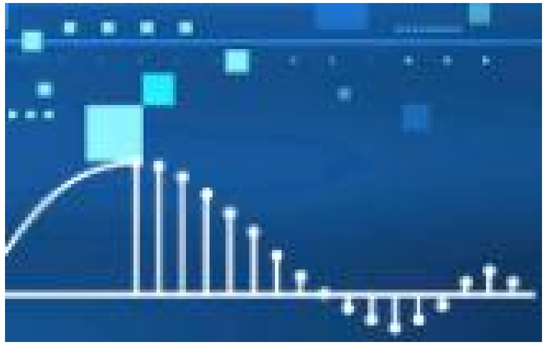
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

2020/08

德才兼备 知行合一
DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第一章 离散时间信号与系统

Contents

一 六大信号

二 九种运算

三 五类系统

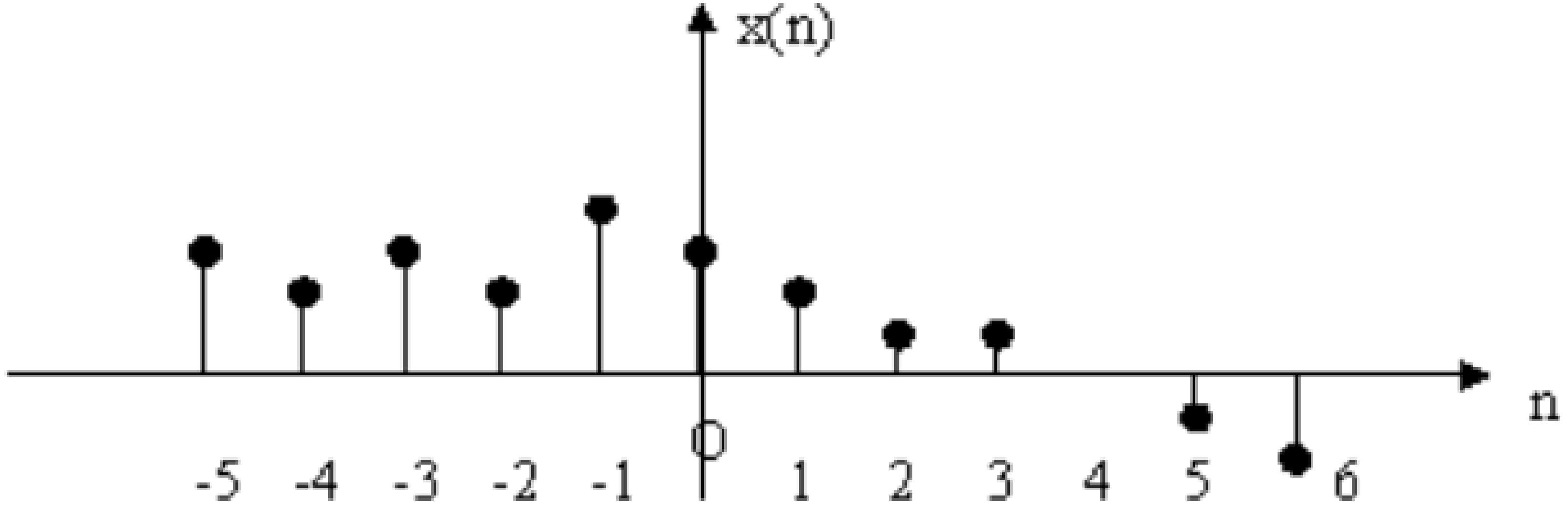
离散时间信号（序列）

- 离散时间信号
- 离散时间系统
- 线性时不变系统
- 线性常系数差分方程

- 定义？描述方式？
- 基本序列有哪些？
- 序列的运算形式？

1.1.1 离散时间信号定义

- 仅在离散时刻点上有意义的信号或不连续瞬时刻给出函数值的函数
- 通常用集合来表示，记作：
  - $x=\{x(n)\} \leftarrow \{x_a(nT)\}$ ($-\infty < n < +\infty$)
  - 图形表达：

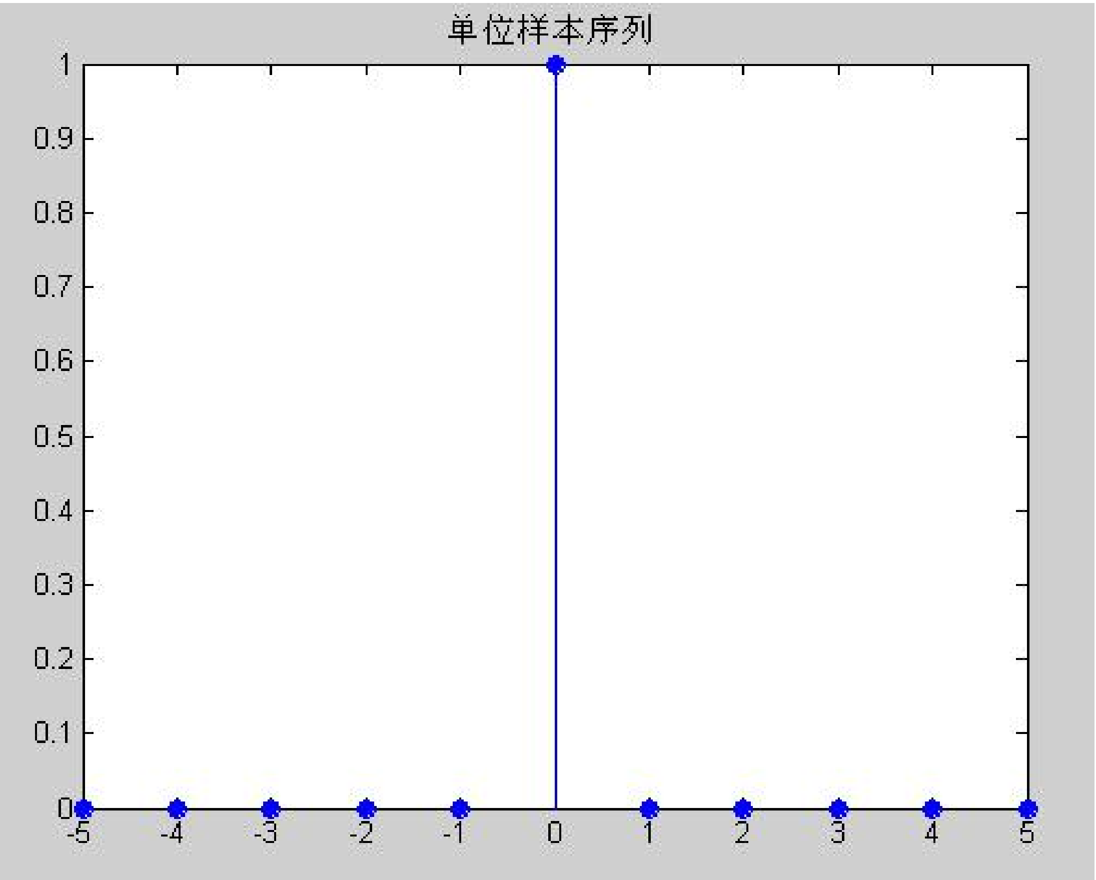


1.1.2 基本序列

- **1、单位冲激（抽样、样本）序列**

$$\delta(n-n0)=\begin{cases}0 & n\neq n0\\ 1 & n=n0\end{cases}$$

```
function[x,n] = impseq(n0,n1,n2)
n = [n1:n2];
x = [(n-n0) == 0];
```



2、单位阶跃序列

$$u(n-n0)=\begin{cases}0 & n<n0\\ 1 & n\geq n0\end{cases}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

