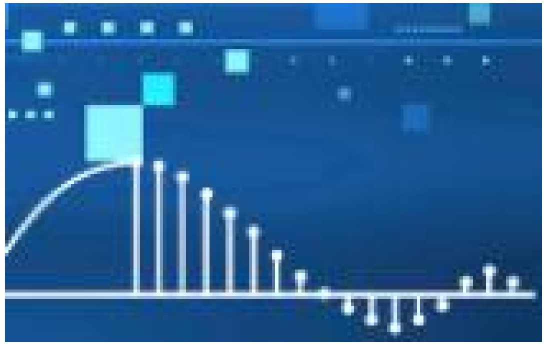
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



数字信号处理

授课教师：孙国良

电子信息工程学院

德才兼备 知行合一

DECAIJIANBEIZHIXINGHEYIHEYI

第四章 离散傅里叶变换及快速算法

Contents

离散傅立叶变换(DFT)

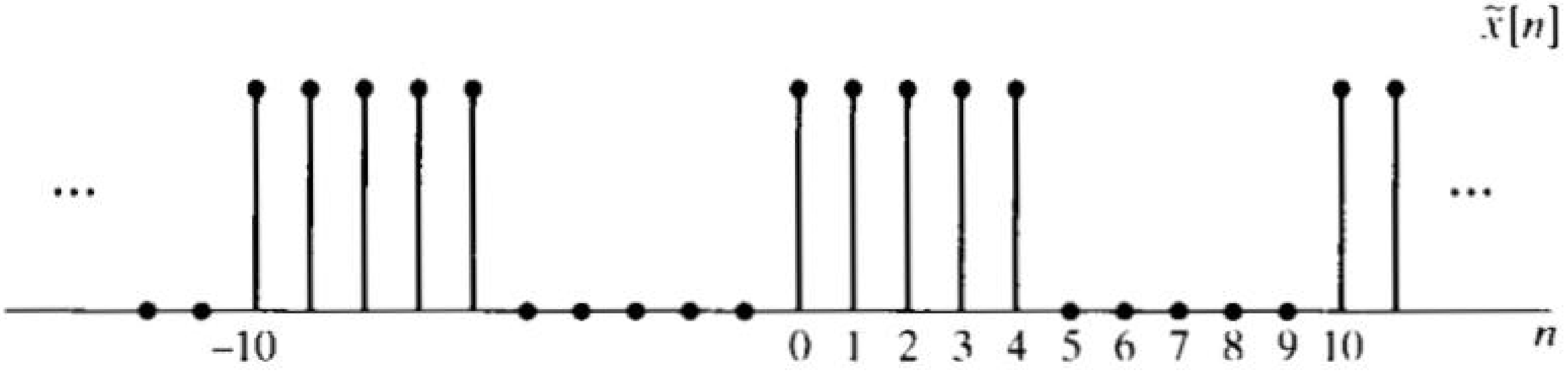
- 工程实践中，离散时间傅里叶变换(**DTFT**) 适用性不强：
  - 信号时域很宽但数字设备只能处理有限长数据
  - 信号的频谱在数字设备上的表示也只能是离散
  - 数字处理必须采取以下三项措施：
    - **(1)**时域采样（时域离散化）
    - **(2)**时域截断**---**〉有限长时域序列
    - **(3)**频率离散**---**〉有限长频域序列
- 傅立叶变换需要反映有限长度时域序列与频域抽样之间的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Longrightarrow X(k) = \sum_{0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}$$

主要内容

- 4.1 离散傅立叶级数(DFS)
  - 傅立叶变换四大形式
  - DFS变换对
- 4.2 频域采样与重构
- 4.3 离散傅立叶变换(DFT)
  - DFT定义
  - DFT性质定理
- 4.4 DFT的快速算法
  - 戈泽尔算法
  - FFT算法
  - Chirp Z变换
- 4.5 DFT的工程应用
  - LTI的DFT实现
  - 信号的DFT分析

离 散 傅 里 叶 级 数



- CTFT CTFS DTFT → DFS
- 离散傅里叶级数是傅里叶变换的第四类

- 意义：
- 1、周期序列等效于有限长序列
- 2、引出频域抽样定理
- 3、引出离散傅里叶变换

4.1 离散傅立叶级数(DFS)

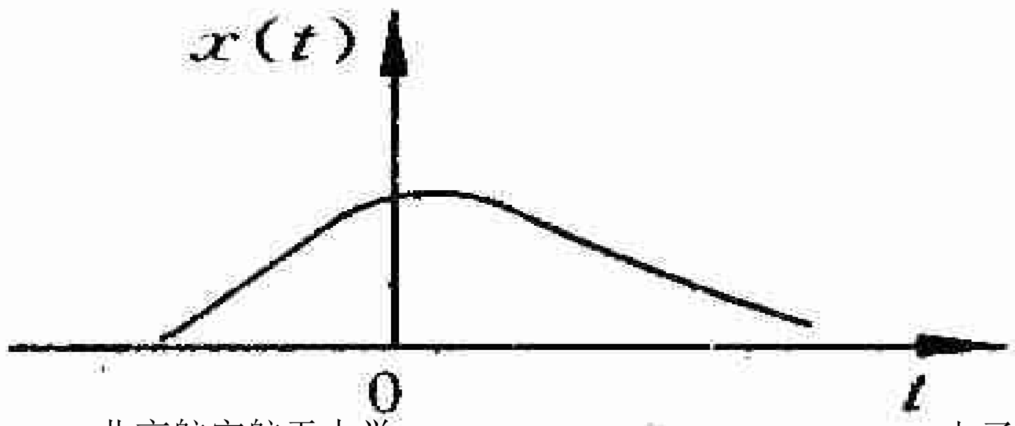
- **4.1.1　傅立叶变换的表现形式**
- 傅里叶变换
  - 建立信号时域表达与其频域表达之间的变换关系。
  - 当自变量“时间”或“频率”分别为连续或离散时，就形成了各种不同表象形式的傅里叶变换对。

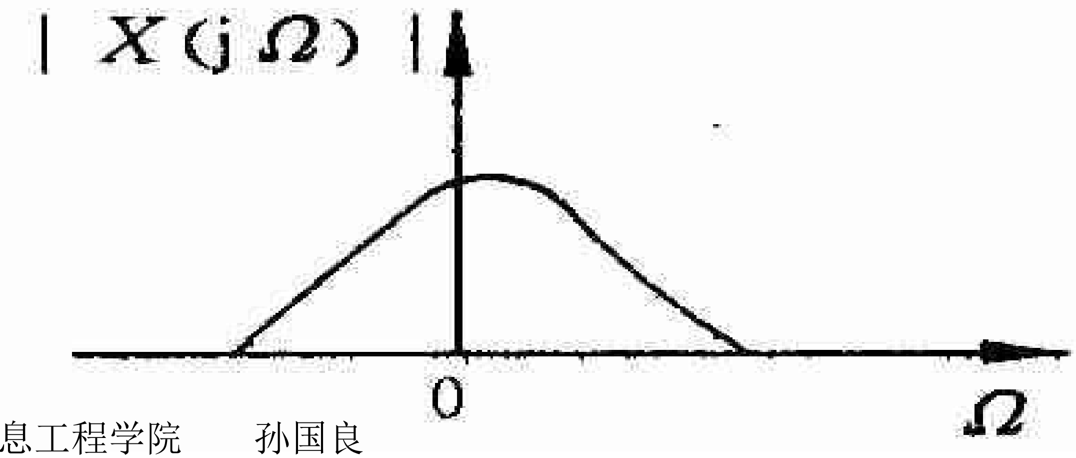
一、连续时间、连续频率—傅里叶变换(CTFT)

- 若信号为连续时间的非周期信号，其傅里叶变换是频域连续的非周期函数。

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$





二、连续时间、离散频率——傅里叶级数(CTFS)

