



信号与系统

作者：Pannenets.F

时间：July 1, 2020

分类：笔记

Je reviendrai et je serai des millions. ——«Spartacus»

目录

1 信号与系统概论	1
1.1 信号的分类	1
1.2 信号的变换	1
1.3 基本信号	1
1.4 系统的描述	1
2 连续时间系统的时域分析	3
2.1 常系数线性微分方程	3
2.2 常微分方程解的分类	3
2.3 单位冲激响应	4
2.4 卷积计算及性质	4
2.5 时域系统的特性	4
3 连续时间信号的实频域分析	6
3.1 相关系数以及正交函数	6
3.2 三角函数形式傅里叶级数	6
3.3 指数函数形式傅里叶级数	7
3.4 三角函数-指数函数形式傅里叶级数的频谱关系	7
3.5 对称性	7
3.6 傅里叶变换	8
3.7 傅里叶变换的性质	8
3.8 周期信号的傅里叶变换	9
3.9 常见信号的傅里叶变换对	10
3.10 抽样信号	11
4 连续时间系统的实频域分析	12
4.1 系统频率响应	12
4.1.1 定义与意义	12
4.1.2 求解	12
4.2 无失真系统	13
4.2.1 系统频响	13
4.2.2 失真类型	13
4.3 理想低通滤波器	13
4.3.1 频响特性	13
4.3.2 单位阶跃响应	14
4.3.3 矩形脉冲响应	14

4.4	系统的因果性	15
4.5	相关函数	16
4.6	激励响应的谱关系	17
4.6.1	能量谱	17
4.6.2	功率谱	17
4.6.3	LTI 系统激励与响应的谱关系	18
4.7	实用性抽样系统分析模型	18
4.7.1	抽样保持信号	18
4.7.2	幅度调制与解调	18
5	连续时间信号与系统复频域分析	20
5.1	拉普拉斯变换	20
5.1.1	定义	20
5.1.2	单边拉普拉斯变换	20
5.1.3	收敛域	21
5.1.4	傅里叶变换拉普拉斯变换的直观理解	21
5.2	拉普拉斯变换对	22
5.3	拉普拉斯变换的性质	22
5.4	拉普拉斯逆变换	24
5.4.1	部分分式法	24
5.4.1.1	一阶实数极点	24
5.4.1.2	单阶共轭复数极点	24
5.4.1.3	重根极点	25
5.4.1.4	非真分式的情况	25
5.4.2	留数法	25
5.4.3	双边拉普拉斯变换	26
5.5	拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	26
5.5.1	$\text{Re}[s] > 0$ 右半平面收敛	26
5.5.2	$\text{Re}[s] < 0$ 左半平面收敛	26
5.5.3	$\text{Re}[s] = 0$	27
5.5.3.1	仅一阶虚轴极点	27
5.5.3.2	单个多阶虚轴极点	27
5.6	拉普拉斯变换求解连续时间系统响应	27
5.6.1	常微分方程	27
5.6.2	电路元件的复频域模型	28
5.7	系统函数	28
5.8	系统结构框图	29
5.8.1	系统结构	29

5.8.2	最简系统框图	29
5.9	S 域零极点分布与时域特性	30
5.9.1	极点分布	30
5.9.2	通过零极点确定系统响应	31
5.10	系统稳定性	31
5.10.1	稳定性与极点位置	31
5.10.2	稳定性与极点阶数	31
5.10.3	稳定性的判断	32
5.10.4	劳斯准则	32
5.11	基于复频域与频域的系统特性	33
5.12	周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换	33
6	离散时间系统的时域分析	35
6.1	离散时间序列	35
6.1.1	离散序列的描述方式	35
6.1.2	基本序列	35
6.1.3	基本运算	36
6.2	离散时间系统	36
6.2.1	功能模型	37
6.2.2	系统分类	37
6.3	离散时间系统时域分析	37
6.3.1	求解过程	37
6.3.2	特解的形式	37
6.3.3	零输入响应	38
6.3.4	零状态响应	39
6.3.5	完全响应的分解	41
6.3.6	系统单位样值响应的性质	41
6.3.6.1	因果性	41
6.3.6.2	稳定性	41
6.3.7	系统单位样值响应的求解	41
6.4	离散序列卷积和	42
6.4.1	解析法求卷积	42
6.4.2	图表法	42
6.4.3	竖乘法	43
6.4.4	卷积的性质	44
7	离散时间信号与系统变换域分析	45
7.1	\mathcal{Z} 变换	45
7.1.1	基本概念	45

7.1.2	收敛域	46
7.1.3	z 平面与 s 平面	46
7.2	典型的 \mathcal{Z} 变换对及性质	46
7.2.1	变换对	46
7.2.2	性质	47
7.3	逆 \mathcal{Z} 变换	48
7.4	\mathcal{Z} 变换求解系统响应	48
7.5	基于 \mathcal{Z} 变换的系统特性	49
7.5.1	系统函数	49
7.5.2	系统框图	50
7.5.3	离散时间系统的特性	51
7.6	序列傅里叶变换与系统频响	51
7.6.1	傅里叶变换的性质	51
7.6.2	系统频响	52
7.7	利用离散系统离散时间系统实现对模拟信号的滤波	52

插图目录

5.1	逆 \mathcal{L} 变换积分路径	26
5.2	串联结构	29
5.3	并联结构	29
5.4	反馈结构	30
6.1	单位延时器的画法	37
7.1	并联框图元件	50
7.2	级联框图元件	50
7.3	频谱关系	53

表格目录

2.1	微分方程特解的形式	3
3.1	傅里叶级数的奇偶对称性	8
3.2	傅里叶变换性质	8
3.3	傅里叶变换对	10
5.1	拉普拉斯变换收敛域范围	21
5.2	拉普拉斯变换对	22
5.3	拉普拉斯变换性质	23
5.4	拉普拉斯变换的极点与时域关系	30
6.1	差分方程特解的形式	38
6.2	图解法	43
6.3	图解法	43
7.1	\mathcal{Z} 变换对	46
7.2	\mathcal{Z} 变换性质	47
7.3	\mathcal{Z} 变换的一阶极点与时域关系	50

第一章 信号与系统概论

本章讨论信号与系统的基础概念问题。

1.1 信号的分类

定义 1.1 (能量/功率信号) 对于信号 $f(t)$, 定义其能量为:

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

定义其功率为:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

1.2 信号的变换

掌握信号的压缩、扩展、反褶以及时移等运算。

1.3 基本信号

本书涉及到的基本信号可以列举如下。

- 指数类信号
 - 实指数信号 $Ke^{\alpha t}$
 - 复指数信号 $Ke^{(\sigma + j\omega)t}$
 - 正余弦信号 $\cos(\omega t + \varphi)$, $\sin(\omega t + \varphi)$
- 奇异信号
 - 单位冲激信号 $\delta(t)$
 - 单位阶跃信号 $u(t)$
 - 单位斜变信号 $r(t)$

1.4 系统的描述

本课程研究的系统均可用微分方程或者差分方程描述, 这样的系统可以使用框图进行描述。

系统可以使用以下标准进行分类。

- 连续时间系统与离散时间系统
- 有记忆系统与无记忆系统
- 可逆系统与不可逆系统: 不同的激励是否会引起不同的相应
- 因果系统与非因果系统: 响应出现不早于激励
- 稳定系统与不稳定系统: 有限输入是否引起有限输出

- 线性系统与非线性系统
- 时变系统与时不变系统: 输入的时移对应引起输出的时移

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 常系数线性微分方程

常微分方程的求解可以分为以下几个步骤。

1. 根据特征方程求解齐次解
2. 根据激励形式配凑特解，求得对应的系数
3. 将完全解代入系统初始条件，确定待定系数

表 2.1: 微分方程特解的形式

激励	特解形式
常数 E	常数 D
t^n	$A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + \cdots + A_n t + A_{n+1}$
$e^{\alpha t}$	$A e^{\alpha t}$
$\cos(\beta n)$ 或 $\sin(\beta n)$	$P \cos(\beta n) + Q \sin(\beta n)$
$t^n e^{\alpha t} \cos(\beta n)$ 或 $t^n e^{\alpha t} \sin(\beta n)$	$(A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + \cdots + A_n t + A_{n+1}) e^{\alpha t} \cos(\beta n) + (B_1 t^n + B_2 t^{n-1} + \cdots + B_n t + B_{n+1}) e^{\alpha t} \sin(\beta n)$

