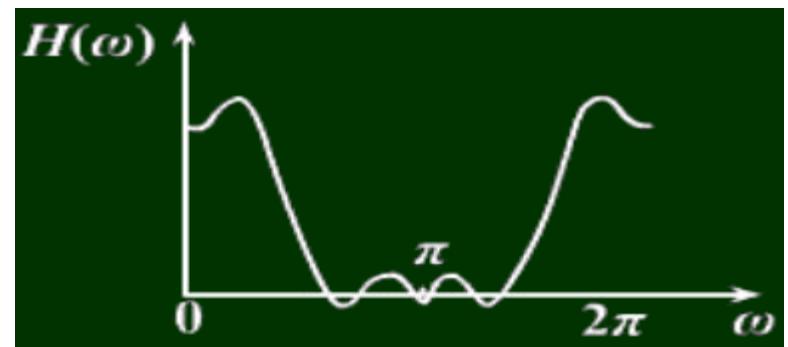
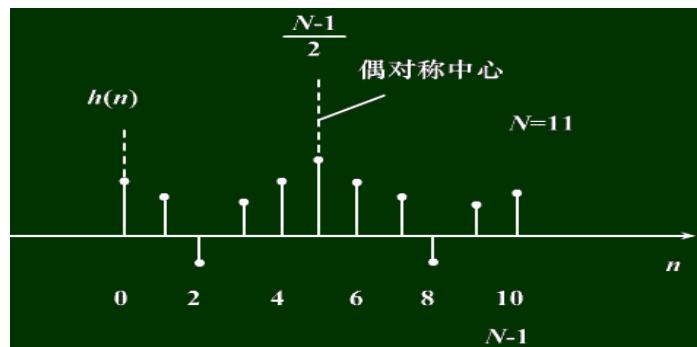
$\therefore \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈偶对称

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \stackrel{\text{令 } \frac{N-1}{2} - n = m}{=} h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(m\omega)$$



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a(k) \cos \omega k \right)$$

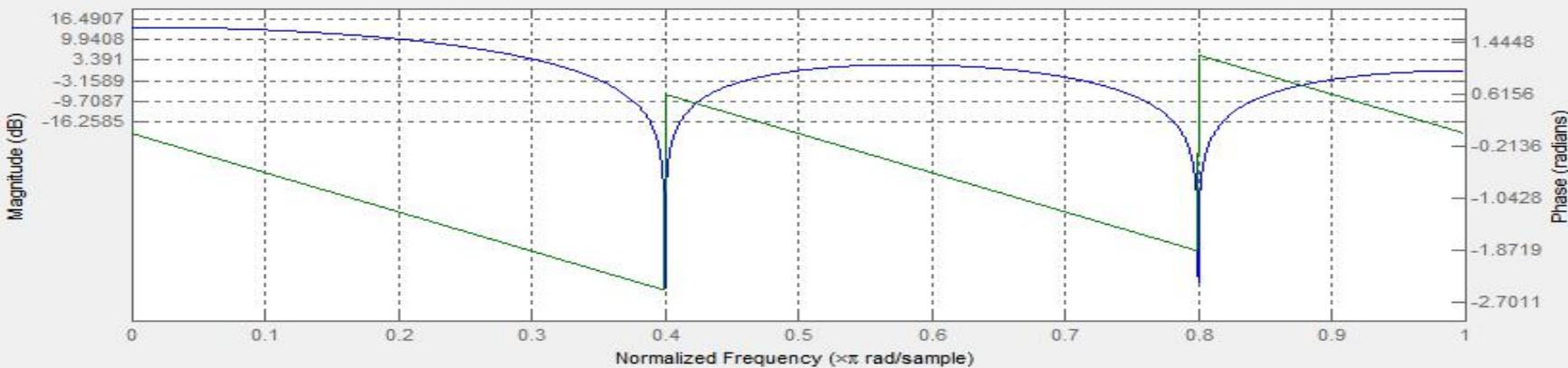
$$\begin{cases} a(0) = h(\frac{M}{2}) \\ a(k) = 2h(\frac{M}{2} - k) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \end{cases}$$



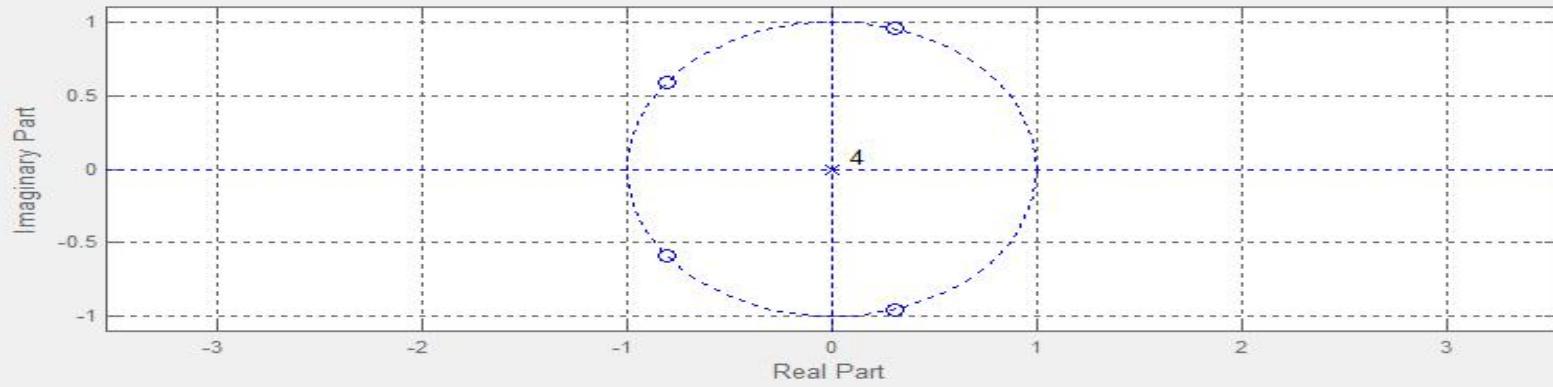
$\because \cos(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

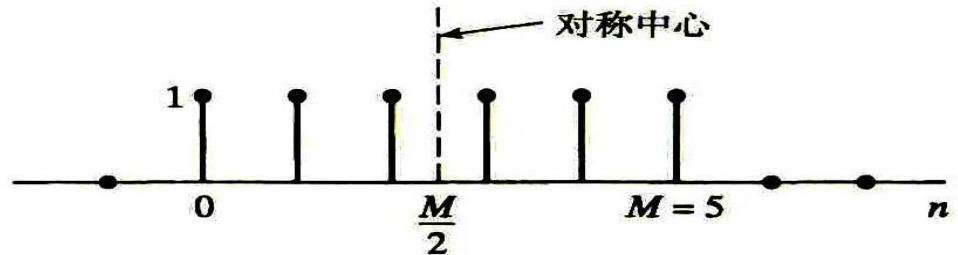
Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot



II类:



M 为奇数 , 偶对称

$$h(n) = h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

- 特殊零点: $Z=-1$

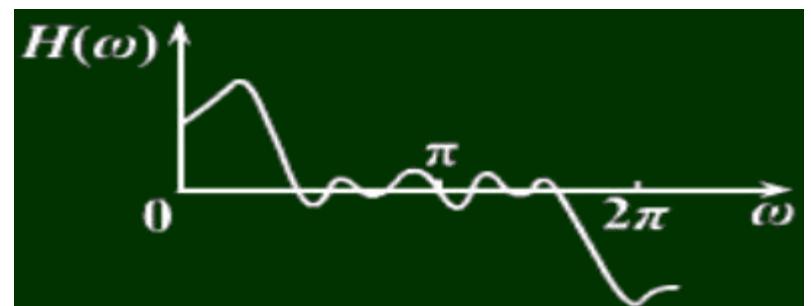
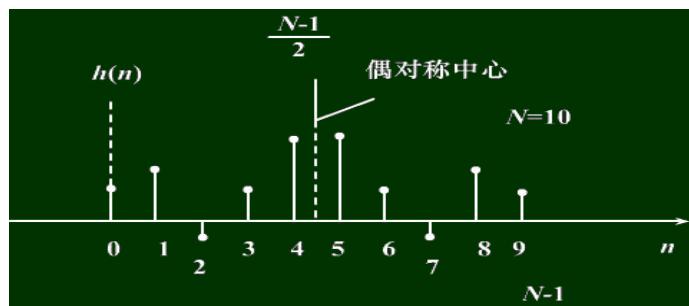
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N}{2} - n = m = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b(k) \cos \omega(k - \frac{1}{2}) \right)$$

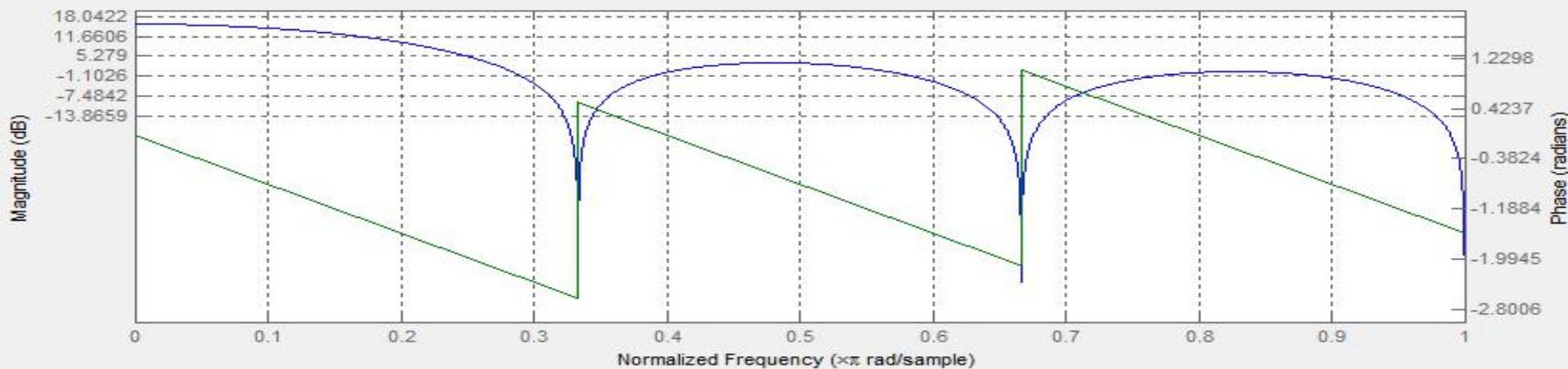
$$b(k) = 2h(\frac{N}{2} - k) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



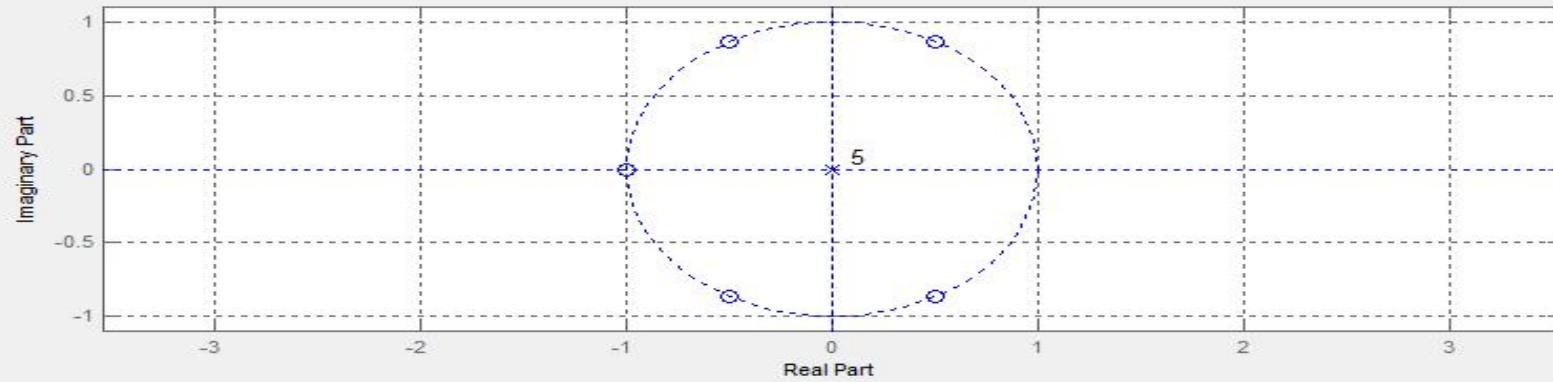
$H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈偶对称

$H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称 $\omega = \pi$ 时 $\cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$

Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot

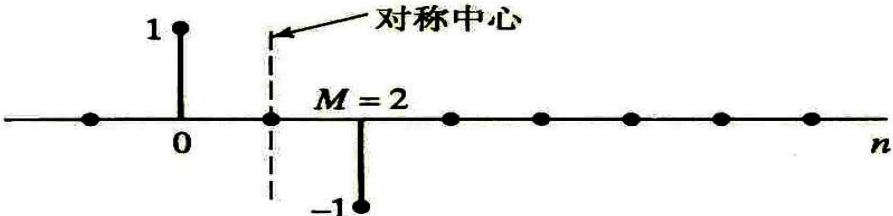


III类:

M 为偶数

$$h(n) = -h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M$$

特殊零点: $z=+,-1$



$$H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\therefore \sin \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} = \sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] = -\sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$\therefore \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈奇对称

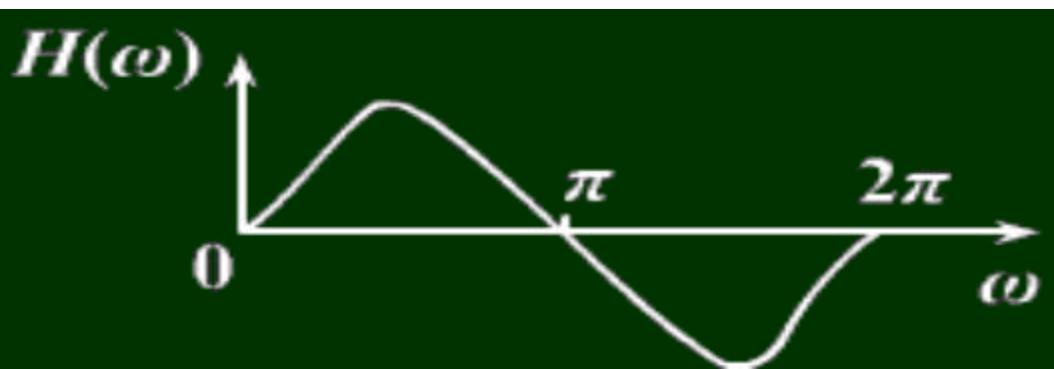
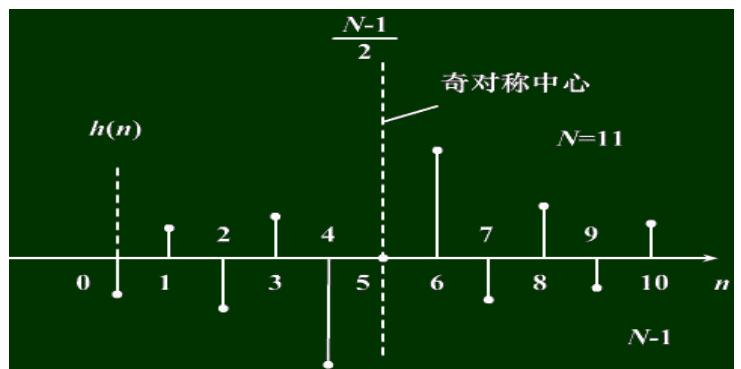
$$h(n) \text{ 奇对称且 } N \text{ 为奇数} \quad \therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N-1}{2} - n = m \quad = \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(m\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c(k) \sin \omega k \right)$$

$$c(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

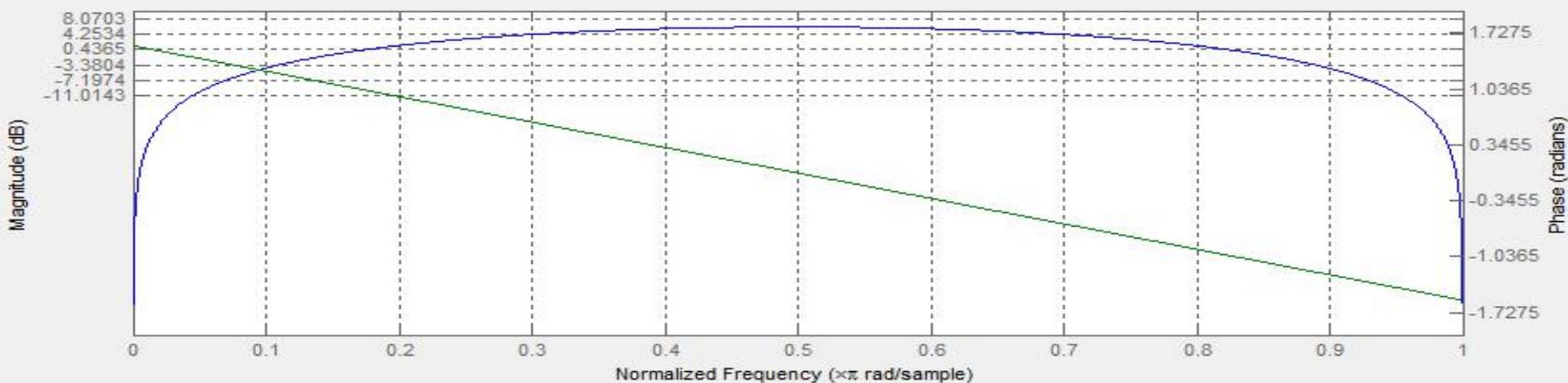


$\omega = 0, \pi, 2\pi$ 时 $\sin(\omega n) = 0$

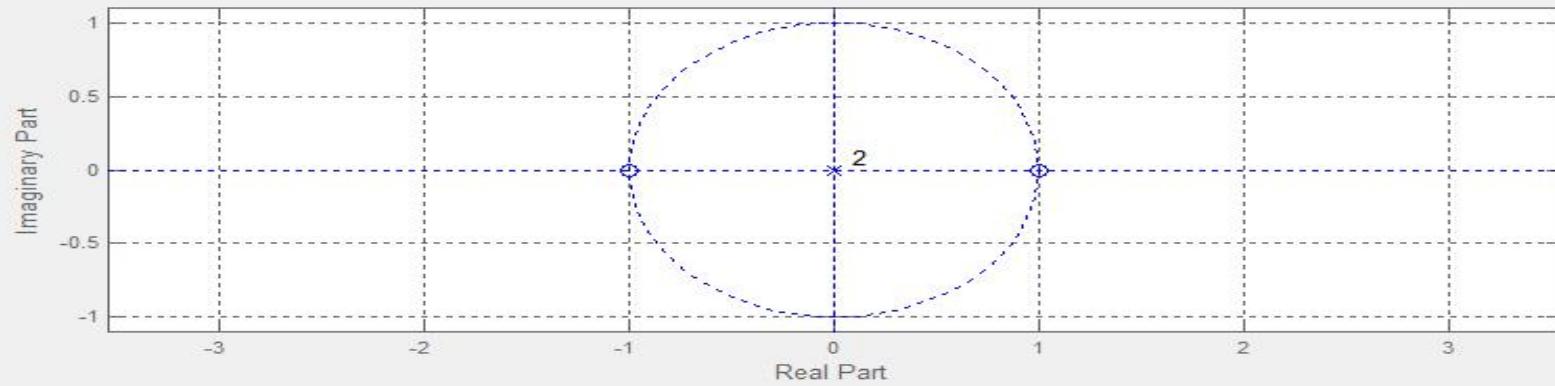
因 $\sin(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称

故 $H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称

Magnitude (dB) Pole/zero plot



Pole/Zero Plot

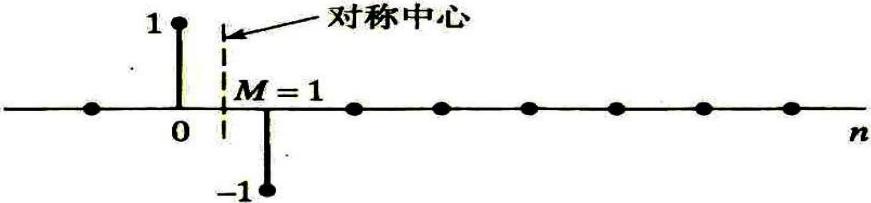


IV类:

M 为奇数

$$h(n) = -h(M - n) \quad 0 \leq n \leq M \quad H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$$

■ 特殊零点: $Z=1$



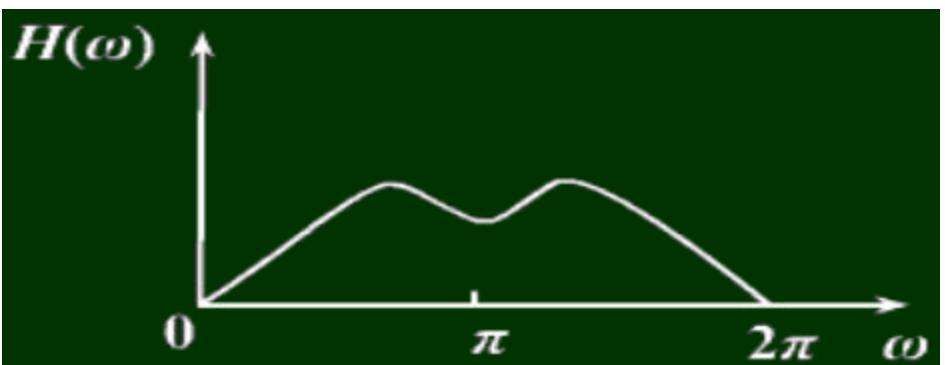
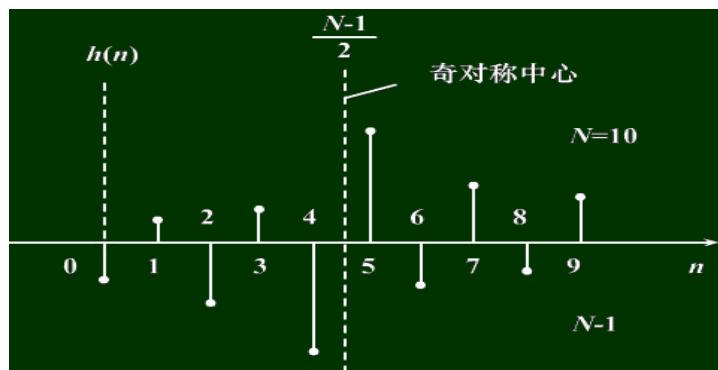
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\text{令 } \frac{N}{2} - n = m \quad = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} d(k) \sin \omega(k - \frac{1}{2}) \right)$$

$$d(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

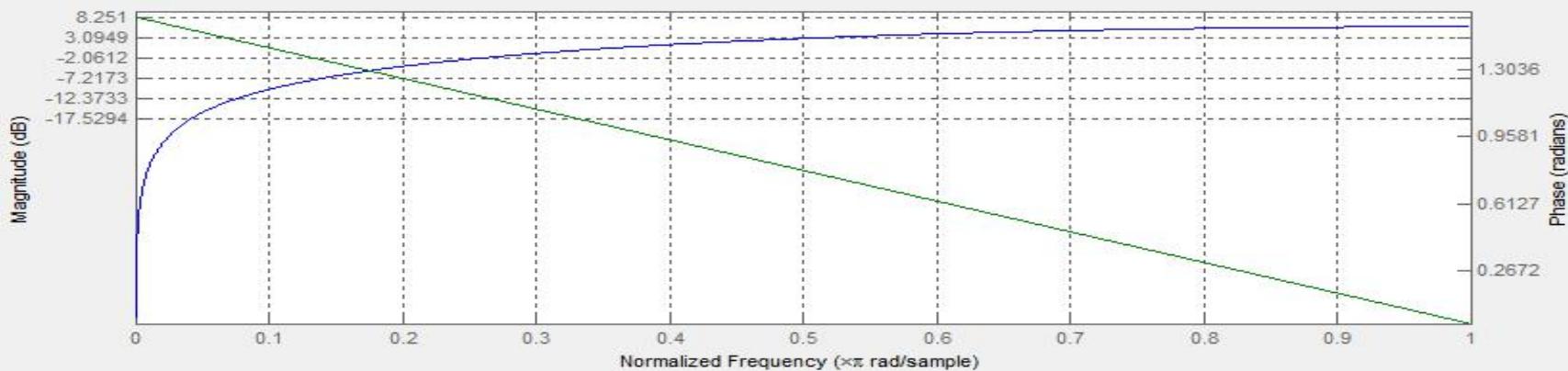


$$\omega = 0, 2\pi \text{ 时 } \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

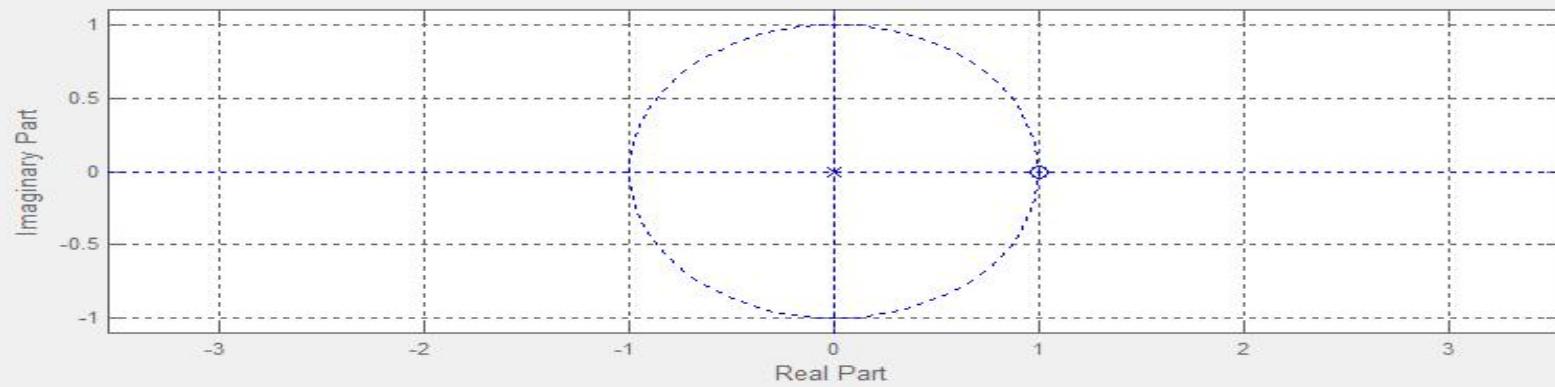
$H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈奇对称

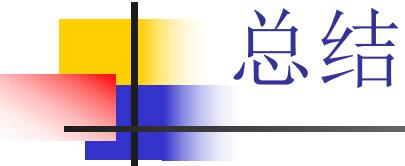
$H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈偶对称

Magnitude (dB) and Phase Responses



Pole/Zero Plot





总结

- 在不考虑幅度失真的情况下，线性相位系统不会导致信号波形的失真；
- 实线性相位系统的单位冲激响应具有对称性；
- 有理的因果广义线性系统是**FIR**系统；
 - 第**I**类系统适合设计所有滤波器；
 - 第**II**类系统不适合设计高通滤波器；
 - 第**III**类系统不适合设计低通和高通滤波器；
 - 第**IV**类系统不适合设计低通滤波器。

作业

- 5.15
- 5.33
- 5.59





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 4

4.1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



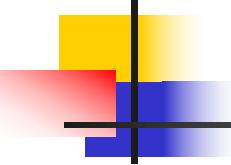
三

抽取与内插



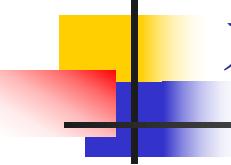
四

离散处理的工程问题



采样与重构的重要性

- 虽然自然界中存在离散时间信号，但是最常见的还是连续时间信号。
 - 采样（离散化）
- 连续时间信号的处理分析往往经由对之采样后的离散时间序列处理完成的。
 - 计算（连续信号离散化处理）
- 利用离散处理后的结果往往需要在连续域表达出来，便于接收和理解
 - 重构（连续化）

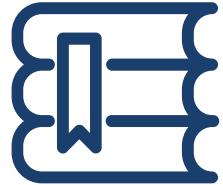


本章要解决的问题（三点一线）

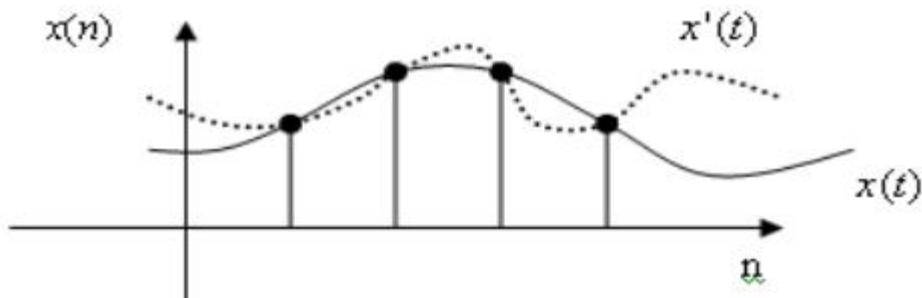
- 1、**数字频率和模拟频率之间对应关系**: 时域采样导致了信号频域发生了何种变化?
- 2、**采样定理**: 采样后信号是否包含了连续信号的所有信息? 如何无失真恢复原始信号? 采样的信号是否包含冗余信息? 是否可以进行速率的变化?
- 3、**离散处理如何等效模拟LTI**: 用于实际连续信号的处理应用? 如何提高信号处理的性能?
- 学习方法: 学会用频谱图方法分析理解各环节对信号的作用

理想周期采样与重构
连续信号离散处理
抽取与内插
离散处理的工程问题

理 想 周 期 采 样 与 重 构

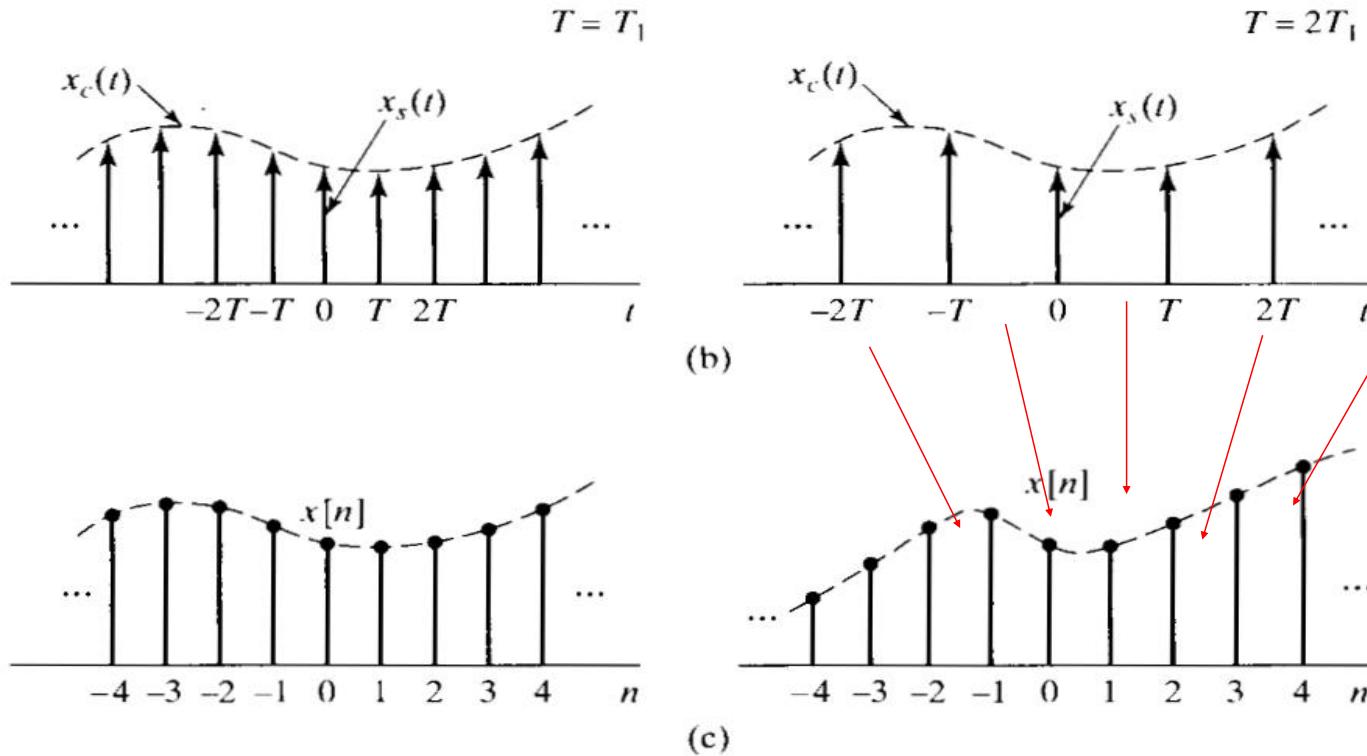


- 采样一般是不可逆的



- 为保证采样不丢失信息，该做何约束？

一个连续时间信号两种采样



正弦信号的采样

$$x_c(t) = \cos(\Omega t),$$

$$x(n) = x_c(t)|_{t=nT}$$

$$T_1 = 0.01 s \quad x(n) = \cos(0.2\pi * n) \quad \omega = 0.2\pi$$

$$T_1 = 0.02 s \quad x(n) = \cos(0.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$\Omega = 2\pi * 10; \quad T_3 = 0.05 s \quad x(n) = \cos(1.0\pi * n) \quad \omega = 1.0\pi$$

$$T_4 = 0.10 s \quad x(n) = \cos(2\pi * n) \quad \omega = 0$$

$$T_5 = 0.12 s \quad x(n) = \cos(2.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$\Omega_1 = 2\pi * 10 \quad x(n) = \cos(0.2\pi * n) \quad \omega = 0.2\pi$$

$$\Omega_2 = 2\pi * 20 \quad x(n) = \cos(0.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$T = 0.01; \quad \Omega_3 = 2\pi * 50 \quad x(n) = \cos(1.0\pi * n) \quad \omega = 1.0\pi$$

$$\Omega_4 = 2\pi * 100 \quad x(n) = \cos(2\pi * n) \quad \omega = 0$$

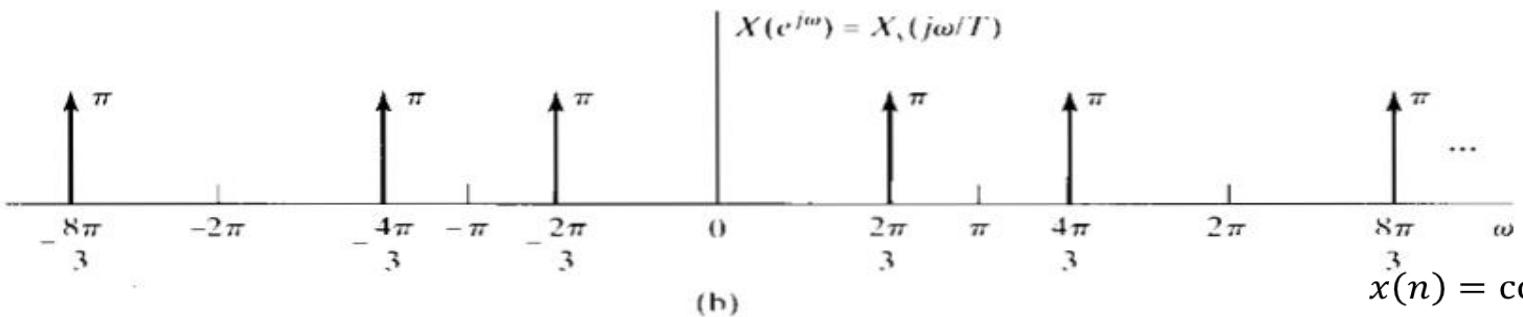
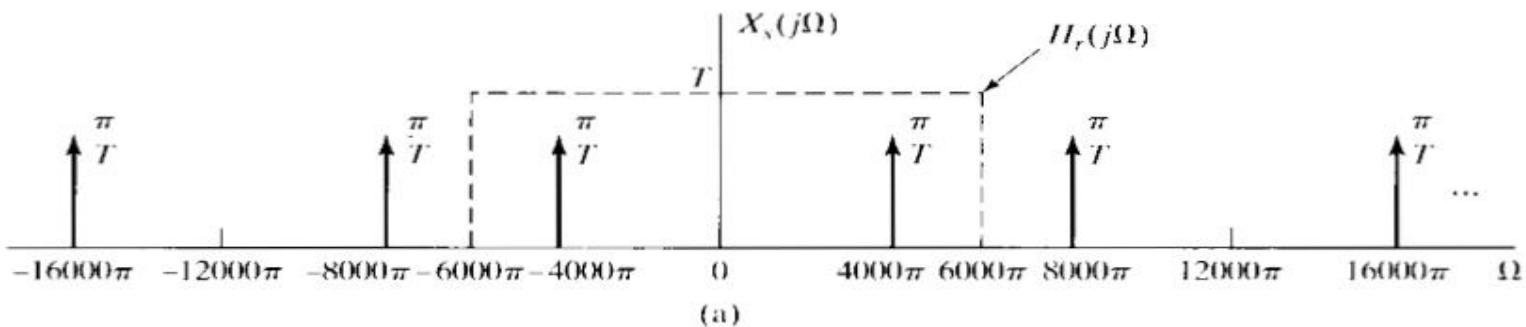
$$\Omega_5 = 2\pi * 120 \quad x(n) = \cos(2.4\pi * n) \quad \omega = 0.4\pi$$

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

$$T = \frac{1}{6000}$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$

例题1 无混叠采样



北京航空航天大学

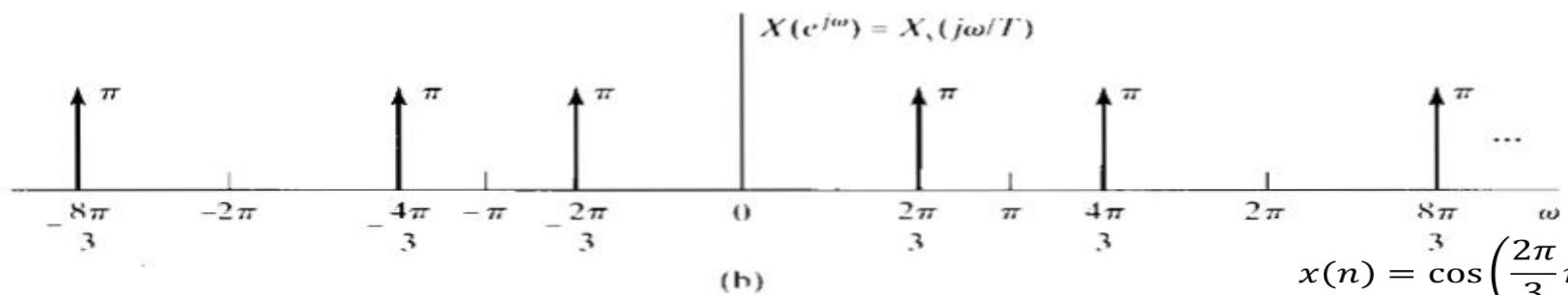
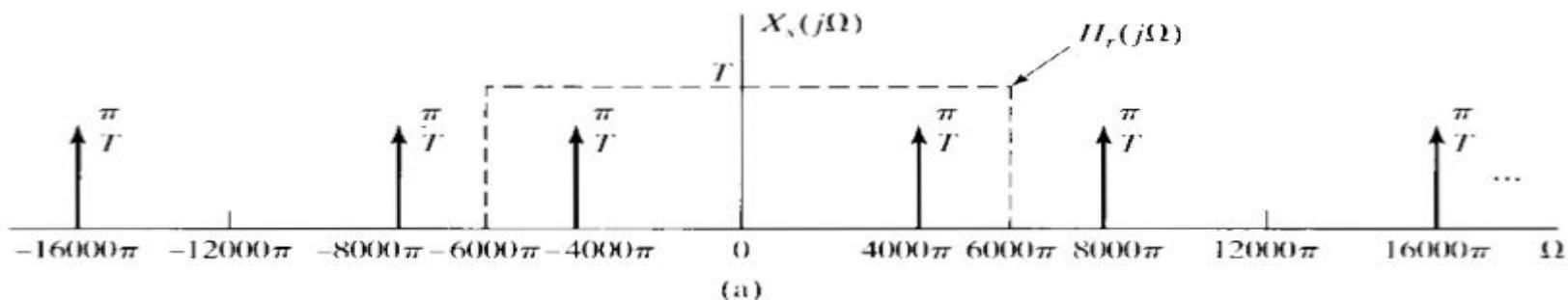
电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_c(t) = \cos(16000\pi t)$$

例题2 混叠采样



北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

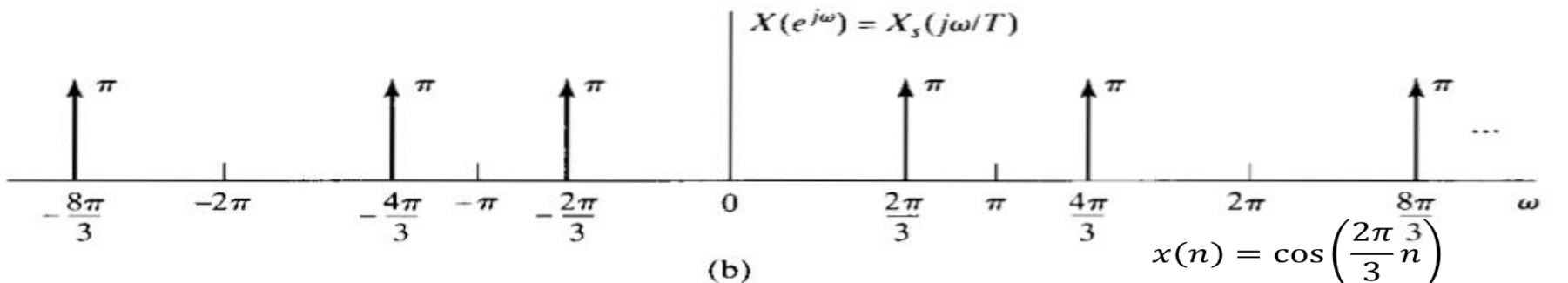
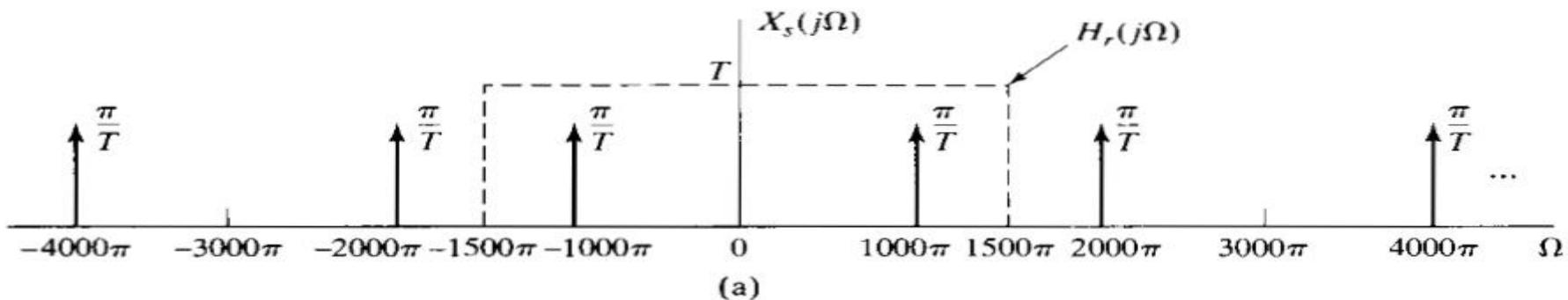
$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

例题3 混叠采样

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

$$T = \frac{1}{1500}$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$



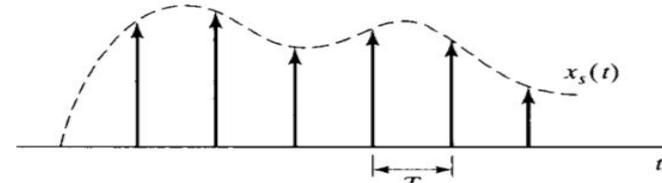
北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$X(j\omega) = \pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)$$

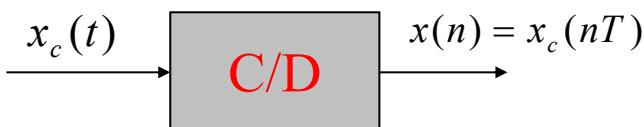
3.1.1 理想周期采样



- 典型的周期采样为冲激脉冲采样，亦称**理想采样**：

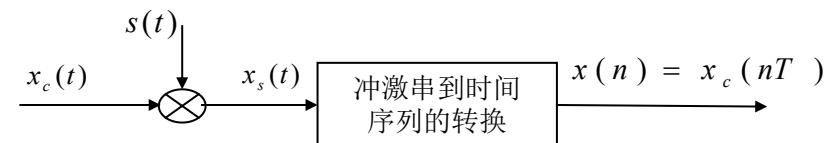
$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

■ 物理模型



A/D器件是理想C / D转换器的工程近似。

$$\begin{aligned}s(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ x(n) &= x_c(nT)\end{aligned}$$



调制器+序列的转换
 $x_c(nT)$ 是连续冲激串的冲激面积，它除了在整倍数 T 时刻以外都为零，包含有物理时间的概念；
 $x(n)$ 是以整数变量 n 给出的，引入了时间归一化， $x(n)$ 没有任何采样率的信息。

3.1.2、采样的频域表示

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

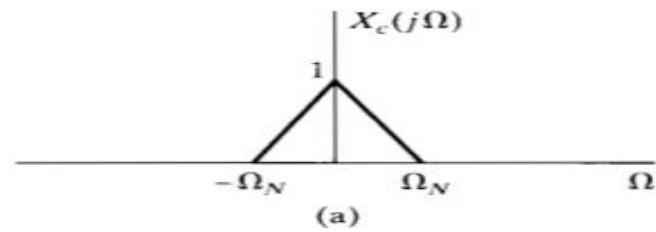
$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

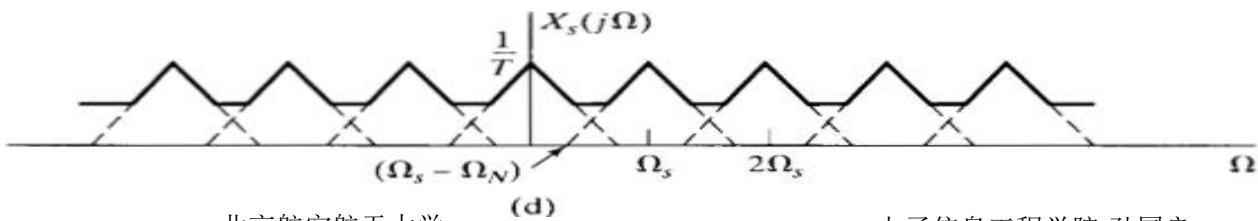
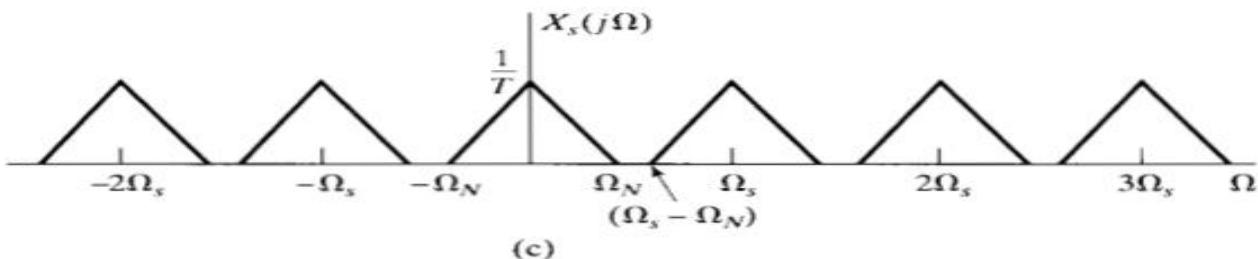
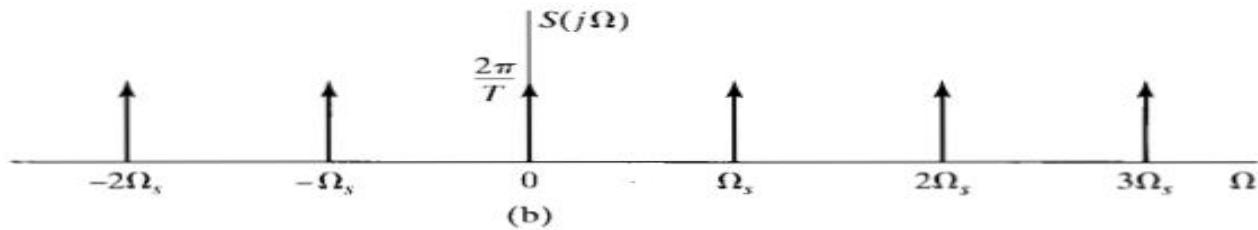
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = 1/T$$

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) * S(\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_c(\Omega) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned}$$



$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$



采样后信号傅里叶变换是由被采样信号的傅里叶变换按整数倍的采样频率移位叠加起来得到，即周期性延拓。

x(n)频谱 与x(t)频谱的关系

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\Omega T)n} \end{aligned}$$

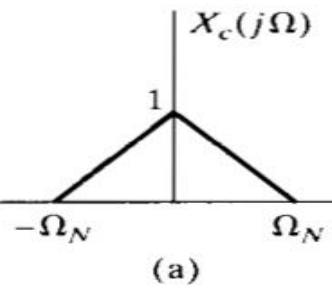
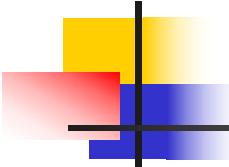
$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

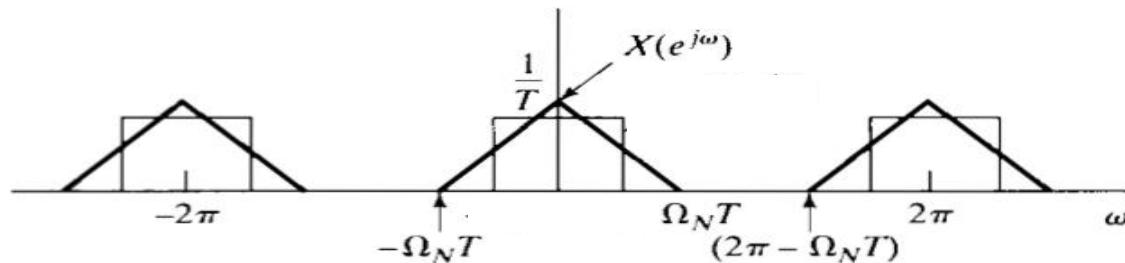
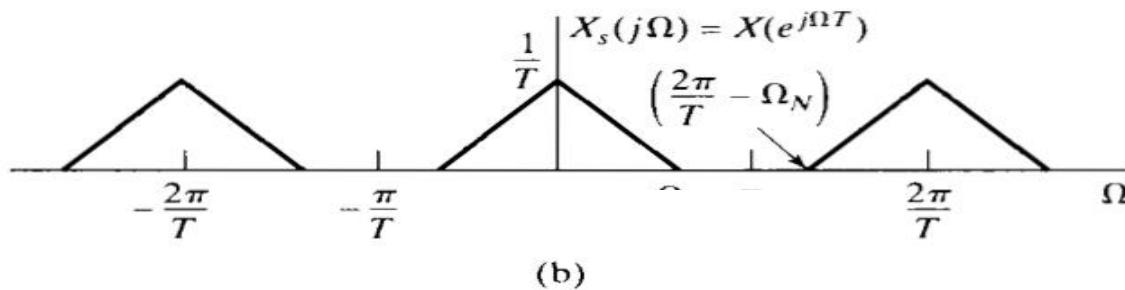
$$X(j\omega)|_{\omega=\Omega/T} = X_s(j\Omega)$$

$$X(j\omega) = X_s(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T}$$

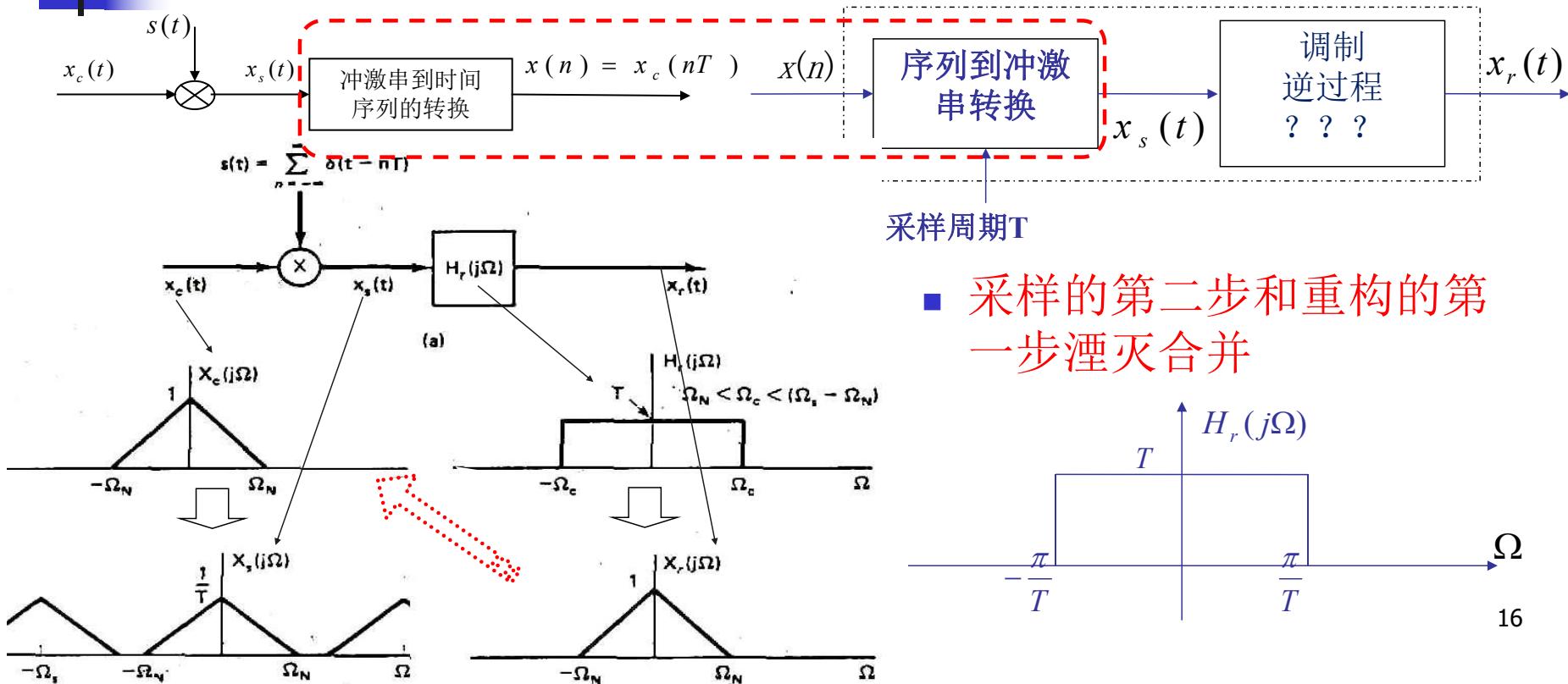
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})|_{\Omega=\omega/T} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{(\omega - 2k\pi)}{T}) \end{aligned}$$



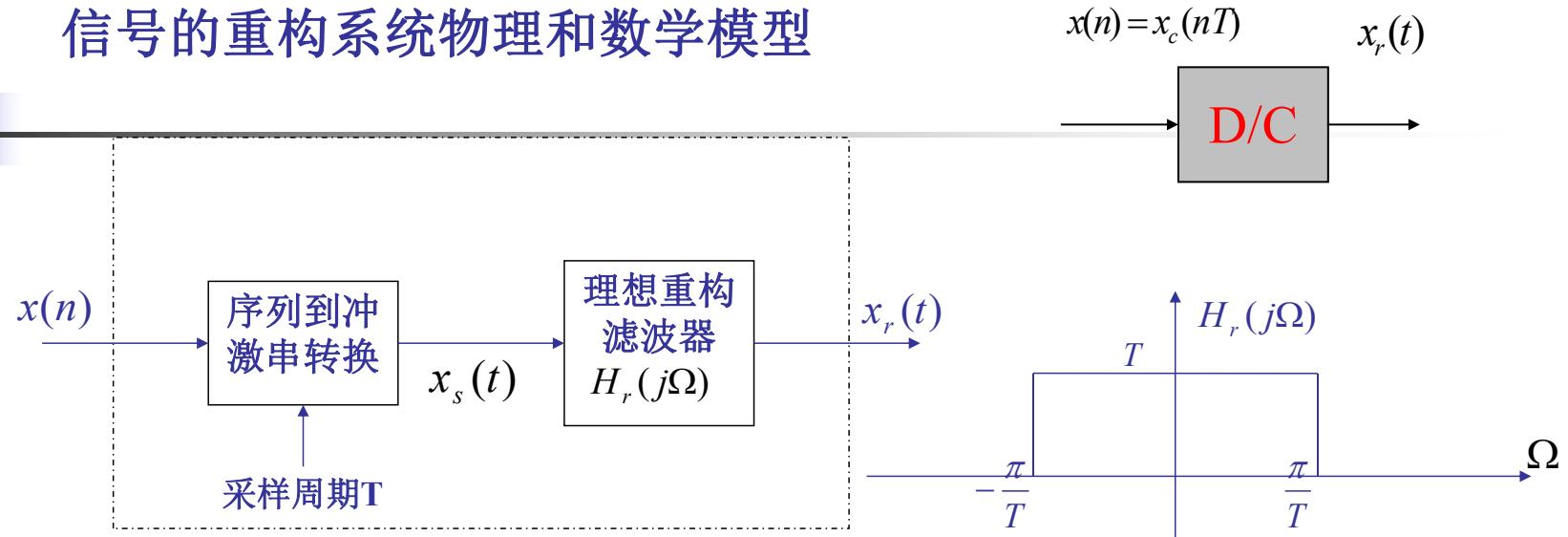
$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})|_{\Omega=\omega/T}$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{(\omega - 2k\pi)}{T})$$



3.1.3 信号重构



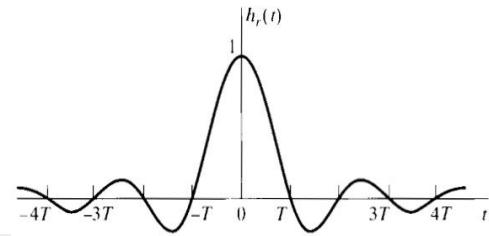
信号的重构系统物理和数学模型



$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T} = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$

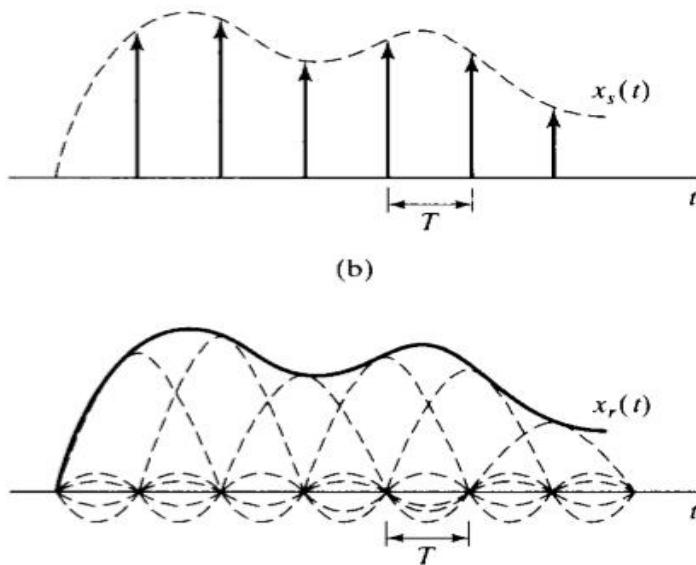
理想重构滤波器

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

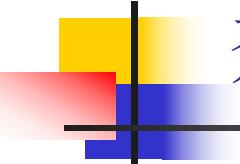


- 增益为**T**(用以补偿采样损耗), 截止频率为 Ω_c , 通常选取 $\frac{\Omega_s}{2}$ 。

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_s(t) \otimes h_r(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT) \otimes h_r(t) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \end{aligned}$$



- ✓ 理想重构信号在各采样点上与原连续信号相同，并且与采样速率无关。
- ✓ 如果采样没有发生频谱混叠，则采样重构后的信号在采样点以外无失真；若发生混叠，则采样点之间的信号将发生失真。

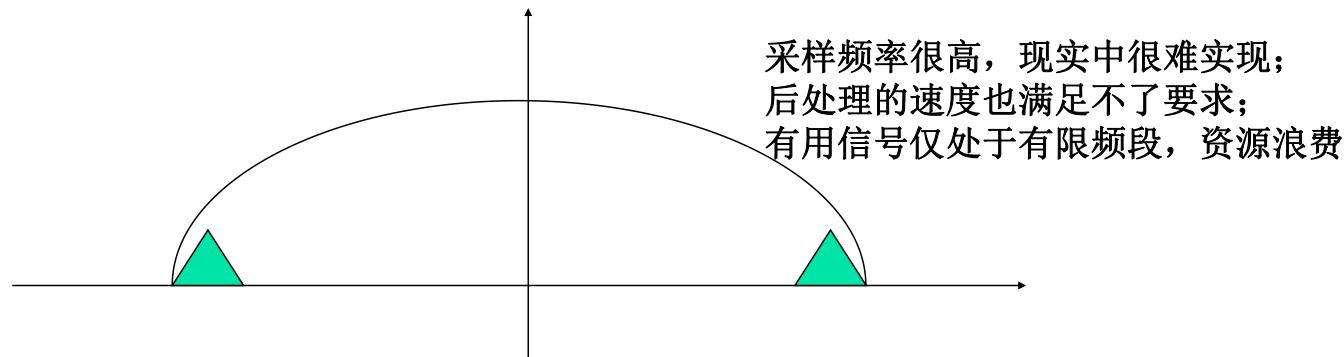


奈奎斯特低通采样定理

- 若实信号 $x_c(t)$ 是频段带限信号， $0 \sim f_h$ ，则该信号的带宽为 $B = f_h$ 。
- 对该信号以采样率 $f_s \geq 2B$ 的速率进行采样，则采样后的离散时间序列 $x(n)$ 可以无失真的恢复原始信号。

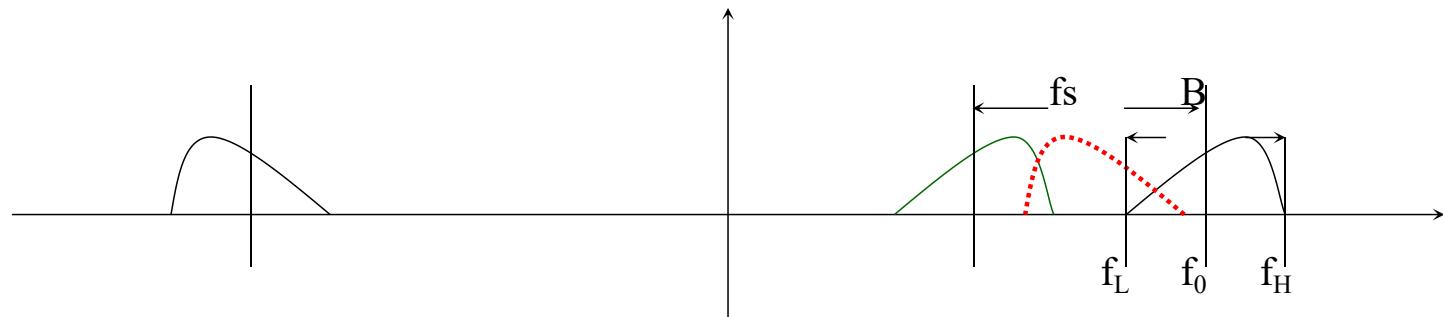
奈氏带通采样定理

- 奈氏低通采样定理只讨论了基带信号的采样问题
- 如果信号的频率分布在某一有限的频带上时，那么该如何对这样的带限信号进行采样呢？



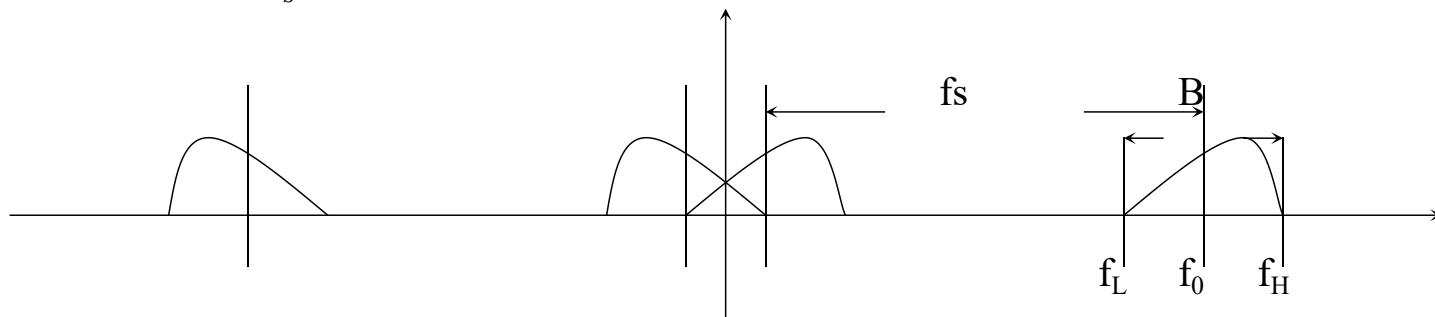
讨论：

- 1、当 $f_s < 2B$ 时

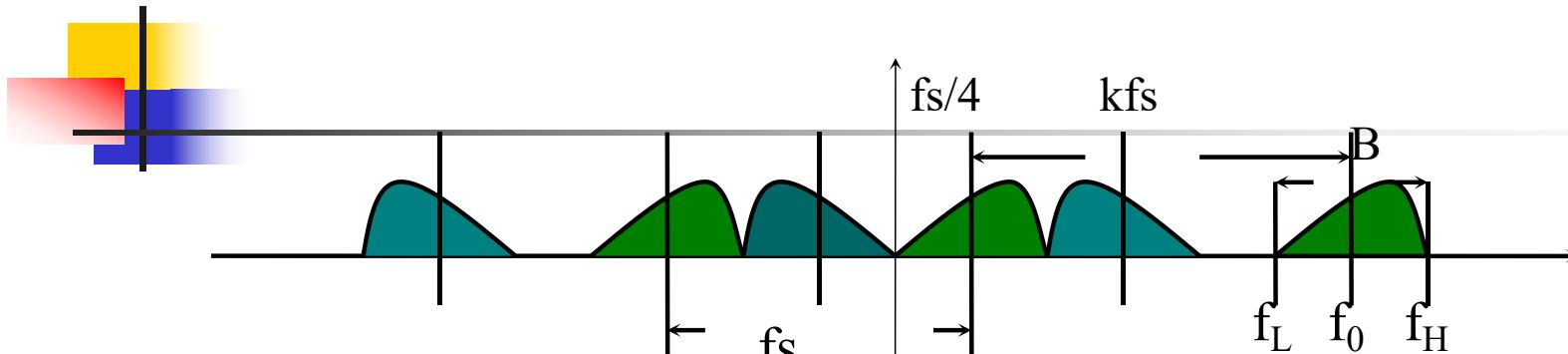


信号频谱必然混叠，无法恢复原始信号

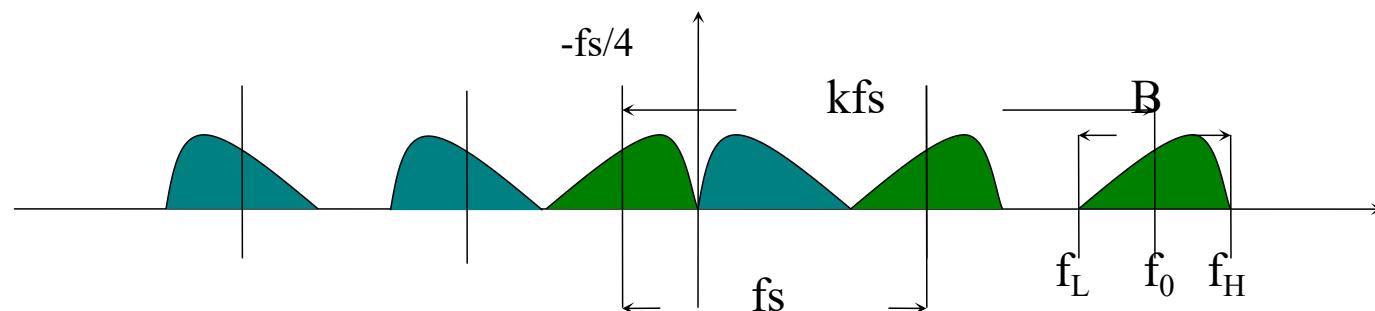
■ 2、当 $f_s \geq 2B$ 时



- 1、不一定能够由采样后的信号恢复原始信号
- 2、实信号频谱区间是正负对称的，从而其搬移之后的频谱亦是正负对称的，要使其频谱不发生混叠，只能符合以下的两种情况



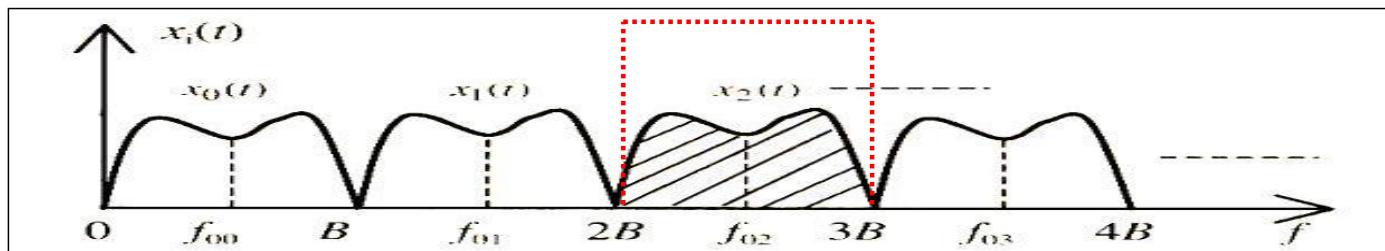
$$a) \frac{f_s}{4} = f_0 - k * f_s \leftrightarrow f_s = \frac{4 f_0}{4k + 1}$$



$$b) \frac{f_s}{4} = f_0 + k * f_s \leftrightarrow f_s = \frac{4 f_0}{4k - 1}$$

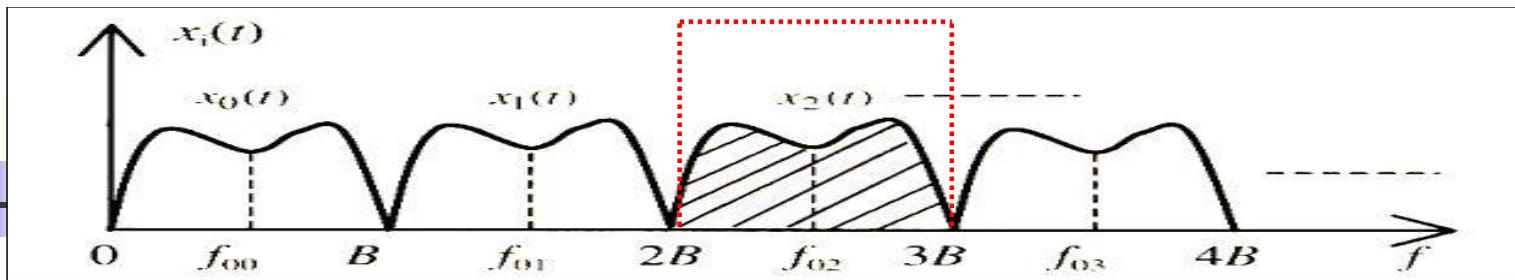
奈氏带通采样定理（欠采样）

- 当 $f_s \geq 2B$ 时，若采样率满足 $f_s = \frac{4 f_0}{2n + 1}$ ($n=0,1,2\dots$)
- 则可以无失真的从采样信号中恢复原始信号
 - 特例1：当 $f_0 = f_H / 2$, $B = f_H$, $n=0$, f_s 即为奈氏低通采样速率。

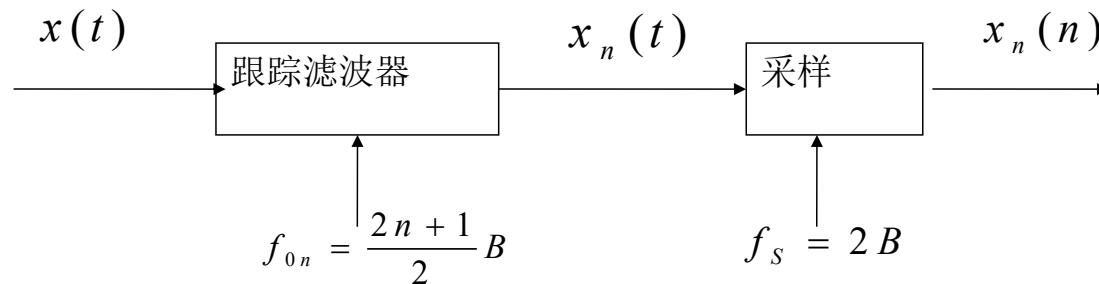


- 特例2： $f_s = \frac{4 f_0}{2n + 1} = 2B \rightarrow f_0 = \frac{(2n + 1)B}{2}$

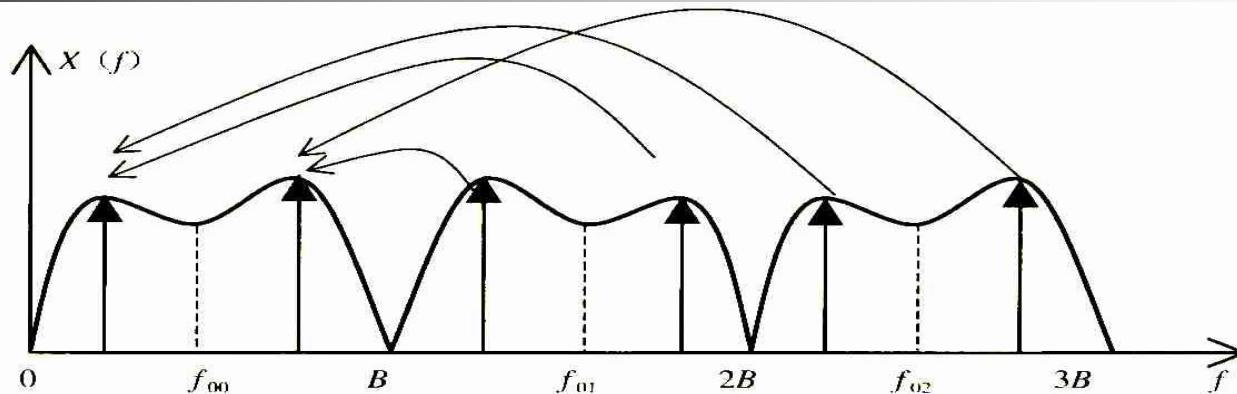
若要用最低采样速率即两倍带宽对信号进行采样，其信号中心频率必须满足信号最高(或最低)频率是带宽整数倍。



- 任何一个中心频率为 f_{0n} ($n=0, 1, 2, 3, \dots$)，带宽为 B 的带通信号均可以用同样的采样频率 $f_s = 2B$ 对信号进行采样，均能准确地表示或者重新恢复出位于不同频段(中心频率不同)的原信号。
 - 前提：只允许在其中的一个频带上存在信号，而不允许在不同的频带上同时存在信号。

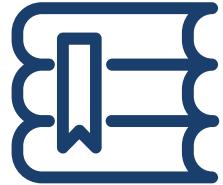


- 如果抗混叠滤波器滤波器理想的话，采用同一采样速率就能实现对全频域信号进行数字化，然后用软件方法进行解调分析，这正是软件无线电的根本出发点。



- 带通采样把位于不同频带的信号都用位于**(0, B)**上相同的基带信号来表示，但是：
 - 奇数通带上的高频分量对应基带上的低频分量，奇数通带上的低频分量对应基带上的高频。
 - 偶数频带与采样后的数字基带谱是高、低频率分量一一对应的。

连续信号离散化处理

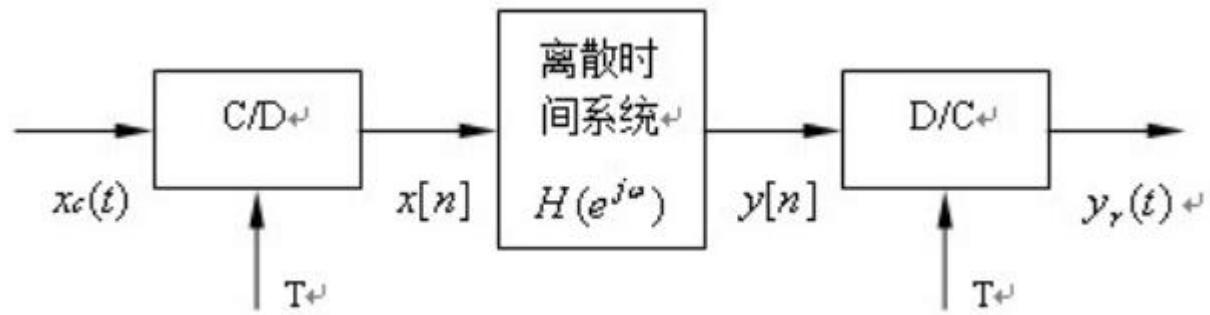


理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

离散处理的工程问题



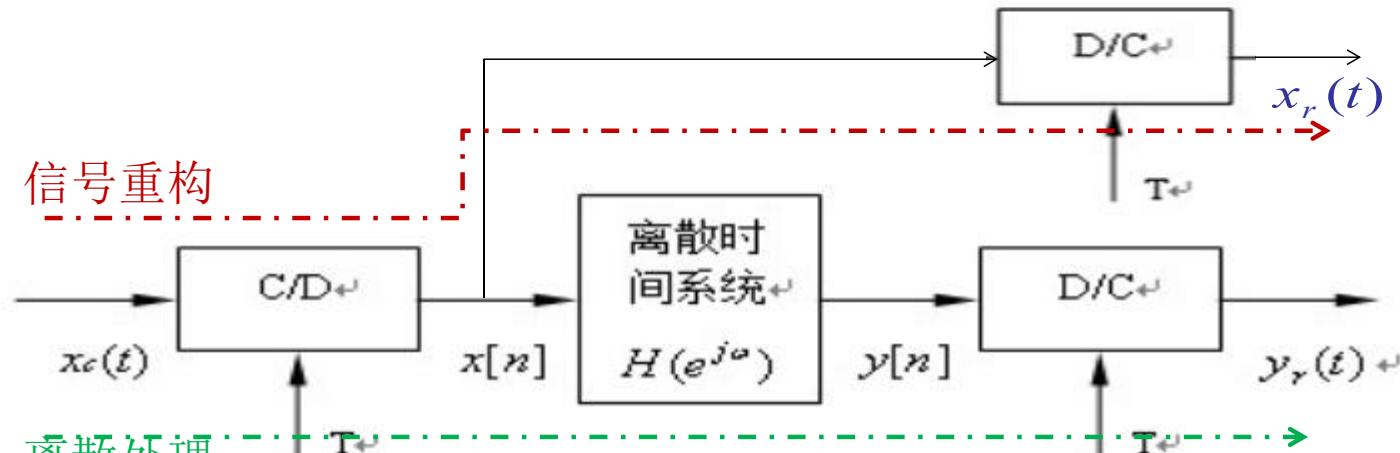
- 离散系统大都用来处理连续时间信号
- 离散化处理可否等效为模拟LTI? 条件是什么?

