第 一 章 连续时间信号与系统复频域分析

频域分析法具有鲜明的物理意义，也存在局限性：部分常用的信号不存在傅里叶变换，傅里叶分析计算较为复杂。

拉普拉斯变换是一种应用广泛的数学分析工具，其特点是分析应用较为简单，但物理意义相对模糊。

1.1 拉普拉斯变换

1.1.1 定义

对不存在傅里叶变换的函数增加一个衰减因子使之绝对可积

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

记 $s=\sigma+j\omega$ 令 $F(s)=F_1(\omega)$, 拉普拉斯变换记为

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

进行傅里叶逆变换得到

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{\sigma t} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

又 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ ，拉普拉斯逆变换记为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{jw}}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} \mathrm{d}s$$

1.1.2 单边拉普拉斯变换

对因果信号 $f(t)=f(t)u(t),$ ，仅考虑 $t>0$ 其拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}s, \quad t>0 \end{aligned}$$

为方便起见，令 $F(s)$ 表示 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换, $F_B(s)$ 表示 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换。单边拉普拉斯变换时，除非明确声明，否则积分下限均取 0_- ，即

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

1.1.3 收敛域

将使得信号拉普拉斯变换存在的 σ 的取值范围称为该信号拉普拉斯变换的收敛域，记为 ROC (Region of convergence)。为了使每个信号的拉普拉斯变换是唯一的，必须同时给出 $F(s)$ 与 ROC ，这是和傅里叶变换的明显区别。

收敛域表明了信号进行变换需要的衰减的程度。

在进行单边拉普拉斯变换时，常常忽略 ROC ，因为若是其拉普拉斯变换存在，一定是存在于右半平面，具体位置不影响逆变换的结果。但是双边拉普拉斯变换**必须**考虑 ROC ，不同位置的 $F_B(s)$ 的逆变换是不同的。

表 1.1: 拉普拉斯变换收敛域范围

时域信号	σ 范围
$t>0$	$\sigma>\alpha$
$t<0$	$\sigma<\beta$
$t\in\mathbb{R}$	$\alpha<\sigma<\beta$
$n<t<p$	$\sigma\in\mathbb{R}$

1.1.4 傅里叶变换拉普拉斯变换的直观理解

类似于傅里叶级数，傅里叶变换可以看作是不同幅度 ($|F(\omega)|$)、不同相位 $\varphi(\omega)$ 的余弦波或者是指数信号的叠加，是等幅度振荡；拉普拉斯变换则是对不同时间 t 进行指数衰减的变幅度叠加。

$$\begin{aligned}
f(t)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[F(\sigma-\mathbf{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t}+F(\sigma+\mathbf{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\right]e^{\sigma t}\mathbf{d}\omega\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{\sigma t}\mathbf{2}|F(s)|\cos(\omega t+\theta)\mathrm{d}\omega\\
=&\int_0^{\infty}\frac{|F(s)|e^{\sigma t}\mathbf{d}\omega}{\pi}\cdot\cos(\omega t+\theta)
\end{aligned}$$

1.2 拉普拉斯变换对

表格中 $Re[s] = \sigma$ 。

表 1.2: 拉普拉斯变换对

时域信号	复频域信号	收敛域
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha+s}$	$Re[s] > -\alpha$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$Re[s] > 0$
$\delta(t)$	1	全 s 平面
$\sin\omega_0 t u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	
$\cos\omega_0 t u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	

