第一章 离散傅里叶变化

数字处理需要对时域进行采样与截断，频域离散化。

从离散傅里叶级数（DFS）开始，逐步介绍离散傅里叶变换（DFT），以及快速算法。

1.1 离散傅立叶级数

周期序列等价于有限长序列，可以引出抽样定理。

连续信号可以进行连续傅里叶变换，而周期信号需要进行傅里叶级数，时域的周期性造成了频域的离散。时域的离散造成频域的周期性。

CTFS 是主值区间的信号，CTFT 是频域的采样。

$$X\left(e^{j\Omega T}\right)=\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

1.2 离散傅立叶变换

若是一个周期序列，那么不是绝对可和的，不能使用 DTFT 。

若是周期为 N 那么：

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$$

希望展开成离散的傅里叶级数：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}rn}=\frac{1}{N}\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}}=1,\ \text{when } r=mN, 0,\ \text{else}$$

定义变换因子的符号：$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。那么变换对为：

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

DFS 可以看作是主值区间的 Z 变换在单位圆的等间隔抽样。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=w\pi k/N}$$

1.2.1 频域采样

频域采样 N 点，得到的是抽样点为 N 的周期延拓。可以用来设计滤波器，若是可以无失真回复原序列，那么可以完整表达 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

1.2.2 内插器公式

$$\frac{1-\exp -j\omega N}{1-\exp -j\omega} = \exp -j\omega\frac{N-1}{2}\frac{\sin\omega N/2}{\sin\omega/2}$$

DFS

是对 DTFT 在主值区间的 N 点采样。周期性和离散性是等价的。

1.3 离散傅里叶变换

当只取主值区间时，就可以得到 DFT 。

$$\tilde{X}(k) = DFT[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFT[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

规定周期信号和主值区间转换的标记方式：$x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$, $\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x[[n]]_N$ 。

1.3.1 对偶性

注意：

$$DFT[X(n)] = Nx\tilde{((-k))}_N R_N(k)$$

得到：

$$IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\overline{DFT\left[X^*(k)\right]}$$

1.3.2 性质

- 线性
- 循环移位 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) = W_N^{-mk}\tilde{X}[k]2$
- 圆周共轭对称：实序列对应频域圆周共轭对称，虚序列对应频域圆周共轭反对称

- 圆周卷积和：点数有关
- 相关不满足交换律

1.4 DFT 快速算法

几个特点：

- 对称性：$W_N^{nk}* = W_N^{-nk}$
- 周期性：$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)}$
- 可约性：$W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}$

1.4.1 戈泽尔算法

最典型：利用周期性与对称性。

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)}$$

$$y_k(n) = x(n) * {W_N}^{-kn} u(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(n-r)} u(n-r)$$

$$y_k(n)|_{n=N} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)} u(N-r) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{-k(N-r)} = X(k)$$

避免了乘积项 W 的反复计算。

1.4.2 基 2-FFT

适合递归分解，需要分解成特殊基，并且最小子序列无复数运算。

1.4.3 线性调频 Z 变换

新的变换

1.5 DFT 的工程应用

连续时间信号进行分段与分割后才可以用过 DFT 进行 CTFT 的逼近，那么有：

$$x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$$

CTFT 近似为：

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT} \cdot T$$

通过截断，得到含有 N 个采样的序列：

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

进一步的，频谱也是需要进行分段离散化的：

$$X\left(jk\Omega_0\right) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT}$$

$$= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jnk\frac{2\pi F_0}{f_s}} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = T\left\{ DFT[x(n)]|_{x(n)=x(nT)} \right\}$$

若是逼近