离散与连续LTI系统的等效关系

- 离散处理与模拟LTI的等效

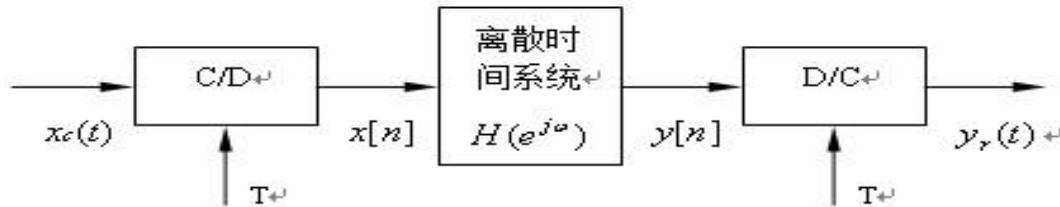
$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

- 信号重构



- 离散处理

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$



$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

■ 假设离散时间系统是LTI $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T})$$



$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi / T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi / T \end{cases}$$

- 输入是带限的,
- 采样率满足奈奎斯特定理
- 在C/D中即使有混叠发生, 只要H(e{jw})不通过这些混叠的分量, 结论仍正确

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega)$$

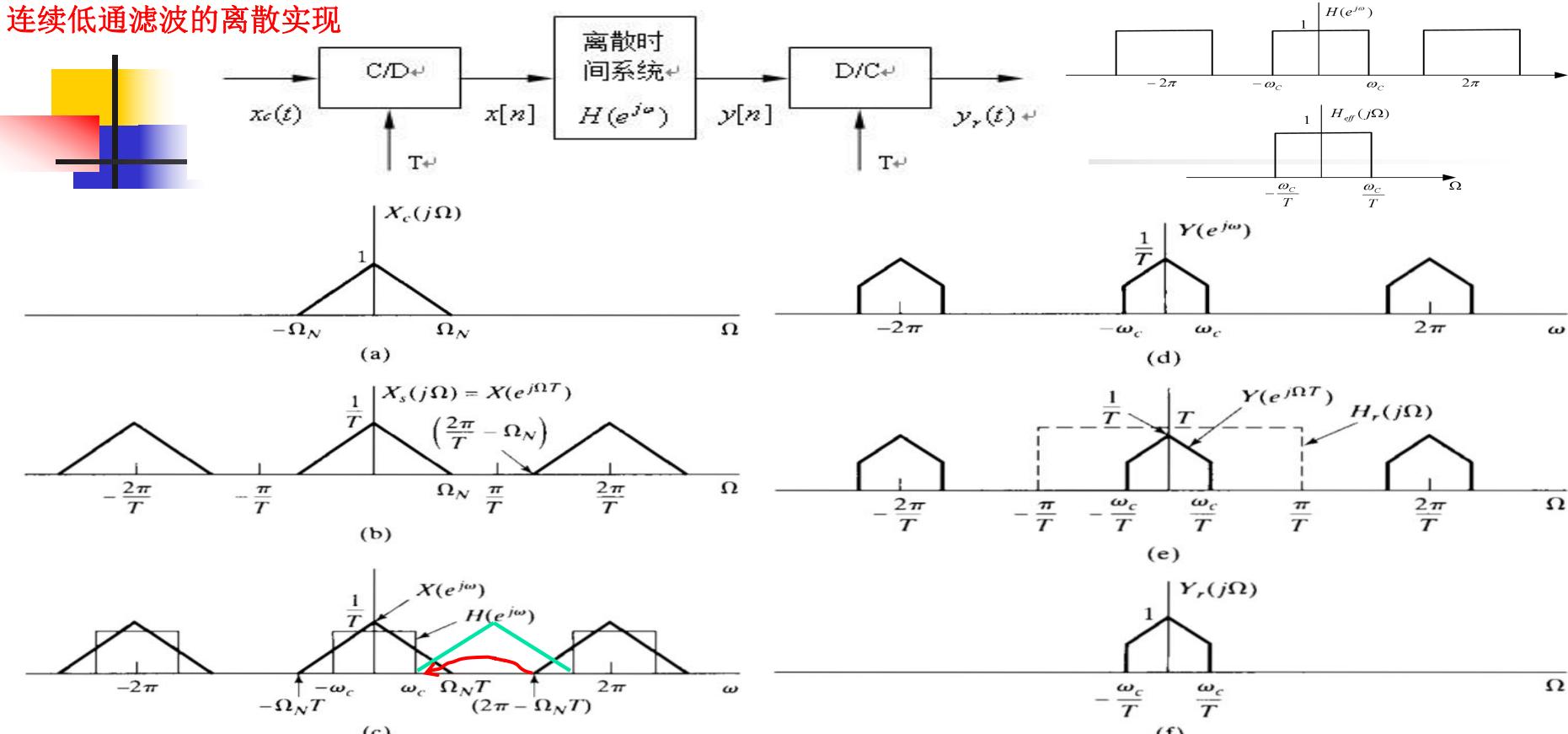
北京航空航天大学

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi / T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi / T \end{cases}$$

电子信息工程学院 孙国良

29

连续低通滤波的离散实现



$$\Omega_N T < \omega_c \quad (2\pi - \Omega_N T) > \Omega_N T \\ (2\pi - \Omega_N T) > \omega_c$$

北京航空航天大学

- 带限输入，并且满足采样定理整个系统将表现为一个线性时不变连续时间系统
- 截止频率既依赖 ω_c ，又与 T 有关。当利用固定的离散时间低通滤波器而改变采样周期 T 时，就能实现具有可变截止频率的连续时间低通滤波器

电子信息工程学院 孙国良

微分器的离散实现与等效

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)], \quad H_c(j\Omega) = j\Omega.$$

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases}$$

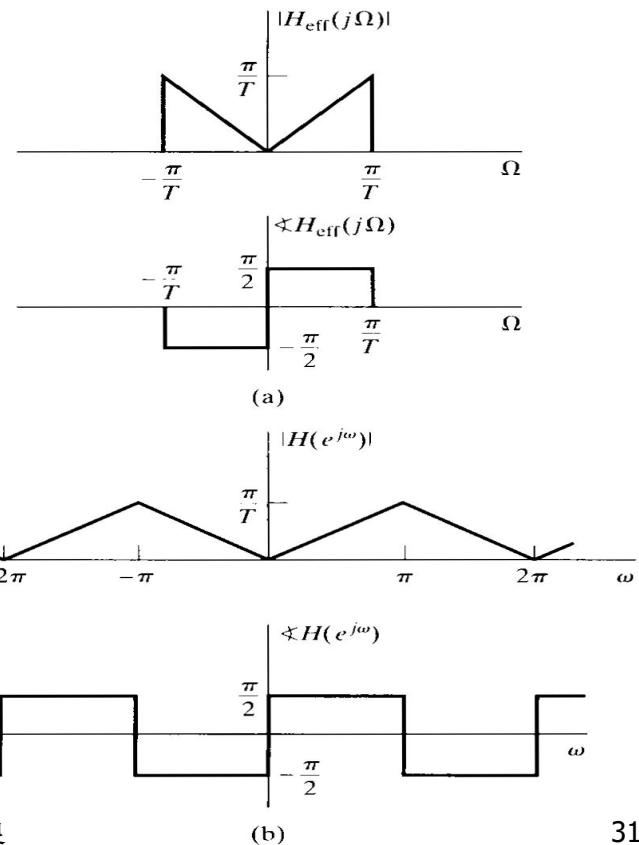
$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \quad -\infty < n < \infty,$$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\cos \pi n}{n T}, & n \neq 0. \end{cases}$$

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



余弦信号经过微分系统

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) \text{ with } \Omega_0 < \pi/T.$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n), \quad \omega_0 = \Omega_0 T < \pi$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$= \frac{j\omega}{T}[\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = T Y(e^{j\Omega T})$$

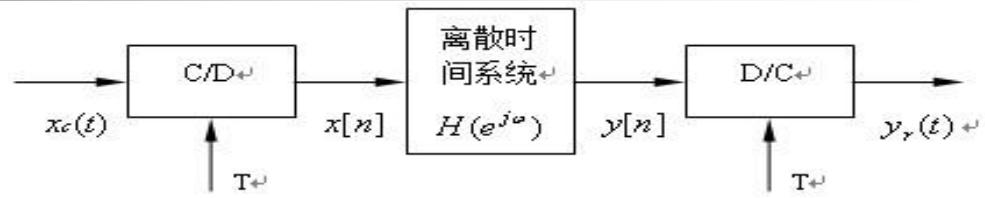
$$= T \left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T - \Omega_0 T) - \frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T + \Omega_0 T) \right]$$

$$= T \left[\frac{j\omega_0\pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) - \frac{j\omega_0\pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \right]$$

$$= j\Omega_0\pi\delta(\Omega - \Omega_0) - j\Omega_0\pi\delta(\Omega + \Omega_0).$$

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$y[n] = -\frac{\omega_0}{T} \sin(\omega_0 n)$$

$$y_r(t) = j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} - j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t}$$

$$= -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t),$$

余弦通过差分系统

$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(e^{j\omega}) = F(h[n]) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = 2 - 2 \cos \omega$$

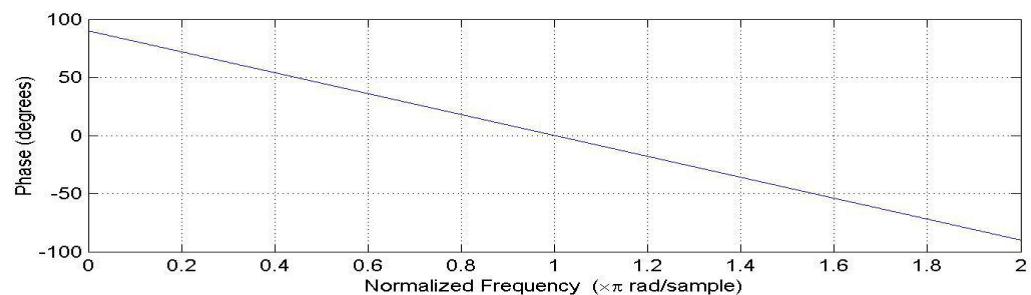
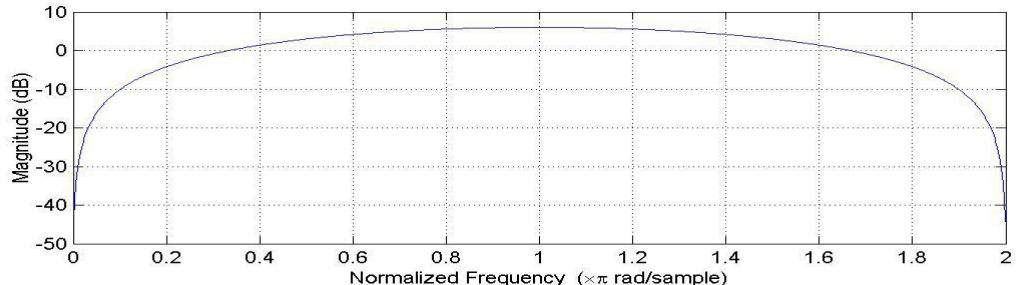
$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(c \tan \frac{\omega}{2})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

$$y[n]$$

$$= \cos(\omega_0 n) - \cos(\omega_0(n-1))$$

$$= -2 \sin \frac{\omega_0}{2} \sin \left(\omega_0 n - \frac{\omega_0}{2} \right)$$



冲激响应不变法 设计数字低通滤波器的由来

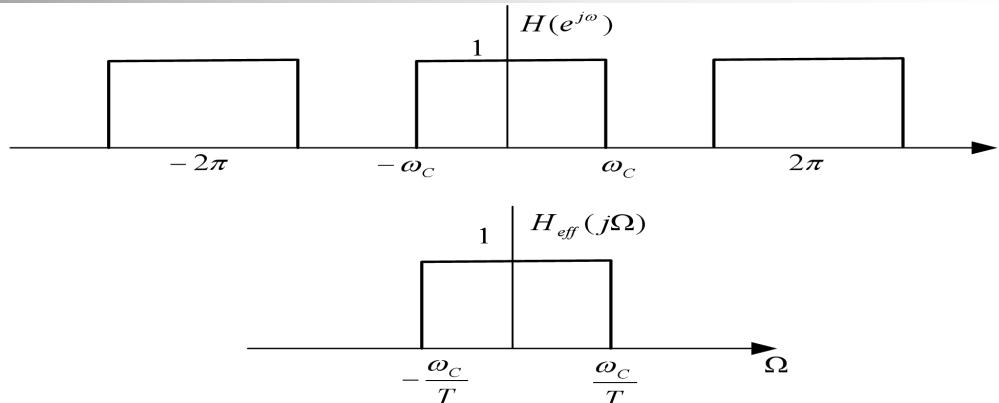
$$\Omega_c = \omega_c / T < \pi / T$$

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases}$$

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t},$$

$$h[n] = T h_c(nT) = T \frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi n T} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n},$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$



冲激响应不变法

- 目的:

- 使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟滤波器单位冲激响应的采样，即：

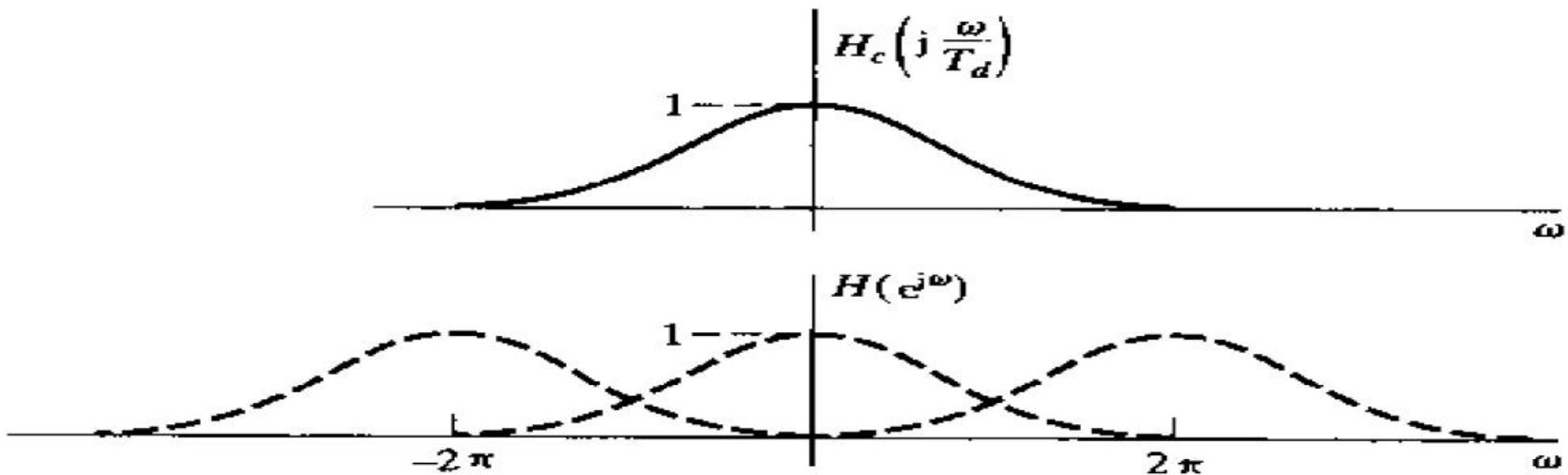
$$h(n) = h_a(t) |_{t=nT} = h_a(nT)$$

- 利用上述关系找到模拟滤波器对应的离散时间系统函数

$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

$$H(z) |_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_a(s - j \frac{2\pi k}{T})$$

冲激响应不变法的混叠现象



- 1、提高采样频率将减小混叠
- 2、阶跃响应不变法也可以减小混叠

作业

- 4.2
- 4.3
- 4.4
- 4.5

- 4.8
- 4.20





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

4.2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



三

抽取与内插



四

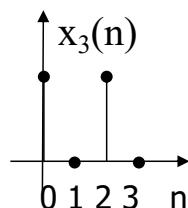
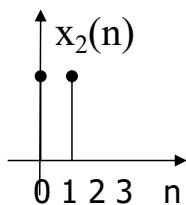
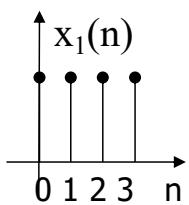
离散处理的工程问题

Test

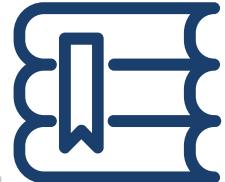
- 试用 $x(n)$ 的Z变换和DTFT表示如下序列的Z变换和DTFT

$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad x_D(m) = x(mD)$$

- 求如下三个序列的DTFT，并指出相互之间的关系



抽 取 与 内 插

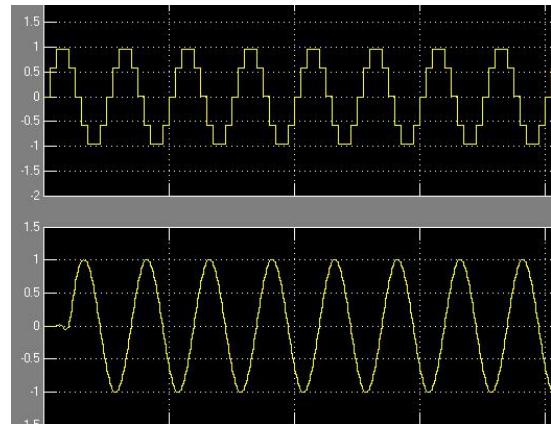
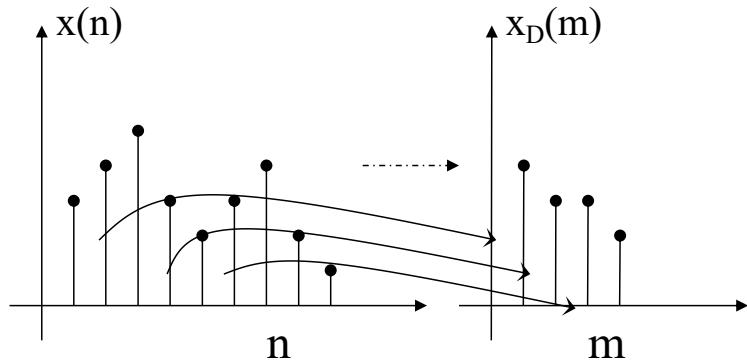


理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

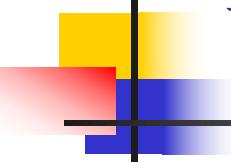
离散处理的工程问题



- 多速率是指对数据的速率进行改变，保持信息不丢失。
- 多速率处理并不只用来降速率（抽取），在某些场合下却是用来提升数据（内插）速率（如数字放音系统）。
- 深入理解和掌握抽取和内插理论对现代通信研究和各种商品化数字应用开发都至关重要。

3.2 抽取与内插

- 带通采样定理降低了射频采样速率，为实时处理奠定了基础。
- 但是，收发机的角度看，带通采样速率越宽越好。
 - 1、处理带宽越宽，对不同信号有更好的适应性；
 - 2、采样率越高，在相同的工作频率范围内所需的“盲区”采样频率数量就越少，利于简化系统设计；
 - 3、过采样可以利用相关技术提高采样量化信噪比。



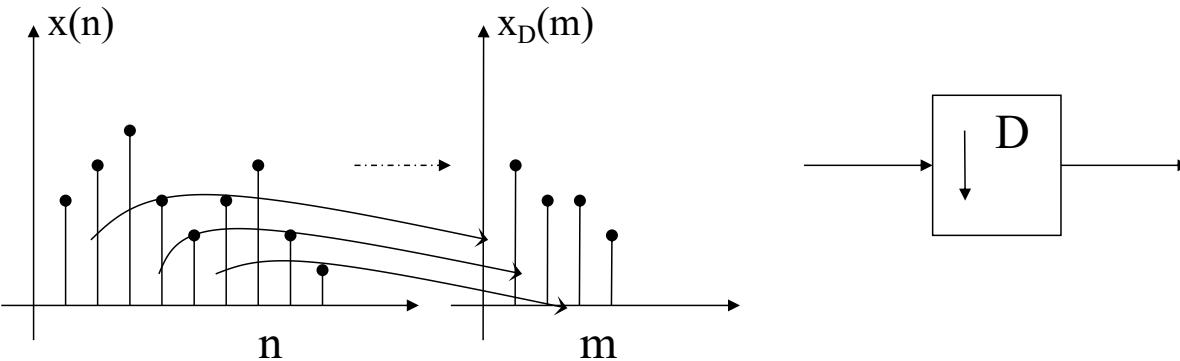
高采样率的新问题

- 采样速率的提高，后续的信号处理速度跟不上，很难满足**实时性**要求。
- 有必要对**A / D**后的数据流进行**降速**处理。
- 是否有可能进行降速处理而又不至于丢失原连续信号的信息呢？
- 回答是肯定的！
 - 实际信号带宽一般为几十千赫兹到几百千赫兹，所需采样速率要求不高，对采样数据流进行降速处理或者叫做二次采样是完全可能的。

一、信号的整倍抽取

- 把原始采样序列 每D个数据取一个形成新序列，
也叫**减采样(Downsampling, Decimation)**

$$x_D(m) = x(mD)$$



- 抽取器（采样压缩器）**

抽取后频域的变化?

$$\delta_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} ni} = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x'(n) = x(n)\delta_D(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x_D(n) = x(nD) = x'(nD)$$

$$X_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_D(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x'(nD) z^{-n}$$

由于 $x'(m)$ 仅在 m 为 D 的整倍数处有值

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x'(m) z^{-m/D}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta_D(m) z^{-m/D} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(x(m) \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} e^{j \frac{2\pi}{D} mi} \right) z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{j \frac{2\pi}{D} mi} z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X \left(z^{\frac{1}{D}} e^{-j \frac{2\pi}{D} i} \right) \end{aligned}$$

抽取后频域的变化?

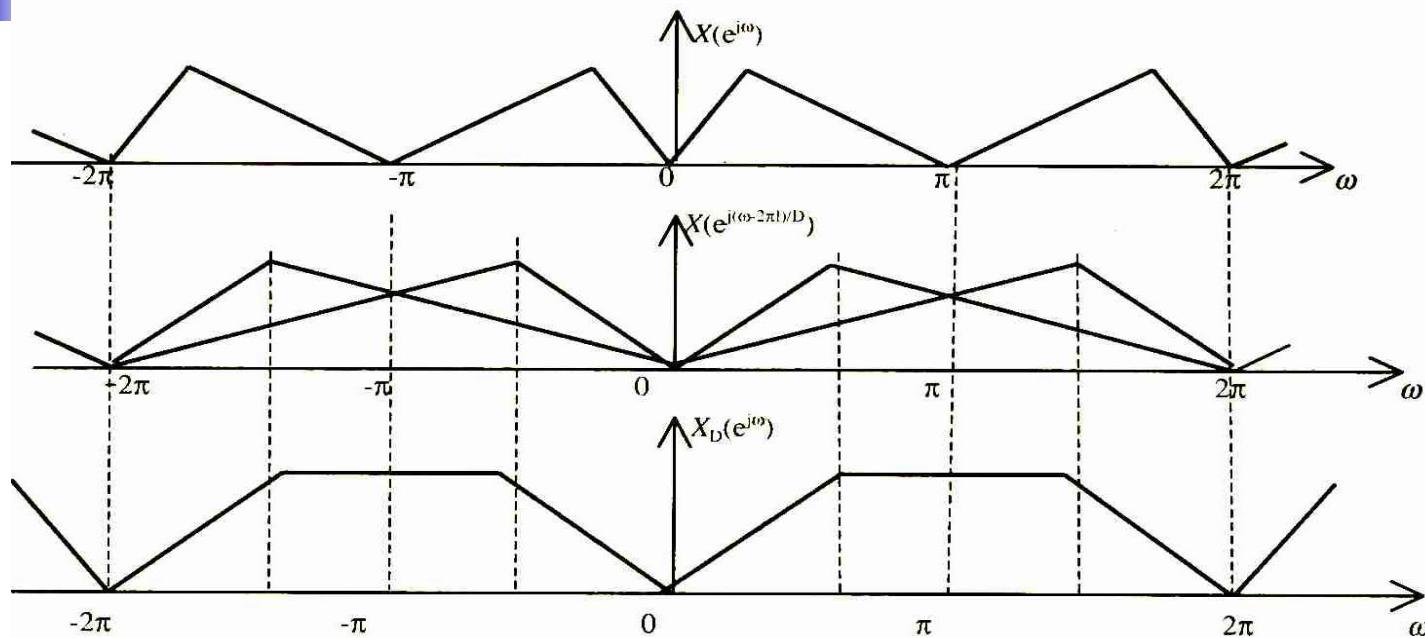
$$x(n) \Leftrightarrow X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - k\Omega_0) \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$x_D(n) \Leftrightarrow X_{DS}(\Omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\Omega - k \frac{\Omega_0}{D}\right) \Leftrightarrow X_D(\omega) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT}\right)$$

$$\begin{aligned} X_D(\omega) &= \frac{1}{DT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - k \frac{2\pi}{DT}\right) \\ &\stackrel{k \rightarrow mD+i}{=} \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{DT} - m \frac{2\pi}{T} - i \frac{2\pi}{DT}\right) \right] \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega - 2\pi i}{DT} - m \frac{2\pi}{T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(\omega') \Big|_{\omega'=\frac{\omega-2\pi i}{D}} \end{aligned}$$

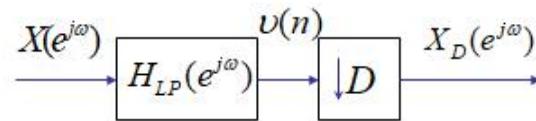
2倍抽取的频谱变化

$$X_D(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(\omega') \Big|_{\omega'=\frac{\omega - 2\pi i}{D}}$$

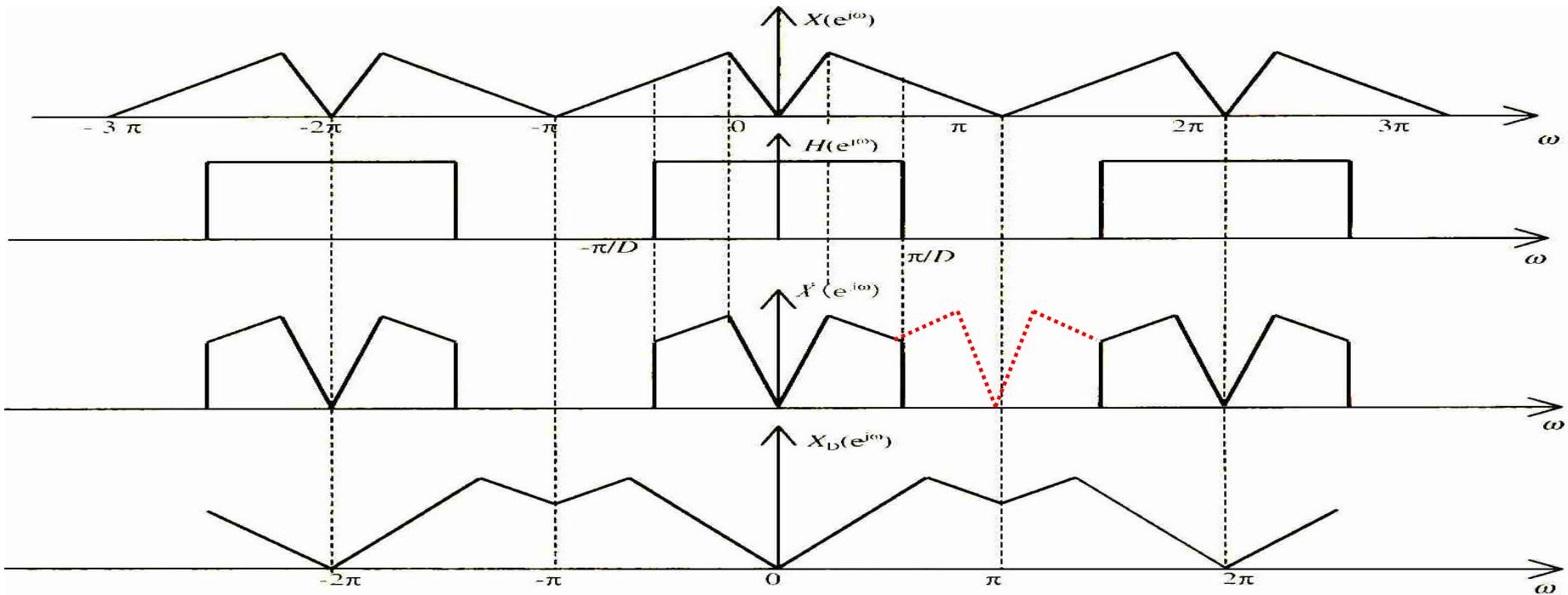


- 如果序列 $x(n)$ 的采样率为 F_s ，则其无模糊带宽为 $F_s/2$ 。
- D 倍抽取后序列 $x_D(m)$ 之取样率为 F_s/D ，其无模糊带宽为 $F_s/2D$ 。
- 当 $x(n)$ 含有大于 $F_s/2D$ 频率分量时， $x_D(m)$ 必然频谱混叠，无法恢复 $x(n)$ 某些频率分量。

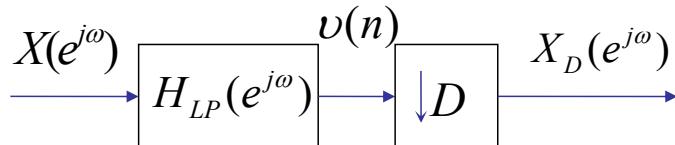
如何防止混叠失真？



- 先用数字滤波器(带宽为 $\frac{\pi}{D}$)滤波，再进行**D**倍抽取。保证抽取前后频谱成分一一对应，信息不丢失



D倍抽取器结构



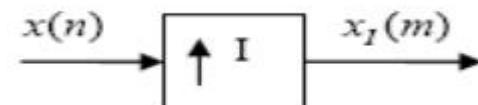
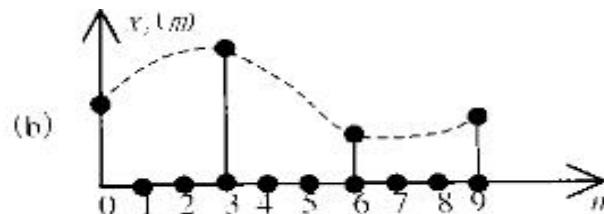
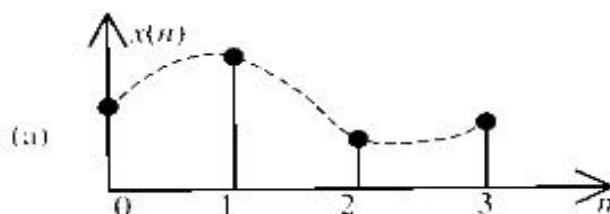
- 需要指出，即当原始信号的频谱分量本身就小于 $\frac{\pi}{D}$ (归一化频域) 时，前置低通滤波器可以省去。

$$X_D(n) = v(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Dn - k) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn - k)}$$

二、信号的整倍内插

- 所谓整数倍内插就是指在两个原始抽样点之间插入(**D-1**)个零值，也叫做**增采样 (Upsampling, Interpolation)**。

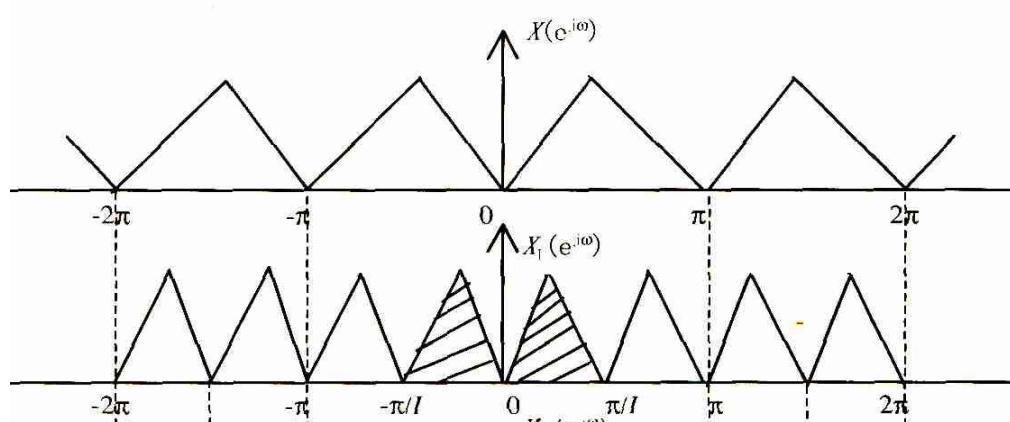
$$x_I(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{I}\right) & (m = 0, \pm I, \pm 2I, \dots) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

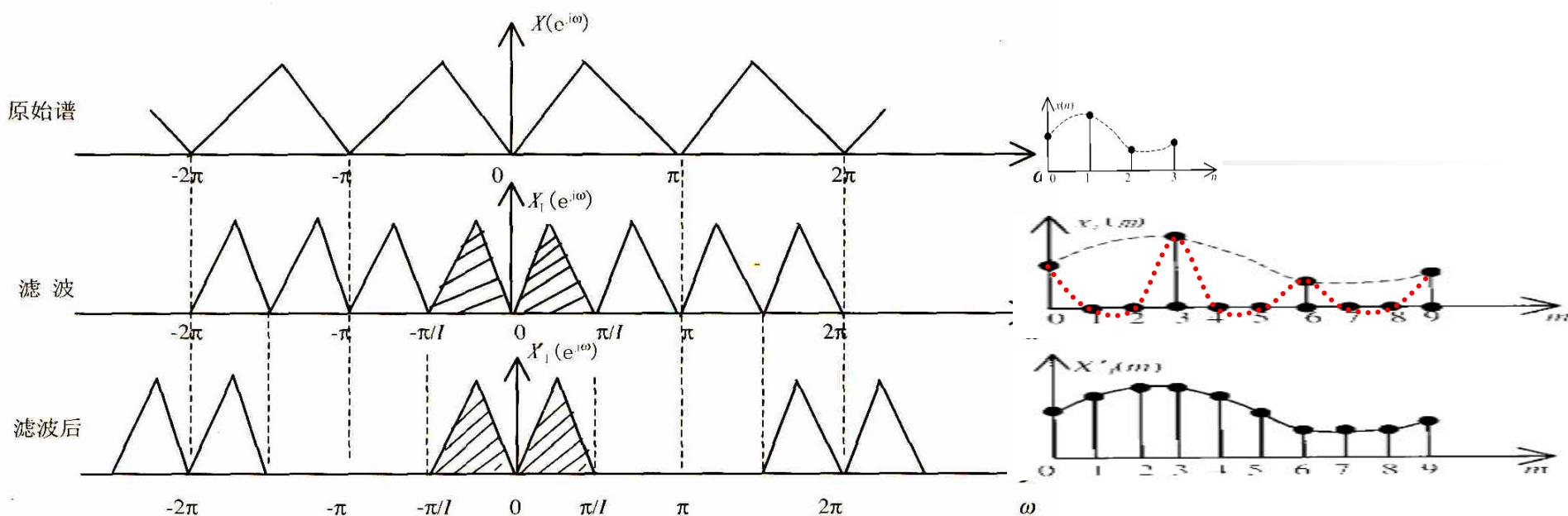


内插信号频谱的变化

- $x_I(m)$ 除了 m 为 I 的整倍点，其余都为零，所以有：

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_I(m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_I(kI) e^{-j\omega I k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega I k} = X(e^{j\omega I}) \end{aligned}$$

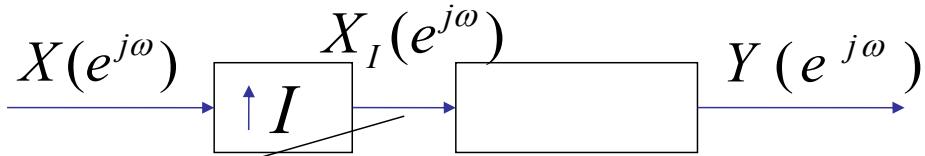




- 1、由上式可见，内插后的信号频谱为原始序列谱经**I倍压缩**后得到的谱。
- 2、经低通滤波消去高频镜像之后，原来插入的零值点变为 **$x(n)$** 的准确内插值，经过内插大大提高了时域分辨率。

完整内插器结构

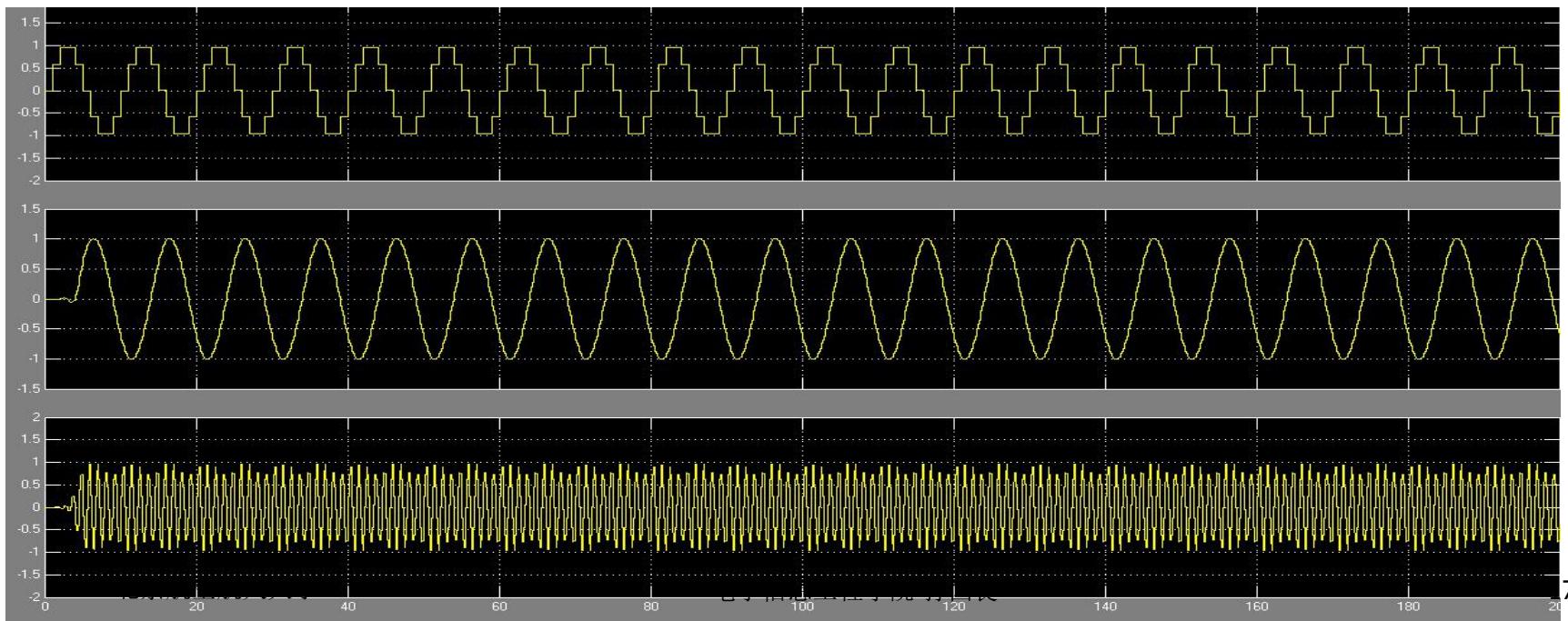
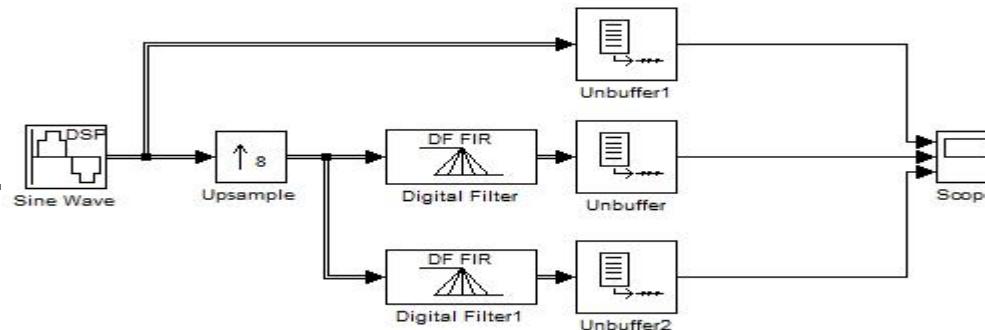
$$H_{LP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ I, & 0 \leq |w| \leq \frac{\pi}{I} \end{cases}$$



$$y(n) = v(n) * h(n) = \sum_k v(k)h(n-k) = \sum_k x(k/I)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-kI)$$

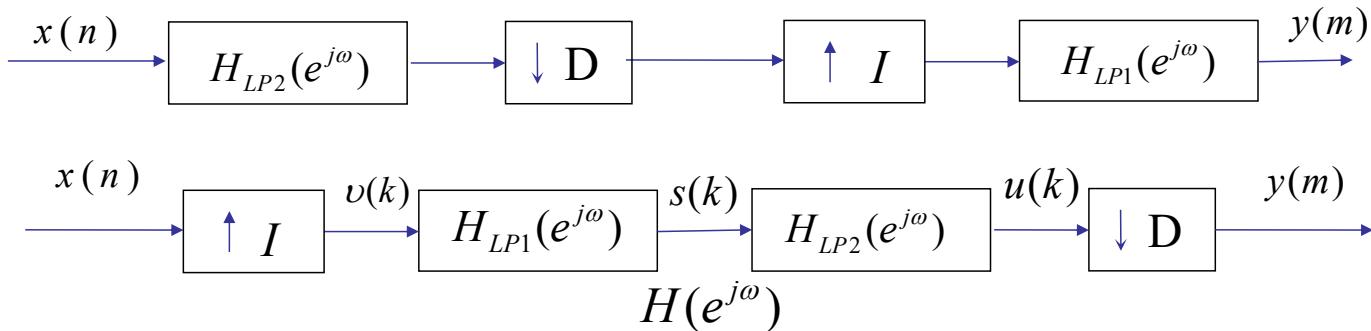
- 内插器的低通滤波器在内插之后，目的是为了滤除高频镜像分量
 - 抽取器的低通滤波器是在抽取之前，为了防止混叠干扰。
 - 如果在内插之后，不是采用低通，而是采用带通，则可将内插后的高频成分取出，这正是数字上变频的基本原理。

$$H_{BP}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ I, & n \frac{\pi}{I} \leq |w| \leq (n+1) \frac{\pi}{I} \end{cases}$$



三、信号非整倍抽取和内插

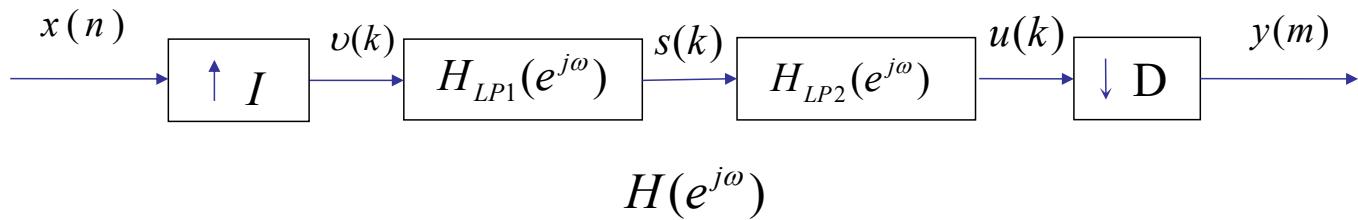
$$R = \frac{I}{D}$$



- 分数倍变换可以通过先进行**I**倍内插再进行**D**倍抽取来实现。两个级联低通滤波工作在相同的速率，可以用一个组合滤波器来代替，即避免混叠又消除镜像干扰。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

分数倍变换的频谱

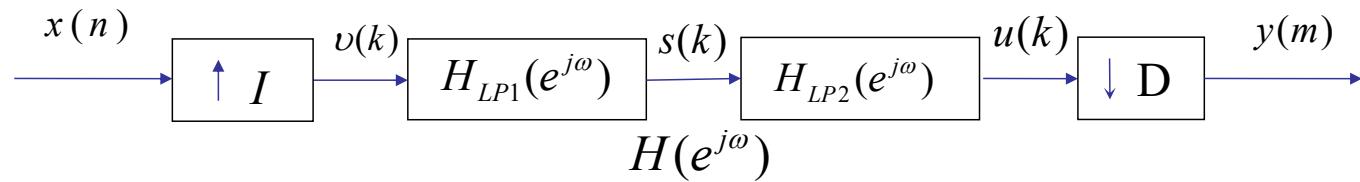


$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})$$

$$U(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})H(e^{j\omega}) = \begin{cases} IX(e^{j\omega I}) & |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} U(e^{j(\omega - 2\pi k)/D}) = \begin{cases} \frac{I}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega I - 2\pi k)/D}) & |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{I}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

分数倍变换的时域表示



$$v(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I \dots \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn - Ik)$$

分数倍抽取时域运算的简化

$$y(n) = u(Dn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Dn -Ik)$$

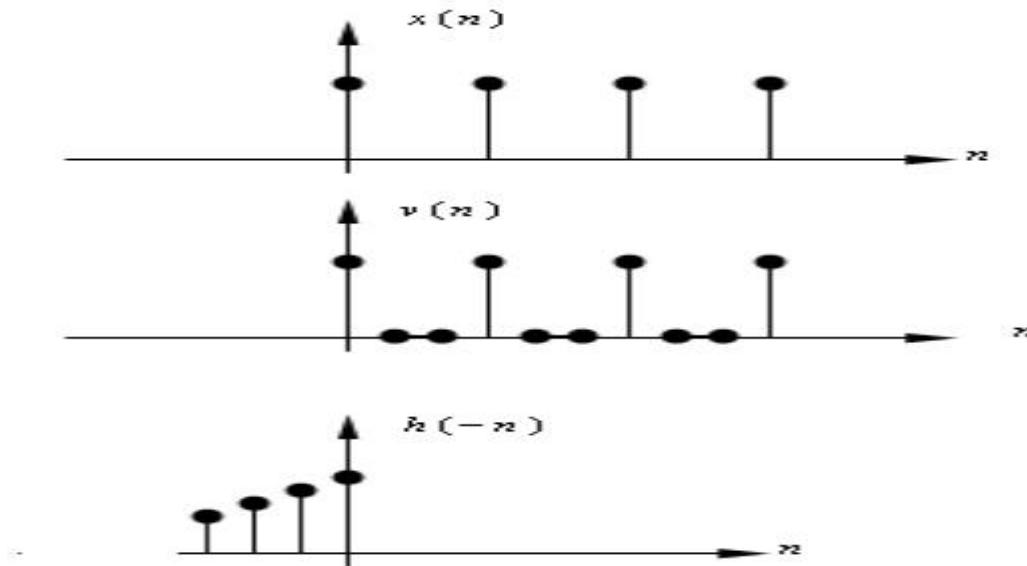
$$Dn - Ik \geq 0 \quad k \leq \frac{D}{I}n \quad \text{令: } m = \left[\frac{Dn}{I} \right] - k, \quad m \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left[\frac{Dn}{I}\right] - m\right)h(Dn - \left[\frac{Dn}{I}\right]I + mI)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left[\frac{Dn}{I}\right] - m\right)h(mI + \langle Dn \rangle_I)$$

Example:

- 令 $I=3, D=2$, $x(n)$ 和 $h(n)$ 如图所示



1、求 $u(n)$

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

$$u(1) = \cancel{0 \cdot h(0)} + x(0)h(1) = x(0)h(1)$$

$$u(2) = \cancel{0 \cdot h(0)} + \cancel{0 \cdot h(1)} + x(0)h(2) = x(0)h(2)$$

$$u(3) = x(1)h(0) + \cancel{0 \cdot h(1)} + \cancel{0 \cdot h(2)} + x(0)h(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)$$

⋮

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Ik)x(k)$$

$$u(0) = x(0)h(0)$$

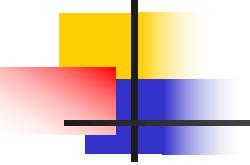
~~$$u(1) = x(0)h(1)$$~~

$$u(2) = x(0)h(2)$$

~~$$u(3) = x(1)h(0) + x(0)h(3)$$~~

$$u(4) = x(1)h(1)$$

⋮



2、求y(n)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Dn}{I} \right\rfloor - m\right) h(mI + \langle Dn \rangle_I)$$

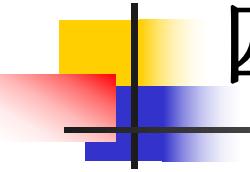
$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 2n \rangle_3)$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} x(-m) h(3m) = x(0)h(0) = u(0)$$

既避免了与插值后为零的点相乘的多余运算，又避免了被舍弃点的多余计算。

$$y(1) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 2 \rangle_3) = \sum_{m=0}^{\infty} x(-m) h(3m + 2) = x(0)h(2) = u(2)$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor - m\right) h(3m + \langle 4 \rangle_3) = \sum_{m=0}^{\infty} x(1-m) h(3m + 1) = x(1)h(1) = u(4)$$



四、速率变换的多相结构

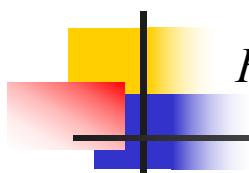
- 问题：
 - 抽取和内插器中数字滤波处理发生在高采样率数据端上，需要很大的计算量，有时甚至难以实现。

- 解决途径：
 - 信号的多相表示应用于多速率处理中以提高处理效率。

1、信号及滤波器的多相表示

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \dots \\ &\quad + h_1 z^{-1} + h_5 z^{-5} + h_9 z^{-9} + h_{13} z^{-13} + \dots \\ &\quad + h_2 z^{-2} + h_6 z^{-6} + h_{10} z^{-10} + h_{14} z^{-14} + \dots \\ &\quad + h_3 z^{-3} + h_7 z^{-7} + h_{11} z^{-11} + h_{15} z^{-15} + \dots \\ &= z^0 [h_0 + h_4 z^{-4} + h_8 z^{-8} + h_{12} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-1} [h_1 + h_5 z^{-4} + h_9 z^{-8} + h_{13} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-2} [h_2 + h_6 z^{-4} + h_{10} z^{-8} + h_{14} z^{-12} + \dots] \\ &\quad + z^{-3} [h_3 + h_7 z^{-4} + h_{11} z^{-8} + h_{15} z^{-12} + \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l)z^{-Mn} \\ E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l)z^{-n} \\ H(z) &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \\ e_l(n) &= h(Mn + l) \\ E_l(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_l(n)z^{-n} \end{aligned}$$



$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \quad h_l^{(E)}(n) = h(Mn + l)$$

$$E_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + l) z^{-n} \quad \text{多相—I型}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_l(z^M) \quad h_l^{(R)}(n) = h(Mn + M - 1 - l)$$

$$R_l(z) = E_{M-1-l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn + M - 1 - l) z^{-n} \quad \text{多相—I型}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^l Q_l(z^M) \quad h_l^{(Q)}(n) = h(Mn - l)$$

$$Q_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Mn - l) z^{-n} \quad \text{多相—III型}$$

北京航空航天大学

系统的多相分解示例

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$M = 2$$

$$E_0(z) = 1 + 3z^{-1} \quad E_1(z) = 2 + 4z^{-1}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1}{1 - \alpha^2 z^{-2}} + \frac{\alpha z^{-1}}{1 - \alpha^2 z^{-2}}$$

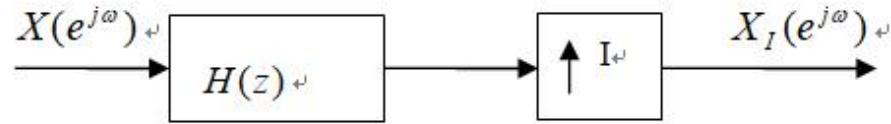
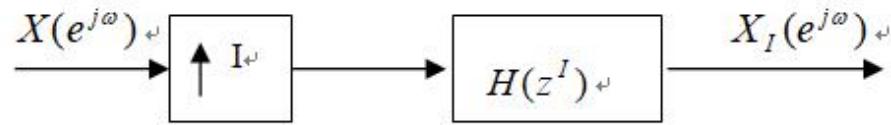
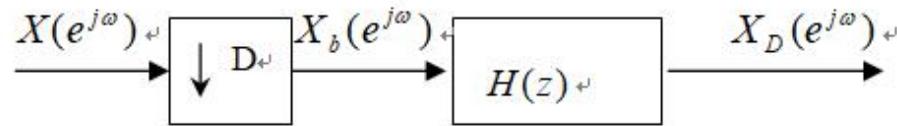
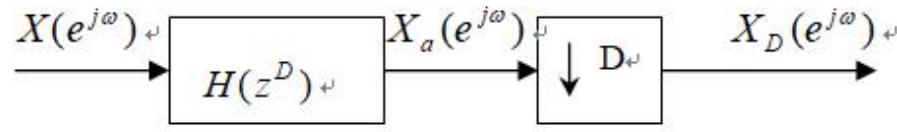
$$E_0(z) = \frac{1}{1 - \alpha^2 z^{-1}} \quad E_1(z) = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2 z^{-1}}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

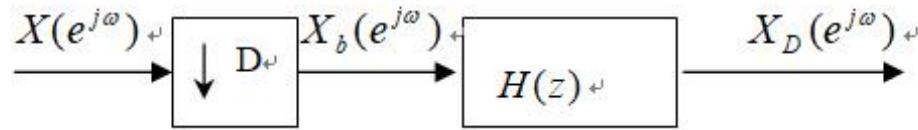
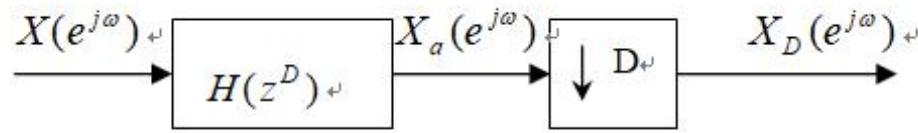
2、内插/抽取的多相实现

- 从抽取和内插器来看，其**低通滤波器皆工作在高数据率条件下**，势必对运算速度的要求很高，不利于实时处理。
- 那么是否可以将滤波器变换到数据率的低端进行工作呢？

变速率处理多相实现结构

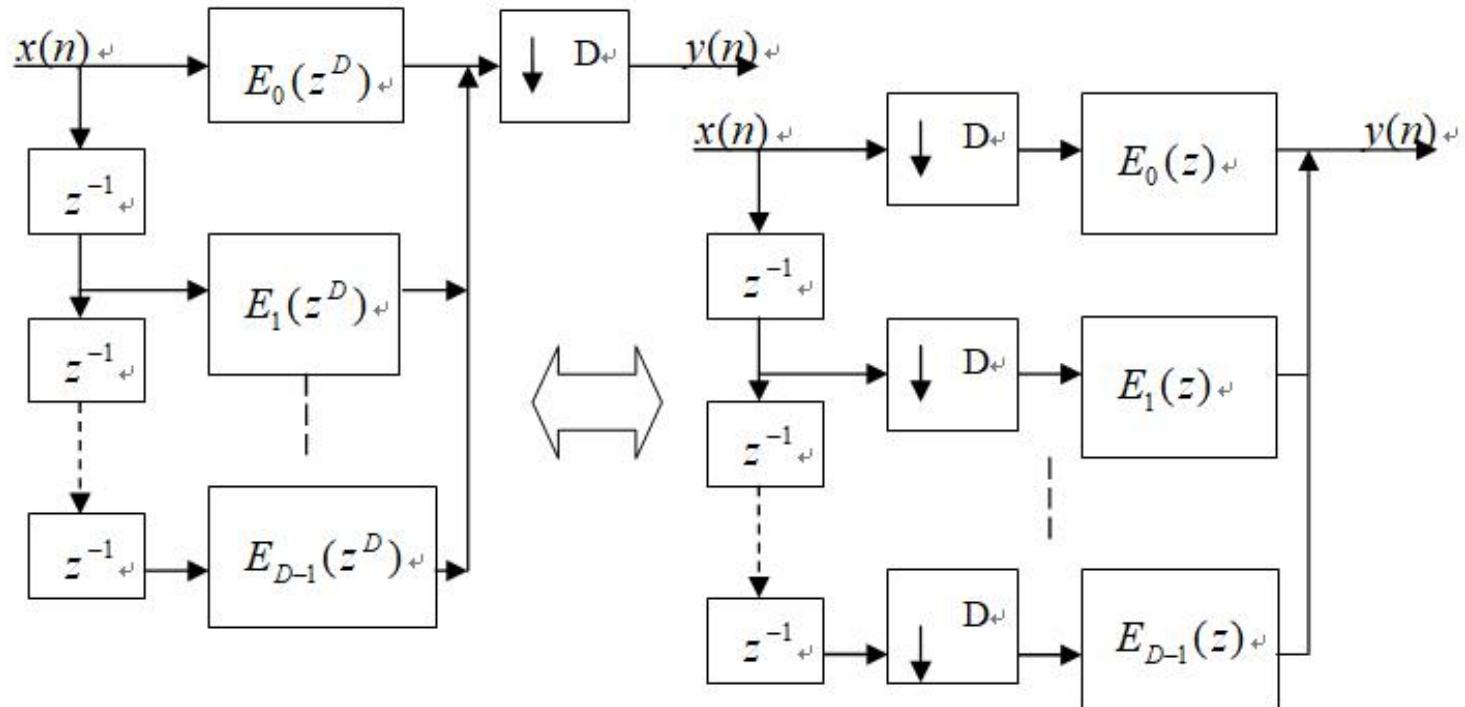


抽取器多相结构等效证明

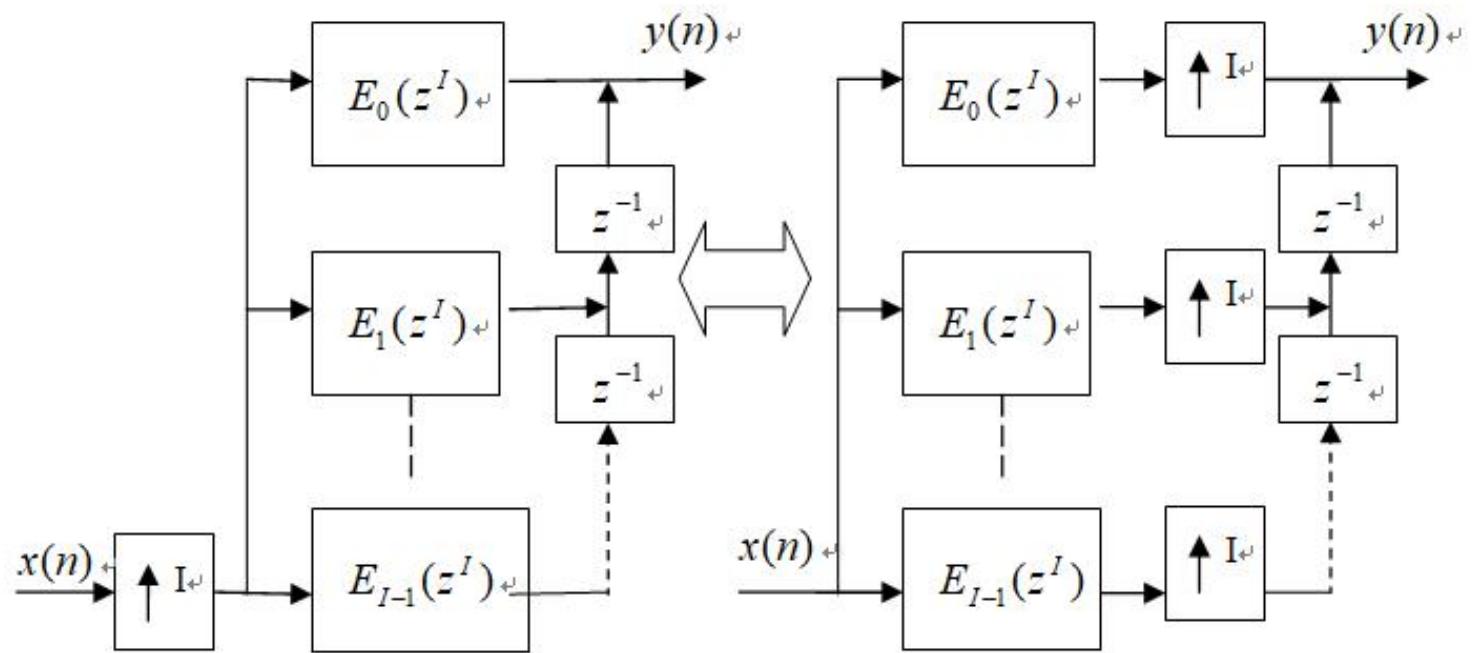


$$\begin{aligned} X_D(e^{j\omega}) &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X_a(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}D}) X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} H(e^{j\omega}) X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) = \left[\frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{D}}) \right] H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

抽取器的等效多相滤波结构



内插器的等效多相滤波结构



作业：

- 4.15
- 4.18
- 4.36
- 4.40
- 4.53





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

4.3



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第三章

Contents

信号采样与重构

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

理想采样和重构



二

连续信号离散处理



三

抽取与内插



四

离散处理的工程问题

离散化处理工程问题



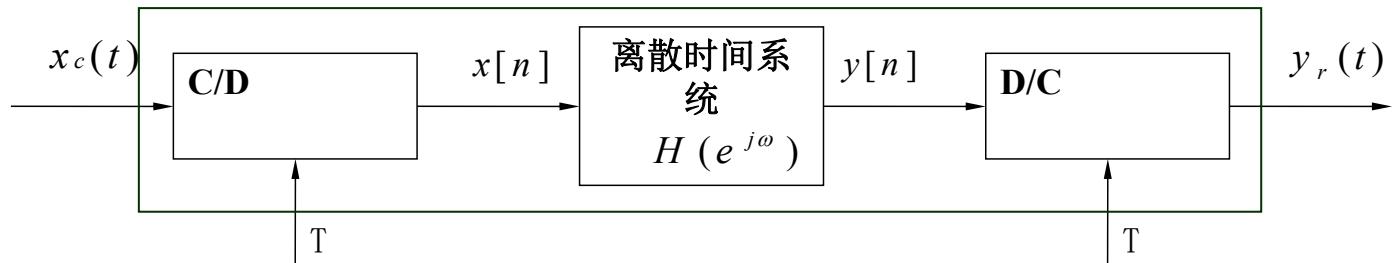
理想周期采样与重构

连续信号离散处理

抽取与内插

离散处理的工程问题

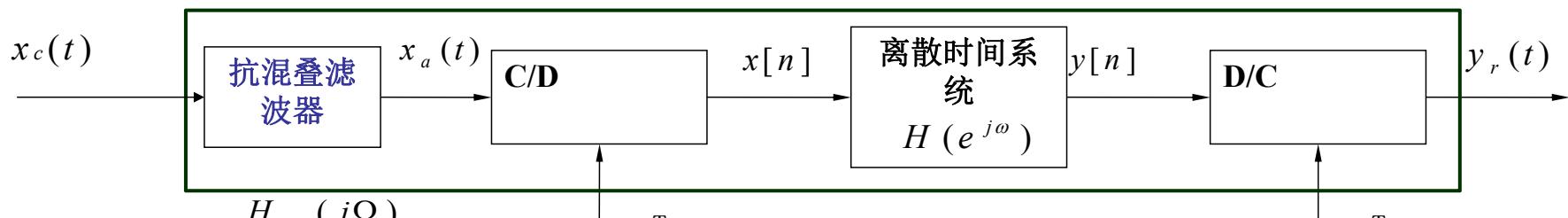
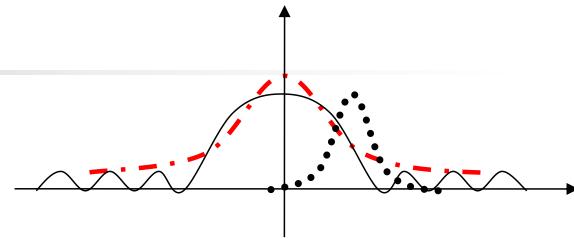
- 离散LTI系统能等效为连续LTI系统



- 等效频率响应为: $H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$ $|\Omega| < \pi / T$
- 实际应用中:
 - 输入信号不是真正带限---》预滤波
 - C / D转换器存在量化误差---》量化噪声模型
 - D / C转换器近似实现存在畸变---》补偿重构
- 如何使得离散化处理接近模拟LTI特性?