1.3 拉普拉斯变换的性质

以下性质基于

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F_B(s)$$

$$f(t)u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$$

双边拉普拉斯变换的收敛域为

$$\alpha < \mathrm{Re[s]} < \beta$$

表 1.3: 拉普拉斯变换性质

名称	单边 $\mathscr{L}$ 表达形式	双边 $\mathscr{L}$ 表达形式
时移性质	$f(t-t_0)u(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s)e^{-st_0}$	$f(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{L}}F_B(s)e^{-st_0}$ 收敛域不变
压扩性质	$f(at)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ $a>0$	$f(at)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{\lvert a\rvert}F_B\left(\frac{s}{a}\right)$ 1) $\alpha>0$,$a\alpha<\mathrm{Re}[s]<a\beta$ 2) $\alpha<0$, $a\beta<\mathrm{Re[s]}<a\alpha$
线性性质		
时域微分	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\mathscr{L}}sF(s)-f(0_-)$ $\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}\xrightarrow{\mathscr{L}}s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}\left(0_-\right)$	$\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}\xrightarrow{\mathscr{L}}s^nF(s)$ 收敛域至少为原收敛域
时域积分	$\int_{0_-}^t f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{f^{(-1)}\left(0_-\right)}{s}+\frac{F(s)}{s}$	$\int_{0_-}^t f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{F(s)}{s}$ 收敛域 $\max(\alpha,0)<\mathrm{Re}[s]<\beta$
s 域平移	$e^{s_0t}f(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s-s_0)$	$e^{s_0t}f(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F_B(s-s_0)$
s 域微分	$-tf(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$	$-tf(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{\mathrm{d}F_B(s)}{\mathrm{d}s}$ 收敛域不变
s 域积分	$\frac{f(t)}{t}\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_s^\infty F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$	$\frac{f(t)}{t}\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_s^\infty F_B(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 收敛域不变
时域卷积	$f_1(t)\otimes f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t)\otimes f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F_{B,1}(s)F_{B,2}(s)$ 收敛域延伸到并集最大值
s 域卷积	$f_1(t)f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{2\pi j}F_1(s)\otimes F_2(s)$	$f_1tf_2t\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{2\pi j}F_1(s)\otimes F_2(s)$ 收敛域为边界相加
初值定理	$f(0_+)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)$	

见下页

名称	单边 $\mathscr{L}$ 表达形式	双边 $\mathscr{L}$ 表达形式
终值定理	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	

1.4 拉普拉斯逆变换

主要讨论单边变换，介绍部分分式法、留数法，最后介绍双边拉普拉斯变换。

1.4.1 部分分式法

对于有理真分式形式的拉普拉斯变换，

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

其中 m ,n 为正整数，且 $m < n$ ，极点就是使得 $F(s)$ 为无穷大的 s 值。零点使 $F(s) = 0$ 。对其进行因式分解，即可通过变换对进行逆变换。在此仍满足因式分解时，复数极点总是共轭出现的。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)} \\ F(s) &= \frac{k_1}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)} \\ f(t) &= k_1 e^{p_1 t}u(t) + \ldots + k_n e^{p_n t}u(t) \end{aligned}$$

1.4.1.1 一阶实数极点

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{k_1}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)} \quad k_i = ? \\ F(s)(s-p_i) &= \frac{k_1}{(s-p_1)}(s-p_i) + \ldots + \frac{k_i}{(s-p_i)}(s-p_i) + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)}(s-p_i) \\ &= \frac{k_1}{(s-p_1)}(s-p_i) + \ldots + k_i + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)}(s-p_i) \\ &\vdots \\ k_i &= [(s-p_i)F(s)]_{1j=p_i} \end{aligned}$$

1.4.1.2 单阶共轭复数极点

使用实数极点法也可以对复信号进行处理，但是十分繁琐，引出基于正余弦的基本信号，可以极大简化计算。

1.4.1.3 重根极点

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{k\left(s-z_1\right)\cdots\left(s-z_m\right)}{\left(s-p_1\right)^k\left(s-p_2\right)\cdots\left(s-p_{n-k}\right)} \\
F(s) &= \frac{k_{1k}}{\left(s-p_1\right)^k}+\frac{k_{1,2}}{\left(s-p_1\right)^{k-1}}\cdots+\frac{k_{11}}{\left(s-p_1\right)}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots \\
&\quad +\frac{k_{n-k}}{s-p_{n-k}} \\
E(s) &= \frac{k_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{k_{n-k}}{s-p_{n-k}} \\
F(s)-E(s) &= \frac{k_{1,1}}{\left(s-p_1\right)^k}+\frac{k_{1,2}}{\left(s-p_1\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{k_{1,k}}{\left(s-p_1\right)}
\end{aligned}
$$

$$\left(s-p_1\right)^k\left[F(s)-E(s)\right]=k_{1,1}+k_{1,2}\left(s-p_1\right)+\ldots+k_{1,k}\left(s-p_1\right)^{k-1}$$

通过求导确定同一极点不同阶的系数。

$$k_{1,m}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left\{\left(s-p_1\right)^k\left[F(s)-E(s)\right]\right\}\Big|_{s=p_1}$$

1.4.1.4 非真分式的情况

分解 $F(s)$ 得到多项式与真分式两部分，真分式部分通过变换对 $\delta^{(n)}(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}s^n$ 处理。$F(s)$ 含有指数部分，通过频移公式转换。