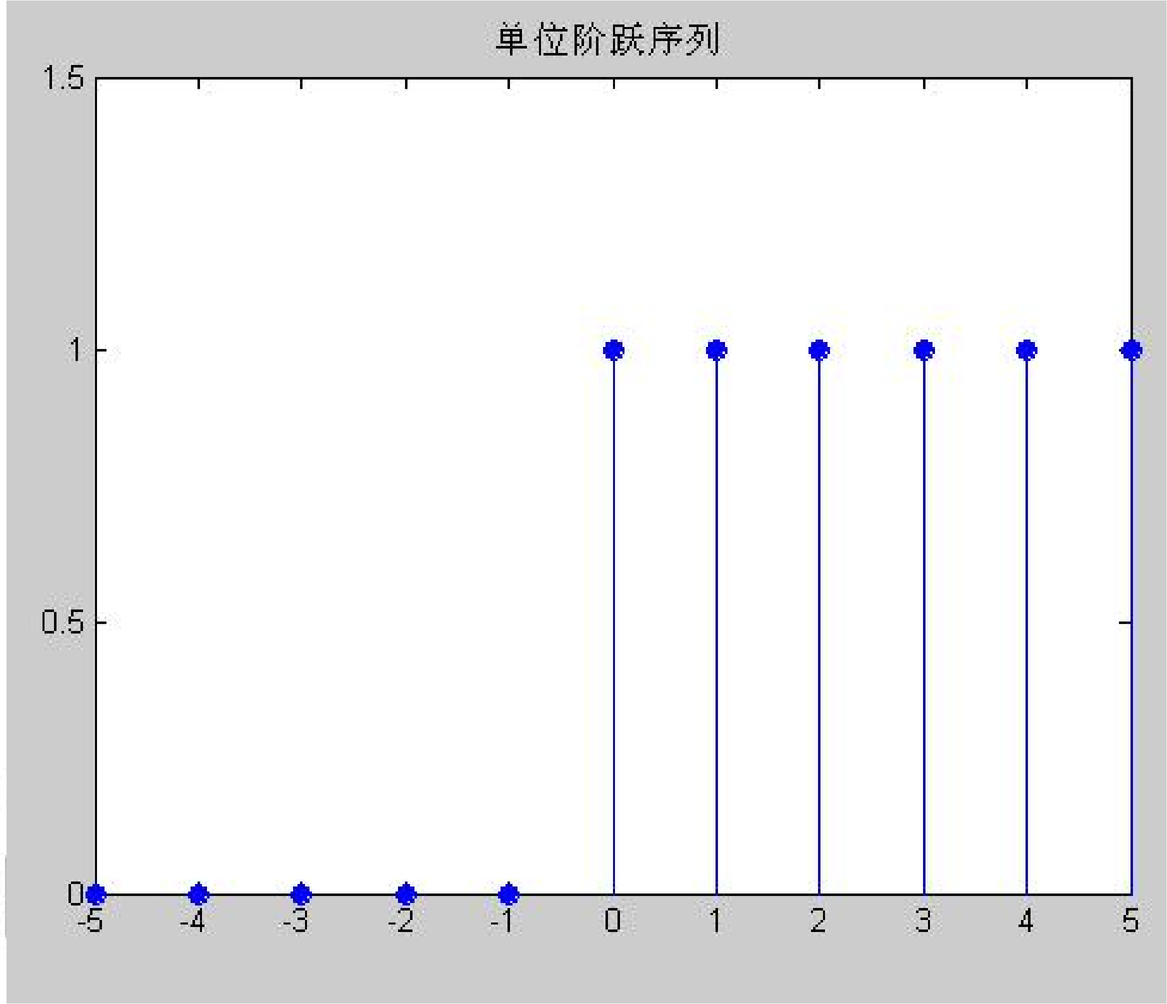
$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(k)u(n-k)=\delta(n)*u(n)$$

$function[x,n]=stepseq(n_0,n_1,n_2)$

$n=[n1:n2];$

$x=[(n-n0)>=0];$



基本序列

- **3、矩形窗序列**

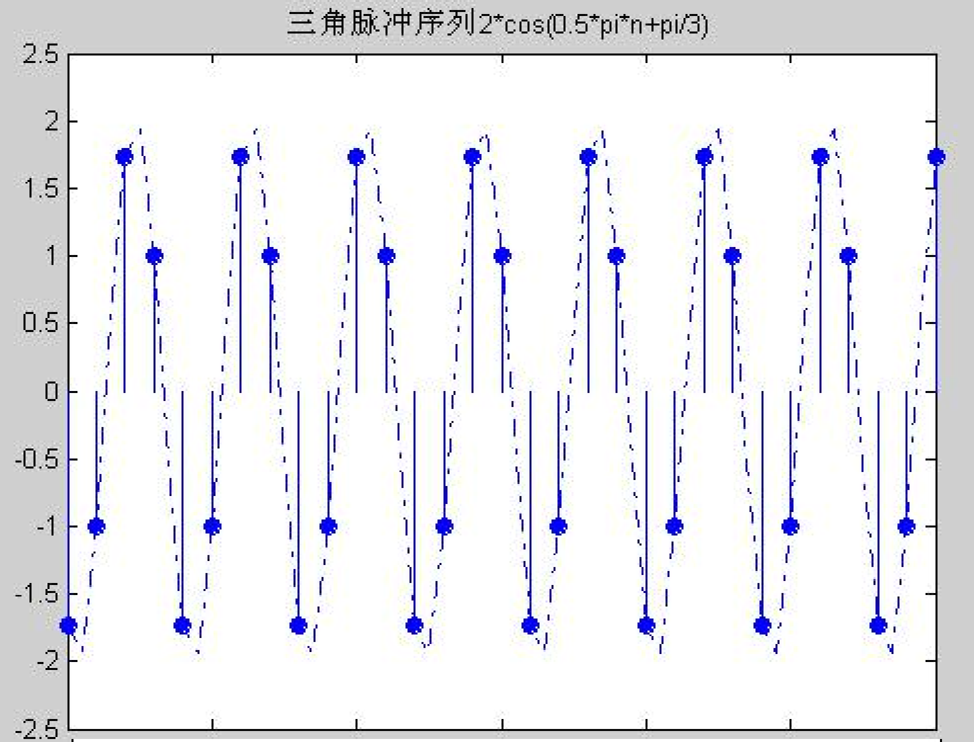
$$R_N(n)=G_N(n)=\begin{cases}0 & \text{其它}\\ 1 & 0\le n\le N-1\end{cases}$$

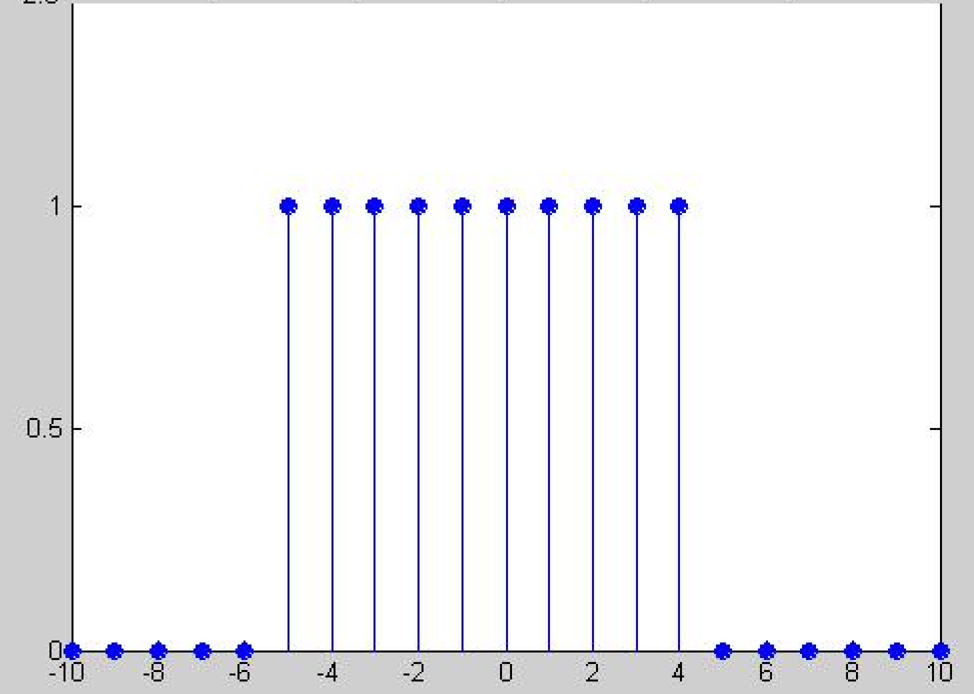
$$R_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)=u(n)-u(n-N)$$

- **4、正弦（三角）序列**

$$x(n)=A\cos(\omega_0 * n+\theta_0)$$

- **5、指数序列** $x(n)=A\alpha^n$
- **6、周期序列** $x(n)=x(n+N)$





关于三角序列的频率和周期

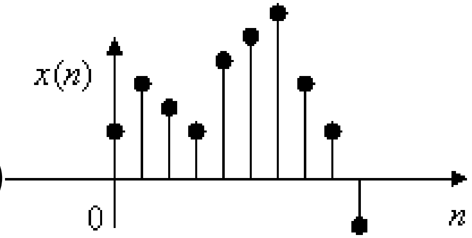
$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega_0}\text{为整数时，} & N=\frac{2\pi}{\omega_0};\\ \frac{2\pi}{\omega_0}\text{为有理数时，} & N>\frac{2\pi}{\omega_0}, N=\frac{2\pi}{\omega_0}*k=\frac{Q}{P}*k=Q\\ \frac{2\pi}{\omega_0}\text{为无理数时，} & N\text{不存在，为非周期序列}\end{cases}$$