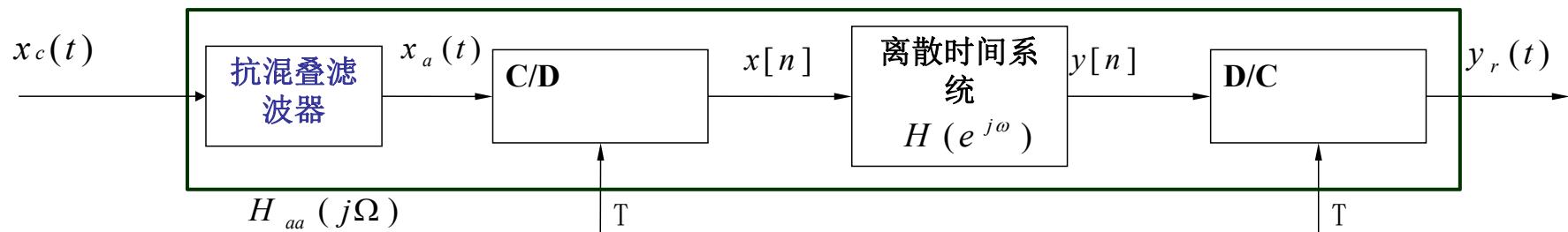
一、消除混叠的预滤波

- 工程应用中，采样率设定总是受到干扰：
 - 1、有用信号本身不带限
 - 2、信号本身是带限的，**加性噪声**也可能占据高频区域；
 - 3、有用信号仅占据小部分带宽
 - 语音在**0~20kHz**内有明显分量，对用户来说**3~4kHz**足够
- 防止因采样而引起的混叠，必须将输入信号**强制限带**。
 - 如果系统的采样率一定，则要求输入信号强制限带到低于所要求的采样率一半（又称作系统的**处理带宽**）。



增加抗混叠后

$$H_{eff}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T})$$

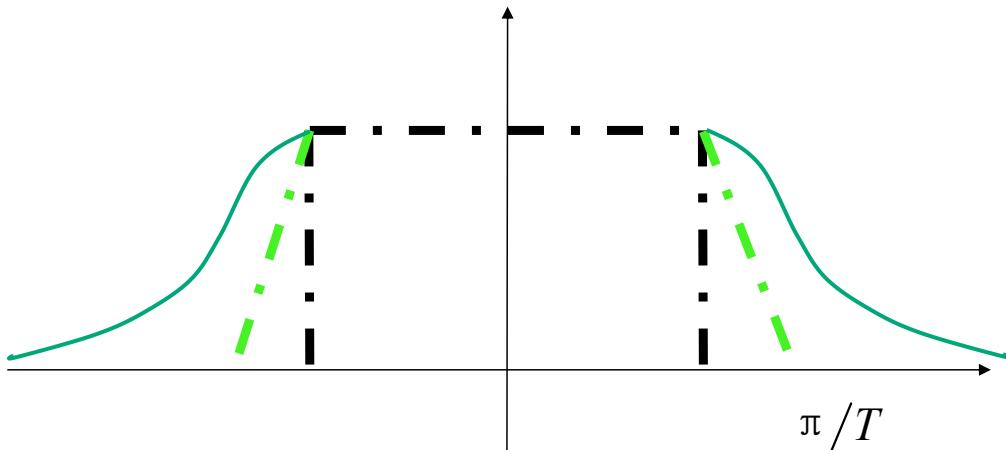


- 限带功能由**C / D**转换器之前的低通滤波器完成，称为**抗混叠滤波器**，**要求抗混叠滤波器在有效带宽处有足够大的衰减。**
- 理想情况下，理想抗混叠滤波器的频率响应为：

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 0 & |\Omega| > \Omega_c \\ 1 & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T \end{cases}$$

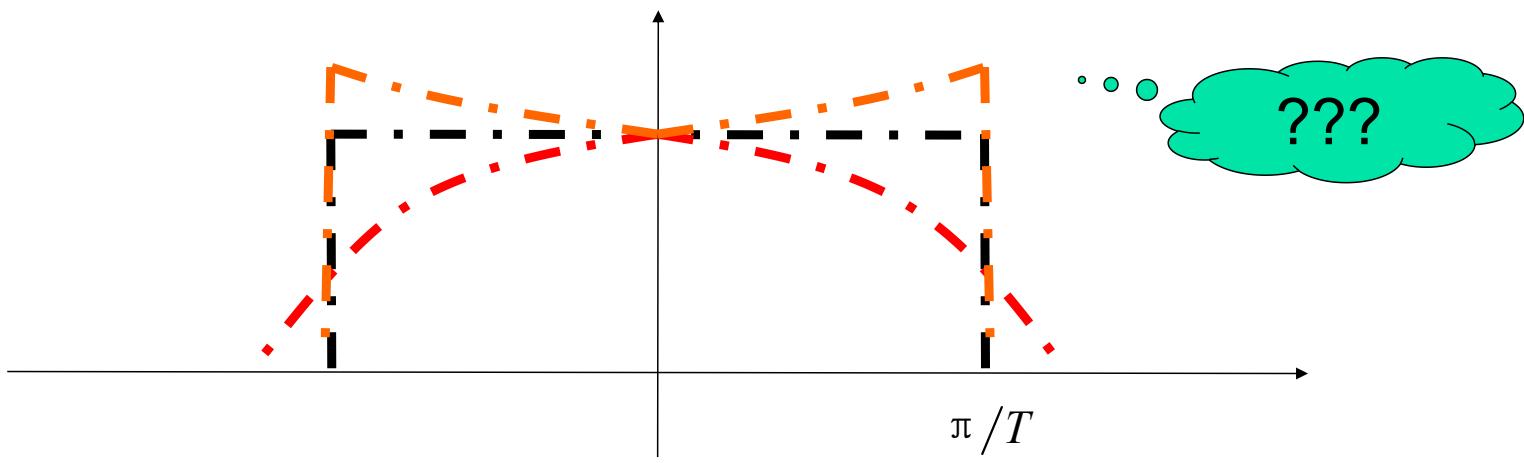
问题

- 期望抗混叠滤波器
有锐截止特性。
- 难以实现，且有很严重的**非线性相位**失真

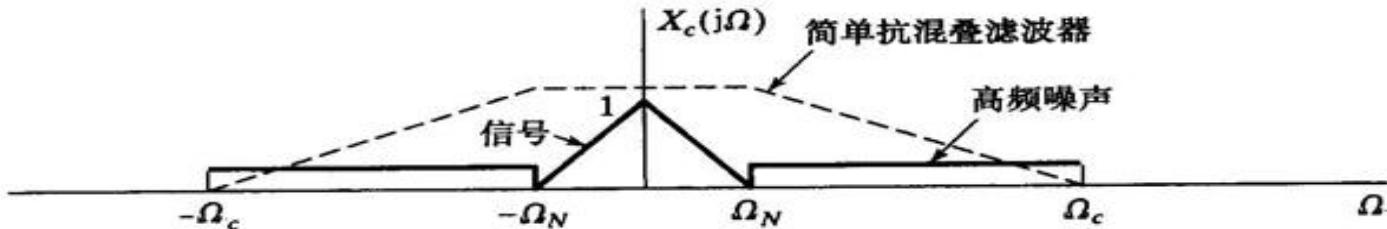


幅度预滚降

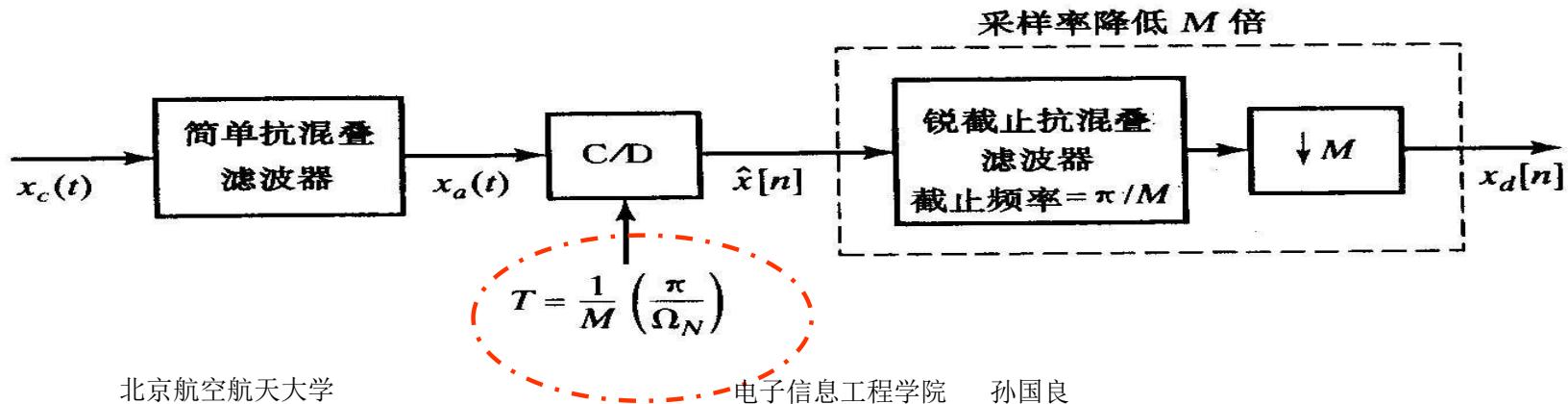
- 为了实现在 π/T 以上的频率响应部分小到可以忽略不计，就需要对 $H_{aa}(j\Omega)$ 特性一开始就进行“滚降”，也即在低于 π/T 的频率上就引入衰减。
 - 这种衰减所带来的幅度失真能够部分的在离散时间系统中补偿

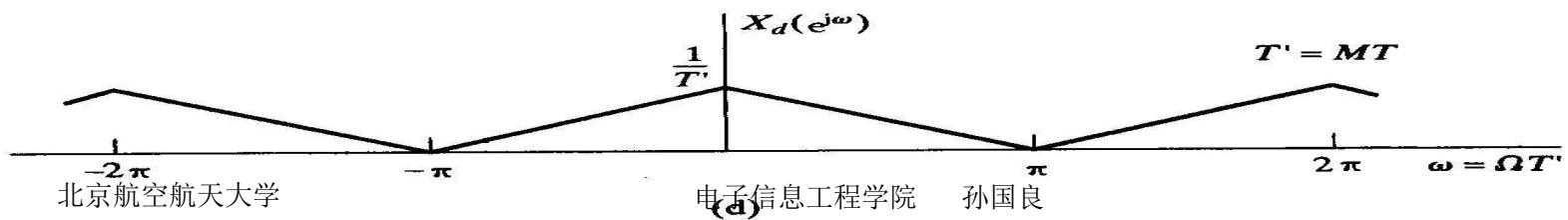
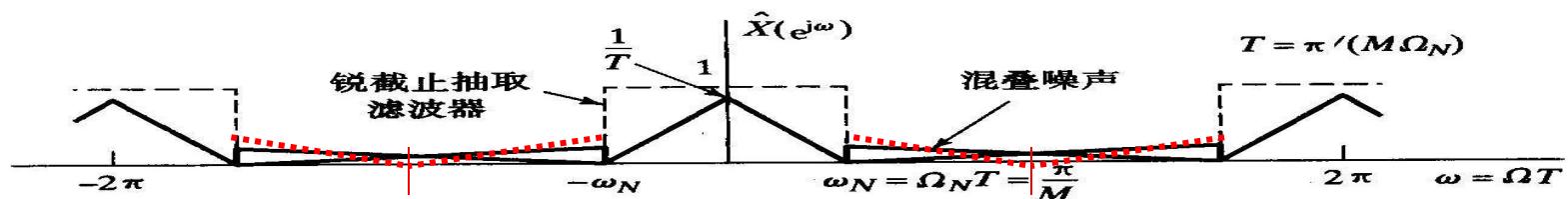
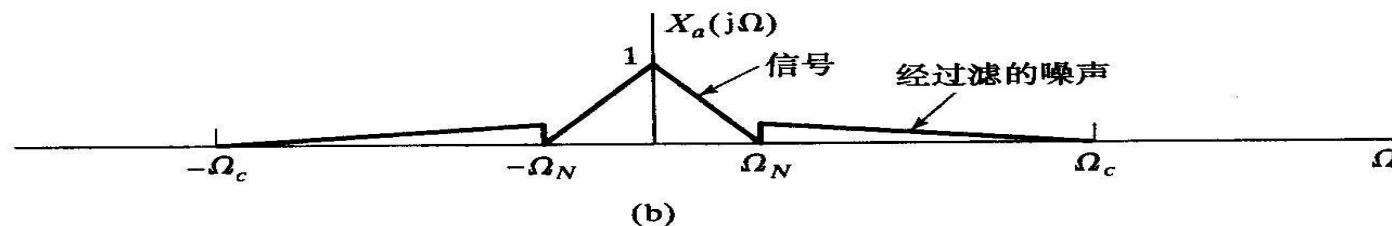
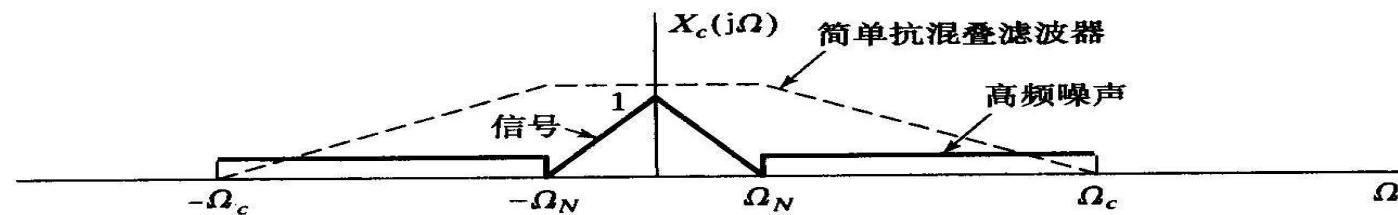


过采样抗混叠



- 采用简单的抗混叠滤波器，使得其在 M 倍的信号带宽处 $M\Omega_N$ 有显著的衰减。
- 用高的采样率 $2M\Omega_N$ 实现C/D转换，之后进行 M 倍抽取。





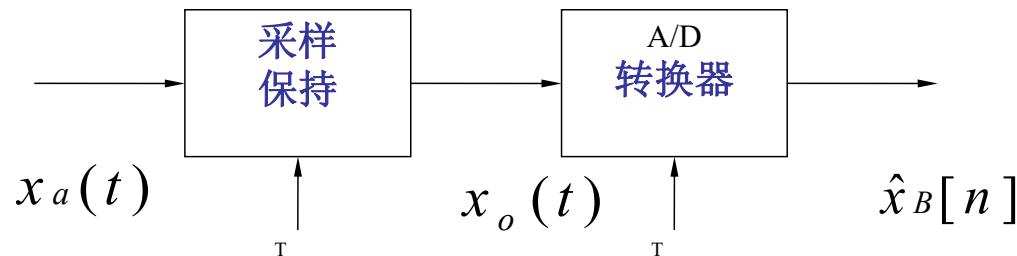
北京航空航天大学

电子信息工程学院

孙国良

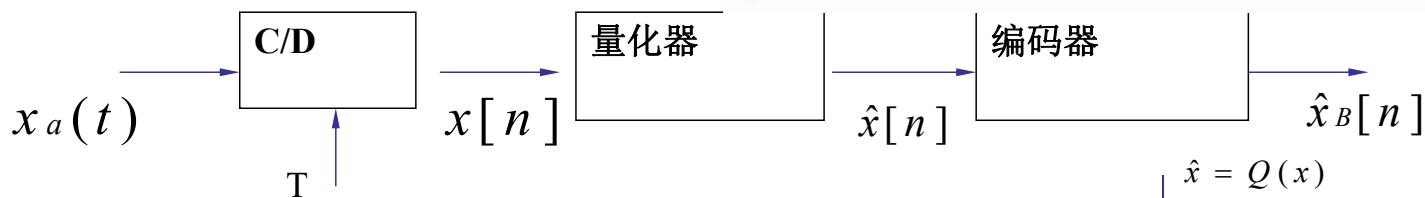
二、A/D采样量化噪声

- 理想C / D转换器将连续时间信号转换为无限精度的离散时间信号。
- 实际中利用数字信号进行处理，即近似为有限精度的序列或量化样本



量化

- 量化器是一种非线性系统，能够将输入样本按照某一规则映射到幅值的有限集



量化器量化阶取决于满幅度电平和量化位数有关

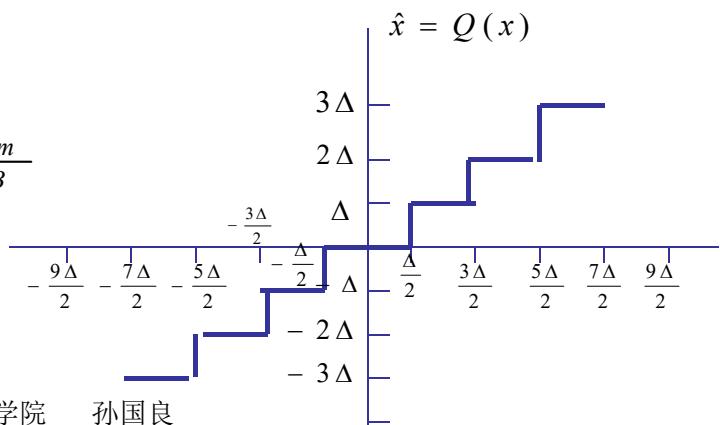
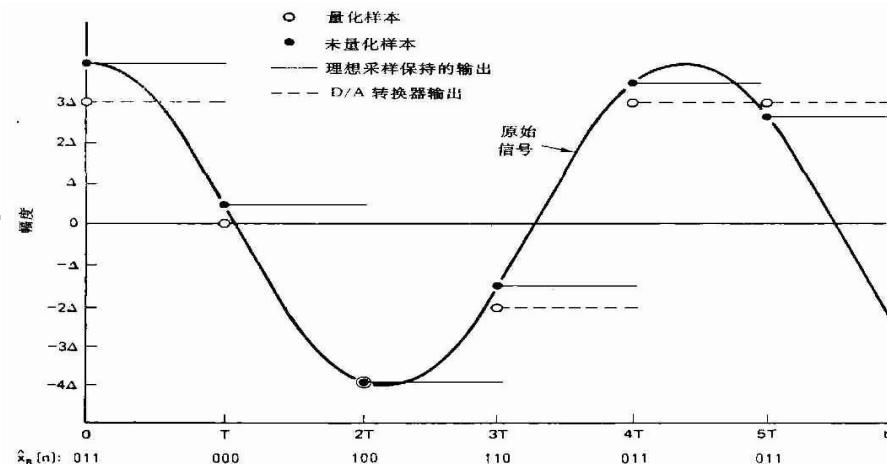
$$\Delta = \frac{2 X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

$$\hat{x}[n] = \hat{x}_B[n]\Delta$$

北京航空航天大学

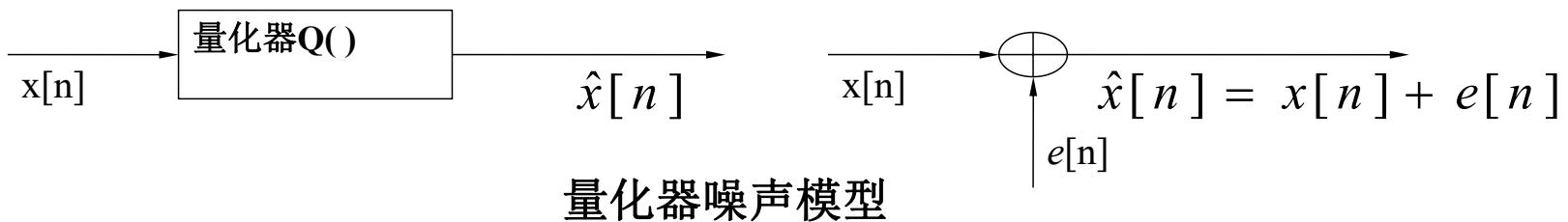
电子信息工程学院

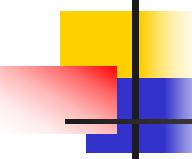
孙国良



量化噪声模型

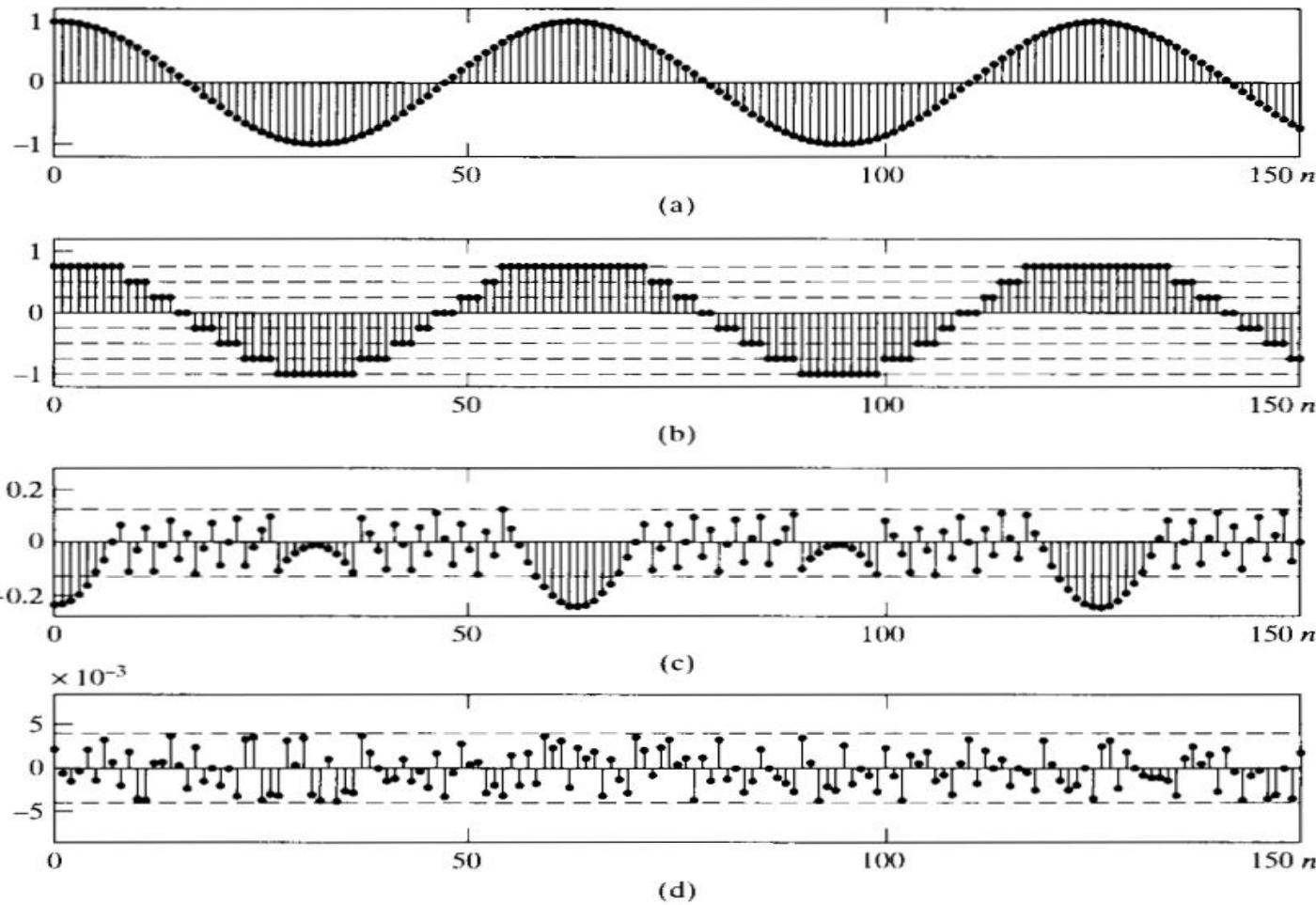
- 一般量化样本不同于样本的真值，其差值就是量化误差：
 - 对于舍入的量化器 $\hat{x}[n] = \hat{x}[n] - x[n]$
- 量化器的简化模型如图所示。 $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$
 - 在大多数情况下，**e(n)**是未知的
 - 统计模型来表示量化效应，，量化误差为加性噪声信号。





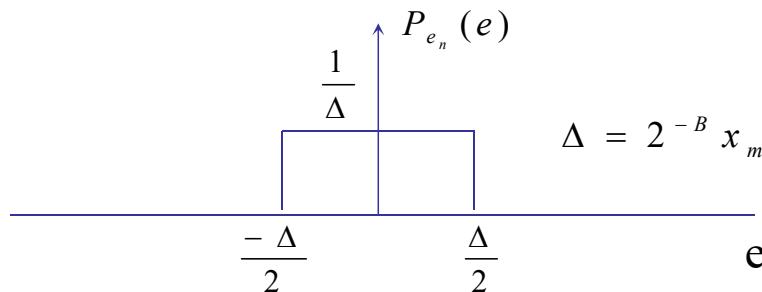
加性噪声模型的基本假设

- 1、误差序列 $e[n]$ 是平稳随机过程。
- 2、误差序列 $e[n]$ 与序列 $x[n]$ 不相关。
- 3、误差过程为白噪声，样本之间不相关。
- 4、误差过程概率分布在量化误差范围内均匀分布。
 - 假设是有条件的：如果信号足够复杂，而量化阶又足够小，以至于从一个样本到另一个样本，信号的幅度很可能横穿过许多量化台阶，那么这个统计模型的假设似乎就愈真实。



均匀量化

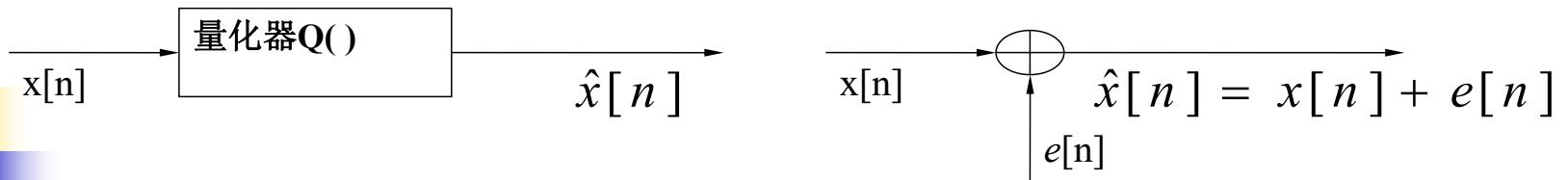
- 均匀舍入量化噪声是均匀分布的随机变量
 - $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$
- 量化噪声的一阶概率密度如图所示(如果量化是**截尾**而不是舍入，那么误差总是负的，并假设从- Δ 到 0 为均匀概率密度分布)。 $\Delta = 2^{-B} x_m$



量化噪声功率

- 由于假定噪声样本间是不相关，这样 $e[n]$ 为均匀分布的白噪声序列。
- $e[n]$ 的均值是零，而其方差为： $\sigma_c^2 = \frac{\Delta^2}{12}$
- 对于一个(B+1)位双极性量化器，其满幅度值为 X_m 。噪声方差或功率是：

$$\sigma_c^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$



- 加性噪声所污损的一种常用度量是**信噪比**, 定义为信号方差(功率)对噪声功率的比, 以**dB**表示
- 一个**(B+1)**位量化器的信噪比是:

$$SNR = 10 \lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}\right) = 10 \lg\left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) = 6.02 B + 10.8 - 20 \lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

- 量化样本的字长每增加一位(也即量化电平数加倍), 信噪比提高**6dB**。

信号幅度匹配

$$SNR = 6B - 1.25 \text{ dB}$$

$$SNR = 10\lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_c^2}\right) = 10\lg\left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) = 6.02B + 10.8 - 20\lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

- 容易看出当 σ_x 减半时，**SNR**下降**6dB**。
- 因此，仔细地将**信号幅度与A / D换器的满幅度值匹配**是很重要的。
 - 对于像语音和音乐，幅度分布趋向于集中在零附近，并随着幅度的增加很快地跌落。幅度超过**均方根值三倍**或四倍的概率非常小。
 - 为了避免峰值箝位(如在统计模型中所假设的)，可以在**A / D转换器**之前设置滤波器和放大器增益，以使得 $\sigma_x = X_m / 4$
 - 高质量的音乐录制和重放系统中，要获得大约**90~96dB**的信噪比，就要求有**16位量化**

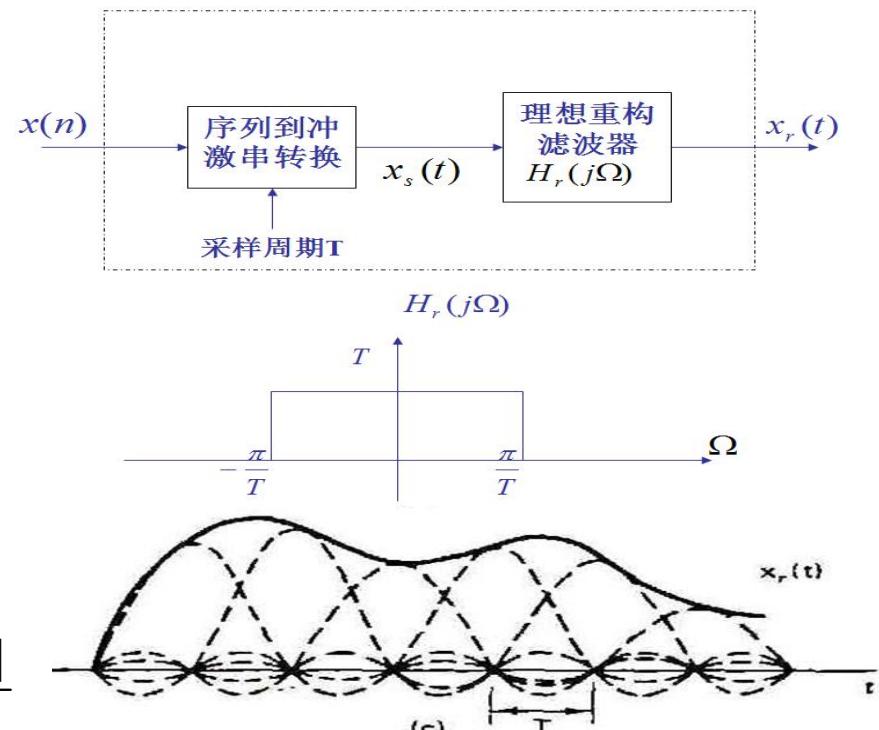
三、D/A转换中的信号失真

■ 理想重构带限信号：

$$X_r(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)$$

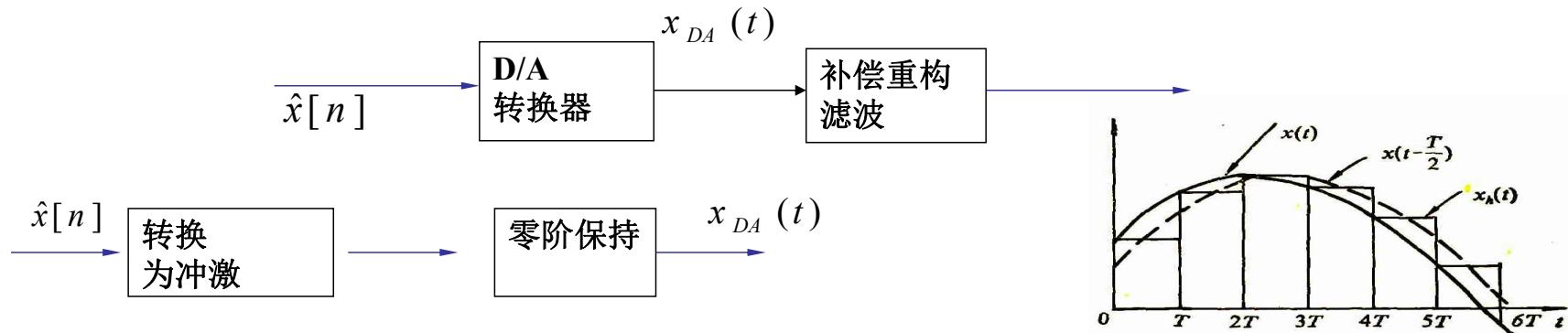
$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, |\Omega| < \pi/T \\ 0, |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$



理想D/C的D/A逼近

- 可实现系统近似是数字/模拟转换器(D / A)紧跟着一个补偿重构滤波器。



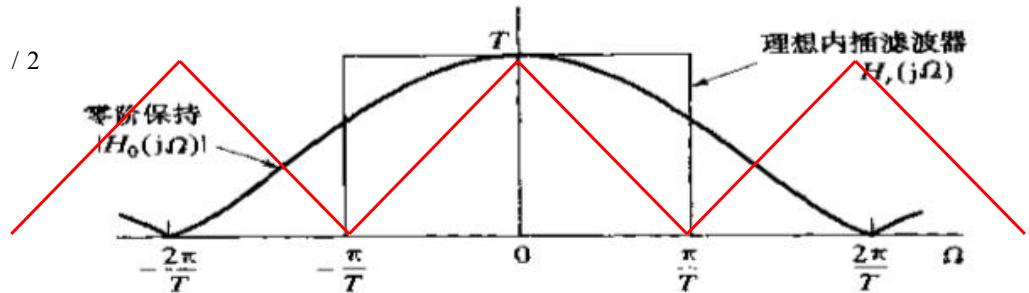
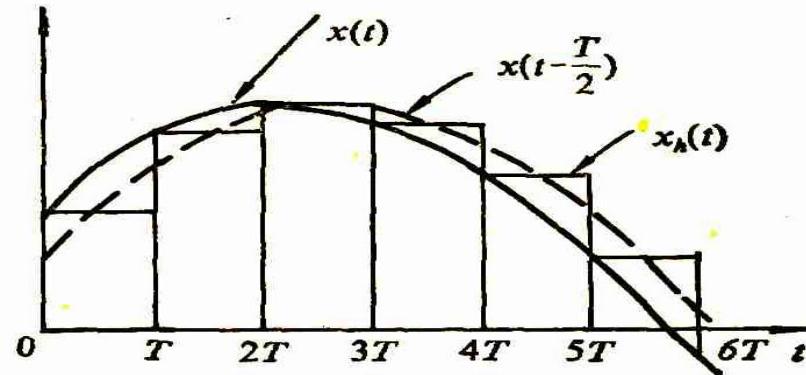
$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_B[n] \Delta h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT)$$
$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

零阶保持器

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{其它} \\ 1 & 0 < t < T \end{cases}$$

$$H_0(s) = \left(\frac{1 - e^{-TS}}{s} \right)$$

$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T / 2)}{\Omega} e^{-j\Omega T / 2}$$



零阶保持器不是一个理想的低通滤波器

- 幅度特性发生畸变；
- 高频分量仍然能够通过，引入噪声和高频镜像。
- 信号产生滞后群延迟 ($T/2$)，对闭环反馈系统的稳定性不利。

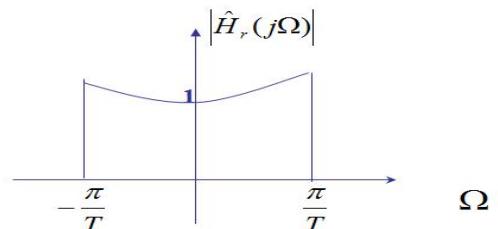
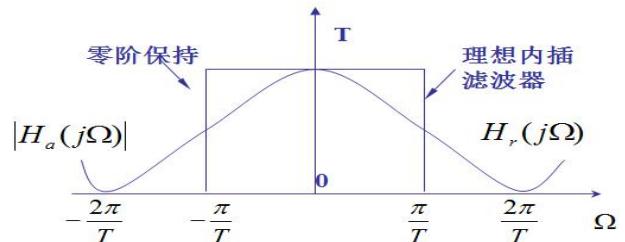
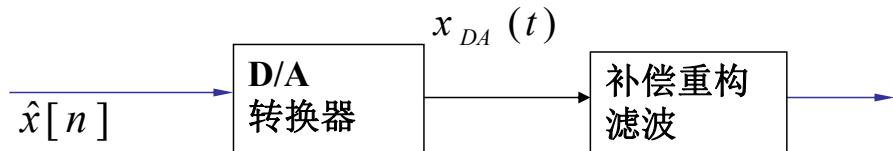
补偿重构滤波器

■ 补偿重构滤波器：

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

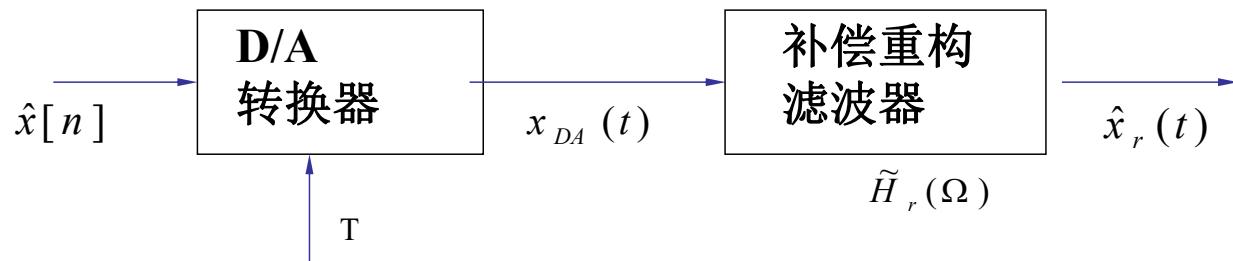
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T / 2}{\sin(\Omega T / 2)} e^{j\Omega T / 2}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

理想补偿重构滤波器，用于紧跟在一个零阶保持重构系统如D/A转换器之后。



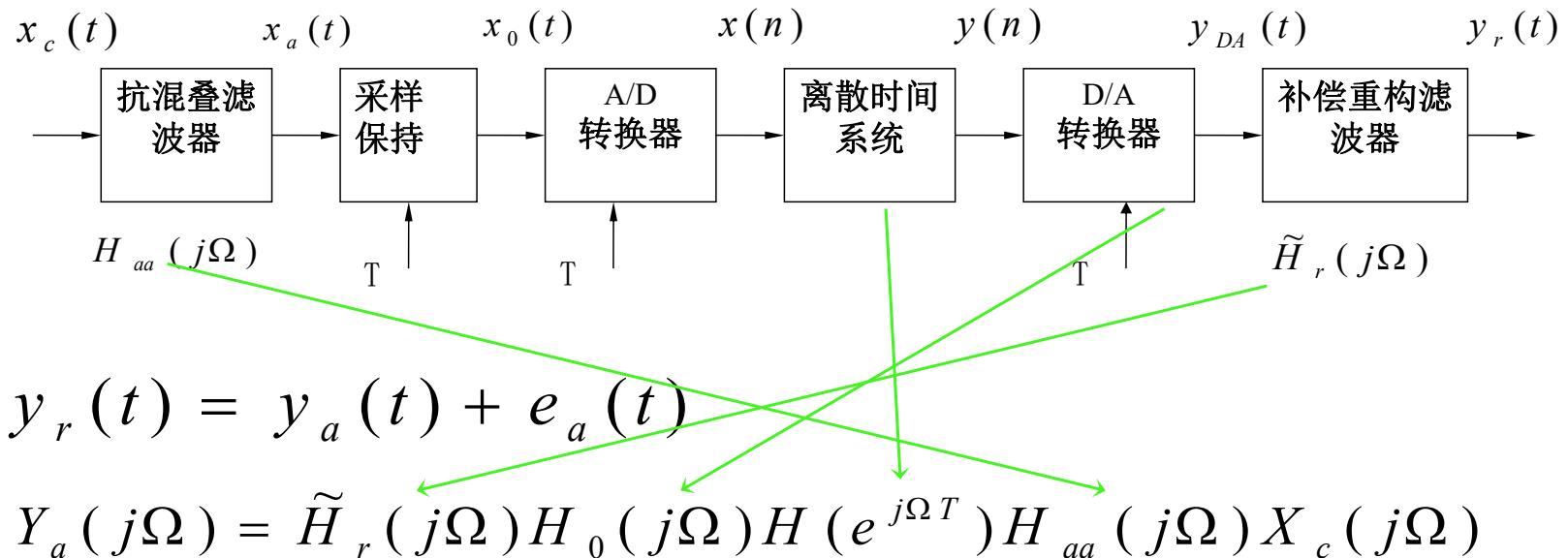
$$\begin{aligned}
 \hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \\
 \hat{x}_r(t) &= x_a(t) + e_a(t)
 \end{aligned}$$

式中 $e_a(t)$ 是一个带限白噪声信号。



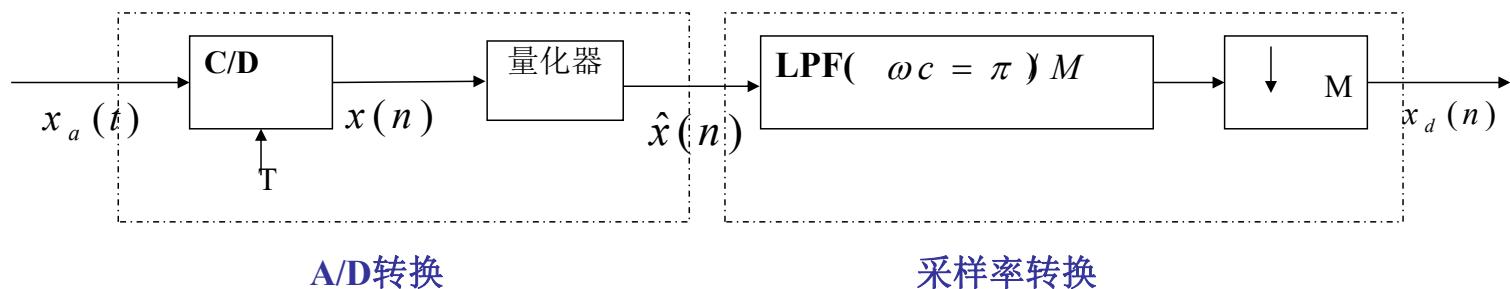
模拟信号数字处理系统的LTI特性

- 如果抗混叠滤波器的输出是带限，并且离散时间系统是**LTI**的，那么总系统就具有**LTI**特性



四、过采样A/D转换

- 为研究过采样和量化阶大小之间的关系，考察如下图所示的系统。

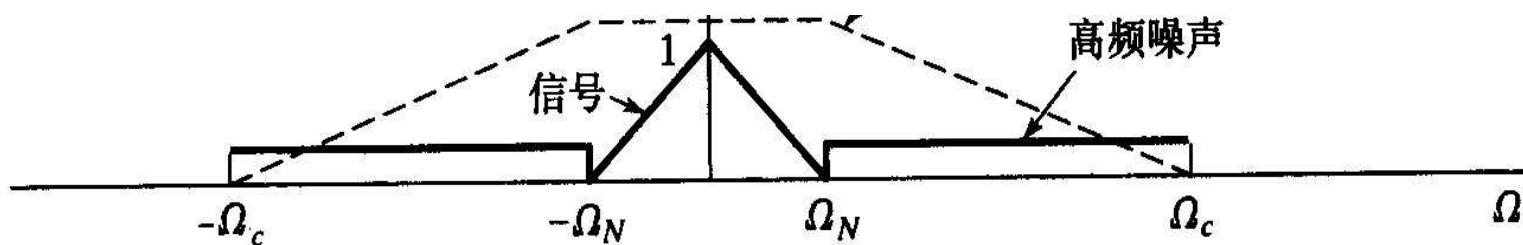


- 此种采样方式下的信噪比？

基本假设

- $x_a(t)$ 是零均值广义平稳的随机过程
- 功率谱密度记 $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$
- 自相关函数记为 $\phi_{x_a x_a}(\tau)$
- 假设 $x_a(t)$ 已经带限到 Ω_N ，即

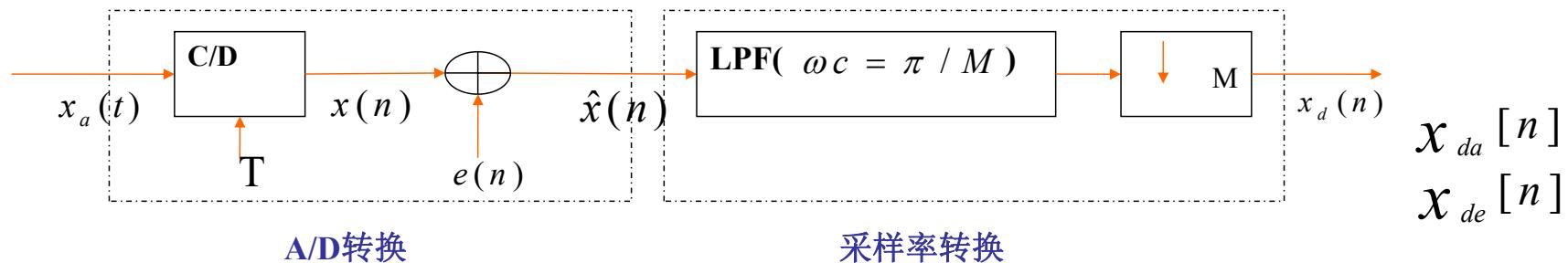
$$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_N$$



过采样+抽取 后信噪比有无改善?

- 假定量化为加性噪声模型, $2\pi / T = 2M\Omega_N$
 - 常数M称为过采样率
- 抽取滤波器增益为1的理想低通滤器
 - 截止频率为 $\omega_c = \pi / M$

系统等效为:



输出中的信号分量

- 令 $\phi_{xx}[m]$ 和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 分别记作 $x[n]$ 的自相关函数和功率谱密度，则有：

$$\phi_{xx}[m] = \varepsilon\{x[n+m]x[n]\} = \varepsilon\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\} = \phi_{x_ax_a}(mT)$$

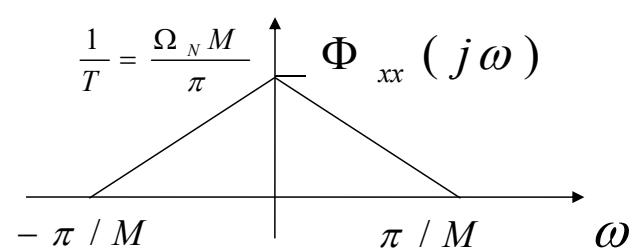
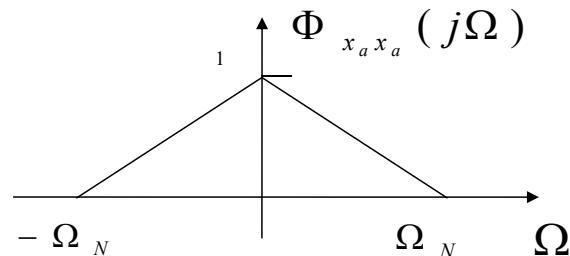
- 即样本序列的自相关函数就是对应的连续时间信号自相关函数的采样。

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_ax_a}\left(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T})\right)$$

采样信号功率等于模拟信号功率

- 输入带限，过采样M倍的信号功率谱为：

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T}) & |\omega| < \pi/M \\ 0 & \pi/M < |\omega| < \pi \end{cases}$$



$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}(j\frac{\omega}{T}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}$$

抽取对功率影响

- 注意到 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 是带限制 $|\omega| < \pi / M$

$$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx}(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}) = \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) \quad |\omega| < \pi$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \mathcal{E}\{x^2[n]\} \end{aligned}$$

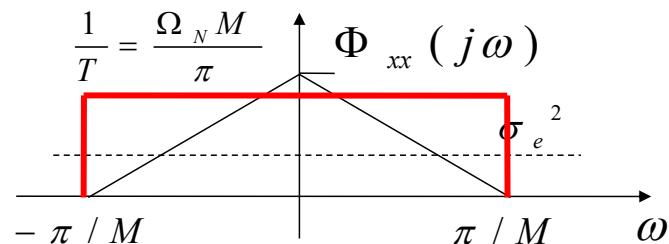
- 结论：输出中信号功率保持不变

输出中的量化噪声分量

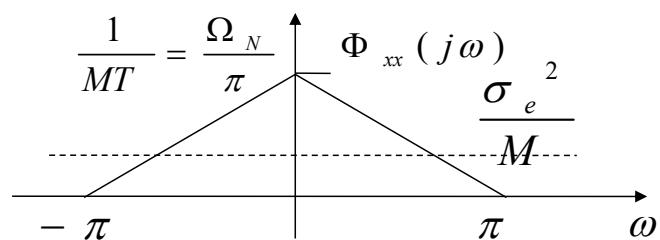
- 假设 $e[n]$ 是一个广义平稳的白噪声过程，其均值为零，方差为 $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ ，
- 则 $e[n]$ 的自相关函数和功率谱分别是：

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$$

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$$



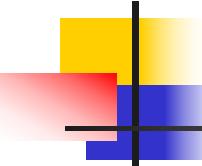
$$\begin{aligned} P_{de} &= \varepsilon \{ x_{de}^2[n] \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_e^2 / M d\omega \\ &= \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{1}{12M} \left(\frac{X_m}{2^B} \right)^2 \end{aligned}$$



M倍过采样+抽取之后的信噪比

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \lg\left(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}}\right) = 10 \lg\left(\frac{12 \cdot M \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2}\right) \\ &= 6.02 B + 10 \lg M + 10.8 - 20 \lg\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \end{aligned}$$

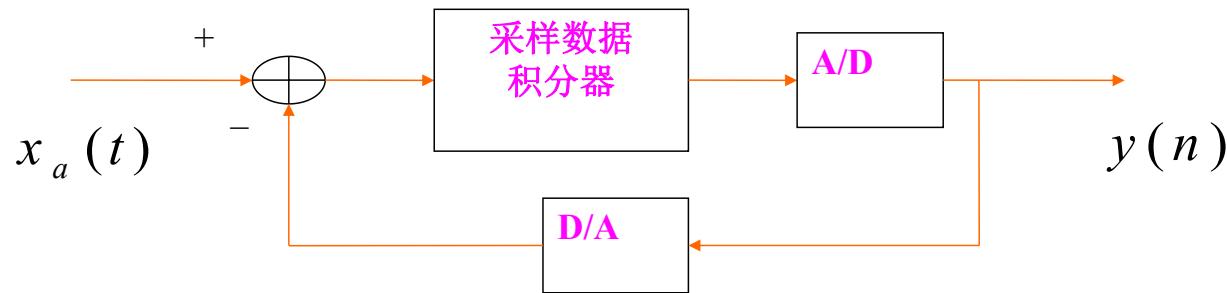
- 结论:
- 相同位数条件下，信噪比提升 $10\log M$ 分贝
- 在相同信噪比要求下，每将过采样M加倍，就可以减少**1/2**位量化位数。



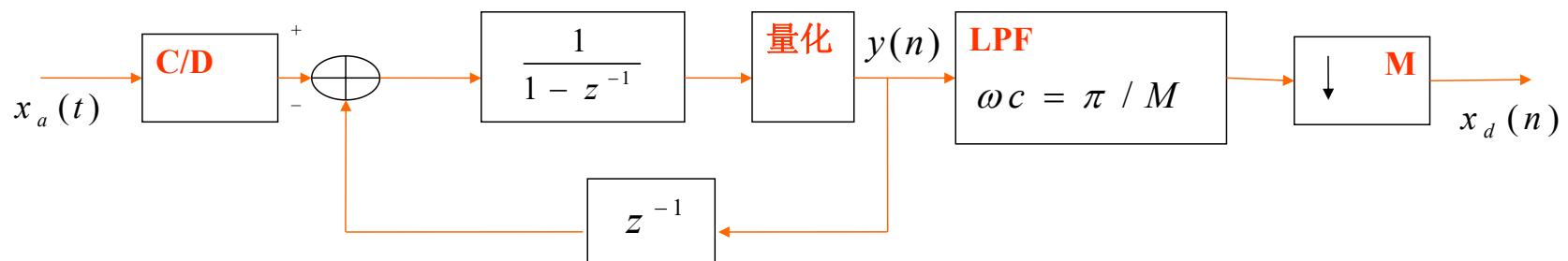
噪声成形的过采样A/D

- 过采样和抽取可以改善信噪比。但是为了实现所需要的量化位数上有明显的减少，就需要很大的过采样率。
 - 例如，为了从**16**位减少到**12**位就要求**M=256**！这似乎是一个相当高的代价。
- 然而，如果把过采样与用反馈噪声谱成形的技术结合起来，可以获得更好的性能。
 - 噪声成形中的基本思想是要改变**A/D**转换的过程，使得量化噪声的功率谱密度不再是均匀的，将其成形为大部分的噪声功率位于频带 $|\omega| < \pi/M$ 之外的形式。后续的滤波和减采样就将更多的量化噪声功率滤除。

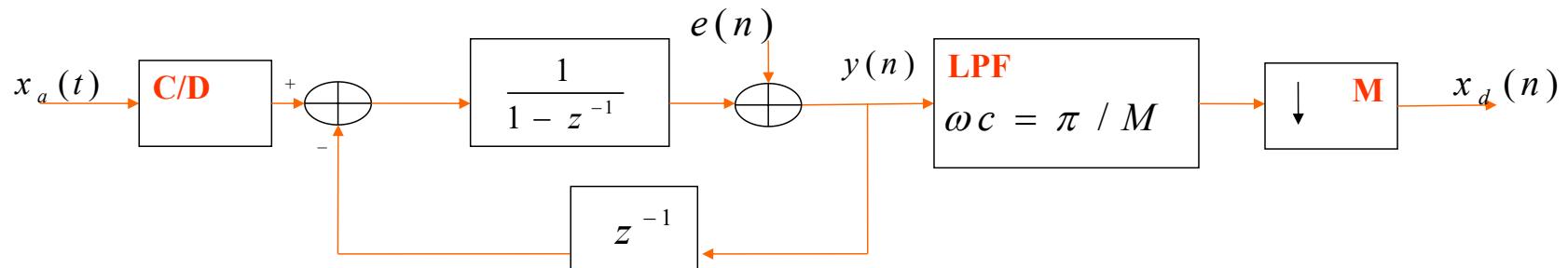
噪声成形量化器 (Delta-Sigma)



带量化成形的过采样离散等效结构

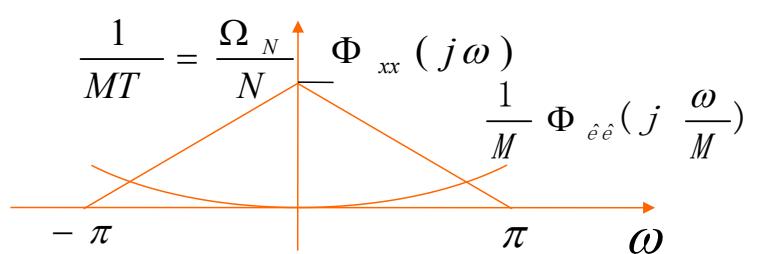
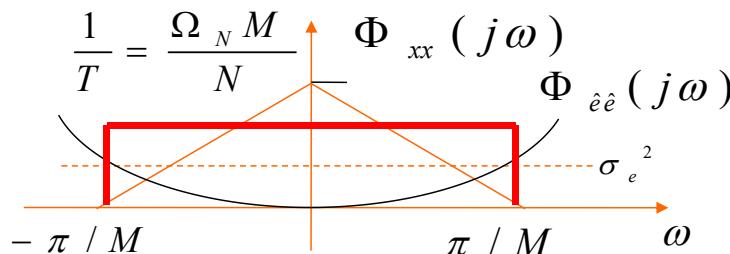
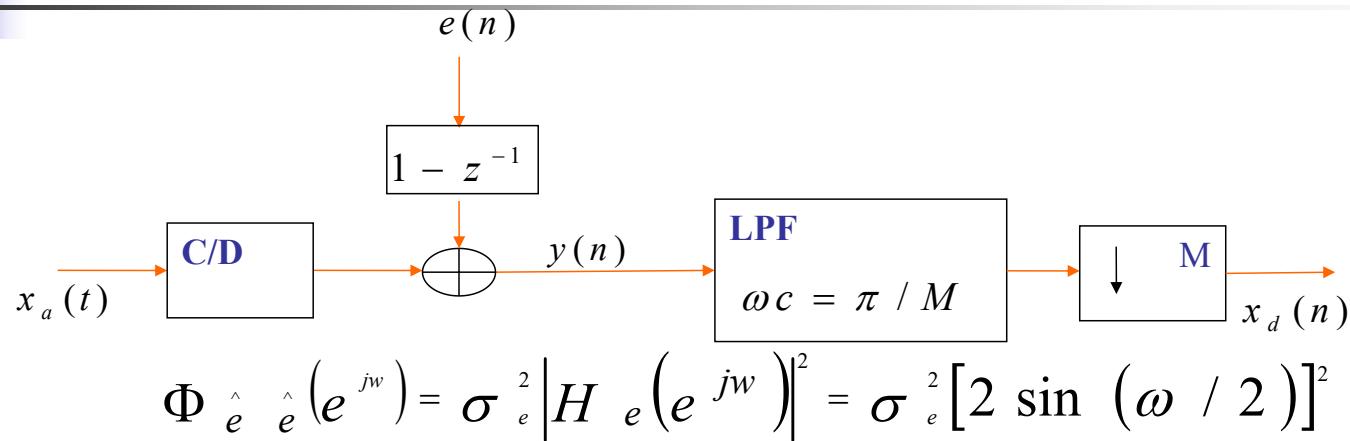


噪声成型后的信号与噪声



- **y[n]**是两个分量之和：
 - 单独由**x[n]**产生的**y_x(n)**
 - 单独由噪声**e[n]**产生的**ē[n]**。
- 传递函数分别为： $H_x(z) = 1$ $H_e(z) = (1 - z^{-1})$
- 从而有： $y_x[n] = x[n]$ $\hat{e}[n] = \hat{e}[n] - \hat{e}[n-1]$

抽取前、后信号和量化噪声的功率谱密度



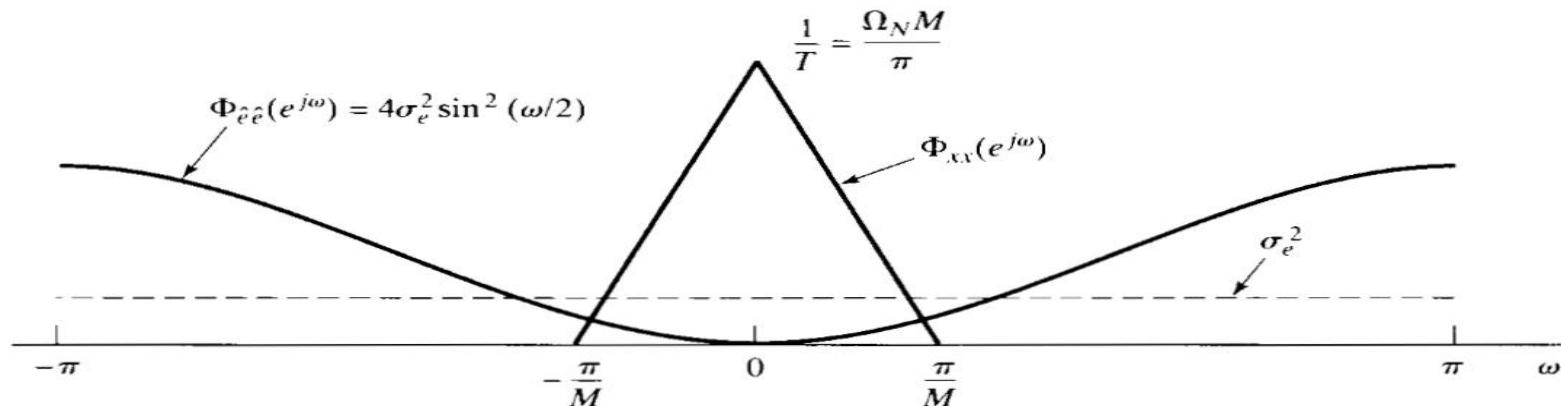


Figure 4.64 The power spectral density of the quantization noise and the signal.

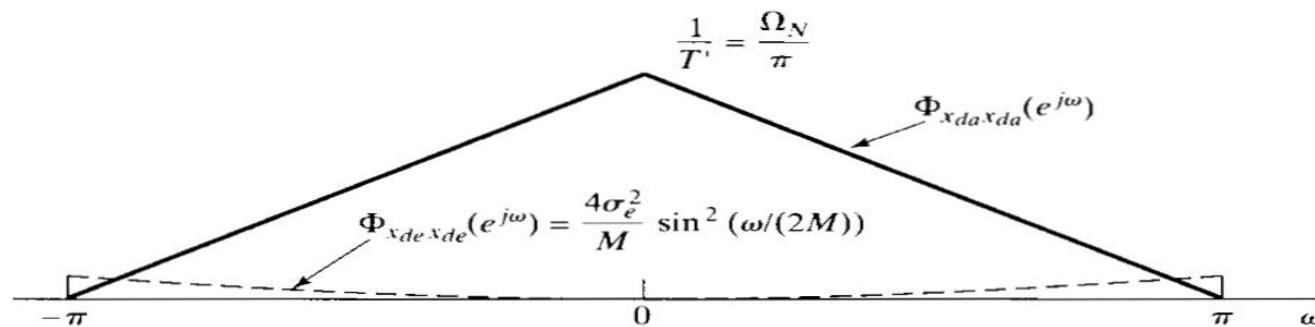


Figure 4.65 Power spectral density of the signal and quantization noise after downsampling.

抽取滤波后量化噪声的功率

- 噪声成型后总噪声功率增加： $\mathcal{E} \left\{ e^{\hat{n}^2[n]} \right\} = 2 \sigma_e^2$
 - 量化噪声成形使噪声功率比直接过采样情况有更多功率位于信号带宽 $|\omega| < \pi/M$ 以外，被后续的低通滤波器滤除。
- 输出中的量化噪声功率是：

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta^2}{12M} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \right)^2 d\omega$$

- 假设 M 足够大，以至满足： $\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}$
- 从而有： $P_{de} = \frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^2}{3M^3} = \frac{1}{36} \frac{\Delta^2 \pi^2}{M^3}$

输出的信噪比为：

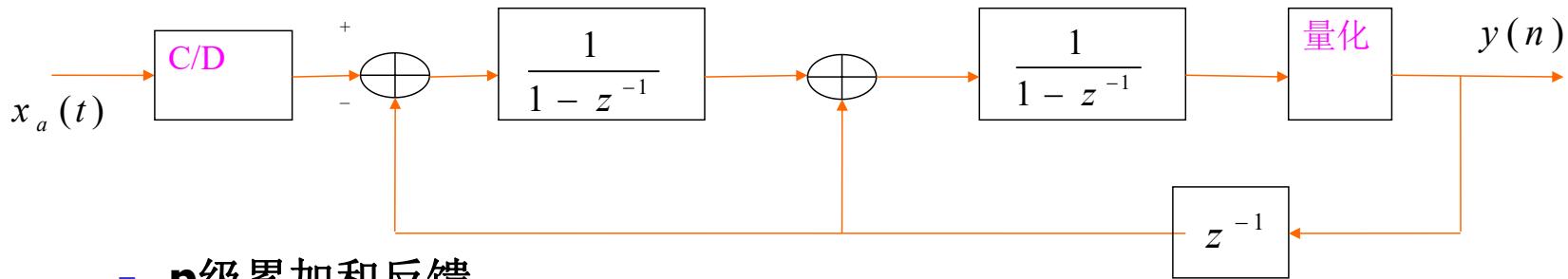
M	Direct quantization	Noise shaping
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{P_{de}} \right) = 10 \lg \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2 \pi^2} \frac{3M^3}{\pi^2} \right) \\ &= 6.02B + (30 \lg M - 5.17) + 10 \cdot 8 - 20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) \end{aligned}$$

- 结论：
- 同样量化位数下信噪比提升**30lgM-5.17**
- 利用噪声成形后每加倍过采样率可节省**1.5**比特
 - 直接量化时，每加倍过采样率可以节省**1/2**比特量化

高阶噪声成形

Quantizer order p	Oversampling factor M				
	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5



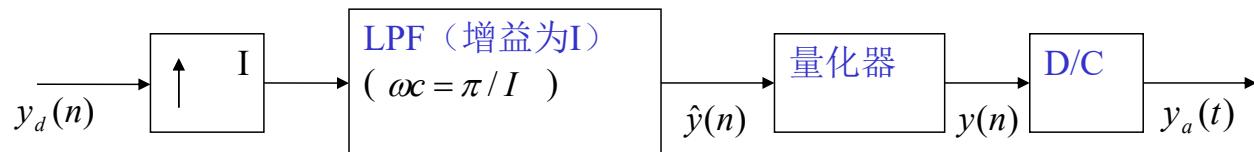
- **p**级累加和反馈

$$\Phi_{\hat{e} \hat{e}}(e^{jw}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^{2p}$$

- 当 $p=2$ 和 $M=64$ 时，精度上有 13 比特提高，也就是说 1 比特量化器在抽取器的输出端能够实现大约 14 比特的精度。
- 但大 p 值易产生不稳定和发生震荡的潜在威胁。

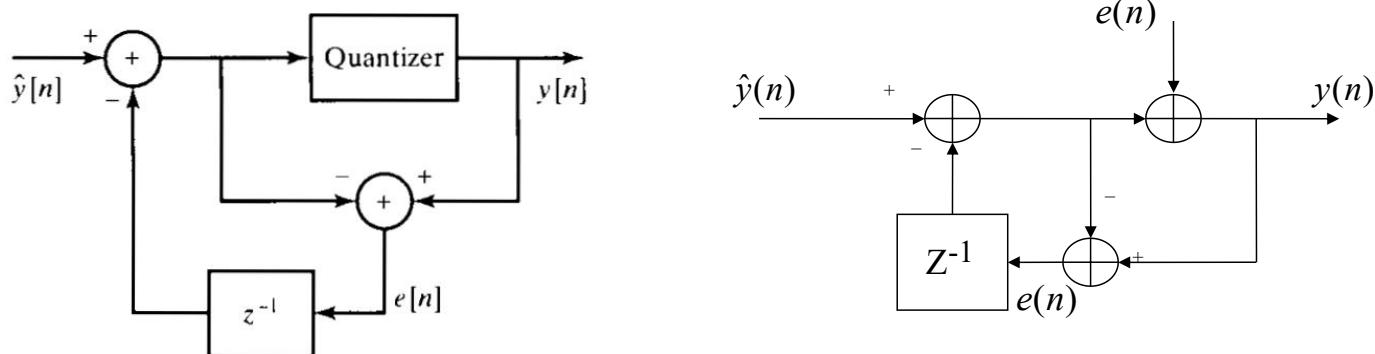
五、D/A中过采样和噪声成形

- 为了简化模拟抗混叠滤波和提高精度，信号最初被过采样，但是最后输出 $x_d(n)$ 还是在奈奎斯特采样率下的数据。
- 对于离散时间信号处理来说，总是非常希望最小的采样率，因此以相反的过程来应用同一原理从而改善D/A转换是可能的。如图所示：



一阶噪声成形量化器

- 要被转换为连续时间信号的序列 $y_d[n]$ 首先被增采样得到 $\hat{y}[n]$ ，送到**D/A**转换器之前再重新量化。



- 如果可以确保量化噪声不占据信号频带的话，那么就能用一个很少位数的简单**D/A**转换器，这样噪声就能用廉价的模拟滤波滤除。

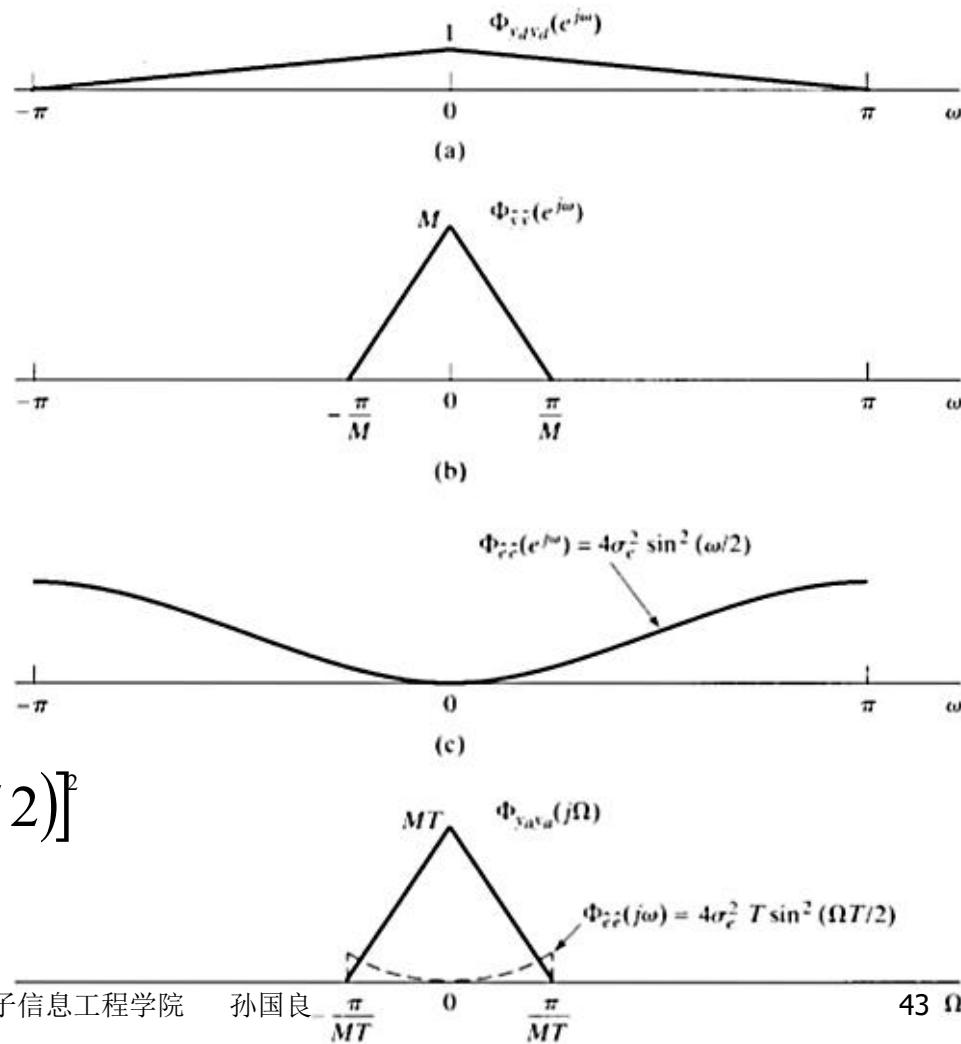
噪声成形量化器

- 从 $\hat{y}[n]$ 到 $y[n]$ 的传递函数是 **1**。
- 从 $e[n]$ 到 $y[n]$ 的传递函数是：

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}$$

- 噪声成形系统输出端量化噪声分量 $\hat{e}[n]$ 功率谱密度**

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^2 = \frac{\Delta^2}{12} * [2 \sin(\omega/2)]^2$$



作业

- 4.6
- 4.7
- 4.24
- 4.25
- 4.34
- 4.43
- 4.49



D/A失真分析

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

- 用加性噪声模型来表示量化效应:

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

- 简化讨论, 定义:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t)$$

$$X_s(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j2\pi k/T)$$

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn} \right) H_0(j\Omega) = X_s(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega) \end{aligned}$$

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum X_a(j\Omega + j2\pi k/T) \right] H_0(j\Omega)$$



谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 5

5.1 DFS



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

DFT快速算法



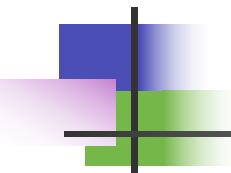
五

DFT的工程应用

离散傅立叶变换(DFT)

- 工程实践中，离散时间傅里叶变换(DTFT) 适用性不强：
 - 信号时域很宽但数字设备只能处理有限长数据
 - 信号的频谱在数字设备上的表示也只能是离散
 - 数字处理必须采取以下三项措施：
 - (1)时域采样（时域离散化）
 - (2)时域截断---> **有限长时域序列**
 - (3)频率离散---> **有限长频域序列**
- 傅立叶变换需要反映**有限长度时域序列与频域抽样**之间的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad X(k) = \sum_0^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}$$



主要内容

- **4.1 离散傅立叶级数(DFS)**
 - 傅立叶变换四大形式
 - **DFS**变换对
- **4.2 频域采样与重构**
- **4.3 离散傅立叶变换(DFT)**
 - **DFT**定义
 - **DFT性质定理**
- **4.4 DFT的快速算法**
 - 戈泽尔算法
 - **FFT**算法
 - **Chirp Z**变换
- **4.5 DFT的工程应用**
 - **LTI**的**DFT**实现
 - 信号的**DFT**分析

离散傅里叶级数

频域采样与重构

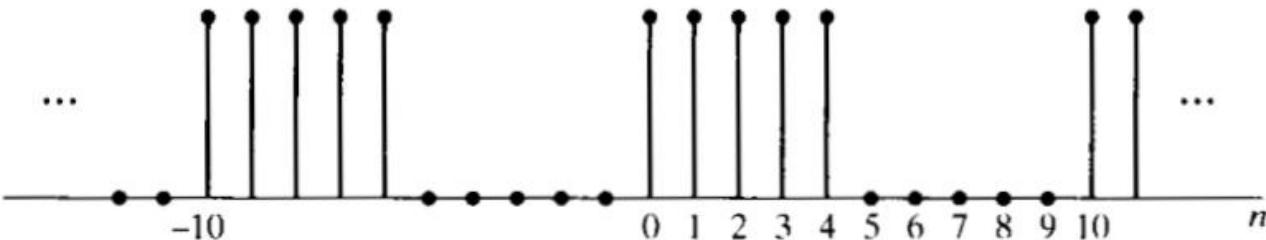
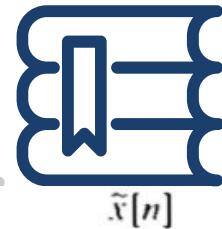
离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用

北京航空航天大学

离散傅里叶级数



- CTFT CTFS DTFT → DFS
- 离散傅里叶级数是傅里叶变换的第四类
- 意义：
 - 1、周期序列等效于有限长序列
 - 2、引出频域抽样定理
 - 3、引出离散傅里叶变换

4.1 离散傅立叶级数(DFS)

■ 4.1.1 傅立叶变换的表现形式

■ 傅里叶变换

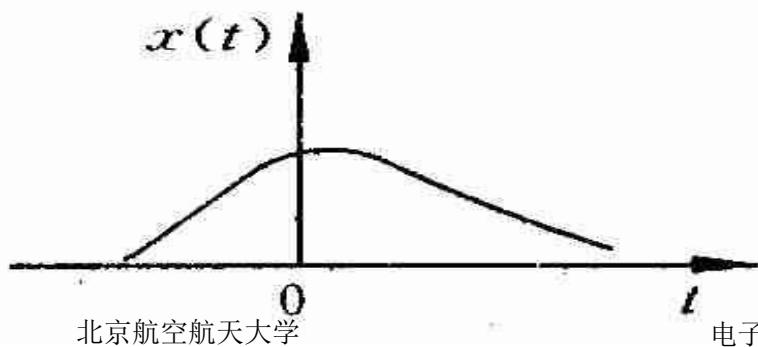
- 建立信号时域表达与其频域表达之间的变换关系。
- 当自变量“时间”或“频率”分别为连续或离散时，就形成了各种不同表象形式的傅里叶变换对。

一、连续时间、连续频率—傅里叶变换(CTFT)

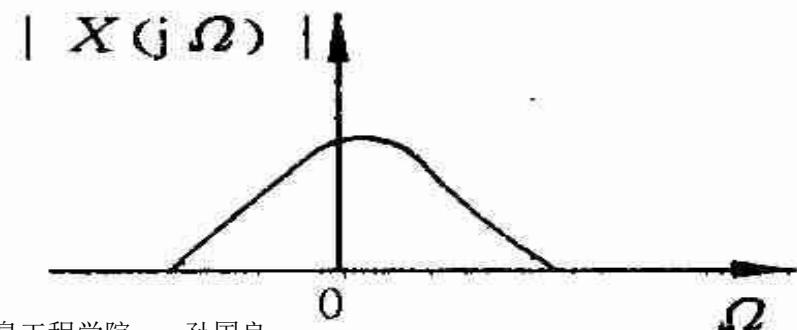
- 若信号为连续时间的非周期信号，其傅里叶变换是频域连续的非周期函数。

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$



北京航空航天大学



电子信息工程学院

孙国良

二、连续时间、离散频率——傅里叶级数(CTFS)

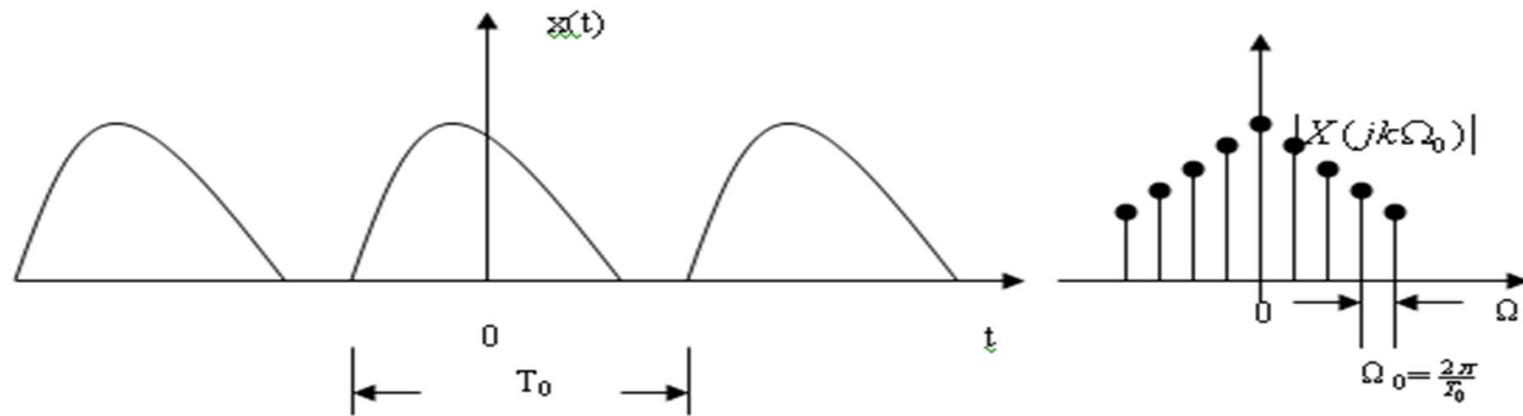
- 按照狄义赫利条件，周期性信号为功率信号，能量无限，不满足变换的充分条件
 - 因此其傅立叶变换必有特殊的表现形式。
- 我们仍旧按照傅立叶变换式来进行考察：

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt & x(t) &= x(t + T_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - T_0) e^{-j\Omega t} dt && \xrightarrow{\quad} X(j\Omega)(1 - e^{j\Omega T_0}) = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega(t - T_0)} dt = X(j\Omega) e^{j\Omega T_0} \end{aligned}$$

频谱离散

$$X(j\Omega)(1 - e^{j\Omega T_0}) = 0$$

- $1 - e^{j\Omega T_0}$ 仅在有限可数个频点 $\Omega_k = \frac{2k\pi}{T_0}$ 处为零，就要求在其他频段 $X(j\Omega)$ 皆为零，为离散频率函数。
- 时域上的周期性造成了频域上的离散。
- 周期信号能量无限，离散频点处的能量为冲激函数。



连续傅里叶级数

- 实际上, $x(t)$ 可展成傅立叶级数,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

- 引入广义函数的条件下有:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\Omega - \Omega_0)t} dt = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

CTFS是主值
区间信号
CTFT的频域
采样

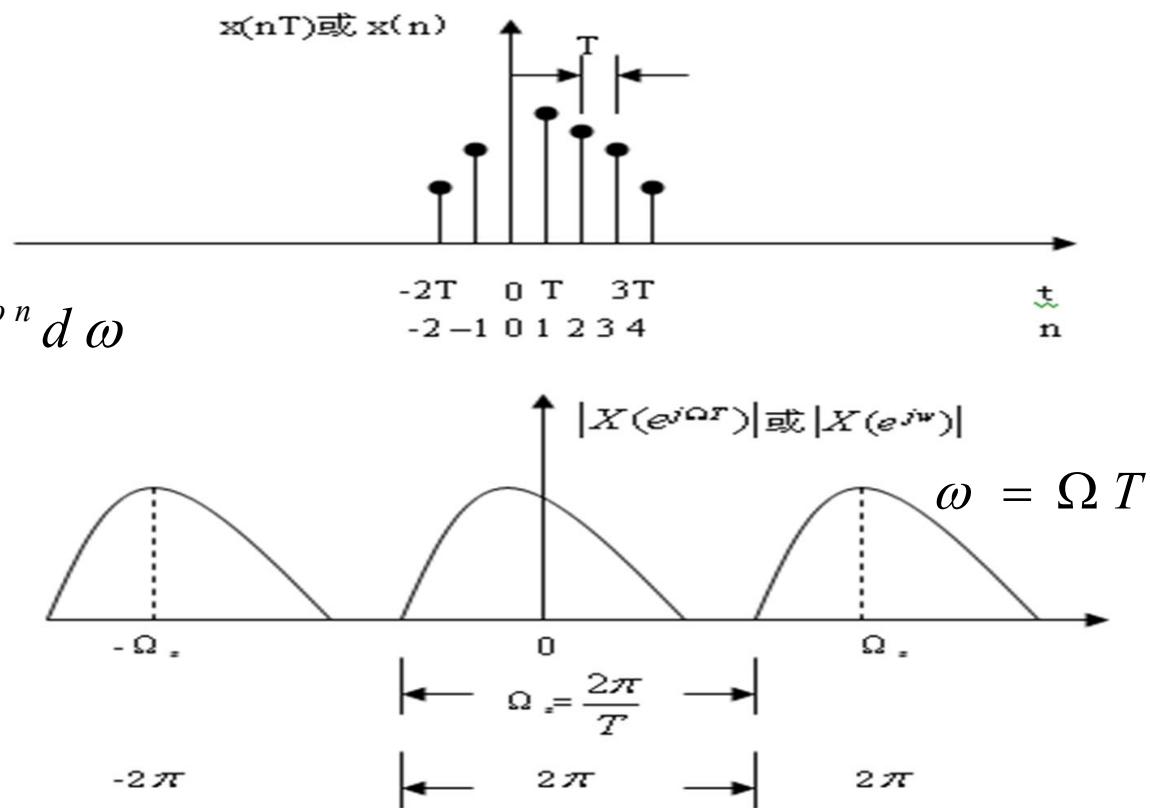
三、离散时间、连续频率—序列傅里叶变换(DTFT)

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

时域离散导致
频域周期化

北京航空航天大学



四、离散时间、离散频率—离散傅立叶级数(DFS)

- 设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的一个周期序列,

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

- 周期序列不是绝对可和的, 所以不适合DTFT表示

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n + N) e^{-j\omega n} & \omega_k = k \frac{2\pi}{N} \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n') e^{-j\omega(n'-N)} = e^{j\omega N} X(e^{j\omega}) & X(e^{j\omega})(1 - e^{j\omega N}) = 0 \end{aligned}$$

离散谱

周期序列也可以用傅里叶级数表示，只是...

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\Omega_0 t} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad T_0 = NT$$

$$x(nT) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\Omega_0 nT} = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk \frac{2\pi}{NT} nT} = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- 周期为**N**的复指数序列基频序列为： $e_1(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$
- 其**k**次谐波序列为：

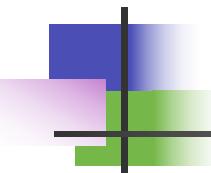
$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \quad e_{k+rN}(n) = e_k(n)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

连续周期信号与离散周期序列的复指数

	基频序列	周期	基频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	T_0	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 连续傅立叶级数有无穷多个谐波成分
- 离散傅里叶级的谐波只有N个是独立



DFS变换对的导出

- 假设信号可展成如下的离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- 其中**N**为常数，选取它是为了表达式成立的需要
- $\tilde{X}(k)$ 是待求的**k**次谐波系数。

系数的求取

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} (k-r)n} \\&= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (k-r)n} \right] \\&\xrightarrow{\tilde{X}(r)} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} rn} &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} rN}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases}\end{aligned}$$

序列的傅立叶级数(DFS)

- 通常对变换因子采用以下符号:

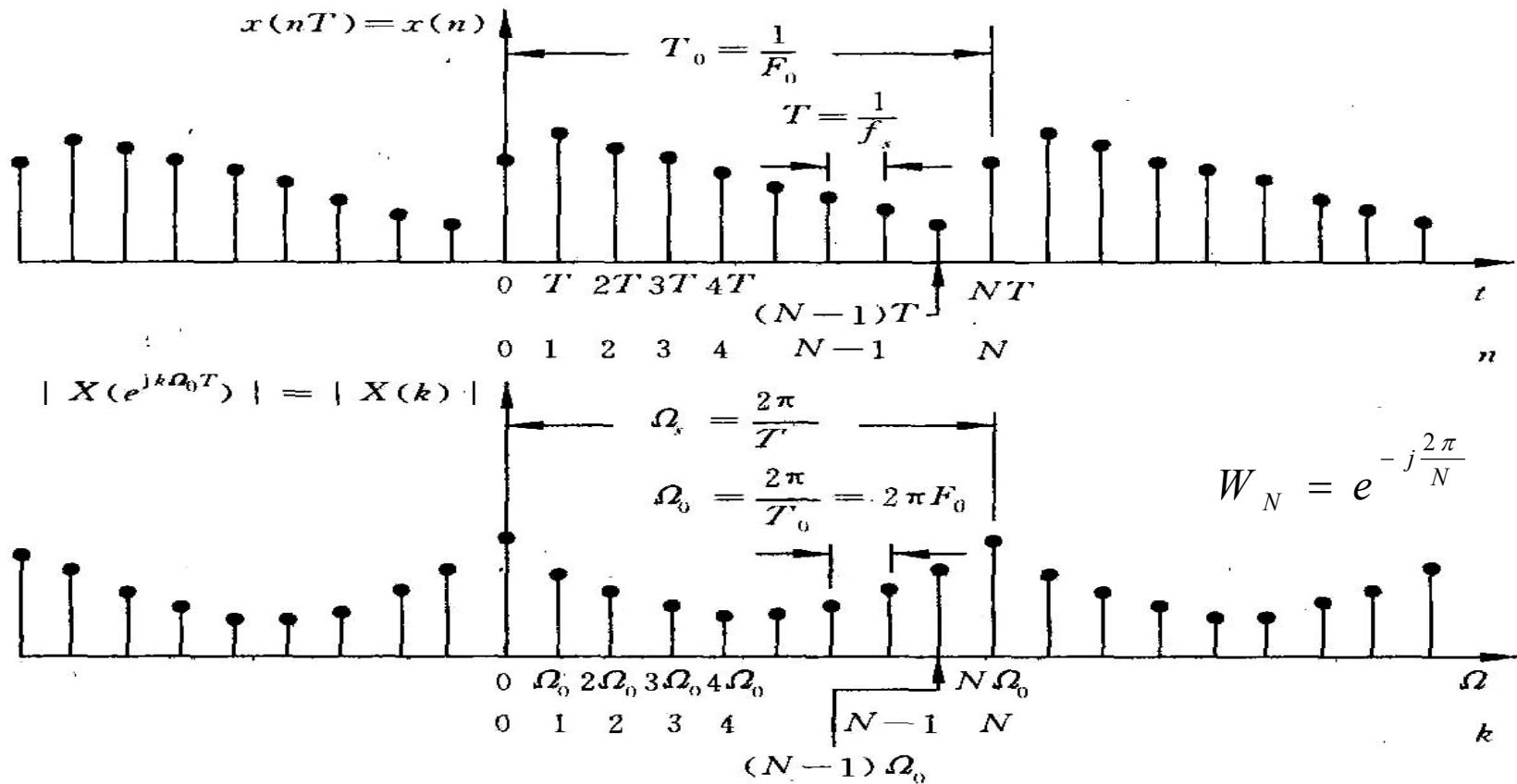
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- 则**DFS**变换对为:

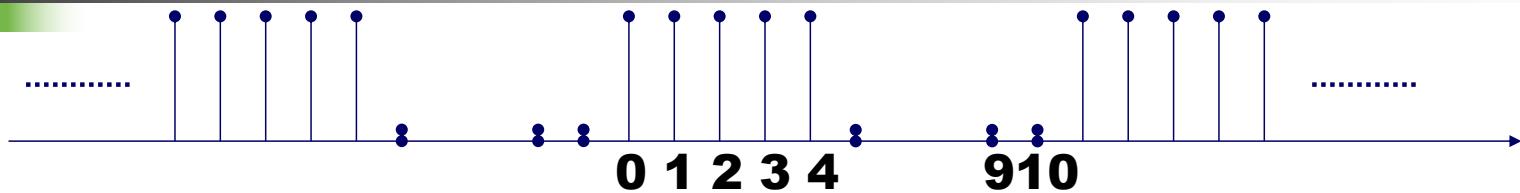
- 正变换 $\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{-nk}$
- 反变换

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk}$$

DFS频谱的含义

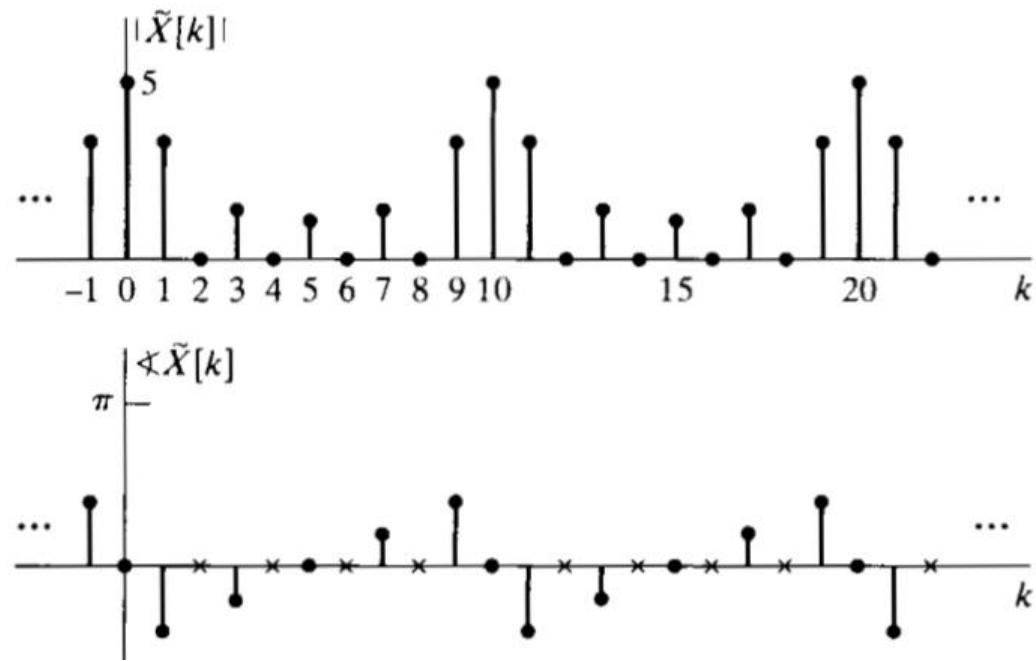


周期矩形脉冲串的DFS

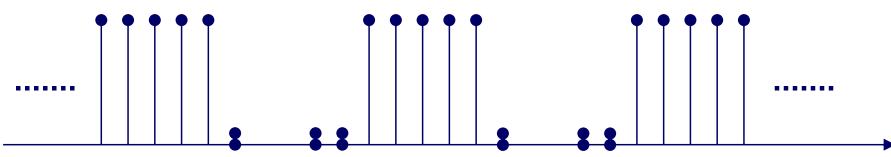


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn}$$

$$= e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k / 2)}{\sin(\pi k / 10)}$$

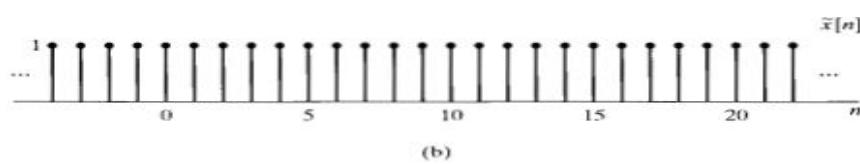


DFS与主值区间的DTFT关系

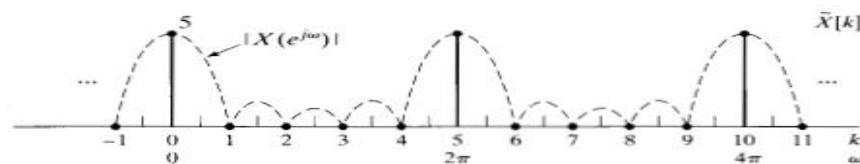


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad \omega > \omega_c = k * \frac{2\pi}{N}$$



(b)



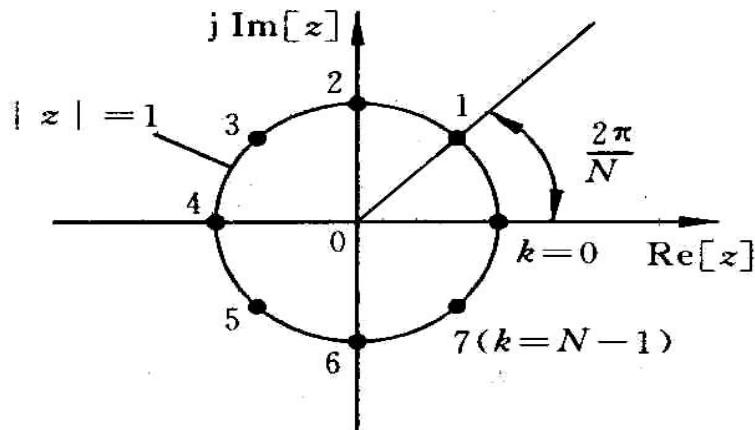
特例

DFS可以看成是周期序列主值区间的 Z变换(或DTFT)在单位圆上等间隔抽样

■ 设 $x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$, 则Z变换为:

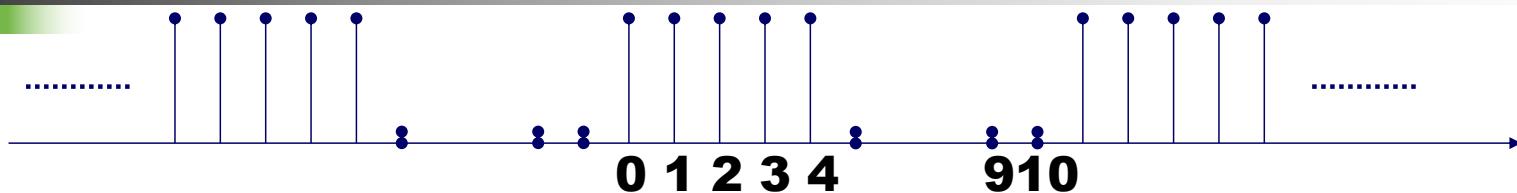
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k} = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

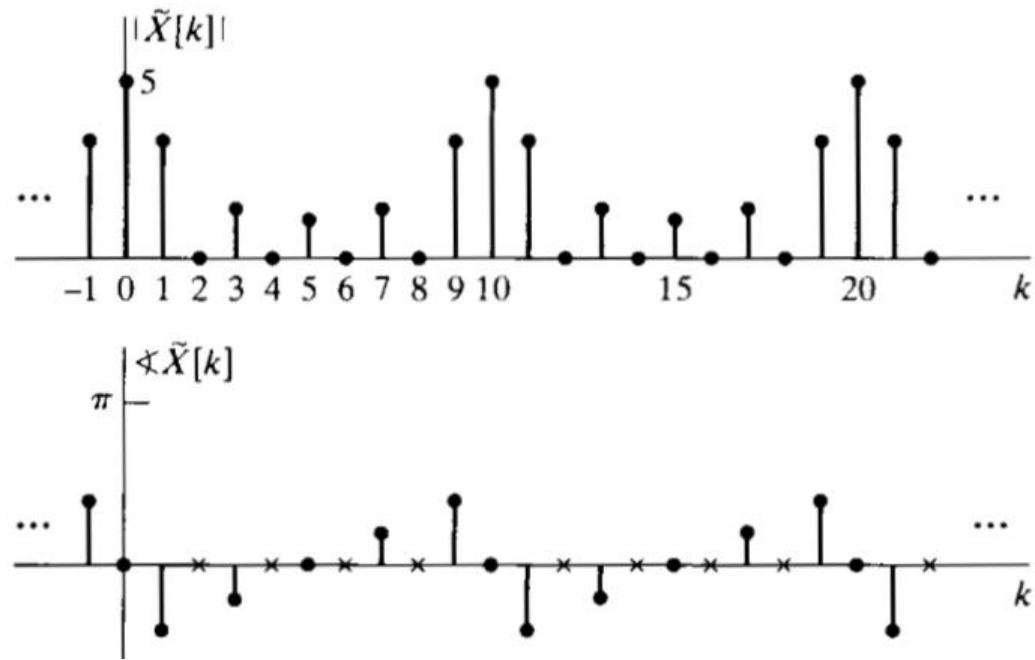


$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

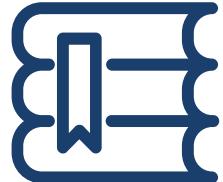
例题：



- 若上述10周期矩形脉冲的DFS如图所示
- 1) 若信号脉宽不变, 周期变为8, 请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出?
- 2) 若信号脉宽不变, 周期变为8, 请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出?



频 域 采 样 定 理



- 在采样定理的限制条件下，信号时域采样可以恢复原始信号。
- 信号的Z域的单位圆上的变换(DTFT)也可以恢复信号。
- 是否也可以利用单位圆抽样恢复原始信号呢？在单位圆上抽样将导致信号在时间域上发生怎样的变化？

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}k}} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

4.2 频域抽样及重构

$$\tilde{x}(n)$$

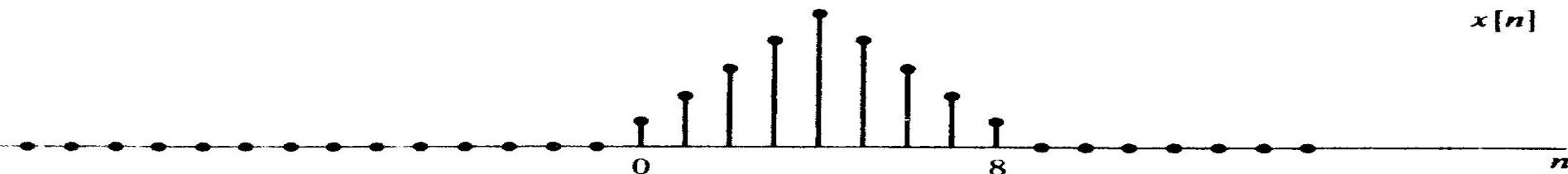
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m-n)} \right)$$

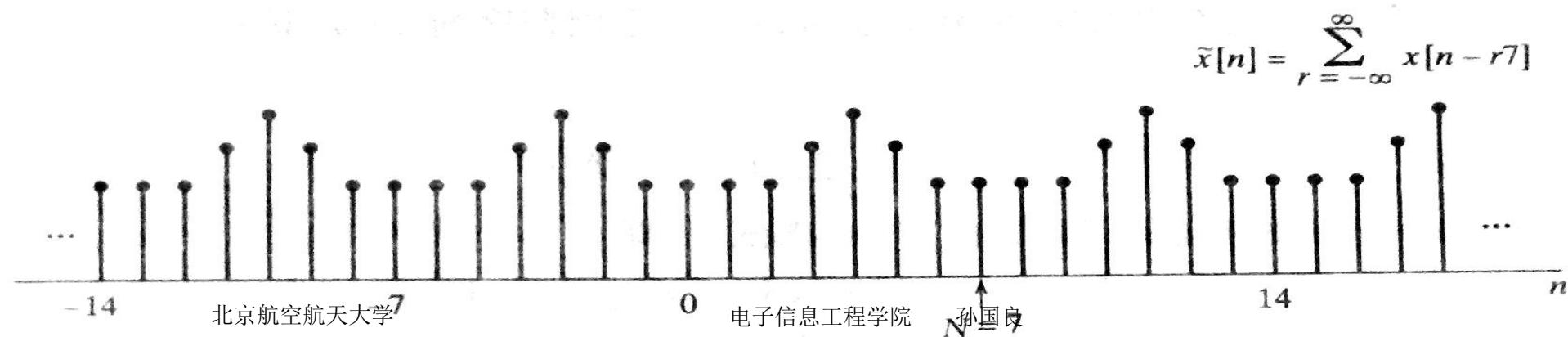
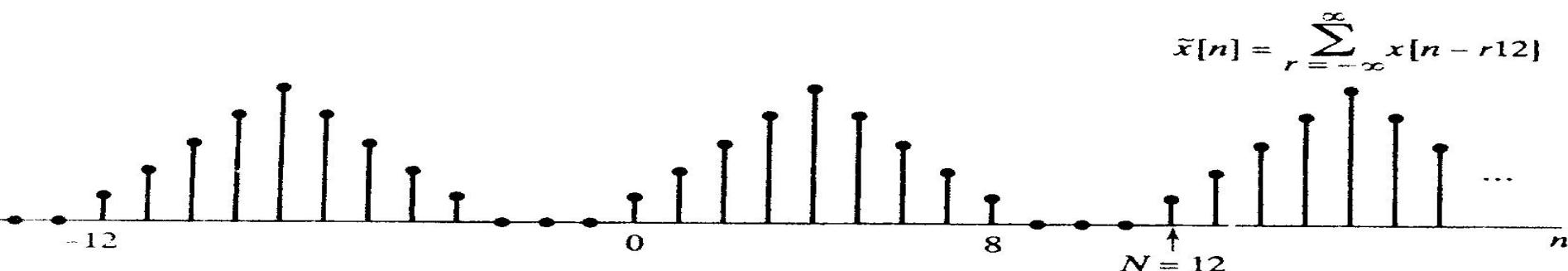
- 对于任意信号，直接对其频谱单位圆抽样值求**IDFS变换**得到的序列

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + rN \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(m - n - rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN)$$



(a)



频域采样定理

- 单位圆上**N**点的**频率抽样**变换得到的是原序列在**时轴**上以抽样点数为**周期的延拓** $\tilde{x}(n)$ 。
- 为此：
 - 如原序列**不是有限长**，则时域延拓必然造成**混叠**；
 - 若原序列是一个**有限长且长度小于采样点数N**的序列，则可以通过**乘以窗函数**得到原始序列，即：

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) R_N(n)$$

频域重构

- 若频域抽样可以无失真恢复原序列,
- 则可以完整表达 $X(z)$ 及 $X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \right) \\ X(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \\ X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

内插函数

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- 分子有N个零点，内插函数的极点与第k个零点相抵消，仅在该点处值不为零，在其他抽样点处皆为零。

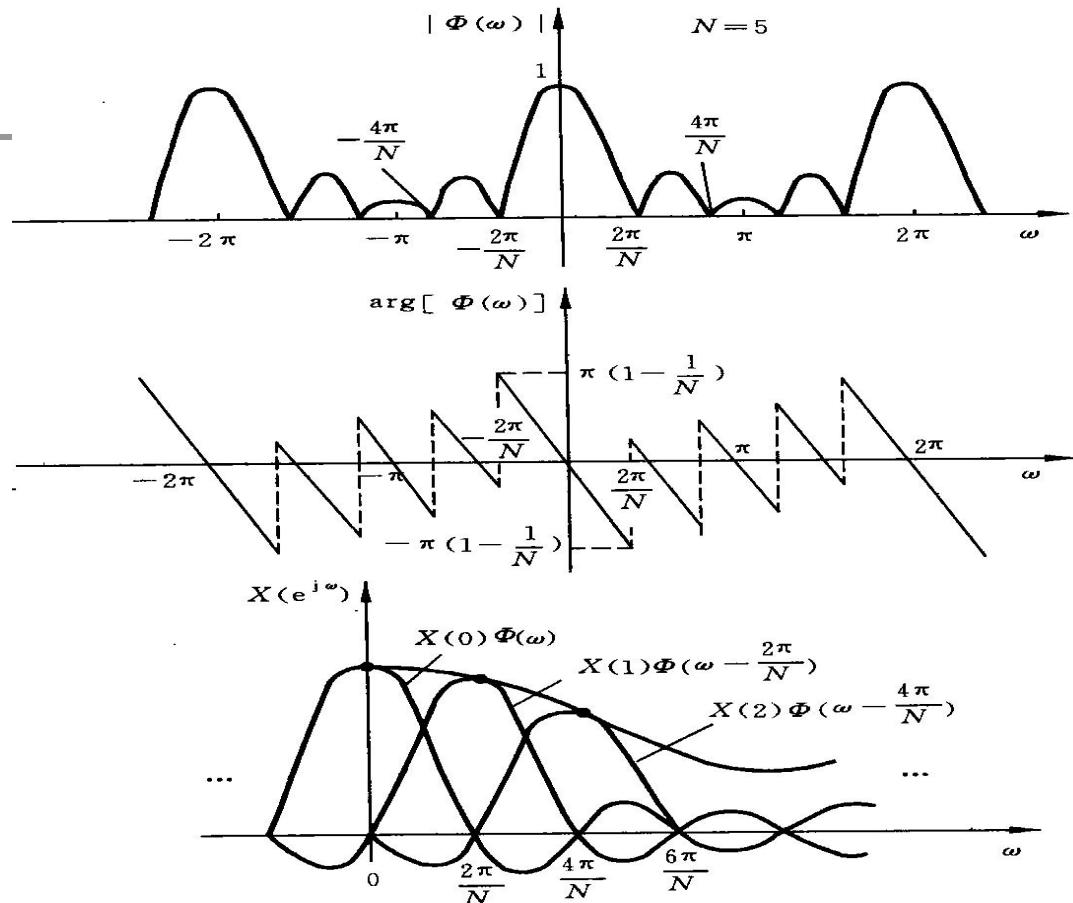
$$z_r = e^{j\frac{2\pi}{N}r} \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned}\Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - k\frac{2\pi}{N})}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} - k\frac{\pi}{N})} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega - \frac{k\pi}{N})} = \Phi(\omega - k\frac{2\pi}{N})\end{aligned}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega)}$$

频域重构



FIR滤波器频率内插结构

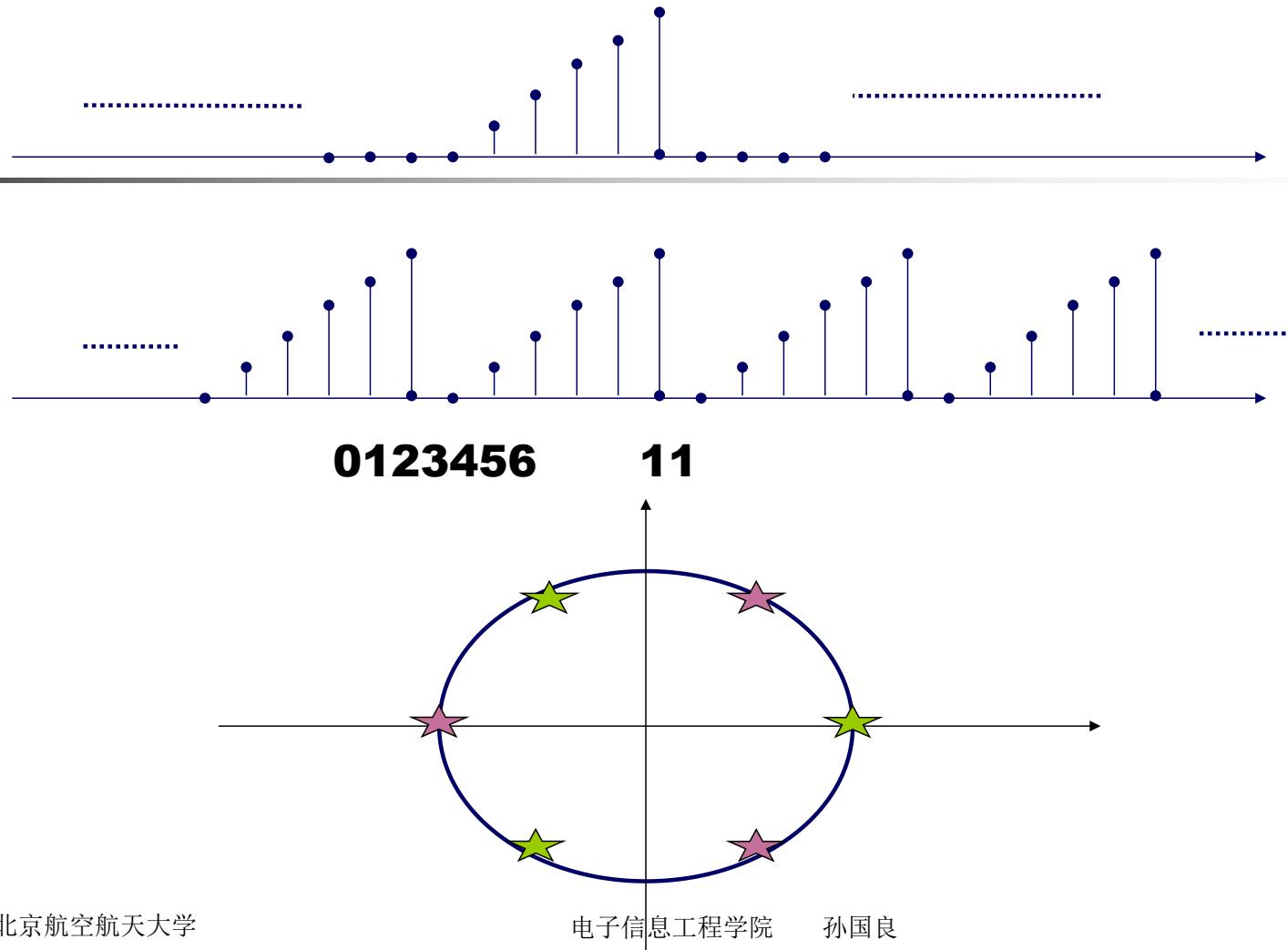
$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= \frac{1 - e^{-jwN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{-j(w - \frac{2\pi k}{N})}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{wN}{2}}}{e^{-j(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N})}} \bullet \frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2} - k\pi\right) e^{j\pi k}}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi k}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{wN}{2} - k\pi\right)}{\sin\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{(N-1)\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \bullet \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{(w - \frac{2\pi}{N}k)N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w - \frac{2\pi}{N}k}{2}\right)} e^{-j(w - \frac{2\pi}{N}k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \end{aligned}$$

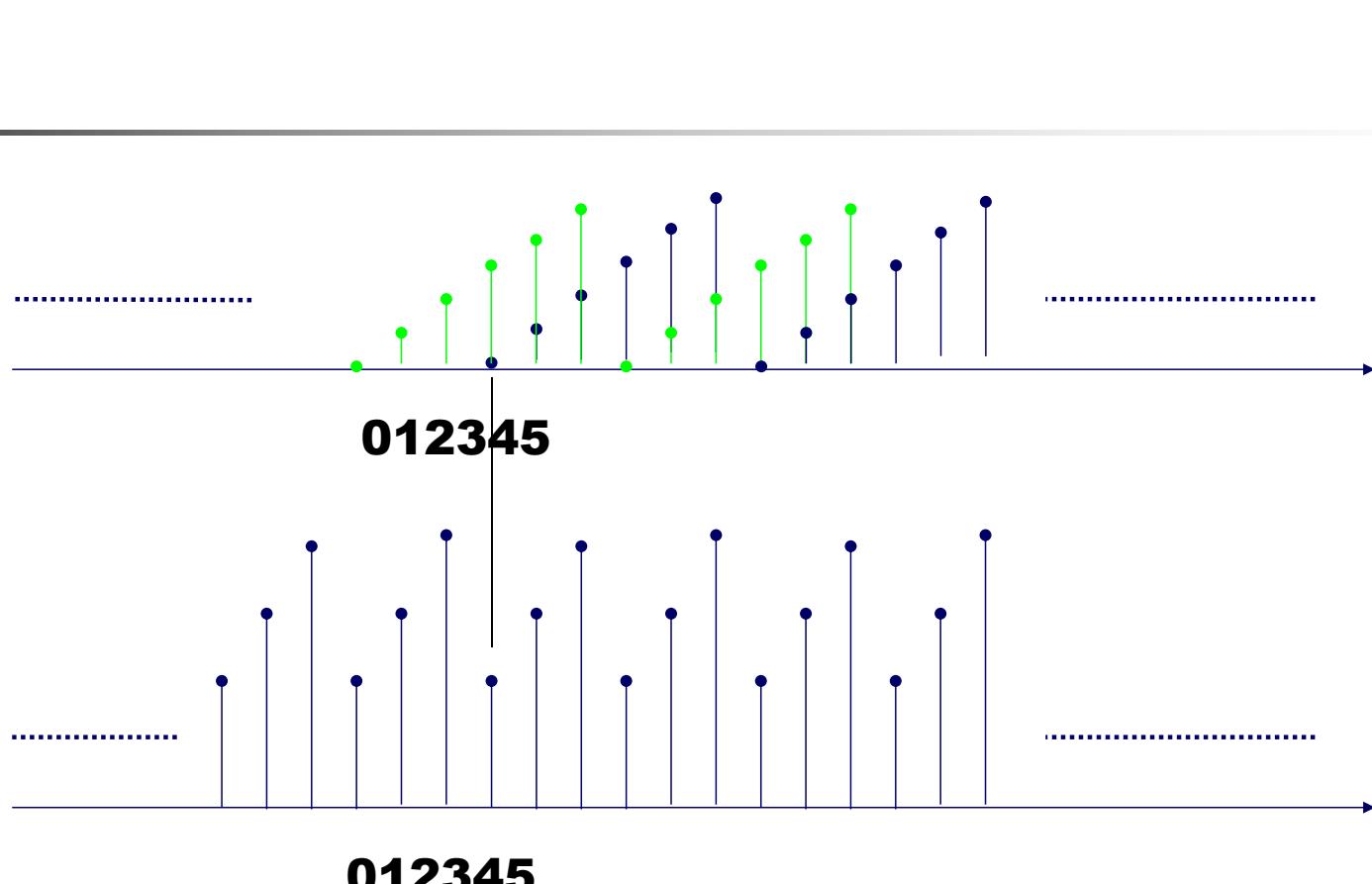
例题：

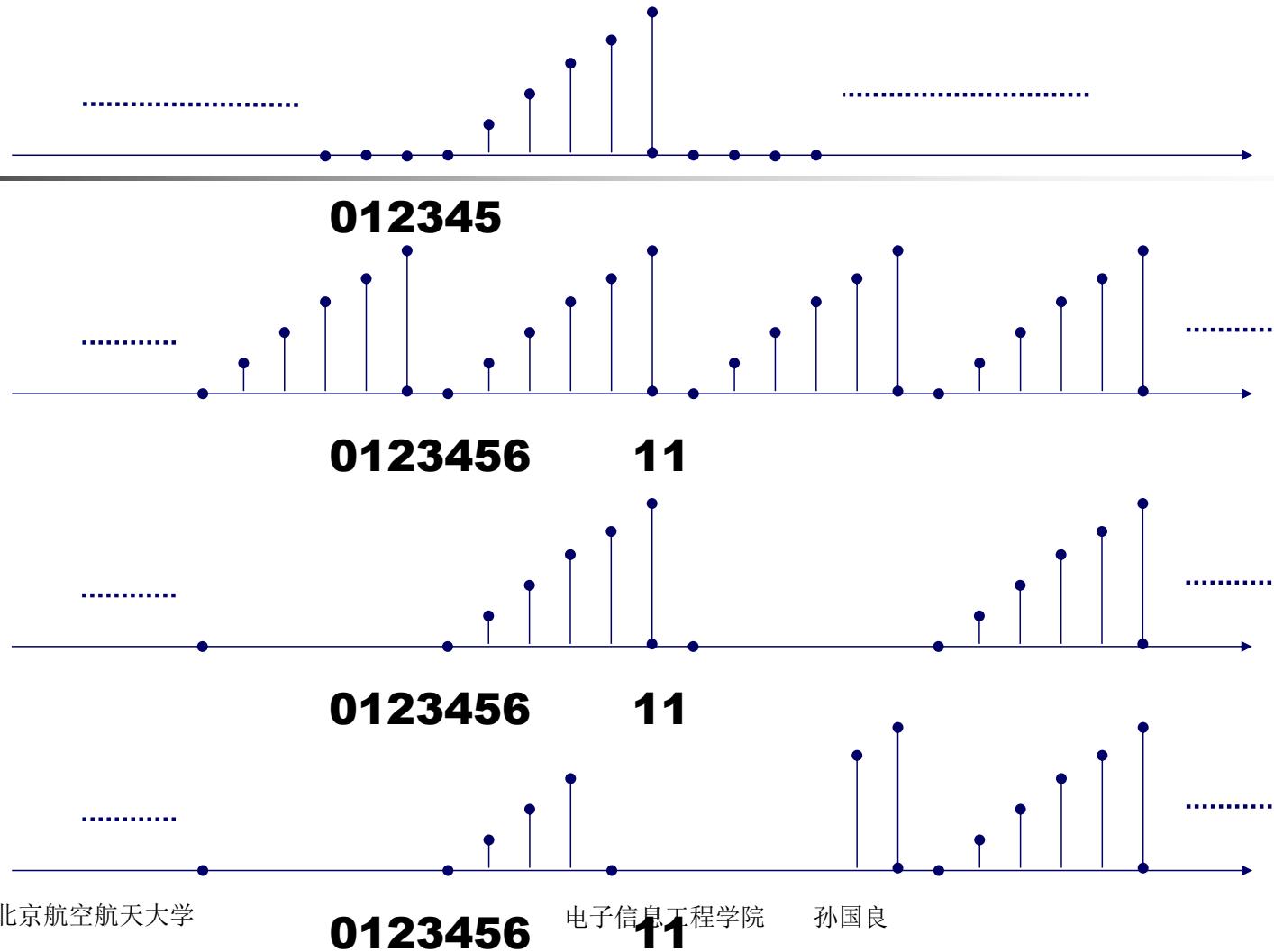
- 已知6点周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 的DFS为 $\tilde{X}_1(k)$;

$$\tilde{x}_1(n) = n \% 6$$

- 若假设一个周期为3的序列 $\tilde{x}_2(n)$ 的DFS $[\tilde{X}_2(k)]$ 与上述6点周期序列之间存在如下关系：
 - $\tilde{x}_2(\tilde{k})=\tilde{x}_1(2k)$,请确定3点周期序列
- 若未知序列为12点， $\tilde{X}_2(2k)=\tilde{X}_1(k)$,则能否唯一确定序列？请给出两种序列满足上述要求







作业

- 8.1
- 8.2
- 8.6
- 8.30





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

5.2 DFS



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

Contents

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

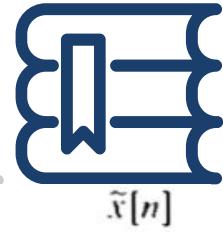
DFT快速算法



五

DFT的工程应用

离散傅里叶变换



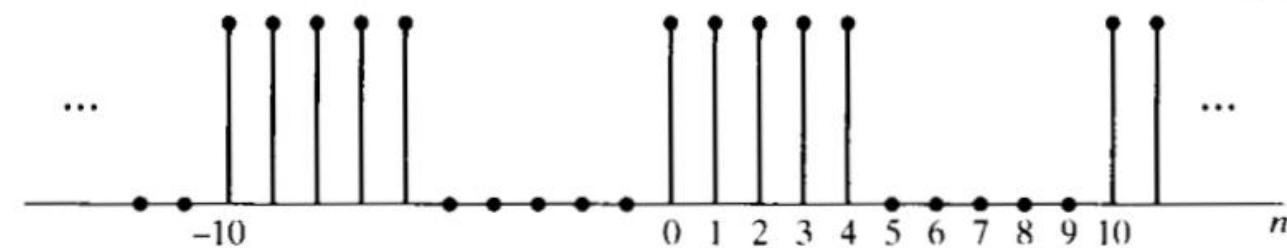
离散傅里叶级数

频域采样与重构

离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用



- DFS是主值区间序列(N点)的DTFT的频域N点采样
- 引申:
- 1、DFS适合N点DTFT频谱的计算机运算和表示
- 2、频域采样定理说明DFS可以无失真恢复出N点序列
- 结论: DFT借用DFS顺理成章! ! !

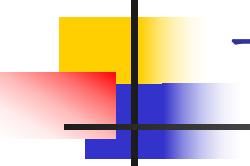
4.3 离散傅立叶变换(DFT)

■ 有限长序列的傅里叶变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega}$$

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) R_N(n)$$



一、离散傅里叶变换 (DFT)

$$X(k) = \text{DFT} [x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT} [X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

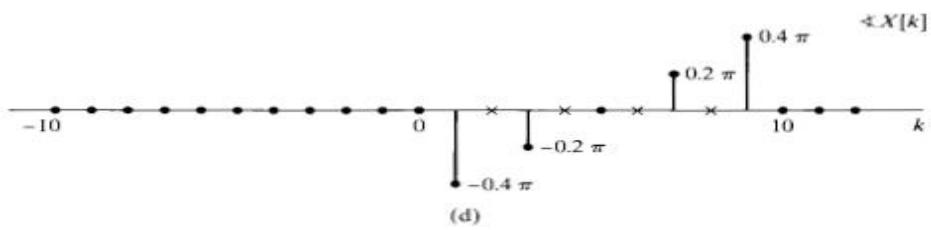
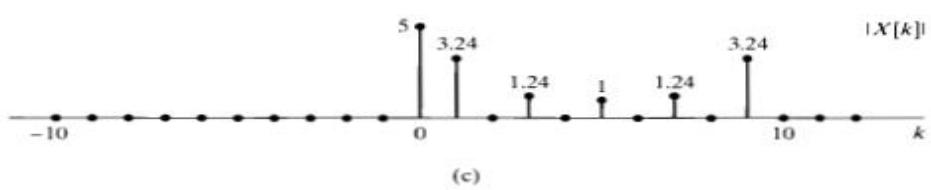
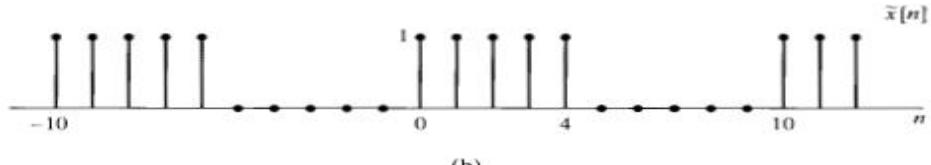
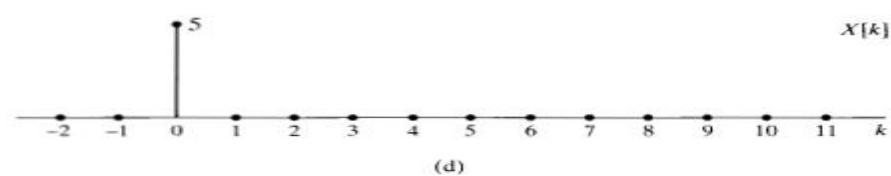
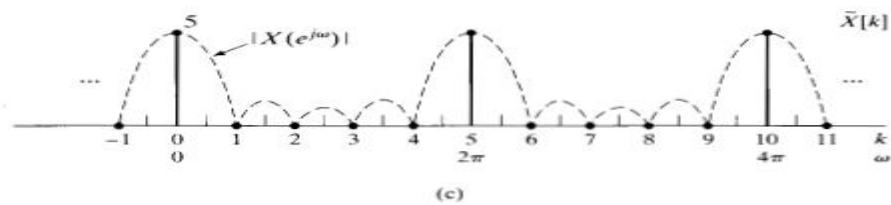
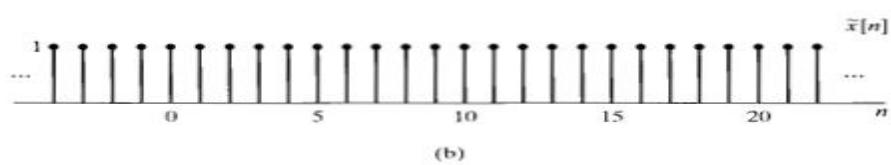
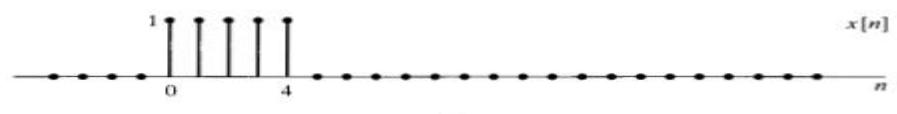
$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

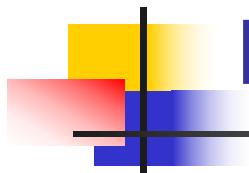
$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N$$

1、DFT隐含有周期性

2、有限长序列DFT是其本身的DTFT(等长)频域采样

例题：矩形窗的DFT (与点数有关)





DFT对偶性（一）

- IDFT可以用DFT来实现和计算

$$DFT : X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right)$$

$$\begin{aligned} IDFT : x(n) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right) \\ &= \frac{1}{N} \overline{\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right)} \end{aligned}$$

$$IDFT [X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT [X^*(k)]}$$

DFT的对偶性 (二)

DFT [X(n)]

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') W_N^{nn'} \right) W_N^{nk} \right] R_N(k)$$

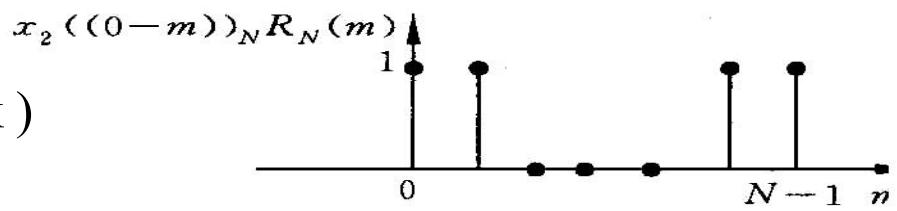
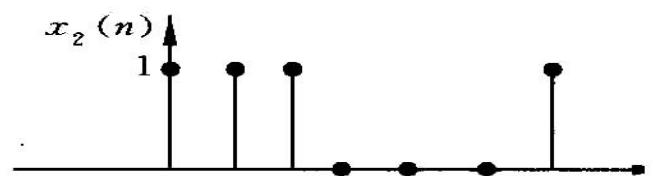
$$= \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(n'+k)} \right) \right] R_N(k)$$

$$= \left\{ \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') \times [N \delta(n' + k)] \right\} R_N(k)$$

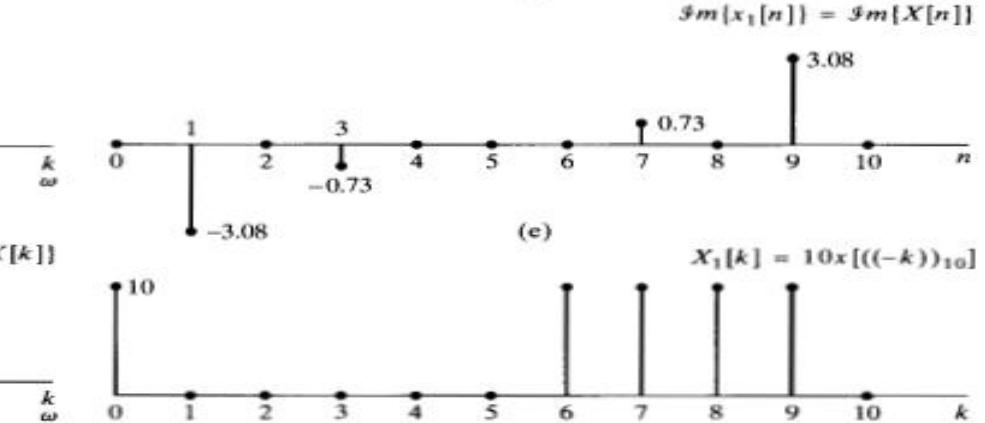
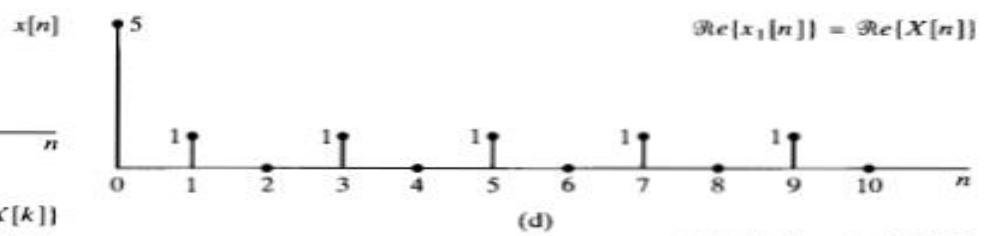
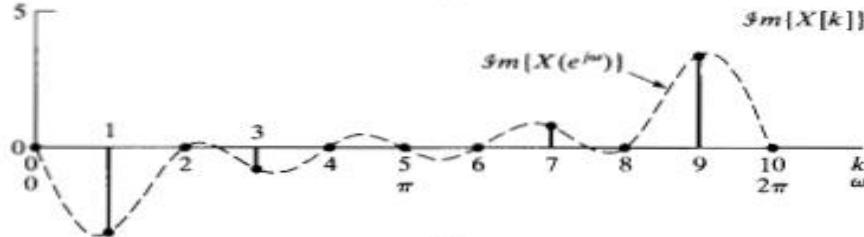
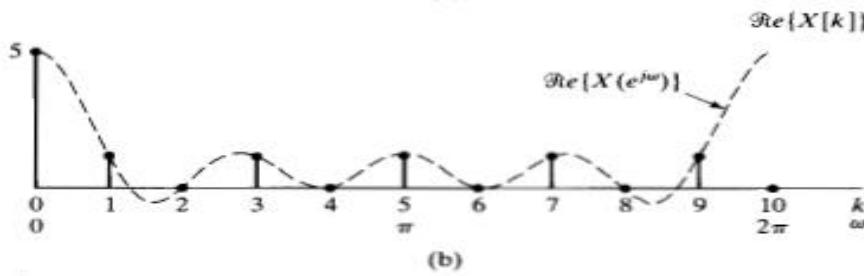
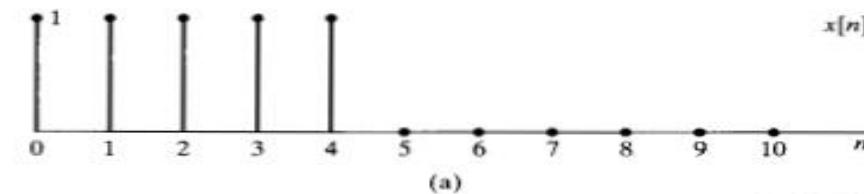
$$= N \tilde{x}((-k)) R_N(k)$$

圆周翻褶

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(N - n) \sup_{n \in \mathbb{Z}} x(N) = x(0) \\ x'(-n) &= x((-n)) R_N(n) \end{aligned}$$



DFT对偶性的验证及圆周翻褶



二、DFT性质

- 讨论都假设**N点**有限长序列的**N点DFT**

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

- **1、线性**

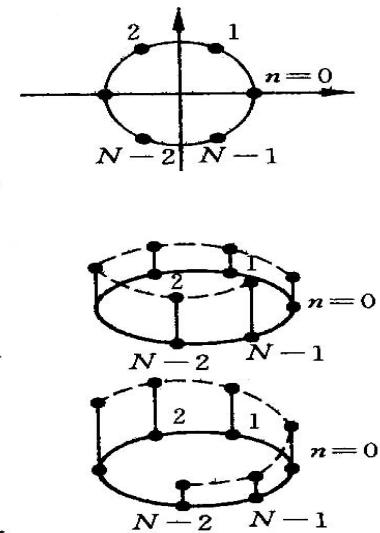
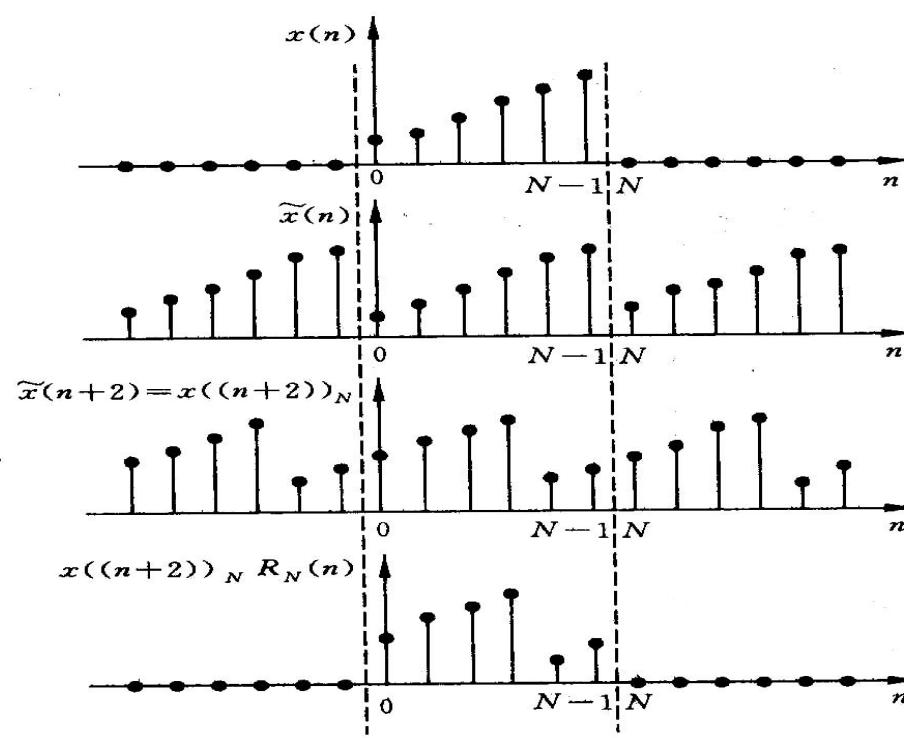
$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

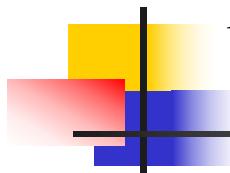
- 若两个有限长序列的**点数不等**, 则需要将**短序列补零**后作**N点DFT**再进行相加, 其中:
 - **N=max(N1,N2)**

2、圆周（循环）移位

- 序列以N为周期
延拓成周期序列
- 将周期序列加以
移位
- 取主值区间[0,
 $N-1$]上的序列值

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$





$$X_m(k) = DFT[x_m(n)] = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

$$DFT[x_m(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] = DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} \right] R_N(k) = \left[\sum_{i=m}^{N+m-1} \tilde{x}(i) W_N^{(i-m)k} \right] R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=N}^{N+m-1} \tilde{x}(i-N) W_N^{(i-N)k} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \left[\sum_{i=m}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right] \right) R_N(k)$$

$$= \left(W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} \right) R_N(k) = \left(W_N^{-mk} DFS[\tilde{x}(n)] \right) R_N(k) = W_N^{-mk} (DFS[\tilde{x}(n)] R_N(k))$$

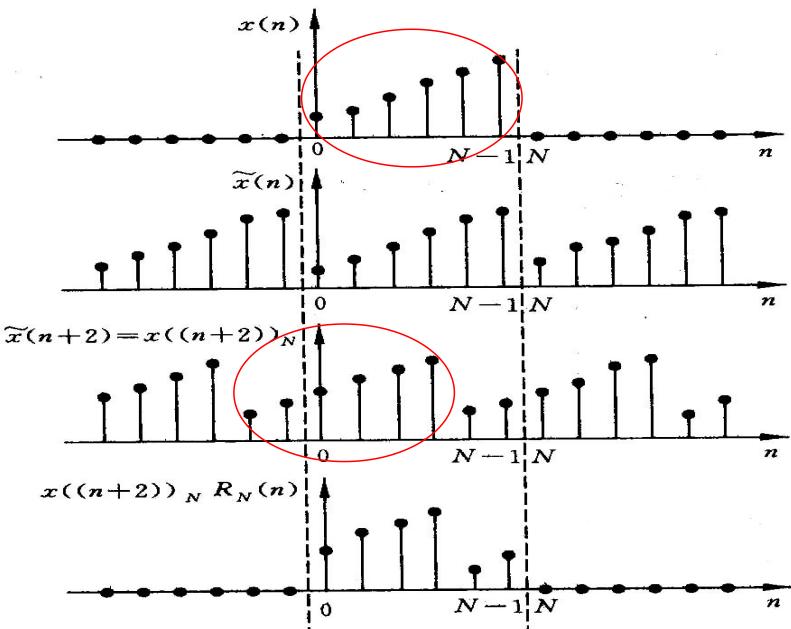
$$= W_N^{-mk} DFT[x(n)]$$

有限长序列的圆周移位仅在离散频域中引入一个和频率成正比的线性相位，不影响频谱幅度特性。

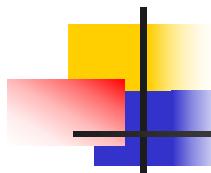
圆周移位特性利用频域抽样定理的再解释

$$W_N^{-km} = e^{(j\frac{2\pi}{N}k)m} = e^{j\omega m} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

- 信号线性平移后信号的**DTFT**频谱的采样
- 频谱采样所重构的信号是原信号的周期延拓
- 证明过程也看到了离散傅立叶级数(**DFS**)的移位性质：



$$D F S [x ((n + m))_N] = D F S [\tilde{x} (n + m)] = W_N^{-m k} \tilde{X} (k)$$



频域圆周移位

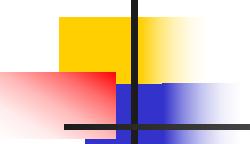
- 同样，利用频域与时域的对偶关系，可以证明：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j \frac{2\pi}{N} nl} x(n)$$

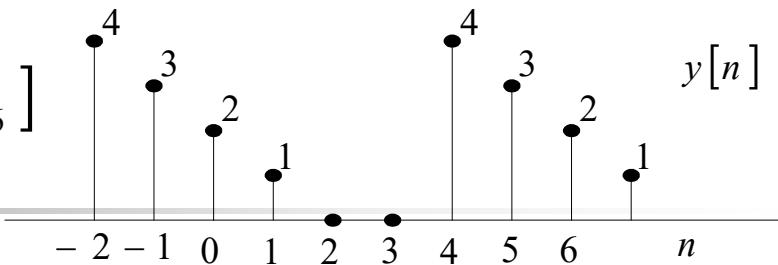
- 频域圆周移位导致时间序列的**调制特性**，也就是说时域序列的调制等效于频域的圆周移位。由此式可以得到：

$$DFT[x(n) \cos(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(k)$$

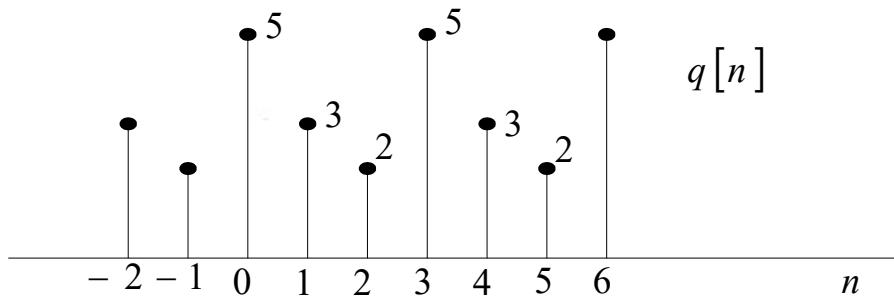
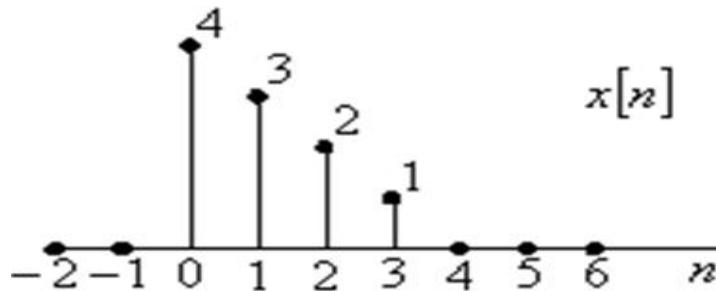
$$DFT[x(n) \sin(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(k)$$



$$y[n] = x[((n - 4))_6]$$



例题：考虑如图所示的实有限长序列 $x[n]$



(1) 简略画出有限长序列 $y[n]$ 的图形, 其 6 点 DFT 为 $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$, 式中 $X[k]$

为 $x[n]$ 的 6 点 DFT。

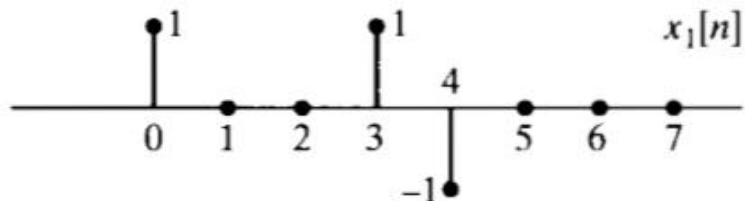
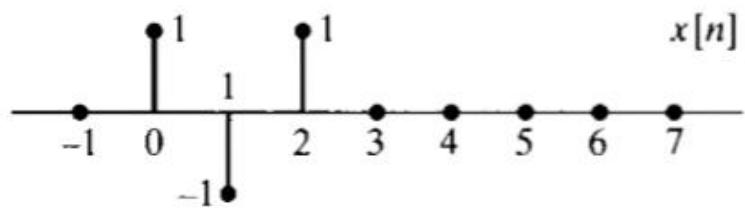
(2) 简略画出有限长序列 $q[n]$ 的图形, 其 3 点 DFT 为: $Q[k] = X[2k], k = 0, 1, 2$

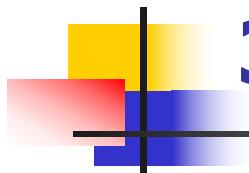
例题

- 两个序列 $x(n)$, $x_1(n)$ 均作N点DFT
- 满足关系:

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k 2/N},$$

- 试问是否存在这样的N?
- N是否唯一?





3、圆周共轭对称性

- 任一序列都可表示成共轭对称分量与共轭反对称分量之和。
 - 在讨论有限长序列的离散傅立叶变换时，不能直接采用其定义。因为对于 N 点的序列，按定义给出的共轭对称分量与共轭反对称分量都是 $(2N-1)$ 点。
- 需要从周期序列的共轭对称定义入手，导出有限长序列的圆周共轭

圆周共轭分解

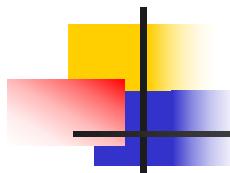
- 有限长序列的圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量分别定义为其周期延拓序列相应共轭分量的主值区间

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]$$

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$



圆周共轭对称

- 若 $x(n)$ 为共轭对称序列，则 $x((n))_N$ 称为圆周共轭对称序列

$$x(n) = x^*(N - n) \quad n \in [0, N - 1]$$

- 若 $x(n)$ 为共轭反对称序列，则 $x((n))_N$ 称为圆周共轭反对称序列：

$$x(n) = -x^*(N - n) \quad n \in [0, N - 1]$$

- 注

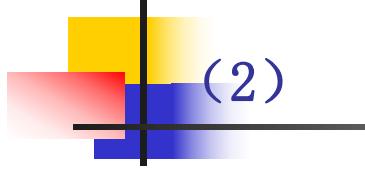
- 共轭对称是以零点为中心考察对称的性质，
- 圆周共轭由于是针对[0, N-1]上的有限长序列引入的，其对称中心变为 $\frac{N}{2}$ 。

DFT对称特性

$$x(0) = x(N), X(0) = X(N)$$

- (1) $DFT[x((-n))_N R_N(n)] = X(N - k)$
- 证明:

$$\begin{aligned} & DFT[x((-n))_N R_N(n)] \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(-n)} W_N^{nk} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(N-n)} W_N^{nk} \right) R_N(k) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(i)} W_N^{(N-i)k} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(n)} W_N^{-kn} \right) R_N(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{x(n)} W_N^{n(N-k)} \right) R_N(k) = X((N-k))_N R_N(k) = X(N-k) \end{aligned}$$



(2)

$$DFT[x^*(n)] = X^*((N - k))_N R_N(k) = X^*(N - k)$$

证明：

$$\begin{aligned} DFT[x^*(n)] &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} \right) R_N(k) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right)^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N - k))_N R_N(k) = X^*(N - k) \end{aligned}$$

同理可得：

$$DFT[x^*(N - n)] = X^*((k))_N R_N(n) = X^*(k)$$

(3)

$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

证明：

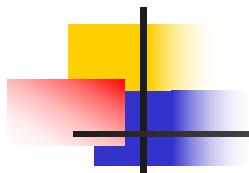
$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \}$$

$$= DFT \left\{ \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)] \right\}$$

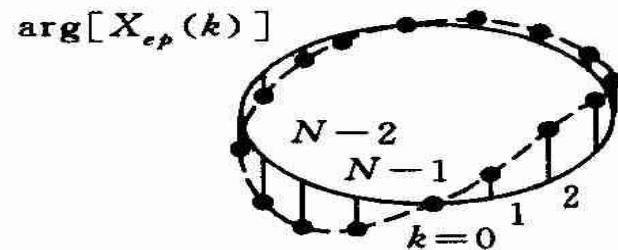
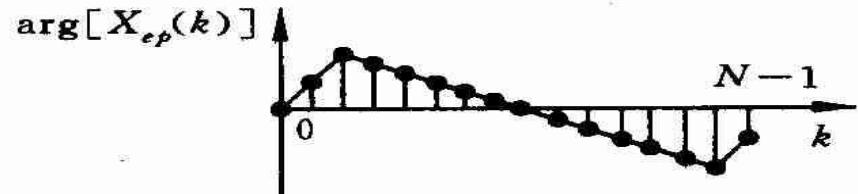
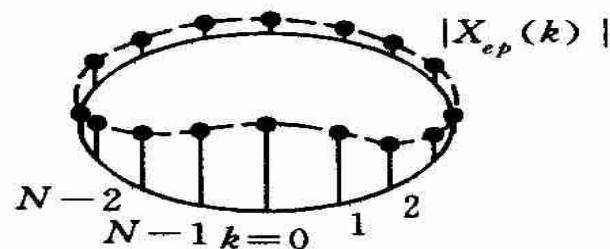
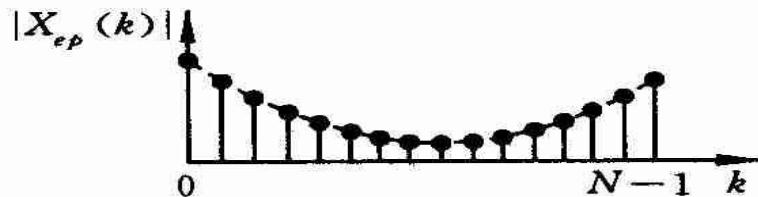
$$= \frac{1}{2} \{ DFT[x(n)] + DFT[x^*(n)] \}$$

$$= \frac{1}{2} [X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)]$$

$$= \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k) = X_{ep}(k)$$


$$DFT \{ \text{Re}[x(n)] \} = X_{ep}(k) = \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

- 同理可得： $DFT \{ j \text{Im}[x(n)] \} = X_{op}(k)$
 $DFT \{ x_{ep}(n) \} = \text{Re}[X(k)]$
 $DFT \{ x_{op}(n) \} = j \text{Im}[X(k)]$
- 复序列实部的**DFT**对应于序列**DFT**的圆周共轭对称分量；序列虚部乘以**j**的**DFT**对应于序列**DFT**的圆周共轭反对称分量。
- 实序列的**DFT**只有圆周共轭对称分量，纯虚序列的**DFT**只有圆周共轭反对称分量。



实序列，其DFT圆周共轭对称，即：

$$X_{op}(k) = X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

纯虚序列，其DFT圆周共轭反对称，即：

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$x[n] = \delta[n - 1] + \delta[n - N + 1]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = W_N^k + W_N^{(N-1)k} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

例题

- 实N点有限长序列 $x(n)$, $n=0,1,2,\dots,N$
- 其傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$, DFT为 $X(k)$
- 1) 若: $\text{Im}\{X(k)\} = 0, \quad k = 0,1,\dots,N-1$ 是否我们可以得到结论: $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$?如果可以, 请详细说明原因。如果不可以, 请举出反例。
- 2) 是否存在上述 $x(n)$ 其 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$?如果有请举例。否则请给满足 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad |\omega| \leq \pi$ N点序列 $y(n)$ 的特征。若 $X(k) = Y(e^{j\omega})|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$ 请指出有限长序列 $x(n)$ 与有限长序列 $y(n)$ 间的关系。

$$x(n) = y((n))_N R_N(n)$$

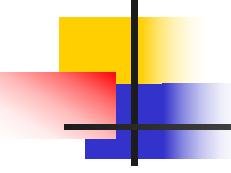
利用对称性减少运算量

- 对于实序列和纯虚序列，只要知道一半数目就可以利用对称性求得另外一半，从而可以节约运算
- 利用共轭对称性，可以用一次DFT运算来计算两个实数序列的DFT，因而可以减少计算量。

$$\begin{aligned}\omega(n) &= x_1(n) + jx_2(n) & W(k) \\& & = DFT[w(n)] \\& & = DFT[x_1(n) + jx_2(n)] \\& & = DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] \\& & = X_1(k) + jX_2(k)\end{aligned}$$

$$X_1(k) = DFT\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

$$X_2(k) = DFT\{\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*((N-k))_N]R_N(k)$$



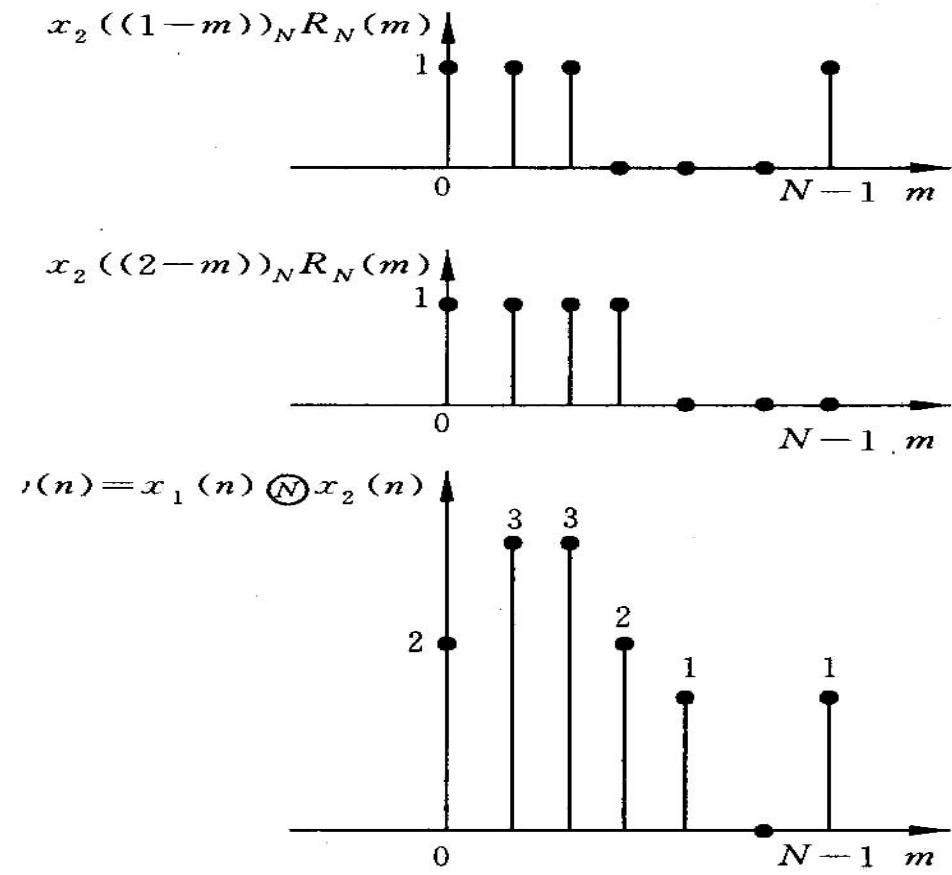
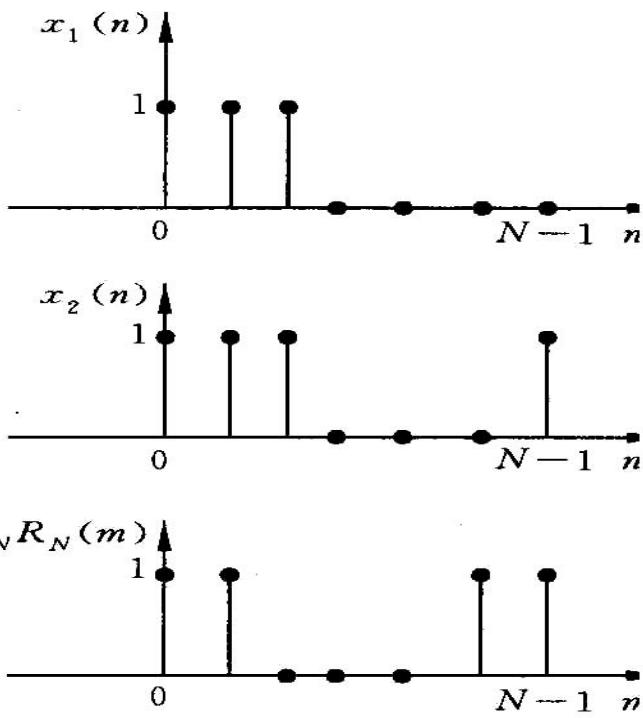
四、圆周卷积和 (**N**)

- 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为 **N** 的有限长序列。
- 圆周卷积和定义为：

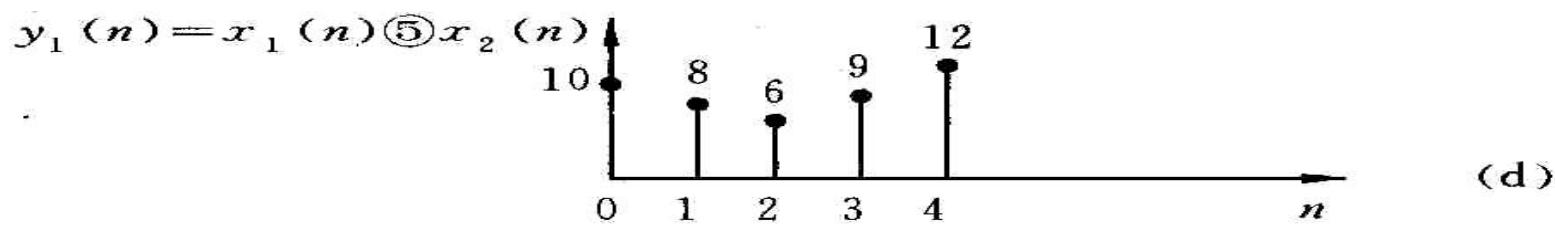
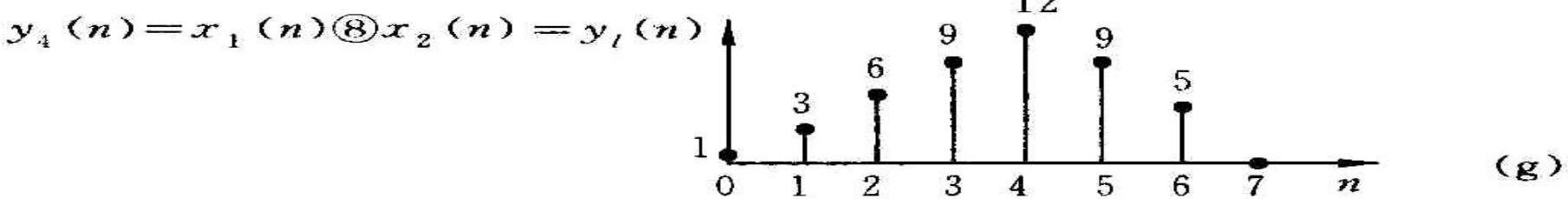
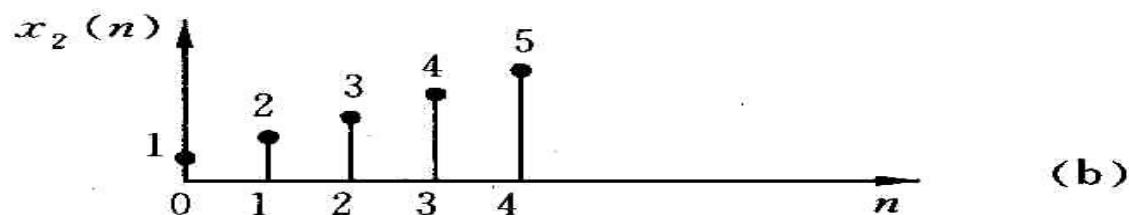
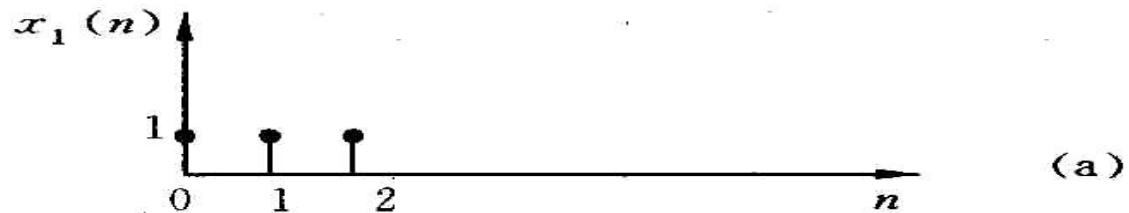
$$y(n)$$

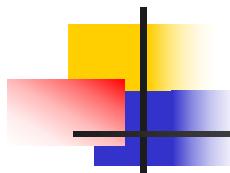
$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

- 圆周卷积和与点数 **N** 有关



两个序列做不同点数的圆周卷积和，其结果不一样





圆周卷积和性质

- 若:

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

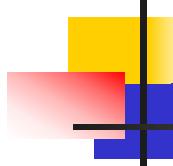
-

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k)$$

- 则有:

$$y(n) = IDFT[Y(k)]$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$



证明:

$$y(n)$$

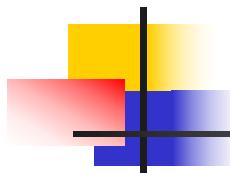
$$= IDFT[Y(k)]$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) X_2(k) W_N^{-nk} \right) R_N(n)$$

$$= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk} \right) X_2(k) W_N^{-nk} \right] R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right) \right] R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \equiv \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

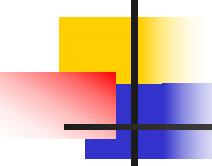


圆周卷积和交换性

同理不难证明：

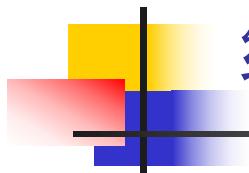
$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2((m))_N x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$\begin{aligned} x_1(n) \Theta x_2(n) &= x_2(n) \Theta x_1(n) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right) R_N(n) = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right) R_N(n) \end{aligned}$$



圆周卷积和 计算 线性卷积和

- 时域圆周卷积和在频域上相当于两DFT相乘，因而可以采用DFT的快速算法（FFT）来实现。与序列的线性卷积和相比，计算速度可以大大加快。
- 一般实际问题（例如信号通过线性移不变系统）都是线性卷积运算，并且作卷积和的两个序列一般情况下长度不等。
 - 如果输入信号以及系统的单位冲激响应都是有限长序列，那么是否能用圆周卷积运算来代替线性卷积运算呢？



线性卷积和

- $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$) ,
- $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$) ,
- 线性卷积和: $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$
- $X_1(n)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1$, $x_2(n)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$, 将两个不等式相加, 得到其卷积和 $y(n)$ 的非零区间: $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$, 所以是 $N_1 + N_2 - 1$ 点有限长序列。

圆周卷积和

■ 数据长度调整

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

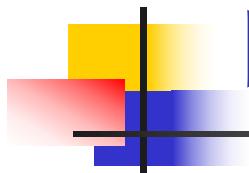
$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

L点圆周卷积是圆周卷积以L为周期的周期延拓序列的主值序列。

圆周卷积无失真代表圆周卷积的条件是延拓周期L必须满足：

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \Theta x_2(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m)_L) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) \end{aligned}$$

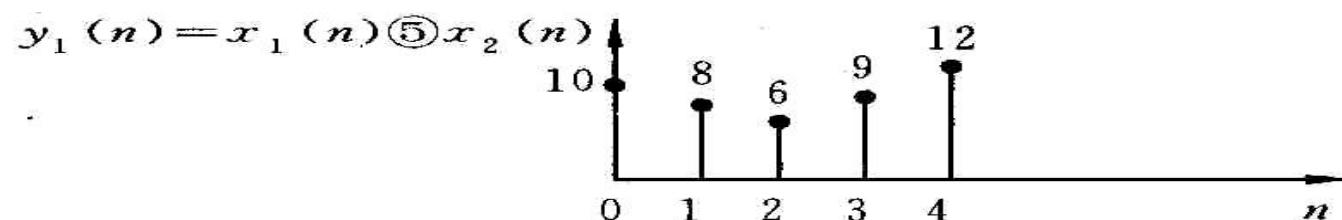
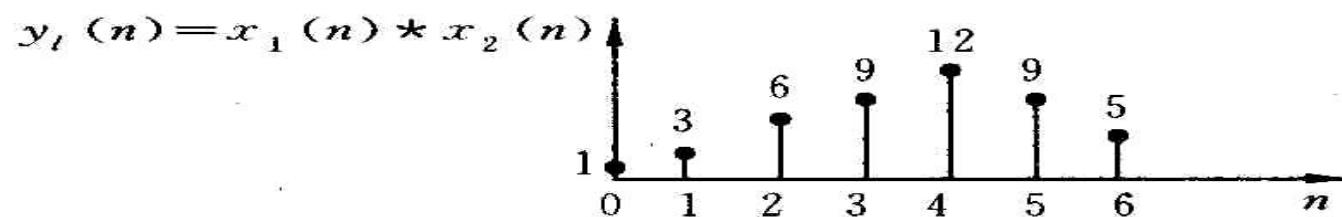
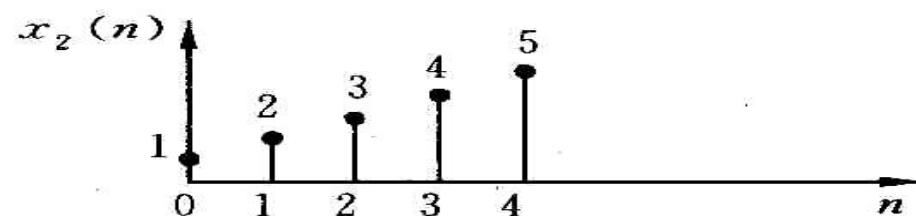
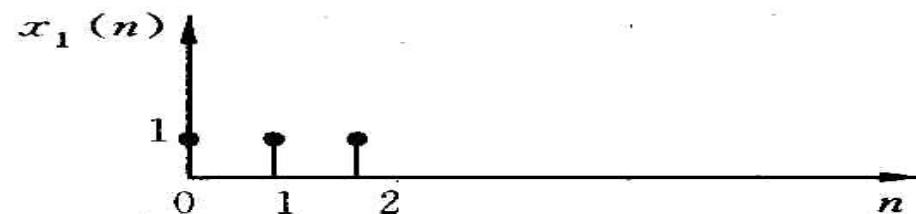


圆周卷积和定理的再解释

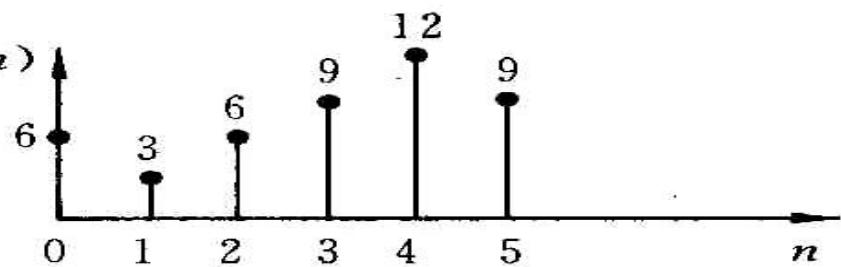
$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) \quad \dots \quad > y(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad \dots \quad > y_I(n)$$

- $Y(K)$ 实际上是两个信号线性卷积和DTFT的采样
- $\rightarrow y(n)$ 相当于线性卷积和的周期延拓
- \rightarrow DFT的点数只有大于等于线性卷积和长度时，才能恢复。

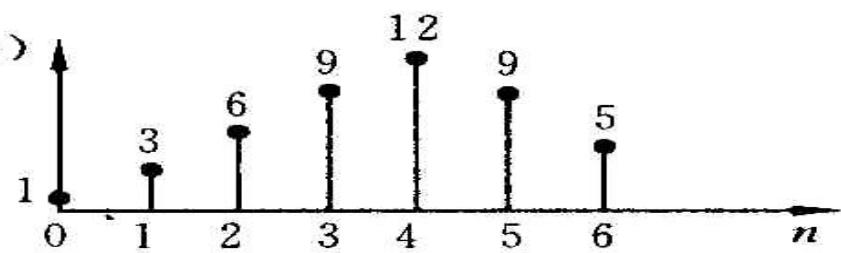


$$y_2(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n)$$



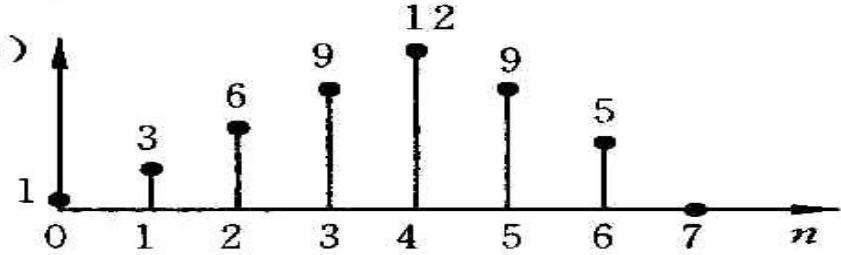
(e)

$$y_3(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n) = y_1(n)$$

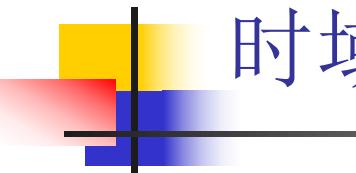


(f)

$$y_4(n) = x_1(n) \textcircled{\#} x_2(n) = y_1(n)$$



(g)



时域相乘定理

- 利用时域与频域的对偶性，可以证明：
- 若： $x_1(n)$ ， $x_2(n)$ 皆为**N**点有限长序列，并且**y(n)**为其相乘序列：

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$

- 则有：

$$Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \Theta X_2(k)$$

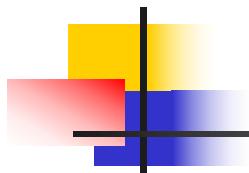
五、圆周相关

- 线性相关定义为：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)y^*(n)$$

- 相关与卷积和类似
 - 缺少“翻褶”过程；
 - 与卷积和不同的是相关不满足交换律。
- 自相关函数：

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+m) = r_{xx}^*(-m)$$



相关函数的频谱

$$R_{xy}(z)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-m) z^{-m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(n-m) z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(m) z^{(m-n)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(m) z^m = X(z) Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) \quad R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

- 
- 上述推导说明：
 - 互相关函数的频谱只包含两个信号**共有频率成分**。
 - 自相关函数的**傅里叶变换**是信号的**功率谱**，是信号谱分析建模的基础。
 - 与圆周卷积和类似，由于**DFT****隐含的周期性**，存在圆周相关的概念，它不同于线性相关。

- 借助线性相关性质假设：

- 可以证明： $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$

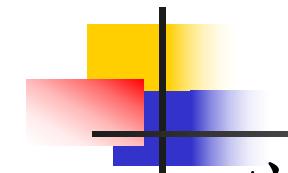
$$IDFT[R_{xy}(k)] = r_{xy}(m)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N \right] R_N(m) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N \right] R_N(m)$$

- 由此，引出圆周相关的定义为：

$$r_{xy}(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N \right) R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N \right) R_N(m)$$

$$\begin{aligned}
& IDFT[R_{xy}(k)] \\
&= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) X(k) W_N^{-mk} \right) R_N(m) \\
&= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) W_N^{-mk} \right] R_N(m) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) W_N^{(n-m)k} \right) \right] R_N(m) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-(n-m)k} \right)^* \right] R_N(m) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N \right) R_N(m) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m))_N \right) R_N(m) = r_{xy}(m)
\end{aligned}$$

- 
- 实际信号处理中主要是为了实现线性相关运算，从而实现对信号的分析；
 - 由于圆周相关可以利用**FFT**快速实现，因而大部分情况下利用圆周相关来实现线性相关；
 - 与卷积类似，**L点圆周相关能代表线性相关的条件是：**

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

作业

- 8.9
- 8.14
- 8.15
- 8.16
- 8.23
- 8.27





谢 谢

授课教师：孙国良

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

5.3 FFT



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

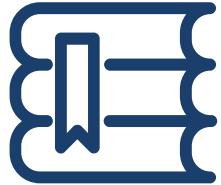
DFT快速算法



五

DFT的工程应用

D F T 快 速 算 法



离散傅里叶级数

频域采样与重构

离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用

北京航空航天大学



- ◆ DFT到底有多“坑”？
- ◆ 如何提高运算效率？



倍速

DFT存在的问题及改进

- **N点有限长序列，其DFT变换对为：**

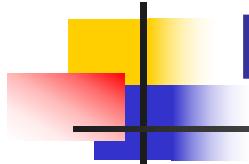
- $$DFT : X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

$$IDFT : x(n) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right) R_N(n)$$

- 可以看出，**变换与反变换的差别仅在于指数符号和常数乘因子**1/N**。**实际上：

$$IDFT [X(k)] = \frac{1}{N} \overline{DFT [X^*(k)]}$$

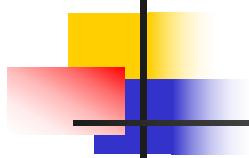
- 因而我们**只讨论DFT正变换的运算量**，反变换的运算量是完全相同的。



DFT直接计算的运算量

$$DFT: \quad X(k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right) R_N(k)$$

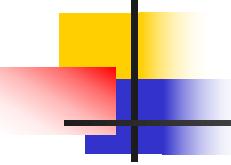
- 一般来说 $x(n)$ 和 W_N^{nk} 都是复数，
- 每一个 $X(k)$ 值的计算，需要 **N** 次复数乘法以及 **(N-1)** 次复数加法，
- 完成整个**DFT**运算总需要 N^2 次复数乘法和 **N (N-1)** 次复数加法。

- 
- 复数运算实际上是由实数运算来完成的，如：

$$AB = (a + jc)(b + jd) = (ab - cd) + j(ad + bc)$$

$$A + B = (a + jc) + (b + jd) = (a + b) + j(c + d)$$

- 一次复数乘法需用：
 - 四次实数乘法
 - 二次实数加法；
- 一次复数加法则需：
 - 二次实数加法。
- 整个**DFT**运算总共需要：
 - **4N²次实数乘法**
 - **2 N² + 2 N (N - 1) = 2 N (2 N - 1) 次实数加法。**



特例：

- 上述统计与实际的运算次数有**少许出入**，某些因子不能按照一般的复数来计算运算量，如：

$$\pm 1 \quad \pm j \quad W_N^0 = 1 \quad W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{N/4} = -j$$

- 当**N**很大时，这种特例很小。
- 直接计算**DFT**运算量是很可观的：
 - N=8**时，**DFT**需**64**次复乘，
 - N=1024**时，**DFT**所需复乘为**1 048 576**次，
- 对**实时性很强的信号处理**来说，对**硬件的计算速度要求是太高了**。为了实用的需要，**需要改进DFT的计算方法**，减少运算次数。

变换基底的特性

如何才能减少运算量？仔细观察DFT的运算就可看出，其**变换系数**的具有如下**特性**：

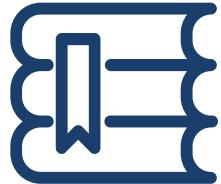
$$(1) W_N^{n k} \text{ 的对称性 } (W_N^{n k})^* = W_N^{-nk}$$

$$(2) W_N^{n k} \text{ 的周期性 } W_N^{n k} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$$

$$(3) W_N^{n k} \text{ 的可约性 } W_N^{n k} = W_{mN}^{mn k} \quad W_N^{n k} = W_{N/m}^{nk/m}$$

$$W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk}$$

$$W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$



问 题 及 思 路

DFT存在的问题

改进的可行性

运算量正比于序列长度平方 N^2

长序列分解成短序列

$$(\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2} < N^2$$

变换基 $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
为复数，复运算

可约性、周期性、对称性可合并运算；

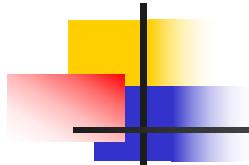
$$W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m} = W_{mN}^{mnk}$$

$$W_N^{nk} = W_N^{n(k+N)} = W_N^{(n+N)k}$$

$$W_N^{-nk} = W_N^{n(N-k)} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{nk})^*$$

还有少量实因子

$$\begin{aligned}W_N^0 &= -1 \\W_N^{N/4} &= j \\W_N^{N/2} &= -1 \\W_N^{3N/4} &= -j\end{aligned}$$

- 
- (1) 利用 $W_N^{n k}$ 的对称性, 合并DFT运算中某些项, 并且可以计算反变换;
 - (2) 由于DFT的运算量是与 N^2 成正比, 利用 $W_N^{n k}$ 周期性和可约性将长序的DFT分解为短序列的DFT。
 - FFT基本可以分成两大类
 - 按时间抽取(DIT,Decimation-in-time)
 - 按频率抽取(DIF,Decimation-in-frequency)。

戈 泽 尔 算 法

戈泽尔算法

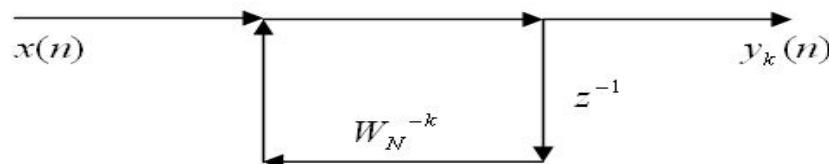
基2-FFT的定义及特点

时域抽取的基2-FFT

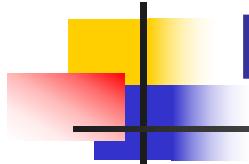
FFT应用示例

课后作业与参考资料

- 利用复变换基 W_N^{n-k} 的周期性、对称性减少运算量的典型例子
- 利用卷积计算频域



- 用于单离散频点或少数任意离散频点场合（如**DTMF**辨识）的有效计算



DFT变形为卷积

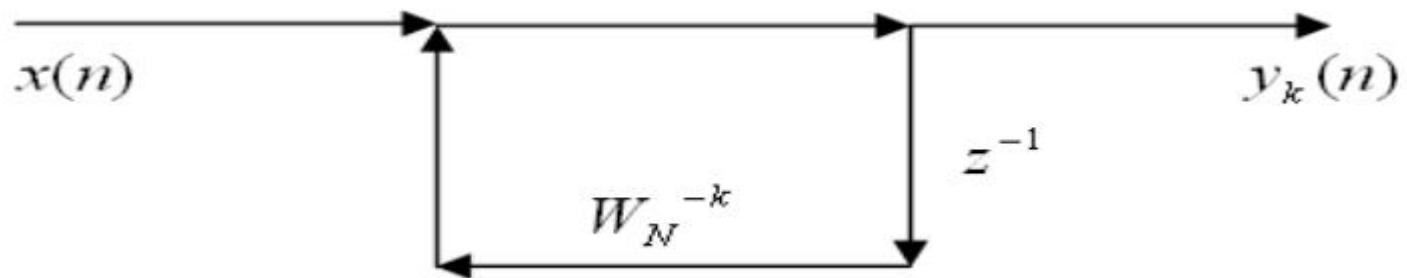
$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n) = x(n) * W_N^{-kn} u(n) \stackrel{x(n) \text{为有限长}}{=} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(n-r)} u(n-r)$$

$$y_k(n)|_{n=N} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} u(N-r) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} = X(k)$$

推论：避免计算和存储 W_N^{-kn}

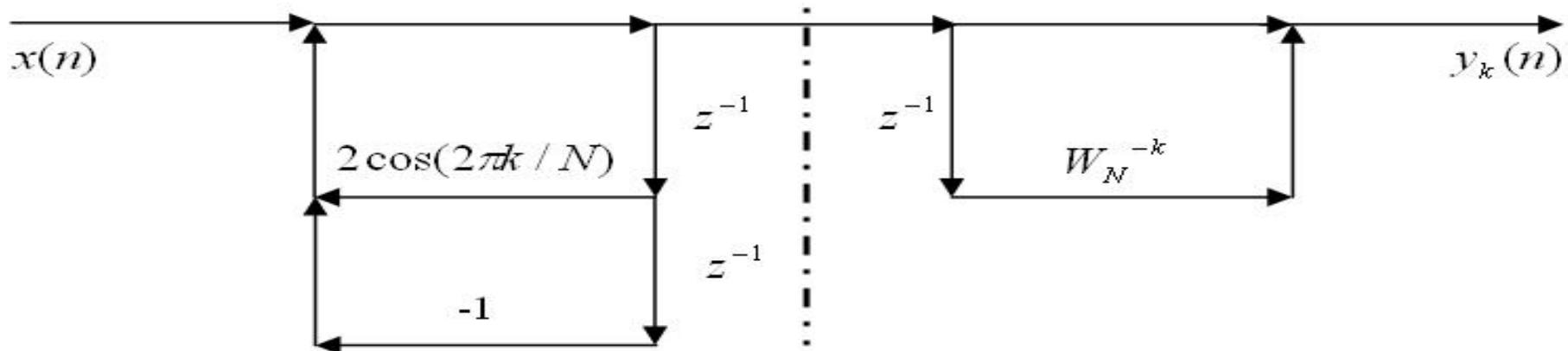
- 如果构造冲击响应 $h(n)$ 为 $h(n) = W_N^{-kn} u(n)$ 的系统，则该系统对有限长输入在 $n = N$ 时刻的响应即为 $X(k)$ 。

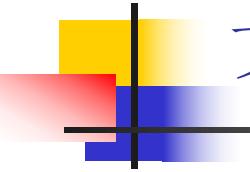


运算量減半

- 立足于上面用卷积实现**DFT**的方法，通过变形将上面的运算量减小一半。

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})} * (1 - W_N^k z^{-1}) \\ &= \frac{1}{1 - 2 \cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2}} * (1 - W_N^k z^{-1}) \end{aligned}$$





戈泽尔算法特点

- 利用迭代实现了复因子的计算
- 如果输入序列是复数，由于系数是实数并且-1不必作乘法运算，所以计算一个 $X(K)$ 只需要 $2N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法。
- 戈泽尔算法还有另外一个优点是只需要将前馈环节中的复因子取共轭就可以计算 $X(N-K)$ ，可以将运算量再次减半。
- 戈泽尔算法虽然比直接运算有效的多，但是无论如何变形，其运算量将仍然正比于 N^2 。

基2-FFT的定义及特点



■ 基2-FFT定义：

- I. 序列长度为 2^L ，如不满足可补0 -----适合递归分解
- II. 序列长度每次减半进行DFT快算运算 --分解出特殊基

$$W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

- III. 序列分解的最小单元长度为2 -----无复数运算

$$W_2^0 = 1 \quad W_2^1 = -1$$

■ 两大类：

- 时间抽取(DIT)的基2-FFT： (库利-图基, 1965)
- 频域抽取(DIF)的基2-FFT： (桑德-图基, 1966)

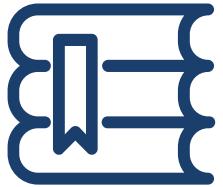
戈泽尔算法

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

线性调频-Z变换



DFT时域奇偶抽取的数学推演

$$N = 2^L$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

时域奇偶分组

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) \\ x_2(r) = x(2r+1) \end{cases}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{2rk}$$

利用复指数
基底的可约性

旋转因子

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk}$$

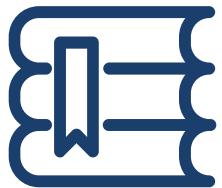
$$\begin{cases} X_1(k) = DFT[x_1(n)] \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)] \end{cases}$$

N/2点DFT

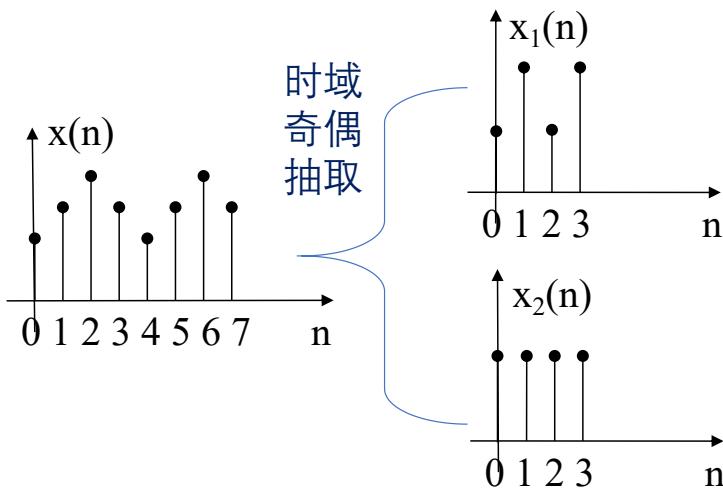
$$= X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

k需周期性拓展

$$\begin{aligned} X_1\left(\frac{N}{2}+k\right) &= X_1(k) \\ X_2\left(\frac{N}{2}+k\right) &= X_2(k) \end{aligned}$$

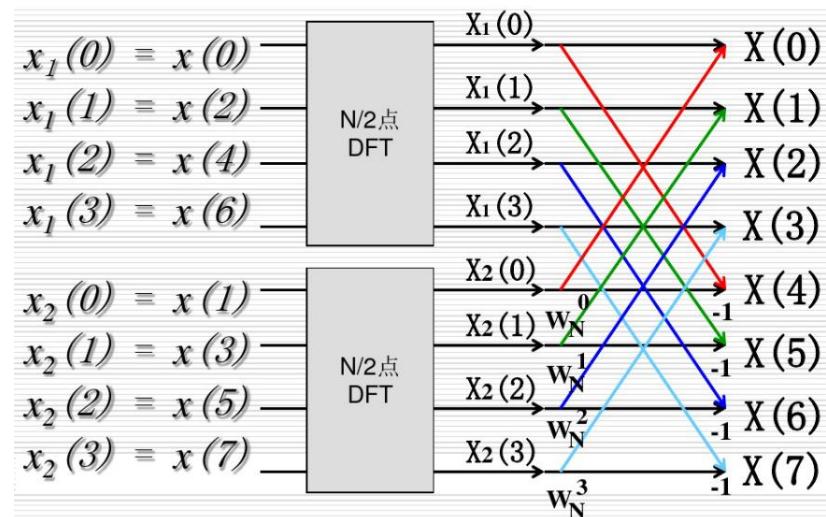


DFT时域抽取的物理解释

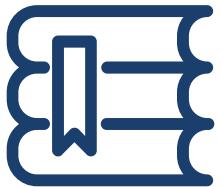


时域分解

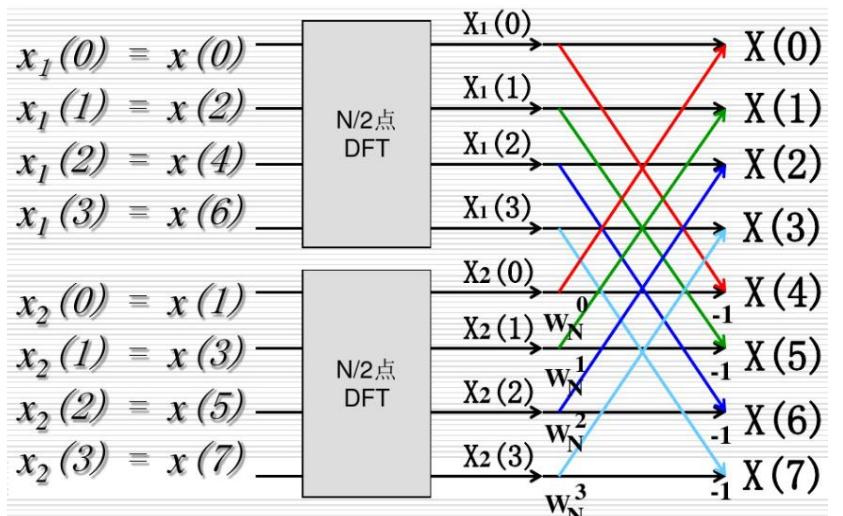
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$



频域组合



一次分解后的基本蝶形及运算量



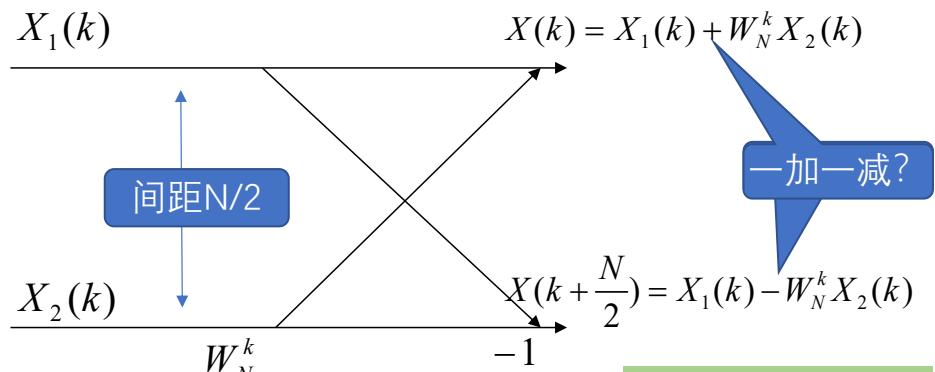
运算量	分解前	分解后
复乘次数	N^2	$2 \times (N/2)^2 + N/2 = N(N+1)/2 \approx N^2/2$
复加次数	$N^2 - N$	$2 * N/2 * (N/2 - 1) + N = N^2/2$

按照上述方法依次分解下去…

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

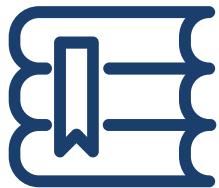
$$X_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_1(k)$$

$$X_2\left(\frac{N}{2} + k\right) = X_2(k)$$

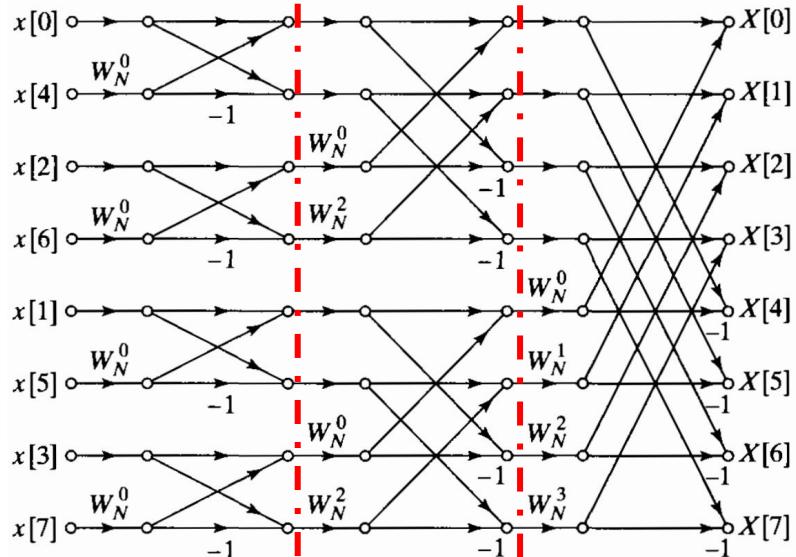


$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^{\frac{N}{2}} W_N^k = -W_N^k$$

蝶形单元：旋转因子在前，加减在后
运算量：一次复乘，两次复加



DIT分解的最终蝶形结构及运算量

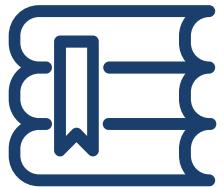


运算量	分解前	分解后
复乘	N^2	$L * N / 2 = \log_2^N * N / 2$
复加	$N^2 - N$	$L * N = \log_2^N * N$

DIT蝶形特点

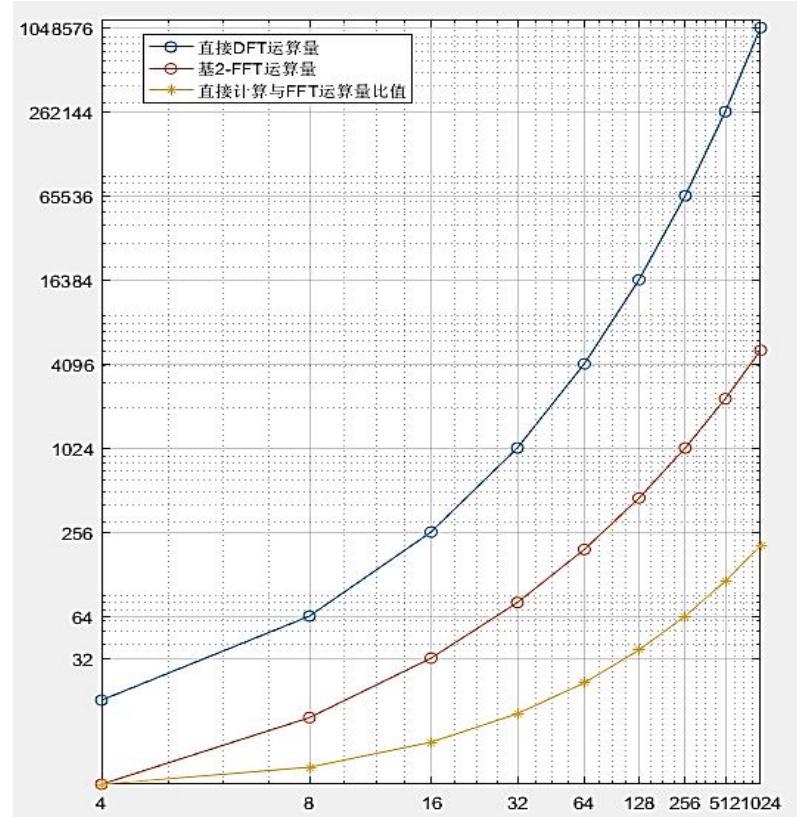
- 共有L级蝶形，每级有N/2个蝶形；
- 同址运算（原位运算）；
- 倒位序寻址；

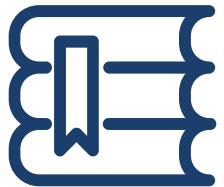
自然顺序 n	二进制数	倒位序二进制数	倒位序顺序数 \hat{n}
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7



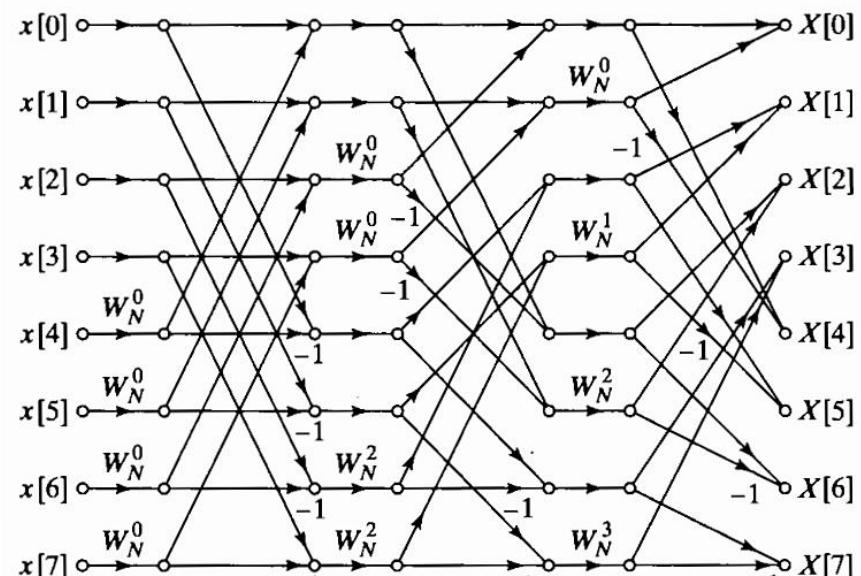
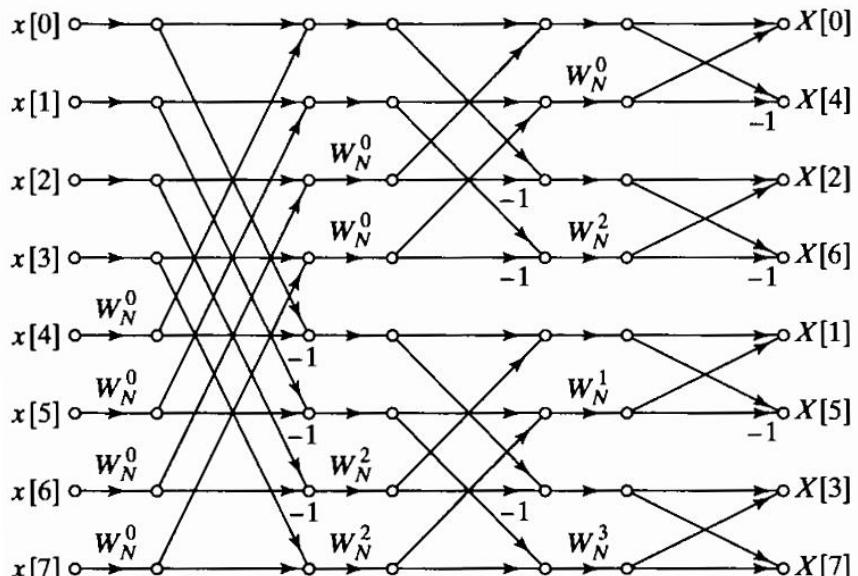
基2-FFT与直接DFT复乘运算量对比

序列长度N \ 运算量	直接DFT	基2-FFT	运算量之比
序号	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	
1	16	4	4.0
2	64	12	5.3
3	256	32	8.0
4	1024	80	12.8
5	4096	192	21.3
6	16384	448	36.6
7	65536	1024	64.0
8	262144	2304	113.8
9	1048576	5120	204.8



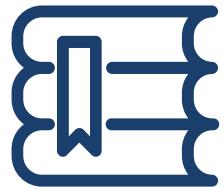


DIT 基 2 -FFT 的其他流图形式



DIT基本蝶形本质特征：旋转因子在前，加减在后

DFT频域奇偶抽取的数学推演



$$N = 2^L$$

时域前后分组

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

按K的奇偶性分解
为越来越短的序列

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(\frac{N}{2}+n\right)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2}] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right)]. W_N^{nk}$$

利用复指数
基底的可约性

FFT背景介绍

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

线性调频-Z变换

频域按k奇偶分

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + (-1)^k x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{nk}$$

- 令 $\begin{cases} k = 2r \\ k = 2r + 1 \end{cases} \right\} r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

- 则：

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{n \cdot 2r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{nr}$$

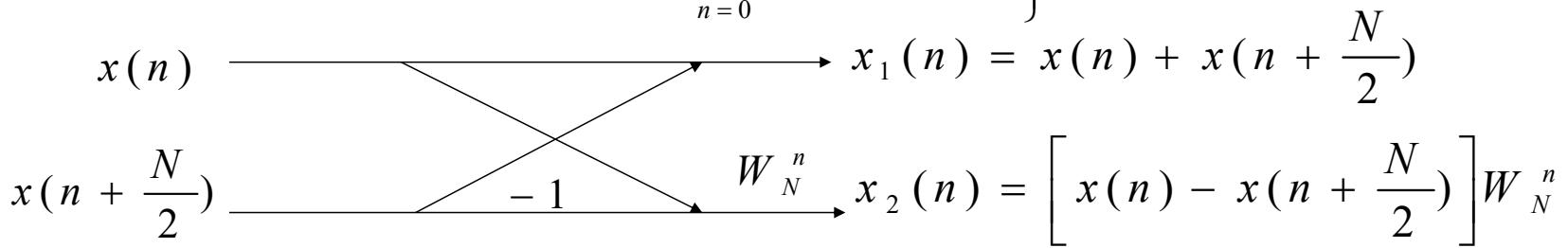
$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^{n(2r+1)}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n + \frac{N}{2})] \cdot W_N^n \right\} W_N^{nr}$$

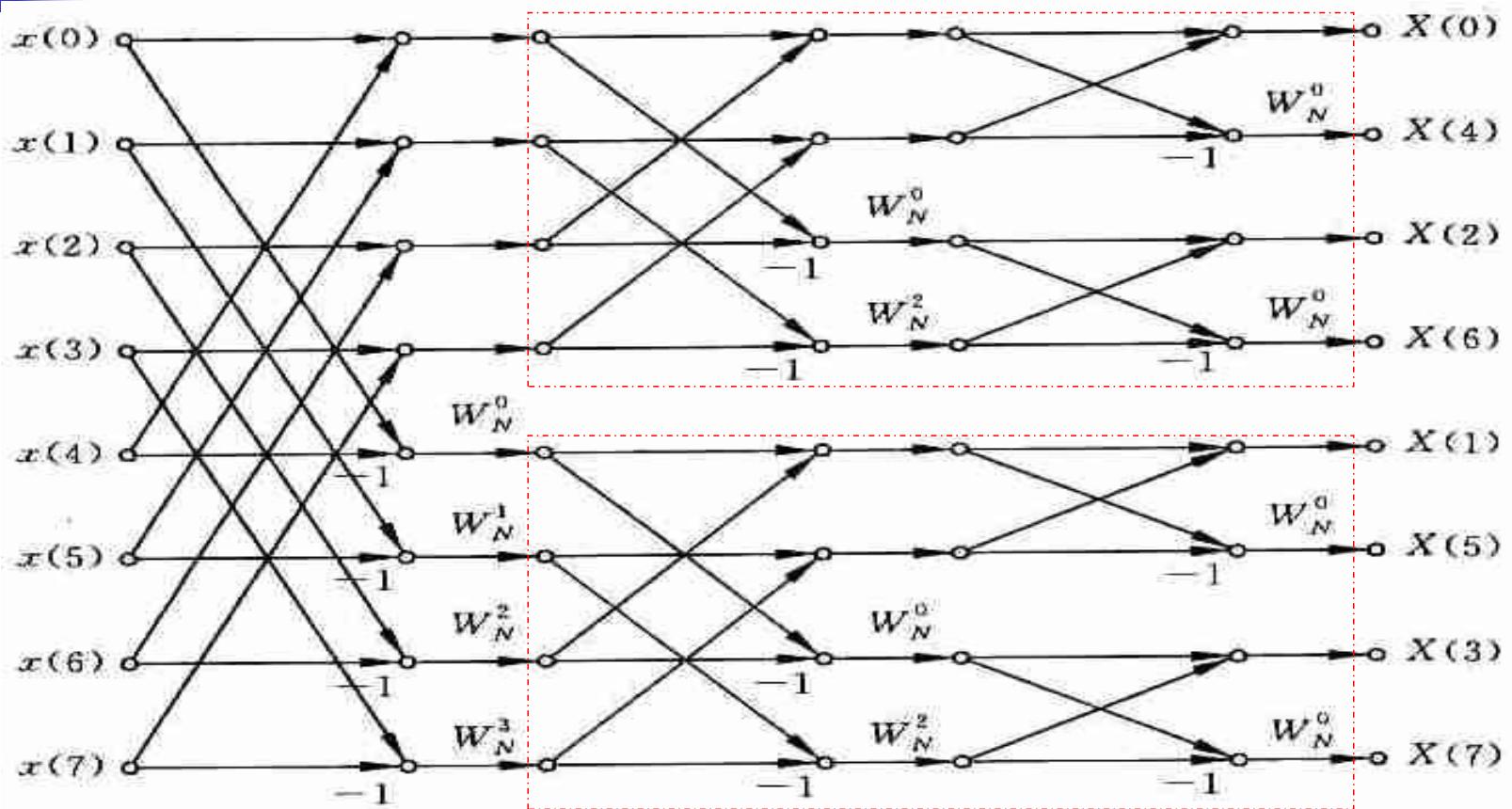
DIF运算关系的基本蝶形

- 令
$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \right\} n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- 则:
$$\left. \begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\ X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} \end{aligned} \right\} r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

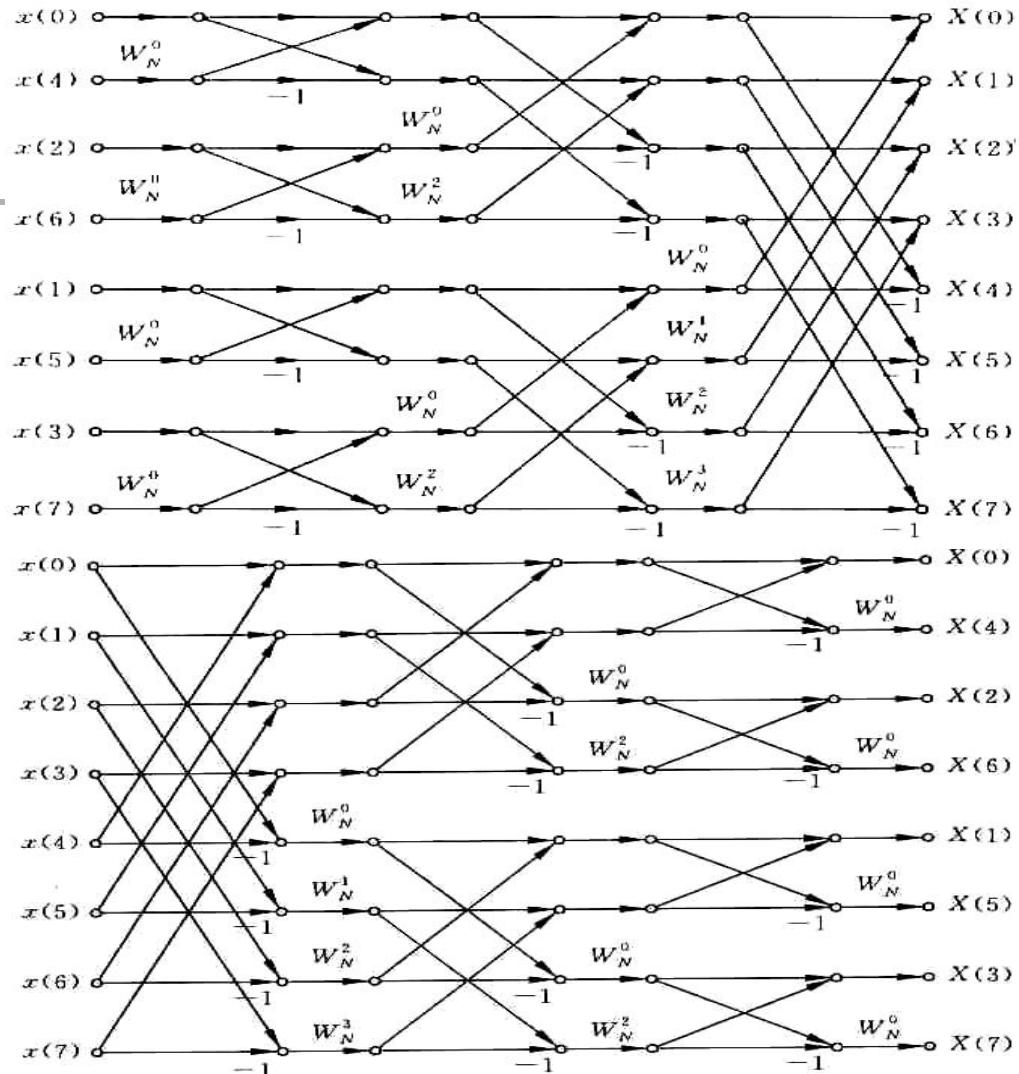


N=8点DIF FFT结构

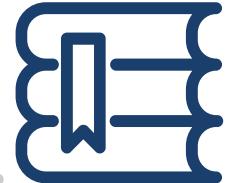


DIT与DIF 的本质区别

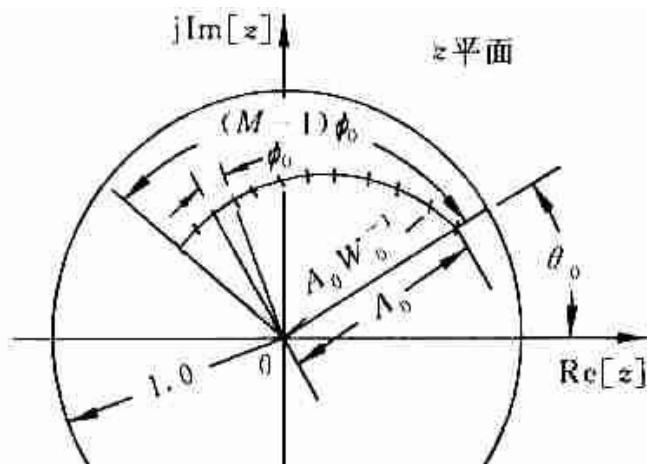
- 形式上区别是：**DIF**输入是自然顺序，输出是倒位序的，与**DIT**正好相反。
 - DIF**与**DIT**都可将输入或输出按照要求进行重排。
- 实质性区别是：**DIF**与**DIT**的基本蝶形不同。



线性调频-Z变换



- 对非单位圆上的抽样感兴趣，如语音信号处理中往往需要知道极点所在处的复频率，如果极点位置离单位圆较远，只利用单位圆上的频谱，就很难知道极点所在处的复频率。
- Z变换采用螺线抽样就适应于这些需要，称为线性调频Z变换(CZT,Chirp-Z)



戈泽尔算法

基2-FFT定义及特点

时域抽取的基2-FFT

频域抽取的基2-FFT

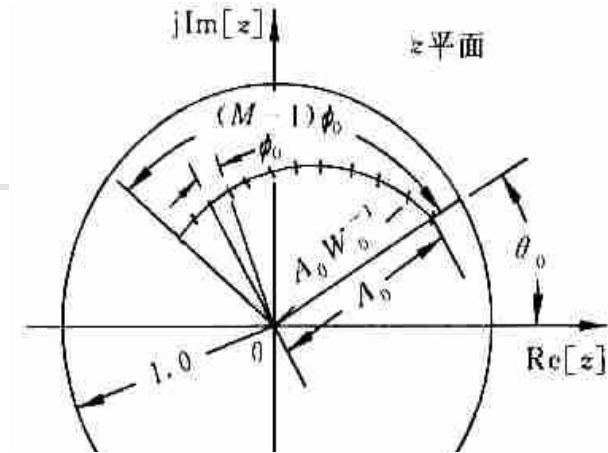
线性调频-Z变换

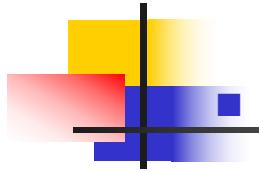
一、算法原理

- 已知 $x(n) (0 \leq n \leq N - 1)$
- **Z变换为:** $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$
- 为适应**z**可以沿**Z**平面更一般的路径取值, 沿**Z**平面上的一段**螺旋线**作等分角的**M**点抽样, **z**的这些抽样点 **z_k** 为:

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\phi_0} = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\phi_0)}$$





CZT的快速算法

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{-nk}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned}$$

- 直接计算这一公式，与直接计算**DFT**相似，总共算出**M**个抽样点，需要**NM**次复数乘法与(**N-1**)**M**次复数加法，当**N, M**较大时，运算量将很大。

布鲁斯坦等式

- 采用**布鲁斯坦** (**Bluestein**) 提出的等式，可以将以上运算转换为卷积和形式，进而采用**FFT**算法，提高运算速度。
- 布鲁斯坦所提出的等式为：

$$nk = \frac{1}{2} \left[n^2 + k^2 - (k - n)^2 \right]$$

- 由此可得：

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}} \\ &= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \end{aligned}$$

CZT 转变为卷积和

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}}$$

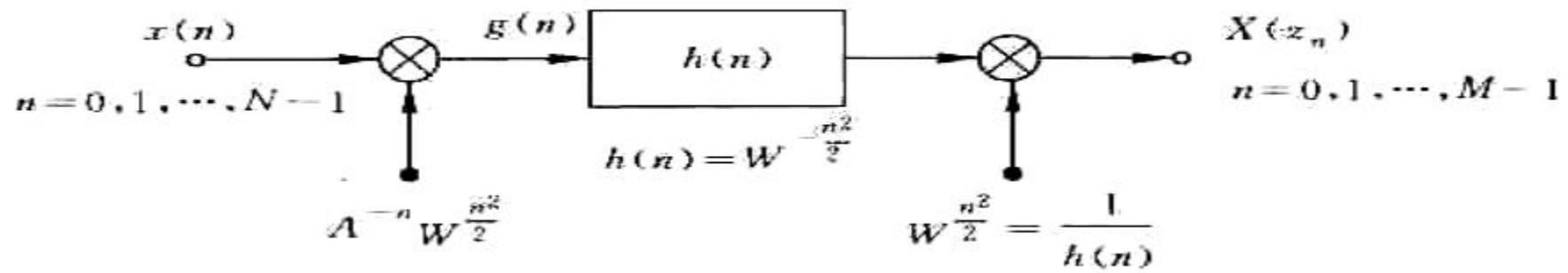
$$= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$$

Chirp signal

$$X(z_k) = \frac{1}{h(k)} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

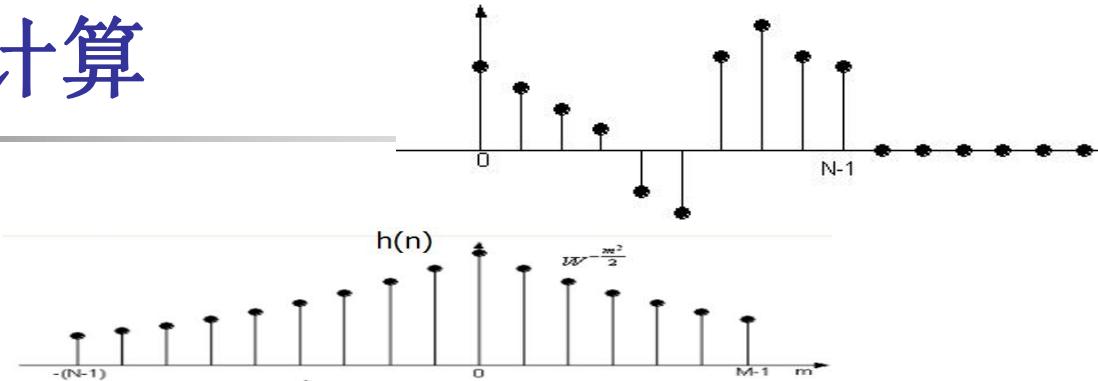


二、CZT快速计算

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}}$$

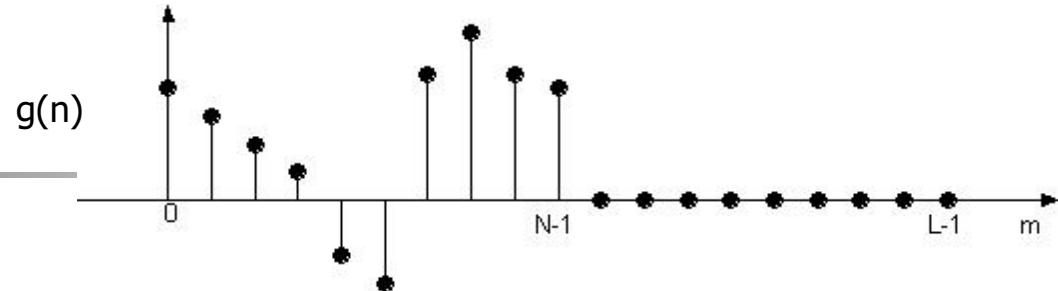
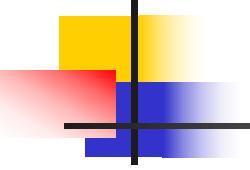
$$g(n) = x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(z_k) = \frac{1}{h(k)} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

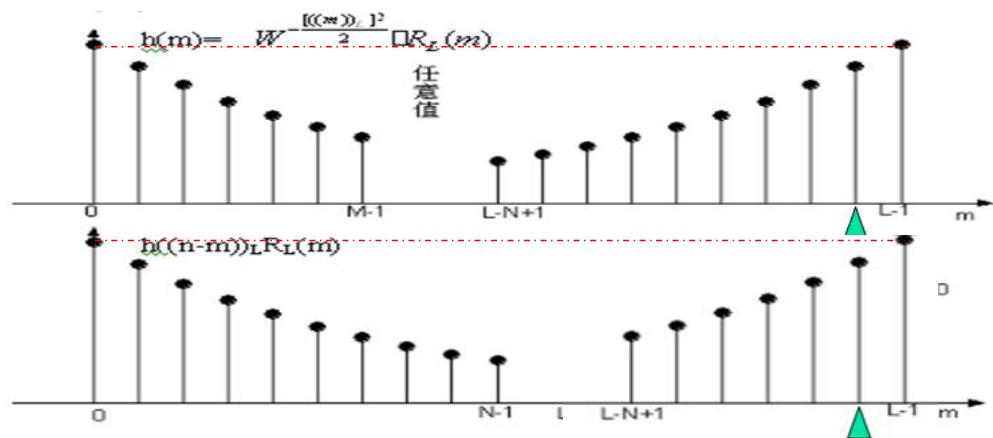
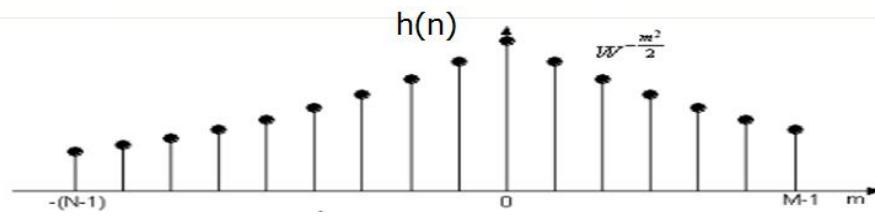


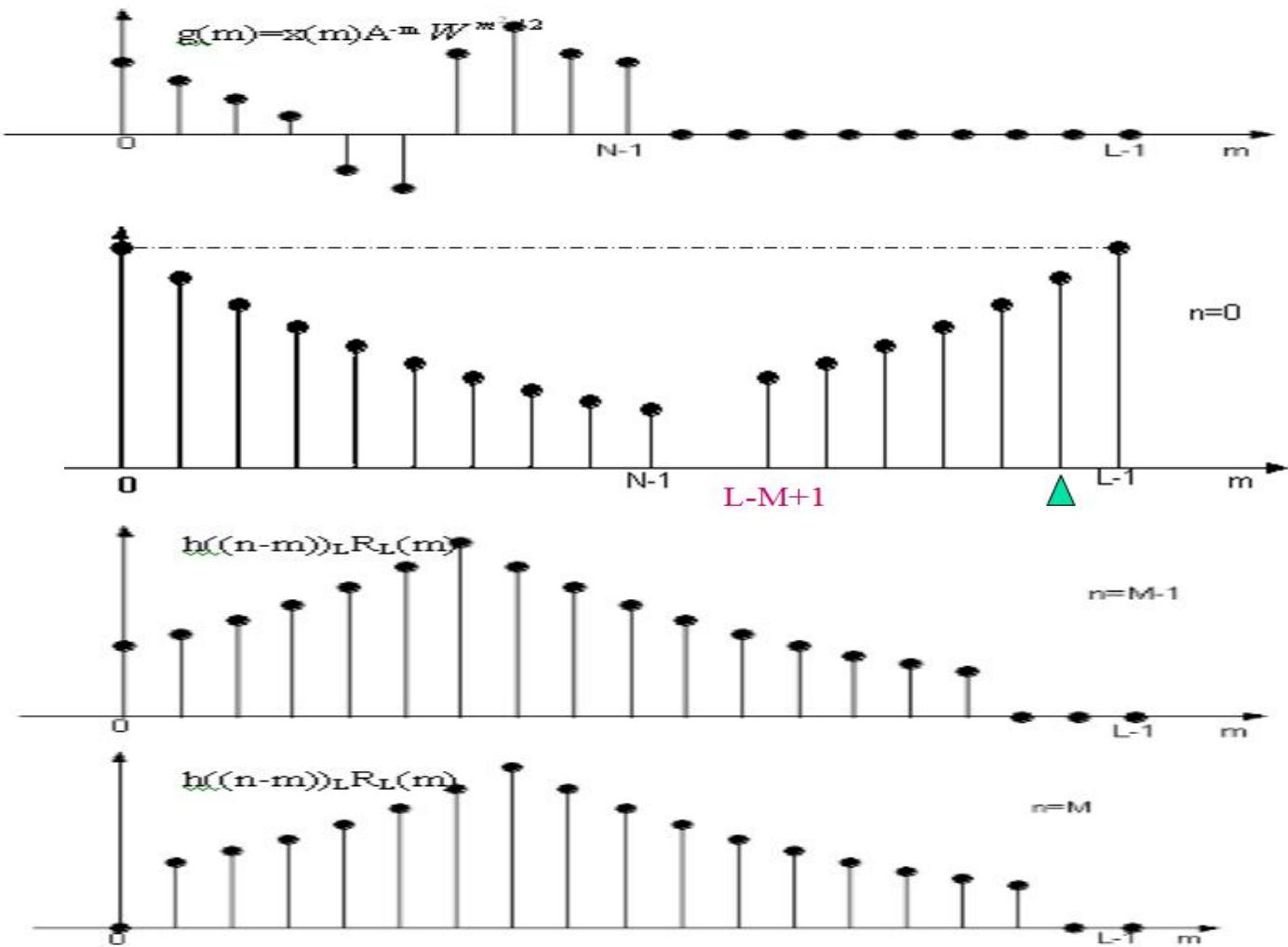
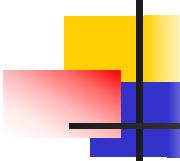
■ 线性系统 $h(n)$ 是非因果的。

- 当 n 取值为 0 到 $N-1$, k 取值为 $0, 1 \dots, M-1$ 时, 则 $h(n)$ 的定义区间为 $[-N+1, M-1]$



- **$g(n)$** 长度为 N , **$h(n)$** 长度为 M . 所以 **$g(n)*h(n)$** 的点数为 $2N+M-2$
- 圆周卷积代替线性卷积不产生混叠失真的条件是圆周卷积点数大于或等于 $2N+M-2$
- 但我们只需要前 M 个值，对其他值是否有混叠失真并不感兴趣，这样有可能将圆周卷积的点数缩减到最小为 $N+M-1$ 。





CZT快速运算的实现步骤：

- 1) 选择整数 $L \geq N + M - 1$
- 2) $g(n)$ 补零成 L 点序列
- 3) 利用 FFT 法求 L 点 DFT
- 4) 形成 L 点 $h(n)$ 序列
- 5) 利用 FFT 法求 L 点 DFT

- 6) 将 $H(r)$ 和 $G(r)$ 相乘得 $Q(r) = H(r)G(r)$,
- 7) 求 $Q(r)$ 的 L 点 IDFT, 其中前 M 个值为 CZT 数值
- 8) 最后求 $X(z_k)$: $X(z_k) = q(k)/h(k)$, $0 \leq k \leq M - 1$

$$g(n) = \begin{cases} A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} x(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & N \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$
$$G(r) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} rn}, \quad 0 \leq r \leq L - 1$$
$$h(n) = \begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}}, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 (\text{或任意值}), & M \leq n \leq L - N \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}, & L - N + 1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$
$$H(r) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} rn}, \quad 0 \leq r \leq L - 1$$

作业:

- 9.6 ■ 9.19
- 9.7 ■ 9.21
- 9.14 ■ 9.28
- 9.17 ■ 9.48
- 9.26
- 9.27





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

5.4 DFT



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第四章

Contents

离散傅里叶变换 及 快 速 算 法

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



一

离散傅里叶级数



二

频域采样与重构



三

离散傅里叶变换



四

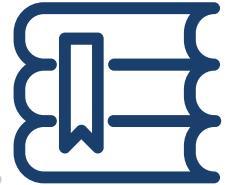
DFT快速算法



五

DFT的工程应用

D F T 工程应用



- ◆ DFT是有限长序列的DTFT的频域采样
- ◆ FFT是DFT的快速算法
- ◆ 实现途径：
硬件实现
软件实现

- ◆ 主要用途：
LTI系统实现
信号频谱分析



离散傅里叶级数

频域采样与重构

离散傅里叶变换

DFT快速算法

DFT的工程应用

FFT效率

编辑器 - E:\BDrive\讲义课件\数字信号处理讲义\其他资料\Matlab资料\sglfft.m

```
sglfft.m %+function [Xk]=sglfft(x,N)
M=log2(N);
xtmp=zeros(1,N);
value=zeros(1,M);
for i=0:N-1
    rpx=i;
    for t=1:M
        repr=bitshift(i,1-t);
        value(t)=bitand(repr,1);
    end
    pos=0;
    for k=1:M
        pos=pos+value(k)*2^(M-k);
    end
    xtmp(pos+1)=x(i+1);
end
for i=1:M
    depth=2^(i-1);
    width=2^(M-i);
    for t=1:2^i:N
        for k=1:depth
            tmp=xtmp(t+k-1);
            wn=width*(k-1);
            xtmp(t+k-1)=tmp+exp(-j*2*pi/N*k);
            xtmp(t+k+depth-1)=t;
        end
    end
    Xk=xtmp;
end
```

命令窗口

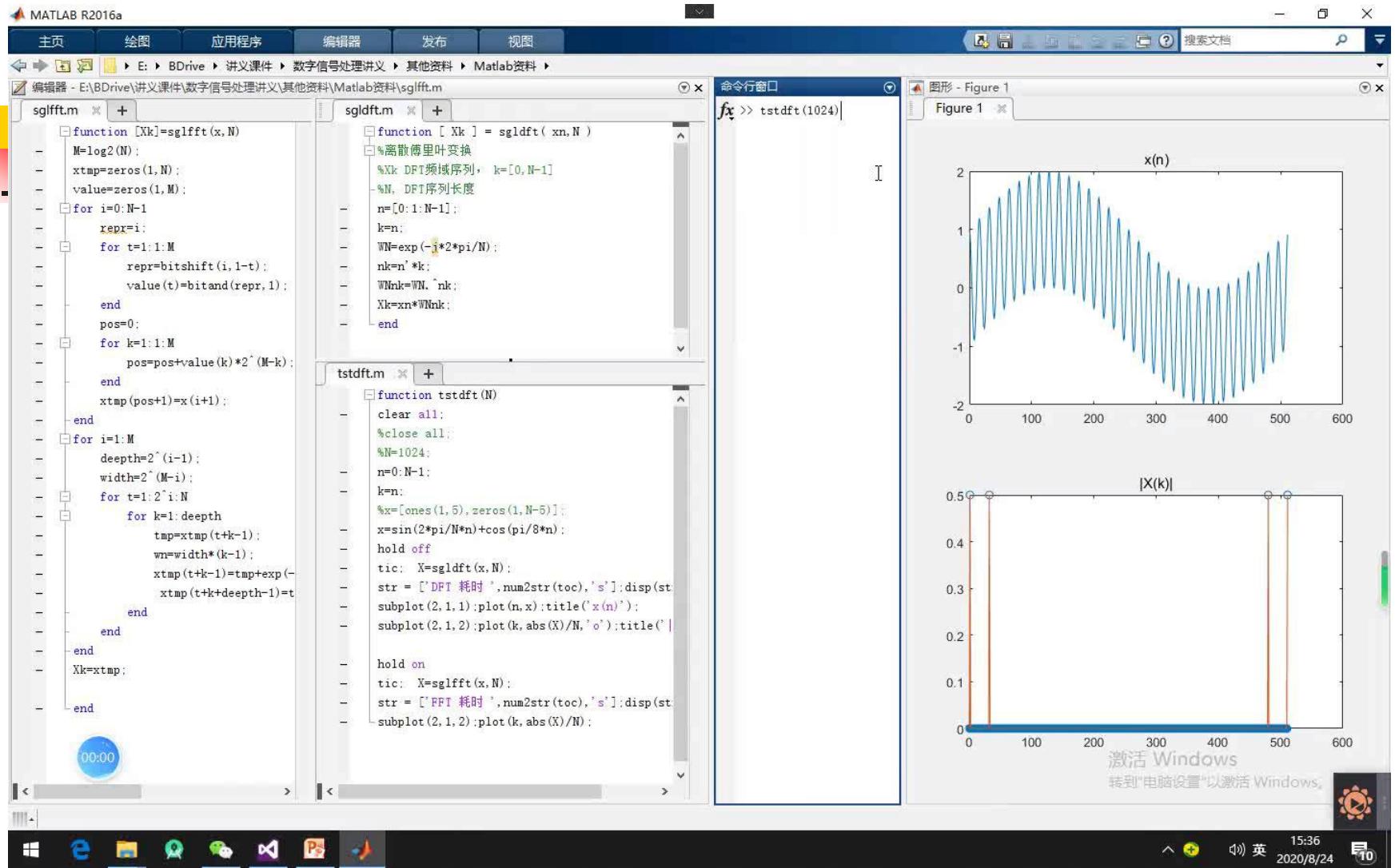
```
>> tstdft(1024)
DFT 耗时 0.2467s
FFT 耗时 0.021336s
>> tstdft(2048)
DFT 耗时 1.1883s
FFT 耗时 0.046576s
>> tstdft(4096)
DFT 耗时 5.5059s
FFT 耗时 0.098824s
fx >
```

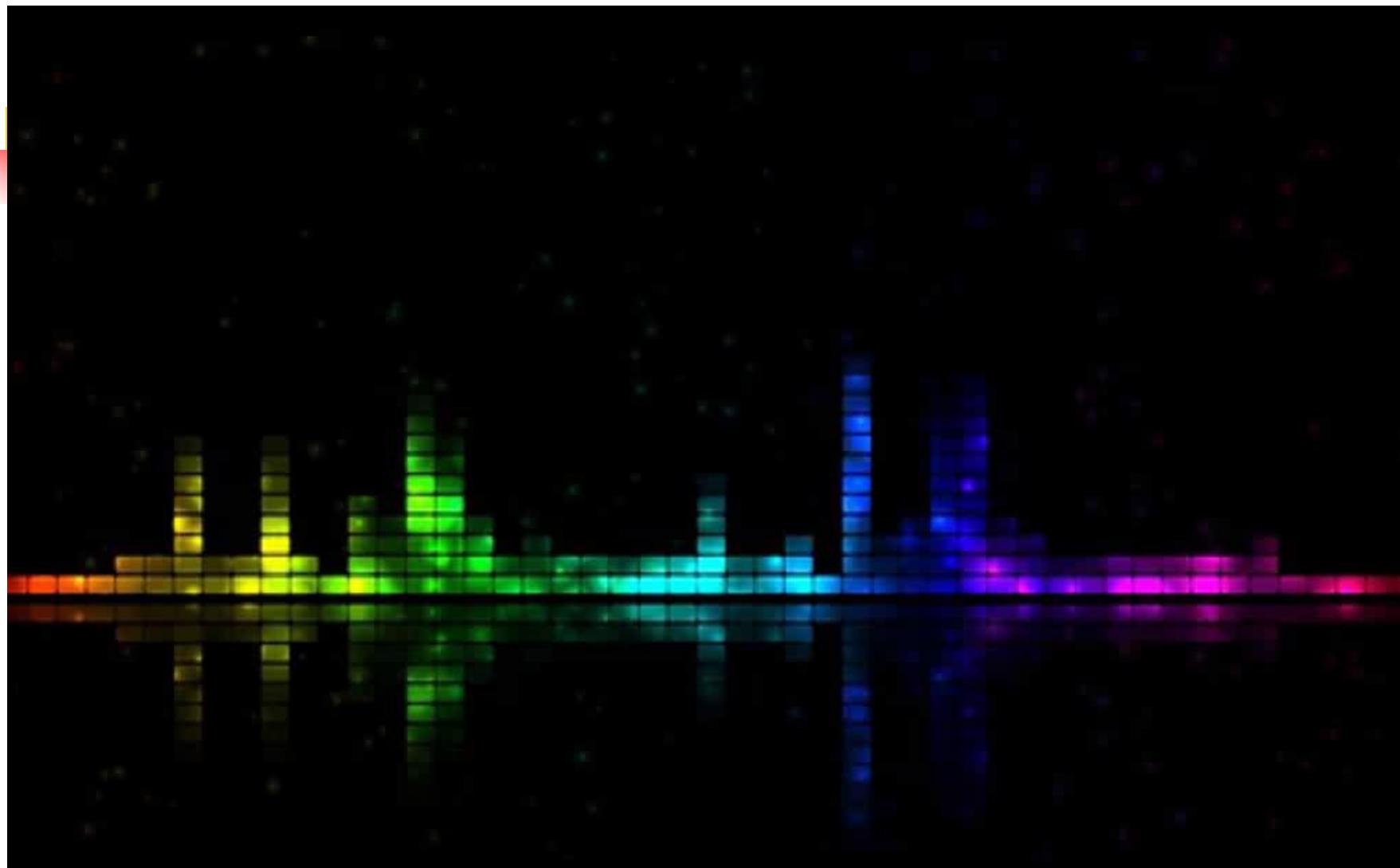
sgldft.m %+function [Xk] = sgldft(xn,N)
%离散傅里叶变换
%Xn DFT频域序列, k=[0, N-1]
%N, DFT序列长度
n=[0:1:N-1];
k=n;
WN=exp(-j*2*pi/N);
nken'*k;
WNnk=WN.^nk;
Xk=xn.*WNnk;
end

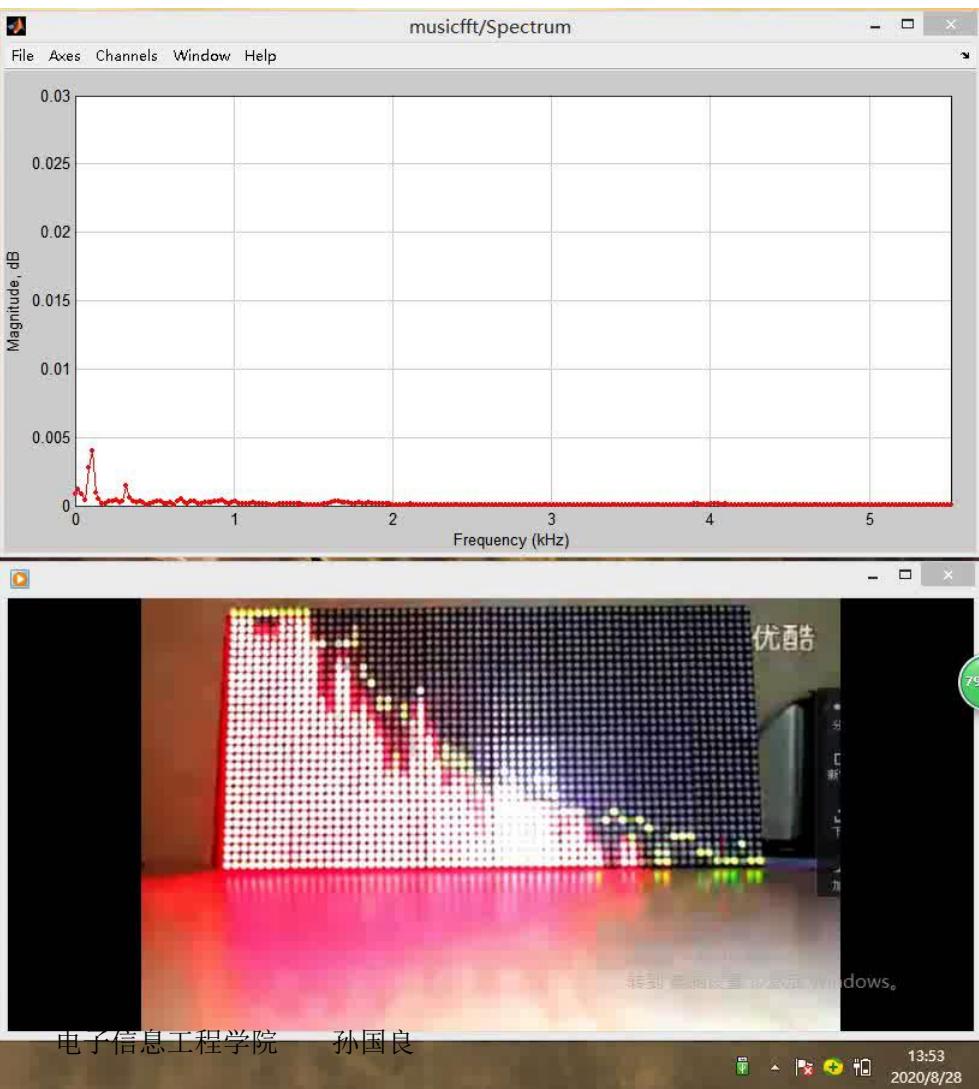
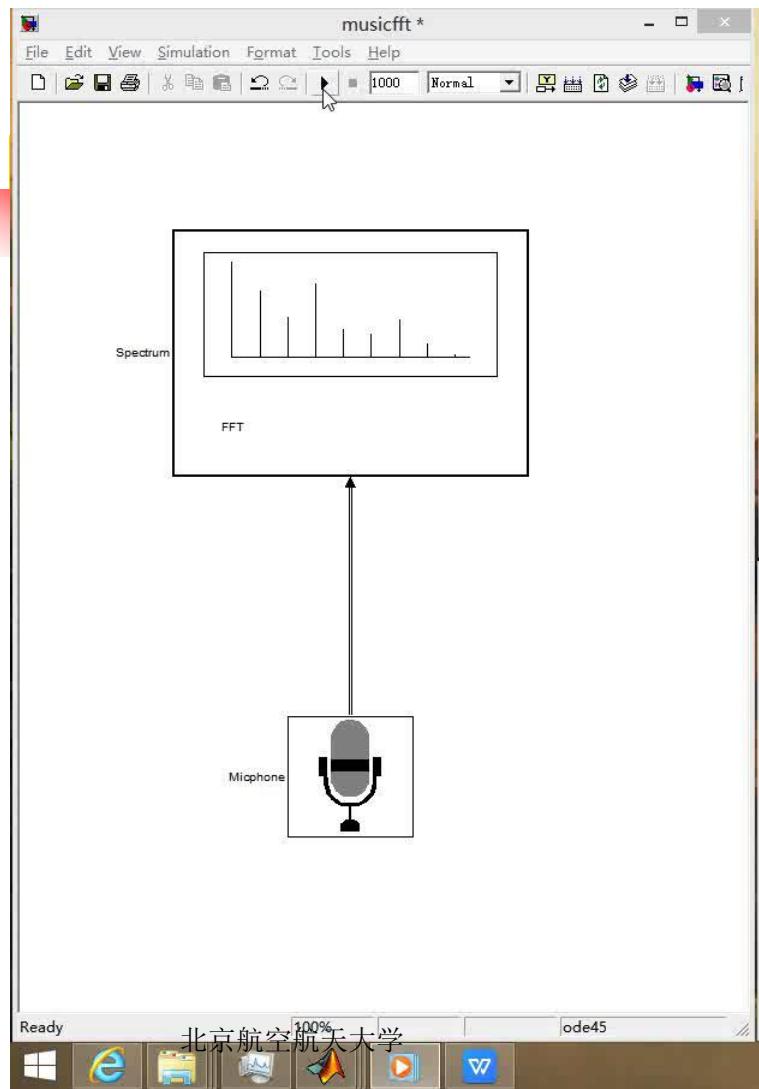
tstdft.m %+function tstdft(N)
clear all;
%close all;
%N=1024;
n=0:N-1;
k=n;
%x=[ones(1,5),zeros(1,N-5)];
x=sin(2*pi/N*n)+cos(pi/8*n);
hold off
tic; X=sgldft(x,N);
str = ['DFT 耗时 ',num2str(toc),'s'];
disp(str);
subplot(2,1,1);plot(n,x);title('x(n)');
subplot(2,1,2);plot(k,abs(X)/N,'o');title('|X(k)|');
hold on
tic; X=sglfft(x,N);
str = ['FFT 耗时 ',num2str(toc),'s'];
disp(str);
subplot(2,1,2);plot(k,abs(X)/N);

图形 - Figure 1

Figure 1

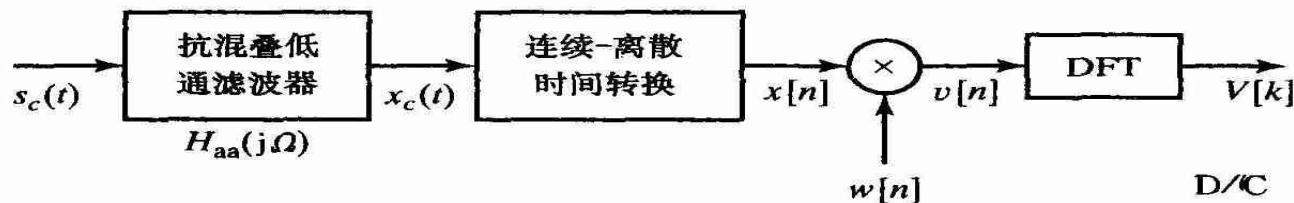




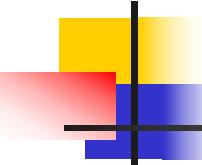


一、利用DFT的频谱分析

- DFT的主要应用之一是分析连续信号的频谱
 - 如语音信号频率分析用于音腔辨识与建模



- 实际信号不严格带限，并且自然界中总存在着噪声(其频谱是宽带的)，在采样之前需要加入抗混叠滤波器，使混叠减小到最低程度。
- 采样的速率则根据抗混叠滤波器的带宽来确定，满足采样定理。随后进行时域加窗和频域采样。



DFT对CTFT的逼近

- 连续时间非周期信号傅里叶变换为：

- $$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- 用DFT方法对该变换逼近：

时域离散化→时域截断

- 1、将 $x(t)$ 在**t轴上等间隔**（宽度为**T**）分段。

$$x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$$

- 则**CTFT**可以近似为: $X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \cdot T$

- 2、将序列 **$x(n)=x_c(nT)$** 截断成从**t=0**开始长度为 **$T_0=NT$** 的有限长序列，包含有**N个采样**，即时域加窗:

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

频域离散化→栅栏效应

3、由于数值计算限制，在频域上也只能计算离散点（频域抽样）上的数值。我们将频域的一个周期 f_s 中也分成N段，即 $f_s = NF_0$ 。频域采样点间隔为 F_0 。

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

$$X(jk\Omega_0) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT}$$

$$= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jn k \frac{2\pi F_0}{f_s}} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jn k \frac{2\pi}{N}}$$

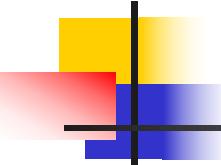
DFT对CTFS的逼近

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

- 时域抽样: $x(n) = x(nT) = x(t)|_{t=nT}$
- 取周期内的N个点, 即 $T_0 = NT$, 则傅立叶级数近似为:

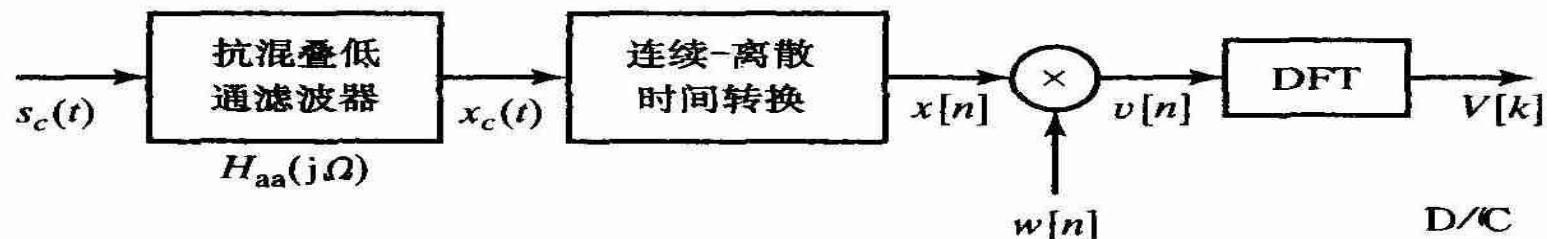
$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} DFT[x(n)]$$



Ex

- 考虑带限实信号 $x_c(t)$, 且当 $|\Omega| > 2\pi * 2500$ 时, $X_c(j\Omega) = 0$ 。利用上图中的系统来估计连续谱 $X_c(j\Omega)$ 。
- 1) 采样速率为**5000Hz**, 为了在尽可能少的基二**FFT**计算量的条件下使频谱采样的间隔不大于**10Hz**, 则所需要样本数**N**的最小值应为多少?
- 2) 若用上述采样率的数据, 截取了**1024**点做谱分析, 发现**320**点处有较大信号分量, 请问此频点是多少**Hz**?
- 3) 若用**512**点的**DFT**计算出 **$X(11)=2000*(1+j)$** , 请问 **$X(501)$** 频点处的**DFT**是多少? 同时请给出 $X_c(j\Omega)$ 在对应连续频点处的模拟频率值及频谱幅度。

加窗的影响---谱泄露+分辨率降低

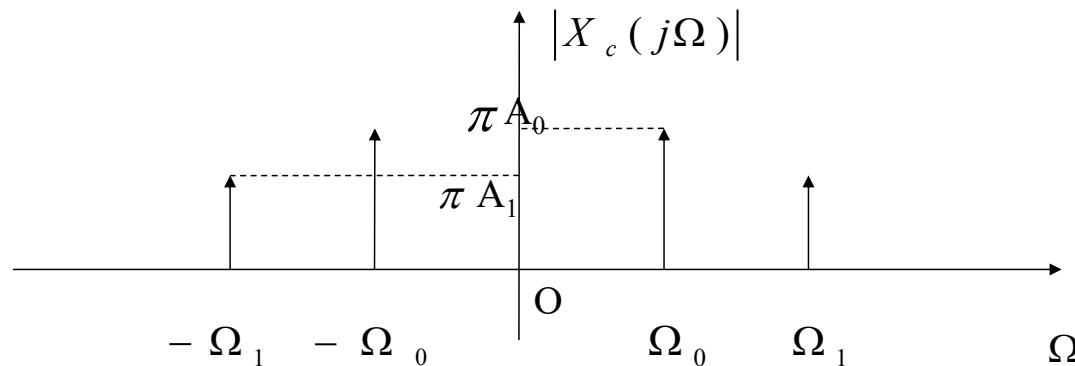


$$v(n) = x(n)w(n) = X_c(t) \Big|_{t=nT} \quad w(n) = X_c(t)w(t) \Big|_{t=nT}$$

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= X(j\omega) * W(j\omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega - j \frac{2\pi k}{T}) \Big|_{\Omega=\omega/T} \right] * W(j\omega) \\ &= \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{cw}(j\Omega - j \frac{2\pi k}{T}) \Big|_{\Omega=\omega/T} \right] \quad X_{cw}(j\Omega) = X_c(j\Omega) * W(j\Omega) \end{aligned}$$

正弦信号加窗分析

- 观察由两个正弦分量组成的连续时间信号在加窗之下的**CTFT**频谱。令信号为：
- $X_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1)$
- 其傅立叶变换有两个频率，四个对称频点：



采样DTFT没有导致频谱畸变

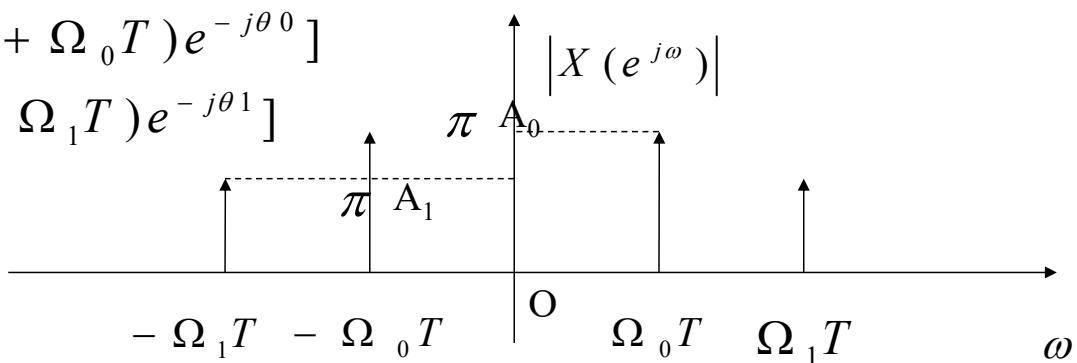
- 无失真采样后：

$$x(n) = A_0 \cos(\Omega_0 n T + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 n T + \theta_1)$$

- 其频谱为：

$$X(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} &= \pi A_0 [\delta(\omega - \Omega_0 T) e^{j\theta_0} + \delta(\omega + \Omega_0 T) e^{-j\theta_0}] \\ &+ \pi A_1 [\delta(\omega - \Omega_1 T) e^{j\theta_1} + \delta(\omega + \Omega_1 T) e^{-j\theta_1}] \end{aligned}$$

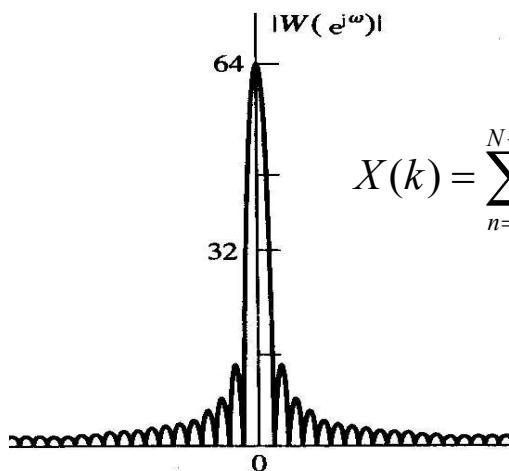


■ 加窗后DTFT谱形状产生畸变

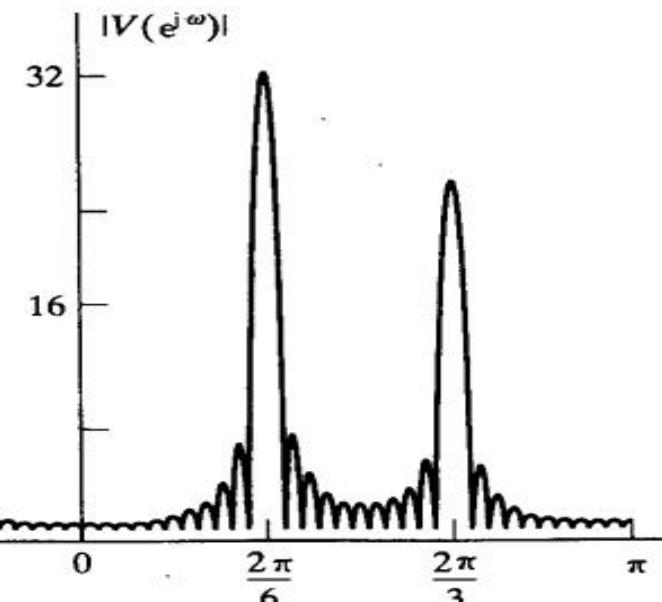
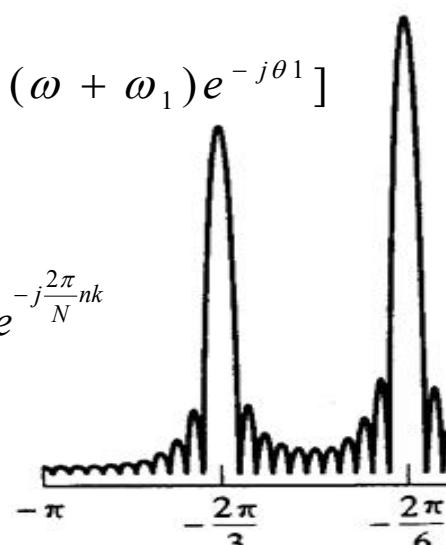
若两处峰值分别为32和24，请问两个频率分量的幅度A0,A1分别是多少？

$$V(e^{j\omega})$$

$$= \frac{A_0}{2} [W(\omega - \omega_0)e^{j\theta_0} + W(\omega + \omega_0)e^{-j\theta_0}] \\ + \frac{A_1}{2} [W(\omega - \omega_1)e^{j\theta_1} + W(\omega + \omega_1)e^{-j\theta_1}]$$



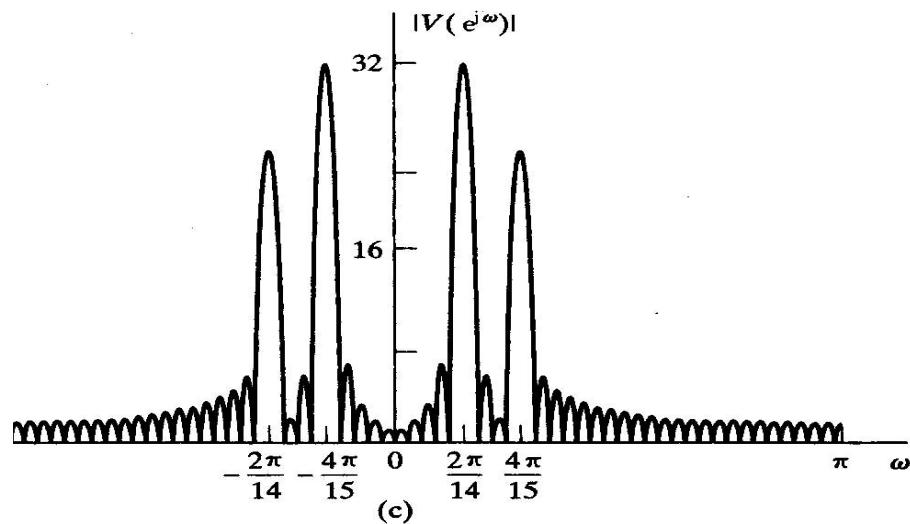
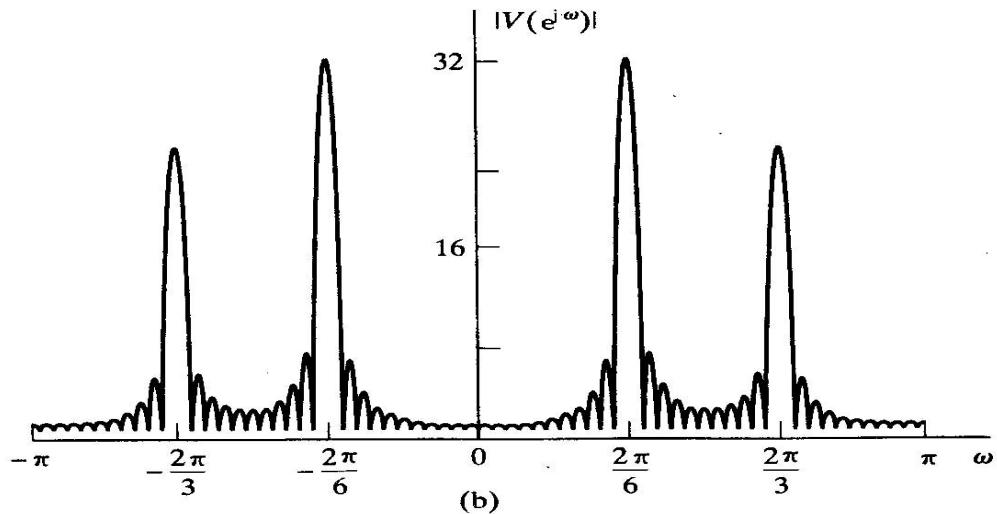
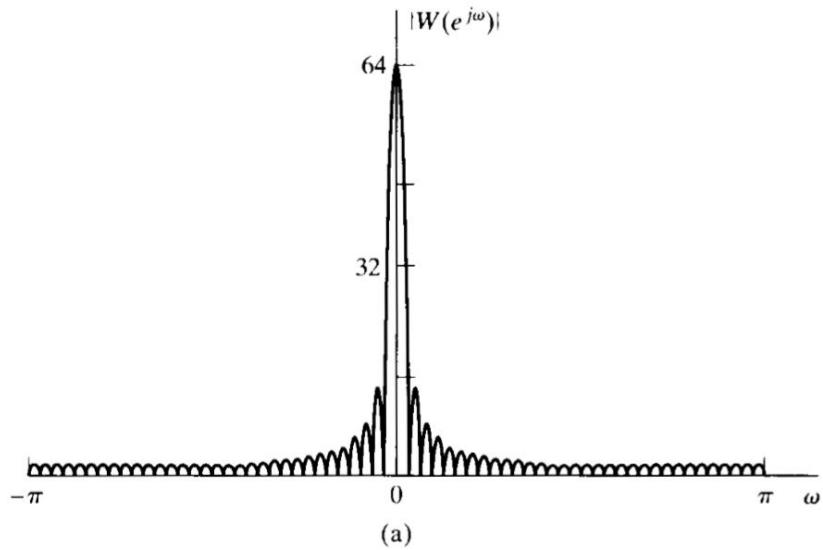
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



$A_0=1 \quad A_1=0.75$

频谱泄漏

- 时域上的截断（相乘），在频域上表现为周期卷积，这将会对信号的频谱起平滑和能量的分散，即**频谱泄漏**。



分辨率降低

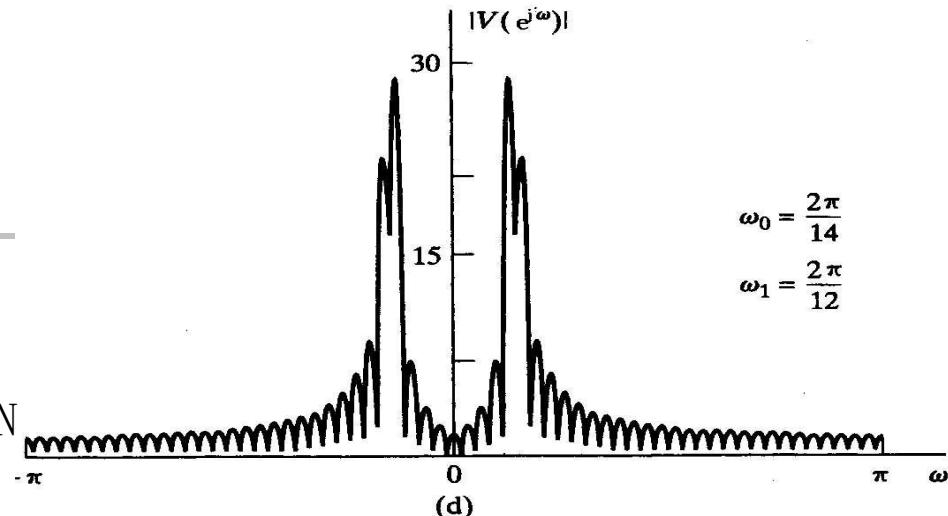
- 加窗使得频谱平滑或展宽，降低了频率上靠近的正弦信号的**分辨能力**
- 分辨力取决于窗函数的主瓣宽度 $2\pi/N$ 其对应的模拟带宽为：

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N T} = \frac{2\pi}{L}$$

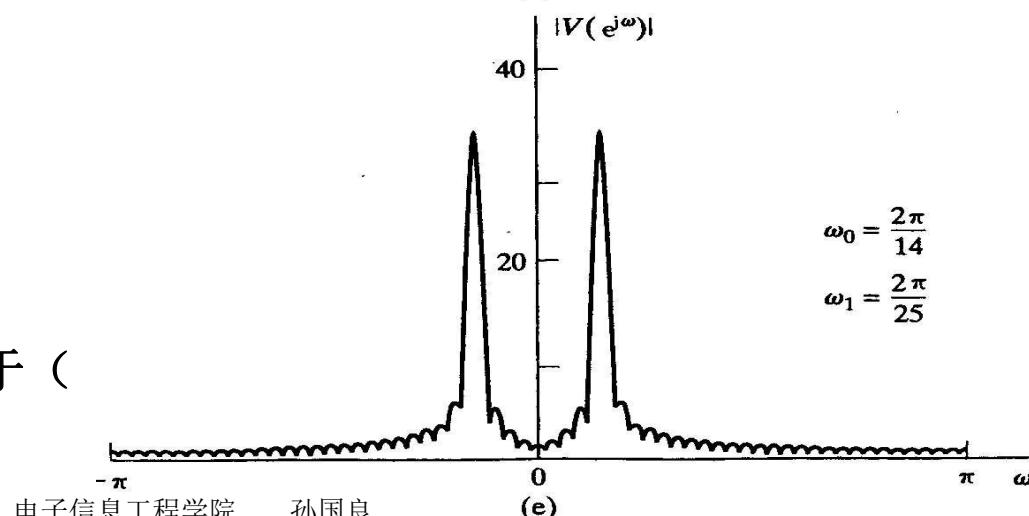
- 模拟频率**分辨率 (HZ)** 定义为

$$\Delta = \frac{1}{L}$$

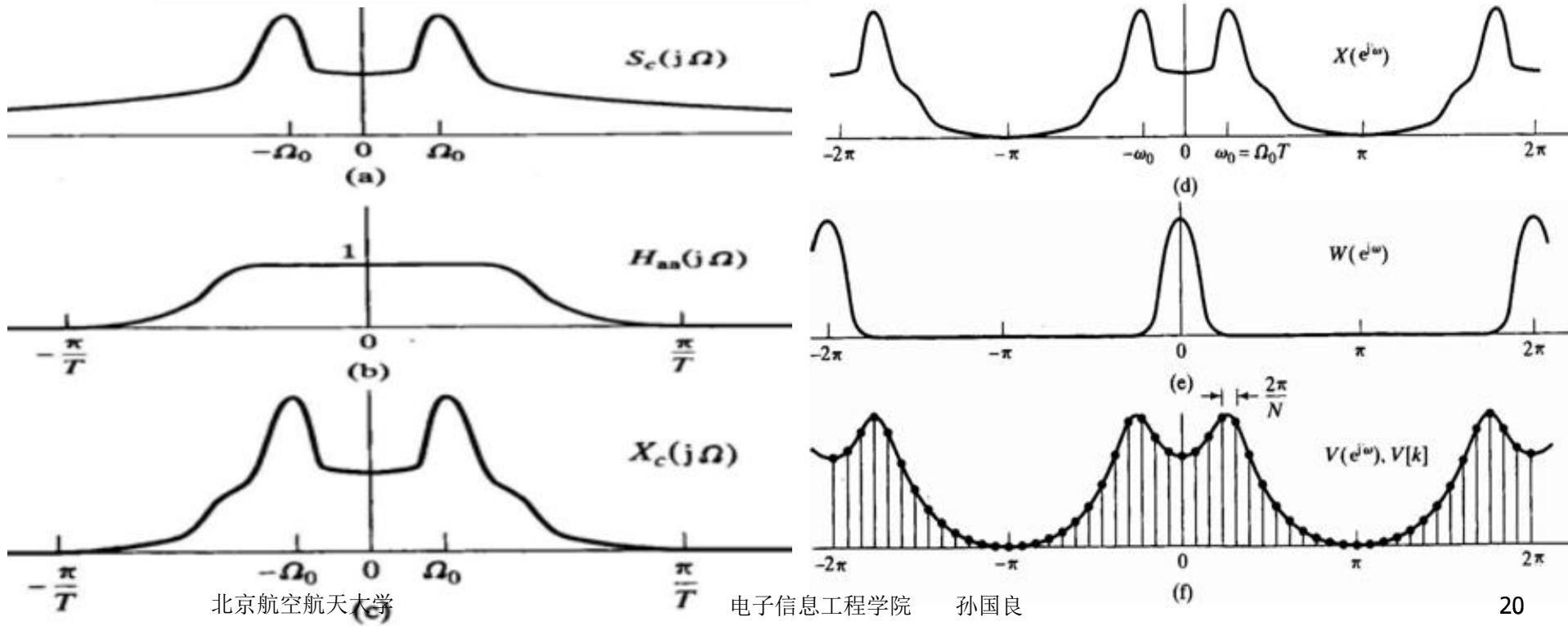
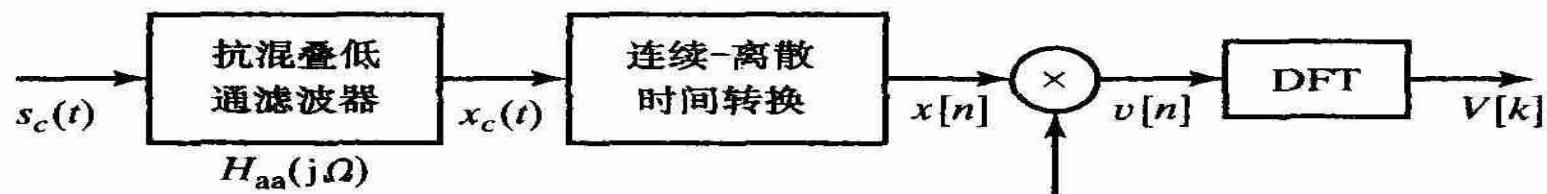
- 物理含义：频率的分辨能力取决于（**有效**）时间窗的长度



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{14}$$
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{14}$$
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{25}$$



北京航空航天大学

电子信息工程学院

孙国良

20

DFT谱采样---栅栏效应

- DFT计算频谱是DTFT连续谱采样，只能看到真实频谱的离散点，称之为“**栅栏效应**”。
- 离散信号的离散频率值

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

- 由于采样的缘故，所得到的**离散频率** ω 信号的**原始频率** Ω 之间的关系为： $\omega = \Omega T$
- 所以对应于信号的**连续域频率**为：

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2\pi}{N} k = \frac{2\pi F_0}{f_s} k = \Omega_k T \\ \Omega_k &= \frac{\omega_k}{T} = k \frac{2\pi}{NT} = \frac{k}{N} \Omega_s \Rightarrow f_k = \frac{k}{N} f_s\end{aligned}$$

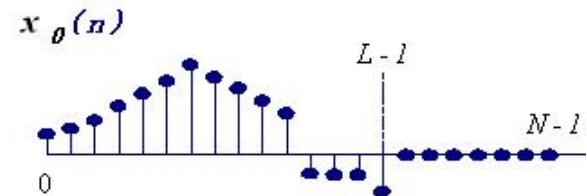
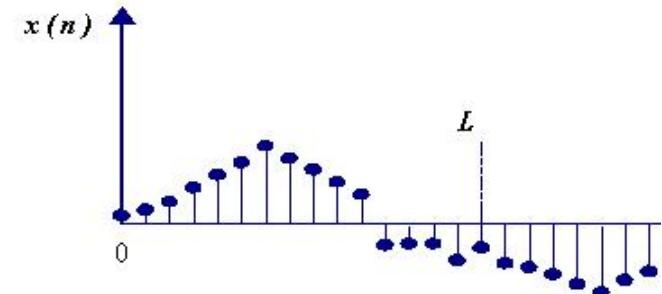
数字频率步进！=频率分辨率

- DFT所计算频点间隔（频率步进）：

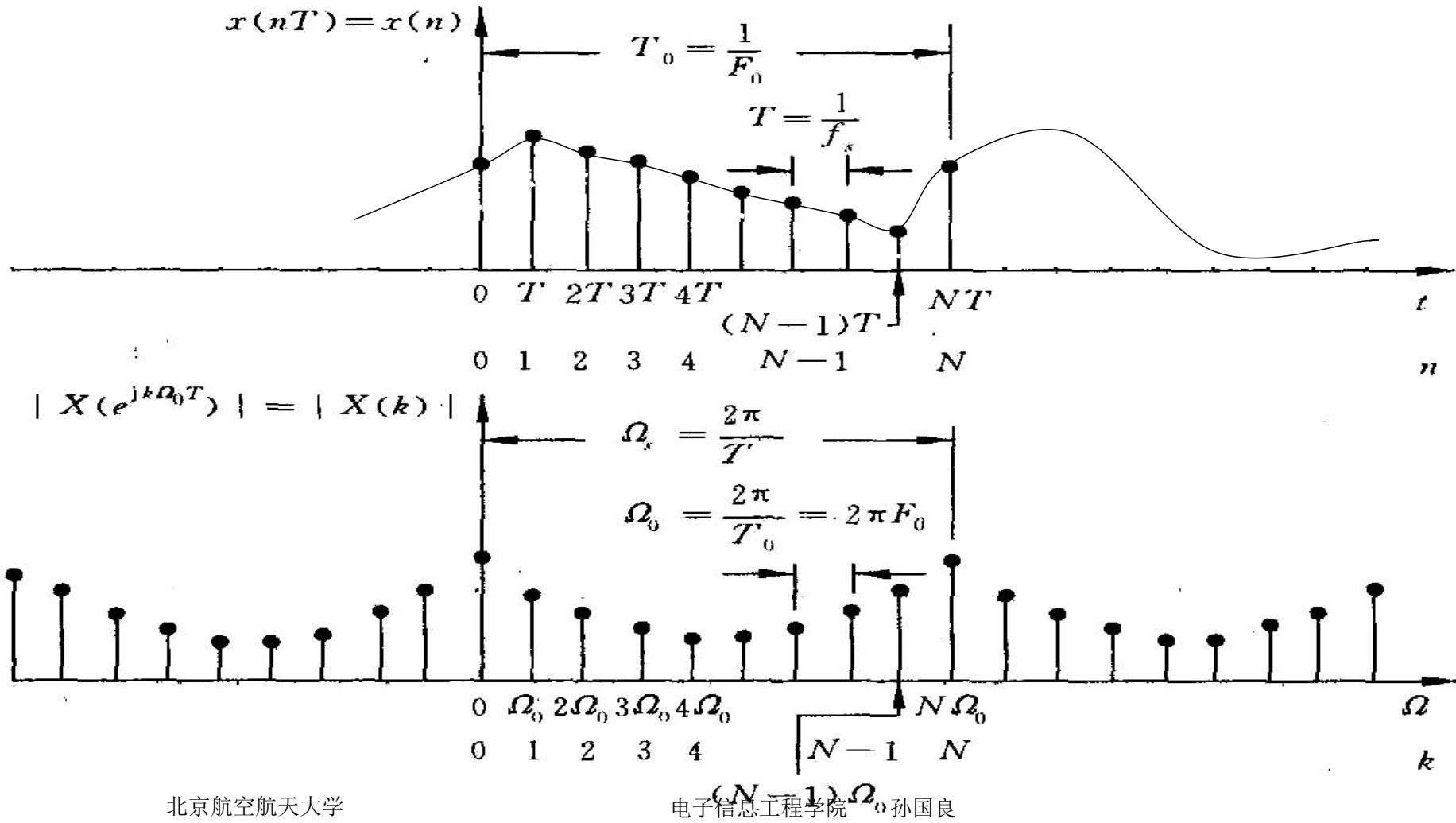
$$f_k = \frac{k}{N} f_s \quad \Delta f = \frac{f_s}{N} =$$

- 数字频率步进率和频率分辨率虽然形式上相同，但其存在根本区别，之间没有必然联系。

- 有效时间窗不变的情况下，通过对有效数据补零的方法，可以提高数字频率的分辨率，减小栅栏效应。但不能提高模拟频率分辨率。
- 有效时间窗固定不变时，采取加密采样点数N，减小采样周期T是不能提高模拟频率分辨率，也不能提高数字频率步进率。



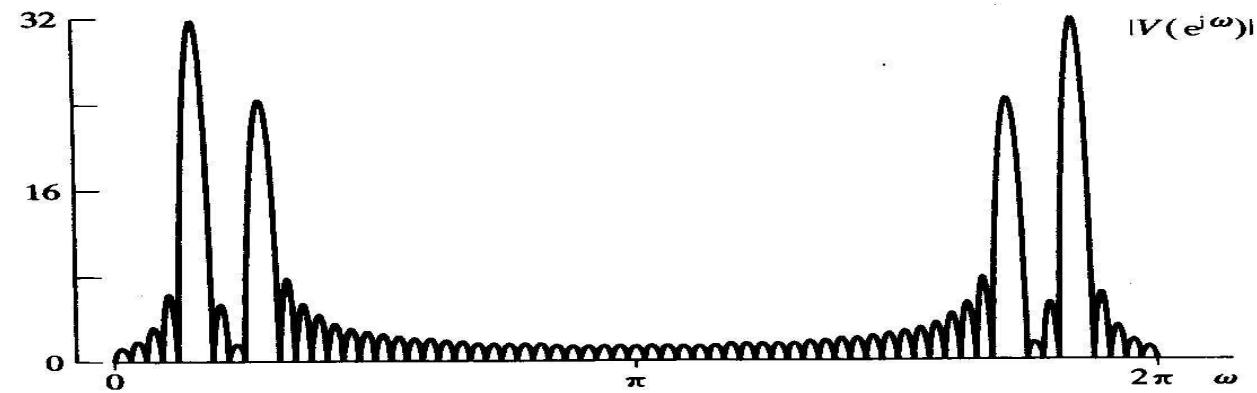
$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N T} = \frac{2\pi}{L}$$



栅栏效应对频谱的“失真”

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{16} = \frac{2\pi}{64} * 4$$

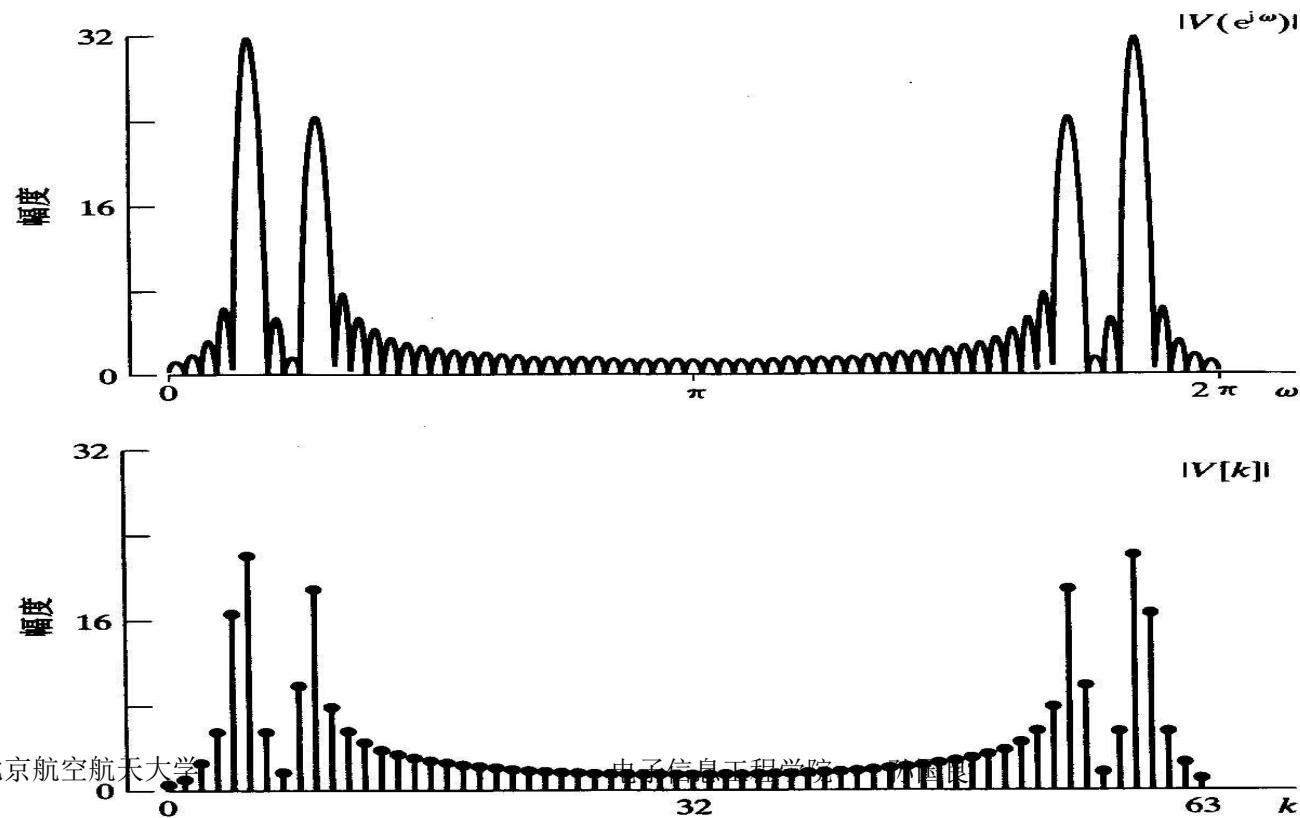
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{8} = \frac{2\pi}{64} * 8$$



纯净的‘假象’
信号谱位于过零点
处

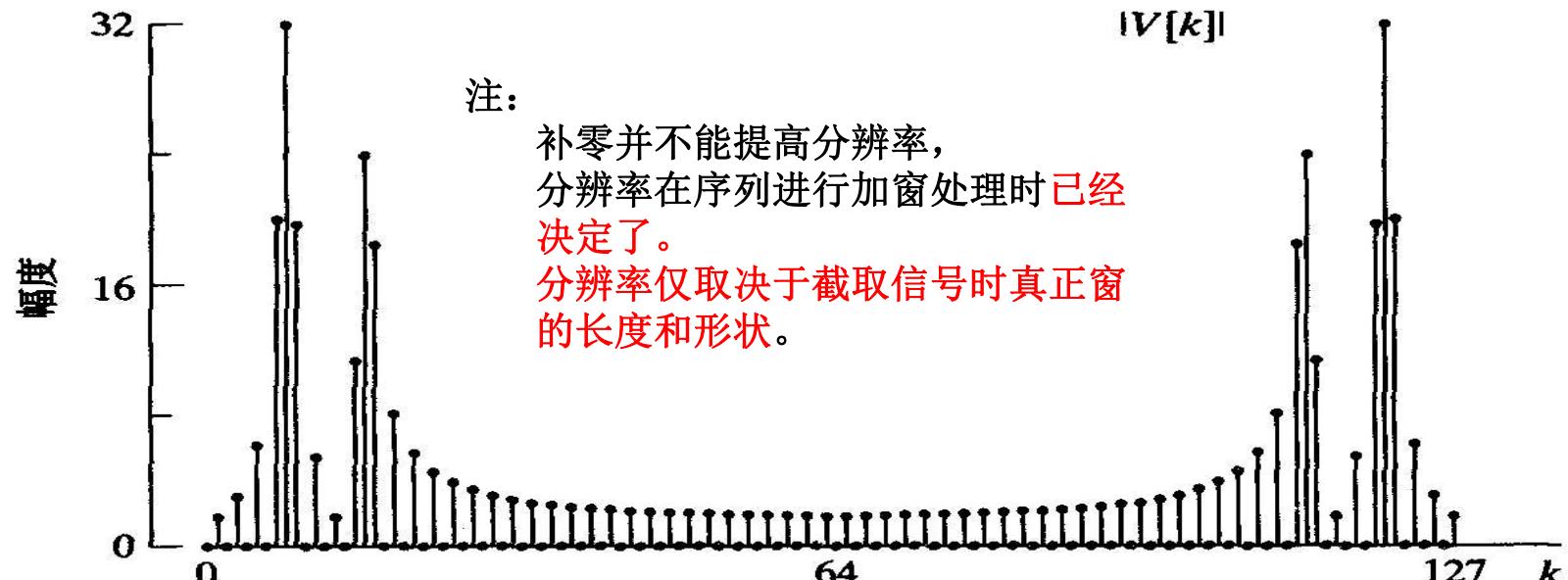


信号频谱不过零点时，衍生杂余分量



补零减弱栅栏效应，逼近真实

- 用序列补零将频谱采样点增加为**128**



频谱分析性能对时间窗的要求

- 分辨率降低和频谱泄漏是信号加窗的两种影响。
 - 分辨率主要受窗函数**主瓣宽度**的影响；
 - 频谱**泄漏**主要指副瓣能量泄漏，一般不指主瓣能量的泄漏，主要取决于窗函数的主瓣和副瓣幅值**相对比例**。
- 进行频谱分析时，往往希望有**高分辨率和小的频谱泄漏**，也就是希望**时间窗有小的主瓣宽度和相对小旁瓣幅度**。
 - 在具体选择窗函数时，要在两者之间进行**折衷**。
 - 矩形窗函数在给定长度时具有最小的主瓣宽度，但是却有最大的相对旁瓣幅度。

频谱分析用的可调时间窗---凯泽窗

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2})}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad \alpha = \frac{N - 1}{2}$$

- Kaiser和Schafer证明，相对旁瓣幅度 A_{sl} 基本上与窗长度 N 无关，只取决于窗的形状参数 β ，它们之间的近似表达式为：

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609 (A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834 (A_{sl} - 13.26) & 13.26 < A_{sl} < 60 \\ 0.12438 (A_{sl} + 6.3) & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$

- 主瓣宽度 Δ_{ml} 主要取决于窗的长度 N 。主瓣宽度、相对旁瓣幅度和窗长度之间的折衷关系的近似表达式为：

$$N \approx \frac{24 \pi (A_{sl} - 12)}{155 \Delta_{ml}} + 1$$

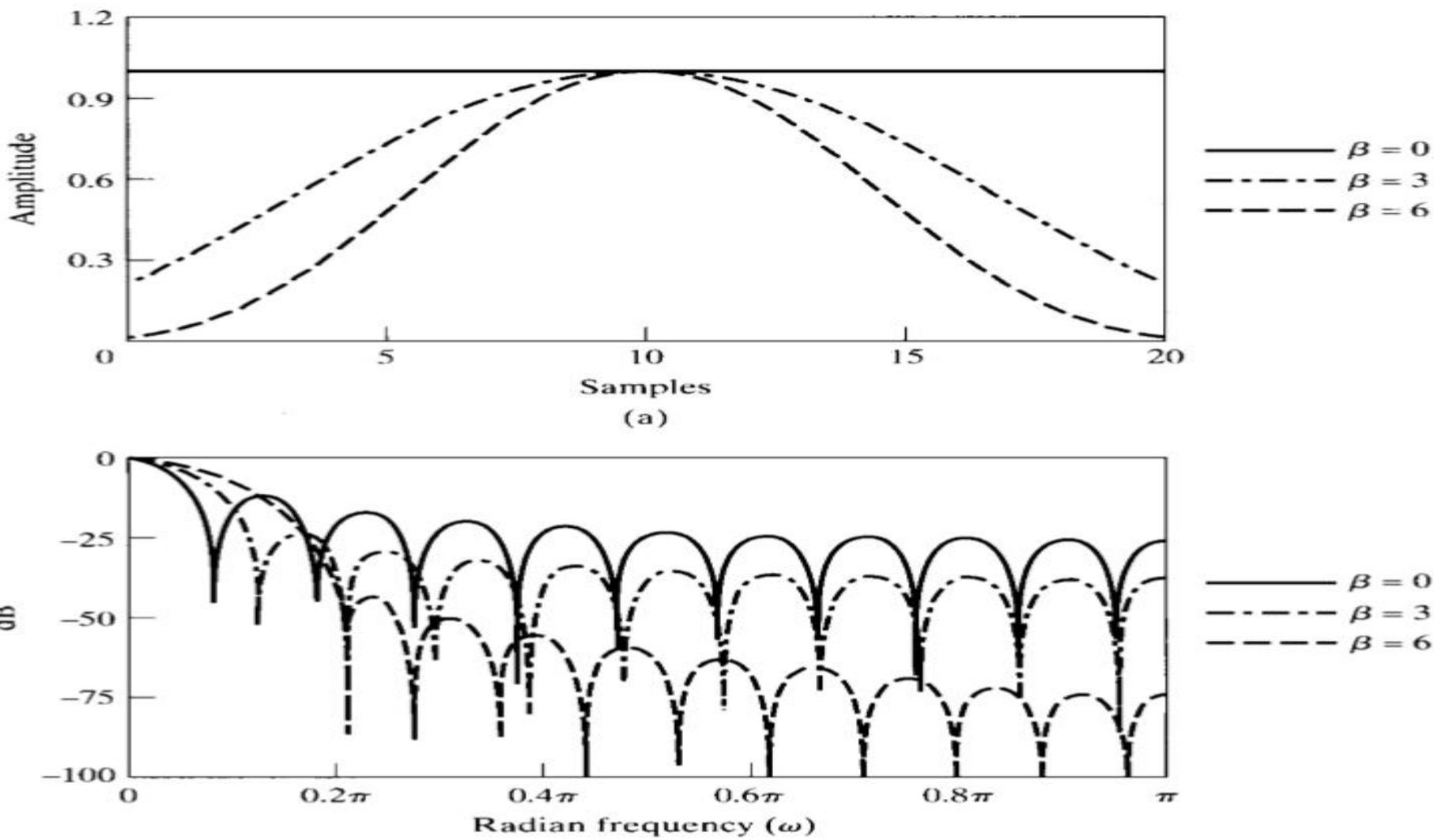
信号分析与滤波器设计的区别

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609 (A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834 (A_{sl} - 13.26) & 13.26 < A_{sl} < 60 \\ 0.12438 (A_{sl} + 6.3) & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$

$$N \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

$$M = \frac{\delta_2 - 7.95}{2.286 \Delta w}$$

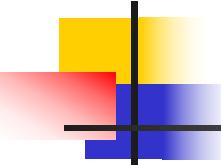
$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (\delta_2 - 8.7), \delta_2 \geq 50 dB \\ 0.5842 (\delta_2 - 21)^{0.4} + 0.07886 (\delta_2 - 21), 21 dB < \delta_2 < 50 dB \\ 0, \delta_2 \leq 21 dB \end{cases}$$



DFT分析参数的选取

- 信号的分析，并不是在**NT=L**为固定值的情况下，**N**、**T**就可以任意取值。
 - 如果**N**太小，**T**太大，则无法完成信号的谱分析；
 - 若**N**太大，**T**太小，加大了运算量而且没必要。
 - 那么什么样的**N**、**T**选择比较合适呢？
- **T**的选取要满足无失真采样的条件：
 - 当信号是带限未知时，**T**越小越好；在信号带限已知时， $T < \frac{1}{2f_H}$ 。
 - 在此基础上再确定**N**，要留有一定的余度。

$$f_H = f_c + \frac{1}{L}$$



Ex

- 考虑带限连续信号 $x_c(t)$, 且当 $|\Omega| > 2\pi * 2500$ 时, $X_c(j\Omega) = 0$ 我们要利用上图中的系统来估计连续时间谱 $X_c(j\Omega)$ 。
- 为了在尽可能少的基二**FFT**计算量的条件下使模拟频率的分辨率不大于**10Hz**, 则所需要截断多长的信号段? 采样周期**T**为何值? 样本数**N**的最小值应为多少?

- 解：由于要求模拟频率的分辨率不大于**10Hz**，所以：

$$\Delta_s = \frac{1}{L} \leq 10$$

- 截取的信号段**长度**至少为：**0.1**秒。为了采样不使信号**失真**，则由采样定理可知：

$$T \leq 0.0002 \text{ s}$$

- 从而**采样周期** $f_s \geq 2 * 2500 \text{ Hz}$ ，在**0.1**秒内只能采到**500**个点。所以**样本数**的最小值为：**500**。
- 为了利用**FFT**，采样点数应为**512**
 - 可以多采**12**个数据，也可以采用补零的方法

二、利用DFT(FFT)实现LTI系统(FIR)

- 出发点：

- 线性时不变系统可以用线性卷积和来实现和描述；
- 圆周卷积和在满足一定约束的条件下可以得到线性卷积；
- 圆周卷积和可以利用DFT来完成
- DFT可以用FFT快速计算

$$\xrightarrow{x(n)} \boxed{h(n)} \xrightarrow{y(n)} y(n) = x(n) * h(n)$$

$$X(k) = DFT[x(n)]$$

$$H(k) = DFT[h(n)]$$

$$y(n) = IDFT[X(k)H(k)]$$

存在的问题

- 1) 输入信号无限长（如语音滤波）。
- 2) 尽管可以存储长时间的输入信号，但其DFT实现不现实
 - 输入和冲激响应长度严重不对称，需要大量补零，浪费运算量；
 - 采集完所有输入样本后才能计算滤波输出，导致有很大的处理延迟，损失实时性；

解决方法

- 采用块卷积
 - 将输入信号分割成多段，
 - 对每段信号进行DFT处理
 - 适当处理后进行衔接
- 块卷积方法
 - 重叠相加法
 - 重叠保留法

1) 重叠相加法 (Overlap)

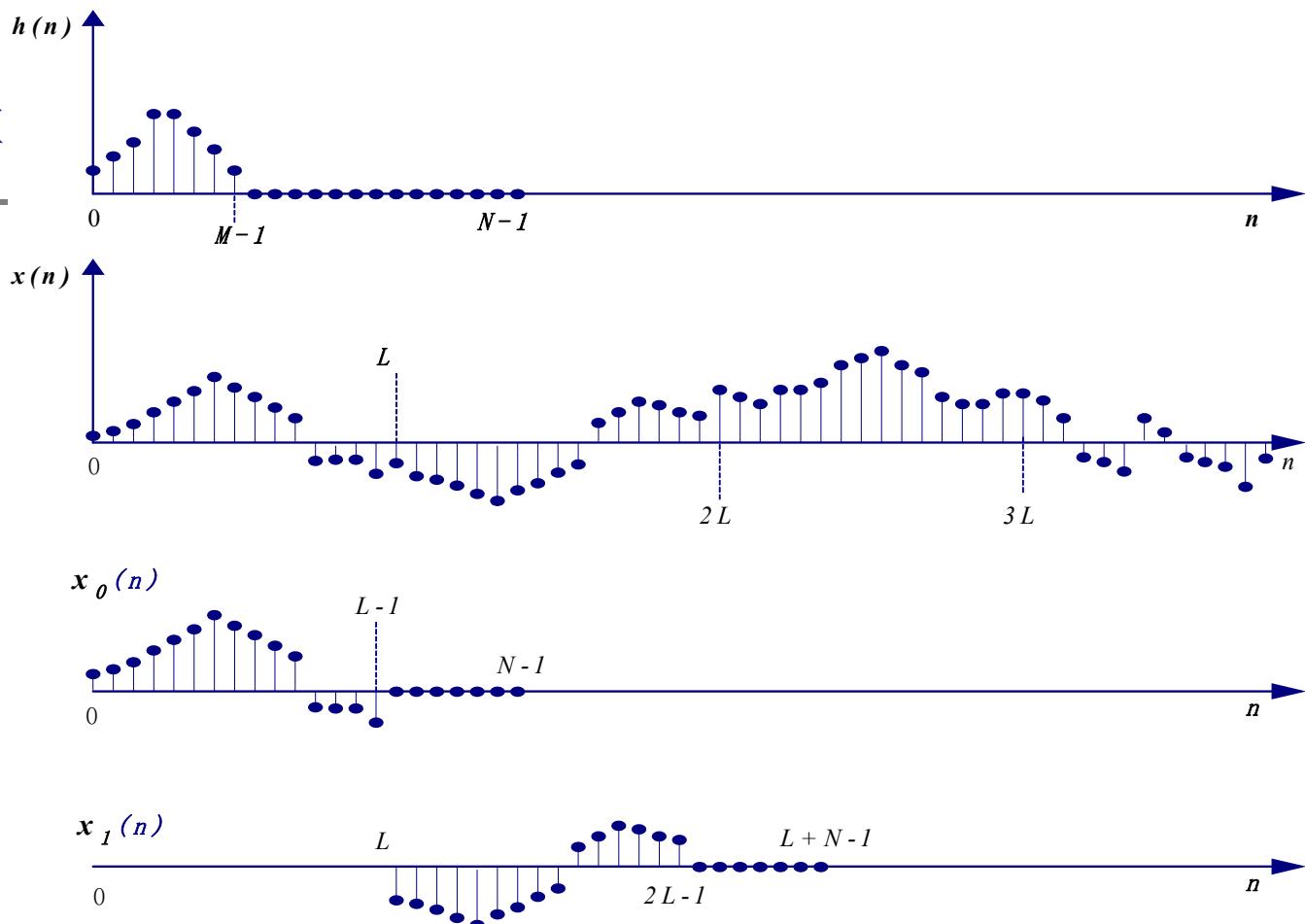
- 设 $h(n)$ 的点数为 M , $x(n)$ 为很长的序列。
 - 将 $x(n)$ 分解为很多段, 每段为 L 点,
 - L 选择成和 M 的数量值级相同
 - 用 $x_i(n)$ 表示第 i 段:

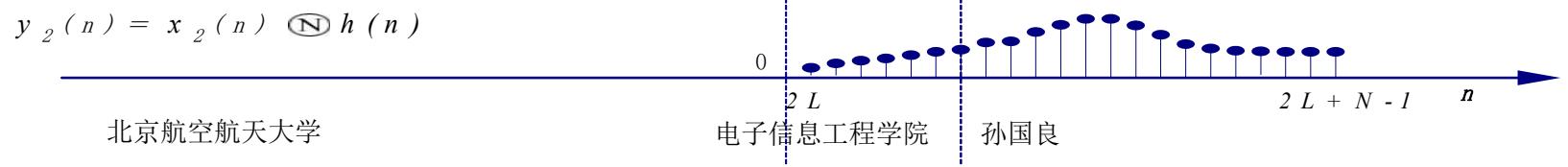
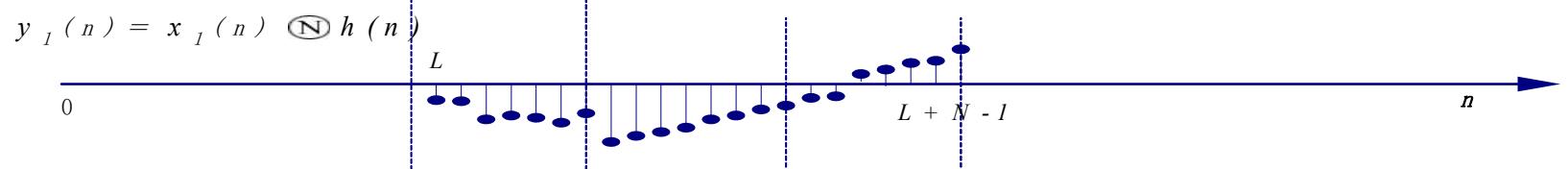
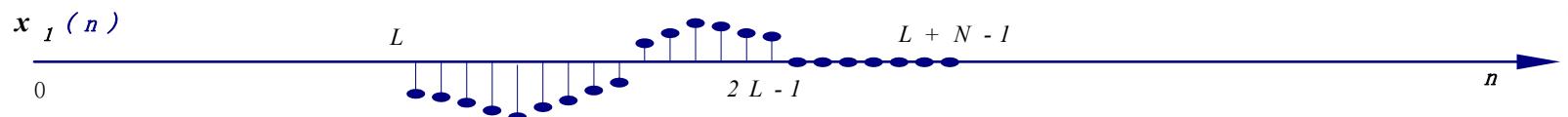
$$x_i(n) = \begin{cases} x(n), & iL \leq n \leq (i+1)L - 1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) \quad y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) * h(n)$$

输出重叠

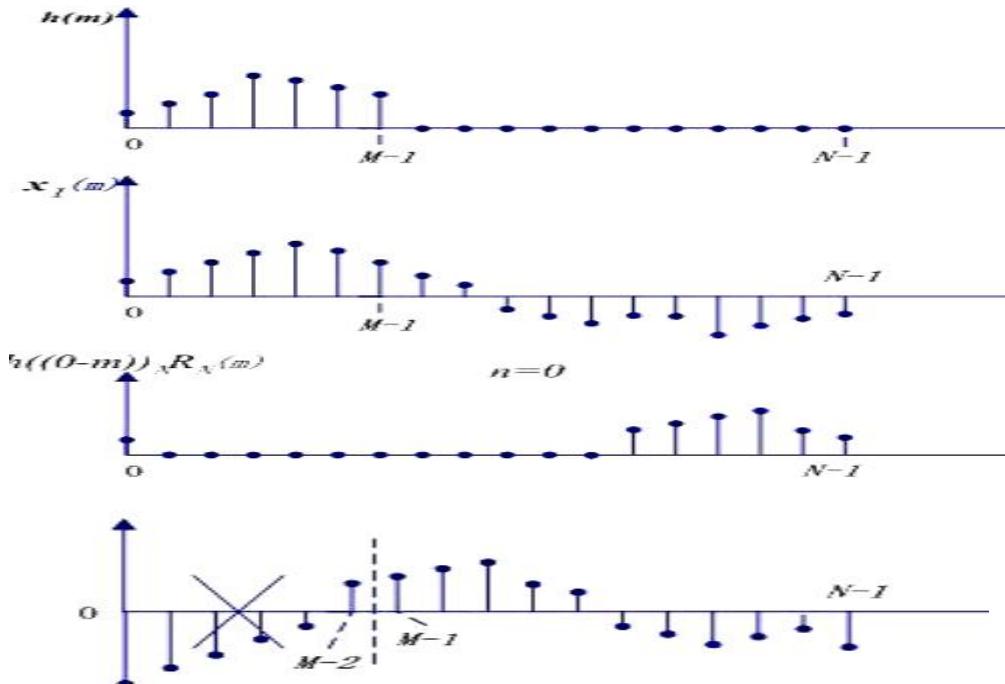
- $h(n)$ 为 M 点
- $x_i(n)$ 为 L 点
- $y_i(n)$ 为 $(L+M-1)$ 点 (设 $N=L+M-1$) ,
- 相邻输出序列 $y_i(n)$, $y_{i+1}(n)$ 必然有 $(M-1)$ 个点发生重叠

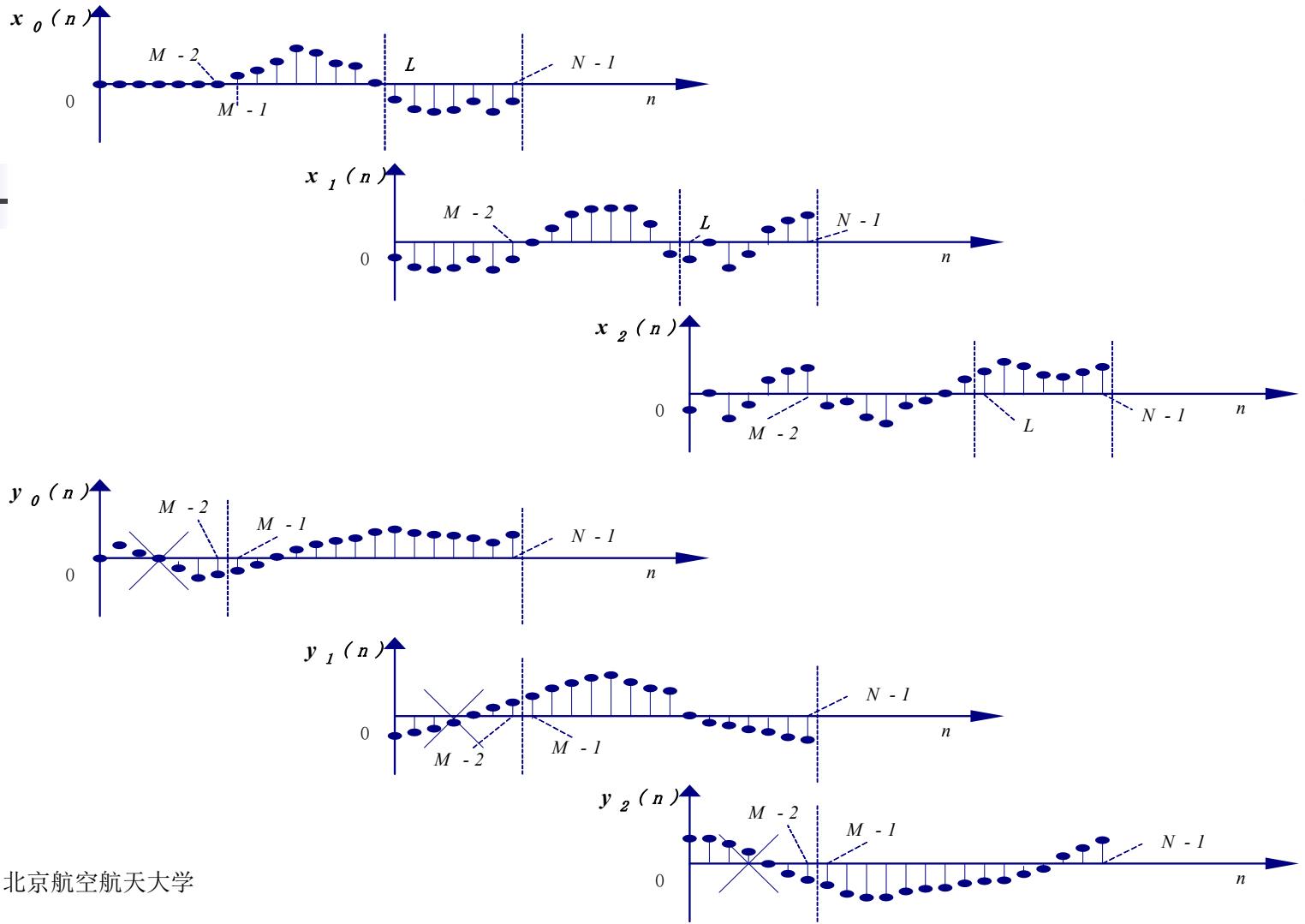




2) 重叠保留法(Oversave)

- $x(n)$ 分段，每段L个点
- 输入序列 $x_i(n)$ 中不再补零，而是在每一段的前边补上前一段保留下来的 $(M-1)$ 个输入序列值，组成 $L+M-1$ 点序列。
- 每段圆周卷积结果的前 $(M-1)$ 个点的值
 - 不满足因果系统的要求，
 - 不等在线性卷积值





作业

- 10.1
- 10.4
- 10.5
- 10.9





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

Chapter 6

6.1



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第五章

Contents

数字滤波器设计与实现

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



—

滤波器设计基础



—

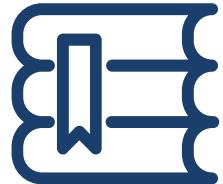
IIR滤波器设计



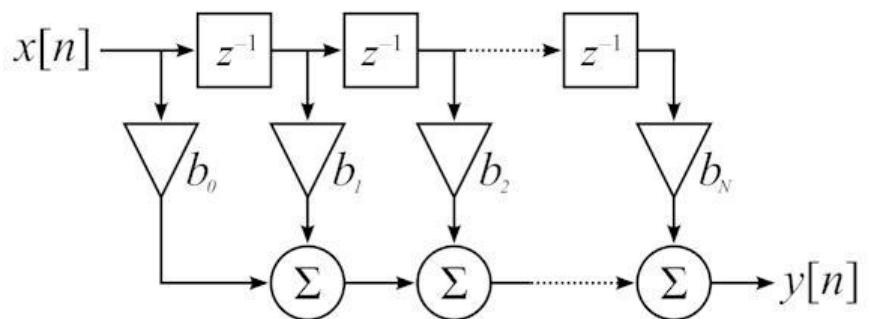
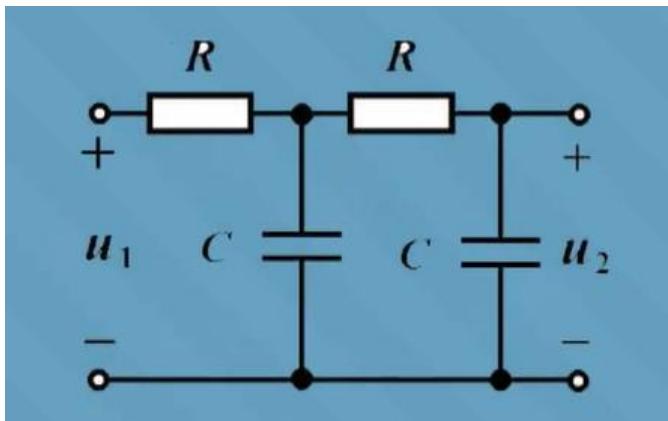
—

FIR滤波器设计

滤波器设计基础



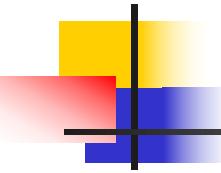
- ◆ 滤波器定义
- ◆ 滤波器分类
- ◆ 性能指标
- ◆ **设计方法**
- ◆ 滤波器实现结构



电子信息工程学院 孙国良

5.1 滤波器设计基础

- 滤波器定义：
 - 线性时不变系统的时域卷积和特性导致系统在频域上对输入信号的滤波特性
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$
 - 滤波主要是指幅度特性的改变
- 滤波器作用：
 - 增强某一频段信号，衰减另一频段
 - 有用信号提取，噪声及干扰的滤除等
- 滤波器分类
- 频段内**幅度特性**
 - 低、高通滤波器
 - 带通、阻滤波器
- 冲激响应时限特性
 - “无限长冲激响应系统”，**IIR系统**；
 - “有限长单位冲激响应系统”，**FIR系统**



滤波器设计步骤

- 1、按照任务要求，确定滤波器的性能指标
- 2、用一个因果稳定的离散线性时不变系统按照某一准则去逼近所要得到的性能指标
 - 可以选用**IIR**滤波器→**IIR**滤波器设计
 - 也可选用**FIR**滤波器→**FIR**滤波器设计
- 3、利用有限精度，选择合适的**系统结构**来实现
 - 软件实现
 - 硬件实现

滤波器性能指标

- 滤波器设计是按照某一准则去逼近想要实现的系统，要求对系统进行一定的描述和要求，就是滤波器的性能指标。
 - 滤波器性能要求，主要以频率响应的幅度特性的容差来表征。
 - 增益和衰减是滤波器的重要性能参数，其定义如下：

$$\text{增益: } G = 20 \lg |H(e^{j\omega})|$$

$$\text{衰减: } D = -G = -20 \lg |H(e^{j\omega})|$$

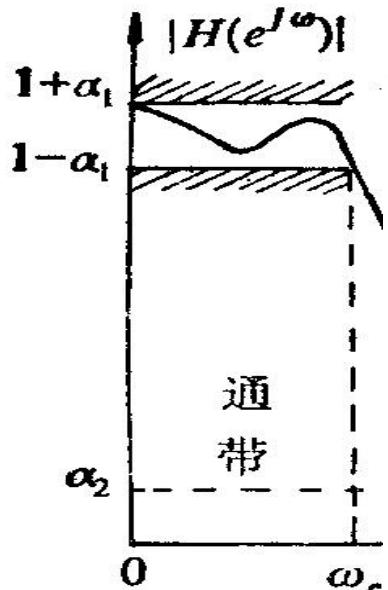
通带指标

- 在**通带**中，滤波器的幅度响应以误差 $\pm \alpha_1$ 逼近**1**，这部分误差称为**通带容限**，或者表示为**通带波纹** R_P 、**通带最大衰减** δ_1

$$1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \alpha_1$$

$$R_P = -20 \lg \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1} \right)$$

$$\delta_1 = 20 \lg \underbrace{\left| \frac{1}{H(e^{j\omega_c})} \right|}_{\text{归一化滤波器}} = -20 \lg (1 - \alpha_1) = 20 \lg \underbrace{\left| \frac{H_{\max}(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega_c})} \right|}_{\text{一般情况}}$$

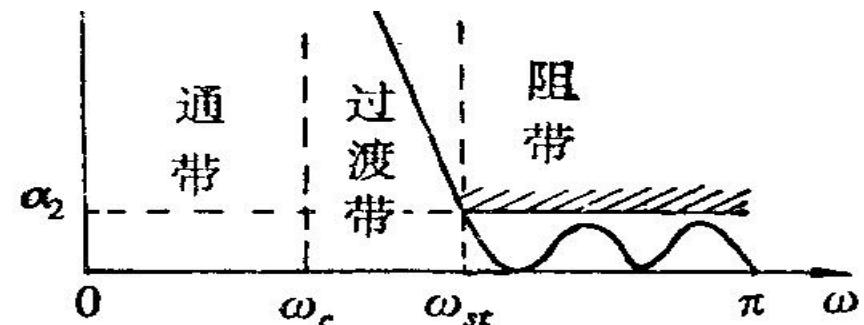


阻带指标

- 同理，在阻带中，滤波器的幅度响应应以误差 α_2 逼近0，这部分容差称为阻带容限，或者表示为阻带波纹 δ_2 、阻带最小衰减 A_s ：

$$0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$$

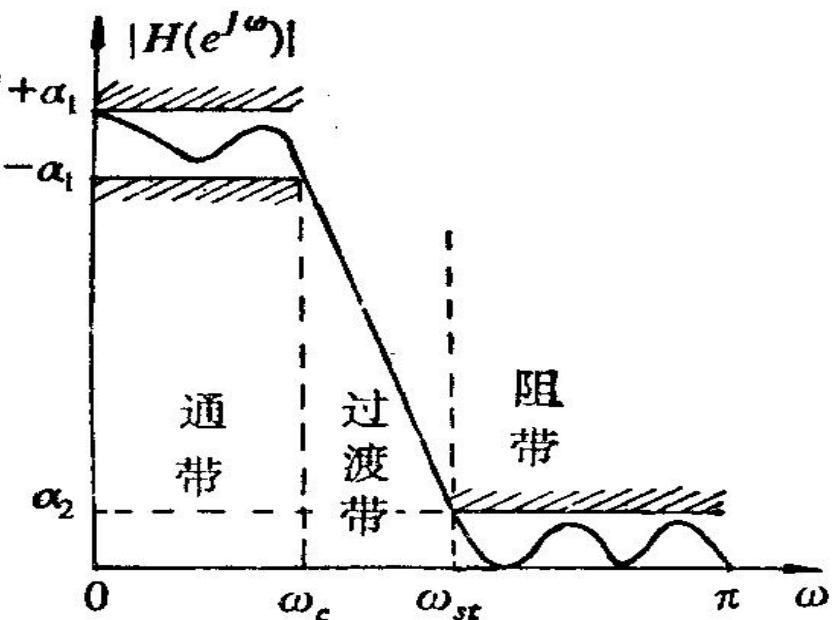
$$\delta_2 = A_s = -20 \lg(\alpha_2)$$



注意

- 通带截止频率在低通情况下为一数值而在带通情况下为一向量。
- 通常对过渡带的宽度有所要求，而对过渡带内的特性不做要求。
- 数字指标和模拟指标的对应关系

$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s}$$



离散时间系统结构

- 有理LTI系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$Y(z) = \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

- 研究系统结构的出发点：
 - 同一个离散时间系统，可以用不同结构来实现
 - 不同运算结构，存贮单元和乘法次数不同，即实现的复杂性和运算速度不同
 - 不同运算结构性能及工程适用性不同

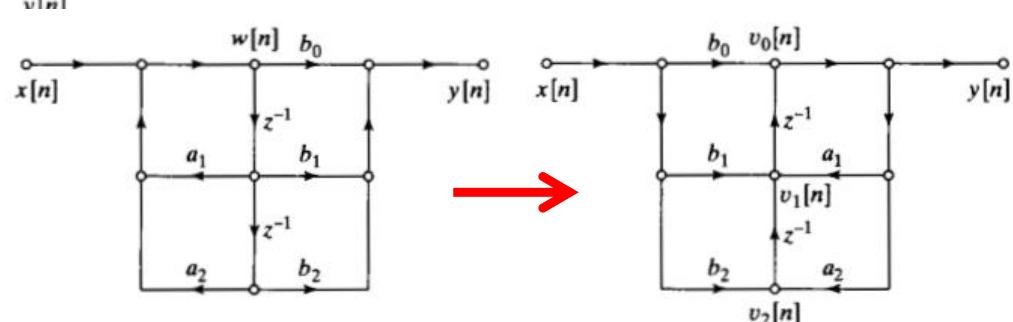
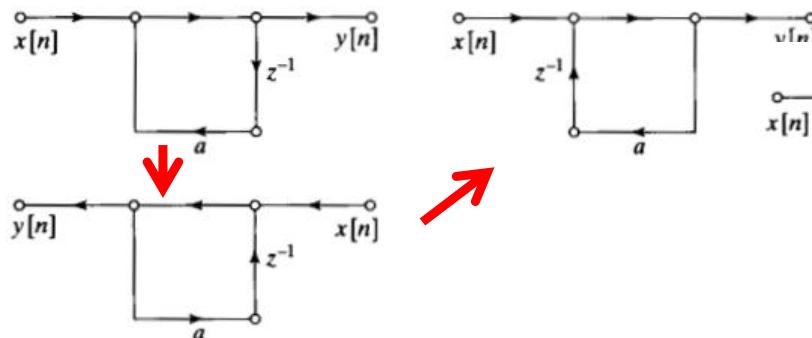
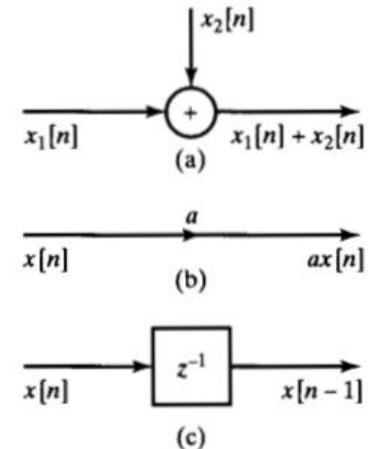
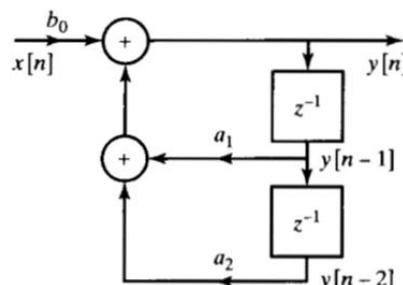
系统构成及表示

- 基本运算: 单位延时, 比例乘, 相加

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n].$$

- 转置定理: 输入输出及支路方向逆转



FIR及IIR系统

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

■ **FIR:** $H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$ $h(n) = b_n (n = 0, M)$

- 在有限Z平面内没有极点，只有零点
- 系统的单位冲激响应将是有限长序列
- 系统结构无反馈环节 → 前馈
- 也称为全零点或滑动平均系统（MA系统）。

■ **IIR:** $a_k \neq 0$ $y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$

- 在有限Z平面内有极点
- 单位冲激响应为无限长序列
- 系统结构存在反馈环节，需要递归运算；
- 分子只有常数项 b_0 ，此时有限Z平面内只有极点，称为全极点或自回归系统（AR系统），否则称之为自回归滑动平均系统（ARMA系统）

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

4.2.2 IIR滤波器的基本结构

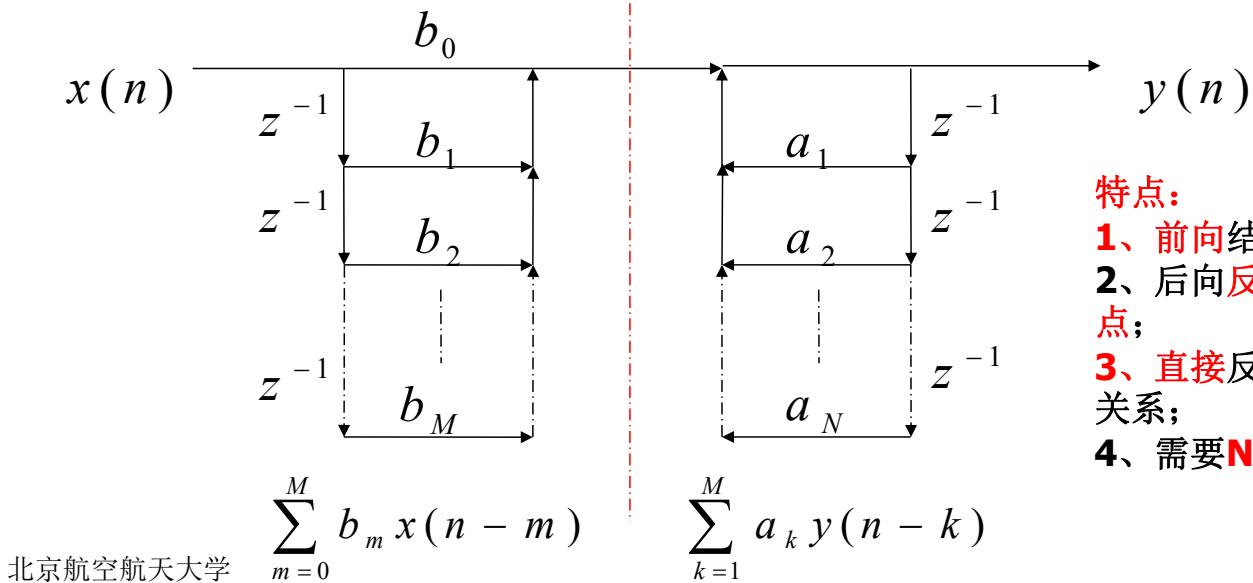
- IIR滤波器主要**特点**是:
 - 1) $h(n)$ 为无限长序列;
 - 2) $H(z)$ 在**有限Z平面上存在极点**;
 - 3) 实现结构上存在反馈环节, 必须采用递归型结构实现。
- IIR滤波器的结构主要有:
 - 直接I型、II型、级联型、并联型四种

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

一、直接I型

- 系统差分方程:
- 容易直接得到:

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$



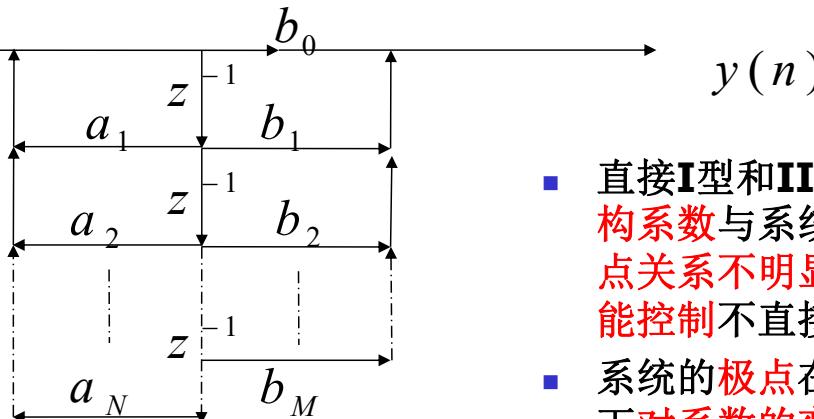
特点:

- 1、前向结构实现系统函数的零点；
- 2、后向反馈网络，实现系统的极点；
- 3、直接反映差分方程和系统参数关系；
- 4、需要N+M级延时。

二、直接II型

- 交换其级联子系统的次序，系统函数不变。合并相同延时支路，称为**直接II型**结构或**典范型**结构。

$x(n)$



$y(n)$

- 仍能**直接**反映差分方程和系统参数关系；
- 对于**N**阶差分方程只需**N**个延时单元（系统满足**N≥M**），
- 比直接I型节省存储单元（软件），或节省寄存器（硬件）
- 实现**N**阶滤波器所需的最少延时单元结构，因而又称**典范型**。

- 直接I型和II型共同缺点是**结构系数**与系统函数的零、极点关系不明显，对滤波器性能控制不直接。
- 系统的**极点**在某些临界条件下**对系数的变化过于灵敏**，从而使系统频率响应对系数的变化过于灵敏，对有限精度（有限字长）运算容易出现**不稳定或较大误差**。

三、级联型

- 系统函数按进行因式分解后得到：

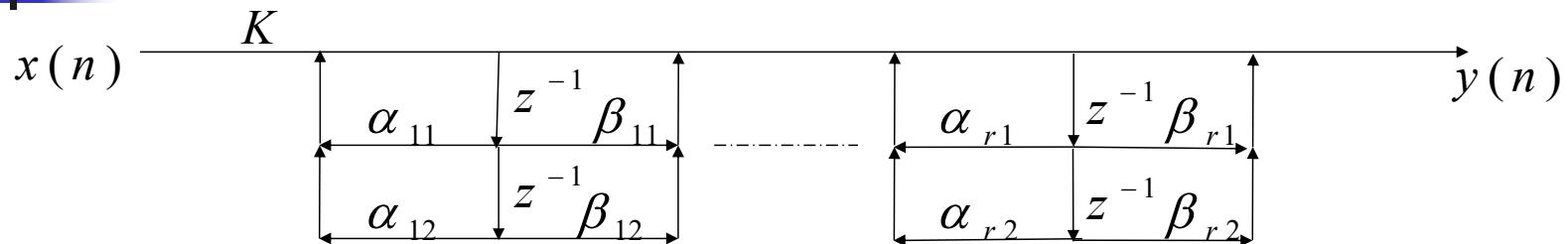
$$H(z) = K \prod_k^r \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

- 写成二阶系统级联的原因？

- 二阶系统在某些系数为零时可以表示一阶系统，也可以表示由两个实数所表示的一级系统级联成的二阶系统；
- 可用用实系统简化实现两个共轭复数极点的系统；
- 在集成或多路复用时，采用相同形式的子网络结构就更有意义。

级联型

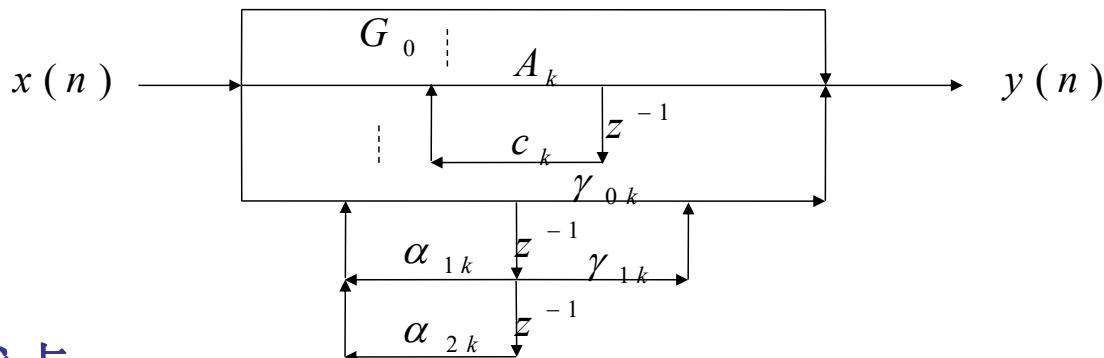
- 由多个二阶环节串联而成；
- 每个二阶基本节都用典范型结构实现



- 优点：
 - 便于准确实现滤波器零、极点，调整滤波器频率响应性能
 - 与直接II型相同具有最少的存储单元。
- 缺点：
 - 由于信号是依次通过级联的各个环节，只要一个环节出现了问题，便会影响整个系统的稳定性。

四、并联型

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$



- 优点：
 - 可以单独调整并联子系统的一对极点
 - 各子系统间信号无交叉，利于系统的稳定性。
- 缺点：
 - 不能像级联型那样单独调整零点的位置，在要求准确的传输零点的场合下，宜采用级联型结构。

4.2.3 FIR滤波器的基本结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

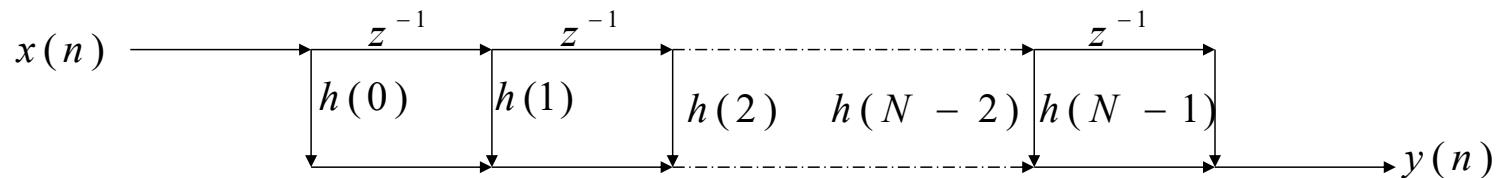
- FIR滤波器主要有如下特点：
 - 1) 单位冲激响应 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零；
 - 2) 系统函数在有限 Z 平面处处收敛，全部极点都在 $z=0$ 处（因果系统）；
 - 3) 主要是非递归结构，没有输出到输入的反馈
 - 有些结构中（例如频率抽样结构）也包含有反馈部分。
- FIR滤波器的实现结构主要有：
 - 横截型、级联型、频率抽样型、线性相位型

一、直接型（卷积型、横截型）

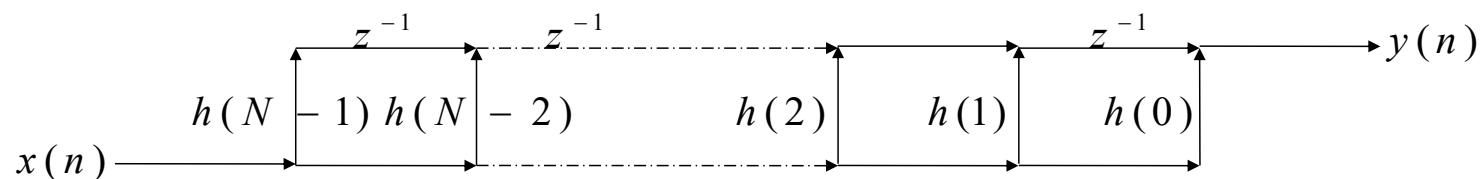
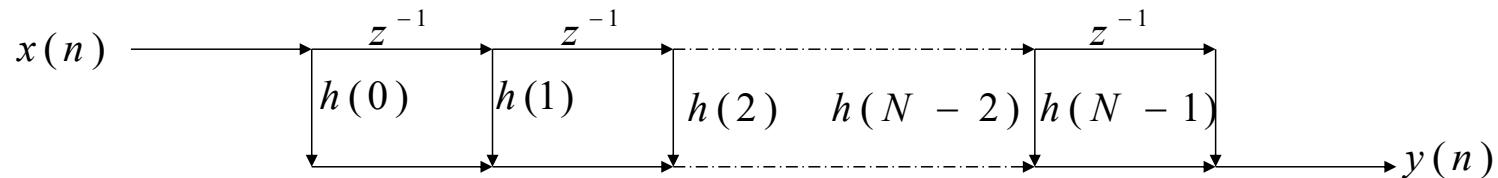
- 由系统函数可得差分方程表达式为：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)h(m) = x(n) * h(n)$$

- 上式实际是线性移不变系统的**卷积和公式**，也是 $x(n)$ 延时的**横向结构**，称为**横截型结构**或**卷积型结构**，也可称为**直接型**结构。



应用转置定理可得到转置直接型结构



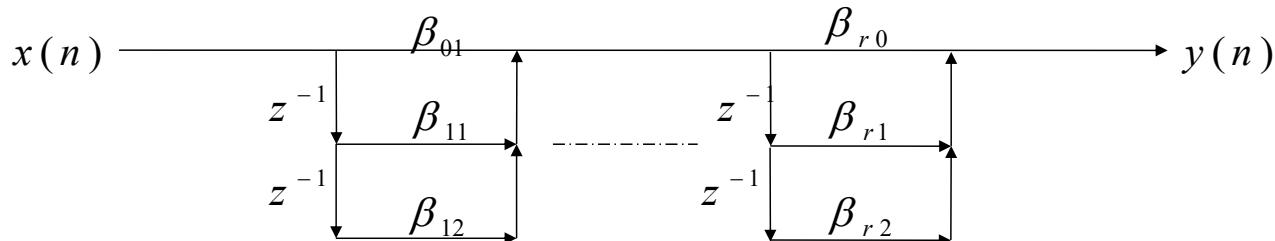
- 单位冲激响应与系统结构参数对应；
- 系统参数与零点的对应关系不明显，系统的频率特性不易控制；
- 存储单元及运算量最少。

二、级联型

- 将系统函数分解成实系数二阶因子的乘积形式:

- $$H(z) = \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}$$

- 级联结构如图所示

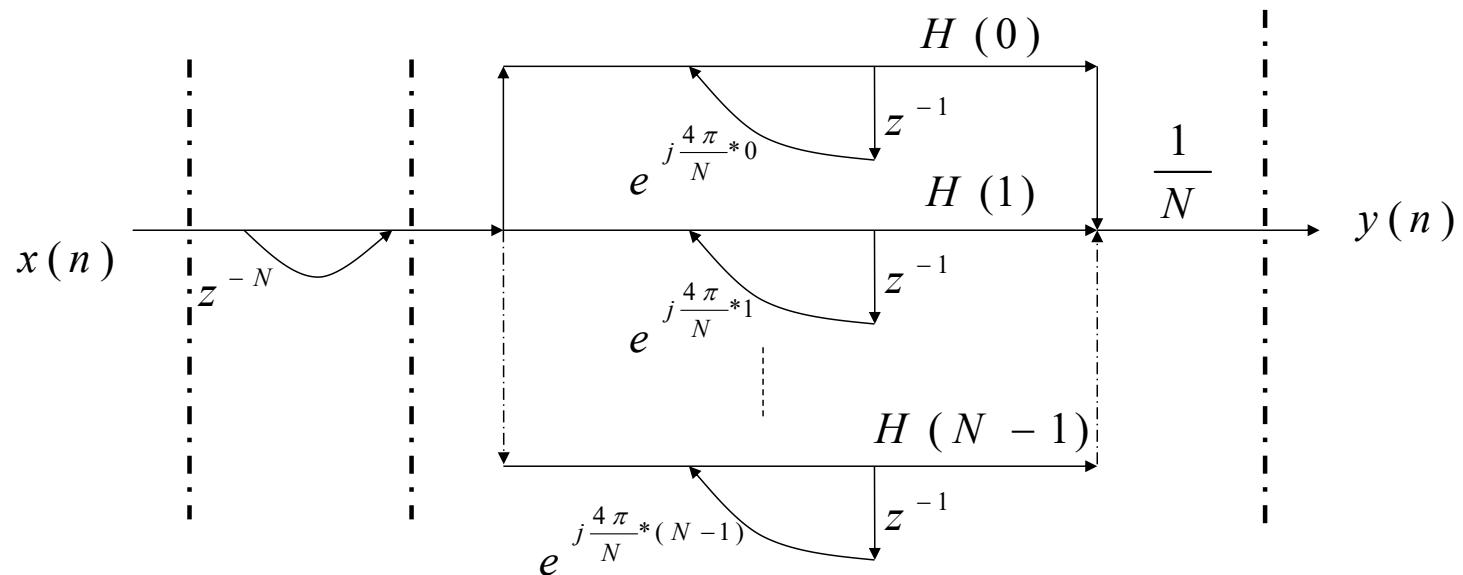


- 级联子系统独立控制一对零点，便于精确控制零点特性
- 所需系数比卷积型多，乘法次数多。

三、频率抽样型

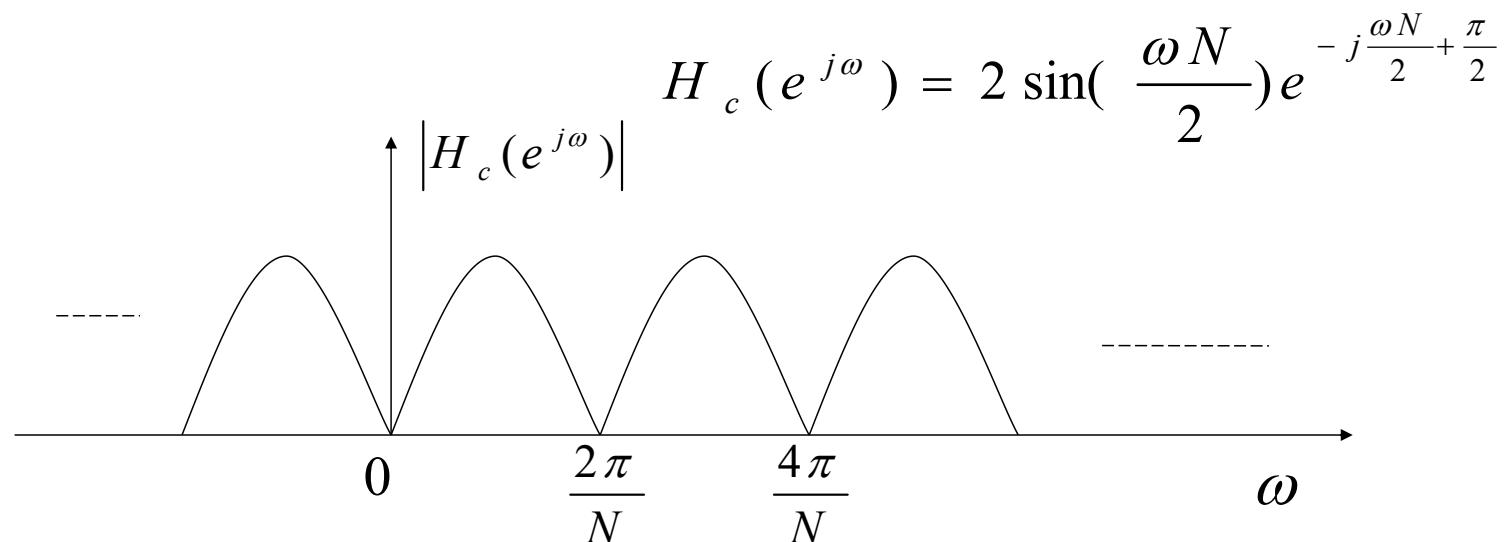
$$H(z) = \frac{1}{N} \underbrace{(1 - z^{-N})}_{H_c(z)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\underbrace{\frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}}}_{H_K(z)} z^{-1} \right)$$

- 频率内插公式为**FIR**滤波器提供了频率抽样型结构。



梳状滤波器

- 级联第一部分是**N**节延时单元构成的**梳状滤波器**，频率响应为：

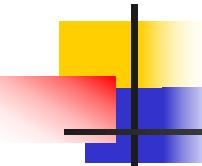


谐振器

- 级联的第二部分由 **N** 个一阶网络并联而成，每个一阶网络都是在单位圆上一个极点的谐振器：

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- 在 $\omega = \frac{2\pi}{N} k$ 处响应为无穷大，即无损耗谐振器。
- 该谐振器的极点刚好与梳状滤波器的一个零点相抵消，使得该频点处的响应为 $H(k)$ 。



频率抽样法的特点

- 优点：
 - 频率抽样结构系数 $H(k)$ 就是滤波器在 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处频率响应；
 - 可以很方便的控制滤波器的频率响应；
 - 零、极点数目只取决于单位抽样响应的点数；
 - 只要单位冲激响应点数相同，就可以利用同一梳状滤波器、同一结构的谐振器得到各种不同的滤波器，因而是高度模块化的。
- 缺点：
 - 结构中所乘的系数都是复数，增加了乘法次数和存储量
 - 所有极点都在单位圆上，当存在系数量化误差时，极点会移动；
 - 有些极点就不能被梳状滤波器的零点所抵消（零点由延时单元决定，不受量化的影响），系统就不能保持稳定

四、线性相位型

- 线性相位型结构与刚才所介绍的其他结构不同，它不是对所有FIR系统通用的结构，只适用线性相位的FIR系统。
 - 对于第一类线性相位系统，其单位冲击响应长度为奇数，且满足偶对称特性，即：

$$\begin{aligned} h(n) &= h(M - n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \\ y(n) &= \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{(M/2)-1} h(k)[x(n-k) + x(n-M+k)] + h(\frac{M}{2})x(n-\frac{M}{2}) \end{aligned}$$

- 同理，对于**第二类**线性相位系统，则有：

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h(k)[x(n-k) + x(n-M+k)]$$

- 对于**第三类**线性相位系统，其单位冲激为奇对称，则有：

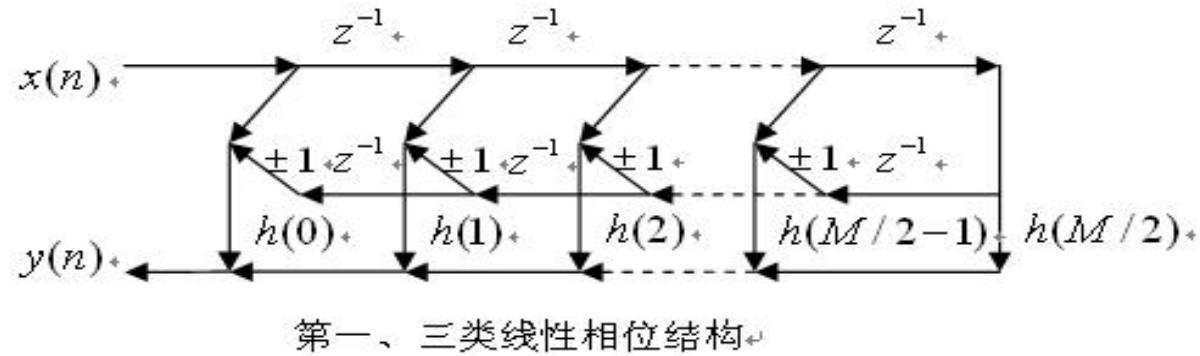
$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{(M/2)-1} h(k)[x(n-k) - x(n-M+k)] + h(M/2)x(n-M/2)$$

- 对于**第四类**线性相位系统，同理有：

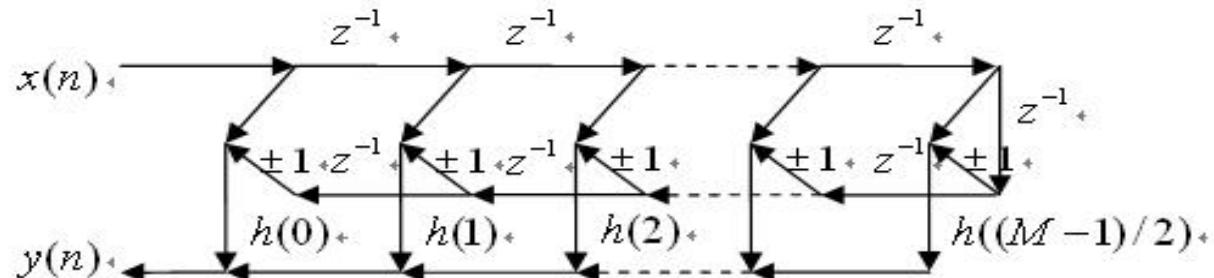
$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h(k)[x(n-k) - x(n-M+k)]$$

线性相位结构

- ✓ 线性相位结构对称，其系数的量化误差不影响系统的线性相位特性；
- ✓ 系数比系统的阶数少一半，乘法运算量比横截型运算量减少一半



第一、三类线性相位结构



第二、四类线性相位结构

作业

- 6.19
- 6.21
- 6.27
- 6.36





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

6.2



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第五章

Contents

数字滤波器设计与实现

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



—

滤波器设计基础



—

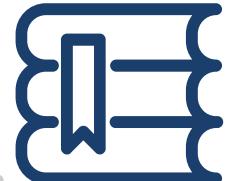
IIR滤波器设计



—

FIR滤波器设计

IIR 濾波器设计



- ◆ $h(n)$ 为无限长序列；
- ◆ $H(z)$ 在有限Z平面上存在极点；
- ◆ 实现结构上存在反馈环节，必须采用递归型结构实现。
- ◆ 主要思路寻找 $H(z)$, 确定系数 a_k, b_m

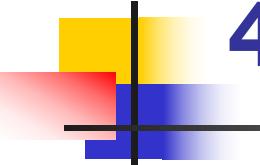


$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

滤波器设计基础

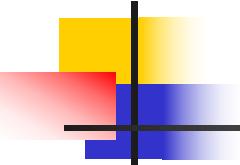
IIR滤波器设计

FIR滤波器设计



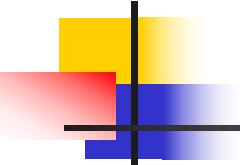
4.3 IIR数字滤波器设计

- IIR滤波器很重要
 - 相对FIR滤波器, IIR滤波器对于实现同样幅度性能来说是阶数最少系统。
- IIR滤波器设计目标是系统函数 $H(z)$
- IIR滤波器通常有两大类设计方法
 - 模拟域设计
 - 数字域直接设计



一、模拟域设计法

- 将连续域系统变换成满足预订指标的离散时间系统是传统中常用的一类方法：
 - 连续时间系统的设计方法成熟
 - 有很多经验公式可资利用
- 设计步骤：
 - 将离散系统性能技术指标转化为模拟指标
 - 利用模拟滤波器 $H_c(s)$ 来逼近（**模拟原型滤波器**），
 - 通过某种变换离散为**数字滤波器 $H(z)$** ，
 - 数字滤波器等效的模拟滤波器 $H_{eff}(s)$ 性能验证（**模拟等效滤波器**）



变换需要具备的条件

- 变换即是需要将**S**平面映射到**Z**平面，必须满足两个**基本条件**：
 - 1) $H_a(s)$ 频率响应与 $H(z)$ 频率响应对应，也就是**S**平面虚轴要映射为**Z**平面单位圆；
 - 2) 因果稳定的 $H_a(s)$ 要映射为因果稳定的 $H(z)$ ，即**S**平面的左半平面要映射为**Z**平面的单位圆内部。
- 满足上面的映射有很多种，主要有两种方法：
 - 冲激响应不变法、
 - 双线性Z变换

1、冲激响应不变法

- 方法：使数字滤波器的单位冲激响应序列为模拟滤波器单位冲激响应的采样，即：

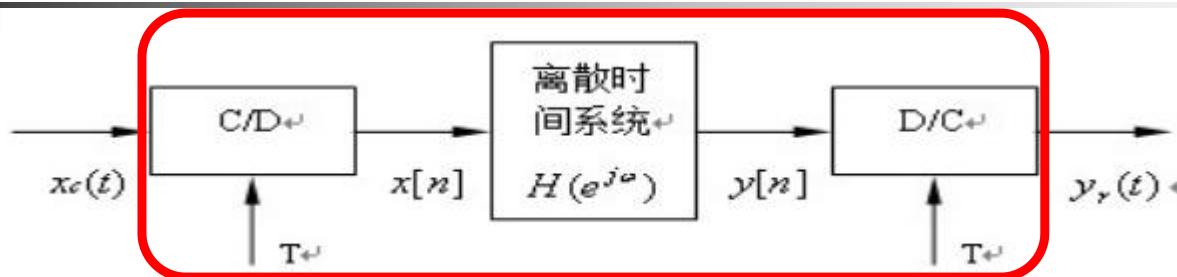
$$h(n) = h_c(t) |_{t=nT} = h_c(nT)$$

- 利用上述关系找到模拟滤波器对应的离散时间系统函数(**采样定理**)

$$z = e^{sT}$$

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_c(s - j\frac{2\pi k}{T})$$

设计依据：离散与连续LTI系统的等效

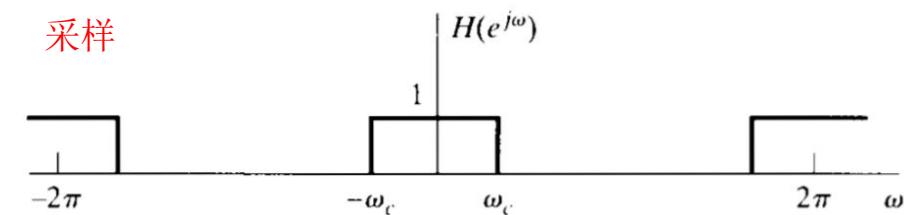
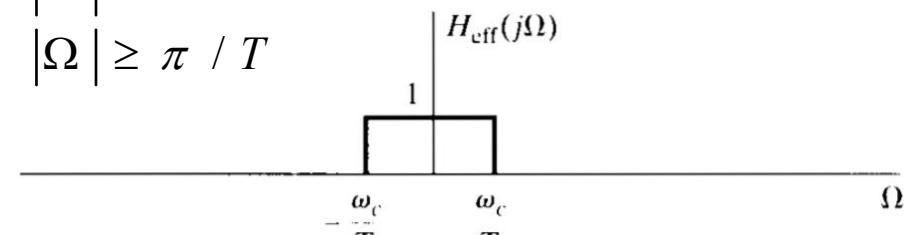
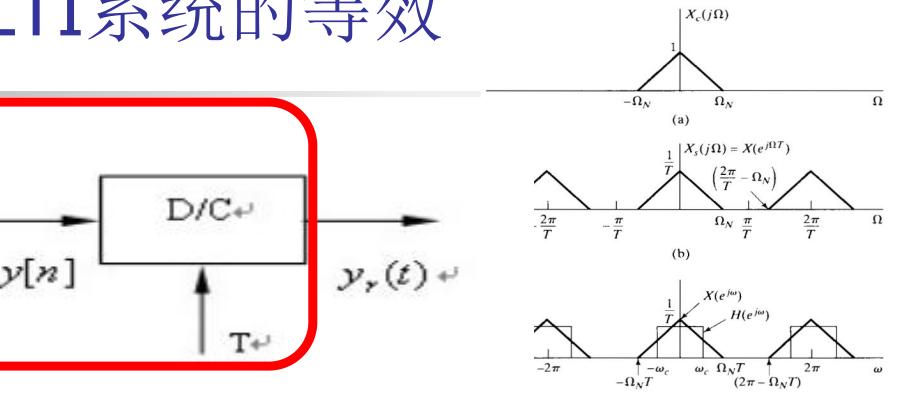


$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

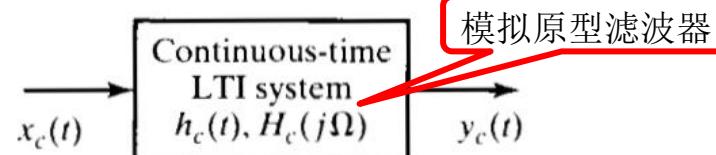
$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T}$$

$$h(n) = T \times h_{eff}(t)|_{t=nT}$$

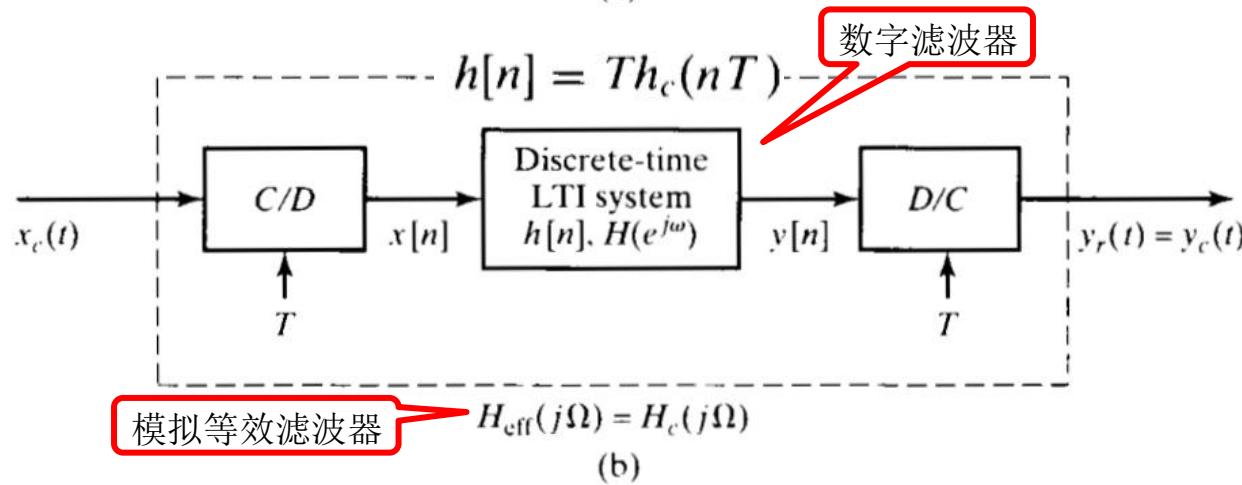
$$H_{eff}(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \pi/T$$



冲激响应不变法设计数字滤波器



(a)



(b)

i) 系统函数H(z)求取方法

- 模拟滤波器分解为一阶极点系统的并联形式，即：

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

- 则其单位冲激响应为： $h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$
- 系统函数为：

$$\begin{aligned} H(z) &= Z[h(n)] = Z[h_c(nT)] \\ &= Z\left[\sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT)\right] = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \end{aligned}$$

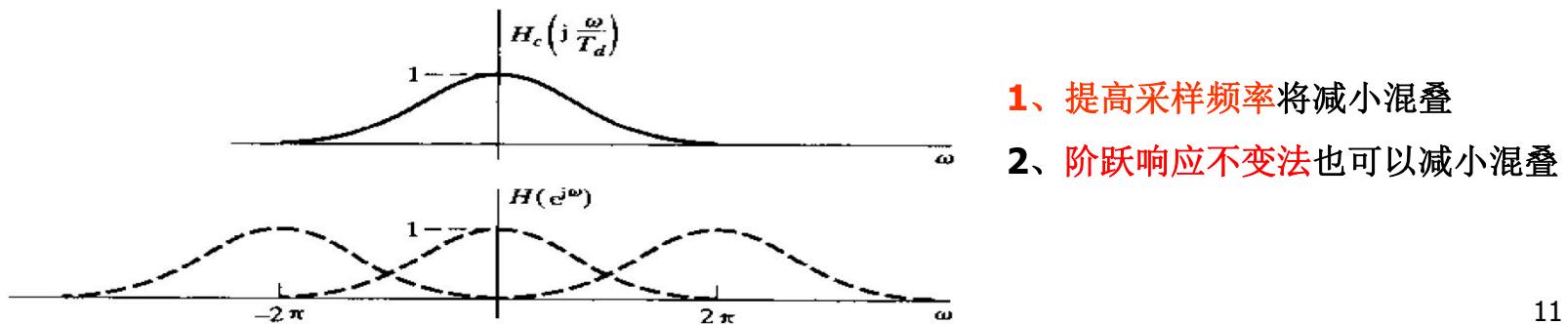
ii) 注意问题

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

- a) 可以保证S平面与Z平面极点对应，但不能保证零点对应； $\omega = \Omega T$
- b) 频率响应与采样间隔成反比，当采样时间太小时，系统增益过高，故采用修正的冲激响应不变法：

$$h(n) = Th_a(nT) \quad H(z) = T \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- c) 模拟原型滤波器时域通常都无法理想带限，时域采样导致频谱混叠



扩展：阶跃响应不变法 $g(n) = g_a(t)|_{t=nT} = g_a(nT)$

- 数字阶跃响应对应于模拟滤波器阶跃响应采样

$$G(z) = \frac{z}{z-1} H(z) \quad G_a(s) = \frac{1}{s} H_a(s)$$

$$G_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad g_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

$$H(z)$$

$$= \frac{z-1}{z} G(z) = \frac{z-1}{z} Z[g(n)] = \frac{z-1}{z} Z[g_a(nT)]$$

$$= \frac{z-1}{z} \underbrace{Z\left\{ L^{-1}[G_a(s)] \Big|_{t=nT} \right\}}_{\text{采用冲激响应不变法}} = \frac{z-1}{z} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

ii) 注意问题

- a) 仍为采样关系，所以仍然满足：
$$z = e^{sT}$$
-
- b) 数字滤波器的频率响应为：

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{jw} - 1}{e^{jw}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{H_a(j\Omega - \frac{2k\pi}{T})}{j(\Omega - \frac{2k\pi}{T})}$$

- 阶跃响应不变法仍然不可避免混叠现象
- 由于 $1/S$ 因子的存在，使得幅度响应与频率成反比因此混叠现象比冲激响应不变法要弱。

例题：

- 离散处理连续时间信号的系统框图如下：



- 其中，数字滤波器要求如下：

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \quad (7.15a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \quad (7.15b)$$

- 假设 $Td=1$ ，试用冲激响应不变法设计一个具有巴特沃兹滤波特性，满足上述要求的数字滤波器

解：

- (1) 首先将数字滤波器技术指标转换成模拟原型滤波器的技术指标

$$0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \quad (7.14a)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0.17783 \quad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \quad (7.14b)$$

- 由于有混叠现象的存在可能导致指标恶化，设计完成后，需要对滤波器性能进行评估

模拟原型滤波器确定

- 模拟巴特沃兹滤波器的幅度响应是频率单调函数

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad |H_c(j0.2\pi)| \geq 0.89125 \\ |H_c(j0.3\pi)| \leq 0.17783$$

- 方程解是 $N=5.8858$ 和 $\Omega_c=0.70474$ 。
- 取 $N=6$ 得 $\Omega_c=0.7032$ 。
 - 取此值，则完全可以满足通带指标并超过（连续时间滤波器）阻带指标（0.0289）。给离散时间滤波器得混叠留有余地

巴特沃兹

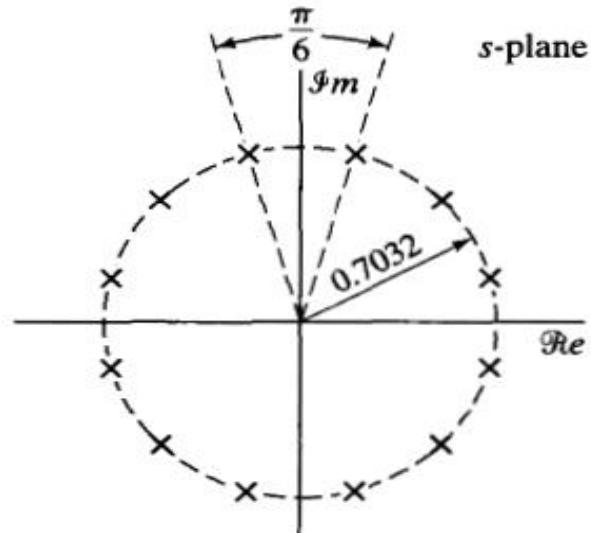
$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{[1 + (\frac{s}{\Omega_c})^{2N}]}$$

- 12个极点均匀分布在半径
 $\Omega_c = 0.7032$ 的圆周上

第一对极点: $-0.182 \pm j(0.679)$

第二对极点: $-0.497 \pm j(0.497)$

第三对极点: $-0.679 \pm j(0.182)$



$$H_c(s) =$$

$$\frac{0.12093}{(S^2 + 0.3640S + 0.4945)(S^2 + 0.9945S + 0.4945)(S^2 + 1.3585S + 0.4945)}$$

数字滤波器求取

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

- 如果我们把 $H_c(s)$ 示成一个部分分式展开式并然后将各共轭对结合在一起，则得出离散时间滤波器的系统函数

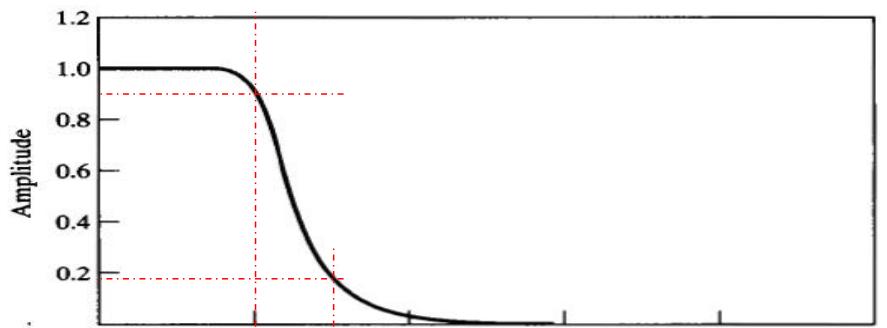
$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$

- 显而易见，用冲激响应不变法设计得到的系统函数可直接用**并联形式**实现。
- 如果需要用串联形式或直接形式，则应当用适当的方法将分散的各个二阶项组合起来。

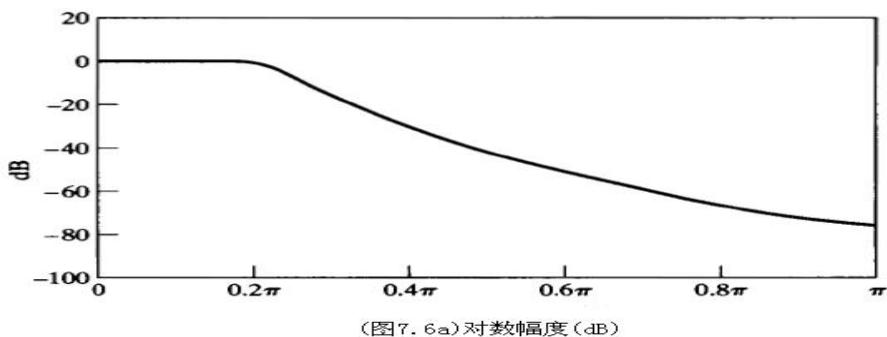
频率响应验证

- 采样引入的混叠造成离散时间滤波器在通带边缘、阻带边缘处可能超过指标，需要进行验证
- 如果由于混叠使所得出的离散时间滤波器不能满足技术指标，则可**试用**较高阶的滤波器，或者保持阶次不变而调整滤波器的参数。

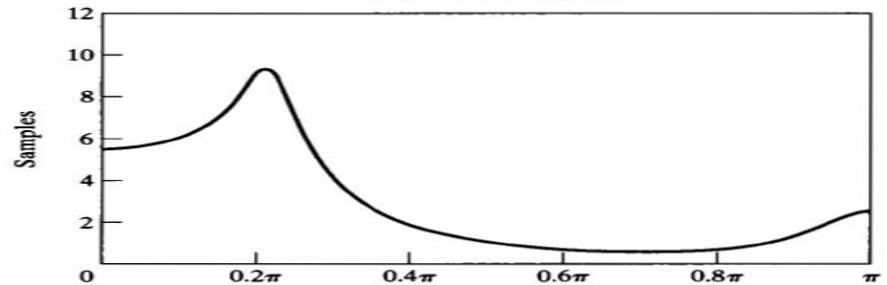
北京航空航天大学



(图 7.6b) 幅度 (dB)



(图 7.6a) 对数幅度 (dB)



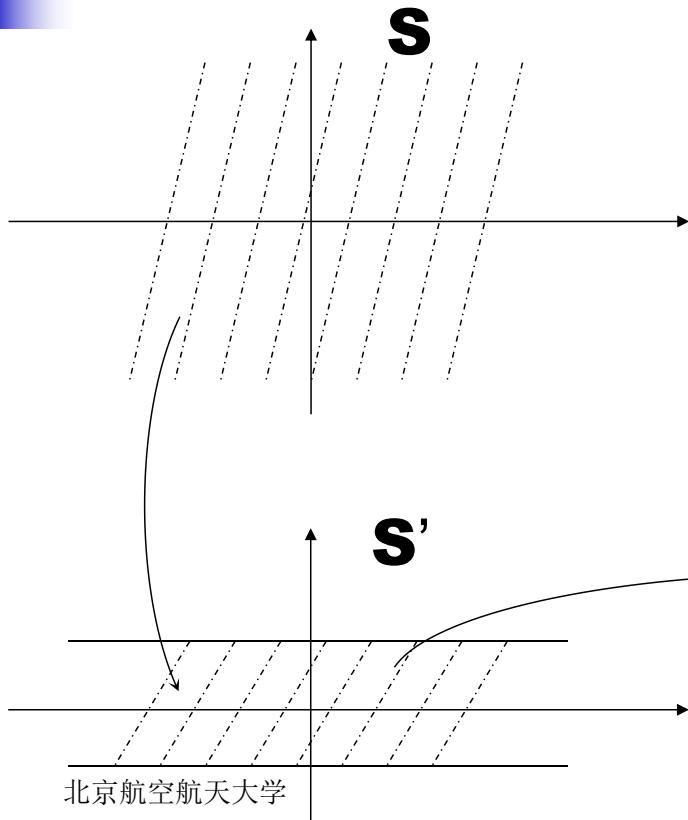
(图 7.6c) 群延迟

2、双线性Z变换

- 冲激响应不变法和阶跃响应不变法由于使用了时域上的采样原理，所以不可避免的产生了频率响应混叠失真。
 - 其原因也可以解释成**S**到**Z**平面的多值映射问题。
- 为了克服这一缺点，引入单值映射（双线性变换），使得**S**平面的虚轴单值的映射到单位圆上。

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

双线性Z变换处理过程



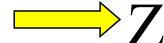
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

第一映射关系：

S  S'

$$\begin{aligned}\Omega &= \operatorname{tg} \left(\frac{\Omega' T}{2} \right) \\ j\Omega &= j \operatorname{tg} \left(\frac{\Omega' T}{2} \right) = \frac{j \sin \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)} \\ &= \frac{e^{j \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)} - e^{-j \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)}}{e^{j \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)} + e^{-j \left(\frac{\Omega' T}{2} \right)}} = \frac{1 - e^{-j\Omega' T}}{1 + e^{-j\Omega' T}} \\ s &= \frac{1 - e^{-s' T}}{1 + e^{-s' T}} = \operatorname{th} \left(\frac{s' T}{2} \right)\end{aligned}$$

第二映射关系：

S'  Z

$$z = e^{s'T}$$

- 所以s与z的映射为：

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$j\Omega = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}$$

$$j\Omega = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}$$

$$j\Omega = \frac{j \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)}$$

$$\Omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- 复变函数中的双线性变换。

双线性Z变换对应关系

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

- 数字频率与模拟**原型**滤波器频率对应关系为: $\Omega = \operatorname{tg}(\omega / 2)$
 - 工程中为设计需要通常引入待定常数: $\Omega = c * \operatorname{tg}(\omega / 2)$
 - 1) 为使模拟频率 Ω_c 与数字频率 ω_c 对应: $c = \Omega_c / \operatorname{tg}(\omega_c / 2)$
 - 2) 若要使模拟**原型**滤波器与模拟**等效**滤波器频率的低频特性相近:
$$\omega = \Omega T$$

$$\Omega = c * \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \approx c * \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad c = \frac{2}{T}$$

- 从而改进的双线性变换为: $H(z) = H_c(s) \Big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$S = C \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

ii) 注意问题

- a) 变换对因果、稳定性的影响

- 由于: $z = \frac{c + s}{c - s}$ 所以:

$$|z| = \sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2} / \sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}$$

- 因此:

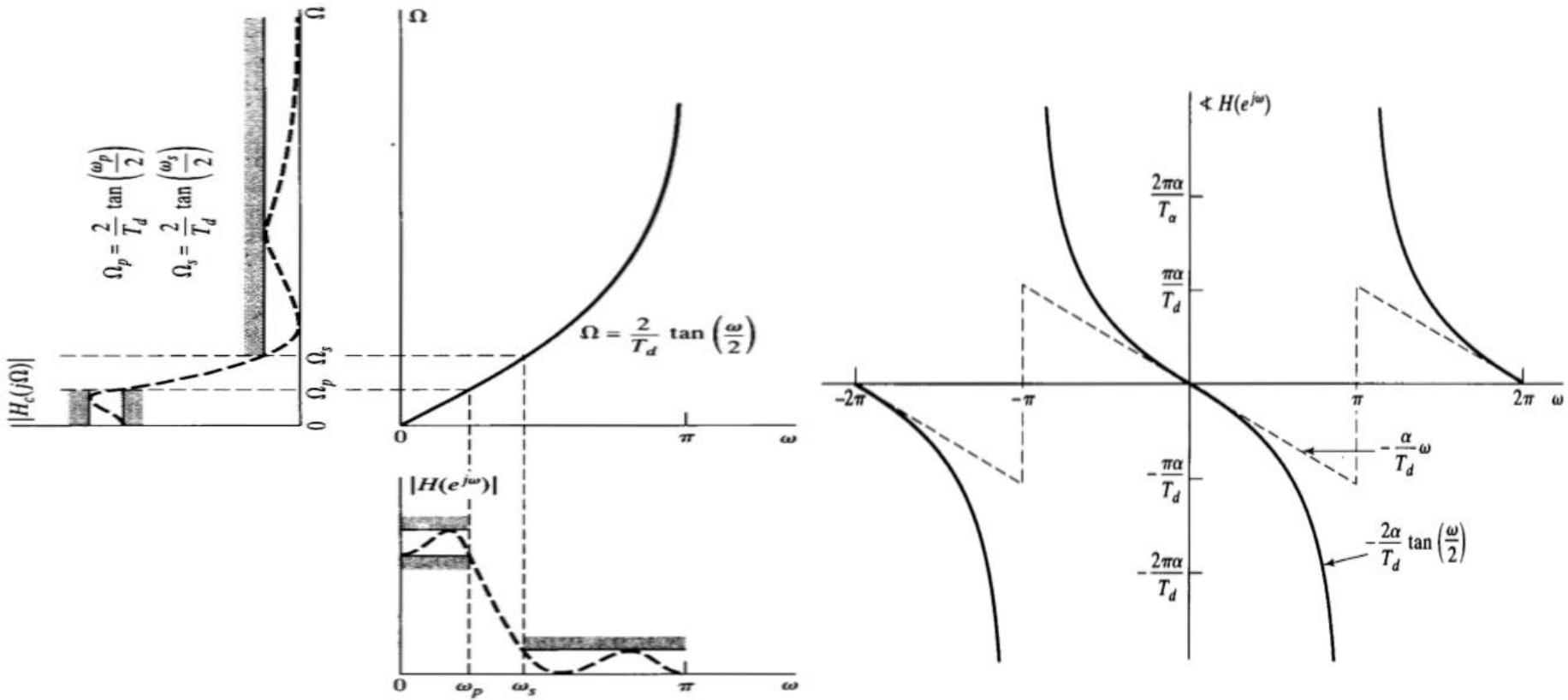
- 当 $\sigma < 0$ 时, $|z| > 1$;

- 当 $\sigma > 0$ 时, $|z| < 1$;

- 当 $\sigma = 0$ 时, $|z| = 1$;

- 不改变模拟系统的因果性和稳定性。

- b) 双线性变换消除了混叠现象，但是由于数字频率和模拟频率之间严重的畸变，使其限于设计具有分段恒定幅频特性的滤波器，同时也丧失了模拟滤波器的某些优点，如线性相位特性。



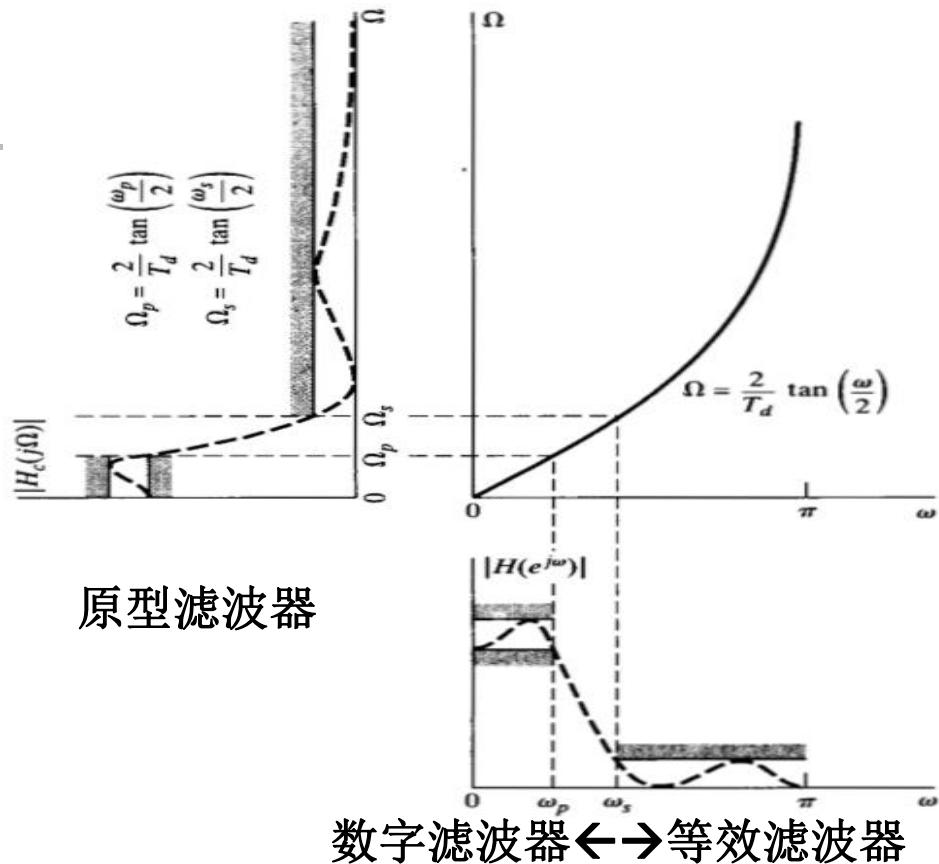
c) 频率预畸变

- 某些工程应用往往要求在多个数字频率处的有多种幅度特性
 - 首先按照这些数字频率计算相应的模拟原型滤波器频率

$$\Omega_p = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

- 设计在这些模拟频率处满足指标的模拟原型滤波器
 - 最后通过双线性变换获得数字滤波器



例题：针对上题，若 $T_d=1$,请采用双线性变换进行数字滤波器的设计，要求数字滤波器的低频特性与模拟滤波器的低频特性类似；并给出上述系统处理连续信号的通带截止频率和阻带起始频率；

- 解：频率预畸变：

$$0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq \infty$$

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

$$\omega_p = 0.2\pi \quad \Omega_p = 0.2\pi / T_d = 0.2\pi$$

$$\omega_s = 0.3\pi \quad \Omega_s = 0.3\pi / T_d = 0.2\pi$$

- 模拟原型滤波器指标：

$$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \geq 0.89125 \quad |H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$|H_c(j2\tan(0.15\pi))| \leq 0.17783$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89} \right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.178} \right)^2$$

$$N = \frac{\log \left[\frac{\left(\left(\frac{1}{0.178} \right)^2 - 1 \right)}{\left(\left(\frac{1}{0.89} \right)^2 - 1 \right)} \right]}{2 \log \left[\frac{\tan(0.15\pi)}{\tan(0.1\pi)} \right]} = 5.30466$$

选取 $N=6$, $\Omega_c = 0.76622$

双线性变换法不必担心混叠问题。

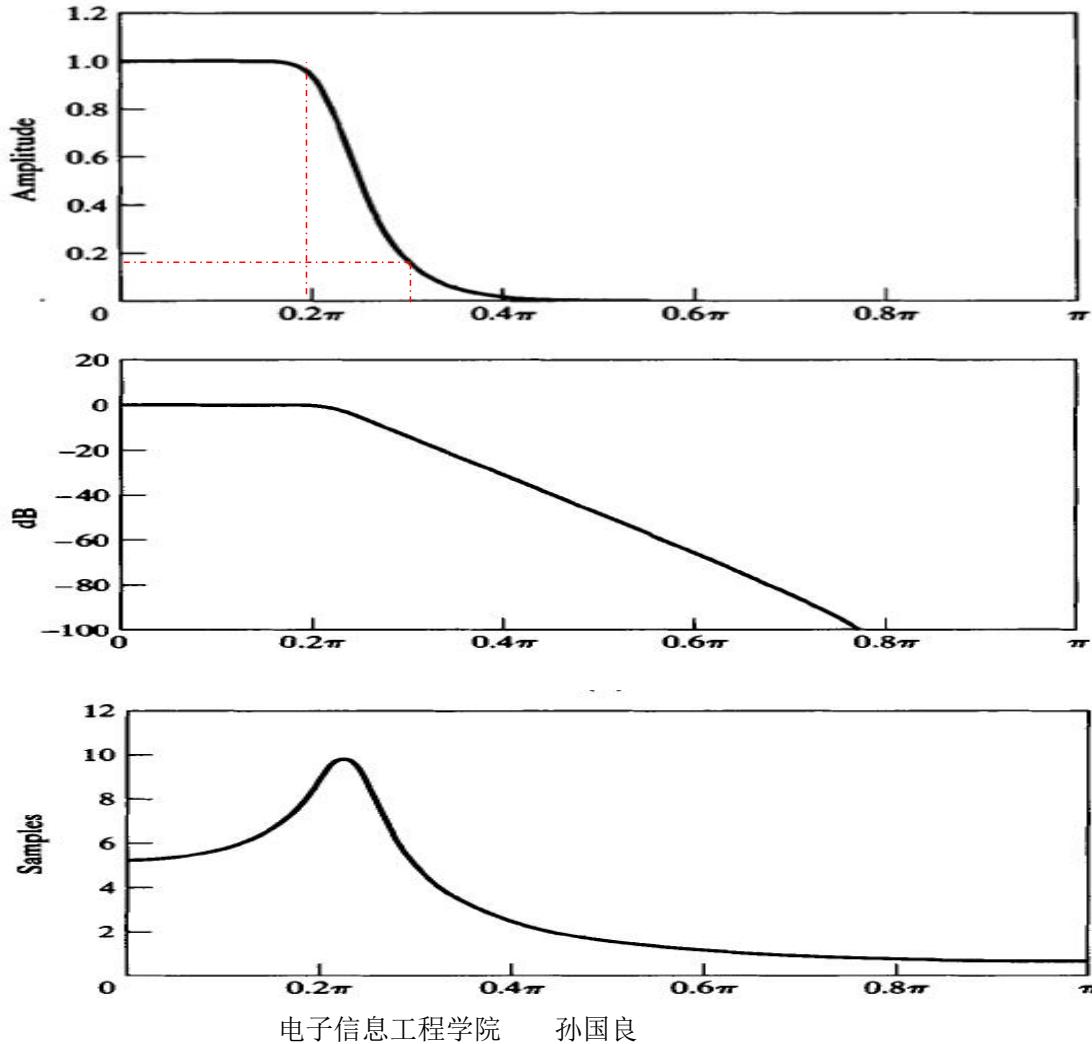
$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

$$\downarrow \quad s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2})(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

频率响应

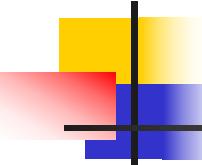
- 双线性变换所设计滤波器的幅度响应要比原始连续时间滤波器幅度响应下降快。
- 在 $\omega = \pi$ 处特性对应于原型滤波器在频率无穷大处的特性。
- 连续巴特沃兹滤波器在 $s = \infty$ 处有一个六阶零点，所以离散时间滤波器在 $\omega = \pi$ 处也有一个六阶零点。



作业

- 7.2
- 7.4
- 7.22





IIR 数字域设计

- 离散时间系统并不是依赖于连续时间系统的采样，数字滤波器完全有自己一套独立的设计方法，即**数字域设计**。
- 数字域又可以分为**离散时间域**和**数字频域**两种概念，因此就存在两大类设计方法。
 - (一) 数字频域设计
 - 零极点设计法
 - 幅度平方函数法
 - (二) 数字**时域**设计
 - 帕德逼近法
 - 波形成型滤波器

零极点累试法

- 根据幅度特性确定零极点的大概位置，再按照确定的零极点写出其系统函数
- 画出其幅度特性，并与希望的滤波器幅度特性进行比较，如不满足要求，可通过移动零极点位置或增加(减少)零极点，进行修正
- 例题：请根据零极点的特点设计一个数字滤波器，用它来完成对模拟信号的选频。要求采样率为**500Hz**时能完成以下的模拟信号处理指标：
 - (1) 完全滤除模拟信号的直流成分和**250Hz**成分
 - (2) 有用信号的中心频率是**20Hz**,
 - (3) 滤波器的**3dB**带宽是**10Hz**。

零极点设计法

- 解：计算出几个关键的模拟信号频率及其对应的数字角频率

模拟信号频率(Hz)	0	15	20	25	250
数字角频率(π/sample)	0	0.06	0.08	0.1	1

- 为实现指标(1)，单位圆的**ω=0**和**π**处各设置一个零点

$$z_1 = e^{j0} = 1 \text{ 和 } z_2 = e^{j\pi} = -1$$

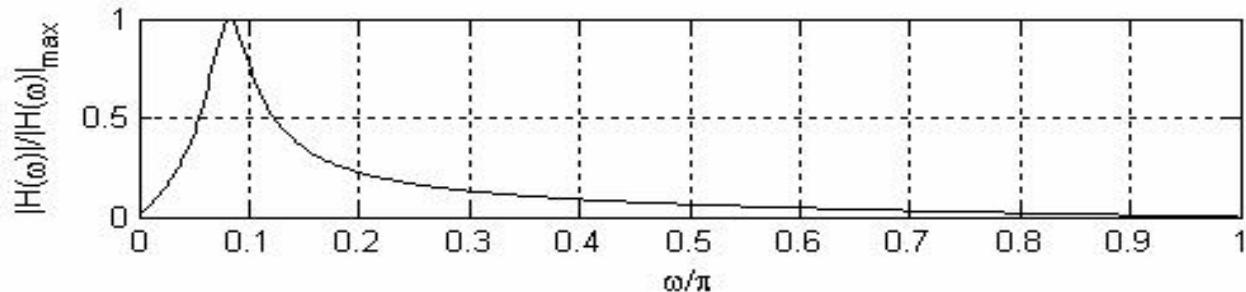
- 为实现指标(2)，单位圆的**ω=0.08π**处设置极点。极点共轭对称。

$$p_1 = re^{j0.08\pi} \text{ 和 } p_2 = re^{-j0.08\pi}$$

- 极点半径r需要经过计算和分析才能确定。将这些零极点代入因式的系统函数

$$H(z) = \frac{\prod_{m=1}^2 (z - z_m)}{\prod_{n=1}^2 (z - p_n)}$$

经过尝试，得到**r=0.94**，其归一化幅频特性为



系统函数是

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - 0.94 e^{j0.08\pi})(z - 0.94 e^{-j0.08\pi})} \\ &\approx \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.821 z^{-1} + 0.884 z^{-2}} \end{aligned}$$

幅度平方函数法

- 与模拟域幅度平方设计滤波器一样，利用幅度平方函数在某些约束条件下来导出系统函数。
- 假设：
$$|H(e^{jw})|^2 = H(z)H^*(\frac{1}{z^*})|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 + A_N^2(w)}$$
- 数字巴特沃兹滤波器

$$A_N^2(\omega) = \left(\frac{\operatorname{tg}(\frac{\omega}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{\omega_c}{2})} \right)^{2N} \quad \longleftrightarrow \quad H_d(j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$

- 契比雪夫滤波器

$$A_N^2(\omega) = \varepsilon^2 C_N^2 \left(\frac{\operatorname{tg}(\frac{\omega}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{\omega_c}{2})} \right)$$

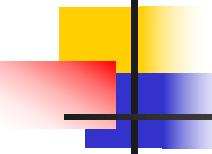
- 幅度响应固然有了，如何得到系统函数呢？
- 由于：

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{1 - \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 + \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})} = -\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- 将上式带入幅度平方函数后，即可得：

$$H(z)H^*(\frac{1}{z^*})$$

- 选取单位圆内的极点即可组成可实现因果稳定系统。



(二) 时域设计法

- 在离散时域中设计数字滤波器，即是给出所要求系统的若干时刻单位冲激响应

$$h_d(n) \quad n = 1, 2, \dots, M$$

- 设计系统，使得所设计系统的单位冲激响应 $h(n)$ 在上述时刻尽量逼近理想的单位冲激响应 $h_d(n)$ 。

1、帕德逼近法

- 设计目的
 - 根据时域上最接近 $h_d(n)$ 的单位冲激响应 来求得系统函数 $H(z)$
 - 也就是在 $h(n) = h_d(n) \quad n=1,2,\dots,K$ 的条件下求得系统函数的待定系数 a_j 和 b_i

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}}$$

系数方程

- 设滤波器系统函数为:
- 则可得到:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \sum_{j=0}^N a_j z^{-j} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^N a_j h(n-j) \right] z^{-n} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

- 所以有: $\sum_{j=0}^N a_j h(n-j) = b_n \quad n = 0, 1, 2, \dots, M$
 - (可以利用时域卷积定理来分析)

系数求解

- 若令 $a_0 = 1$ ，则共需要**N+M+1**个方程。根据上面的方程就可以得到这些系数。

$$\sum_{j=0}^N a_j h(n-j) = 0 \quad n = M + 1, M + 2, \dots, M + N$$

→

$$a_j \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\sum_{j=0}^N a_j h(n-j) = b_n \quad n = 0, 1, \dots, M \longrightarrow b_i \quad (i = 0, 1, \dots, M)$$

- 因而可以得到系统函数：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

例题

- 假设磁悬浮列车掠过桥墩的地基震动动脉冲响应 $h_d(n) = \{5, 2, 1, 0.5\}$ 。请你用帕德逼近法设计两种无限脉冲响应系统函数 $H(z)$:
 - 二阶全极点
 - 单零点和单极点
- 要求设计的系统 $h(n)$ 在 $n=0 \sim 2$ 时等于地基震动脉冲响应 $h_d(n)$ 。

二阶全极点系统

■ 待求系统为：

$$H_1(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\begin{cases} h_d(1) + h_d(0)a_1 = 0 \\ h_d(2) + h_d(1)a_1 + h_d(0)a_2 = 0 \\ b_0 = h_d(0) \end{cases}$$

$$b_0 = 5, \quad a_1 = -0.4, \quad a_2 = -0.04$$

$$H_1(z) = \frac{5}{1 - 0.4z^{-1} - 0.04z^{-2}}$$

单零点、单极点系统

- 待求系统为：

$$H_2(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$\begin{cases} h_d(2) + h_d(1)a_1 = 0 \\ b_0 = h_d(0) \\ b_1 - h_d(0)a_1 = h_d(1) \end{cases}$$

$$b_0 = 5, \quad b_1 = -0.5, \quad a_1 = -0.5$$

$$H_2(z) = \frac{5 - 0.5 z^{-1}}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

$h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 在 $n=0 \sim 2$ 范围都等于 $h_d(n)$; 而 $h_1(3)=0.48$, $h_2(3)=0.5$ 。

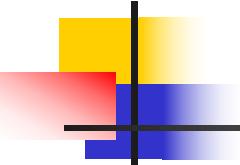
2、波形形成滤波器

- 针对特定输入，要求特定输出的滤波器设计，叫做波形形成滤波器。是帕德逼近法基础上的时域直接设计。
 - 设 $x(0)、x(1) \dots x(M-1)$ 是输入，
 - $y_d(0)、y_d(1) \dots y_d(N-1)$ 为希望的系统输出
 - $y(0)、y(1) \dots y(N-1)$ 为所设计系统的输出
- 按照最小均方准则确定最优单位冲激响应，即：

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - y_d(n)]^2 = \min$$

- 系统为因果系统，输入 $\mathbf{x}(n)$ 为因果序列，所以： $y(n) = \sum_{m=0}^n x(n-m)h(m)$

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^n x(n-m)h(m) - y_d(n) \right]^2 = \min$$



$$E = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^n x(n-m)h(m) - y_d(n) \right]^2 = \min$$

- 由拉格朗日定理可知上式成立的条件是：

$$\frac{\partial E}{\partial h(i)} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, K$$

- 由上面的方程式即可求得最优的单位冲激响应
- 再由帕德逼近法可最终获得系统函数 $H(z)$ 。

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2 \left[\sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) - y_d(n) \right] x(n-i) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m)x(n-i) = \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-i)$$

$$\sum_{m=0}^n h(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)x(n-i) = \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-i)$$

维纳-霍夫方程

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-1)x(n) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-K)x(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-1) & \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n-1) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-K)x(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-K) & \sum_{n=0}^{N-1} x(n-1)x(n-K) & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n-K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(K) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-1) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1} y_d(n)x(n-K) \end{pmatrix}$$

例题

- 要求在给定输入 $x(n)=\{3, 1\}$ 的情况下，输出 $y_d(n)=\{1, 0.25, 0.1, 0.01\}$ 。
- **解** 设 $h(n)$ 长度为 $K+1=4$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 0.85 \\ 0.31 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

$$h(n) = \{0.333, -0.0278, 0.0426, -0.0109\}$$

$$H(z) = \frac{0.333 + 0.0330 z^{-1}}{1 + 0.1824 z^{-1} - 0.1126 z^{-2}}$$

3、数字频带变换

- 如要设计数字高通、带通、带阻滤波器，可将模拟滤波器转换相应类型数字滤波器。也可以直接在数字频域内将设计好的数字低通滤波器通过频带变换为各种类型的滤波器。
- 如果给定数字低通原型滤波器的系统函数，则我们的任务是通过映射变换得到期望滤波器。

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = G(Z^{-1})}$$

- 其中的变换关系需要将一个因果稳定的数字低通有理系统变成因果稳定的有理系统。因此，要求：
 - 1、映射关系必须为有理函数；
 - 2、 z 平面的单位圆要对应 Z 平面的单位圆；
 - 3、 z 平面的单位圆内部要对应 Z 平面的单位圆内部

频带变换公式---全通变换

- 设 θ 和 ω 分别为z、Z平面的数字频率分量，则可得：

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})| e^{j \arg[G(e^{-j\omega})]}$$

- 由此可见映射关系在单位圆上的幅度恒等于1，这样的有理函数就是我们曾经提到过的全通函数，因而可以表示为：

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^N \frac{Z^{-1} - \alpha_i}{1 - \alpha_i Z^{-1}} *$$

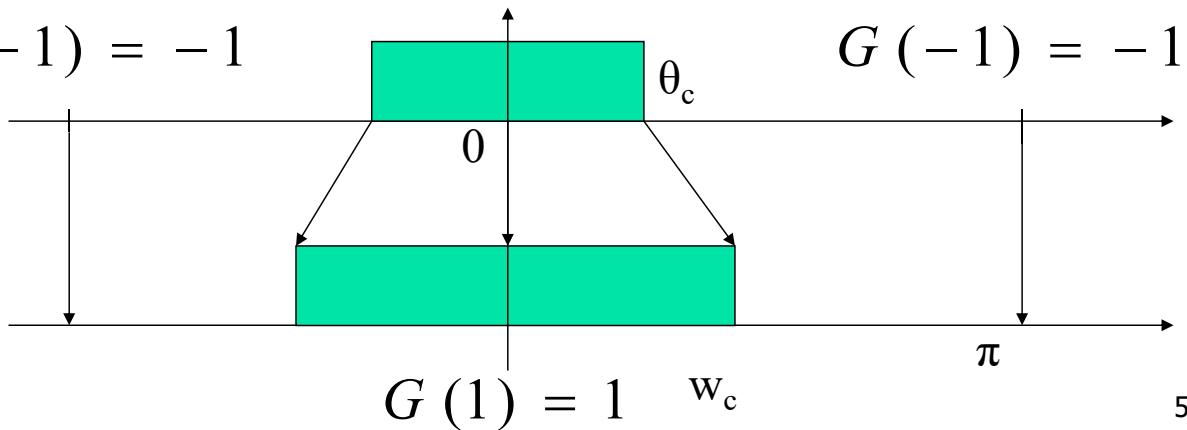
- 为保证变换前后的稳定性不改变，需要 $|\alpha_i| < 1$ 。
 - 可以证明，当 ω 从0变化到 π 时，全通函数的相角变化量为 $N\pi$ 。
 - 选择合适的N和 a_i 就可以实现各种变换。

数字低通—数字低通

- 变换前后皆为低通，不同之处是通带截至频率。
- 由于 θ 和 ω 均是从0变化到 π ，因此N应取作1，故变换关系为一阶全通函数：

$$G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$
$$\alpha = \sin(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}) / \sin(\frac{\theta_c + \omega_c}{2})$$



数字低通—数字高通

低通变高通只需将频率响应平移
180度，即将z用-Z代替即可，即：

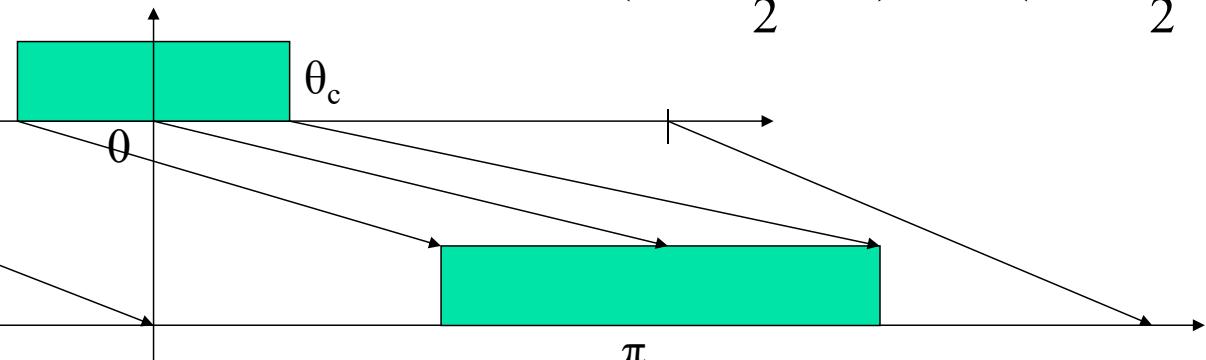
$$G(Z^{-1}) = -\left(\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}\right)$$

$$G(-1) = 1$$

$$H_0(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H(-z)|_{z=e^{j\omega}} = H_0(e^{j(\omega+\pi)})$$

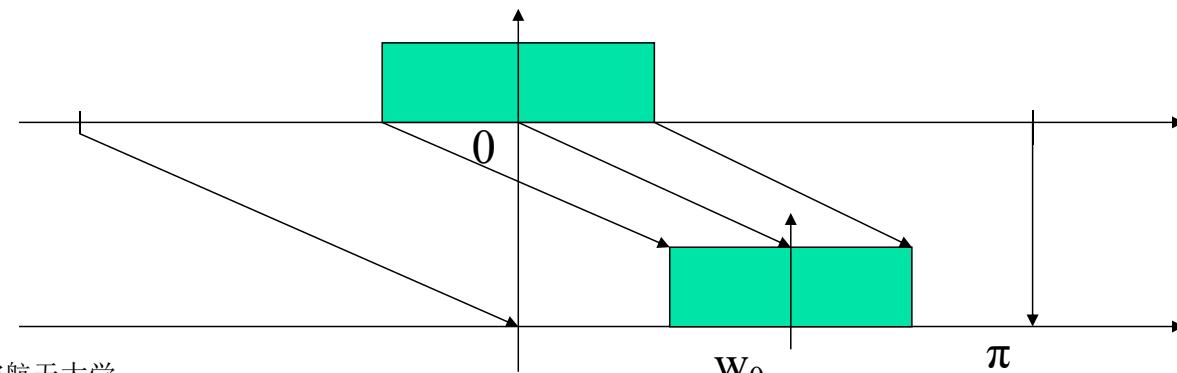
$$\begin{aligned} G(e^{-j(\pi + \omega_c)}) &= e^{-j(\theta_c)} \\ \alpha &= -\cos\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right) \end{aligned}$$



数字低通—数字带通

- 低通与带通滤波器之间频率关系如下所示：

低通频率	0	$-\theta_c$	θ_c	$-\pi$
带通频率	ω_0 (中心频率)	ω_1 (上截止频率)	ω_2 (下截止频率)	$\begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$



- 由于 ω 从 0 变化到 π ， θ 从 $-\pi$ 变化到 π ，因此 N 应取作 2

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha Z^{-1}} \bullet \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha^* Z^{-1}} = \pm \frac{Z^{-2} + \gamma_1 Z^{-1} + \gamma_2}{\gamma_2 Z^{-2} + \gamma_1 Z^{-1} + 1}$$

- 然后将对应频率点的对应关系带入上述变换式就可以求得变换参数。典型的变换式为：

$$G(Z^{-1}) = -\frac{\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{k-1}}{\frac{k+1}{k-1}Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + 1}$$

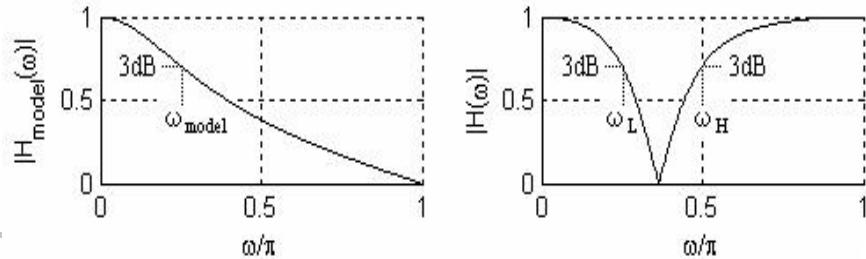
$$\alpha = \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) / \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)$$

$$k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}$$

数字低通到各型滤波器的转换

变换类型	$G(z^{-1})$	变换参数
低通—低通	$\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin(\frac{\theta_c - \omega_c}{2})}{\sin(\frac{\theta_c + \omega_c}{2})}$
低通—高通	$-(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}})$	$\alpha = -\frac{\cos(\frac{\omega_c + \theta_c}{2})}{\cos(\frac{\omega_c - \theta_c}{2})}$
低通—带通	$-\left[\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1} \right]$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})}$ $k = \operatorname{ctg}(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}) \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}$
低通—带阻	$\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})}{\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})}$ $k = \operatorname{tg}(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}) \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}$

例题：低通→带阻



- 请用数字低通滤波器作为模型，设计一个数字带阻滤波器

$$H_{\text{model}}(z) = \frac{0.293 + 0.293 z^{-1}}{1 - 0.414 z^{-1}} \quad (\text{它的 } 3\text{dB 截止频率 } \omega_c = 0.25\pi)$$

- 带阻滤波器3dB下边界频率 $\omega_L=0.25\pi$ 上边界频率 $\omega_H=0.5\pi$ 。

$$\begin{cases} a = \frac{\cos[(0.5\pi + 0.25\pi)/2]}{\cos[(0.5\pi - 0.25\pi)/2]} \approx 0.414 \\ k = \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) \tan\left(\frac{0.5\pi - 0.25\pi}{2}\right) \approx 0.172 \end{cases}$$

$$G(z^{-1}) \leftrightarrow \frac{0.706 - 0.706 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.706 z^{-1} + 0.706 z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.293 + 0.293 \cdot \frac{0.706 - 0.706 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.706 z^{-1} + 0.706 z^{-2}}}{1 - 0.414 \cdot \frac{0.706 - 0.706 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.706 z^{-1} + 0.706 z^{-2}}} \\ &\approx \frac{0.706 - 0.585 z^{-1} + 0.706 z^{-2}}{1 - 0.585 z^{-1} + 0.412 z^{-2}} \end{aligned}$$



谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsgl@buaa.edu.cn

6.3 FIR



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

第五章

Contents

数字滤波器设计与实现

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI



—

滤波器设计基础



—

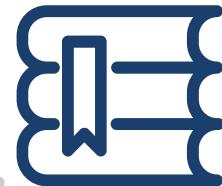
IIR滤波器设计



—

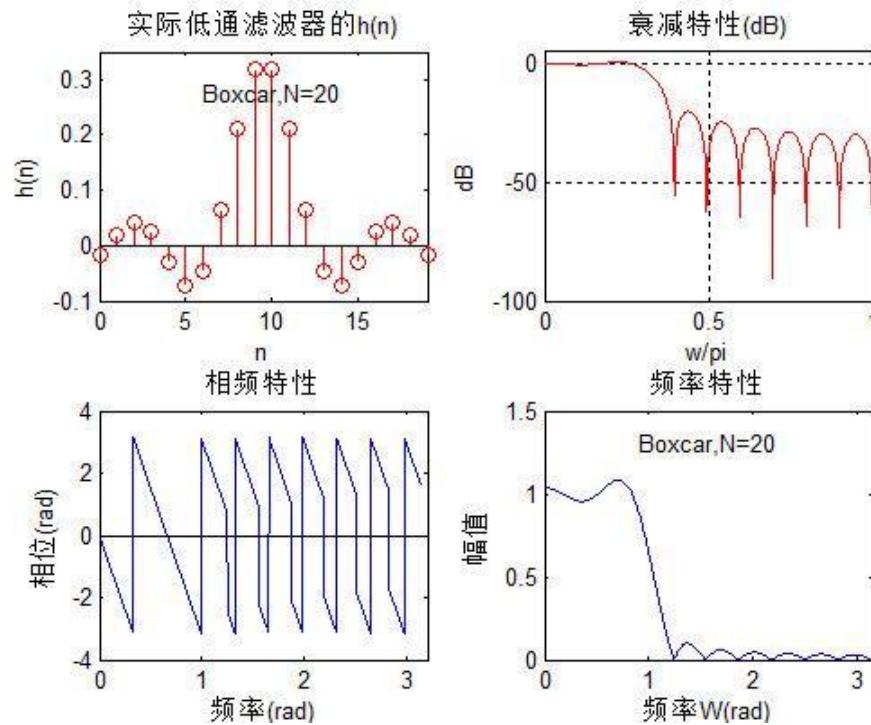
FIR滤波器设计

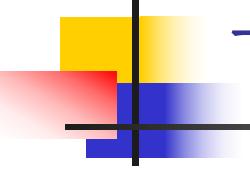
F I R 濾 波 器 设 计



- ◆ $h(n)$ 为有限长序列；
- ◆ $H(z)$ 在有限 Z 平面上无极点；
- ◆ 实现结构以前馈环节为主。
- ◆ 主要思路寻找冲激响应

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$





一、FIR滤波器最优化准则

- IIR滤波器设计法对FIR设计不适用
 - 因为IIR滤波器是利用有理分式的系统函数，而FIR滤波器的系统函数只是多项式
- FIR滤波器主要有两种最优化准则
 - 均方误差最小准则
 - 最大误差最小化准则
- 此处我们主要介绍均方误差最小准则下的滤波器设计。

均方误差最小准则

■ 误差能量最小

- 若用 $H_d(e^{jw})$ 表示要求的频率响应,
- 用 $H(e^{jw})$ 表示设计得到的滤波器频率响应,
- 以 $E(e^{jw})$ 表示频率响应误差, 即

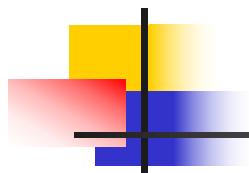
$$E(e^{jw}) = H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})$$

- 则均方误差为:

$$e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{jw})|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})|^2 dw$$

■ 设计目的

- 选择一组 $h(n) = IDTFT[H(e^{jw})]$, 便均方误差最小。



$$e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{jw})|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{jw}) - H(e^{jw})|^2 dw$$

- 由于: $H_d(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jwn}$ $H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jwn}$

$$E(e^{jw}) = H_d(e^{jw}) - H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} [h_d(n) - h(n)]e^{-jwn} + \sum_{\text{其他 } n} h_d(n)e^{-jwn}$$

- 按照帕塞瓦公式有:

$$e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{jw})|^2 dw = \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - h(n)|^2 + \sum_{\text{其他 } n} |h_d(n)|^2$$

- 要使 e^2 最小, 必须使第一项求和最小, 即:

$$|h_d(n) - h(n)| = 0, 0 \leq n \leq N-1 \quad h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

- 结论: 矩形窗设计法满足最小均方误差准则。

二、窗函数设计法

- 用有限长单位冲激响应 $h(n)$ 的滤波器来逼近理想滤波器频率响应。

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jnw} \longrightarrow H_d(e^{jw})$$

$$H_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw}) e^{jwn} dw$$

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

- 指标是在频域提出的
- 设计是在时域进行的

理想低通滤波器

- 我们以一个截止频率为 w_c 的线性相位的理想低通滤波器为例来加以讨论。
- 设滤波器的群延时为 α ,即:

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha} & -w_c \leq w \leq w_c \\ 0 & w_c < w \leq \pi, -\pi < w < -w_c \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\alpha} e^{jwn} dw = \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin[w_c(n-\alpha)]}{w_c(n-\alpha)}$$

线性相位 与 加窗

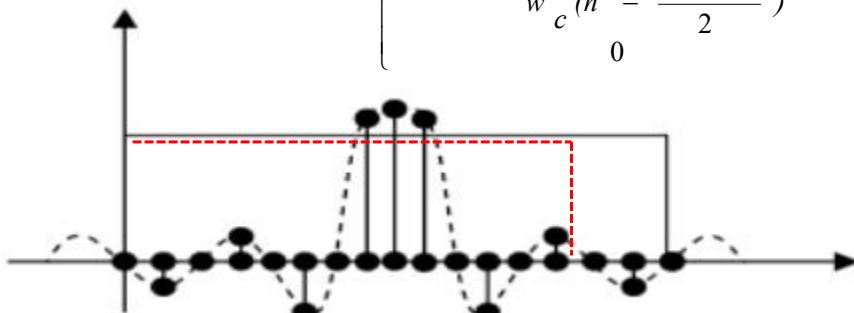
$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

- $h_d(n)$ 是中心点在0的偶对称无限长非因果序列，要得到有限长的 $h(n)$ ，一种最简单的办法就是取矩形窗 $R_N(n)$ ，即：

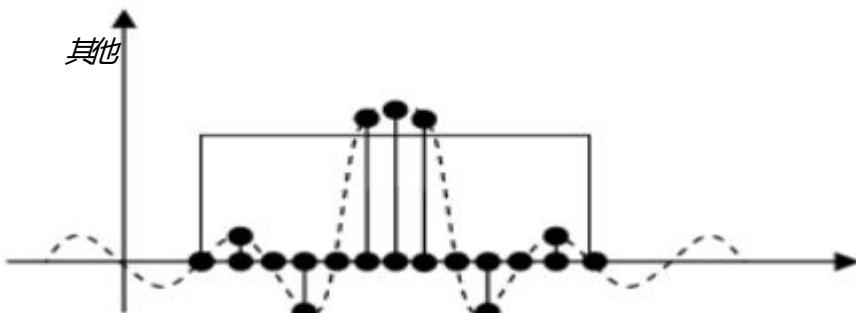
$$w(n) = R_N(n)$$

- 若有线性相位约束，窗函数必须保证所截取 $h(n)$ 是对称的。

$$h(n) = \begin{cases} \frac{w_c}{\pi} \sin \left[w_c \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



北京航航大学 $(N-1)/2$



电子信息工程学院 孙国良

加窗对滤波器频率响应的影响

- 窗函数的频率特性为:

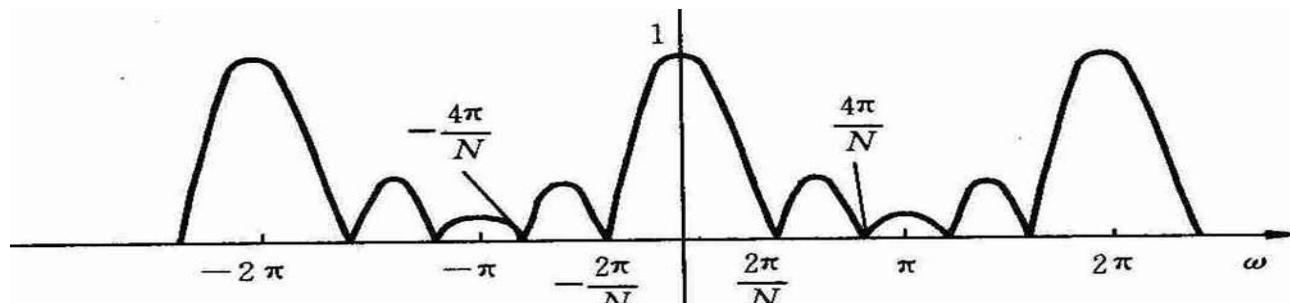
$$W(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-jwn}$$

- 对矩形窗，则有：

$$W_R(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = e^{-jw(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

- 表示成幅度函数与相位函数：

$$W_R(e^{jw}) = W_R(w) e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$



矩形窗所设计滤波器的频率特性

如果将理想频率响应也写成: $H_d(e^{jw}) = H_d(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$

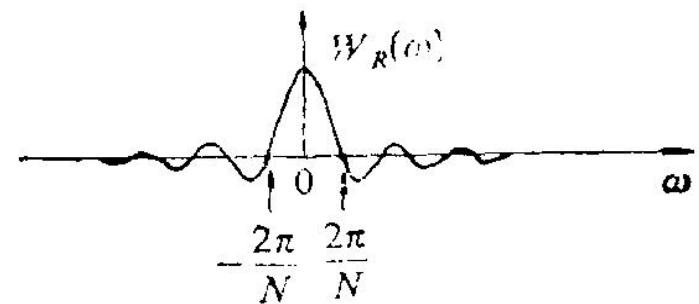
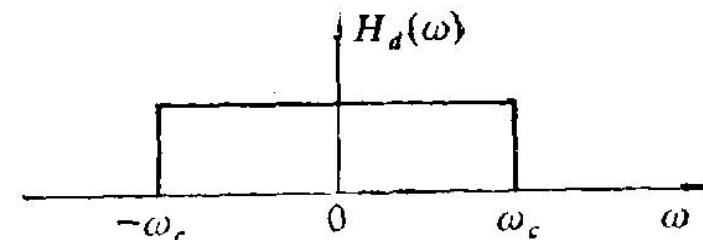
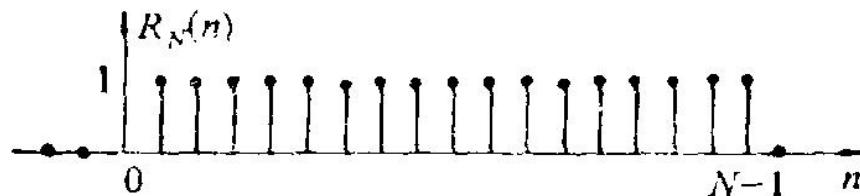
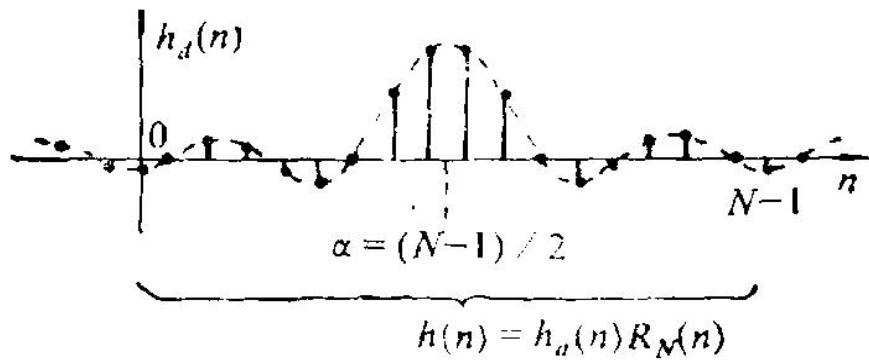
其中: $H_d(w) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

因此, FIR滤波器的频率响应 $H(e^{jw})$ 为:

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j(\frac{N-1}{2})\theta} W_R(w - \theta) e^{-j(\frac{N-1}{2})(\omega - \theta)} d\theta \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2})w} * \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(w - \theta) d\theta \end{aligned}$$

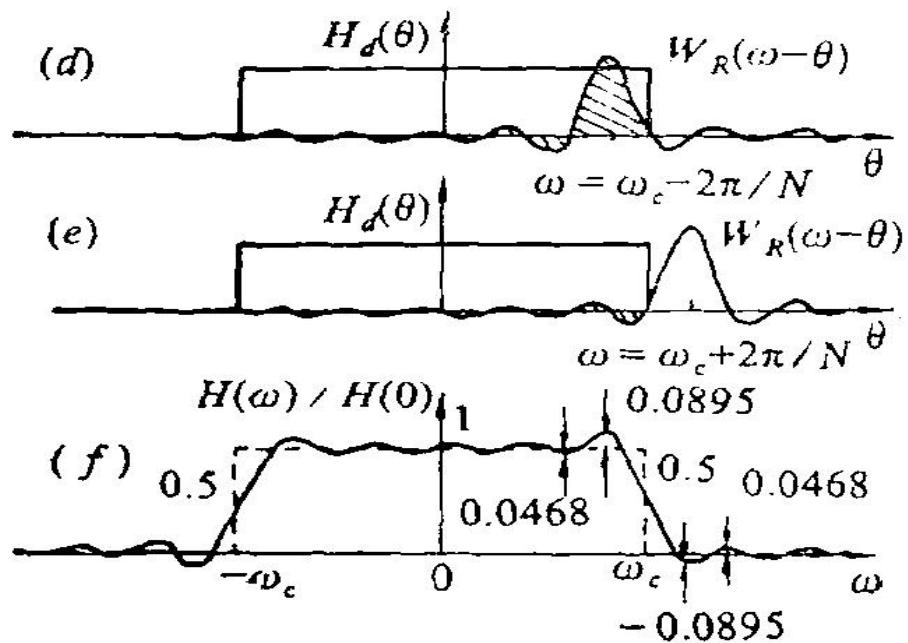
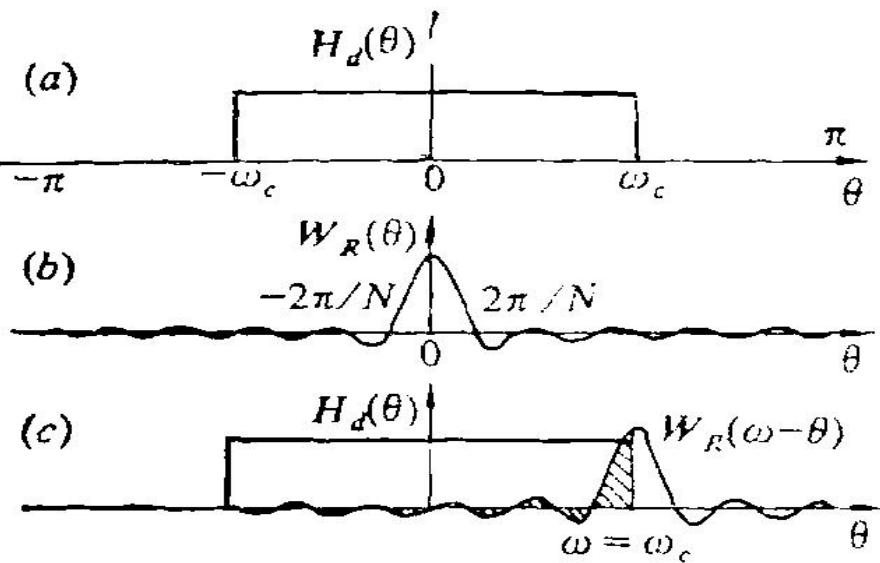
显然, FIR滤波器的频率响应也是线性相位的。

$H_d(n)$ 及 $W(n)$ 的频谱特性



FIR数字滤波器的幅度函数

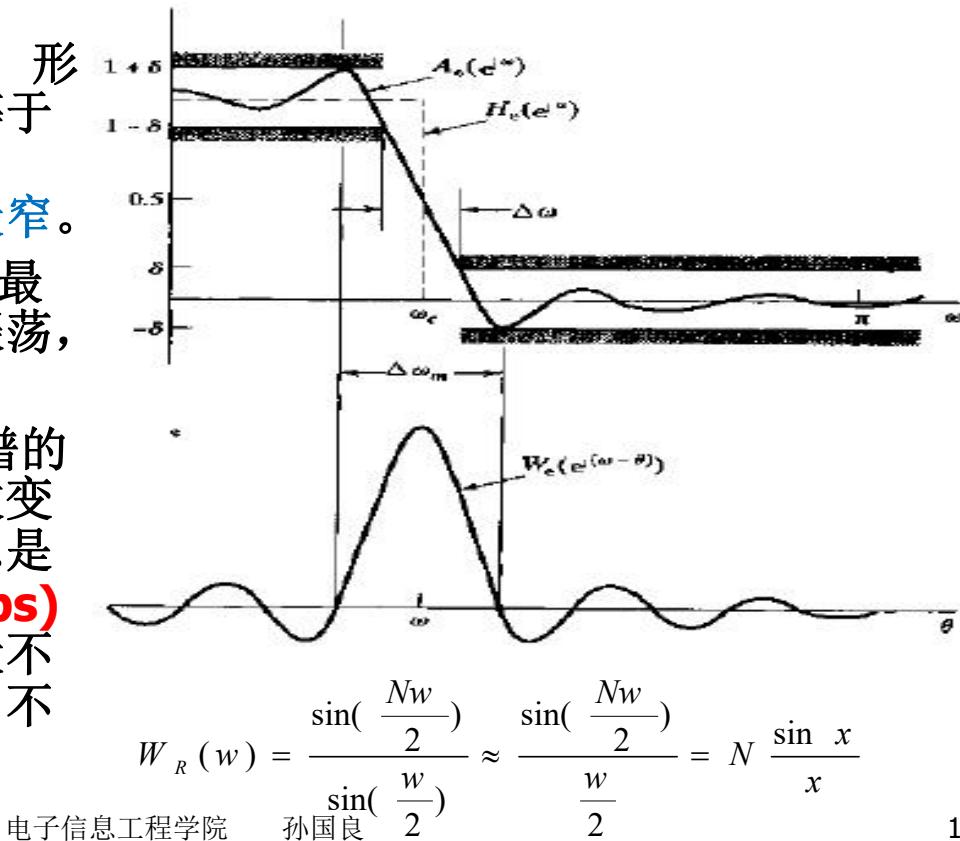
$$H(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(w - \theta) d\theta$$



总结：

- (1) 理想幅度特性不连续处边沿加宽，形成一个过渡带，“**过渡带的宽度**”等于窗的频率响应的主瓣宽度（非**3db**带宽），**矩形窗设计的滤波器过渡带最窄**。
- (2) 在截止频率两边 $w = w_c \pm \frac{2\pi}{N}$ 出现最大的肩峰值，肩峰的两侧形成起伏振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对面积；
- (3) 改变矩形窗的长度**N**只能改变窗谱的主瓣宽度、滤波器过度带宽，不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。最大肩峰总是**8.95%**，这种现象称为**吉布斯(Gibbs)效应**。造成所设计的滤波器通带起伏不均匀且波纹过大，阻带衰减不够小，不能满足某些工程要求。

北京航空航天大学



$$W_R(w) = \frac{\sin(\frac{Nw}{2})}{\sin(\frac{w}{2})} \approx \frac{\sin(\frac{Nw}{2})}{\frac{w}{2}} = N \frac{\sin x}{x}$$

电子信息工程学院

孙国良

(二)、窗的改进及各种常用窗

- 矩形窗截断造成肩峰为**8.95%**，则阻带最小衰减为 **-21db**，在工程上远远不够。为了加大阻带衰减，需要改善窗函数。通常希望满足两项要求：
 - 窗谱主瓣尽可能地窄，以获得较陡的过渡带；
 - 减少窗谱的最大旁瓣的相对面积，使肩峰减小，增大阻带的衰减。
- 在滤波器阶数给定的情况下，**两项要求难以同时满足**
 - 通常增加主瓣宽度（牺牲过渡带宽）以换取对旁瓣的抑制，得到平坦的通带幅度响应和较小的阻带波纹。
 - 窗函数在边沿处(**n=0**和**n=N-I**附近)比矩形窗变化要平滑而缓慢，窗边沿不再陡峭，则高频分量减小，阻带衰减增大。此时的主瓣宽度却比矩形窗的要宽，造成滤波器幅度函数过渡带的加宽。

常用的窗函数

- 1、矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

$$W_R(e^{jw}) = W_R(w)e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

- 2、三角形 (Bartlett) 窗

-

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

$$W(e^{jw}) = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin\left[\left(\frac{N-1}{4}\right)w\right]}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)} \right]^2 e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)w} \approx \frac{2}{N} \left[\frac{\sin\left(\frac{Nw}{4}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)} \right]^2 e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)w}$$

- “ \approx ” 在 $N \gg 1$ 时成立；主瓣宽度为 $8\pi/M$, 阻带最小衰减 **25db**

3、汉宁 (Hanning) 窗 (升余弦窗)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

$$\cos nw_0 = \frac{e^{jn w_0} + e^{-jn w_0}}{2}$$

$$e^{jw_0 n} x(n) \Leftrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$$

$$W_R(e^{jw}) = W_R(w) e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

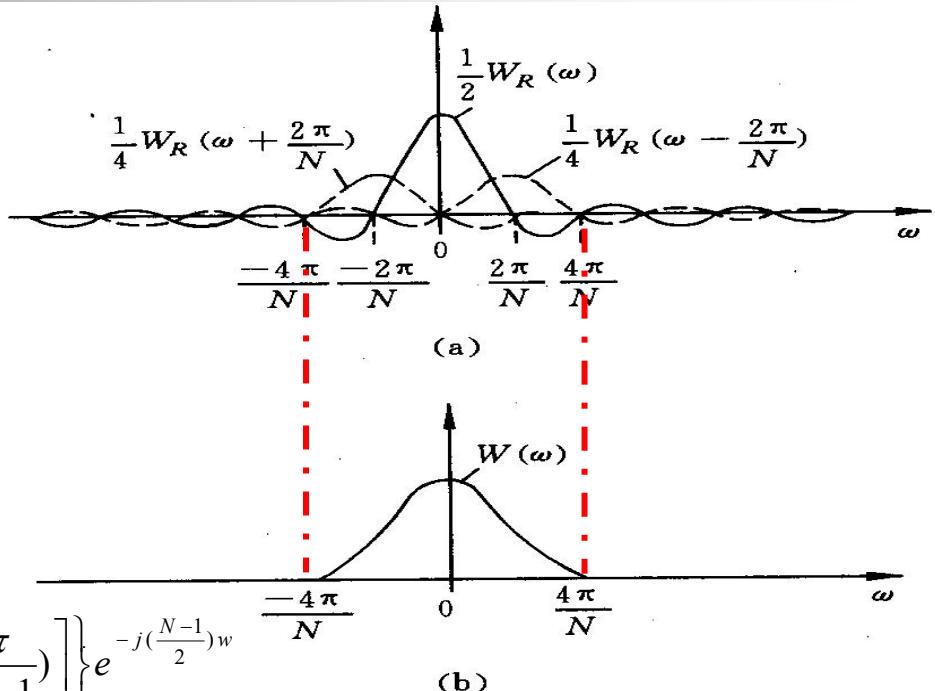
$$W(e^{jw}) = DTFT [w(n)]$$

$$= \left\{ 0.5W_R(w) + 0.25 \left[W_R \left(w - \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_R \left(w + \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \right\} e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

$$= W(w) e^{-j(\frac{N-1}{2})w}$$

北京航空航天大学

电子信息工程学院 孙国良



主瓣宽度比矩形窗的主瓣宽度增加一倍，即为 $8\pi/N$ ，但是阻带最小衰减变为**44db**。

4、海明 (Hamming) 窗 (改进的升余弦窗)

- 对升余弦改进，可得到旁瓣更小的效果：

$$\begin{aligned} w(n) &= \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_R(n) \\ W(w) &= 0.54 W_R(w) + 0.23 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ &\approx 0.54 W_R(w) + 0.23 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N}\right) \right], (\text{当 } N \gg 1) \end{aligned}$$

- **99.963%**的能量集中在窗谱的主瓣内，主瓣宽度相同为 $8\pi/N$ ，但旁瓣幅度更小，旁瓣峰值小于主瓣峰值的**1%**，此时阻带最小衰减为**53db**。

5、布拉克曼窗 (Blackman)

- 为抑制旁瓣，可再加上余弦的二次谐波分量，

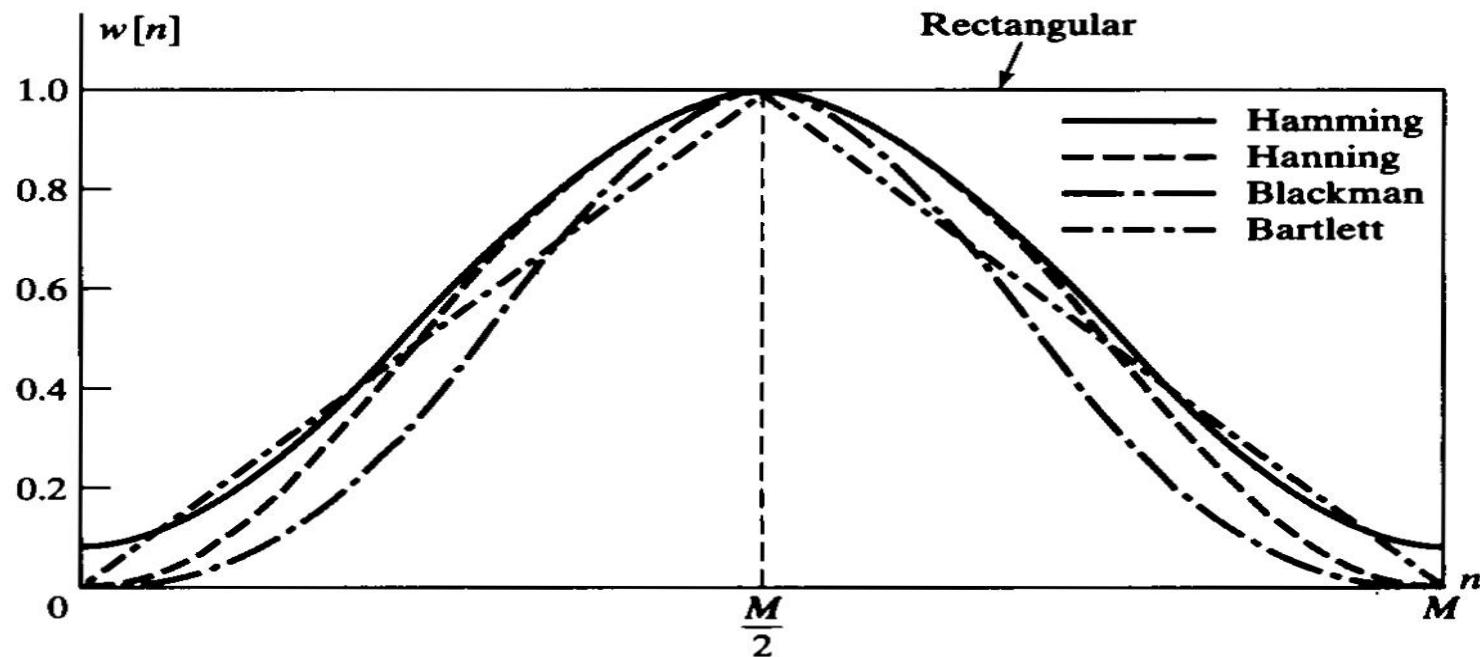
$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

$$W(w) = 0.42 W_R(w)$$

$$+ 0.25 \left[W_R\left(w - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] + 0.04 \left[W_R\left(w - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(w + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]$$

- 主瓣宽度为矩形窗谱主瓣宽度的三倍，即为 $\frac{12\pi}{N}$ ，此时，阻带最小衰减为**74db**。

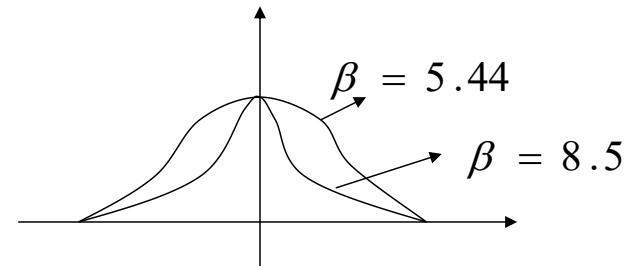
五种窗函数时域波形



6、凯泽窗 (Kaiser)

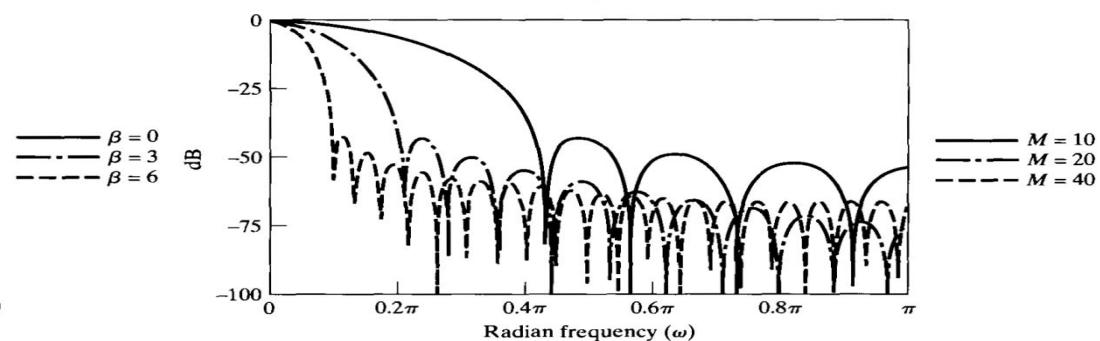
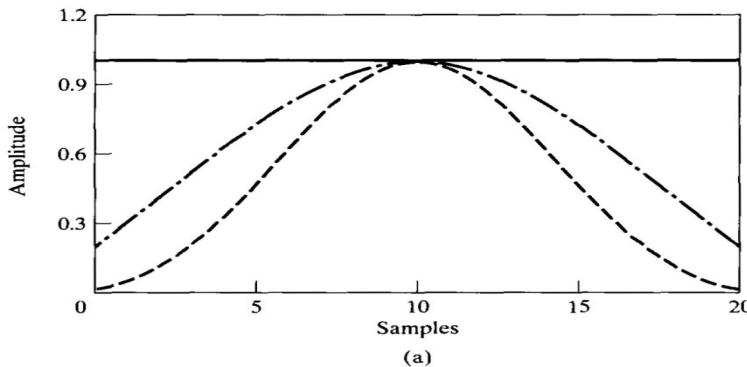
- 一种适应性强的窗，其窗函数的表示式为

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$$

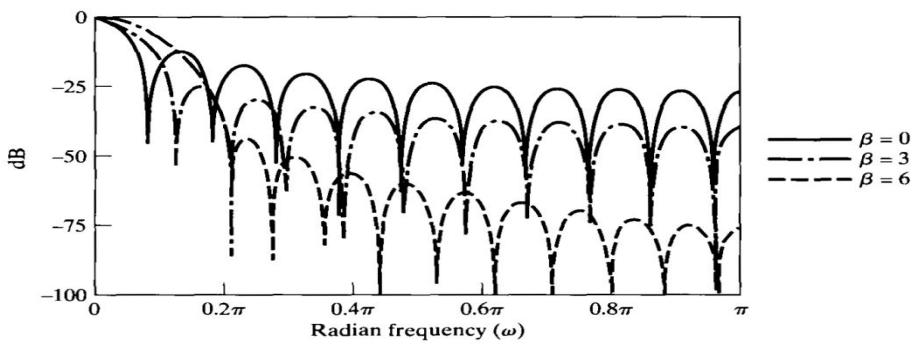


- $I_0(\cdot)$ 是第一类变形零阶贝塞尔函数， β 是一个可自由选择的参数，它可以同时调整主瓣宽度与旁瓣电平
 - β 越大，则窗越尖锐，而频谱的旁瓣相对越小，但主瓣宽度也相应增加。
 - 主瓣宽度同时也可由窗口长度调节

凯泽窗



(a)



凯泽窗性能一览表

β	过渡带	阻带最小衰减/dB
2.120	$3.00 \pi /N$	-30
3.384	$4.46 \pi /N$	-40
4.538	$5.86 \pi /N$	-50
5.658	$7.24 \pi /N$	-60
6.764	$8.64 \pi /N$	-70
7.865	$10.0 \pi /N$	-80
8.960	$11.4 \pi /N$	-90
10.056	$12.8 \pi /N$	-100

凯泽窗函数以 $n = (N-1)/2$ 为对称中心呈偶对称，两端不为零。

六种窗函数基本参数的比较

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

凯泽窗经验设计法

- 给定过渡带宽 Δw , 阻带衰减 $\delta_2 = -20 \log_{10} \alpha_2 (dB)$, 则可求得凯泽窗**FIR**滤波器的阶数**N** (**M=N-1**)和形状参数 β , 即

$$M = 2\alpha = \frac{\delta_2 - 7.95}{2.286 \Delta w}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (\delta_2 - 8.7), & \delta_2 \geq 50 dB \\ 0.5842 (\delta_2 - 21)^{0.4} + 0.07886 (\delta_2 - 21), & 21 dB < \delta_2 < 50 dB \\ 0, & \delta_2 \leq 21 dB \end{cases}$$

- 最小阻带衰减只由窗形状决定, 不受**N**的影响
- 而过渡带的宽度则随窗宽**N**的增加而减小。

(三)、窗函数法的设计步骤

- 1) 给定所要求的频率响应函数 $H_d(e^{jw})$;
- 2) 求理想单位冲激响应: $h_d(n) = IDFT [H_d(e^{jw})]$
- 3) 由过渡带宽及阻带最小衰减的要求, 选定窗的形状参数及N的大小, 一般N要通过几次试探而最后确定;
- 4) 求得所设计的FIR滤波器的单位抽样响应
$$h(n) = h_d(n)w(n), n = 0, 1, \dots, N - 1$$
- 5) 求 $H(e^{jw}) = DTFT [h(n)]$, 检验是否满足设计要求, 否则需重新设计。

窗函数设计举例

- 利用窗函数法设计滤波器，满足指标：

$$1 - \delta_1 \leq |H_{lp}(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\omega| < \omega_p$$

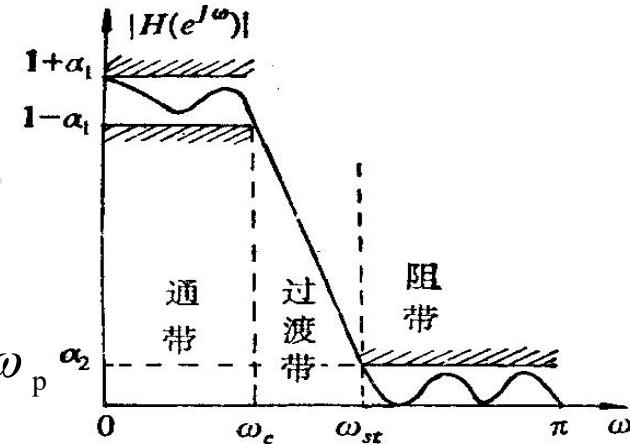
$$|H_{lp}(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_s < |\omega| \leq \pi$$

$$\omega_p = 0.4\pi, \omega_s = 0.6\pi, \delta_1 = 0.01, \delta_2 = 0.001$$

- 解：由于窗函数设计法的通带最大衰减与阻带最小衰减相同。为达到题目预期指标，以阻带最小衰减指标进行设计。

$$A = -20\lg 0.001 = 60\text{dB}, \quad \Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$$

- 由于窗函数设计法在幅度间断点处（过渡带）逼近的对称性，因此所对应的理想低通滤波器的截止频率为 $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.5\pi$



第II类线性相位系统

■ 滤波器的单位冲激响应:

$$h_{hp}[n] = \frac{\sin \omega_c (n - M/2)}{\pi(n - M/2)} \cdot I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{M}\right)^2}\right)$$

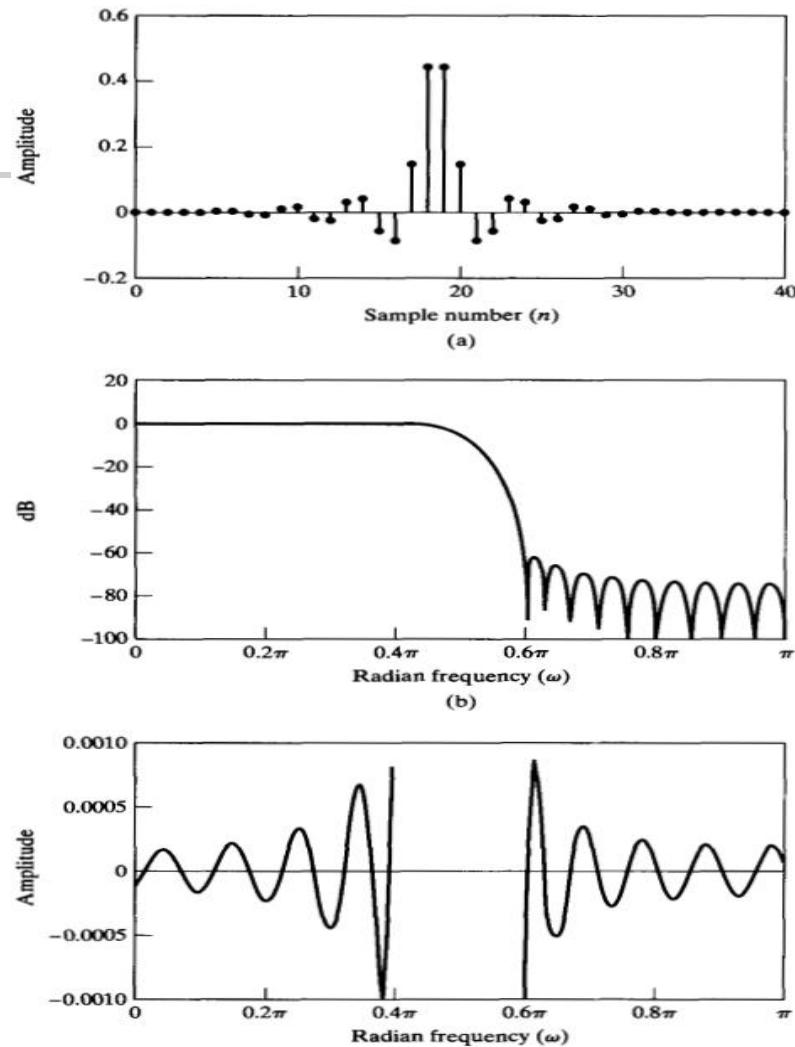
■ 由凯泽窗设计公式可得:

$$M = \frac{\delta_2 - 7.95}{2.286 \Delta w}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\delta_2 - 8.7), & \delta_2 \geq 50 \text{ dB} \\ 0.5842(\delta_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\delta_2 - 21), & 21 \text{ dB} < \delta_2 < 50 \text{ dB} \\ 0, & \delta_2 \leq 21 \text{ dB} \end{cases}$$

$$\beta = 5.653, M = 36.238 \approx 37$$

北京航空航天大学



高通滤波器

$$h_{hp}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - M/2)}{\pi(n - M/2)} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n - M/2)}{\omega_c(n - M/2)}$$

- 理想高通滤波器的频率响应为：

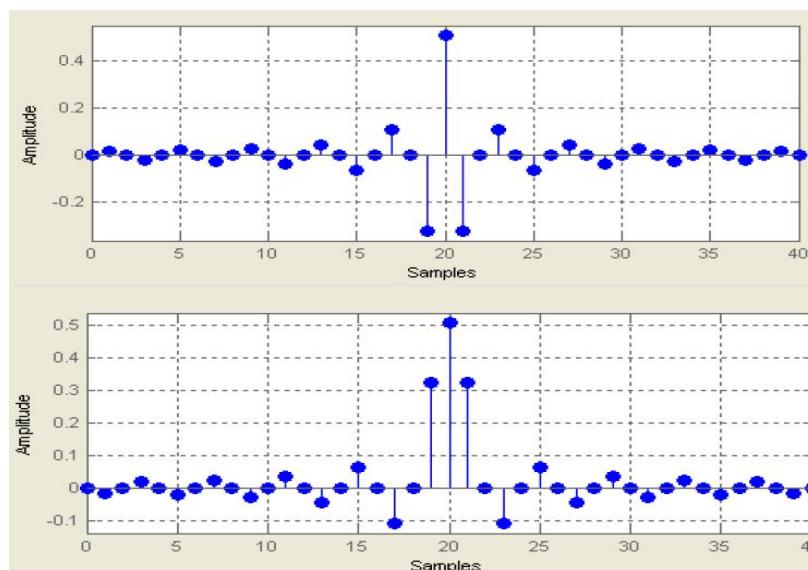
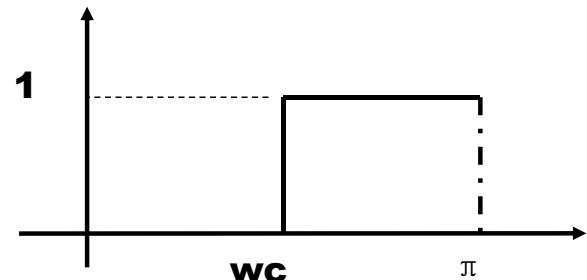
$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega M/2} & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- 其单位冲激响应为 (M必须是偶数)

$$h_{hp}[n] = \frac{\sin \pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)} - \frac{\sin \omega_c(n - M/2)}{\pi(n - M/2)}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi} & n = a \\ -\frac{\sin \omega_c(n-a)}{\pi(n-a)} & n \neq 0 \end{cases}$$

北京航空航天大学



窗函数法设计高通滤波器

- 高通滤波器的技术指标:

$$\left| H_{hp}(e^{j\omega}) \right| \leq \delta_2, \quad |\omega| < \omega_s$$

$$1 - \delta_1 \leq \left| H_{hp}(e^{j\omega}) \right| \leq 1 + \delta_1, \quad \omega_p < |\omega| \leq \pi$$

$$\omega_s = 0.35\pi, \omega_p = 0.5\pi, \delta_1 = \delta_2 = 0.021$$

- 根据凯泽窗设计公式可得到:

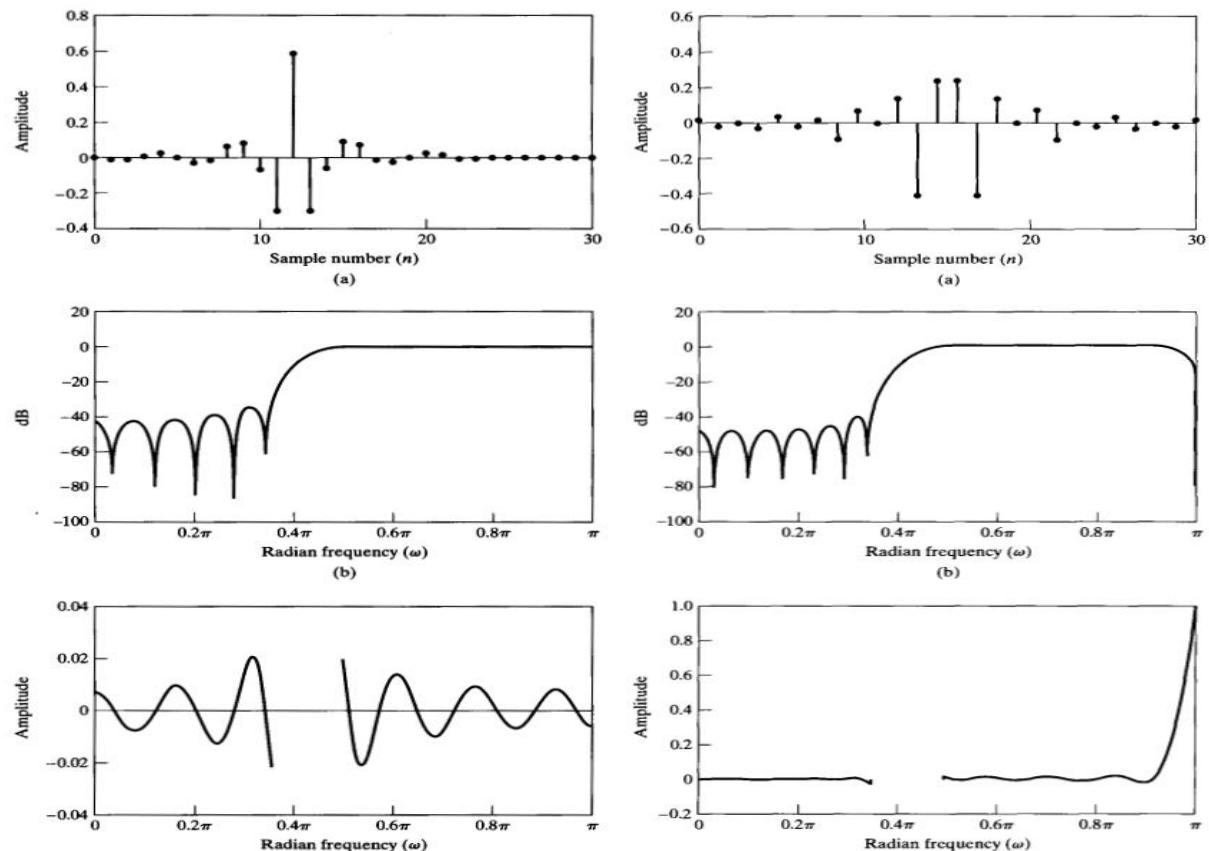
$$\beta = 2.6, M = 24$$

- 由窗函数设计法的对称性可得:

$$\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.425\pi$$

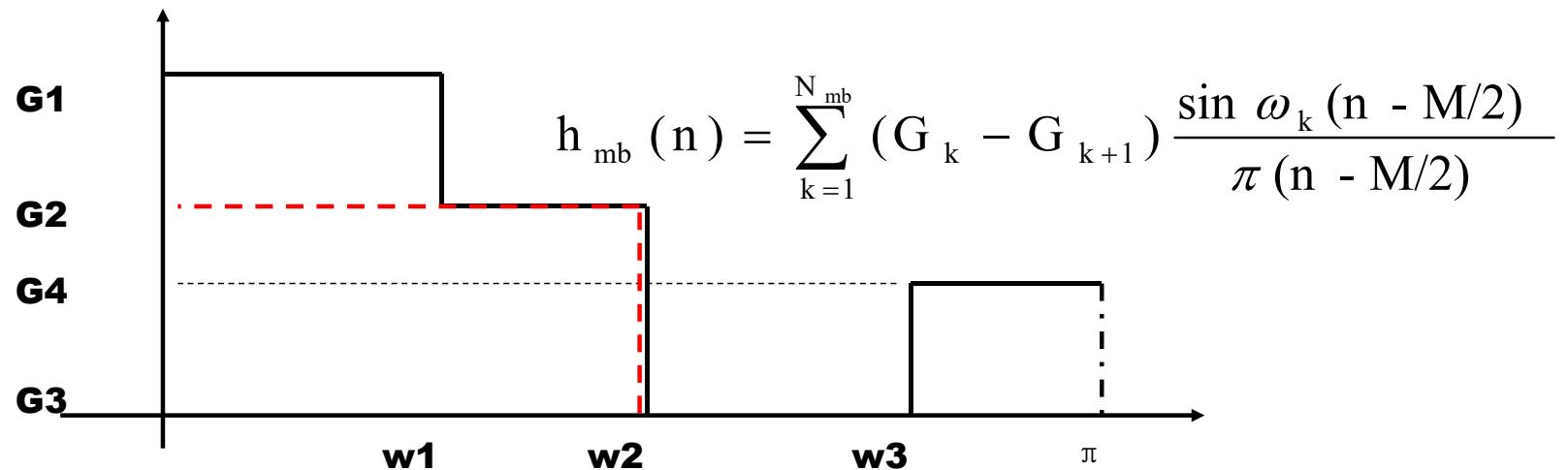
第I类线性相位高通滤波器

- 验证计算可得此时的通带逼近误差为0.0213，高于预定指标0.021
- 可以通过增大 β 的方法而达到预定指标；也可以保持 β 不变，改变M。
 - 将M增大至25，调整过渡带变窄而满足指标，但此时为II类线性相位系统，在 $\omega = \pi$ 处为零，不适合高通系统。
 - 可以将M增大至26就会解决此问题。



多通带滤波器设计

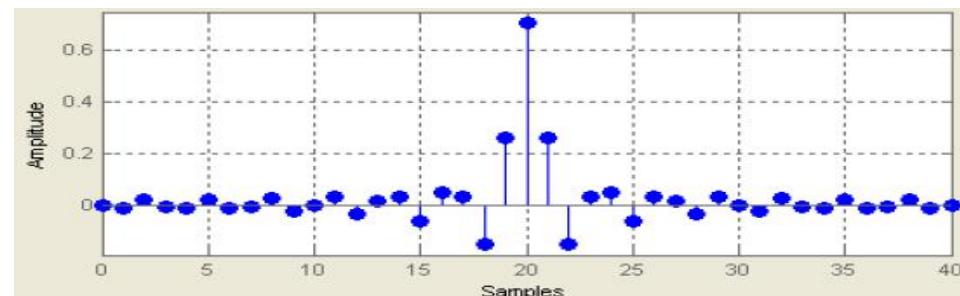
$$\varphi(\omega) = e^{-j\omega M/2}$$



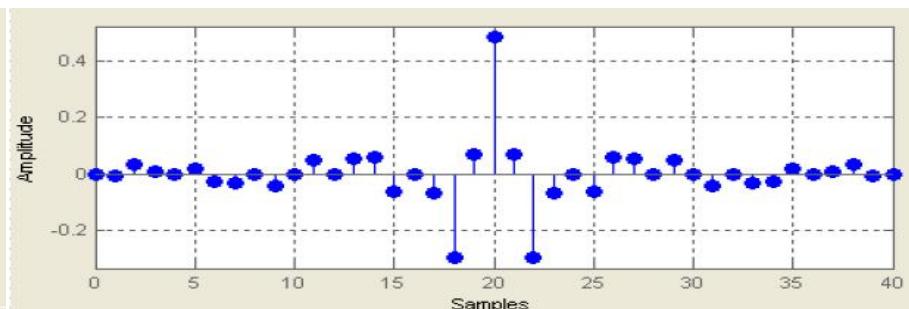
逼近误差与跳变幅度成正比，在设计时需要进行指标的归一化，利用最苛刻的指标进行凯泽窗设计

帶通, 帶阻濾波器

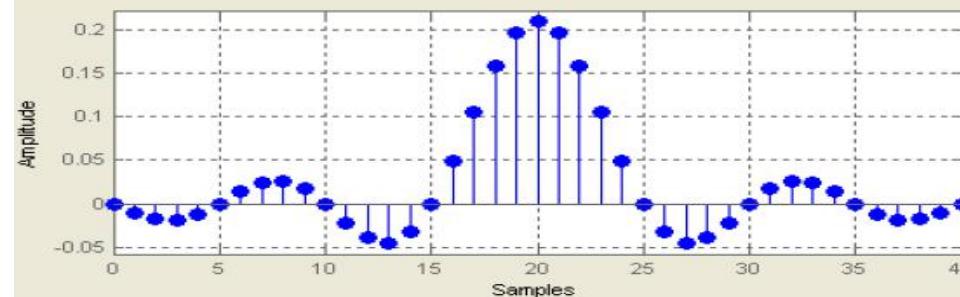
A



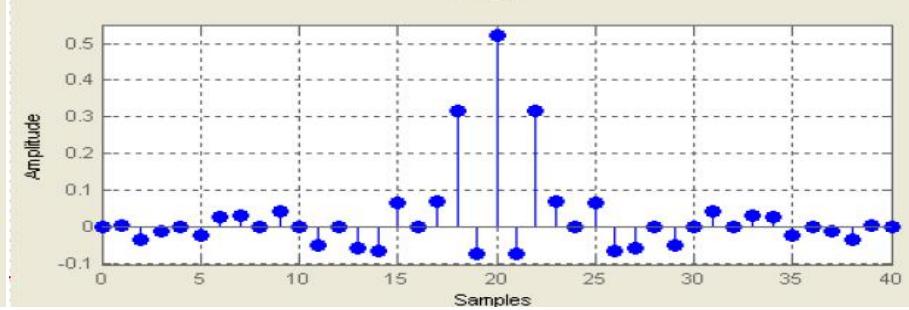
B



C



D



$$A=w1, C=w2, B=A-C, D=\text{全通}-B$$

离散时间微分器

- 零相微分器:

$$H_{diff}(\omega) = j\omega$$

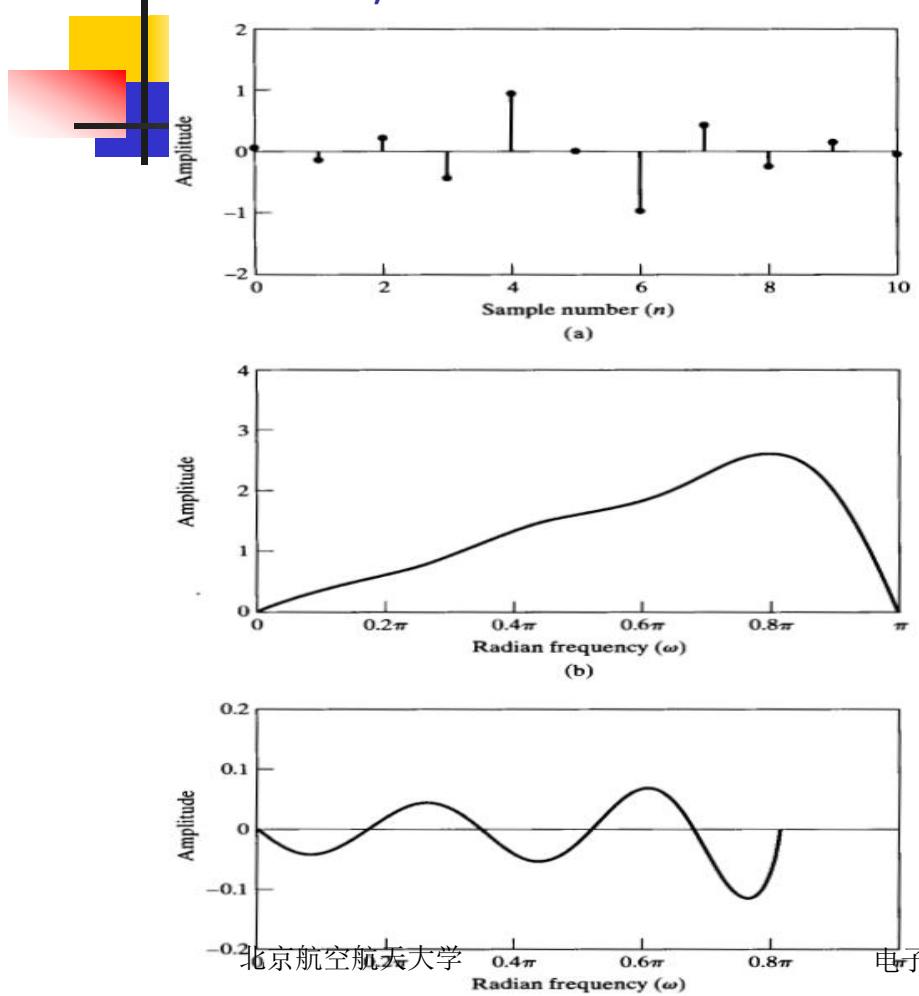
$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} jw e^{jwn} dw \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w \cos(wn) dw - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w \sin(wn) dw \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w \sin(wn) dw = -\frac{1}{2\pi n^2} \int_{-n\pi}^{n\pi} x \sin(x) dx \\ &= \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 理想微分器的频率响应为:

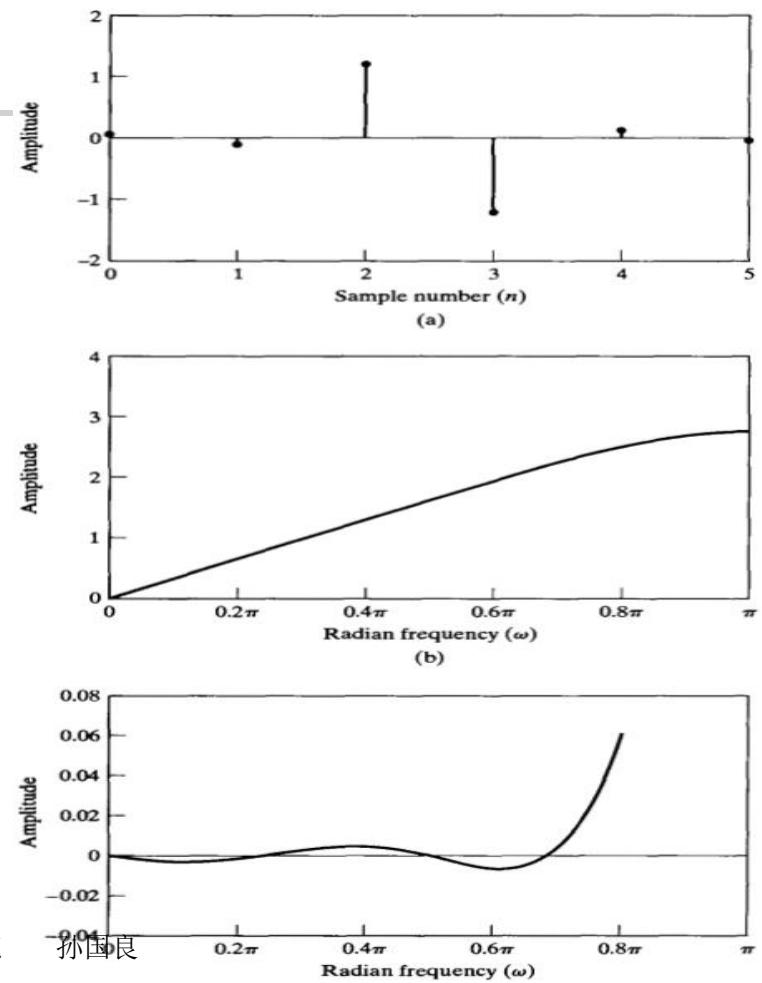
$$H_{diff}(\omega) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}$$

- 其理想冲激响应为: $h_{diff}(n) = \frac{\cos \pi(n - M/2)}{(n - M/2)} - \frac{\sin \pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)^2}$

$M=5, b=2.4$



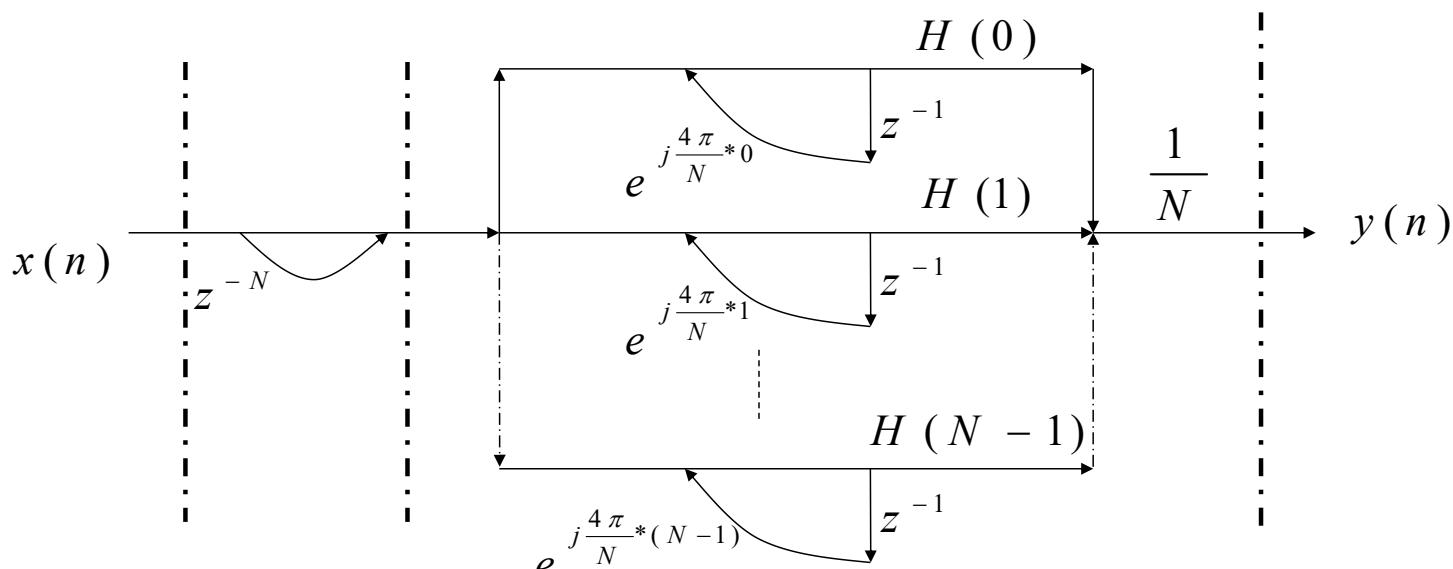
$M=10, b=2.4$



FIR滤波器---频率抽样设计

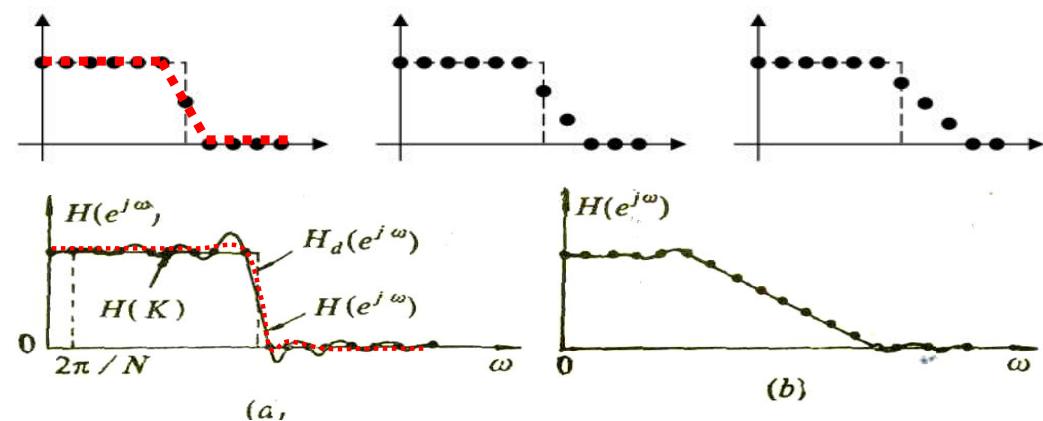
- 频域内插公式:

$$H(z) = \frac{1}{N} \underbrace{(1 - z^{-N})}_{H_c(z)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{H(k)}{\underbrace{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k}}_{H_K(z)} z^{-1}} \right)$$



过渡带抽样优化设计

- 频率抽样法优点是可以在频域直接设计，适合于最优化设计
- 频率抽样点上滤波器实际频率响应和理想频率响应数值相等。
- 抽样点之间的频率响应有一定的逼近误差。逼近误差取决于理想频率响应曲线形状，采样点数等。一般过渡带取二、三点抽样值即可得到满意结果。
- 可以直接由频率内插结构实现，同时由频率内插公式求得频率响应；也可以由 $H(K)$ 求得 $h(n)$ ，从而求取单位冲激响应，并实现滤波器
- 在低通设计中，不加过渡抽样点时，阻带最小衰减为**-20dB**，
 - 一点过渡抽样的**最优**设计，阻带最小衰减可提高到**-40**到**-54dB**左右，
 - **二点**过渡抽样的最优设计可达**-60dB**到**-75dB**左右，
 - 三点过渡抽样的最优设计则可达**-80dB**到**-95dB**左右。



频率抽样法设计低通滤波器

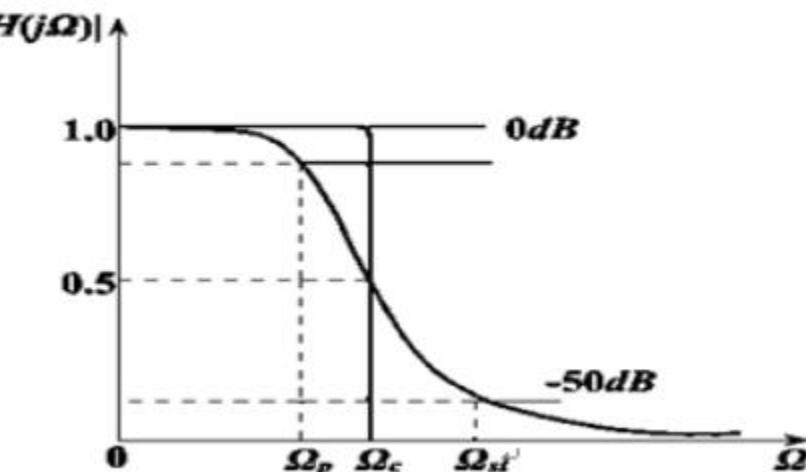
- FIR低通滤波器，希望在采样频率为15kHz，其通带截至频率为1.6kHz，阻带起始频率为3.1kHz，通带波纹小于1db，阻带衰减大于50dB。

$$\text{通带的截止频率为 } w_p = \frac{\Omega_p}{f_s} = 2\pi \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 2\pi \times \frac{2\pi \times 1.6 \times 10^3}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} = 0.213\pi$$

$$\text{阻带的起始频率为 } w_a = \frac{\Omega_a}{f_s} = 2\pi \frac{\Omega_a}{\Omega_s} = 2\pi \times \frac{2\pi \times 3.1 \times 10^3}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} = 0.413\pi$$

$$\text{理想低通截止频率 } \Omega_c = \frac{1}{2}(\Omega_p + \Omega_a) = 2\pi \times 2.35 \times 10^3 \text{ (rad/sec)}$$

$$\text{其对应的数字频率 } w_c = 2\pi \frac{\Omega_c}{\Omega_s} = 2\pi \times \frac{2\pi \times 2.35 \times 10^3}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} = 0.313\pi$$



频率抽样 N=30

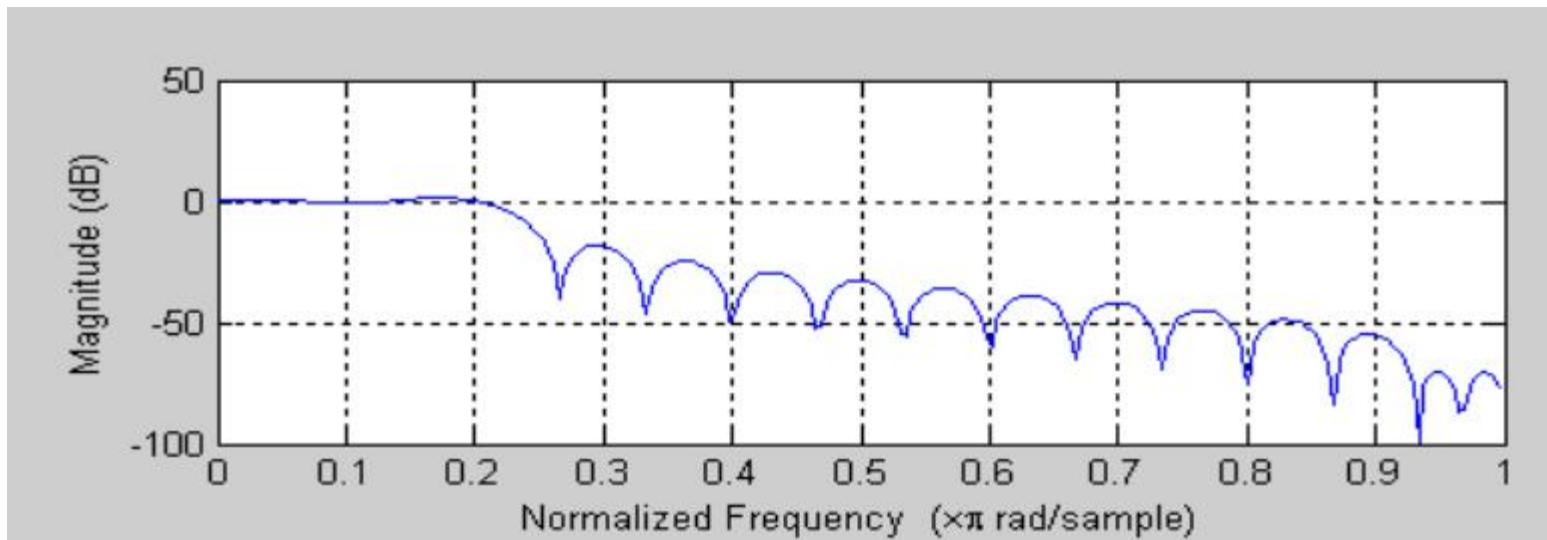
$$w_p = \frac{\Omega_p}{f_s} = 2\pi \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 2\pi \times \frac{2\pi \times 1.6 \times 10^3}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} = 0.213\pi$$

$$w_{st} = \frac{\Omega_{st}}{f_s} = 2\pi \frac{\Omega_{st}}{\Omega_s} = 2\pi \times \frac{2\pi \times 3.1 \times 10^3}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} = 0.413\pi$$

$$\sigma_2 \geq 50 \text{ dB}$$

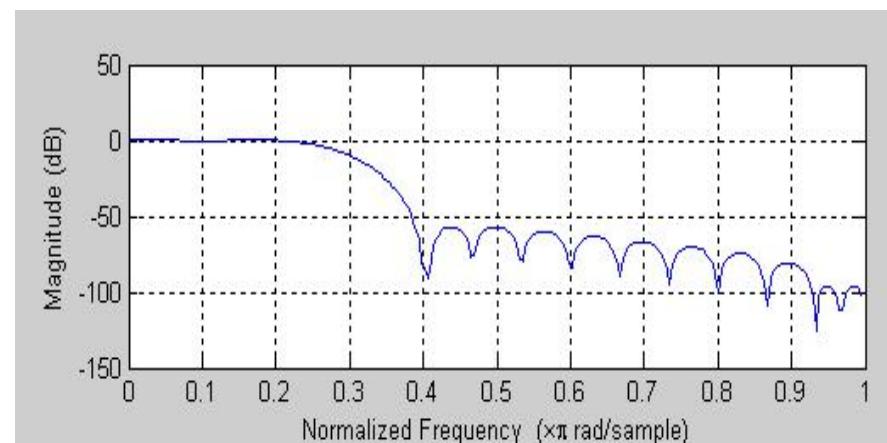
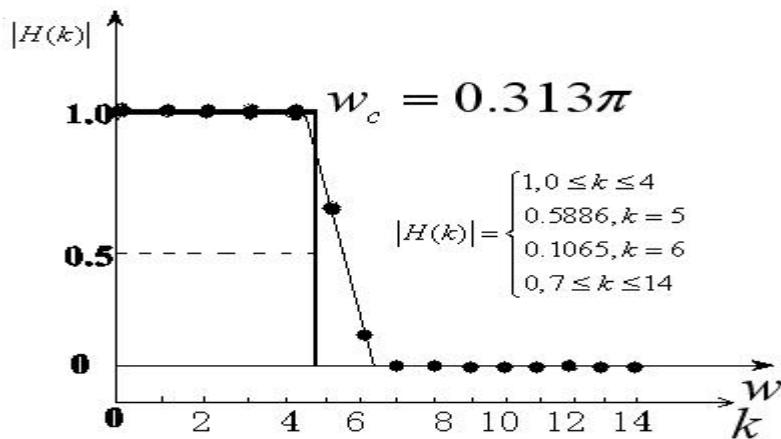
$$|H(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \text{Int}\left[\frac{N\omega_c}{2\pi}\right] = 4 \\ 0 & 5 \leq k \leq \frac{N-1}{2} = 14 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j14.5\omega} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{30\omega}{2}\right)}{30\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^4 \left[\frac{\sin\left[30\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{30}\right)\right]}{30\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{30}\right)} + \frac{\sin\left[30\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{30}\right)\right]}{30\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{30}\right)} \right] \right\}$$

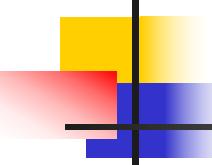


过渡点优化

- 为改善频率特性，以满足指标要求，在通带和阻带交界处安排一个或者几个不等于1的抽样值。
- 此处令： $|H(5)| = 0.5886$ $|H(6)| = 0.1065$



- 优化后最小阻带衰减约为 -60 dB左右



频率抽样法设计步骤

- (1) 确定**性能**要求和滤波器**阶数** $N=2\pi/\Delta\omega$ 。
- (2) 根据要求，确定**理想**频率响应的幅度和相位。
- (3) 对**频率**响应在 $0\sim 2\pi$ 区间等间隔**取样**，得到 $H(k)$ 。
- (4) 根据内插公式，求出 $H(z)$ 的幅频特性曲线。
- (5) **检查**幅频特性是否满足性能要求，若不满足，可调整过渡带取样点值，**重复**第(2)步，直到满足条件为止。
- (6) 可以直接用频率抽样结构实现滤波器，也可以对 $H(k)$ 作IDFT求得 $h(k)$ 后选择合适结构实现。

作业：

- 7.5
- 7.15
- 7.16
- 7.33





谢 谢

• 授课教师：孙国良 •

Email: mrsqli@buaa.edu.cn