

第一章 离散时间信号与系统变换域分析

在时域分析的基础上进行变换域的分析，序列在某种程度上可以看作连续时间信号的特例。依据连续信号分析的套路，进行相应的傅里叶变换，以及拉普拉斯变换。序列的傅里叶变换是数字信号处理的基本内容，序列拉普拉斯变换则是 \mathcal{Z} 变换。

1.1 \mathcal{Z} 变换

1.1.1 基本概念

定义 1.1 (\mathcal{Z} 变换) 对于序列 $x(n)$ ，其 \mathcal{Z} 双边变换的定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

类似拉普拉斯变换，同样定义其单边变换。对于序列 $x(n)$ ，其 \mathcal{Z} 单边变换的定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的 \mathcal{Z} 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是序列 $x(n)$ 的样值，即

$$X(z) = \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

其实 \mathcal{Z} 变换可以借助抽样信号的拉普拉斯变换引出。一个信号被理想抽样，得到

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

进行拉普拉斯变换得到

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

引入 $z = e^{sT}$ ，则可以得到

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

离散系统中，采样间隔往往为 1，那么 $z = e^s$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n1)z^{-n}$$

1.1.2 收敛域

同样是类似于拉普拉斯变换， \mathcal{Z} 变换同样存在收敛域（ROC），实际上就是幂级数求和的收敛性问题。

对于变号级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ ，满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n+1)z^{-(n+1)}}{x(n)z^{-n}} \right| = \rho$$

- 若 $\rho < 1$ ，则级数绝对收敛
- 若 $\rho > 1$ ，则级数发散
- 若 $\rho = 1$ ，级数可能收敛也可能发散

对于因果序列或 $n \geq 0$ 序列，收敛域是空心圆。对于 $n < 0$ 序列，收敛域是空心圆。对于双边序列，收敛域是圆环。对于有限长度序列，分别有 $n \geq 0$ 、 $n < 0$ 、过 0 序列，收敛域分别是除去 $z = 0$ ， $z = \infty$ ， $z = 0$ or ∞ 。

1.1.3 z 平面与 s 平面

将复数转换为极坐标，原有的以原点为分界变为以单位圆分界。

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} \rightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = \omega \frac{2\pi}{\omega_s} \end{cases}$$

1.2 典型的 \mathcal{Z} 变换对及性质

1.2.1 变换对

表 1.1: \mathcal{Z} 变换对

时域函数	z 域函数	ROC
$\delta(n)$	1	全平面
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
见下页		

时域函数	z 域函数	ROC
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

1.2.2 性质

以下的讨论的基准函数是 $x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ ，并且部分性质对单边双边进行了区分。

表 1.2: \mathcal{Z} 变换性质

时域函数	z 域函数	原 ROC	变换后 ROC
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\alpha < z < \beta$	$\frac{1}{\beta} < z < \frac{1}{\alpha}$
$x(\frac{n}{a}), a > 0$	$X(z^a)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha^{1/a} < z < \beta^{1/a}$
$x(n \pm m)$	双边 $z^{\pm m} X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$x(n - m)u(n)$	单边 $z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
$x(n + m)u(n)$	单边 $z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$	$ z > a$	$ z > a$
线性性			原收敛域的交集
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$n^m x(n)$	$\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < z < \beta$
$a^n x(n)$	$X(\frac{z}{a})$	$\alpha < z < \beta$	$\alpha < \left \frac{z}{a} \right < \beta$
$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$		原收敛域交集
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\frac{z}{v})X_2(v)v^{-1}dv^1$		收敛域是边界的乘积

初值定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

终值定理

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = x(\infty)$$

¹其中 C 是 $X_1(\frac{z}{v})X_2(v)$ 收敛域交集内的逆时针方向围线

1.3 逆 \mathcal{Z} 变换

根据 \mathcal{Z} 变换的定义, 只要可以将给定的 z 域函数展开成幂级数的形式, 就可以得到原序列。但是往往不是那么容易得到, 更多的通过部分分式法确定。

对于有理多项式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

对于分解得到的 $\frac{kz}{z-a}$

$$\begin{aligned} ka^n u(n), |z| > a \\ -ka^n u(-n-1), |z| < a \end{aligned}$$

围线积分法

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

该式便是逆变换表达式。 C 是平面上包含 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合环路积分路线。

通过留数定理

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{\text{polar point in } C} \text{Res}[X(z)z^{n-1}], n \geq 0 \\ \sum_{\text{polar point out of } C} \text{Res}[X(z)z^{n-1}], n < 0 \end{cases}$$

对于 K 重极点

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} [(z-z_i)^K X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_i}$$

1.4 \mathcal{Z} 变换求解系统响应

LTI 离散系统离散时间系统的差分方程一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

将等式两边取单边 \mathcal{Z} 变换, 并利用 \mathcal{Z} 变换的位移特性

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-1} \right] = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-1} \right]$$

那么完全响应的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} - \frac{\sum_{k=0}^N \left[a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

零输入响应的 z 变换为

$$Y(z) = - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

零状态响应的 \mathcal{Z} 变换为

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \left[X(z) + \sum_{m=r}^{-1} x(m) z^{-m} \right]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