1.4.2 留数法

逆变换的形式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{*\tau}ds,\quad t>0$$

转化为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds+\int_{C_r}F(s)e^{st}ds-\int_{C_r}F(s)e^{st}ds\right]$$

那么转化为环路积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(s)e^{st}\mathrm{d}s-\int_{C_r}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

若是

$$\lim_{|s=r|\to\infty}|F(s)|=0$$

那么再结合留数定理

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(s)e^{st}\mathrm{d}s=\sum_i\left\{\mathrm{Res}[F(s)e^{st}]\right\}\Big|_{s=p_i}$$

极点满足

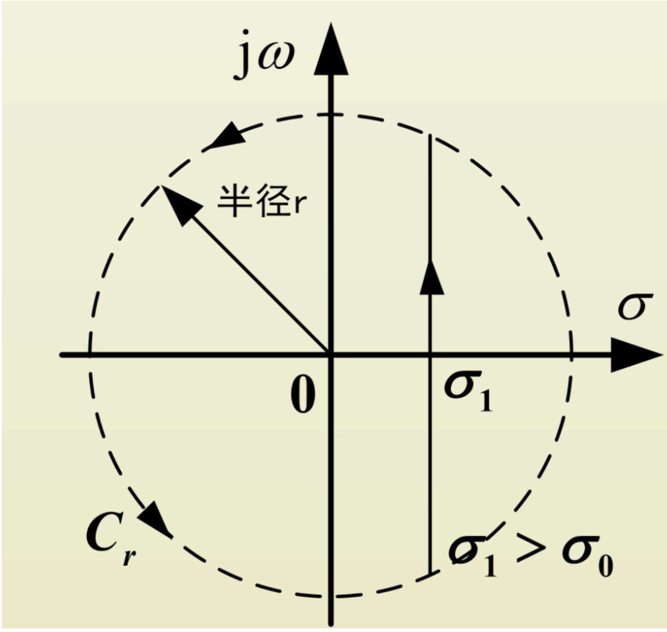

图 1.1: 逆 $\mathscr{L}$ 变换积分路径

$$\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st}\right]\Big|_{s=p_i} = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s-p_i)^r F(s)e^{st}\right]\right\}\Big|_{s=p_i}$$

1.4.3 双边拉普拉斯变换

一般来说，可将双边拉氏变换分解为两个类似单边拉氏变换来处理。在各自的收敛域中的逆变换形式的叠加即可，需要注意不同的收敛域中会出现不同的逆变换形式。

注意，对于左边拉普拉斯变换，相当于进行一次右边变换以及双边反褶。

1.5 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

1.5.1 $\mathrm{Re}[s] > 0$ 右半平面收敛

信号不满足绝对可积的条件，必须衰减才存在傅里叶变换。只有拉普拉斯变换，傅里叶变换不存在。

1.5.2 $\mathrm{Re}[s] < 0$ 左半平面收敛

信号绝对可积，

$$F(\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega}$$

1.5.3 $\mathrm{Re}[s]=0$

1.5.3.1 仅一阶虚轴极点

$$F(s)=\sum_n \frac{k_n}{s-j\omega_n}$$

可得

$$f(t)=\sum_n k_n e^{j\omega_n t}u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$$

根据傅里叶变换的卷积定理

$$\begin{aligned} e^{j\omega_n t}u(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2\pi}[2\pi\delta(\omega-\omega_n)]\otimes[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}] \\ &= \frac{1}{j(\omega-\omega_n)}+\pi\delta(\omega-\omega_n) \end{aligned}$$

那么

$$F(\omega)=F(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_n k_n\pi\delta(\omega-omega_n)$$

1.5.3.2 单个多阶虚轴极点

$$F_s=\frac{k_0}{(s-j\omega_0)^k}$$

$$\frac{k_0}{(k-1)!}t^{k-1}e^{j\omega_0 t}u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$$

同样的进行变换

$$\frac{k_0}{(k-1)!}t^{k-1}e^{j\omega_0 t}u(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(s)|_{s=j\omega}+\frac{K_0\pi j^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(\omega-\omega_0)$$

