

Présentation de l'article : Massive MIMO Forward Link Analysis for Cellular Networks

Panongbene jean Mohamed Sawadogo

Ecole Polytechnique - 3rd year of Ecole Polytechnique

10 January 2021

Plan de Présentation

- ➊ Introduction.
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spectral Efficiency
- ➐ Impact of Noise
- ➑ Pilot Contamination
- ➒ Géométrie stochastique et réseaux Massive MIMO

① Introduction

Travail effectué :

Cette présentation est un résumé explicative du travail qui a été effectué dans l'article scientifique [Massive MIMO Forward Link Analysis for Cellular Networks](#) par le membre de l'IEEE [Geordie Georg](#) et les "Fellows" de l'IEEE [Angel Lozano](#) et [Martin Haenggi](#).

Sujet étudié :

Cet article présente des expressions analytiques du SIR(signal-to-interference-ratio) et de l'efficacité spectrale du signal dans les réseaux macro-cellulaires avec formation de faisceau massive MIMO(massive MIMO conjugate beam-forming) dans une configuration à la fois uniforme et dépendant du canal de la puissance. Pour se faire, ils utilisent la puissance de la géométrie stochastique qui d'ailleurs a fait ces preuves dans des contextes non MIMO

Travail effectué :

Cette présentation est un résumé explicative du travail qui a été effectué dans l'article scientifique [Massive MIMO Forward Link Analysis for Cellular Networks](#) par le membre de l'IEEE [Geordie Georg](#) et les "Fellows" de l'IEEE [Angel Lozano](#) et [Martin Haenggi](#).

Sujet étudié :

Cet article présente des expressions analytiques du SIR(signal-to-interference-ratio) et de l'efficacité spectrale du signal dans les réseaux macro-cellulaires avec formation de faisceau massive MIMO(massive MIMO conjugate beam-forming) dans une configuration à la fois uniforme et dépendant du canal de la puissance. Pour se faire, ils utilisent la puissance de la géométrie stochastique qui d'ailleurs a fait ces preuves dans des contextes non MIMO

Plan de Présentation

- ① Introduction
- ② Network Modeling

Modélisation à grande échelle :

Remarque : chaque utilisateur est servi par la station de base(BS) à partir de laquelle il a le plus fort gain de canal à grande échelle.

Le gain de canal à grande échelle entre l'utilisateur k servi par la station de base p et la BS l est donné par :

$$G_{l,(p,k)} = \frac{L_{ref}}{r_{l,(p,k)}^\eta} \chi_{l,(p,k)}$$

Où L_{ref} est la perte de trajet à une unité de distance. Et $r_{l,(p,k)}^\eta$ est la distance entre l'utilisateur et la BS. $\chi_{l,(p,k)}$ est le coefficient d'ombrage vérifiant :

$$\mathbb{E} \left[\chi_{l,(p,k)}^\delta \right] < \infty \text{ with } \delta = \frac{2}{\eta}$$

Nombre d'utilisateur par BS :

Pour chaque BS l , on note K_l le nombre d'utilisateurs servi par cette station de base. Alors, il est démontré dans l'article que les $\{K_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ suit une loi de poisson de paramètre $\tilde{K} = \mathbb{E}[K_l]$ borné par N_a le nombre maximal d'utilisateur qu'une BS peut servir en même temps.

Ainsi, la probabilité que la station de base l serve k utilisateurs est donnée par :

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{\tilde{K}^k e^{-\tilde{K}}}{k!}$$

Plan de Présentation

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming

Conjugate Beamforming

Le signal transmit :

Le signal transmit par la BS l est donnée par :

$$x_l = \sum_{k=0}^{K_l-1} \sqrt{\frac{P_{l,k}}{N_a}} f_{l,k} s_{l,k}$$

Où $P_{l,k}$ est la puissance allouée au symbole $s_{l,k} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ qui est précodé par $f_{l,k}$ qui est destiné au k ième utilisateur. Nous avons : $\sum_{k=0}^{K_l-1} P_{l,k} = P =$

$$\mathbb{E} [\|x_l\|^2]$$

Avec le beamforming et la contrainte de puissance moyenne, on peut écrire :

$$f_{l,k} = \sqrt{N_a} \frac{\hat{h}_{l,(l,k)}}{\mathbb{E} [\|\hat{h}_{l,(l,k)}\|^2]}$$

avec $\hat{h}_{l,(l,k)}$ le canal estimé.

