第一章 离散时间系统的时域分析

对于离散时间信号，时间域变为离散取值，幅度域仍连续取值，因此在幅度域中运算几乎保持一致，而时间运算出现较大的差别。

1.1 离散时间序列

1.1.1 离散序列的描述方式

离散序列描述通常有三种方式：解析式，序列式，图形。

解析式即通过表达式的形式描述，序列式则常常表示一个有限序列，图形法通过离散点图描述一个序列。以下是一个序列式的例子。

$$x(n) = \left\{ \underset{n=1}{\underset{\uparrow}{1}},\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \right\}$$

1.1.2 基本序列

单位样值序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

类似连续时间系统，采用样值序列可以表示成其延时的加权和：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

单位阶跃序列，和连续时间系统里的阶跃不同的是，在 0 处的定义是明确的。

$$u(n) = \begin{cases} 1 & , n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i)$$

矩形序列

$$G_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

易得

$$G_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

单边指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

正/余弦序列

$$x(n) = A\sin(\Omega t + \varphi)\Big|_{t=nT_s} = A\sin(\Omega n T_s + \varphi)$$

其中 T_s 为采样周期，Ω 为原信号的角频率，称为模拟角频率，令 $\omega = \Omega T_s$ 并且称为数字角频率，易知单位为弧度。但是此处的序列不一定是周期的，只有 $\omega N = 2\pi m$ 有解，才成为一个周期序列。

1.1.3 基本运算

序列反褶

$$x(n) \to x(-n)$$

序列移位

$$x(n) \to x(n-l)$$

序列压扩，由于自变量限制为离散的整数，因此压扩时会损失某些信号或者增加某些位置的信号（补 0 ）。

序列四则运算，均是逐点进行。

定义序列能量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

1.2 离散时间系统

和连续时间系统相同，离散时间系统通常有两种时域表示方法，一是数学模型，二是功能模型即系统框图。对于离散时间系统，由于变量是离散的，运算更多的是不同时间点出现的序列之间的运算，其数学模型为差分方程。

1.2.1 功能模型

主要元件有加法器、乘法器、数乘器、延时器等。

$$\boxed{\frac{1}{E}} \qquad \boxed{z^{-1}} \qquad \boxed{D}$$

图 1.1: 单位延时器的画法

1.2.2 系统分类

几乎和连续时间系统一致：有记忆/无记忆系统，线性/非线性系统，时变/时不变系统，因果系统/非因果系统，稳定系/不稳定系统统。

1.3 离散时间系统时域分析

1.3.1 求解过程

实际上就是常系数线性差分方程的求解过程。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- 求得方程的齐次解
- 然后根据激励信号的特点假设特定形式的特解，代入方程求得特解
- 将齐次解和特解相加得到完全解的得形式
- 通过方程的初始条件求得完全解中的待定系数

特征方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{N-k} = 0$$

根据特征根 λ_i 得到齐次解

$$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^k$$

若存在 k 重根 λ_1，对应

$$C_1 n^{k-1}\lambda_1^n + C_2 n^{k-2}\lambda_2^n + \cdots + C_{k-1} n\lambda_1^n + C_k\lambda_1^n$$

1.3.2 特解的形式

表 1.1: 差分方程特解的形式

激励	条件	特解形式
n^m	所有特征根不为 1	$P^m n^m + P_{m-1}n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0$
n^m	r 重特征根为 1	$n^r[P^m n^m + P_{m-1}n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0]$
λ^n	λ 不是特征根	$P\lambda^n$
λ^n	λ 是特征单根	$P_1 n\lambda^n + P_0\lambda^n$
λ^n	λ 是 γ 重特征根	$P_\gamma n^\gamma \lambda^n + P_{\gamma-1}n^{\gamma-1}\lambda^n + \cdots + P_1 n\lambda^n + P_0\lambda^n$
$\cos(\beta n)$ 或 $\sin(\beta n)$	当所有特征根不为 $e^{\pm j\theta}$	$P\cos(\beta n) + Q\sin(\beta n)$ 或 $A\cos(\beta n - \theta)$ $Ae^{j\theta} = P + jQ$

1.3.3 零输入响应

零输入响应形式上是齐次解，对于差分方程

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = x(n)$$

求零输入响应时，必须要排除输入的影响，方法是通过差分方程的递推关系，找出输入加入系统前的系统起始状态，也就是在已知特定点的完全响应条件中带入对应的激励值，递推求解输入前的状态。

例 1.1 已知差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

设激励序列 $x(n) = u(n)$ 且 $y(0) = 1, y(1) = 0$ ，求系统的零输入响应。

解 题中给出了包含激励效果的系统初始条件，为去除激励信号的影响，须通过迭代的方法求出无激励效果的系统起始条件。将初始条件代入系统方程，得到

$$\begin{cases} y(0) + 3y(-1) + 2y(-2) = u(0) \\ y(1) + 3y(0) + 2y(-1) = u(1) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 1 + 3y(-1) + 2y(-2) = 1 \\ 3 + 2y(-1) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} y(-1) = -1 \\ y(-2) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