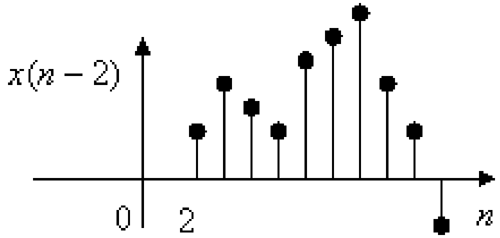
- 无论N是否存在，ω_0 皆称为序列的频率。

1.1.3 序列基本运算

- 1、移位

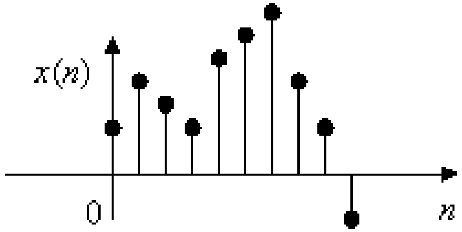
$$y(n)=x(n-m)$$

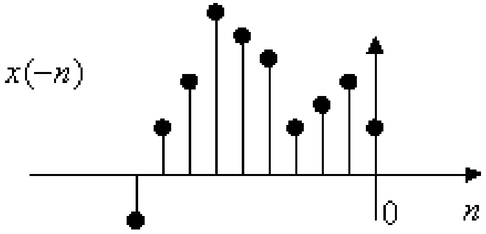




- 2、翻褶

$$y(n)=x(-n)$$





- 3、和、差

$$y(n)=x_1(n)\pm x_2(n)$$

- 4、积、商

$$y(n)=x_1(n)\times\div x_2(n)$$

序列基本运算

- **5、累加** $S(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$
- **6、差分**
  - 前向差分： $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$
  - 后向差分： $\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$
- **7、卷积和**

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\cdot h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m)\cdot h(m)$$