Conjugate Beamforming

Signal-to-Interference Ratio(SIR) :

En notant k un utilisateur deservi par une BS, alors le SIR associé à l'utilisateur k est donné :

$$SIR_k = N_a \frac{P_k/P}{1 + 1/\rho_k}$$

Où P_k est la puissance alloué à la tramission des symboles à l'utilisateur k et P est la puissance totale de la BS. The local-average SIR $\rho_k = \frac{G_{(k)}}{\sum_{l \neq 0} G_{l,(k)}}$

- Pour une allocation de puissance uniforme entre les utilisateurs $P_k = \frac{P}{K}$, on a :

$$SIR_k^{unif} = \frac{N_a/K}{1 + 1/\rho_k}$$

- On peut choisir d'allouer la même SIR moyenne local à tout les utilisateurs

$$\rho_k = \frac{1}{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{1/\rho_k}}$$

Signal-to-Interference Ratio(SIR) :

Dans ce cas on a :

$$SIR_k^{eq} = \frac{N_a/K}{1 + 1/\rho_K}$$

Ces formules nous donnent le SIR pour les gains de liaisons à grande échelle données.

Plan de Présentation

- ① Introduction
- ② Network Modeling
- ③ Conjugate Beamforming
- ④ Spatial Distribution of ρ_k

Spatial Distribution of ρ_k

Dans cette partie, nous définirons le SIR en éliminant les hypothèses faites sur les gains. Ainsi, les valeurs de $\rho_k = \frac{G_{(k)}}{\sum_{l \neq 0} G_{l,(k)}}$ deviennent inconnues. Mais en supposant que les ρ_k sont IID, alors la fonction de répartition de ces variables aléatoire est donnée par le lemme ci-dessous.

Lemma 2.

$$F_\rho(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Im \left\{ \frac{e^{i(\theta+1)\omega}}{{}_1F_1(1, 1-\delta, i\theta\omega)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} \quad (37)$$

where $\Im\{\cdot\}$ denotes imaginary part and ${}_1F_1$ is the confluent hypergeometric or Kummer function.

Remarque :

Dans les expressions analytiques des SIRs, on constate que la connaissance des valeurs de ρ_k détermine entièrement les SIRs.

$$SIR_k = N_a \frac{P_k/P}{1 + 1/\rho_k}$$

Spatial Distribution of ρ_k

Dans cette partie, nous définirons le SIR en éliminant les hypothèses faites sur les gains. Ainsi, les valeurs de $\rho_k = \frac{G_{(k)}}{\sum_{l \neq 0} G_{l,(k)}}$ deviennent inconnues. Mais en supposant que les ρ_k sont IID, alors la fonction de répartition de ces variables aléatoire est donnée par le lemme ci-dessous.

Lemma 2.

$$F_\rho(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Im \left\{ \frac{e^{i(\theta+1)\omega}}{{}_1F_1(1, 1-\delta, i\theta\omega)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} \quad (37)$$

where $\Im\{\cdot\}$ denotes imaginary part and ${}_1F_1$ is the confluent hypergeometric or Kummer function.

Remarque :

Dans les expressions analytiques des SIRs, on constate que la connaissance des valeurs de ρ_k détermine entièrement les SIRs.

$$SIR_k = N_a \frac{P_k/P}{1 + 1/\rho_k}$$

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K

Spatial SIR Distributions with fixed K

Dans cette partie on suppose que le nombre d'utilisateurs desservi est fixe.

Allocation uniforme de puissance :

Proposition 1. *The CDF of $\text{SIR}_k^{\text{Unif}}$ with a fixed K satisfies*

$$\begin{cases} F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) \simeq e^{s^* \left(\frac{N_a}{\theta K} - 1 \right)} & 0 \leq \theta < \frac{N_a/K}{3+\epsilon} \\ F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) = 1 - \left(\frac{N_a}{\theta K} - 1 \right)^\delta \text{sinc } \delta + B_\delta \left(\frac{\theta K}{N_a - 2\theta K} \right) & \frac{N_a/K}{3} \leq \theta < \frac{N_a/K}{2} \\ F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) = 1 - \left(\frac{N_a}{\theta K} - 1 \right)^\delta \text{sinc } \delta & \frac{N_a/K}{2} \leq \theta < \frac{N_a}{K} \end{cases} \quad (40)$$

with constant value within $\left[\frac{N_a/K}{3+\epsilon}, \frac{N_a/K}{3} \right]$. Alternatively, the CDF can be computed exactly as

$$F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Im \left\{ \frac{e^{\frac{i\omega}{1-\theta K/N_a}}}{{}_1F_1 \left(1, 1 - \delta, \frac{i\theta\omega}{N_a/K - \theta} \right)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} \quad 0 < \theta < N_a/K. \quad (41)$$