由系统差分方程，得到特征方程

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

系统零输入相应为

$$y_{ij}(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

代入起始条件，得到

$$y_{zi}(n) = \left[2(-1)^n - 2(-2)^n\right] u(n)$$

1.3.4 零状态响应

例 1.2 设某离散时间系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

已知 $x(n) = 2^n, n \geq 0$; 初始条件为 $y(0) = 0, y(1) = 2$, 求系统零输入响应、零状态响应和完全响应。

解

首先求解输入响应。由差分方程得到相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ ，则齐次解为

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

其中 C_1 和 C_2 为待定系数。

将条件 $y(0) = 0, y(1) = 2$ 代人差分方程，求出 $y(-1) = 0, y(-2) = \dfrac{1}{2}$ 由于激励是 0 时刻加人的，在 0 时刻之前系统只有零输入响应，故而零输入响应的起始条件为 $y_{xi}(-1) = y(-1), y_{xi}(-2) = y(-2)$ 。因此

$$y_{zi}(-1) = 0 = C_1(-1)^{-1} + C_2(-2)^{-1}$$

$$y_{zi}(-2) = \frac{1}{2} = C_1(-1)^{-2} + C_2(-2)^{-2}$$

由上式求得 $C_1=1, C_2=-2$ ，故零输入响应为

$$y_{xi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n, \quad n\geq 0$$

其次，零状态响应。由输入激励的形式，确定特解形式为 $y_p(n)=P(2)^n$。代人系统差分方程，得到

$$P(2)^n+3P(2)^{n-1}+2P^{n-2}=2^n$$

即 $P=\dfrac{1}{3}$ ，则特解为

$$y_p(n)=\frac{1}{3}(2)^n$$

零状态响应形式为

$$y_{zs}(n)=D_1(-1)^n+D_2(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n$$

其中 D_1 和 D_2 为待定系数。请注意，求解系统零状态响应的差分方程的边界条件是初始状态，即激励，加入系统后的状态。因此将系统起始条件 $y(-1)=y(-2)=0$ 代入差分方程求得系统奥状态响应的初始条件 $y_{zs}(0)=1, y_{zs}(1)=-1$, 代入 $y_{zs}(n)$ 表达式中，得到

$$\begin{cases} D_1+D_2+\dfrac{1}{3}=1 \\ -D_1-2D_2+\dfrac{2}{3}=-1 \end{cases}$$

解方程组得 $D_1=-\dfrac{1}{3}, \quad D_2=1$, 则

$$y_{zs}(n)=-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n$$

最后，系统完全响应为

$$\begin{aligned} y(n)&=y_{2i}(n)+y_{za}(n) \\ &=\frac{2}{3}(-1)^n-(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n, \quad n\geq 0 \end{aligned}$$

1.3.5 完全响应的分解

$$
\begin{aligned}
y(n) = & \underbrace{\sum_{k=1}^{N} C_k a_k^n}_{\substack{\text{free response} \\ \text{homogeneous solution}}} + \underbrace{P(n)}_{\substack{\text{forced response} \\ \text{particular solution}}} \\
= & \underbrace{\sum_{k=1}^{N} C_{zi,k} a_k^n}_{\text{zero input solution}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} C_{zs,k} a_k^n + P(n)}_{\text{zero status solution}}
\end{aligned}
$$

1.3.6 系统单位样值响应的性质

$\delta(n)$ 激励系统产生的零状态响应被称为该系统单位样值响应，通常用 $h(n)$ 表示。$u(n)$ 激励系统产生的零状态响应被称为该系统单位阶跃响应，通常用 $g(n)$ 表示。

类似连续时间系统，样值响应有着重要的性质。

1.3.6.1 因果性

离散时间系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = h(n)u(n)$$

1.3.6.2 稳定性

离散时间系统稳定的充分必要条件是绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M$$

1.3.7 系统单位样值响应的求解

对于一个系统，可知 $h(n_i) = 0, i < 0$ 。

由于 $n > 0$ 时，激励为 0 ，那么样值响应有着齐次解的形式

$$h_1(n) = \sum_{i=1}^{N} C_i \lambda_i^n$$

$n = 0$ 时，根据方程形式有

$$h_1(0) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(-k) + \delta(0) = 1$$

1.4 离散序列卷积和

任意的序列都可用过样值序列来表示，且零状态响应都可以通过样值响应求解。

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

对于 LTI 离散系统 T，$x(n)$ 产生的零状态响应为

$$\begin{aligned}y(n)=T[x(n)]&=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\end{aligned}$$

定义卷积为

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)\otimes h(n)$$

1.4.1 解析法求卷积

解析法就是定义法，依据卷积和的定义，通过解析式进行计算。

1.4.2 图表法

在计算有限长序列的卷积和时，可以用更加简单的图形法求解。

例 1.3 $x(n)=\left\{\underset{\underset{n=1}{\uparrow}}{0.4},0.3,0.2,0.1\right\}$，$h(n)=\left\{\underset{\underset{n=1}{\uparrow}}{0.3},0.2,0.2,0.2,0.1\right\}$

解

表 1.2: 图解法

					0.4	0.3	0.2	0.1				
n=0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3							
	n=1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3						
		n=2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3					
			n=3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3				
				n=4	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3			
					n=5	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3		
						n=6	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	
							n=7	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3

1.4.3 竖乘法

例 1.4

表 1.3: 图解法

$x_1(n)$ n=0 $\rightarrow$			4	3	2	1
$x_2(n)$ n=0 $\rightarrow$				3	2	1
			4	3	2	1
		8	6	4	2	
	12	9	6	3		
$y(n)$	12	17	16	10	4	1

1.4.4 卷积的性质

$xn\, y(n)$ 的卷积包含两序列总长度减一的元素。

满足交换律、分配律，结合律。

卷积的移不变性， 若$x_1(n) \otimes x_2(n) = y(n)$ 则

$$x_1(n-m) \otimes x_2(n+k) = y(n-m+k)$$

序列与 $\delta(n)$ 的卷积

$$x(n) \otimes \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) \otimes \delta(n-m) = x(n-m)$$

序列与 $u(n)$ 的卷积

$$x(n) \otimes u(n) = \textstyle\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

$$x(n) \otimes u(n) = \left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right] u(n), \quad \text{if } x(n) = x(n)u(n)$$