例题

- 已知下面两个序列：

$$x(n) = [3,11,7,\underset{\uparrow}{0},-1,4,2];\ -3 \le n \le 3$$

$$h(n) = [2,\underset{\uparrow}{3},0,-5,2,1]; -1 \le n \le 4$$

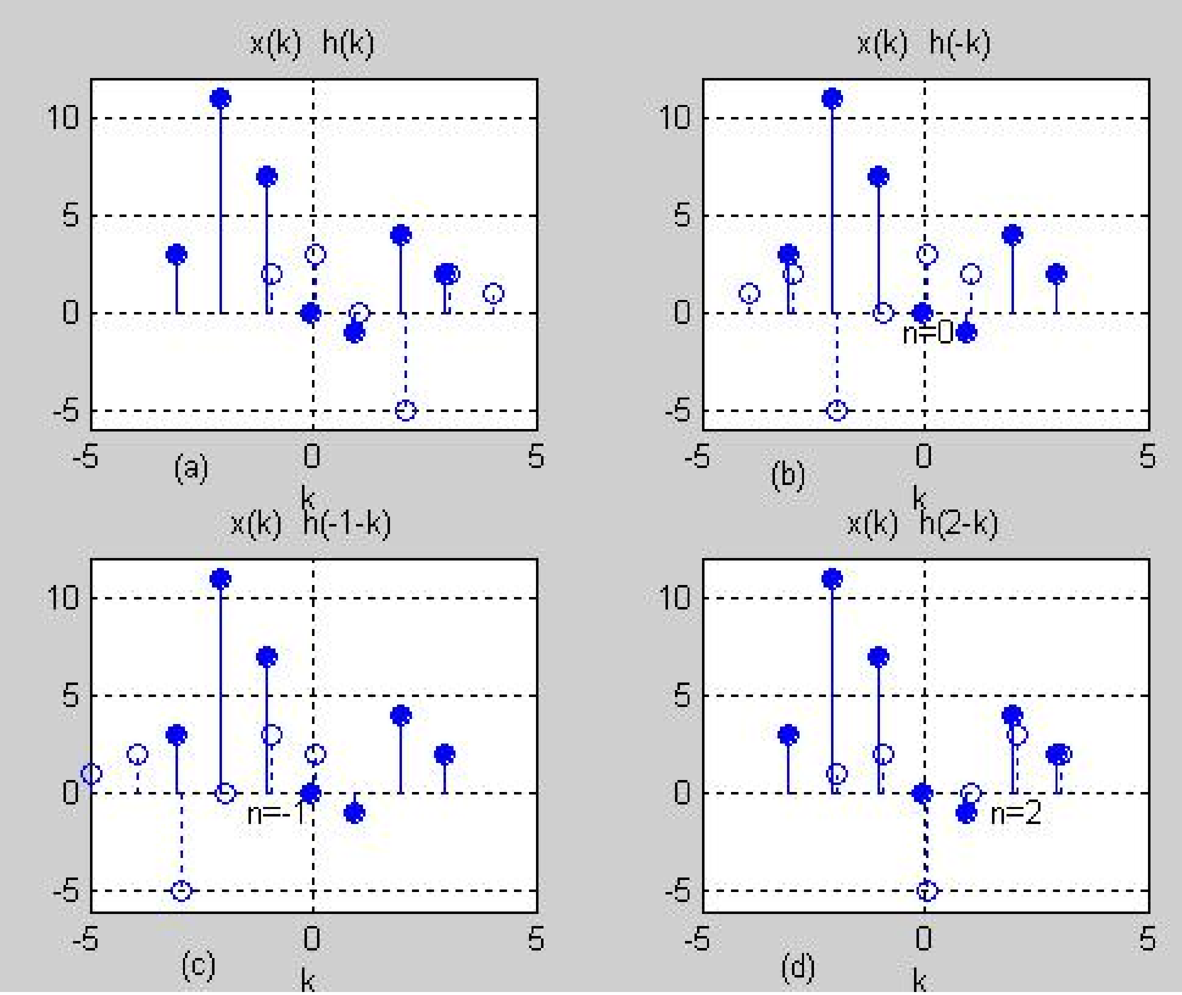
- 试求卷积y(n)=x(n)*h(n)。

方法一、定义法

$$\sum_{k} x(k)h(-1-k)$$

$$= 3\times(-5)+11\times 0+7\times 3+0\times 2$$

$$= 6 = y(-1)$$



$$y(n) = \{6,31,47,6,-\underset{\uparrow}{51},-5,41,18,-22,-3,8,2\}$$

- 注意：*y(n)*的起始点（第一个非零样本）是由n=-3+(-1)=-4给出的，而最后一点（最后一个非零样本）是由n=3+4=7给出的。

$$x(n)=[3,11,7,\underset{\uparrow}{0},-1,4,2];\ -3\le n\le 3$$

$$h(n)=[2,\underset{\uparrow}{3},0,-5,2,1];-1\le n\le 4$$

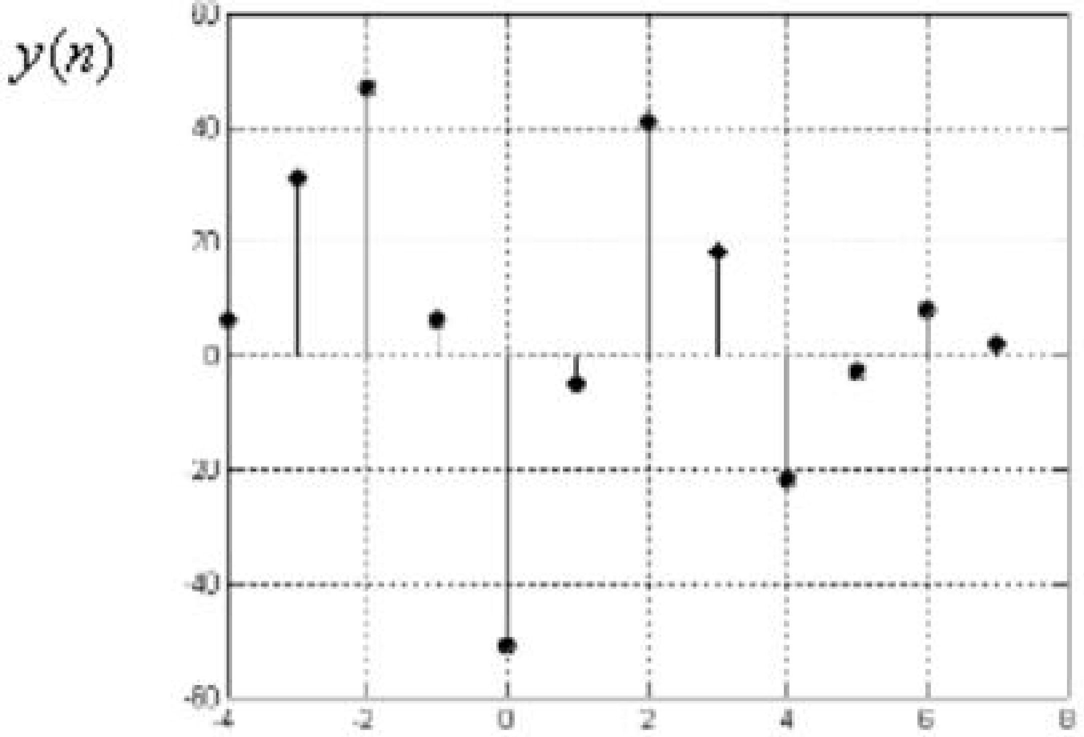
方法二：对位相乘求和法

													h(n)
						x(n): 3	11	7	0	-1	4	2	
						3	11	7	0	-1	4	2	1
					6	22	14	0	-2	8	4		2
				15	-55	-35	0	5	-20	-10			-5
			0	0	0	0	0	0	0				0
		9	33	21	0	-3	12	6					3
	6	22	14	0	-2	8	4						2
y(n):	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2	

$y(n)=\{6,31,47,6,-\underset{\uparrow}{5}1,-5,41,18,-22,-3,8,2\}$（请思考 n=0 的定时信息如何确定？）

方法三、利用 conv_m 函数

```
x = [3, 11, 7, 0, -1, 4, 2];
nx = [-3: 3];
h = [2, 3, 0, -5, 2, 1]; nh = [-1: 4];
[y,ny] = conv_m(x,nx,h,nh)
stem(ny,y,'filled');grid
```



结果：

y =	6	31	47	6	-51	-5	41	18	-22	-3	8	2
ny =	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

8、序列相关

- 相关是对两个序列相似程度的一种度量，在信号处理中应用广泛。
- 已知两个有限能量的实值序列*x(n)*和*y(n)*,其互相关是一个序列：

$$R_{xy}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot y(n-\tau)=x(n)*y(-n)$$

$$R_{xx}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot x(n-\tau)=x(n)*x(-n)$$

例题

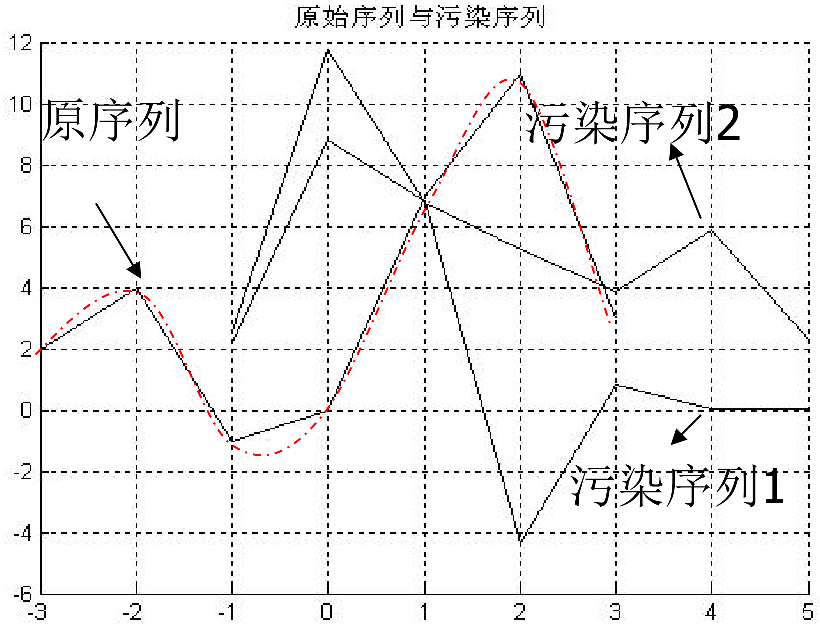
- 设x(n)是原序列，y(n)是受到噪声污损并移位的序列：

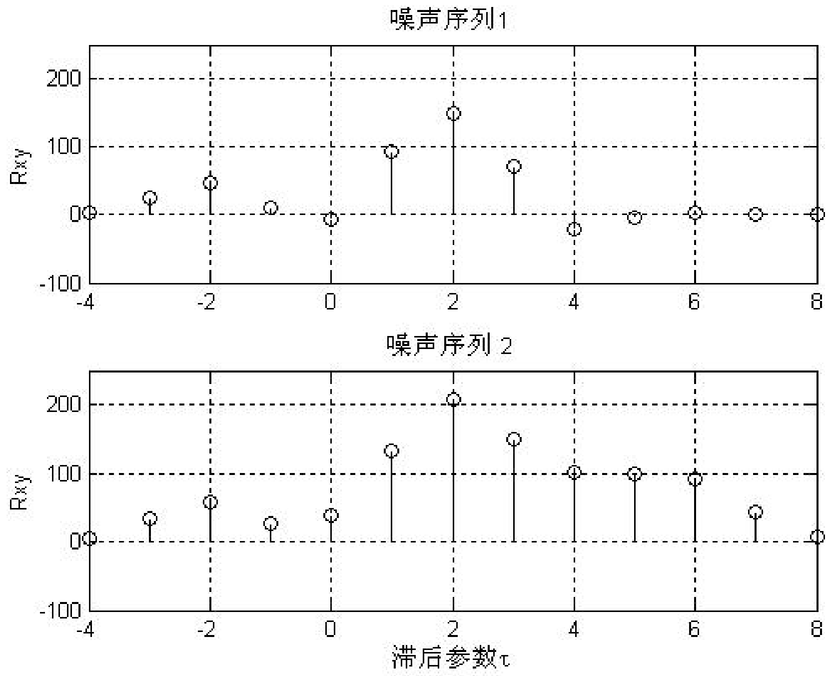
$$x(n) = [3,11,7,\underset{\uparrow}{0},-1,4,2]$$

$$y(n) = x(n-2) + \omega(n)$$

  - w(n)是均值为0，方差为1的高斯随机序列。
  - 计算y(n)和x(n)之间的互相关。

雷达信号中目标的识别与锁定





9、序列能量和功率

- 能量：

$$E=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|x(n)\right|^2$$

  - 能量有限的信号称为能量信号

- 功率：

$$P=\operatorname*{Lim}_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{+N}\left|x(n)\right|^2$$

  - 能量无限，但功率有限的信号称为功率信号

习题（第二版）

- 课后作业1：
- 2.1，2.2，2.3，
- 2.12，2.21，2.22，2.55

复习题

- 1、写出y(n)=x(n)*h(n)卷积和数学表达
- 2、假设x(n)区间是（i，j），h(n)区间是（p，q)，给出y(n)的区间；
- 3、假设x(n)=h(n)=u(n)-u(n-5)，求y(n)

离 散 时 间 系 统

- 系统定义？
- 描述方式？
- 基本系统有哪些？

1.2 离散时间系统

- 数学上，离散时间系统可以定义为一种变换或算子
  - 把输入序列按照某种规则映射为输出序列

$$y[n]=T\{x[n]\}$$

  - 注：DFT也可看作一种系统

1、无（有）记忆系统

- 输出y[n]只决定于同一时刻的输入x[n]，与其它时刻的输入序列值无关，则称该系统为无记忆系统。
  - 如：纯阻性网络、组合电路等。。。。

- 输出y[n]不仅与同一时刻的输入x[n]有关，而且与其他时刻的输入序列值有关，则称该系统为有记忆系统。
  - 如容（感）抗网络，时序电路，差分系统、平均系统等。