当激励 $x(n)$ 为因果序列时，系统零状态响应

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

1.5 基于 \mathcal{Z} 变换的系统特性

1.5.1 系统函数

系统单位样值响应的 \mathcal{Z} 变换

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

并满足

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

类似拉普拉斯变换，零极点分布可以决定系统的样值响应，可以参见拉普拉斯变换

部分的极点分布影响。

表 1.3: \mathcal{Z} 变换的一阶极点与时域关系

$X(z)$ 极点位置	时域信号性质
$ z < 1, \text{Im}[z] = 0$	指数衰减
$ z < 1, \text{Im}[z] \neq 0$	减幅振荡
$ z = 1, \text{Im}[z] = 0$	常数
$ z = 1, \text{Im}[z] \neq 0$	等幅振荡
$ z > 1, \text{Im}[z] = 0$	指数上升
$ z > 1, \text{Im}[z] \neq 0$	增幅振荡

若单位圆上存在高阶极点同样会产生增幅。

1.5.2 系统框图

级联型就是基本的反馈单元。

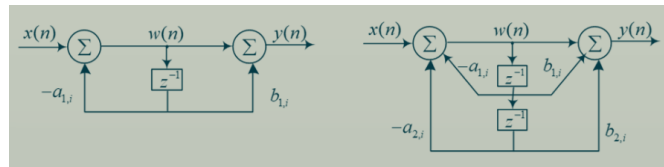


图 1.1: 并联框图元件

$$H_1(z) = \frac{1 + b_{1,j}z^{-1}}{1 - a_{1,j}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}$$

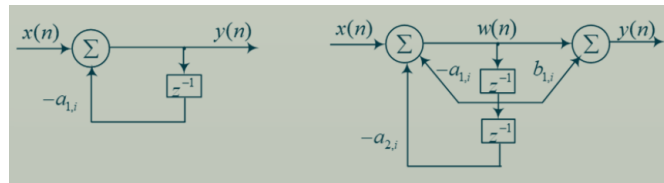


图 1.2: 级联框图元件

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + a_{1,i}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + b_{1,i}z^{-1}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}$$

1.5.3 离散时间系统的特性

因果性即

$$h(n) = h(n)u(n)$$

因果序列的收敛域为 $|z| > R$, 那么因果性的充要条件为 $|z| > R$, 极点分布在一个半径有限的圆中。

稳定性的时域充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < M$$

即

$$H(1) < M$$

系统为稳定的充要条件是：系统函数的收敛域包含单位圆。

1.6 序列傅里叶变换与系统频响

1.6.1 傅里叶变换的性质

将 z 表示为极坐标, 可发现类似拉普拉斯变换的衰减系数 r

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}] e^{-j\omega n}$$

当 $r = 1$ 时, 即单位圆的 \mathcal{Z} 变换称为系统的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

按照围线法, 其逆变换为

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} d(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} \bullet e^{-j\omega} \bullet je^{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega \end{aligned}$$

并不是任何序列都是存在傅里叶变换。序列存在傅里叶变换的充分条件是绝对可和。

同样存在奇偶虚实性、时移、时域压扩、反褶、线性等性质；存在序列线性加权、频移、卷积性质。

卷积为

$$x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$\mathcal{F}[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$\mathcal{F}[x_1(n)x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})]$$

能量守恒定律

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

1.6.2 系统频响

稳定系统的傅里叶变换满足

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

物理意义与连续时间系统的一致。

$$\begin{aligned} y(n) &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{1}{2} [e^{j[\varphi(\omega_0)+a_0n]} - e^{-j[\varphi(\omega_0)+\omega_0n]}] \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \sin[n\omega_0 + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

注意作图法时由于极坐标的周期性，幅频曲线、相频曲线均以 2π 为周期。

1.7 利用离散系统离散时间系统实现对模拟信号的滤波

处理实际信号的流程是连续信号离散化，处理之后恢复到连续。即

$$x_c(t) \xrightarrow{\text{A/D 转换}} x_d(n) \xrightarrow{\text{数字滤波器}} y_d(n) \xrightarrow{\text{D/A}} y_c(t)$$

那么具体来说

$$x_d(n) = x_c(nT)$$

$$y_d(n) = y_c(nT)$$

离散序列由冲激函数串得到

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

再考虑离散信号的傅里叶变换

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

那么

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$$

抽样关系, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

那么

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - 2\pi k)/T]$$

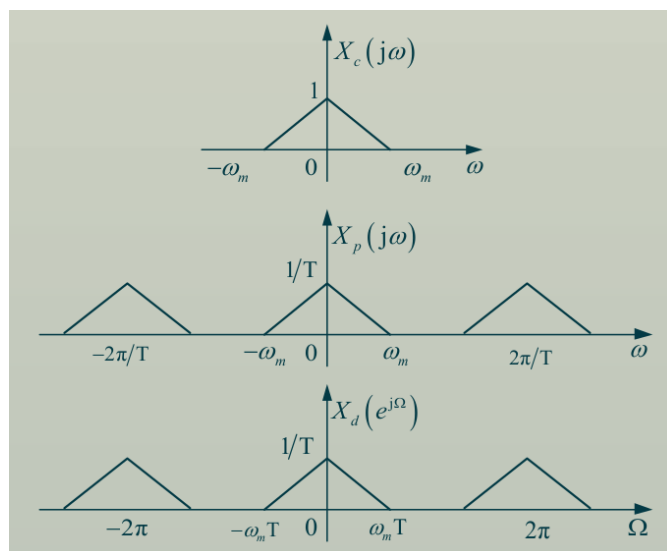


图 1.3: 频谱关系

数字滤波器满足

$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega}) H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - 2\pi k)/T] H_d(e^{j\Omega})$$

因为 $\Omega = \omega T$, 故而得到

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) H_d(e^{j\omega T})$$

取 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 得到

$$Y_d(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega - k\omega_s) H_d(e^{j\omega T})$$

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_d(e^{j\omega T})$$

即

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$