- 按照狄义赫利条件，周期性信号为功率信号，能量无限，不满足变换的充分条件
  - 因此其傅立叶变换必有特殊的表现形式。
- 我们仍旧按照傅立叶变换式来进行考察：

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=x(t+T_0)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-T_0)e^{-j\Omega t}dt$$

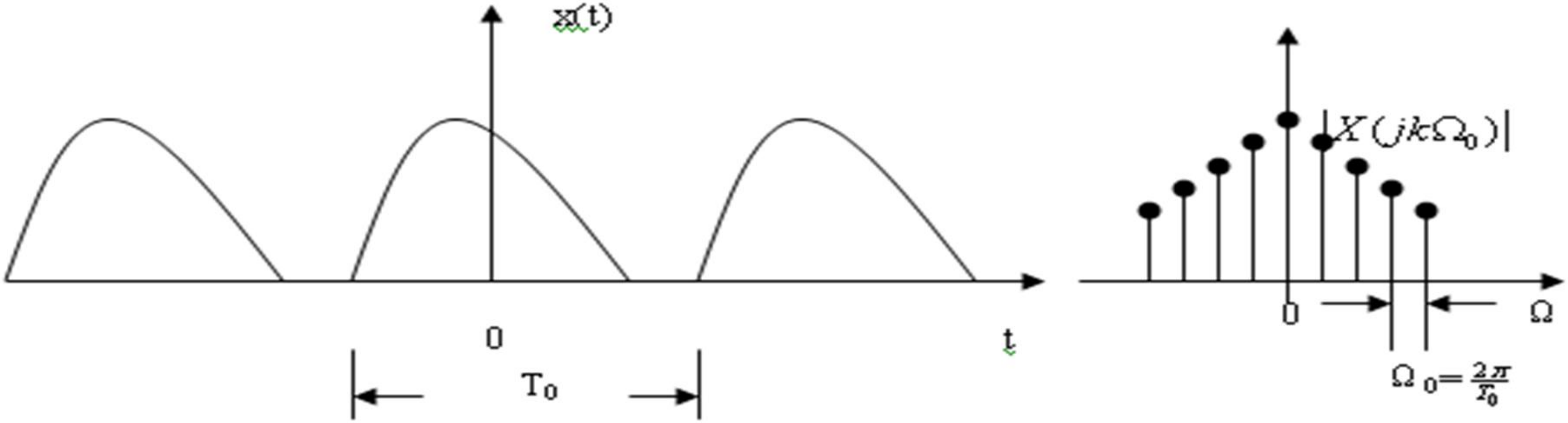
$$X(j\Omega)(1-e^{j\Omega T_0})=0$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega(t-T_0)}dt=X(j\Omega)e^{j\Omega T_0}$$

频谱离散

$$X(j\Omega)(1-e^{j\Omega T_0})=0$$

- $1-e^{j\Omega T_0}$ 仅在有限可数个频点 $\Omega_k=\dfrac{2k\pi}{T_0}$ 处为零，就要求在其他频段 $X(j\Omega)$ 皆为零，为离散频率函数。
- 时域上的周期性造成了频域上的离散。
- 周期信号能量无限，离散频点处的能量为冲激函数。



连续傅里叶级数

- 实际上，$x(t)$ 可展成傅立叶级数，

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

CTFS是主值区间信号CTFT的频域采样

- 引入广义函数的条件下有：

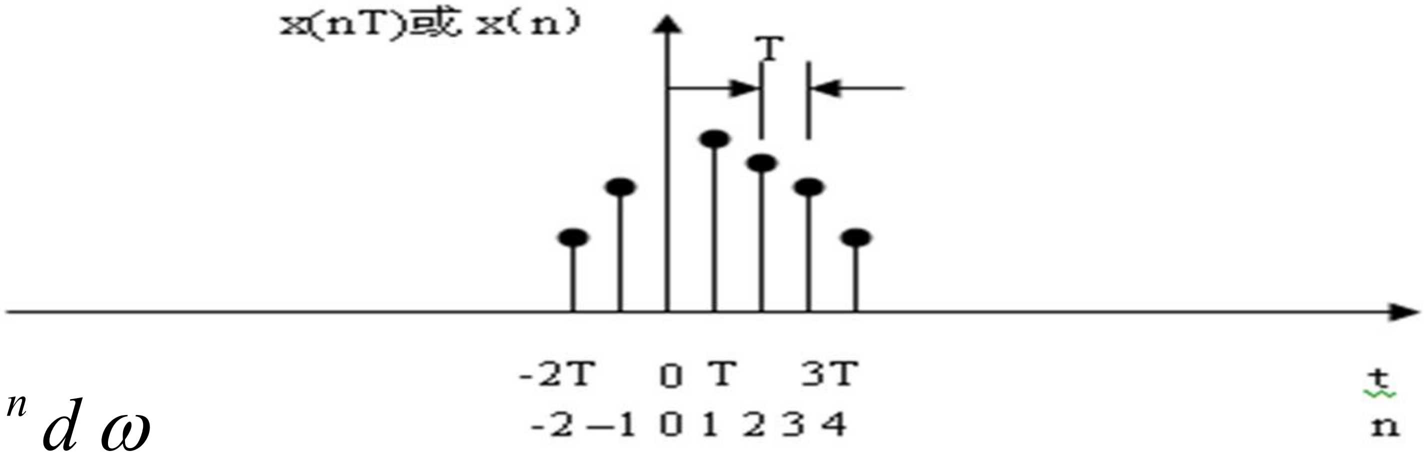
$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)e^{j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}dt=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\delta(\Omega-\Omega_0)$$

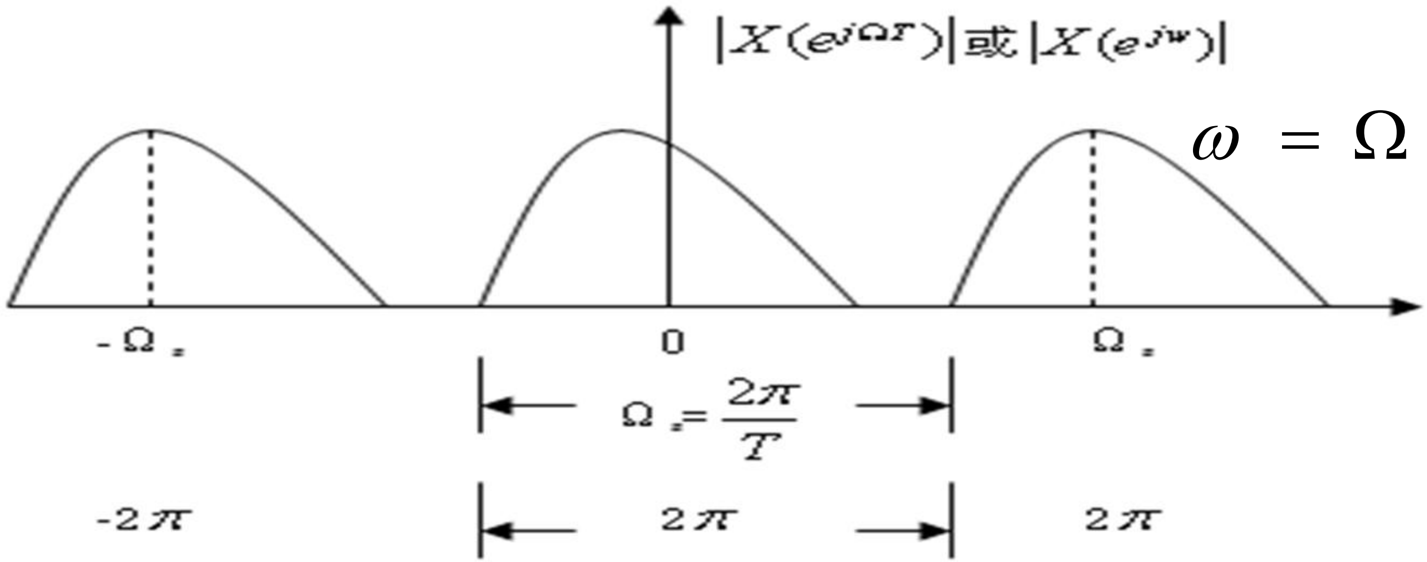
三、离散时间、连续频率—序列傅里叶变换(DTFT)

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



时域离散导致
频域周期化



$$\omega = \Omega T$$

四、离散时间、离散频率—离散傅立叶级数(DFS)

- 设$\tilde{x}(n)$是周期为**N**的一个周期序列，

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$$

- 周期序列不是绝对可和的，所以不适合**DTFT**表示

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(n+N)e^{-j\omega n}$$

$$\omega_k=k\frac{2\pi}{N}$$

$$=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(n')e^{-j\omega(n'-N)}=e^{j\omega N}X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega})(1-e^{j\omega N})=0$$

离散谱

周期序列也可以用傅里叶级数表示，只是...