2.2 常微分方程解的分类

解的分类。

- 自由响应：齐次解
- 强迫响应：特解
- 暂态响应：时间趋于无穷时解中趋于 0 的部分
- 稳态响应：时间趋于无穷时解中不为 0 的部分
- 零输入响应：完全由系统储能引起的响应
- 零状态响应：完全由激励引起的响应

系统时间点的区分。

- 起始状态： $t = 0_-$
- 初始状态： $t = 0_+$

2.3 单位冲激响应

对于微分方程的单位冲激响应的一般求法，给定一般的系统方程：

$$\sum_{i=0}^n C_i \frac{d^{n-i}r(t)}{dt^{n-i}} = \sum_{j=0}^m E_j \frac{d^{m-j}e(t)}{dt^{m-j}}$$

1. 将 C_0 化为 1，并且将激励的一侧使用冲激函数 $\delta(t)$ 完全代替
2. 为了满足冲激函数的匹配性，那么只有右侧最高阶导数 $\frac{d^n r(t)}{dt^n}$ 中含有 $\delta(t)$
3. 那么有 $\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}|_{t=0^+} = 1$ 以及 $\frac{d^i r(t)}{dt^i}|_{t=0^+} = 0, i < (n-1)$
4. 之后根据线性性以及时不变性得到单位冲激响应

2.4 卷积计算及性质

定义 2.1 (卷积) 对于函数 $x(t), y(t)$ 定义其卷积为

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

通常可以表示为

$$s(t) = x(t) \otimes y(t)$$

或者

$$s(t) = x(t) * y(t)$$

卷积的性质。

- 分配率
- 交换律
- 结合律
- 微分积分性质

$$s^{(n-m)}(t) = f_1^{(n)}(t) \otimes f_2^{(-m)}(t) = f_1(t) \otimes f_2'(t)$$

- 冲激函数性质

$$f(t-t_1) \otimes \delta(t-t_0) = f(t-t_0-t_1)$$

$$f(t) \otimes \delta'(t) = f'(t)$$

$$f(t) \otimes \delta^{-1}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$$

2.5 时域系统的特性

LTI 系统的系统性质围绕着单位冲激响应展开。

因果性的充要条件：

$$h(t) = h(t)u(t)$$

稳定性的**充要条件** (绝对可积):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau \leq N$$

第三章 连续时间信号的实频域分析

本章在时域对信号进行分解进行研究，主要工具是傅里叶级数、傅里叶变换。这一章最重要的是掌握傅里叶变换的性质，进而大大简化计算过程。

3.1 相关系数以及正交函数

定义 3.1 (相关系数) 记误差函数 $e(t)$ 为

$$e(t) = f(t) - kg(t)$$

其均方误差为

$$e^2(t) = \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - kg(t)]^2 dt$$

在均方误差取得最小值时的 k 取值即为 $f(t), g(t)$ 的相关系数，表征两者的相似程度

$$k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g^2(t)dt}$$

当两个函数的相关系数为 0 时，称这两个函数正交。

信号自身的正交分解常见两种：

- 直流-交流分解
- 奇偶分量分解

3.2 三角函数形式傅里叶级数

三角函数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

三角函数形式的频谱分为幅度谱以及相位谱。幅度谱为

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

相位谱为

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

3.3 指数函数形式傅里叶级数

指数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

其中

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

根据三角函数形式级数的运算可以得到

$$a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$$

那么有

$$F(n\omega_1) = \begin{cases} a_0, n = 0 \\ \frac{a_n - jb_n}{2}, n \neq 0 \end{cases}$$

称 $F(n\omega_1)$ 为信号的复数频谱或者复数谱。

类似的，频谱为

$$F(n\omega_1) = |F(n\omega_1)| e^{j\varphi_n}$$

3.4 三角函数-指数函数形式傅里叶级数的频谱关系

三角函数幅度谱与相位谱均为单边谱，对于幅度谱为偶拓延

$$|F(n\omega_1)| = \begin{cases} c_0 = a_0, n = 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n, n \neq 0 \end{cases}$$

对于相位谱为奇拓延

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

3.5 对称性

表 3.1: 傅里叶级数的奇偶对称性

函数分类	三角级数性质	指数级数性质
奇函数	只包含正弦函数分量	$F(n\omega_1)$ 为纯虚数相位谱只取 $\pm\frac{1}{2}\pi$
偶函数	只包含余弦函数分量	$F(n\omega_1)$ 为实数相位谱只取 $\pm\pi$
奇谐函数 ¹	只含有奇次谐波, 不含偶次谐波与直流分量	
偶谐函数 ²	只含有偶次谐波与直流分量, 不含奇次谐波	

3.6 傅里叶变换

定义 3.2 (傅里叶变换) 对于任意的函数 $f(t)$, 将其频谱密度函数

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{(-j\omega t)}dt$$

定义为傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的性质

假定已知变换为

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

性质列表如下

表 3.2: 傅里叶变换性质

名称	表达形式
对称性	$F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-t)$
见下页	

¹定义为 $f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$

²定义为 $f(t) = f(t \pm \frac{T}{2})$

名称	表达形式
奇偶虚实性	同傅里叶级数
反褶性质	$f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega) = F^*(\omega)$
时移性质	$f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
压扩性质	$f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
线性性	
时域微分	$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega)$ $f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^{(n)} F(\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
频移特性	$f(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega - \omega_0)$
卷积定理	$f_1(t) \otimes f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)F_2(\omega)$ $f(t)f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$

3.8 周期信号的傅里叶变换

对于周期为 T 的信号 $f(t)$ 有傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

其中

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt$$

对其单周期信号 $f_1(t)$ 有

$$f_1(t) = f(t) \left[u\left(t + \frac{T_1}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_1}{2}\right) \right]$$

其傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 与原函数的傅里叶级数满足

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_1(\omega) |_{\omega=n\omega_1}$$

带入傅里叶级数中得到

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

或者可以简单地通过卷积表示。单个周期信号为 $f_0(t)$ 那么

$$f_{T_1}(t) = f_0(t) \otimes \delta_{T_1}(t)$$

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = F_0(\omega) \frac{1}{T_1} \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - n\omega_1) = F_0(\omega) \omega_1 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

3.9 常见信号的傅里叶变换对

定义 3.3 (*Sa* 函数)

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

在数字信号处理和通信理论中，归一化 *sinc*(x) 函数通常定义为 $Sa(\pi x)$ 。

表 3.3: 傅里叶变换对

时域信号	频域信号
$G_\tau(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
$G_\tau(t) \otimes G_\tau(t) = \begin{cases} \tau - t , & t < \tau \\ 0, & t \geq \tau \end{cases}$	$\tau^2 Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\sin \omega_1 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)]$
$\cos \omega_1 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$

见下页

时域信号	频域信号
$\delta_{T_1}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$	$\omega_1 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$
$G_{T_1, \tau}(t)$	$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_1} \text{Sa}(\frac{n\omega_1 \tau}{2}) \delta(\omega - n\omega_1)$

3.10 抽样信号

原始信号为 $f(t)$ ，抽样脉冲信号为 $p(t)$

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

抽样信号为周期信号

$$p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\omega) = \omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} P_0(n\omega_s) \delta(\omega - n\omega_s)$$

那么

$$f_s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes \left[\omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} P_0(n\omega_s) \delta(\omega - n\omega_s) \right]$$

化简

$$f_s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} P_0(n\omega_s) F(\omega - n\omega_s) \right]$$

定理 3.1 (时域抽样定理) 对于原始信号 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ 以及抽样脉冲 $p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\omega)$ ，且原始信号带宽有限 $|\omega| < \omega_m$ ，可以得到抽样频谱

$$f_s(t) = p(t)f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes P(\omega)$$

为可以从抽样信号中恢复被抽样信号，在采样间隔 ω_s 间，不能发生原信号的重叠，即

$$\omega_s \geq 2\omega_m$$

或者可以化为

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2 \times 2\pi f_m$$

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m}$$

最小的抽样频率称为奈奎斯特频率。

第四章 连续时间系统的实频域分析

4.1 系统频率响应

4.1.1 定义与意义

定义 4.1 (系统频率响应) 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(\omega)$ 为系统频率响应, 又称系统的传递函数。