1.6 拉普拉斯变换求解连续时间系统响应

1.6.1 常微分方程

对连续时间系统的微分方程使用拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} &C_0\frac{\mathbf{d}^n r(t)}{\mathbf{d}t^n}+C_1\frac{\mathbf{d}^{n-1}r(t)}{\mathbf{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathbf{d}r(t)}{\mathbf{d}t}+C_n r(t) \\ &=E_0\frac{\mathbf{d}^m e(t)}{\mathbf{d}t^m}+E_1\frac{\mathbf{d}^{m-1}e(t)}{\mathbf{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathbf{d}e(t)}{\mathbf{d}t}+E_m e(t) \end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \frac{\mathbf{d}^{n-i} r(t)}{\mathbf{d} t^{n-i}} = \sum_{j=0}^{m} E_j \frac{\mathbf{d}^{m-j} e(t)}{\mathbf{d} t^{m-j}}$$

应用拉普拉斯变换时域微分性质

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} \xrightarrow{\mathscr{L}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}\left(0_-\right)$$

$$R(s)\sum_{i=0}^{n} C_i s^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} C_i \sum_{k=0}^{n-i-1} s^{n-i-k-1} r_r^{(i)}\left(0_-\right) = E(s)\sum_{j=0}^{m} E_j s^{m-j} - \sum_{j=0}^{m} E_j \sum_{i=0}^{m-j-1} s^{m-j-1-1} e^{(i)}\left(0_-\right)$$

可以求解出完全响应的 $R(s)$，在零状态响应中 $r^{(k)}(0_-) = 0$，零输入响应中 $E_i = 0$ 。如果 $e(t)$ 为因果信号，$e(t) = e(t)u(t)$ 那么 $e^i(0_-) = 0$ 。

1.6.2 电路元件的复频域模型

基尔霍夫定律

$$\sum I(s) = 0$$
$$\sum U(s) = 0$$

电阻

$$v_R(t) = Ri_R(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} U_R(s) = I_R(s)R$$

电感

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathscr{L}} U_L(s) = I_L(s)Ls - Li_L(0_-)$$

电容

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathscr{L}} U_C(s) = I_C(s)\frac{1}{sC} + \frac{1}{s}u_C(0_-)$$

1.7 系统函数

系统的单位冲激相应满足

$$h(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} H(s)$$

激励信号为 $e(t)$ 那么响应为

$$r(t) = e(t) \otimes h(t)$$

那么

$$R(s) = H(s)E(s)$$

系统函数为

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

1.8 系统结构框图

1.8.1 系统结构

串联系统

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

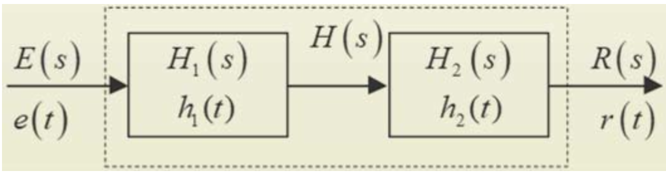

图 1.2: 串联结构

并联系统

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

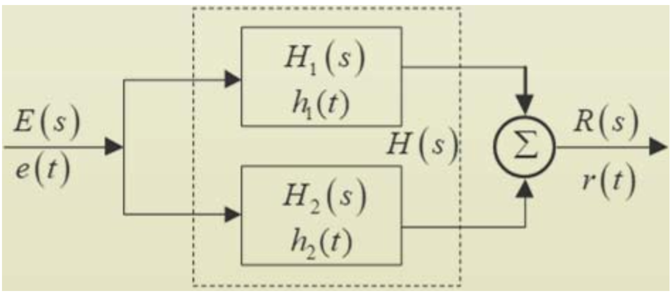

图 1.3: 并联结构

反馈系统

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

1.8.2 最简系统框图

因果信号激励时，零状态响应决定的系统函数为

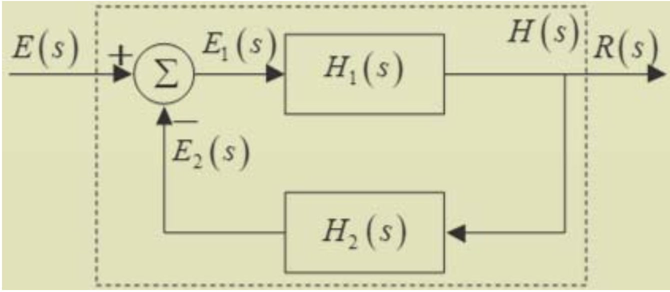

图 1.4: 反馈结构

$$H(s)=\frac{R_{zs}}{E(s)}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}E_js^{m-j}}{\sum\limits_{i=0}^{n}C_is^{n-i}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}E_js^{m-n-j}}{\sum\limits_{i=0}^{n}C_is^{-i}}$$