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}X(k)e^{jk\Omega_0 t} \qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \qquad T_0=NT$$

$$x(nT)=\sum_{-\infty}^{+\infty}X(k)e^{jk\Omega_0 nT}=\sum_{-\infty}^{+\infty}X(k)e^{jk\frac{2\pi}{NT}nT}=\sum_{-\infty}^{+\infty}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- 周期为**N**的复指数序列基频序列为： $e_1(n)=e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$
- 其**k次谐波**序列为：

$$e_k(n)=e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \qquad e_{k+rN}(n)=e_k(n)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n}=e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

连续周期信号与离散周期序列的复指数

	基频序列	周期	基频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	T_0	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 连续傅立叶级数有无穷多个谐波成分
- 离散傅里叶级的谐波只有**N**个是独立

DFS变换对的导出

- 假设信号可展成如下的离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

-
- 其中**N**为常数，选取它是为了表达式成立的需要
- $\tilde{X}(k)$ 是待求的**k**次谐波系数。

系数的求取

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

$$=\tilde{X}(r)$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

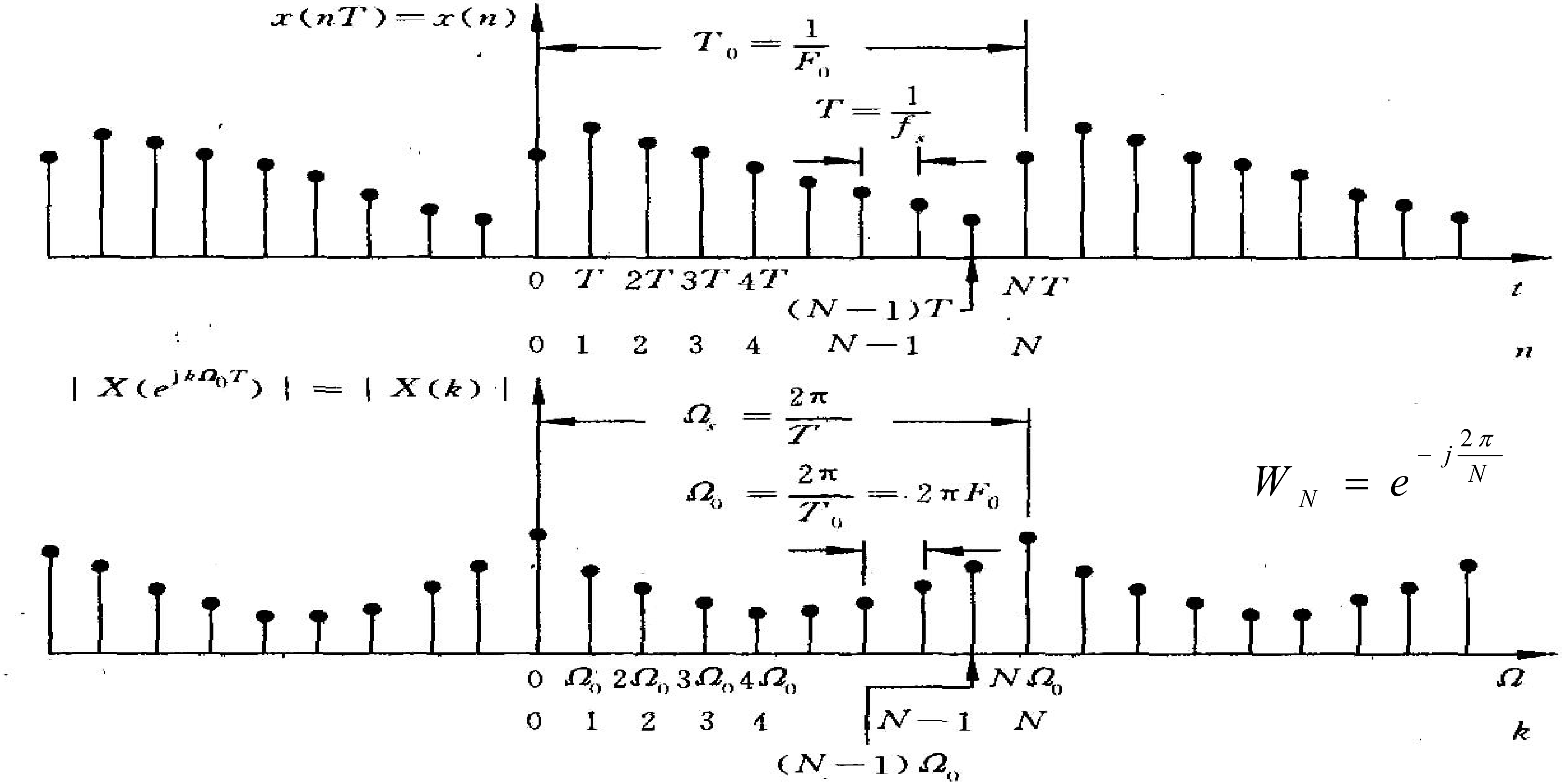
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}rn}=\frac{1}{N}\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}r}}=\begin{cases}1, r=mN, m\text{为任意整数}\\ 0,\ \text{其他 r}\end{cases}$$

序列的傅立叶级数(DFS)

- 通常对变换因子采用以下符号：
- $$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$
- 则DFS变换对为：
  - 正变换 $$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$
  - 反变换

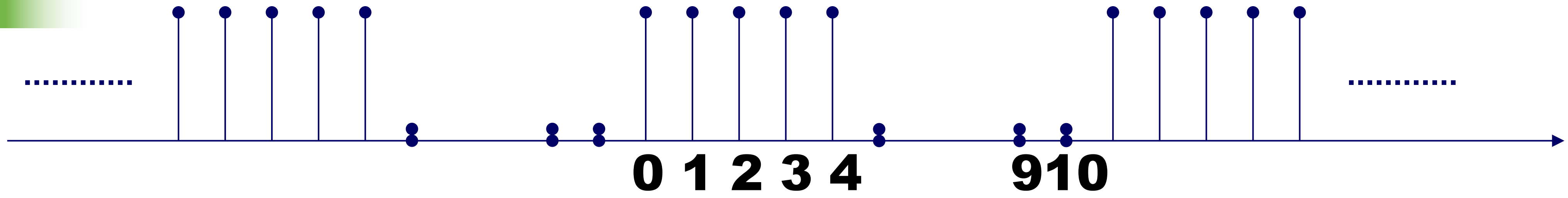
$$\tilde{x}(n) = IDFS\left[\tilde{X}(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