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)$$

根据卷积定理, 激励信号 $e(t)$ 作用到系统的零状态响应 $r(t)$ 的频域形式为

$$R(\omega) = E(\omega)H(\omega)$$

以基本信号 $\sin(\omega_1 t + \theta_1)$ 为例, 分析系统对不同的频率信号的影响

$$R(\omega) = -j\pi [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)] e^{j\frac{\theta_1}{\omega_1}\omega} H(\omega)$$

$$r(t) = \frac{1}{2j} \left[H(\omega_1) e^{j\omega_1 t + j\theta_1} - H(-\omega_1) e^{-j\omega_1 t - j\theta_1} \right]$$

分解

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

得到

$$r(t) = |H(\omega_1)| \sin[\omega_1 t + \theta_1 + \varphi(\omega_1)]$$

即特定频率信号通过 $H(\omega)$ 的系统, 幅度会被 $|H(\omega)|$ 调制, 并且发生 $\varphi(\omega)$ 的相移。

4.1.2 求解

可以通过对系统的常微分方程做傅里叶变换的方式求得系统频响。

$$\sum_{i=0}^n C_i \frac{d^{n-i} r(t)}{dt^{n-i}} = \sum_{j=0}^m E_j \frac{d^{m-j} e(t)}{dt^{m-j}}$$
$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_i (j\omega)^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} E_j (j\omega)^{m-j}}$$

4.2 无失真系统

定义 4.2 (无失真系统) 系统的输出可以复现系统输入信号，区别仅在于出现的时刻与幅度，信号的形状并未发生改变，这样的系统称为无失真系统。即

$$r(t) = ke(t - t_0)$$

4.2.1 系统频响

分析系统的单位冲激响应

$$h(t) = k\delta(t - t_0)$$

那么

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_0}$$

因此幅频特性与相频特性分布为

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= k \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned}$$

4.2.2 失真类型

幅度失真，对不同频率分量的幅度加权不一致

$$|H(\omega_1)| \neq |H(\omega_2)|$$

相位失真，对不同频率分量的相移不一致

$$\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1} \neq \frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_2}$$

定义 4.3 (群延时) 相频特性对频率的负导数

无失真系统的群延时的物理意义是信号的延时时间。

存在相位失真但是幅度不失真的系统称为**全通网络**或者**全通系统**。

4.3 理想低通滤波器

4.3.1 频响特性

对特定频率以下的信号无损滤波，应当满足

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \end{cases}$$

进行逆变换，得到其时域波形

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

可以发现理想低通滤波器是非因果且失真的。

4.3.2 单位阶跃响应

定义 4.4 (*Si 函数*)

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$$

理想低通滤波器的单位阶跃响应为

$$G(\omega) = \left[\pi\sigma(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0}, -\omega_c < \omega < \omega_c$$

那么进行逆变换

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

定义上升时间为从最小值到最大值的时间，那么阶跃响应的上升时间为

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

上升时间与带宽成反比。

4.3.3 矩形脉冲响应

吉布斯现象指的是矩形波的上冲现象。从一般的理解来看，随着滤波器截止频率的增大，通过的频率分量增多，这个峰值应该逐渐减小。但实际情况是，只有当系统的截止频率为无穷大时上冲才会消失，否则截止频率即使再大其依然存在，且大约等于总跳变值的 9%。

4.4 系统的因果性

因果系统的单位冲激响应满足

$$h(t) = h(t)u(t)$$

定理 4.1 (佩利-维纳准则) 对于幅频特性 $|H(\omega)|$ 系统物理可以实现的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

且 $|H(\omega)|$ 平方可积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

值得注意的是，若在一段有限长度的区间上幅频特性为 0，那么 $\ln |H(\omega)|$ 为无穷，因此不满足定理，无法物理实现。所以理想低通滤波器、理想高通滤波器、理想带通滤波器和理想带阻滤波器都是物理不可实现的系统。

定理 4.2 (希尔伯特变换) 系统响应划分为实部虚部

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

那么频域判定 LTI 为因果稳定系统的充分必要条件是，系统频率响应的实部和虚部满足

$$\begin{aligned} R(\omega) &= X(\omega) \otimes \frac{1}{\pi\omega} \\ X(\omega) &= R(\omega) \otimes \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) \end{aligned}$$

推导如下对 $h(t) = h(t)u(t)$ 进行傅里叶变换

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) \otimes \left[\pi\sigma(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

分解

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

带入

$$\begin{aligned} R(\omega) + jX(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [R(\omega) + jX(\omega)] \otimes \left[\pi\sigma(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi R(\omega) + X(\omega) \otimes \frac{1}{\omega} \right] + \frac{j}{2\pi} \left[\pi X(\omega) - R(\omega) \otimes \frac{1}{\omega} \right] \end{aligned}$$

对应的实部虚部相等

$$\begin{aligned} R(\omega) &= X(\omega) \otimes \frac{1}{\pi\omega} \\ X(\omega) &= R(\omega) \otimes \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) \end{aligned}$$

以上两式分别称为希尔伯特正变换、逆变换，分别相当于通过 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 与 $h(t) = -\frac{1}{\pi t}$ 的系统。

希尔伯特正变换：

$$\hat{f}(t) = f(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

而

$$\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sgn}\omega}$$

对正频率部分相位移动 $-\pi/2$ 负频率部分移动 $\pi/2$

实际上掌握概念即可，这里 ω, t 的使用没有时域和频域必然联系。

4.5 相关函数

在之前的章节，定义了相关系数来反映信号的相似性，但是在信号传输过程中可能会出现时移，所以静态的相关系数无法全面反映相似关系。

定义 4.5 (相关函数 (能量)) 定义能量有限信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) f_1^*(t - \tau) dt$$

函数与自身的相关函数称为自相关函数。

易知， $R_{12} = R_{21}^*$ ，并且可以观察到和卷积的相似性

$$f_i(t) \otimes f_j(-t) = R_{ij}(t)$$

在频域中 $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ ， $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$ 那么

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) F_2(-\omega) = F_1(\omega) F_2^*(\omega)$$

定义 4.6 (相关函数 (功率)) 定义功率有限信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数：

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) f_1^*(t - \tau) dt$$

函数与自身的相关函数称为自相关函数。

4.6 激励响应的谱关系

4.6.1 能量谱

从自相关函数入手，可以得到

$$f(t) \otimes f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)F(-\omega) = |F(\omega)|^2$$

$\tau = 0$ 时有

$$\begin{aligned} R(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(2\pi f)|^2 df \end{aligned}$$

上式体现了能量守恒定律在时域与频域的体现，称为帕塞瓦尔方程或者能量守恒方程。将 $\epsilon(\omega) = |F(\omega)|^2$ 称为信号的能量谱密度，是 ω 的偶函数，它只决定于信号 $f(t)$ 的频谱函数的模，而与相位无关，其单位是焦耳·秒。同时与自相关函数构成变换对

$$R(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \epsilon(\omega)$$

4.6.2 功率谱

仿照能量谱的方式，通过去极限的方式进行处理。截取某区间的功率信号

$$f_T(t) = f(t) \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

其能量表示为

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$

那么功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

那么在 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$ 存在且有限时，定义功率谱密度函数为

$$p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

功率可以表示为 $P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega$

可以得到变换对，或维纳-欣钦定理

$$R(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} p(\omega)$$

4.6.3 LTI 系统激励与响应的谱关系

对功率或能量信号均满足输出谱为输入谱和系统频响模方的乘积。

$$p_r(\omega) = |H(\omega)|^2 p_e(\omega)$$

$$\epsilon_r(\omega) = |H(\omega)|^2 \epsilon_e(\omega)$$

在时域进行分析

$$R(\omega)R(-\omega) = E(\omega)E(-\omega)H(\omega)H(-\omega)$$

$$R_r(\tau) = R_e(\tau) \otimes h(t) \otimes h(-t) = R_e(\tau) \otimes R_h(\tau)$$

定义系统冲激响应的自相关函数 $R_h(\tau) = \otimes h(t) \otimes h(-t)$

4.7 实用性抽样系统分析模型

一般通过理想抽样脉冲调制之后通过抽样系统获得抽样信号：

$$t : f_s(t) = [(f(t)\delta_{T_s}(t))] \otimes h_s(t)$$

$$\omega : F_s(\omega) = F_S^\delta(\omega)H_s(\omega) = \frac{H_s(\omega)}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