将分子分母分别作为一个子系统进行实现。

1.9 S 域零极点分布与时域特性

极点的分布决定了时域的特性，对于信号而言直接决定了时域信号的形式，对于系统而言决定冲激响应的形式。

1.9.1 极点分布

表 1.4: 拉普拉斯变换的极点与时域关系

$H(s)$ 极点形式	时域信号	性质
$\frac{1}{s}$	u(t)	常数
$\frac{1}{s+a}, a>0$	$e^{-at}u(t)$	指数衰减
$\frac{1}{s+a}, a<0$	$e^{-at}u(t)$	指数上升
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t u(t)$	等幅振荡
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, a>0$	$e^{-at}\sin\omega t$	衰减振荡
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, a<0$	$e^{-at}\sin\omega t$	增幅振荡
$\frac{1}{s^2}$	$tu(t)$	

见下页

$H(s)$ 极点形式	时域信号	性质
$\frac{1}{(s+a)^2}, a>0$	$te^{-\alpha t}u(t)$	上升
$\frac{1}{(s+a)^2}, a<0$	$te^{-\alpha t}u(t)$	下降
$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\sin tu(t)$	增幅振荡

1.9.2 通过零极点确定系统响应

激励与系统函数分别表示为

$$E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_1)}{\prod_{k=1}^{n}(s-P_k)}$$

$$H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}$$

那么可以分解为

$$R(s)=\sum_{k=1}^{v}\frac{A_k}{s-p_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}$$

由激励引起的响应称为强制相应，由系统引起的响应为自由响应。

1.10 系统稳定性

1.10.1 稳定性与极点位置

在时域中，系统的稳定性通过是否绝对可积判断。

系统的稳定性同样取决于极点位置，若是全部极点位于 s 平面的左半平面那么可以满足 $\lim_{t\to\infty} h(t)=0)$，称之为稳定系统。

同样的若是极点位于右半平面，或者虚轴上存在二阶以上极点，$\lim_{t\to\infty} h(t)\to\infty)$，成为不稳定系统。

若是在虚轴上存在一阶零点，由于发生等幅振荡，称为临界稳定系统。

1.10.2 稳定性与极点阶数

系统函数一般表现为

$$H(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}$$

在极限情况下

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \frac{a_m}{b_n} s^{m-n}$$

由于虚轴延伸到无穷远,可以认为无穷远在虚轴上,为了避免不稳定性需要满足 $m-n \leq 1$ 。

因此 $m \leq n$ 时，系统稳定，$m = n+1$ 时，临界稳定，其他情况不稳定。

1.10.3 稳定性的判断

系统函数的一般形式为,

$$H(s) = \tfrac{A(s)}{B(s)} = \tfrac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}$$

对于稳定系统，$B(s)$ 的系数全为正数，且只能为以下几种情况：

- 从最高到最低次幂无缺项
- 缺全部偶次项
- 缺全部奇次项

1.10.4 劳斯准则

对于 $B(s)$ 的系数列出劳斯阵列，方程式的根全部位于 s 左半平面的充分且必要条件为：全部系数 b_i 为正数，无缺项，阵列中第一列数字符号相同。

$$\begin{Bmatrix} b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ d_{n-1} & d_{n-3} & d_{n-5} & \cdots \\ e_{n-1} & e_{n-3} & e_{n-5} & \cdots \end{Bmatrix}$$

其中

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-1} = -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-3} = -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}$$

1.11 基于复频域与频域的系统特性

实际上就是使用图解法对系统进行理解，

$$H(\mathbf{j}\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}\bigg|_{s=j\omega} = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{j}\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-p_i)}$$

其中的每一项差都可以化为极坐标。

那么就得到幅频特性与相频特性

$$|H(j\omega)| = K\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}$$

$$\varphi(\omega) = (\psi_1+\psi_2+\cdots\psi_m) - (\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)$$

全通网络：幅频特性为常数，零极点逐对关于虚轴对称。

最小相移网络: 所有零点都位于左半平面的网络。

一般网络可以分解为全通网络与最小相移网络的级连。

1.12 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换

周期信号 $f(t)$ 的单周期信号 $f_1(t) = f(t)[u(t)-u(t-T)]$ ，并且 $f_1(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F_1(s)$ 那么处理成累加

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(t-iT)$$

那么

$$F(s) = F_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = F_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}$$