With either of these expressions, one can readily compute the percentage of users achieving a certain local-average performance for given N_a/K and η . Furthermore, one can establish minima for N_a/K given η and given some target performance at a desired user percentile.

Allocation uniforme de SIR moyenne local:

Proposition 2. *The CDF of SIR^{Eq} with a fixed K is*

$$F_{\text{SIR}^{\text{Eq}}}(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Im \left\{ \frac{e^{i\omega}}{\left\{ {}_1F_1(1, 1 - \delta, i\theta\omega/N_a) \right\}^K} \right\} \frac{d\omega}{\omega} \quad 0 < \theta < N_a/K. \quad (44)$$

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K

Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K

Dans cette partie, on suppose que le nombre d'utilisateurs desservi K suit un processus de poisson. Alors on obtient les résultats suivants :

Allocation uniforme de puissance :

Proposition 3. The CDF of $\text{SIR}_k^{\text{Unif}}$ with a Poisson-distributed K satisfies

$$\begin{aligned} F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) \approx & \frac{1}{e^{\bar{K}} - 1} \sum_{k=1}^{\lceil \frac{N_a/\theta}{3+\epsilon} \rceil - 1} e^{s^*(\frac{N_a}{\theta k} - 1)} \frac{\bar{K}^k}{k!} + \frac{1}{e^{\bar{K}} - 1} \sum_{k=\lceil \frac{N_a/\theta}{3+\epsilon} \rceil}^{\lceil \frac{N_a}{3\theta} \rceil - 1} e^{s^*(\epsilon+2)} \frac{\bar{K}^k}{k!} \\ & + \frac{1}{e^{\bar{K}} - 1} \sum_{k=\lceil \frac{N_a}{3\theta} \rceil}^{\lceil \frac{N_a}{2\theta} \rceil - 1} \left[1 - \left(\frac{N_a}{\theta k} - 1 \right)^\delta \text{sinc } \delta + B_\delta \left(\frac{\theta k}{N_a - 2\theta k} \right) \right] \frac{\bar{K}^k}{k!} \\ & + \frac{1}{e^{\bar{K}} - 1} \sum_{k=\lceil \frac{N_a}{2\theta} \rceil}^{\lceil N_a/\theta \rceil - 1} \left[1 - \left(\frac{N_a}{\theta k} - 1 \right)^\delta \text{sinc } \delta \right] \frac{\bar{K}^k}{k!} + \frac{1 - \Gamma \left(\lceil \frac{N_a}{\theta} \rceil, \bar{K} \right)}{(1 - e^{-\bar{K}}) (\lceil \frac{N_a}{\theta} \rceil - 1)!} \end{aligned} \quad (50)$$

where $B_\delta(\cdot)$ is as per (35). Exactly,

$$\begin{aligned} F_{\text{SIR}_k^{\text{Unif}}}(\theta) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi (e^{\bar{K}} - 1)} \sum_{k=1}^{\lceil N_a/\theta \rceil - 1} \frac{\bar{K}^k}{k!} \int_0^\infty \Im \left\{ \frac{e^{\frac{i\omega}{1-\theta k/N_a}}}{{}_1F_1 \left(1, 1 - \delta, \frac{i\theta\omega}{N_a/k - \theta} \right)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} \\ & + \frac{1 - \Gamma \left(\lceil \frac{N_a}{\theta} \rceil, \bar{K} \right)}{2 (1 - e^{-\bar{K}}) (\lceil \frac{N_a}{\theta} \rceil - 1)!}. \end{aligned} \quad (51)$$

Allocation uniforme de SIR moyenne local:

Proposition 4. *Since the user's SIR is a valid quantity only for $K \geq 1$, i.e., when the BS has at least one user, $F_{\text{SIR}^{\text{Eq}}}(\cdot)$ with Poisson-distributed K equals*

$$F_{\text{SIR}^{\text{Eq}}}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\text{SIR}^{\text{Eq}}|K=k}(\theta) \frac{f_K(k)}{1 - F_K(0)} \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi(e^{\bar{K}} - 1)} \int_0^{\infty} \Im \left\{ e^{i\omega} \left[e^{\frac{K}{1F_1(1, 1-\delta, \frac{i\theta\omega}{N_a})}} - 1 \right] \right\} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (53)$$

where we recalled the expression for $F_{\text{SIR}^{\text{Eq}}|K=k}(\cdot)$ from (44) and invoked (3)-(4).

Again, because of the convergence $N_a/K \rightarrow N_a/\bar{K}$ for $N_a, \bar{K} \rightarrow \infty$, SIR^{Eq} hardens to its fixed- K value with $K = \bar{K}$. In this case, this corresponds to $N_a(1 - \delta)/\bar{K}$ as demonstrated in

Plan de Présentation

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K
- ➐ Spectral Efficiency

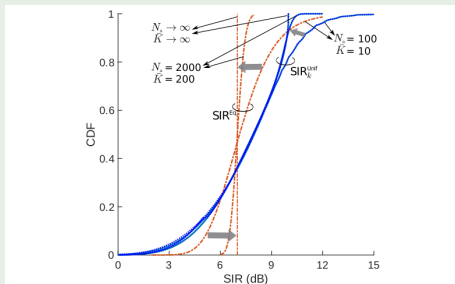
Efficacité spectrale d'un utilisateur:

L'efficacité spectrale d'un utilisateur k est donnée par :

$$C_k = \log_2(1 + SIR_k)$$

Et sa fonction de répartition vérifie :

$$F_{C_k}(x) = F_{SIR_k}(2^x - 1)$$



Efficacité spectrale d'une station de base:

L'efficacité spectrale d'une BS W est égale à la somme des efficacités spectrales des K utilisateurs servis par cette BS:

$$C_W = \sum_{k=0}^{K-1} C_k$$

On définit ainsi les efficacités spectrales moyennes des BS et des utilisateurs comme l'espérance des efficacités spectrales :

$$\tilde{C} = \mathbb{E}(C_k)$$

$$\tilde{C}_W = \mathbb{E}(C_W)$$

Distribution uniforme de puissance:

Pour une distribution uniforme de puissance et en fixant K , on obtient la proposition ci-dessous :

Proposition 5. *With a uniform power allocation and a fixed K , the spatially averaged user spectral efficiency equals*

$$\bar{C}^{\text{Unif}} = \log_2(e) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zN_a/K}}{{}_1F_1(1, 1 - \delta, z)} \frac{dz}{z} \quad (58)$$

and the spatially averaged sum spectral efficiency is $\bar{C}_\Sigma^{\text{Unif}} = K\bar{C}^{\text{Unif}}$.

Distribution uniforme de SIR:

Pour une distribution uniforme de SIR entre les utilisateurs et en fixant K , on obtient la proposition ci-dessous :

Proposition 6. *With an equal-SIR power allocation and a fixed K , the spatially averaged user spectral efficiency equals*

$$\bar{C}^{\text{Eq}} = \log_2(e) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-z}}{{}_1F_1(1, 1 - \delta, z/N_a)^K} \frac{dz}{z}, \quad (64)$$

and the spatially averaged sum spectral efficiency is $\bar{C}_\Sigma^{\text{Eq}} = K \bar{C}^{\text{Eq}}$.

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K
- ➐ Spectral Efficiency
- ➑ Impact of Noise

Signal-Interference-Plus-Noise

Les équations écrites précédemment étaient faites en négligeant le bruit ce qui ne reflète pas les conditions de fonctionnement normal. Cependant, on peut constater que le bruit ne va pas modifier de manière significative les équations du SIR avec bruit (SIRN).

The signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR) at the k th user can be formulated as [13, Sec. 10.5.1]

$$\text{SINR}_k = \frac{N_a \frac{P_k}{P} G_{(k)}^2}{(G_{(k)} + \varrho_{\text{SNR}} \sigma^2 / P) (\sum_{\ell} G_{\ell, (k)} + \sigma^2 / P)}, \quad (69)$$

where ϱ_{SNR} is the ratio between the forward- and reverse-link signal-to-noise ratios and the reverse-link pilots are assumed not to be power-controlled. With a uniform power allocation, the SINR specializes to

$$\text{SINR}_k^{\text{Unif}} = \frac{N_a / K}{\left(1 + \varrho_{\text{SNR}} \frac{\sigma^2}{P G_{(k)}}\right) \left(1 + 1/\rho_k + \frac{\sigma^2}{P G_{(k)}}\right)}, \quad (70)$$

where, recall, $\rho_k = G_{(k)} / \sum_{\ell \neq 0} G_{\ell, (k)}$. In turn, with an equal-SINR power allocation,

$$\text{SINR}^{\text{Eq}} = \frac{N_a}{\sum_{k=0}^{K-1} \left(1 + \varrho_{\text{SNR}} \frac{\sigma^2}{P G_{(k)}}\right) \left(1 + 1/\rho_k + \frac{\sigma^2}{P G_{(k)}}\right)}. \quad (71)$$

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K
- ➐ Spectral Efficiency
- ➑ Impact of Noise
- ➒ Pilot Contamination

Signal-Interference-Plus-Noise

En notant \mathcal{P} l'ensemble des indices des BS réutilisant les pilotes du k ième utilisateur d'intérêt, lorsque l'estimation de canal LMMSE (erreur quadratique minimale linéaire) incorpore la contamination résultante.

$$\text{SIR}_k = \frac{\frac{N_a}{G_{(k)} + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} G_{(\ell,k)}} \frac{P_k}{P} G_{(k)}^2}{\sum_{\ell} G_{\ell,(k)} + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \frac{N_a}{G_{\ell,(k)} + \sum_{l \in \mathcal{P}} G_{\ell,(l,k)}} \frac{P_{\ell,k}}{P} G_{\ell,(k)}^2}, \quad (72)$$

where the reverse-link pilots are again assumed not to be power-controlled. With a uniform power allocation, and with a fixed K in all the contaminating cells, the above expression specializes to

$$\text{SIR}_k^{\text{Unif}} = \frac{\frac{N_a/K}{1 + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} G_{(\ell,k)}/G_{(k)}}}{1 + 1/\rho_k + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \frac{G_{\ell,(k)}}{G_{(k)}} \frac{N_a/K}{1 + \sum_{l \in \mathcal{P}} G_{\ell,(l,k)}/G_{\ell,(k)}}}, \quad (73)$$

while, with an equal-SIR power allocation,

$$\text{SIR}^{\text{Eq}} = \frac{N_a}{\sum_{k=0}^{K-1} \left(1 + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} G_{(\ell,k)}/G_{(k)}\right) \left(1 + 1/\rho_k + \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \frac{G_{\ell,(k)}}{G_{(k)}} \frac{N_a/K}{1 + \sum_{l \in \mathcal{P}} G_{\ell,(l,k)}/G_{\ell,(k)}}\right)}. \quad (74)$$

Plan de Présentation

- ➊ Introduction
- ➋ Network Modeling
- ➌ Conjugate Beamforming
- ➍ Spatial Distribution of ρ_k
- ➎ Spatial SIR Distributions with fixed K
- ➏ Spatial SIR Distributions with Poisson-Distributed K
- ➐ Spectral Efficiency
- ➑ Impact of Noise
- ➒ Pilot Contamination
- ➓ Géométrie stochastique et réseaux Massive MIMO

Autres articles scientifiques

Il y a d'autres articles scientifiques qui utilisent la puissance de la géométrie stochastique pour la modélisation des réseaux massive MIMO.

- On peut notamment citer l'article [A Statistical Estimation of 5G Massive MIMO Networks' Exposure Using Stochastic Geometry in mmWave Bands](#) écrit par Maarouf Al Hajj, Shanshan Wang¹, Lam Thanh Tu, Soumaya Azzi et Joe Wiart à télécom Paris publié le mois de décembre dernier.
- On peut aussi cité l'article [A Novel Kronecker-Based Stochastic Model for Massive MIMO Channels](#) de Shangbin Wu, Cheng-Xiang Wang, el-Hadi M. Aggoune et Mohammed M. Alwakeel qui utilise une approche de la modélisation stochastique basée sur les modèles stochastiques de Kronecker.