那么通过低通滤波器回复原信号

$$H(\omega) = \frac{T_s}{H_s(\omega)}$$

4.7.1 抽样保持信号

实际上就是选取不同形状抽样信号。

零阶抽样保持：通过矩形脉冲采样 $u(t) - u(t - T_s)$

一阶抽样保持：通过尖峰脉冲采样 $1 - \frac{|t|}{T_s}$

4.7.2 幅度调制与解调

调制是指通过特定信号的某种特性按照所需传输信号的变化规律变化，该特定信号称为载波，所需传输的信号称为调制波。

解调是调制的逆过程，将需传输的信号从接收到的信号中提取出来。

若一个信号通过余弦信号调制

$$f_c(t) = f(t) \cos \omega_c t$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_c) - F(\omega + \omega_c)]$$

幅度解调的实现方法和调制相近，首先，将接收信号 $f_s(t)$ 与接收端的本地载波信号相乘，这里要求本地载波信号是与发送端同频率同相位的余弦信号，这种解调方式称为同步解调。可以将频谱移到原点附近，直接滤波即可。

第五章 连续时间信号与系统复频域分析

频域分析法具有鲜明的物理意义，也存在局限性：部分常用的信号不存在傅里叶变换，傅里叶分析计算较为复杂。

拉普拉斯变换是一种应用广泛的数学分析工具，其特点是分析应用较为简单，但物理意义相对模糊。

5.1 拉普拉斯变换

5.1.1 定义

对不存在傅里叶变换的函数增加一个衰减因子使之绝对可积

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \end{aligned}$$

记 $s = \sigma + j\omega$ 令 $F(s) = F_1(\omega)$ ，拉普拉斯变换记为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

进行傅里叶逆变换得到

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} d\omega \end{aligned}$$

又 $s = \sigma + j\omega$ ，拉普拉斯逆变换记为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

5.1.2 单边拉普拉斯变换

对因果信号 $f(t) = f(t)u(t)$ ，仅考虑 $t > 0$ 其拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0 \end{aligned}$$

为方便起见，令 $F(s)$ 表示 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换, $F_B(s)$ 表示 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换。单边拉普拉斯变换时，除非明确声明，否则积分下限均取 0_- ，即

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

5.1.3 收敛域

将使得信号拉普拉斯变换存在的 σ 的取值范围称为该信号拉普拉斯变换的收敛域，记为 ROC (Region of convergence)。为了使每个信号的拉普拉斯变换是唯一的，必须同时给出 $F(s)$ 与 ROC，这是和傅里叶变换的明显区别。

收敛域表明了信号进行变换需要的衰减的程度。

在进行单边拉普拉斯变换时，常常忽略 ROC，因为若是其拉普拉斯变换存在，一定是存在于右半平面，具体位置不影响逆变换的结果。但是双边拉普拉斯变换**必须**考虑 ROC，不同位置的 $F_B(s)$ 的逆变换是不同的。

表 5.1: 拉普拉斯变换收敛域范围

时域信号	σ 范围
$t > 0$	$\sigma > \alpha$
$t < 0$	$\sigma < \beta$
$t \in \mathbb{R}$	$\alpha < \sigma < \beta$
$n < t < p$	$\sigma \in \mathbb{R}$

5.1.4 傅里叶变换拉普拉斯变换的直观理解

类似于傅里叶级数，傅里叶变换可以看作是不同幅度 ($|F(\omega)|$)、不同相位 $\varphi(\omega)$ 的余弦波或者是指数信号的叠加，是等幅度振荡；拉普拉斯变换则是对不同时间 t 进行指数衰减的变幅度叠加。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(\sigma - \mathbf{j}\omega)e^{-\mathbf{j}\omega t} + F(\sigma + \mathbf{j}\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}] e^{\sigma t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\sigma t} 2|F(s)| \cos(\omega t + \theta) d\omega \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{|F(s)| e^{\sigma t} d\omega}{\pi} \cdot \cos(\omega t + \theta)
 \end{aligned}$$

5.2 拉普拉斯变换对

表格中 $\text{Re}[s] = \sigma$ 。

表 5.2: 拉普拉斯变换对

时域信号	复频域信号	收敛域
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + s}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$
$\delta(t)$	1	全 s 平面
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	
$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	

5.3 拉普拉斯变换的性质

以下性质基于

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_B(s)$$

$$f(t)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

双边拉普拉斯变换的收敛域为

$$\alpha < \text{Re}[s] < \beta$$

表 5.3: 拉普拉斯变换性质

名称	单边 \mathcal{L} 表达形式	双边 \mathcal{L} 表达形式
时移性质	$f(t - t_0)u(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-st_0}$	$f(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_B(s)e^{-st_0}$ 收敛域不变
压扩性质	$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$	$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{ a }F_B\left(\frac{s}{a}\right)$ 1) $\alpha > 0, a\alpha < \text{Re}[s] < a\beta$ 2) $\alpha < 0, a\beta < \text{Re}[s] < a\alpha$
线性性质		
时域微分	$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0_-)$ $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0_-)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s)$ 收敛域至少为原收敛域
时域积分	$\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} + \frac{F(s)}{s}$	$\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$ 收敛域 $\max(\alpha, 0) < \text{Re}[s] < \beta$
s 域平移	$e^{s_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - s_0)$	$e^{s_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_B(s - s_0)$
s 域微分	$-t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}$	$-t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF_B(s)}{ds}$ 收敛域不变
s 域积分	$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$	$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty F_B(\lambda) d\lambda$ 收敛域不变
时域卷积	$f_1(t) \otimes f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) \otimes f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{B,1}(s)F_{B,2}(s)$ 收敛域延伸到并集最大值
s 域卷积	$f_1(t)f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) \otimes F_2(s)$	$f_1 t f_2 t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) \otimes F_2(s)$ 收敛域为边界相加
初值定理	$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$	

见下页

名称	单边 \mathcal{L} 表达形式	双边 \mathcal{L} 表达形式
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	

5.4 拉普拉斯逆变换

主要讨论单边变换，介绍部分分式法、留数法，最后介绍双边拉普拉斯变换。

5.4.1 部分分式法

对于有理真分式形式的拉普拉斯变换，

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

其中 m, n 为正整数，且 $m < n$ ，极点就是使得 $F(s)$ 为无穷大的 s 值。零点使 $F(s) = 0$ 。对其进行因式分解，即可通过变换对进行逆变换。在此仍满足因式分解时，复数极点总是共轭出现的。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \\ F(s) &= \frac{k_1}{(s - p_1)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)} \\ f(t) &= k_1 e^{p_1 t} u(t) + \dots + k_n e^{p_n t} u(t) \end{aligned}$$

5.4.1.1 一阶实数极点

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{k_1}{(s - p_1)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)} \quad k_i = ? \\ F(s)(s - p_i) &= \frac{k_1}{(s - p_1)}(s - p_i) + \dots + \frac{k_i}{(s - p_i)}(s - p_i) + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}(s - p_i) \\ &= \frac{k_1}{(s - p_1)}(s - p_i) + \dots + k_i + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}(s - p_i) \\ &\quad \vdots \\ k_i &= [(s - p_i) F(s)]_{s=p_i} \end{aligned}$$

5.4.1.2 单阶共轭复数极点

使用实数极点法也可以对复信号进行处理，但是十分繁琐，引出基于正余弦的基本信号，可以极大简化计算。

5.4.1.3 重根极点

$$F(s) = \frac{k(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)^k(s-p_2)\cdots(s-p_{n-k})}$$

$$F(s) = \frac{k_{1k}}{(s-p_1)^k} + \frac{k_{1,2}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{k_{11}}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_{n-k}}{s-p_{n-k}}$$

$$E(s) = \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_{n-k}}{s-p_{n-k}}$$

$$F(s) - E(s) = \frac{k_{1,1}}{(s-p_1)^k} + \frac{k_{1,2}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{k_{1,k}}{(s-p_1)}$$

$$(s-p_1)^k [F(s) - E(s)] = k_{1,1} + k_{1,2}(s-p_1) + \cdots + k_{1,k}(s-p_1)^{k-1}$$

通过求导确定同一极点不同阶的系数。

$$k_{1,m} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left\{ (s-p_1)^k [F(s) - E(s)] \right\} \Big|_{s=p_1}$$

5.4.1.4 非真分式的情况

分解 $F(s)$ 得到多项式与真分式两部分，真分式部分通过变换对 $\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n$ 处理。 $F(s)$ 含有指数部分，通过频移公式转换。

5.4.2 留数法

逆变换的形式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0$$

转化为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds + \int_{C_r} F(s) e^{st} ds - \int_{C_r} F(s) e^{st} ds \right]$$

那么转化为环路积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s) e^{st} ds - \int_{C_r} F(s) e^{st} ds$$