DFS频谱的含义



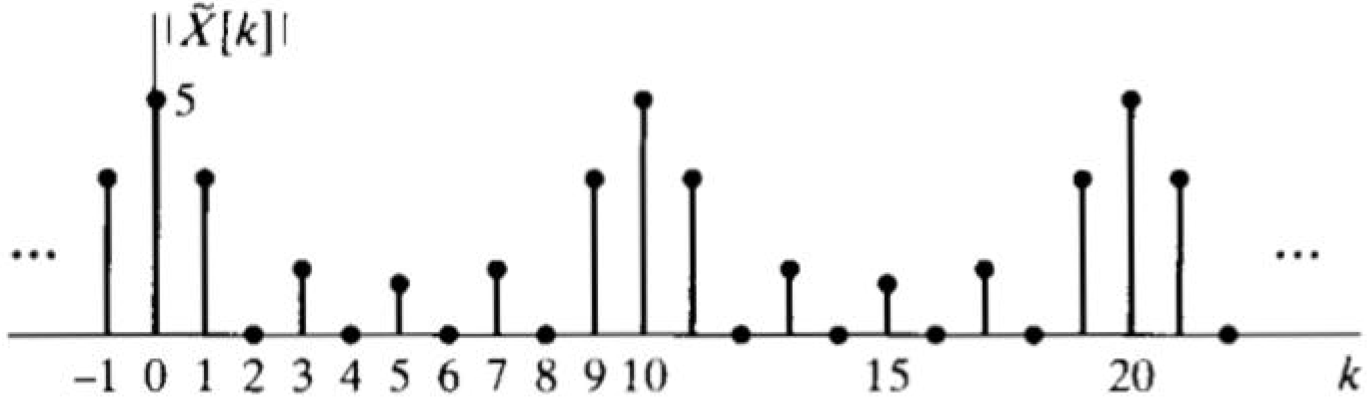
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

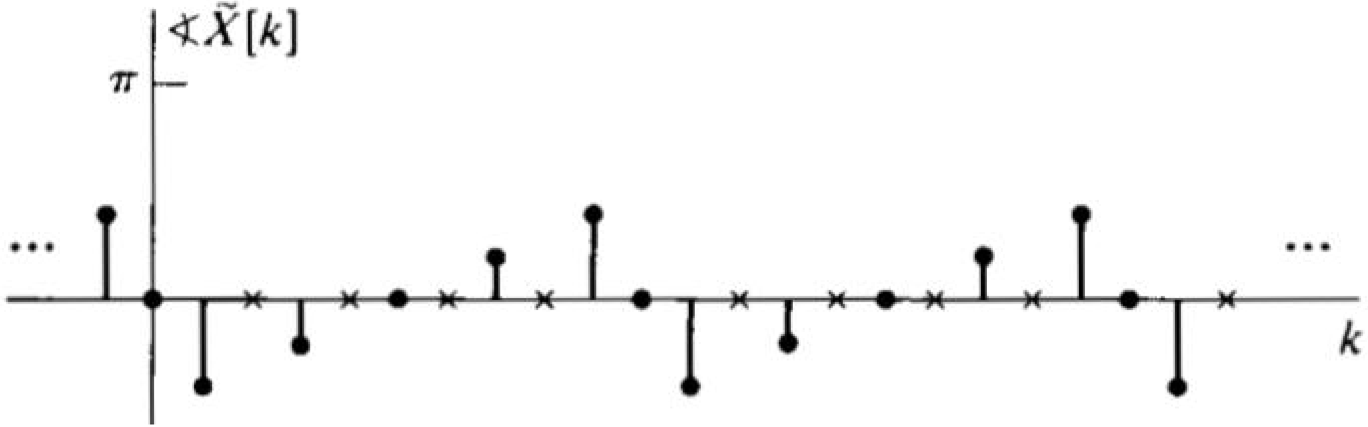
周期矩形脉冲串的DFS



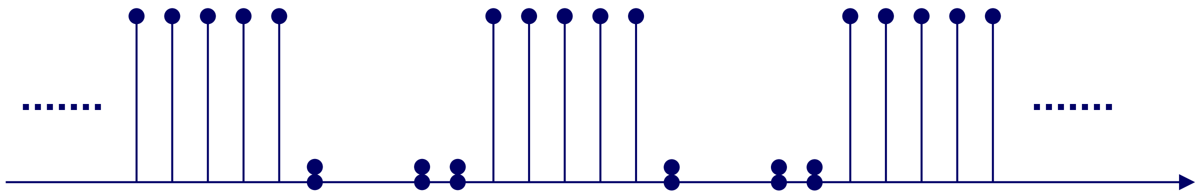
$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{4}e^{-j(2\pi/10)kn}$$

$$=e^{-j(4\pi k/10)}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$



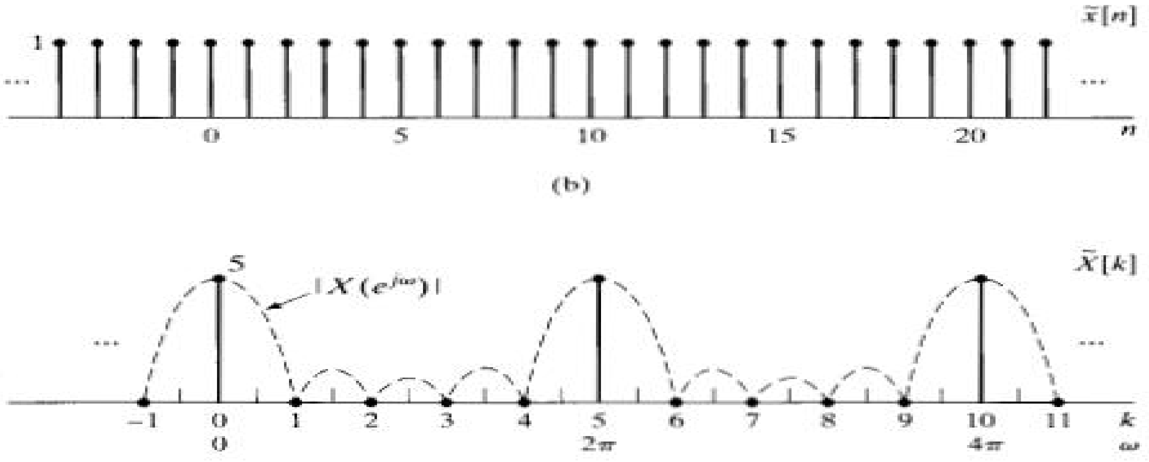


DFS与主值区间的DTFT关系

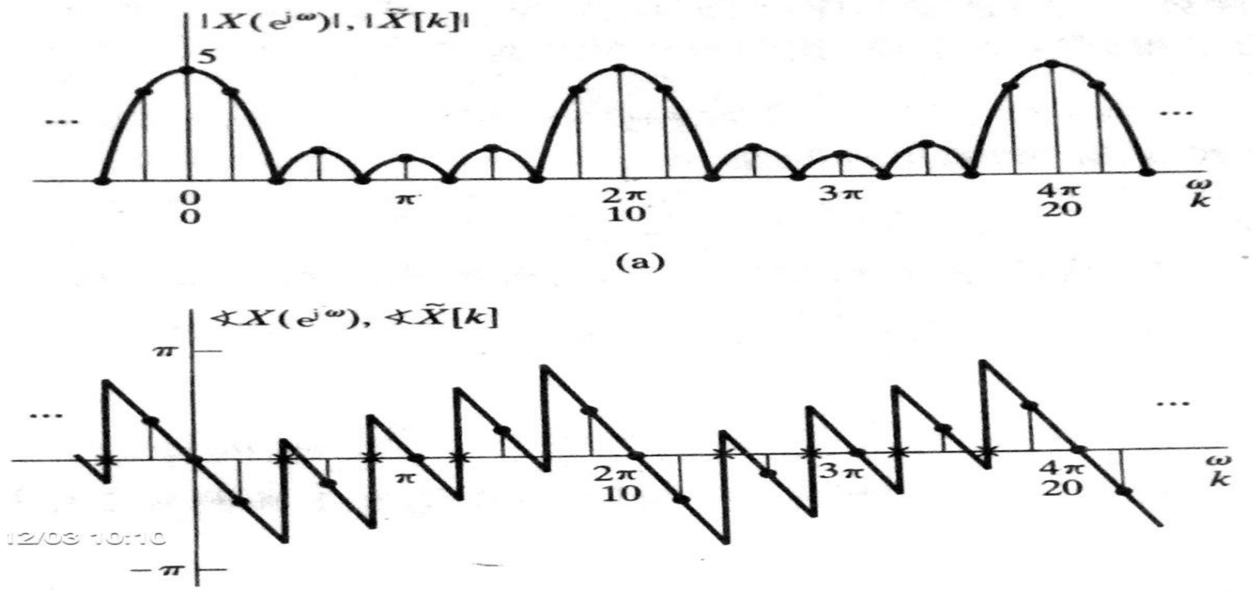


$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/10)kn} = e^{-j(4\pi k/10)}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} ---> \omega = k*\frac{2\pi}{N}$$



特例

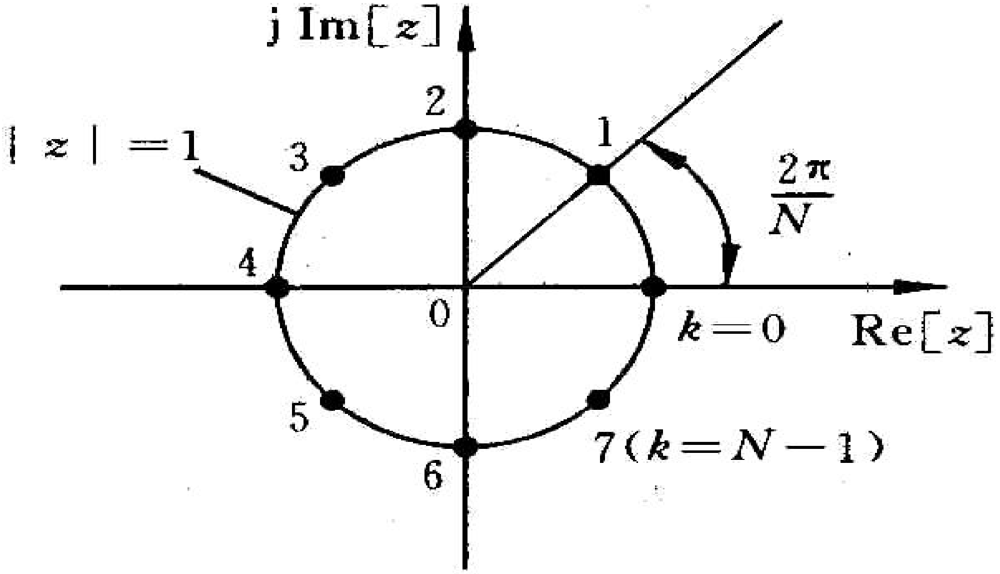


DFS可以看成是周期序列主值区间的Z变换(或DTFT) 在单位圆上等间隔抽样

- 设 $x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), 0 \le n \le \mathrm{N}-1 \\ 0, 其他\ \mathrm{n}\end{cases}$，则Z变换为：

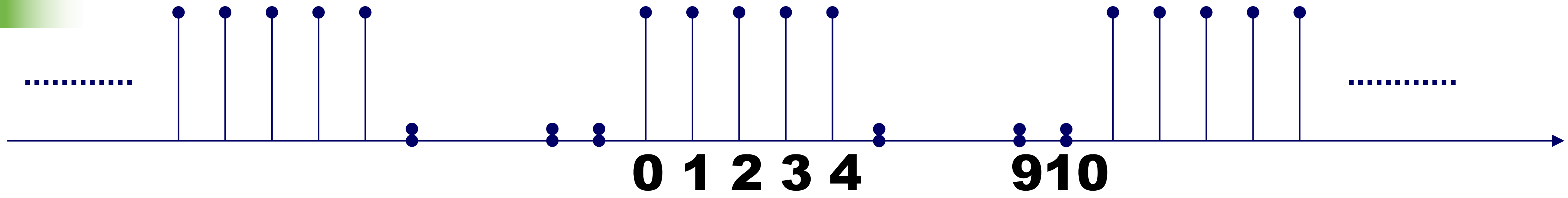
$$X(z)=\sum_{n-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

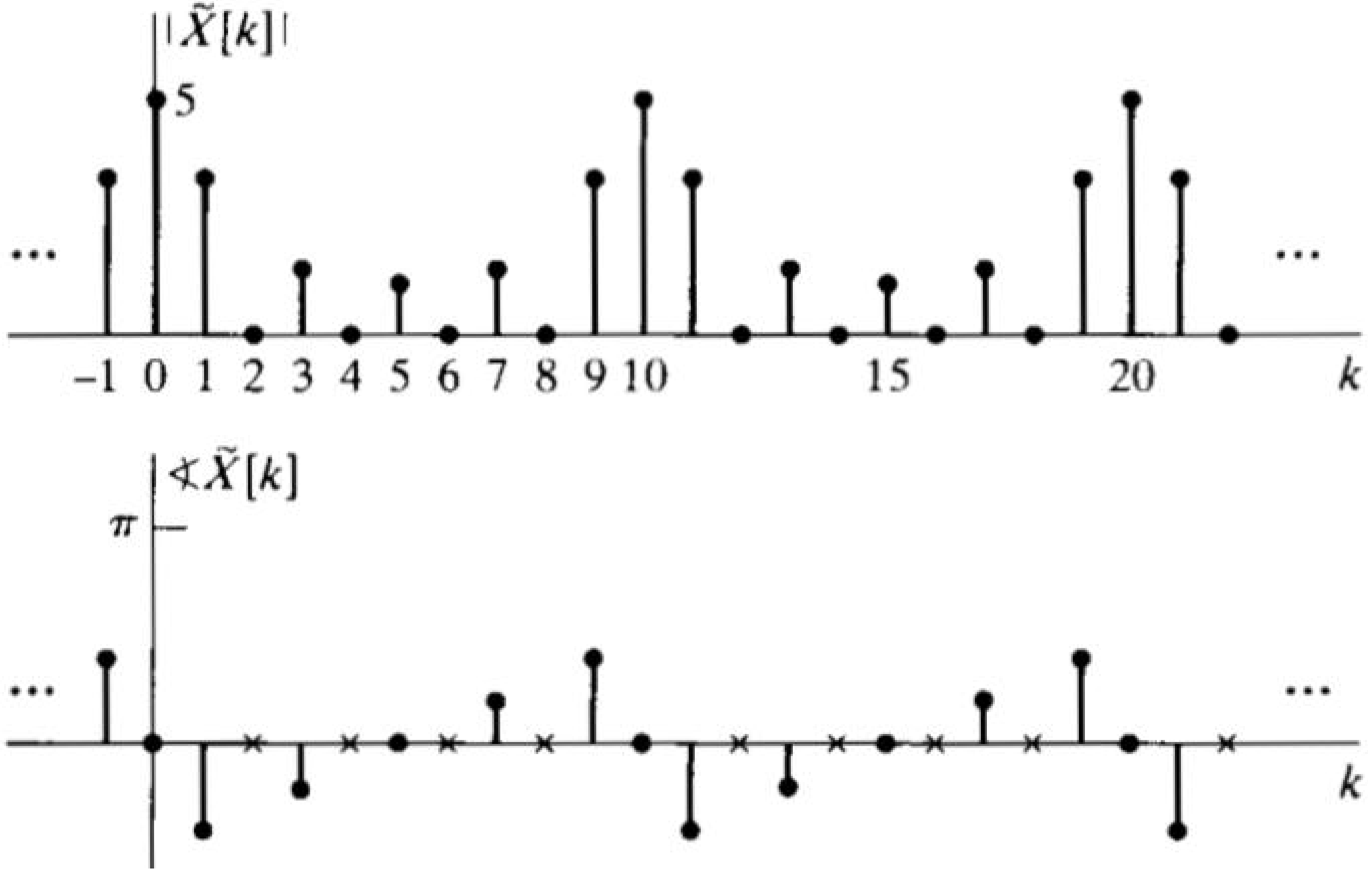


$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

例题：



- 若上述10周期矩形脉冲的DFS如图所示
- 1）若信号脉宽不变，周期变为8，请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出？
- 2）若信号脉宽不变，周期变为8，请确定变化后信号的那些DFS值可以从图中给出？



频 域 采 样 定 理

- 在采样定理的限制条件下，信号时域采样可以恢复原始信号。
- 信号的Z域的单位圆上的变换(DTFT)也可以恢复信号。
- 是否也可以利用单位圆抽样恢复原始信号呢？在单位圆上抽样将导致信号在时间域上发生怎样的变化？

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad k=0,1,2,\ldots N-1$$

4.2 频域抽样及重构

- 对于任意信号，直接对其频谱单位圆抽样值求**IDFS变换**得到的序列

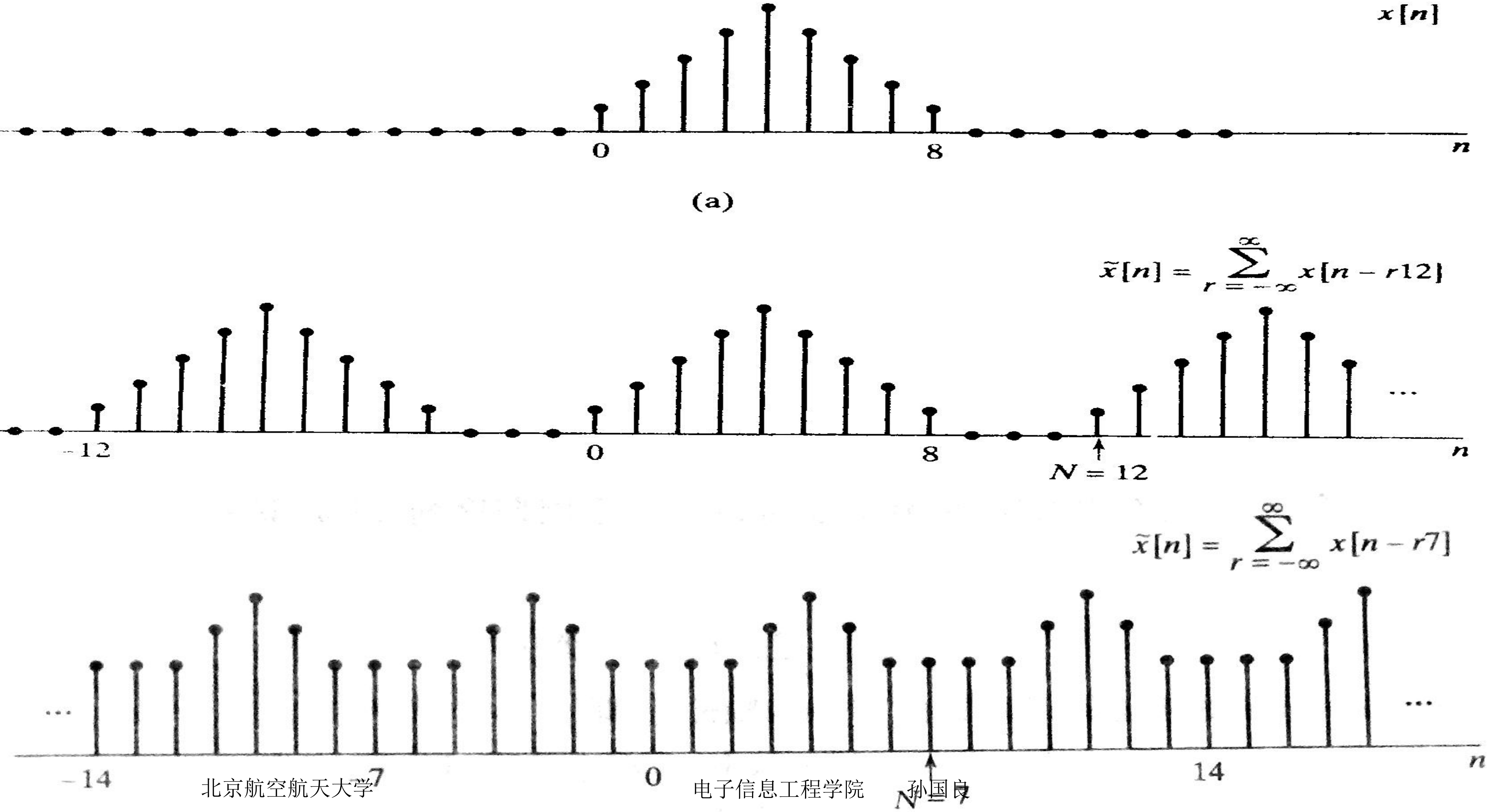
$$\tilde{x}(n)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)}\right)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)}=\begin{cases}1 & m=n+rN\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(m-n-rN)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rN)$$



$x[n]$
0
8
n
(a)
$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - r12]$
-12
0
8
$N = 12$
n
$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - r7]$
-14
-7
0
$N = 7$
14
n

频域采样定理

- 单位圆上**N**点的频率抽样变换得到的是原序列在时轴上以抽样点数为周期的延拓$\tilde{x}(n)$。
- 为此：
  - 如原序列不是有限长，则时域延拓必然造成混叠；
  - 若原序列是一个有限长且长度小于采样点数**N**的序列，则可以通过乘以窗函数得到原始序列，即：

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)R_N(n)$$

频域重构

- 若频域抽样可以无失真恢复原序列，
- 则可以完整表达 $X(z)$ 及 $X(e^{j\omega})$

$$X(z)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right) z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}\right)$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

内插函数

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$

- 分子有**N**个零点，内插函数的极点与第**k**个零点相抵消，仅在该点处值不为零，在其他抽样点处皆为零。

$$z_r=e^{j\frac{2\pi}{N}r}\qquad r=0,1,\dots,N-1$$

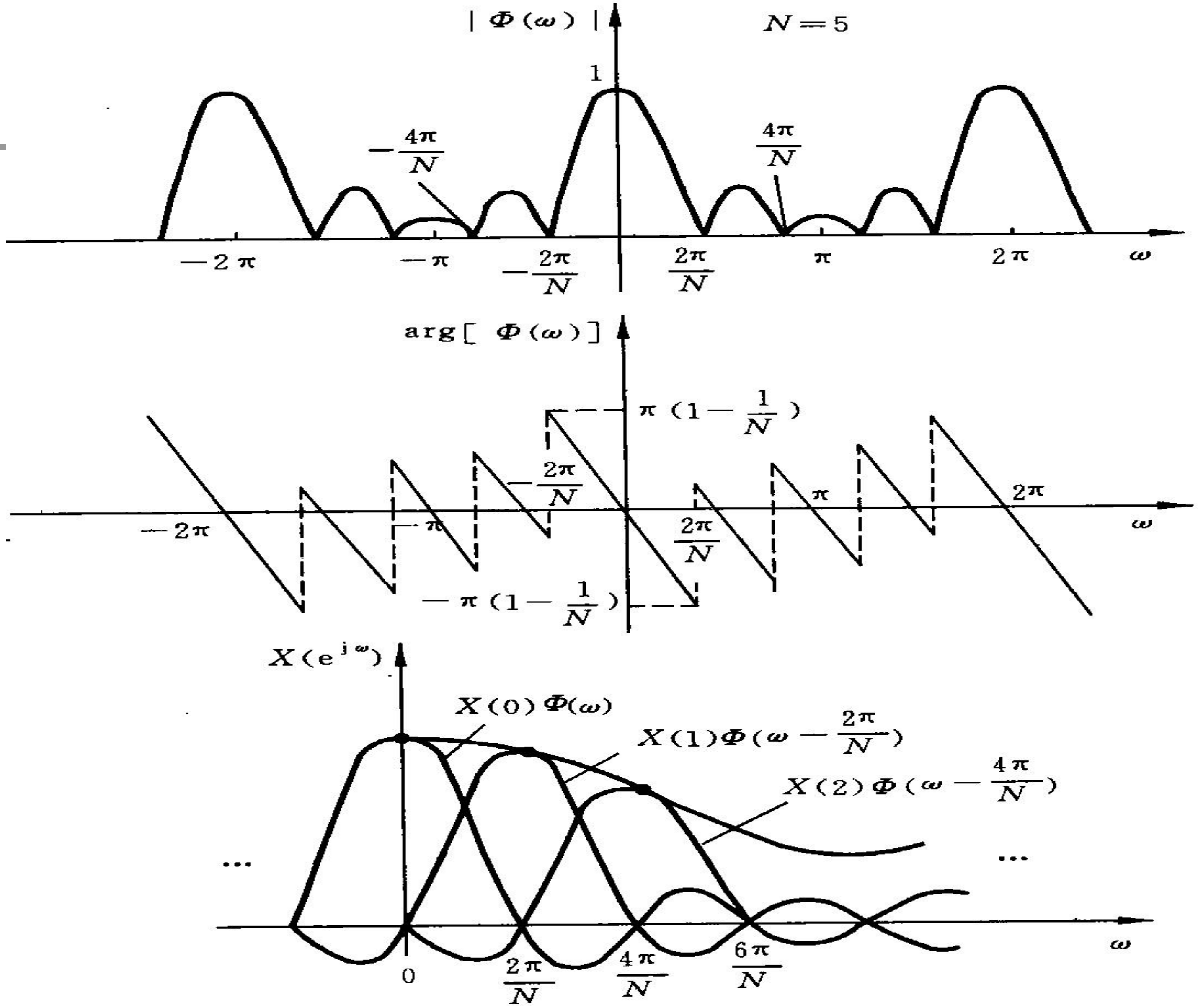
$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})}}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2}-k\frac{\pi}{N})}e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega-\frac{k\pi}{N})}=\Phi(\omega-k\frac{2\pi}{N})$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega)}$$

频域重构



$|\Phi(\omega)|$
$N=5$
1
$-\frac{4\pi}{N}$
$\frac{4\pi}{N}$
-2π
$-\pi$
$-\frac{2\pi}{N}$
$\frac{2\pi}{N}$
π
2π
ω
$\arg[\Phi(\omega)]$
$\pi(1-\frac{1}{N})$
$-\frac{2\pi}{N}$
$\frac{2\pi}{N}$
-2π
$-\pi$
π
2π
$-\pi(1-\frac{1}{N})$
ω
$X(e^{j\omega})$
$X(0)\Phi(\omega)$
$X(1)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N})$
$X(2)\Phi(\omega-\frac{4\pi}{N})$
…
…
0
$\frac{2\pi}{N}$
$\frac{4\pi}{N}$
$\frac{6\pi}{N}$
ω

FIR滤波器频率内插结构

$$H(e^{jw}) = \frac{1-e^{-jwN}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{-j(w-\frac{2\pi k}{N})}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\bullet\frac{1}{N}\frac{e^{-j\frac{wN}{2}}}{e^{-j\left(\frac{w}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}}\bullet\frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\bullet\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)}e^{-j\frac{\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\bullet\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{wN}{2}-k\pi\right)e^{j\pi k}}{\sin\left(\frac{w}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)}e^{-j\frac{\pi k}{N}}$$

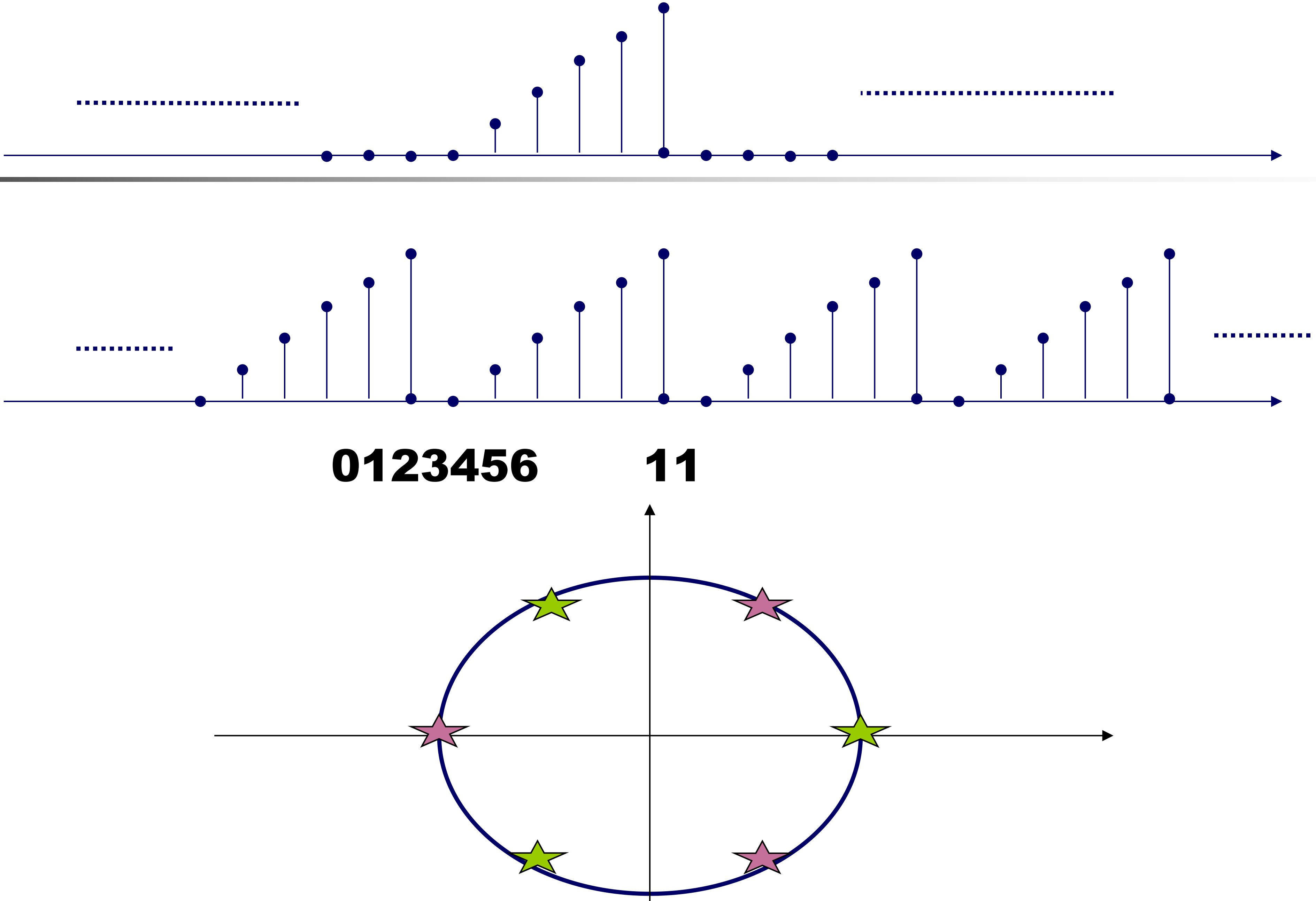
$$= \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\bullet\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{wN}{2}-k\pi\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)}e^{j\frac{(N-1)\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\bullet\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{(w-\frac{2\pi}{N}k)N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w-\frac{2\pi}{N}k}{2}\right)}e^{-j(w-\frac{2\pi}{N}k)\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

例题：

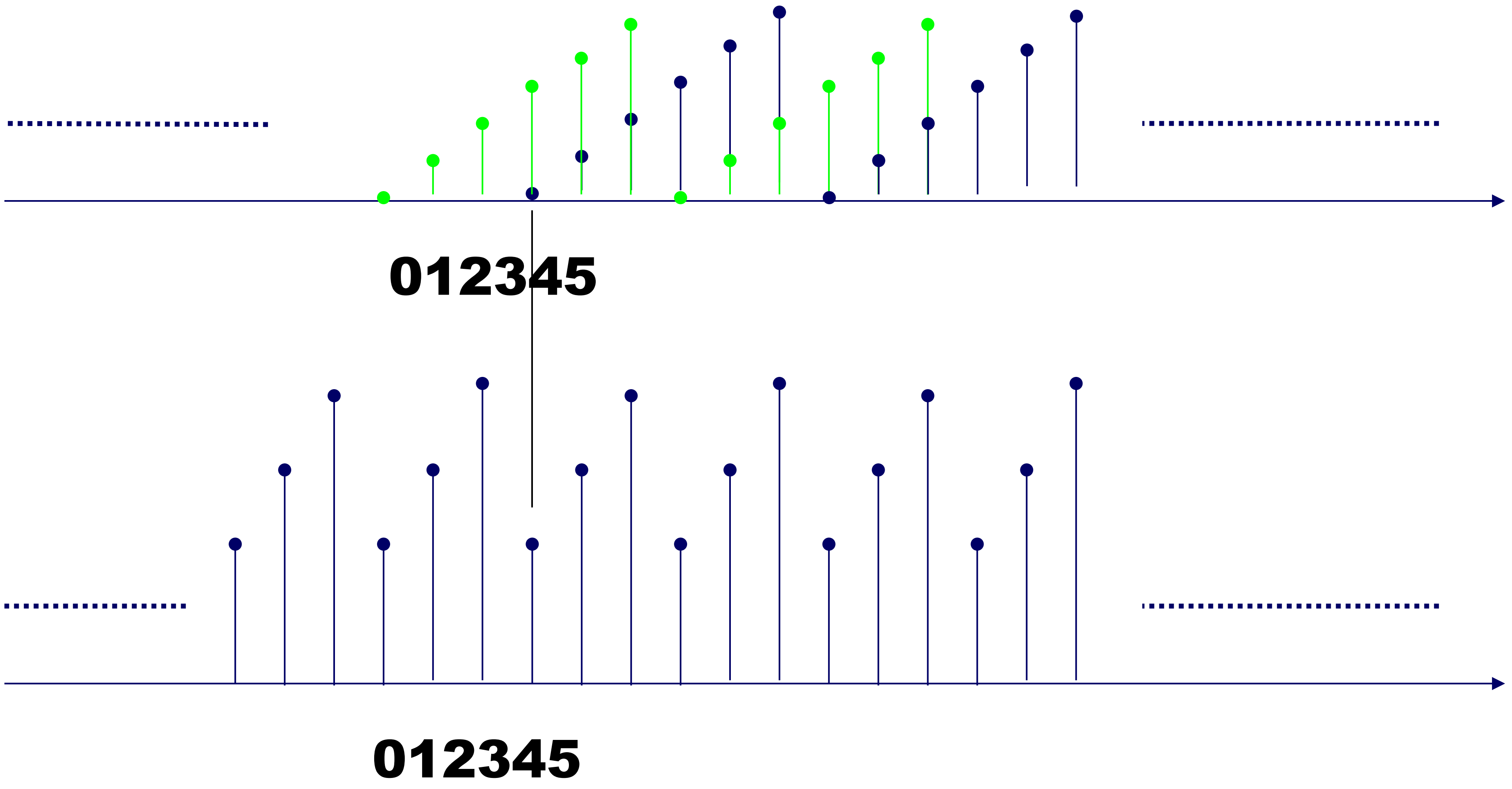
- 已知6点周期序列$\tilde{x}_1(n)$的DFS为$\tilde{X}_1(k)$;

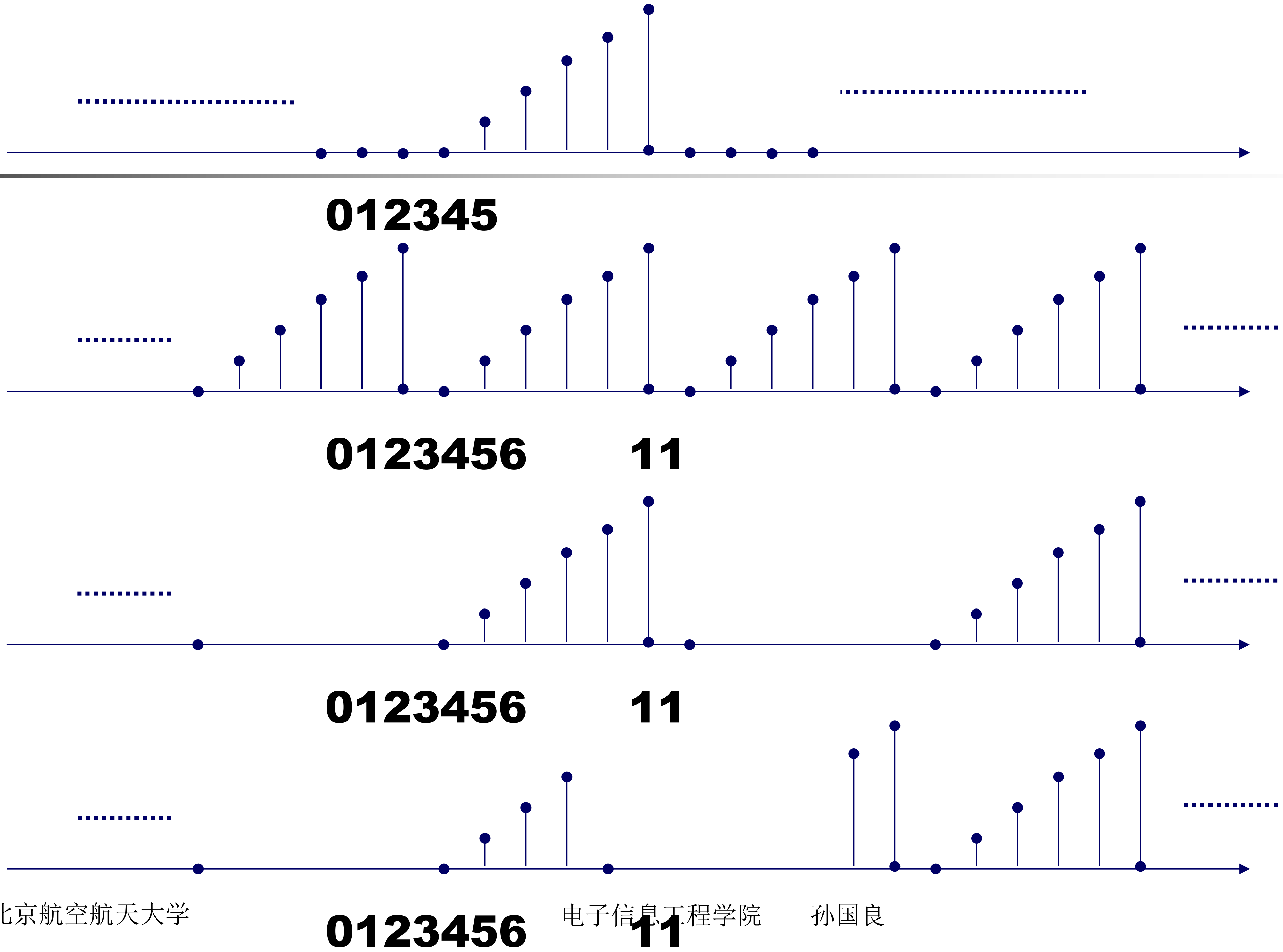
$$\tilde{x}_1(n) = n_{\%6}$$

- 若假设一个周期为3的序列$\tilde{x}_2(n)$的DFS[$\tilde{X}_2(k)$]与上述6点周期序列之间存在如下关系：
  - $\tilde{X}_2(k)=\tilde{X}_1(2k)$,请确定3点周期序列
- 若未知序列为12点，$\tilde{X}_2(2k)=\tilde{X}_1(k)$,则能否唯一确定序列？请给出两种序列满足上述要求



0123456
11


012345
012345


012345
0123456 11
0123456 11
0123456 11

作业

- 8.1
- 8.2
- 8.6
- 8.30

谢 谢

授课教师：孙国良

Email：mrsgl@buaa.edu.cn