$$y(n)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x(n-k)$$

2、（非）线性系统

- 一个离散时间系统，如果同时满足可加性和齐次性

$$T\{x_1(n)+x_2(n)\}=T\{x_1(n)\}+T\{x_2(n)\}$$

$$T\{k*x(n)\}=k*T\{x(n)\}$$

$$T\{\sum_i k_i*x_i(n)\}=\sum_i k_i*T\{x_i(n)\}$$

$$y(n)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x(n-k)$$

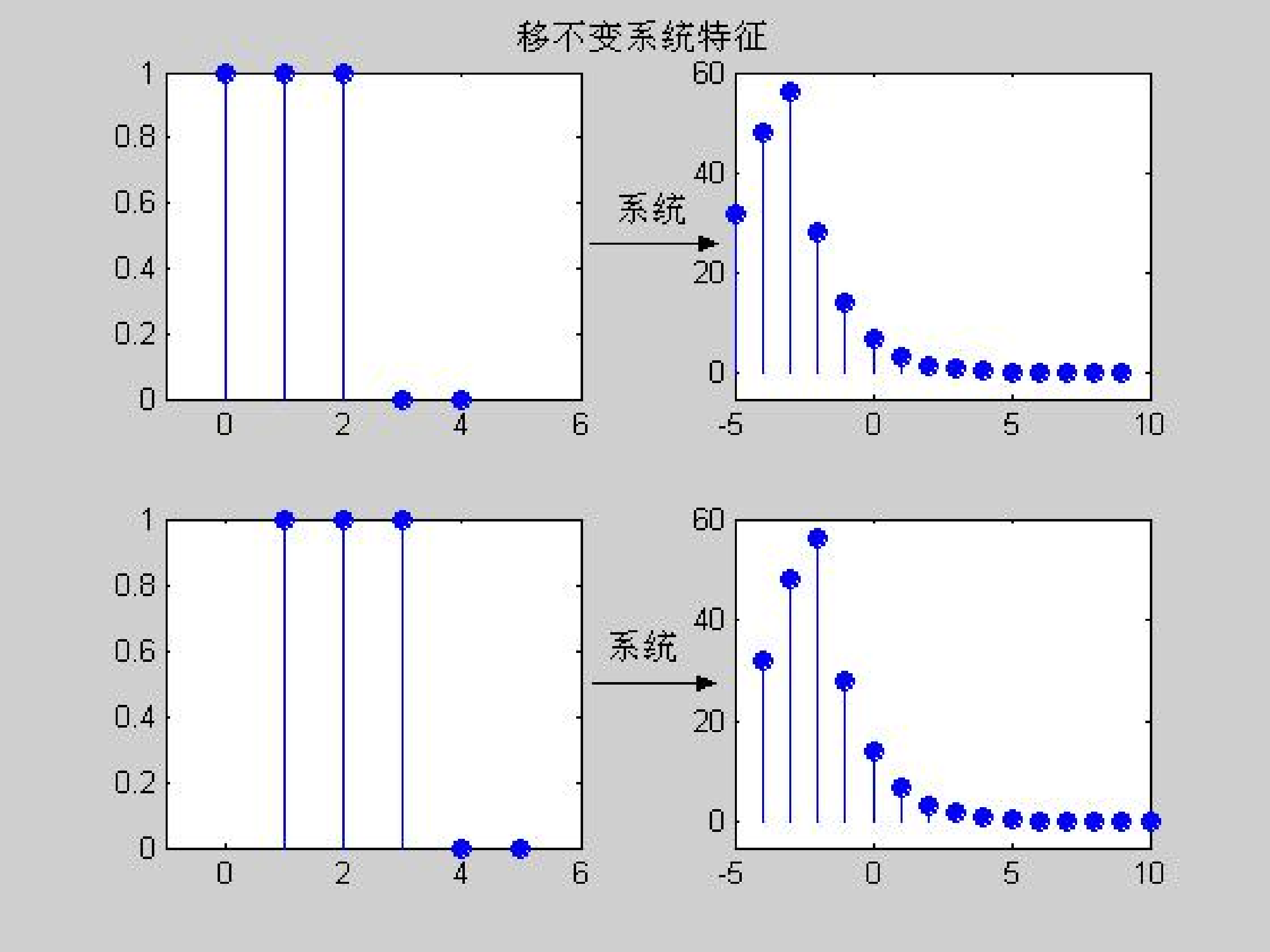
3、时（不）变系统

- 如果输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟，若：
- $$T\{x(n)\} = y(n)$$
- 则有：

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0)$$

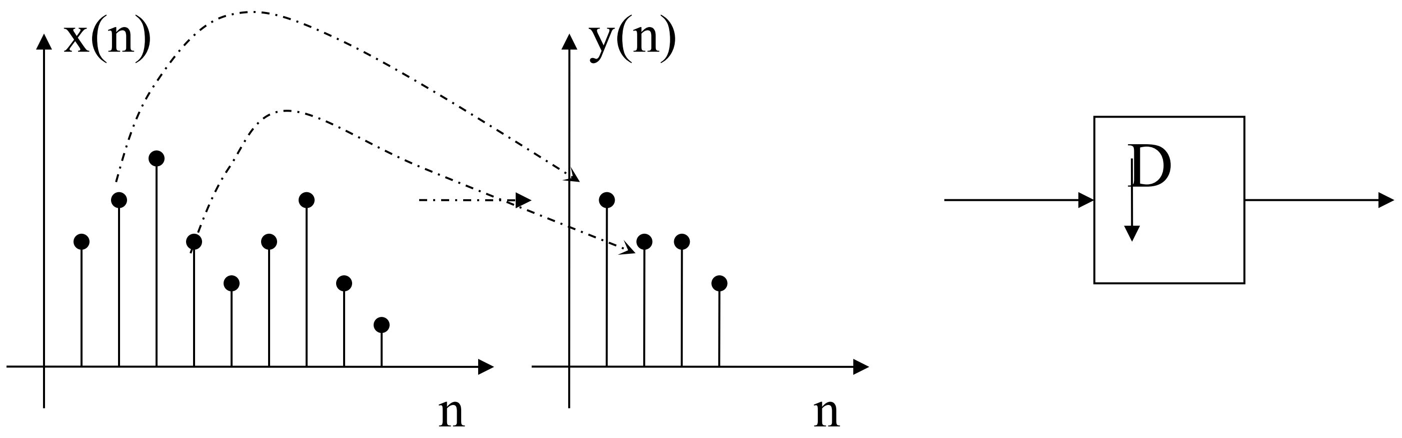
- 称为时不变系统。

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$



例题

- 由下列关系系定义的系统称为压缩器
- $y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty$ M是一个正整数。



- 证明压缩器系统是时变的

$$T[x(n-m)] = x(Mn-m) \neq y(n-m) = x[M(n-m)]$$

4、（非）因果系统

- 输出序列在n_0时刻的值仅仅取决于$n<=n_0$时刻的输入序列，则该系统称为因果系统。
  - 所有的实时可实现系统，也就是自然界中真实存在的系统皆为因果系统。
  - 非因果系统通常是在理论上探讨或滞后实现的。
    - 如前向差分系统即为非因果系统。

5、（非）稳定系统

- 如果对任何一个有界的输入序列，系统的输出序列都是有界的，则称该系统为BIBO意义下的稳定系统。即若：
- $|x(n)| \le B_x < +\infty$ Bx为一个确定的有限正数
- 则有：
- $|y(n)| \le B_y < +\infty$ By为一个确定的有限正数

  - 现实世界中的大部分系统均为稳定系统
  - 非稳定需要系统本身有极大的能量存储，从这个意义上说，所有的无源系统均为稳定系统，如电话，整流器等。

例题

- 判断系统： $T(x[n]) = g[n]x[n]$

  $$T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$$

- 是否是
- （1）线性的？
- （2）时不变？

$$
\begin{aligned}
&T(\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]) \\
&= g[n](\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]) \\
&= \alpha y_1[n]+\beta y_2[n]
\end{aligned}
$$

$$T(x[n-n_0]) = g[n]\cdot x[n-n_0] \neq y[n-n_0] = g[n-n_0]\cdot x[n-n_0]$$

$$T(x[n-m]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k-m] \overset{k'=k-m}{=} \sum_{k'=n_0-m}^{n-m} x[k'] \neq \sum_{k=n_0}^{n-m} x[k]$$

若n0为负无穷，结果为何？

例题

- 有一个系统的输入为x[n],输出为y[n],且满足下列差分方程：

$$y[n]=ny[n-1]+x[n]$$

- 该系统是因果的且满足初始松弛条件，即若$n<n_0$，$x[n]=0$，则$y[n]=0$， $n<n_0$ 。
- （a）若$x(n)=\delta(n)$ ，求y[n]（对全部的n）。
- （b）系统是线性的吗？试证明之。
- （c）系统是时不变的吗？试证明之。

系统单位冲激响应

- 解：(a)

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- 由于： $n < 0$ $y[n] = 0$ $x(n) = \delta(n)$

$$y[0] = \delta[0] = 1$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n \le 1 \\ 1 & n = 0 \\ n! & n \ge 1 \end{cases}$$