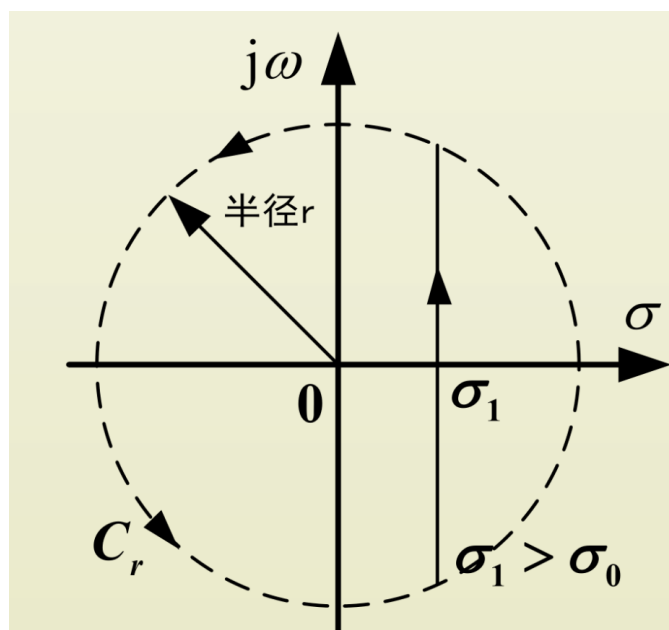
若是

$$\lim_{|s=r|\rightarrow\infty} |F(s)| = 0$$

那么再结合留数定理

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s) e^{st} ds = \sum_i \left\{ \text{Res}[F(s) e^{st}] \right\} \Big|_{s=p_i}$$

极点满足

图 5.1: 逆 \mathcal{L} 变换积分路径

$$\text{Res} [F(s)e^{st}]|_{s=p_i} = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s-p_i)^r F(s)e^{st}] \right\} \Big|_{s=p_i}$$

5.4.3 双边拉普拉斯变换

一般来说，可将双边拉氏变换分解为两个类似单边拉氏变换来处理。在各自的收敛域中的逆变换形式的叠加即可，需要注意不同的收敛域中会出现不同的逆变换形式。

注意，对于左边拉普拉斯变换，相当于进行一次右边变换以及双边反褶。

5.5 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

5.5.1 $\text{Re}[s] > 0$ 右半平面收敛

信号不满足绝对可积的条件，必须衰减才存在傅里叶变换。只有拉普拉斯变换，傅里叶变换不存在。

5.5.2 $\text{Re}[s] < 0$ 左半平面收敛

信号绝对可积，

$$F(\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

5.5.3 $\text{Re}[s] = 0$

5.5.3.1 仅一阶虚轴极点

$$F(s) = \sum_n \frac{k_n}{s - j\omega_n}$$

可得

$$f(t) = \sum_n k_n e^{j\omega_n t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

根据傅里叶变换的卷积定理

$$\begin{aligned} e^{j\omega_n t} u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_n)] \otimes [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \\ &= \frac{1}{j(\omega - \omega_n)} + \pi\delta(\omega - \omega_n) \end{aligned}$$

那么

$$F(\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \sum_n k_n \pi \delta(\omega - \omega_n)$$

5.5.3.2 单个多阶虚轴极点

$$F_s = \frac{k_0}{(s - j\omega_0)^k}$$

$$\frac{k_0}{(k-1)!} t^{k-1} e^{j\omega_0 t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

同样的进行变换

$$\frac{k_0}{(k-1)!} t^{k-1} e^{j\omega_0 t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(s) \Big|_{s=j\omega} + \frac{K_0 \pi j^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(\omega - \omega_0)$$

5.6 拉普拉斯变换求解连续时间系统响应

5.6.1 常微分方程

对连续时间系统的微分方程使用拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} &C_0 \frac{\mathbf{d}^n r(t)}{\mathbf{d}t^n} + C_1 \frac{\mathbf{d}^{n-1} r(t)}{\mathbf{d}t^{n-1}} + \cdots + C_{n-1} \frac{\mathbf{d}r(t)}{\mathbf{d}t} + C_n r(t) \\ &= E_0 \frac{\mathbf{d}^m e(t)}{\mathbf{d}t^m} + E_1 \frac{\mathbf{d}^{m-1} e(t)}{\mathbf{d}t^{m-1}} + \cdots + E_{m-1} \frac{\mathbf{d}e(t)}{\mathbf{d}t} + E_m e(t) \end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=0}^n C_i \frac{\mathbf{d}^{n-i} r(t)}{\mathbf{d}t^{n-i}} = \sum_{j=0}^m E_j \frac{\mathbf{d}^{m-j} e(t)}{\mathbf{d}t^{m-j}}$$

应用拉普拉斯变换时域微分性质

$$\left\{ \frac{\mathbf{d}^n f(t)}{\mathbf{d}t^n} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0_-)$$

$$R(s) \sum_{i=0}^n C_i s^{n-i} - \sum_{i=0}^n C_i \sum_{k=0}^{n-i-1} s^{n-i-k-1} r_r^{(i)}(0_-) = E(s) \sum_{j=0}^m E_j s^{m-j} - \sum_{j=0}^m E_j \sum_{i=0}^{m-j-1} s^{m-j-1-i} e^{(i)}(0_-)$$

可以求解出完全响应的 $R(s)$ ，在零状态响应中 $r^{(k)}(0_-) = 0$ ，零输入响应中 $E_i = 0$ 。如果 $e(t)$ 为因果信号， $e(t) = e(t)u(t)$ 那么 $e^{(i)}(0_-) = 0$ 。

5.6.2 电路元件的复频域模型

基尔霍夫定律

$$\begin{aligned} \sum I(s) &= 0 \\ \sum U(s) &= 0 \end{aligned}$$

电阻

$$v_R(t) = Ri_R(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U_R(s) = I_R(s)R$$

电感

$$v_L(t) = L \frac{\mathbf{d}i_L(t)}{\mathbf{d}t} \xrightarrow{\mathcal{L}} U_L(s) = I_L(s)Ls - Li_L(0_-)$$

电容

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) \mathbf{d}\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U_C(s) = I_C(s) \frac{1}{sC} + \frac{1}{s} u_C(0_-)$$

5.7 系统函数

系统的单位冲激相应满足

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$$

激励信号为 $e(t)$ 那么响应为

$$r(t) = e(t) \otimes h(t)$$

那么

$$R(s) = H(s)E(s)$$

系统函数为

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

5.8 系统结构框图

5.8.1 系统结构

串联系统

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

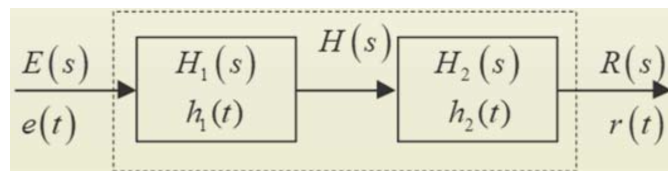


图 5.2: 串联结构

并联系统

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

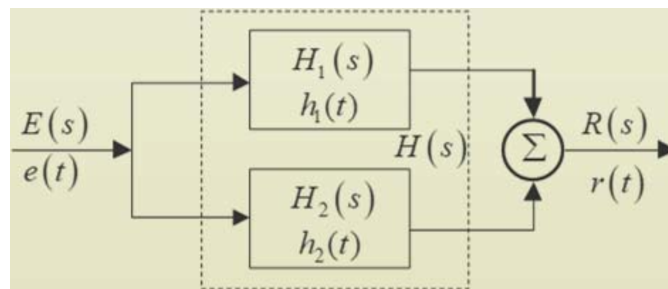


图 5.3: 并联结构

反馈系统

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

5.8.2 最简系统框图

因果信号激励时，零状态响应决定的系统函数为

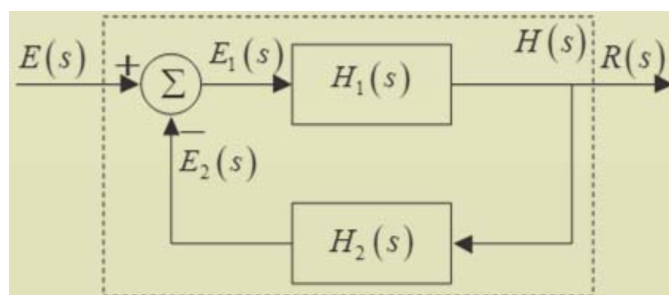


图 5.4: 反馈结构

$$H(s) = \frac{R_{zs}}{E(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m E_j s^{m-j}}{\sum_{i=0}^n C_i s^{n-i}} = \frac{\sum_{j=0}^m E_j s^{m-n-j}}{\sum_{i=0}^n C_i s^{-i}}$$

