第一章 连续时间系统的时域分析

1.1 常系数线性微分方程

常微分方程的求解可以分为以下几个步骤。

1. 根据特征方程求解齐次解
2. 根据激励形式配凑特解，求得对应的系数
3. 将完全解代入系统初始条件，确定待定系数

表 1.1: 微分方程特解的形式

激励	特解形式
常数 E	常数 D
t^n	$A_1t^n + A_2t^{n-1} + \cdots + A_nt + A_{n+1}$
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$
$\cos(\beta n)$ 或 $\sin(\beta n)$	$P\cos(\beta n) + Q\sin(\beta n)$
$t^ne^{\alpha t}\cos(\beta n)$ 或 $t^ne^{\alpha t}\sin(\beta n)$	$(A_1t^n + A_2t^{n-1} + \cdots + A_nt + A_{n+1})e^{\alpha t}\cos(\beta n)+$ $(B_1t^n + B_2t^{n-1} + \cdots + B_nt + B_{n+1})e^{\alpha t}$

1.2 常微分方程解的分类

解的分类。

- 自由响应：齐次解
- 强迫响应：特解
- 暂态响应：时间趋于无穷时解中趋于 0 的部分
- 稳态响应：时间趋于无穷时解中不为 0 的部分
- 零输入响应：完全由系统储能引起的响应
- 零状态响应：完全由激励引起的响应

系统时间点的区分。

- 起始状态：$t = 0_-$
- 初始状态：$t = 0_+$

1.3 单位冲激响应

对于微分方程的单位冲激响应的一般求法，给定一般的系统方程：

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \frac{\mathrm{d}^{n-i} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-i}} = \sum_{j=0}^{m} E_j \frac{\mathrm{d}^{m-j} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-j}}$$

1. 将 C_0 化为 1，并且将激励的一侧使用冲激函数 $\delta(t)$ 完全代替
2. 为了满足冲激函数的匹配性，那么只有右侧最高阶导数 $\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}$ 中含有 $\delta(t)$
3. 那么有 $\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} |_{t=0^+} = 1$ 以及 $\frac{\mathrm{d}^{i} r(t)}{\mathrm{d}t^{i}} |_{t=0^+} = 0, i < (n-1)$
4. 之后根据线性性以及时不变性得到单位冲激响应

1.4 卷积计算及性质

定义 1.1 (卷积) 对于函数 $x(t), y(t)$ 定义其卷积为

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

通常可以表示为

$$s(t) = x(t) \otimes y(t)$$

或者

$$s(t = x(t) * y(t))$$

卷积的性质。

- 分配率
- 交换律
- 结合律
- 微分积分性质

$$s^{(n-m)}(t) = f_1^{(n)}(t) \otimes f_2^{(-m)}(t) = f_1(t) \otimes f_2'(t)$$

- 冲激函数性质

$$f(t-t_1) \otimes \delta(t-t_0) = f(t-t_0-t_1)$$

$$f(t) \otimes \delta'(t) = f'(t)$$

$$f(t) \otimes \delta^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) \mathrm{d}\tau$$

1.5 时域系统的特性

LTI 系统的系统性质围绕着单位冲激响应展开。

因果性的**充要条件**：

$$h(t) = h(t)u(t)$$

稳定性的**充要条件** (绝对可积)：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| \mathrm{d}\tau \leq N$$