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

- (b)因为 $y'[n] = T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = ny'[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = n(\alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1]) + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

$$y[n] = ny[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

- 所以 $y'[n] = y[n]$ 即：$T(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

- (c)系统输出的时移： $y[n-n_0] = (n-n_0)y[n-n_0-1] + x[n-n_0]$

系统输入延时后得到的输出： $y'(n) = T(x[n-n_0])$

$$y'(n) = ny'[n-1] + x[n-n_0]$$

所以： $y'(n) \neq y[n-n0]$

线 性 时 不 变 系 统

- 重点研究对象
- 为何典型？
- 基本性质？

1.3 线性时不变系统
（Linear Time Invariable System）

- 如果一个系统既是线性系统，又是时不变系统
- 假设线性时不变系统的单位冲击响应为：$h(n)=T\{\delta(n)\}$

$$y(n)=T\{x(n)\}=T\{\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)\}$$

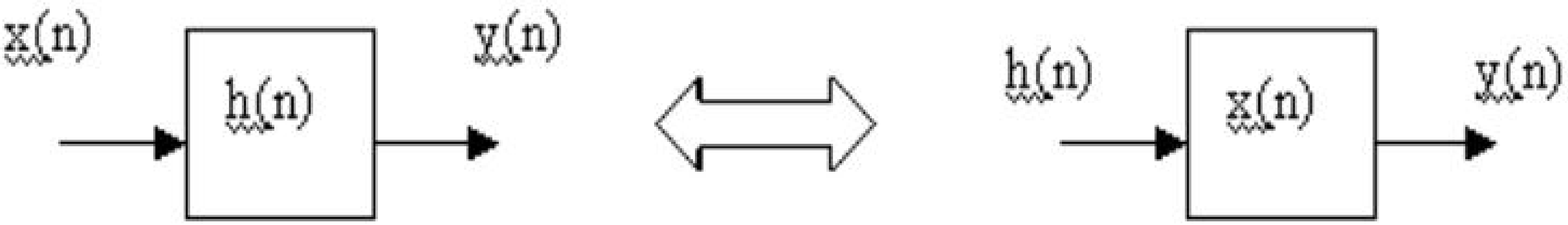
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)T\{\delta(n-k)\}(\text{叠加性})$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)(\text{时不变性})$$

- 质变：

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

性质一：　交换律

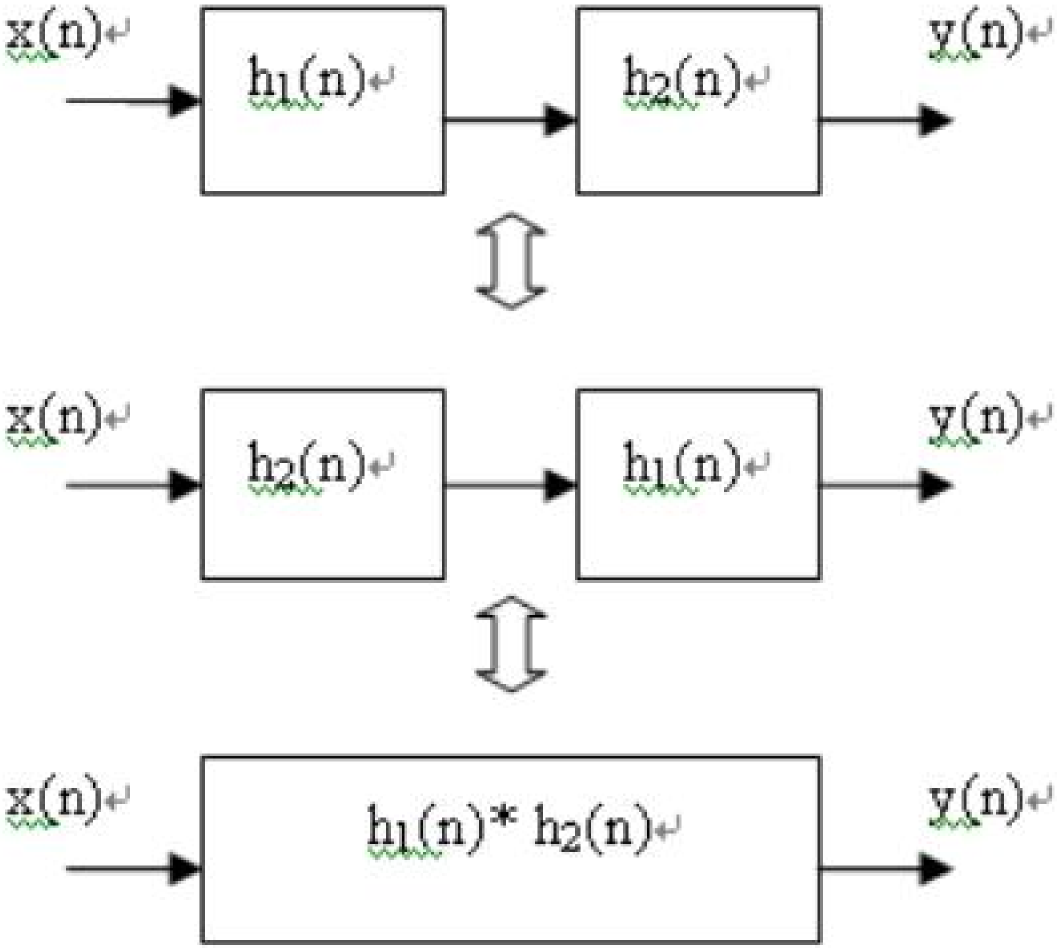


$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$\Delta y(n) = \Delta x(n) * h(n) = \Delta h(n) * x(n)$$

$$y(n-m) = x(n-m) * h(n) = h(n-m) * x(n)$$

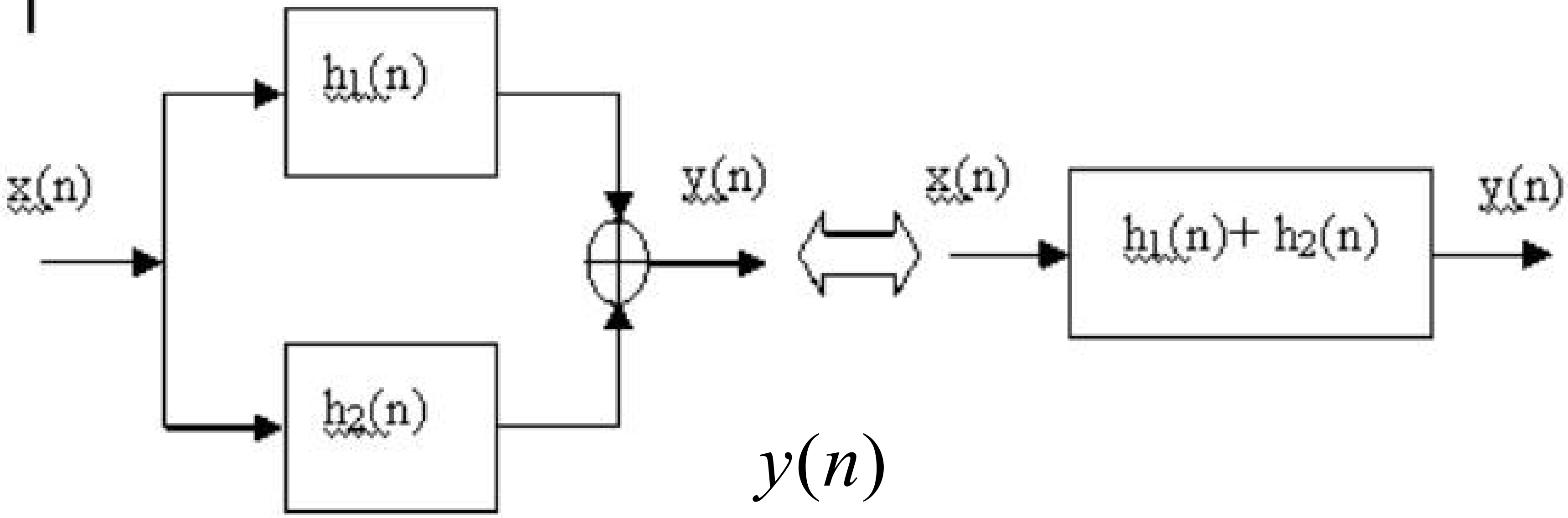
性质二：结合律



$$
\begin{aligned}
& y(n) \\
& = x(n) * h_1(n) * h_2(n) \\
& = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\
& = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\
& = [x(n) * h_2(n)] * h_1(n)
\end{aligned}
$$

$$y(n) * u(n) = [x(n) * u(n)] * h(n) = [h(n) * u(n)] * x(n)$$

性质三：分配律



$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$$

定理一、线性时不变系统为因果系统的充要条件是：

$$h(n)=h(n)u(n)$$

- 充分性：
- 若n<0时，$h(n)=0$，则有

$$y(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)h(n-m)$$

- $y(n)$仅与m<n时的$x(m)$有关，系统因果

定理一、线性时不变系统为因果系统充要条件是：

$$h(n)=h(n)u(n)$$

- 必要性：
- 已知系统为因果系统，假设n<0时，*h(n)!=0*，则有：

$$y(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)h(n-m)+\sum_{m=n+1}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 所假设的条件下，第二个求和式中至少有一项不为零，即*y(n)*至少和m>n中的某一个*x(m)*有关，不符合因果系统的定义，所以假设不成立