将分子分母分别作为一个子系统进行实现。

5.9 S 域零极点分布与时域特性

极点的分布决定了时域的特性，对于信号而言直接决定了时域信号的形式，对于系统而言决定冲激响应的形式。

5.9.1 极点分布

表 5.4: 拉普拉斯变换的极点与时域关系

$H(s)$ 极点形式	时域信号	性质
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	常数
$\frac{1}{s+a}, a > 0$	$e^{-at}u(t)$	指数衰减
$\frac{1}{s+a}, a < 0$	$e^{-at}u(t)$	指数上升
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t u(t)$	等幅振荡
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}, a > 0$	$e^{-at} \sin \omega t$	衰减振荡
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}, a < 0$	$e^{-at} \sin \omega t$	增幅振荡
$\frac{1}{s^2}$	$tu(t)$	

见下页

$H(s)$ 极点形式	时域信号	性质
$\frac{1}{(s+a)^2}, a > 0$	$te^{-\alpha t}u(t)$	上升
$\frac{1}{(s+a)^2}, a < 0$	$te^{-\alpha t}u(t)$	下降
$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin tu(t)$	增幅振荡

5.9.2 通过零极点确定系统响应

激励与系统函数分别表示为

$$E(s) = \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{k=1}^n (s - P_k)}$$

$$H(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - P_i)}$$

那么可以分解为

$$R(s) = \sum_{k=1}^v \frac{A_k}{s - p_k} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

由激励引起的响应称为强制相应，由系统引起的响应为自由响应。

5.10 系统稳定性

5.10.1 稳定性与极点位置

在时域中，系统的稳定性通过是否绝对可积判断。

系统的稳定性同样取决于极点位置，若是全部极点位于 s 平面的左半平面那么可以满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ ，称之为稳定系统。

同样的若是极点位于右半平面，或者虚轴上存在二阶以上极点， $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \rightarrow \infty$ ，成为不稳定系统。

若是在虚轴上存在一阶零点，由于发生等幅振荡，称为临界稳定系统。

5.10.2 稳定性与极点阶数

系统函数一般表现为

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}$$

在极限情况下

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \frac{a_m}{b_n} s^{m-n}$$

由于虚轴延伸到无穷远, 可以认为无穷远在虚轴上, 为了避免不稳定性需要满足 $m - n \leq 1$ 。

因此 $m \leq n$ 时, 系统稳定, $m = n + 1$ 时, 临界稳定, 其他情况不稳定。

5.10.3 稳定性的判断

系统函数的一般形式为,

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}$$

对于稳定系统, $B(s)$ 的系数全为正数, 且只能为以下几种情况:

- 从最高到最低次幂无缺项
- 缺全部偶次项
- 缺全部奇次项

5.10.4 劳斯准则

对于 $B(s)$ 的系数列出劳斯阵列, 方程式的根全部位于 s 左半平面的充分且必要条件为: 全部系数 b_i 为正数, 无缺项, 阵列中第一列数字符号相同。

$$\left\{ \begin{array}{cccc} b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ d_{n-1} & d_{n-3} & d_{n-5} & \cdots \\ e_{n-1} & e_{n-3} & e_{n-5} & \cdots \end{array} \right\}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_{n-1} &= -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \\
c_{n-3} &= -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} \\
d_{n-1} &= -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix} \\
d_{n-3} &= -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

5.11 基于复频域与频域的系统特性

实际上就是使用图解法对系统进行理解，

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - P_i)} \Big|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

其中的每一项差都可以化为极坐标。

那么就得到幅频特性与相频特性

$$|H(j\omega)| = K \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n}$$

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)$$

全通网络：幅频特性为常数，零极点逐对关于虚轴对称。

最小相移网络：所有零点都位于左半平面的网络。

一般网络可以分解为全通网络与最小相移网络的级连。

5.12 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换

周期信号 $f(t)$ 的单周期信号 $f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)]$ ，并且 $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)$ 那么处理成累加

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(t - iT)$$

那么

$$F(s) = F_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = F_1(s) \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}$$

第六章 离散时间系统的时域分析

对于离散时间信号，时间域变为离散取值，幅度域仍连续取值，因此在幅度域中运算几乎保持一致，而时间运算出现较大的差别。

6.1 离散时间序列

6.1.1 离散序列的描述方式

离散序列描述通常有三种方式：解析式，序列式，图形。

解析式即通过表达式的形式描述，序列式则常常表示一个有限序列，图形法通过离散点图描述一个序列。以下是一个序列式的例子。

$$x(n) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

6.1.2 基本序列

单位样值序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

类似连续时间系统，采用样值序列可以表示成其延时的加权和：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

单位阶跃序列，和连续时间系统里的阶跃不同的是，在 0 处的定义是明确的。

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i)$$

矩形序列

$$G_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

易得

$$G_N(n) = u(n) - u(n - N)$$

单边指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

正/余弦序列

$$x(n) = A \sin(\Omega t + \varphi) \Big|_{t=nT_s} = A \sin(\Omega n T_s + \varphi)$$

其中 T_s 为采样周期, Ω 为原信号的角频率, 称为模拟角频率, 令 $\omega = \Omega T_s$ 并且称为数字角频率, 易知单位为弧度。但是此处的序列不一定是周期的, 只有 $\omega N = 2\pi m$ 有解, 才成为一个周期序列。

6.1.3 基本运算

序列反褶

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$

序列移位

$$x(n) \rightarrow x(n - l)$$

序列压扩, 由于自变量限制为离散的整数, 因此压扩时会损失某些信号或者增加某些位置的信号 (补 0)。

序列四则运算, 均是逐点进行。

定义序列能量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

6.2 离散时间系统

和连续时间系统相同, 离散时间系统通常有两种时域表示方法, 一是数学模型, 二是功能模型即系统框图。对于离散时间系统, 由于变量是离散的, 运算更多的是不同时间点出现的序列之间的运算, 其数学模型为差分方程。

6.2.1 功能模型

主要元件有加法器、乘法器、数乘器、延时器等。

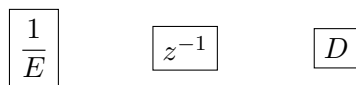


图 6.1: 单位延时器的画法

6.2.2 系统分类

几乎和连续时间系统一致：有记忆/无记忆系统，线性/非线性系统，时变/时不变系统，因果系统/非因果系统，稳定系/不稳定系统。

6.3 离散时间系统时域分析

6.3.1 求解过程

实际上就是常系数线性差分方程的求解过程。

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

- 求得方程的齐次解
- 然后根据激励信号的特点假设特定形式的特解，代入方程求得特解
- 将齐次解和特解相加得到完全解的得形式
- 通过方程的初始条件求得完全解中的待定系数

特征方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0$$

根据特征根 λ_i 得到齐次解

$$C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \cdots + C_N \lambda_N^n$$

若存在 k 重根 λ_1 ，对应

$$C_1 n^{k-1} \lambda_1^n + C_2 n^{k-2} \lambda_1^n + \cdots + C_{k-1} n \lambda_1^n + C_k \lambda_1^n$$

6.3.2 特解的形式

表 6.1: 差分方程特解的形式

激励	条件	特解形式
n^m	所有特征根不为 1	$P^m n^m + P_{m-1} n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0$
n^m	r 重特征根为 1	$n^r [P^m n^m + P_{m-1} n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0]$
λ^n	λ 不是特征根	$P \lambda^n$
λ^n	λ 是特征单根	$P_1 n \lambda^n + P_0 \lambda^n$
λ^n	λ 是 γ 重特征根	$P_\gamma n^\gamma \lambda^n + P_{\gamma-1} n^{\gamma-1} \lambda^n + \cdots + P_1 n \lambda^n + P_0 \lambda^n$
$\cos(\beta n)$ 或 $\sin(\beta n)$	当所有特征根不为 $e^{\pm j\theta}$	$P \cos(\beta n) + Q \sin(\beta n)$ 或 $A \cos(\beta n - \theta)$ $A e^{j\theta} = P + jQ$

6.3.3 零输入响应

零输入响应形式上是齐次解，对于差分方程

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = x(n)$$

求零输入响应时，必须要排除输入的影响，方法是通过差分方程的递推关系，找出输入加入系统前的系统起始状态，也就是在已知特定点的完全响应条件中带入对应的激励值，递推求解输入前的状态。

例 6.1 已知差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

设激励序列 $x(n) = u(n)$ 且 $y(0) = 1, y(1) = 0$ ，求系统的零输入响应。

解 题中给出了包含激励效果的系统初始条件，为去除激励信号的影响，须通过迭代的方法求出无激励效果的系统起始条件。将初始条件代入系统方程，得到

$$\begin{cases} y(0) + 3y(-1) + 2y(-2) = u(0) \\ y(1) + 3y(0) + 2y(-1) = u(1) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 1 + 3y(-1) + 2y(-2) = 1 \\ 3 + 2y(-1) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} y(-1) = -1 \\ y(-2) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

由系统差分方程, 得到特征方程

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

系统零输入相应为

$$y_{ij}(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

代入起始条件, 得到

$$y_{zi}(n) = [2(-1)^n - 2(-2)^n] u(n)$$

6.3.4 零状态响应

例 6.2 设某离散时间系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

已知 $x(n) = 2^n, n \geq 0$; 初始条件为 $y(0) = 0, y(1) = 2$, 求系统零输入响应、零状态响应和完全响应。

解

首先求解输入响应。由差分方程得到相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 则齐次解为

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

其中 C_1 和 C_2 为待定系数。

将条件 $y(0) = 0, y(1) = 2$ 代入差分方程, 求出 $y(-1) = 0, y(-2) = \frac{1}{2}$ 由于激励是 0 时刻加入的, 在 0 时刻之前系统只有零输入响应, 故而零输入响应的起始条件为 $y_{xi}(-1) = y(-1), y_{xi}(-2) = y(-2)$ 。因此

$$y_{zi}(-1) = 0 = C_1(-1)^{-1} + C_2(-2)^{-1}$$

$$y_{zi}(-2) = \frac{1}{2} = C_1(-1)^{-2} + C_2(-2)^{-2}$$

由上式求得 $C_1 = 1, C_2 = -2$, 故零输入响应为

$$y_{xi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n, \quad n \geq 0$$

其次, 零状态响应。由输入激励的形式, 确定特解形式为 $y_p(n) = P(2)^n$ 。代入系统差分方程, 得到

$$P(2)^n + 3P(2)^{n-1} + 2P^{n-2} = 2^n$$

即 $P = \frac{1}{3}$, 则特解为

$$y_p(n) = \frac{1}{3}(2)^n$$

零状态响应形式为

$$y_{zs}(n) = D_1(-1)^n + D_2(-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

其中 D_1 和 D_2 为待定系数。请注意, 求解系统零状态响应的差分方程的边界条件是初始状态, 即激励, 加入系统后的状态。因此将系统起始条件 $y(-1) = y(-2) = 0$ 代入差分方程求得系统零状态响应的初始条件 $y_{zs}(0) = 1, y_{zs}(1) = -1$, 代入 $y_{zs}(n)$ 表达式中, 得到

$$\begin{cases} D_1 + D_2 + \frac{1}{3} = 1 \\ -D_1 - 2D_2 + \frac{2}{3} = -1 \end{cases}$$

解方程组得 $D_1 = -\frac{1}{3}, D_2 = 1$, 则

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

最后, 系统完全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

6.3.5 完全响应的分解

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_k a_k^n}_{\text{free response}} + \underbrace{P(n)}_{\text{forced response}} \\
 &\quad \text{homogeneous solution} \quad \text{particular solution} \\
 &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zi,k} a_k^n}_{\text{zero input solution}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zs,k} a_k^n}_{\text{zero status solution}} + P(n)
 \end{aligned}$$

6.3.6 系统单位样值响应的性质

$\delta(n)$ 激励系统产生的零状态响应被称为该系统单位样值响应，通常用 $h(n)$ 表示。
 $u(n)$ 激励系统产生的零状态响应被称为该系统单位阶跃响应，通常用 $g(n)$ 表示。

类似连续时间系统，样值响应有着重要的性质。

6.3.6.1 因果性

离散时间系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, n < 0$$

6.3.6.2 稳定性

离散时间系统稳定的充分必要条件是绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

6.3.7 系统单位样值响应的求解

对于一个系统，可知 $h(n_i) = 0, i < 0$ 。

由于 $n > 0$ 时，激励为 0，那么样值响应有着齐次解的形式

$$h_1(n) = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n$$

$n = 0$ 时，根据方程形式有

$$h_1(0) = -\sum_{k=1}^N a_k y(-k) + \delta(0) = 1$$

6.4 离散序列卷积和

任意的序列都可用过样值序列来表示，且零状态响应都可以通过样值响应求解。

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

对于 LTI 离散系统 T ， $x(n)$ 产生的零状态响应为

$$\begin{aligned} y(n) = T[x(n)] &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \end{aligned}$$

定义卷积为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n)$$

6.4.1 解析法求卷积

解析法就是定义法，依据卷积和的定义，通过解析式进行计算。

6.4.2 图表法

在计算有限长序列的卷积和时，可以用更加简单的图形法求解。

例 6.3 $x(n) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{0.4}, 0.3, 0.2, 0.1 \right\}$, $h(n) = \left\{ 0.3, \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{0.2}, 0.2, 0.2, 0.1 \right\}$

解

表 6.2: 图解法

					0.4	0.3	0.2	0.1						
n=0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3									
	n=1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3								
		n=2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3							
			n=3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3						
				n=4	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3					
					n=5	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3				
						n=6	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3			
							n=7	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3		

6.4.3 竖乘法

例 6.4

表 6.3: 图解法

$x_1(n)$ n=0 →	4	3	2	1				
$x_2(n)$ n=0 →		3	2	1				
		4	3	2	1			
		8	6	4	2			
	12	9	6	3				
$y(n)$	12	17	16	10	4	1		

6.4.4 卷积的性质

$x(n)$ 与 $y(n)$ 的卷积包含两序列总长度减一的元素。

满足交换律、分配律，结合律。

卷积的移不变性，若 $x_1(n) \otimes x_2(n) = y(n)$ 则

$$x_1(n-m) \otimes x_2(n+k) = y(n-m+k)$$

序列与 $\delta(n)$ 的卷积

$$x(n) \otimes \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) \otimes \delta(n-m) = x(n-m)$$

序列与 $u(n)$ 的卷积

$$x(n) \otimes u(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

$$x(n) \otimes u(n) = \left[\sum_{m=0}^n x(m) \right] u(n), \quad \text{if } x(n) = x(n)u(n)$$

第七章 离散时间信号与系统变换域分析

在时域分析的基础上进行变换域的分析，序列在某种程度上可以看作连续时间信号的特例。依据连续信号分析的套路，进行相应的傅里叶变换，以及拉普拉斯变换。序列的傅里叶变换是数字信号处理的基本内容，序列拉普拉斯变换则是 \mathcal{Z} 变换。

7.1 \mathcal{Z} 变换

7.1.1 基本概念

定义 7.1 (\mathcal{Z} 变换) 对于序列 $x(n)$ ，其 \mathcal{Z} 双边变换的定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

类似拉普拉斯变换，同样定义其单边变换。对于序列 $x(n)$ ，其 \mathcal{Z} 单边变换的定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的 \mathcal{Z} 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是序列 $x(n)$ 的样值，即

$$X(z) = \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

其实 \mathcal{Z} 变换可以借助抽样信号的拉普拉斯变换引出。一个信号被理想抽样，得到

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

进行拉普拉斯变换得到

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

引入 $z = e^{sT}$ ，则可以得到

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

离散系统中，采样间隔往往为 1，那么 $z = e^s$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n1)z^{-n}$$

7.1.2 收敛域

同样是类似于拉普拉斯变换， \mathcal{Z} 变换同样存在收敛域（ROC），实际上就是幂级数求和的收敛性问题。

对于变号级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ ，满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n+1)z^{-(n+1)}}{x(n)z^{-n}} \right| = \rho$$

- 若 $\rho < 1$ ，则级数绝对收敛
- 若 $\rho > 1$ ，则级数发散
- 若 $\rho = 1$ ，级数可能收敛也可能发散

对于因果序列或 $n \geq 0$ 序列，收敛域是空心圆。对于 $n < 0$ 序列，收敛域是空心圆。对于双边序列，收敛域是圆环。对于有限长度序列，分别有 $n \geq 0$ 、 $n < 0$ 、过 0 序列，收敛域分别是除去 $z = 0$ ， $z = \infty$ ， $z = 0$ or ∞ 。

7.1.3 z 平面与 s 平面

将复数转换为极坐标，原有的以原点为分界变为以单位圆分界。

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} \rightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = \omega \frac{2\pi}{\omega_s} \end{cases}$$

7.2 典型的 \mathcal{Z} 变换对及性质

7.2.1 变换对

表 7.1: \mathcal{Z} 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
见下页		

时域函数	z 域函数	ROC
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

7.2.2 性质

以下的讨论的基准函数是 $x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ ，并且部分性质对单边双边进行了区分。

表 7.2: \mathcal{Z} 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha < z < \beta$	$\frac{1}{\beta} < z < \frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a > 0$	$X(z^a)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha^{1/a} < z < \beta^{1/a}$
$x(n \pm m)$	双边 $z^{\pm m} X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$x(n - m)u(n)$	单边 $z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
$x(n + m)u(n)$	单边 $z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$a^n x(n)$	$X(\frac{z}{a})$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < \left \frac{z}{a} \right < \beta$
$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\frac{z}{v})X_2(v)v^{-1}dv^1$		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty)$$

¹其中 C 是 $X_1(\frac{z}{v})X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

7.3 逆 \mathcal{Z} 变换

根据 \mathcal{Z} 变换的定义, 只要可以将给定的 z 域函数展开成幂级数的形式, 就可以得到原序列。但是往往不是那么容易得到, 更多的通过部分分式法确定。

对于有理多项式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$\begin{aligned} &ka^n u(n), |z| > a \\ &-ka^n u(-n-1), |z| < a \end{aligned}$$

围线积分法

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

该式便是逆变换表达式。 C 是平面上包含 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合环路积分路线。

通过留数定理

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{\text{polar point in } C} \text{Res}[X(z)z^{n-1}], n \geq 0 \\ \sum_{\text{polar point out of } C} \text{Res}[X(z)z^{n-1}], n < 0 \end{cases}$$

对于 K 重极点

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} [(z-z_i)^K X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_i}$$

7.4 \mathcal{Z} 变换求解系统响应

LTI 离散系统离散时间系统的差分方程一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

将等式两边取单边 \mathcal{Z} 变换, 并利用 \mathcal{Z} 变换的位移特性

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-1} \right] = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m} \right]$$

那么完全响应的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} - \frac{\sum_{k=0}^N \left[a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

零输入响应的 z 变换为

$$Y(z) = - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

零状态响应的 \mathcal{Z} 变换为

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=r}^{-1} x(m) z^{-m} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

当激励 $x(n)$ 为因果序列时，系统零状态响应

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

7.5 基于 \mathcal{Z} 变换的系统特性

7.5.1 系统函数

系统单位样值响应的 \mathcal{Z} 变换

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

并满足

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

类似拉普拉斯变换，零极点分布可以决定系统的样值响应，可以参见拉普拉斯变换

部分的极点分布影响。

表 7.3: \mathcal{Z} 变换的一阶极点与时域关系

$X(z)$ 极点位置	时域信号性质
$ z < 1, \text{Im}[z] = 0$	指数衰减
$ z < 1, \text{Im}[z] \neq 0$	减幅振荡
$ z = 1, \text{Im}[z] = 0$	常数
$ z = 1, \text{Im}[z] \neq 0$	等幅振荡
$ z > 1, \text{Im}[z] = 0$	指数上升
$ z > 1, \text{Im}[z] \neq 0$	增幅振荡

若单位圆上存在高阶极点同样会产生增幅。

7.5.2 系统框图

级联型就是基本的反馈单元。

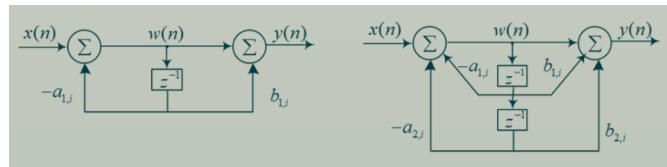


图 7.1: 并联框图元件

$$H_1(z) = \frac{1 + b_{1,j}z^{-1}}{1 - a_{1,j}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}$$

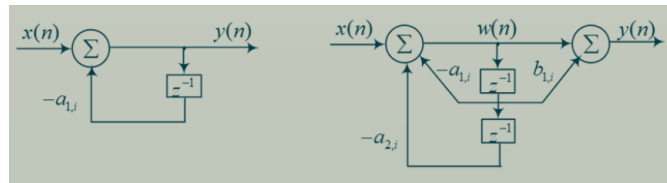


图 7.2: 级联框图元件

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + a_{1,i}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + b_{1,i}z^{-1}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}$$

7.5.3 离散时间系统的特性

因果性即

$$h(n) = h(n)u(n)$$

因果序列的收敛域为 $|z| > R$, 那么因果性的充要条件为 $|z| > R$, 极点分布在一个半径有限的圆中。

稳定性的时域充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < M$$

即

$$H(1) < M$$

系统为稳定的充要条件是：系统函数的收敛域包含单位圆。

7.6 序列傅里叶变换与系统频响

7.6.1 傅里叶变换的性质

将 z 表示为极坐标, 可发现类似拉普拉斯变换的衰减系数 r

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}] e^{-j\omega n}$$

当 $r = 1$ 时, 即单位圆的 \mathcal{Z} 变换称为系统的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

按照围线法, 其逆变换为

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} d(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} \bullet e^{-j\omega} \bullet je^{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega \end{aligned}$$

并不是任何序列都是存在傅里叶变换。序列存在傅里叶变换的充分条件是绝对可和。

同样存在奇偶虚实性、时移、时域压扩、反褶、线性等性质；存在序列线性加权、频移、卷积性质。

卷积为

$$x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$\mathcal{F}[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$\mathcal{F}[x_1(n)x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})]$$

能量守恒定律

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

7.6.2 系统频响

稳定系统的傅里叶变换满足

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

物理意义与连续时间系统的一致。

$$\begin{aligned} y(n) &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{1}{2} [e^{j[\varphi(\omega_0)+a_0n]} - e^{-j[\varphi(\omega_0)+\omega_0n]}] \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \sin[n\omega_0 + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

注意作图法时由于极坐标的周期性，幅频曲线、相频曲线均以 2π 为周期。

7.7 利用离散系统离散时间系统实现对模拟信号的滤波

处理实际信号的流程是连续信号离散化，处理之后恢复到连续。即

$$x_c(t) \xrightarrow{\text{A/D 转换}} x_d(n) \xrightarrow{\text{数字滤波器}} y_d(n) \xrightarrow{\text{D/A}} y_c(t)$$

那么具体来说

$$x_d(n) = x_c(nT)$$

$$y_d(n) = y_c(nT)$$

离散序列由冲激函数串得到

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

再考虑离散信号的傅里叶变换

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

那么

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$$

抽样关系, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

那么

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - 2\pi k)/T]$$

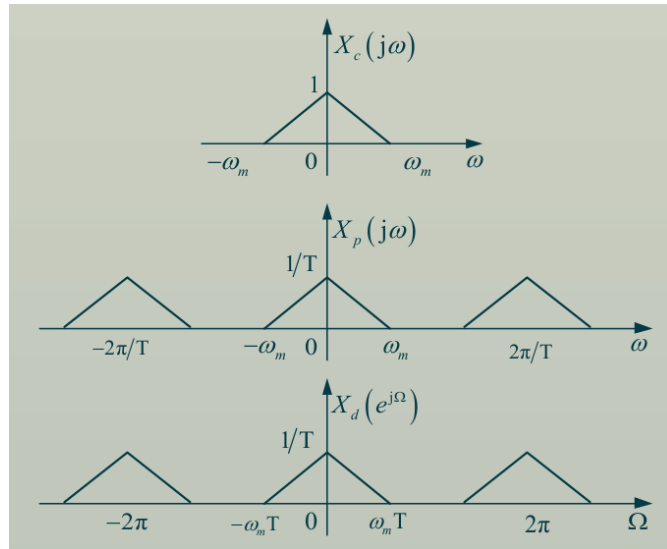


图 7.3: 频谱关系

数字滤波器满足

$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega}) H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - 2\pi k)/T] H_d(e^{j\Omega})$$

因为 $\Omega = \omega T$, 故而得到

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) H_d(e^{j\omega T})$$

取 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 得到

$$Y_d(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega - k\omega_s) H_d(e^{j\omega T})$$

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_d(e^{j\omega T})$$

即

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$