定理二：线性时不变系统为稳定系统充要条件是：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| = M < +\infty$$

- 充分性：
- 对于任意有界输入序列，即对所有时刻n，皆有x(n)<N ，从而得到:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right|$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = NM < +\infty$$

- 对于输入有界序列，输出必然有界

定理二：线性时不变系统为稳定系统充要条件是：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|h(n)| = M < +\infty$$

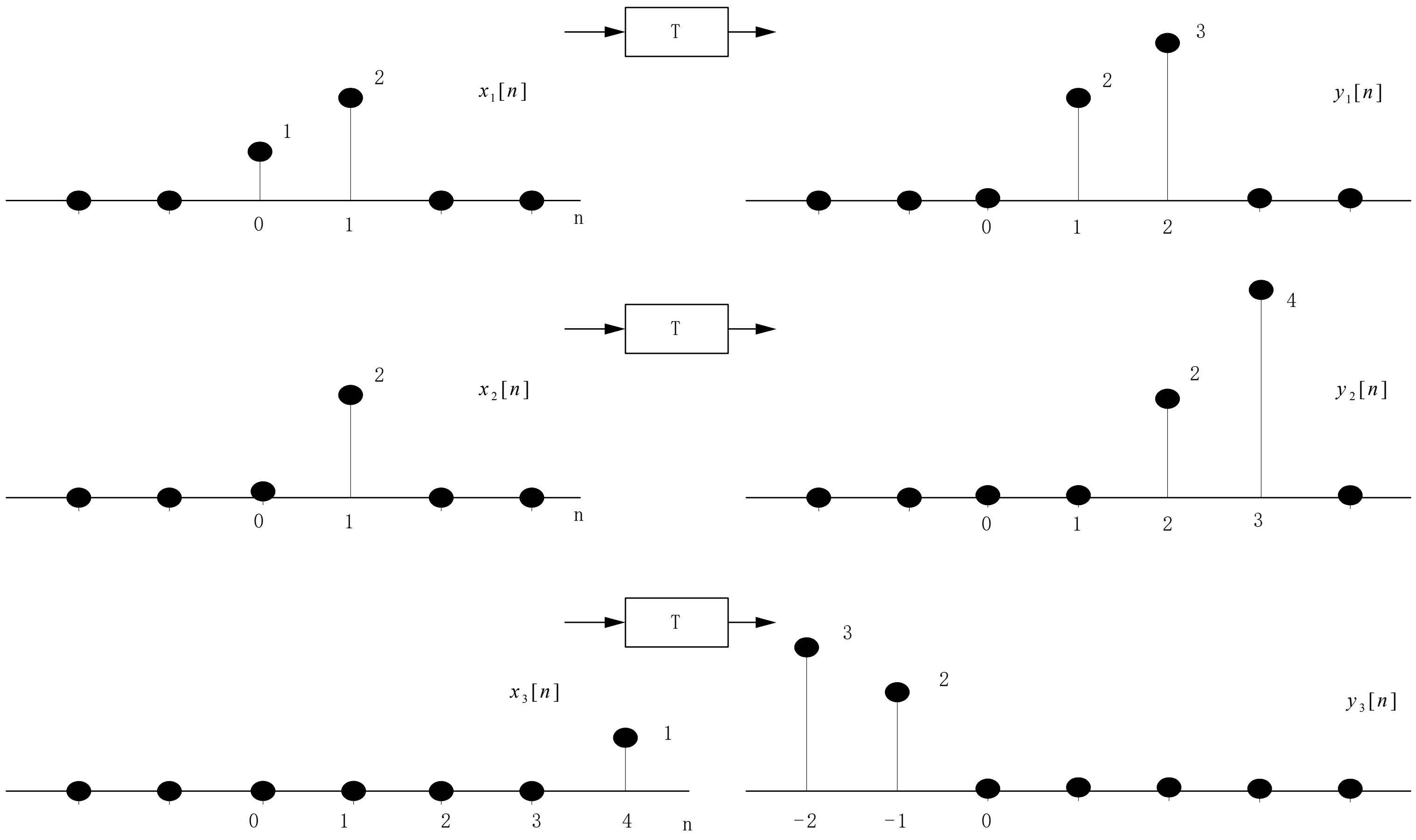
- 必要性：
- 已知系统稳定，假设： $\sum_{-\infty}^{+\infty}|h(n)| = \infty$
- 找到一个有界的输入： $x(n) = sign(h(-n))$
- 此时：

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}|h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}|h(m)| = \infty$$

- 不符合BIBO稳定的条件，假设不成立

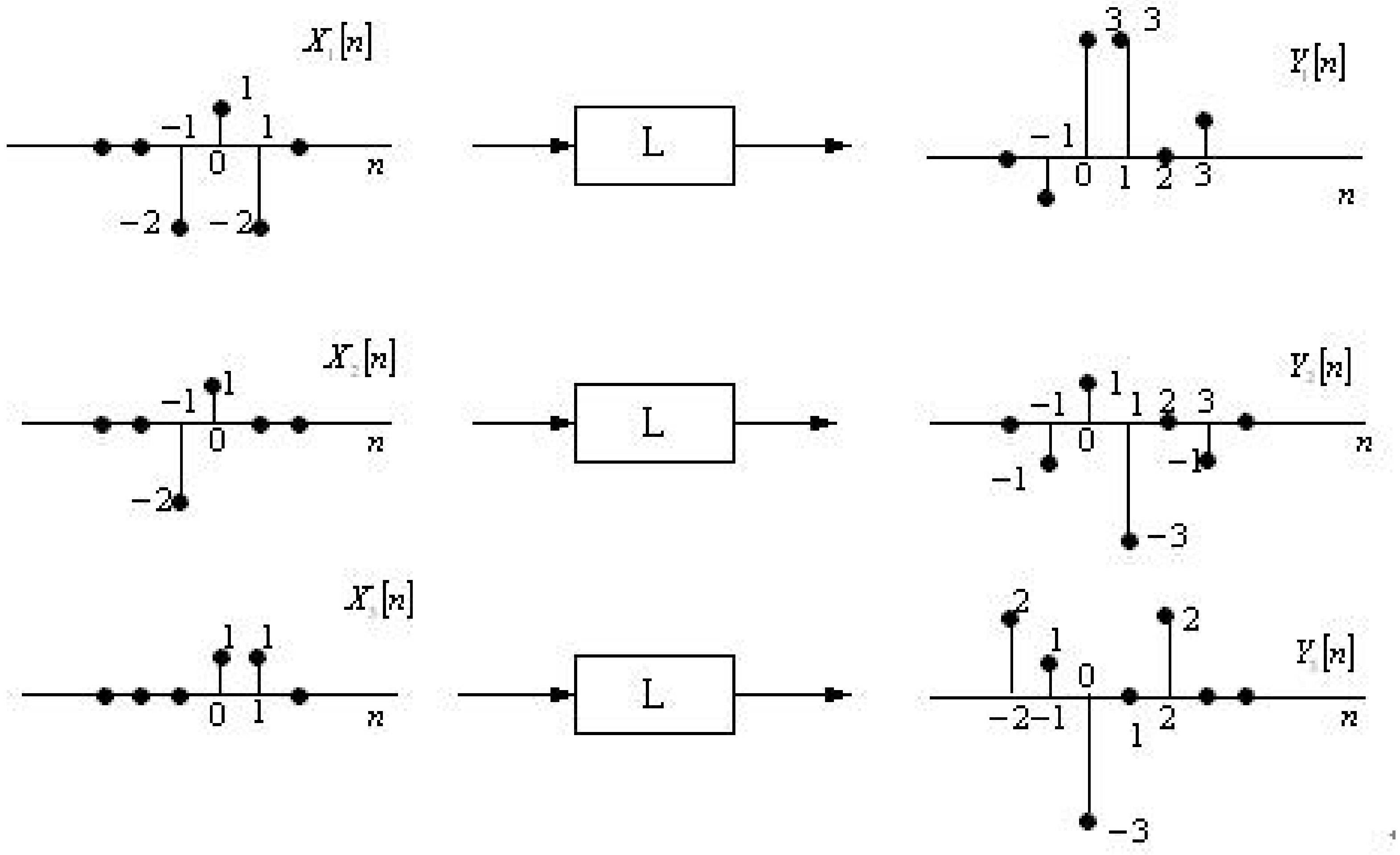
例题

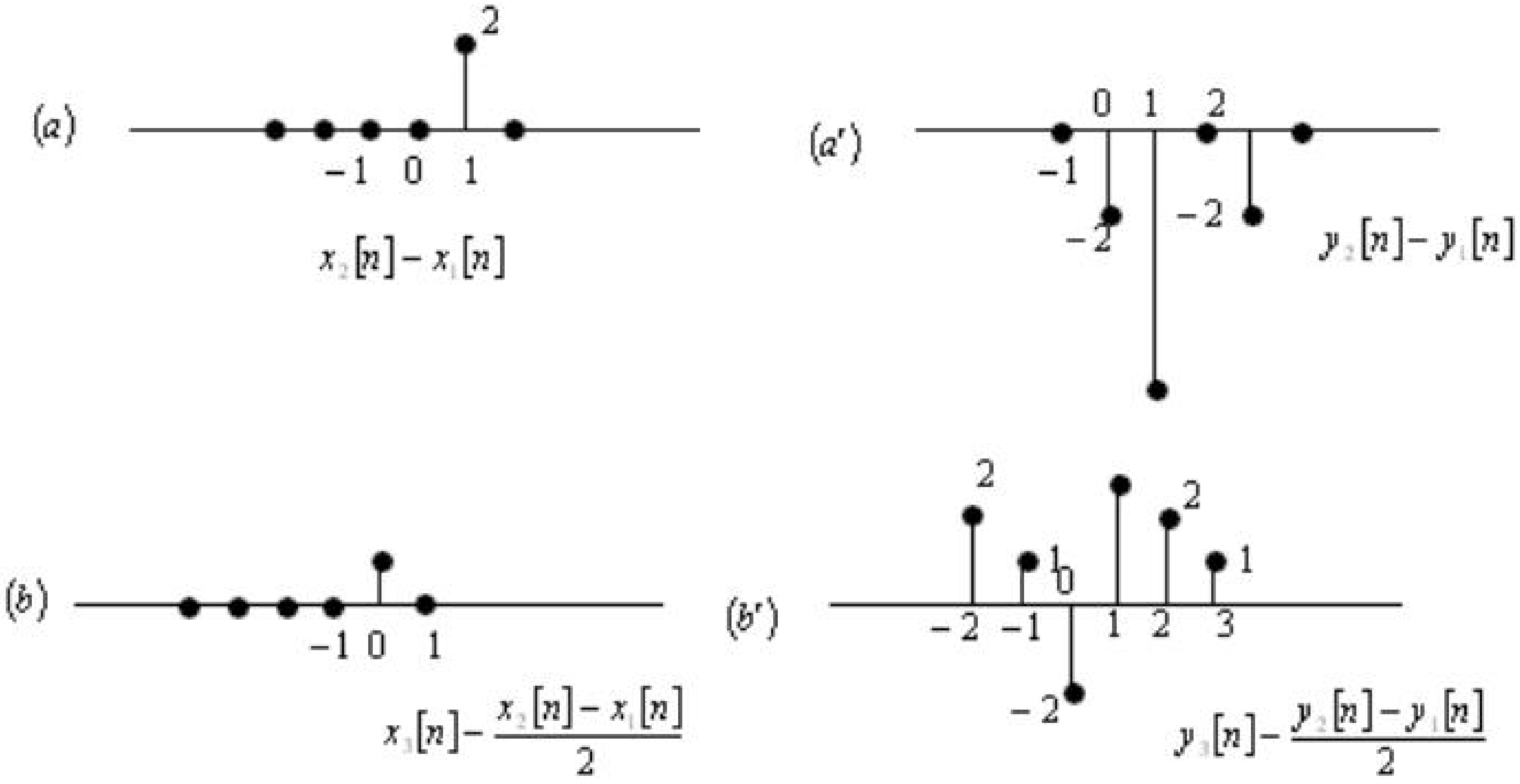
- 图中T是时不变系统，输入响应如图
- （a）确定系统是否为线性。
- （b）系统的单位冲激响应是什么？
- （c）对任意输入，输出能唯一确定吗？



例题

L为线性系统，输入输出对应如图所示，问：
（a）系统L是否时不变的？
（b）系统的单位冲激响应是什么？





(a)
2
−1 0 1
$x_2[n]-x_1[n]$
(a′)
0 1 2
−1
−2
−2
$y_2[n]-y_1[n]$
(b)
−1 0 1
$x_3[n]-\frac{x_2[n]-x_1[n]}{2}$
(b′)
2
1
0
2
1
−2 −1 1 2 3
−2
$y_3[n]-\frac{y_2[n]-y_1[n]}{2}$

1.4线性常系数差分方程

- 离散时间的线性时不变系统通常由常系数线性差分方程来表示：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

-
  - 差分方程的阶数等于输出序列y(n)的最高值和最低值之差，如上述差分方程的阶数为N。
  - 所谓线性是指在差分方程中只含有输入、输出序列的一次项，而不含有高次项及交叉乘积项。否则，为非线性方程。

求解途径

- 求解常系数线性差分方程通常有两种途径
- 离散时域解法：
  - 迭代法，此种方法只能给出比较形象的的不完整数值解，不容易得到闭合形式的数学描述公式。
  - 时域经典解法，即求齐次解和特解，再由边界系数确定齐次解与特解的待定系数。
  - 卷积和法，主要用于求解系统的零状态解。
- 变换域方法：
  - 与连续系统的拉普拉斯变换法类似，采用Z变换方法来求解差分方程，在实际应用中较常用。

LCCDE与LTI的关系

- 例：常系数线性差分方程为

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

  - (1) 若系统为松弛状态，求系统的单位冲激响应；
  - (2) 若系统的初始状态为：$y(0)=1$ ，试分析系统是否为线性时不变系统。

解：

- (1) 零状态时系统的单位冲激响应

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

- 依次
- 迭代
- 求得：

$$h(0) = a * h(-1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = a * h(0) + 0 = a + 0 = a$$

$$h(2) = a * h(1) + 0 = a^2 + 0 = a^2$$

$$h(n) = a * h(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$

- 由数学归纳法得到

$$h(n) = \begin{cases} a^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

(2)y(0)=1时

$$\begin{cases} x_1(n) = \delta(n) \\ y_1(0) = 1 \end{cases} \qquad y_1(n) = a^n * u(n)$$

$$\begin{cases} x_2(n) = \delta(n-1) \\ y_2(0) = 1 \end{cases} \qquad y_2(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$x_2(n) = x_1(n-1) \qquad y_2(n) \neq y_1(n-1)$ 时变

$$\begin{cases} x_3(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_3(n) = a^n * u(n) + a^{n-1} * u(n-1)$$

$$y_1(n) + y_2(n) = 2a^n * u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n)$ 非线性

LCCDE与LTI的关系

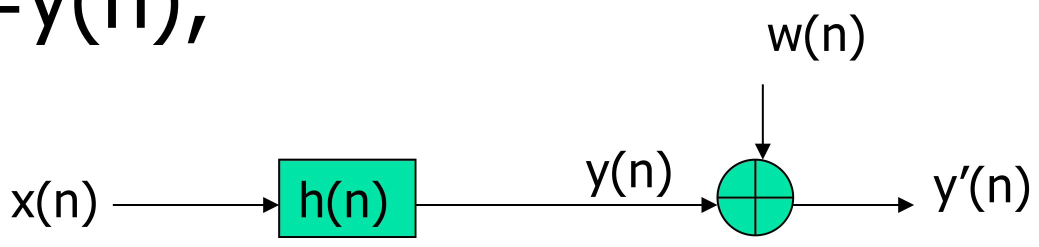
- 对上面的例子而言
  - 当边界条件为y(0)=1时，系统是时变的；
  - 当边界条件y(0)=0时，系统是线性但不是时不变系统；
  - 当边界条件为y(-1)=0时，系统才是线性时不变系统。
- 常系数线性差分方程，并不一定代表线性系统，也不一定代表时不变系统。
- 边界条件决定了常系数线性差分方程和线性时不变系统之间的对应关系。只有当系统为零状态，才相当于一个线性时不变系统。

习题（第二版）

- 课后作业2：
- 2.15，2.20，2.25，
- 2.27，2.42，2.56

思考题（反卷积用于系统辨识）

- $x(n)*h(n)=y(n)$;



- 已知x(n),y(n)条件下求h(n)

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn