Αναφορά ΣΑΕ ΙΙΙ

Παναγιώτης Κούτρης (pkoutris@ece.auth)

10671

Contents

1 Τμήμα Α

1.1 Ερώτημα 1^o

1.1.1 i)

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι:

$$T(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει ως εξής:

$$1 + \frac{K}{s(Ts+1)} = 0.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$Ts^2 + s + K = 0.$$

Για τη μορφή:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad \text{και} \quad e(t) = \frac{r(t)}{1+H(s)} = \frac{r(t)}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}}.$$

Ορίζουμε:

$$x_1(t) = e(t), \quad x_2(t) = \dot{e}(t) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{e}(t).$$

Οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται ως εξής:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \quad \text{όπου} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix},$$

και:

$$u(t) = r(t).$$

Οι πίνακες A, B, C, D είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 1.$$

Συνολικά:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} r(t),$$

και:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + r(t).$$

1.1.2 ii)

(α) Για βηματική είσοδο $r(t) = A$:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow Ax + Br = 0,$$

όπου:

$$Br = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T}A \end{bmatrix}.$$

Από την εξίσωση $Ax = Br$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T}A \end{bmatrix}. \Rightarrow$$

$$\text{1η εξίσωση:} \quad \overset{*}{x}_2 = 0$$

$$\text{2η εξίσωση:} \quad -\frac{K}{T}\overset{*}{x}_1 = -\frac{K}{T}A \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{x}_1 = A.$$

Άρα, τα σημεία ισορροπίας είναι:

$$x^* = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση:

- Υπάρχει σταθερό μόνιμο σφάλμα $e(t)$.

(β) Για βηματική είσοδο $r(t) = Bt$, ομοίως προκύπτει:

$$\textbf{1η εξίσωση:} \quad 0 \cdot x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{x}_2 = 0.$$

$$\textbf{2η εξίσωση:} \quad -\frac{K}{T}x_1 - \frac{1}{T}x_2 = -\frac{K}{T}Bt. \Rightarrow$$

$$-\frac{K}{T}x_1 = -\frac{K}{T}Bt \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{x}_1(t) = Bt.$$

Άρα, τα σημεία ισορροπίας είναι:

$$x^* = \begin{bmatrix} Bt \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

- Υπάρχει σφάλμα, αλλά αυτό μεταβάλλεται με τον χρόνο.
- Όσο αυξάνεται το K, το σύστημα αποκρίνεται ταχύτερα.
- Όσο αυξάνεται το T, η σύγκλιση γίνεται αργότερη.

1.1.3 iii)

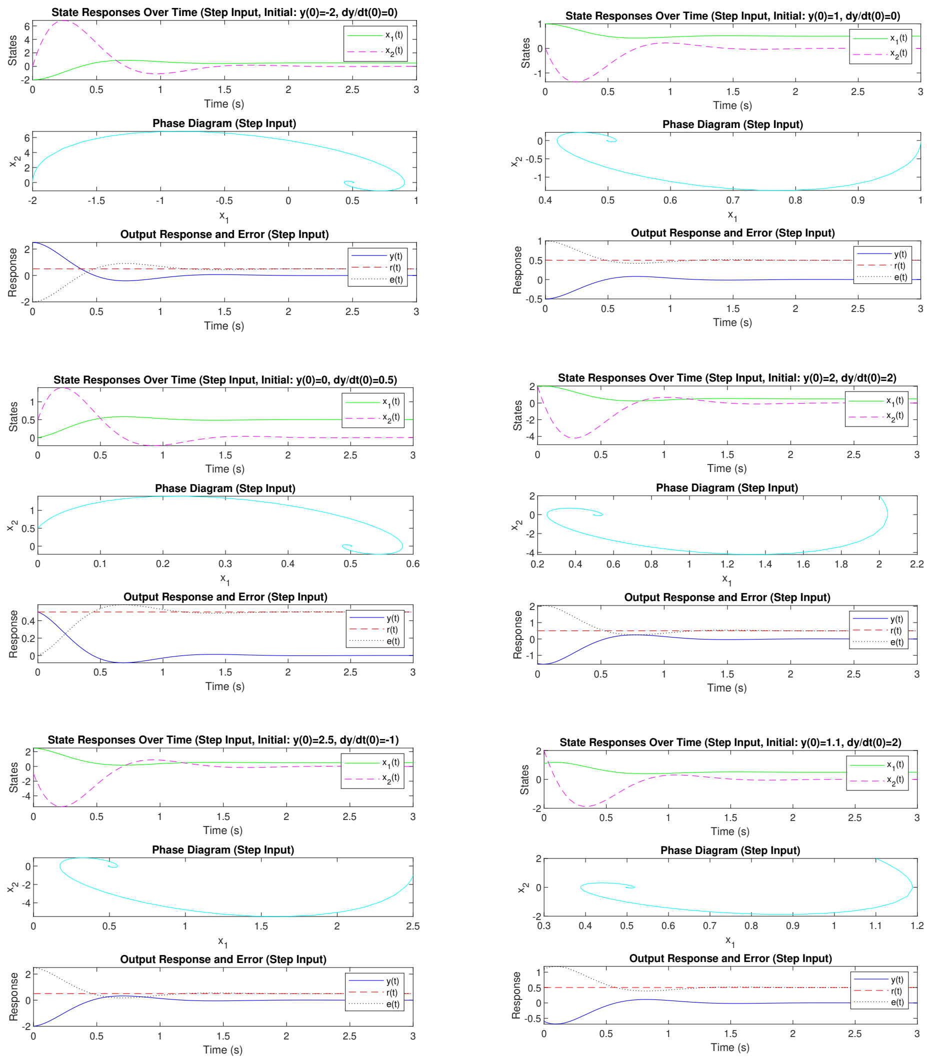


Figure 1: Diagrams for u Simulations

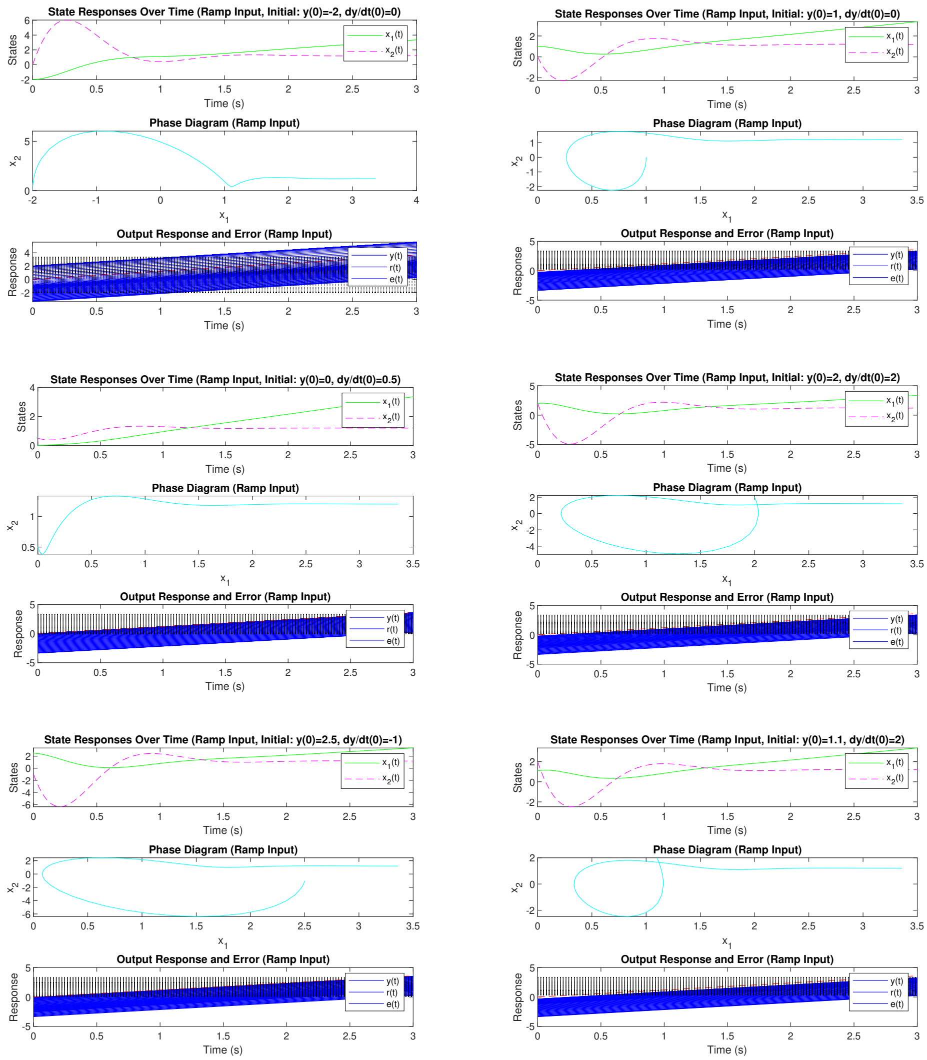


Figure 2: Diagrams for r Simulations

1.2 Ερώτημα 2^o

1.2.1 i)

$$G(s) = H(s) \cdot N(s) = \frac{N(s)K}{s(Ts+1)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος δίνεται από:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\quad 1 + G(s) = 1 + \dfrac{N(s)K}{s(Ts+1)} = 0.$

Για $|e(t)| \leq e_0$, όπου $N(s) = a$, η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται:

$$1 + \frac{aK}{s(Ts+1)} = 0$$

η οποία αναλύεται ως:

$$s^2T + s + aK = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{aK}{T} = 0.$$

Από εδώ προκύπτουν:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{aK}{T}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n T} = \frac{1}{2\sqrt{aKT}}.$$

Για $|e(t)| > e_0$, όπου $N(s) = 1$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$1 + \frac{K}{s(Ts+1)} = 0.$$

Αυτή γράφεται ως:

$$s^2T + s + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} = 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n T} = \frac{1}{2\sqrt{KT}}.$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κατάστασης, λαμβάνουμε υπόψη ότι:

$$e(s) = r(s) - y(s), \Rightarrow$$

$$e(s) = r(s) - H_\kappa(s)e(s) \quad \Rightarrow \quad e(s)(1 + H_\kappa(s)) = r(s),$$

προκύπτει:

$$e(s) = \frac{r(s)}{1 + N(s)H(s)}.$$

Υποκαθιστώντας το $H(s)$, έχουμε:

$$e(s)\left(1 + \frac{N(s)K}{s(Ts+1)}\right) = r(s) \Rightarrow$$

$$Ts^2 e(s) + \big(1 + KN(s)\big)e(s) = Ts^2 r(s) + sr(s) \Rightarrow$$

Τελικά, βρίσκουμε:

$$T\ddot{e}(t) + (1 + KN)e(t) = T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t).$$

Για:

$$x_1 = e(t), \quad x_2 = \dot{e}(t),$$

έχουμε:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{T}\big(- x_1(1 + KN) + T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t)\big).$$

1.2.2 ii)

(α) Για u(t) = A:

$$T\dot{x}_2 + x_1(1 + KN) = T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t) \Rightarrow$$

$$x^* = (0, 0) \quad \text{για } N = 1, N = \alpha.$$

(β) Για r(t) = Bt:

$$T\dot{x}_2 + x_1(1 + KN) = B \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{B - x_1(1 + KN)}{T} = 0.$$

1. Όταν $N = 1$:

$$B - x_1(1 + K) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{B}{1 + K},$$

$$x^* = \left(\frac{B}{1 + K}, 0\right).$$

2. Όταν $N = \alpha$:

$$x_1 = \frac{B}{1 + K\alpha}, \quad x^* = \left(\frac{B}{1 + K\alpha}, 0\right).$$

1.2.3 iii)

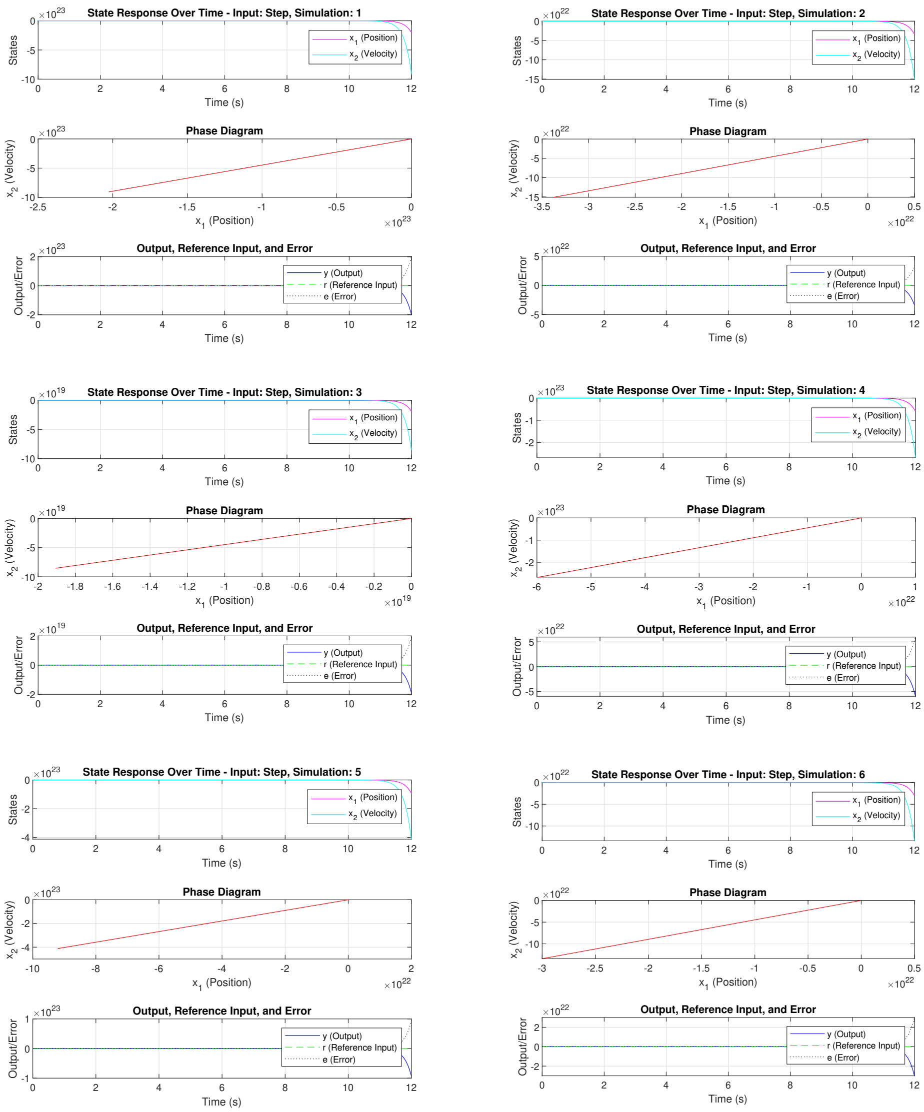


Figure 3: Diagrams for Step Input Simulations

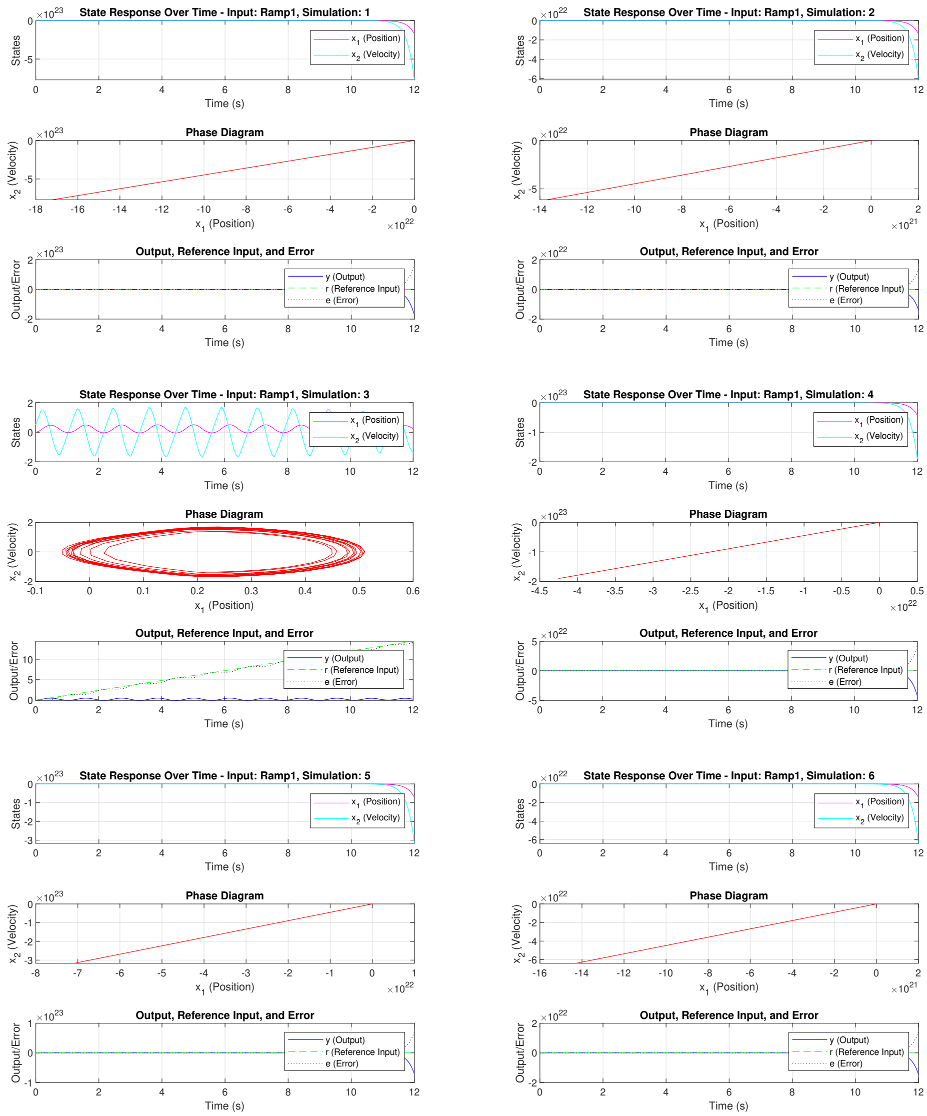


Figure 4: Diagrams for Ramp Input r_1 Simulations

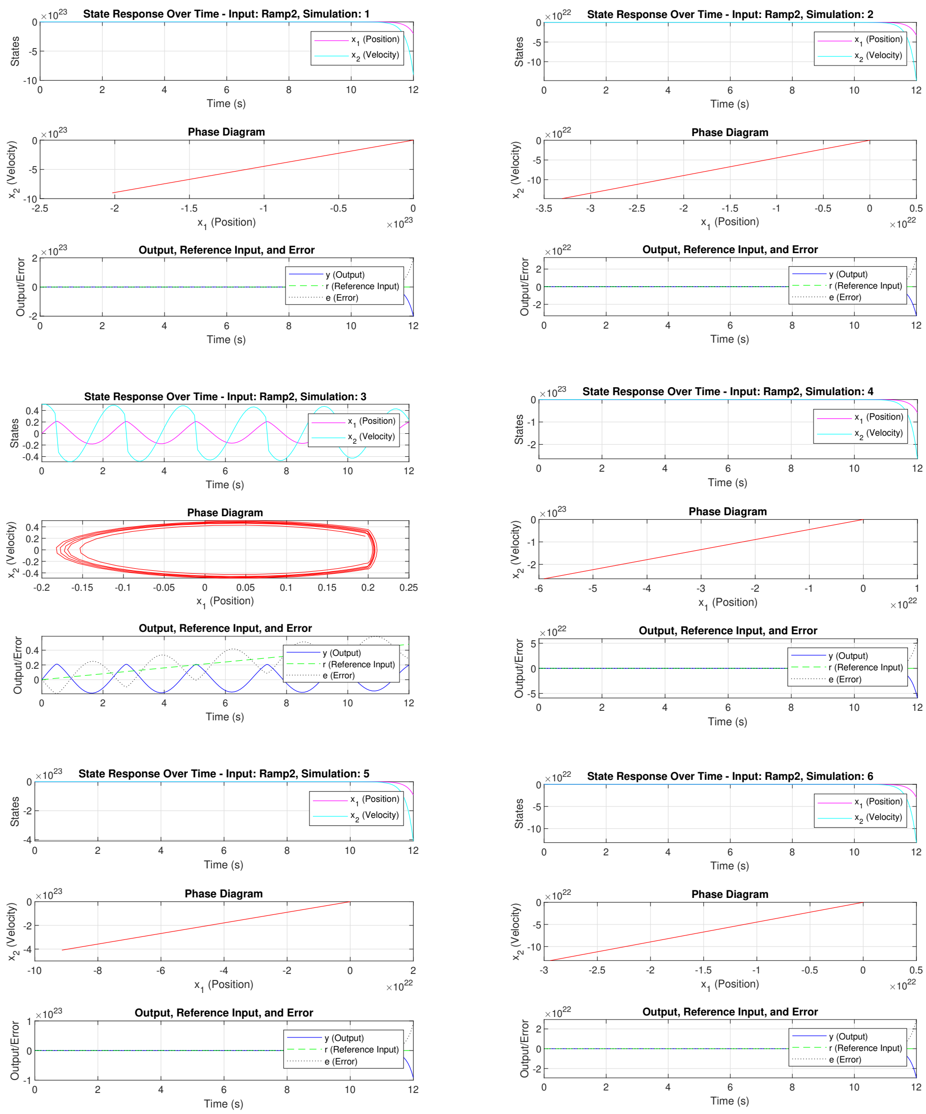


Figure 5: Diagrams for Ramp Input r_2 Simulations

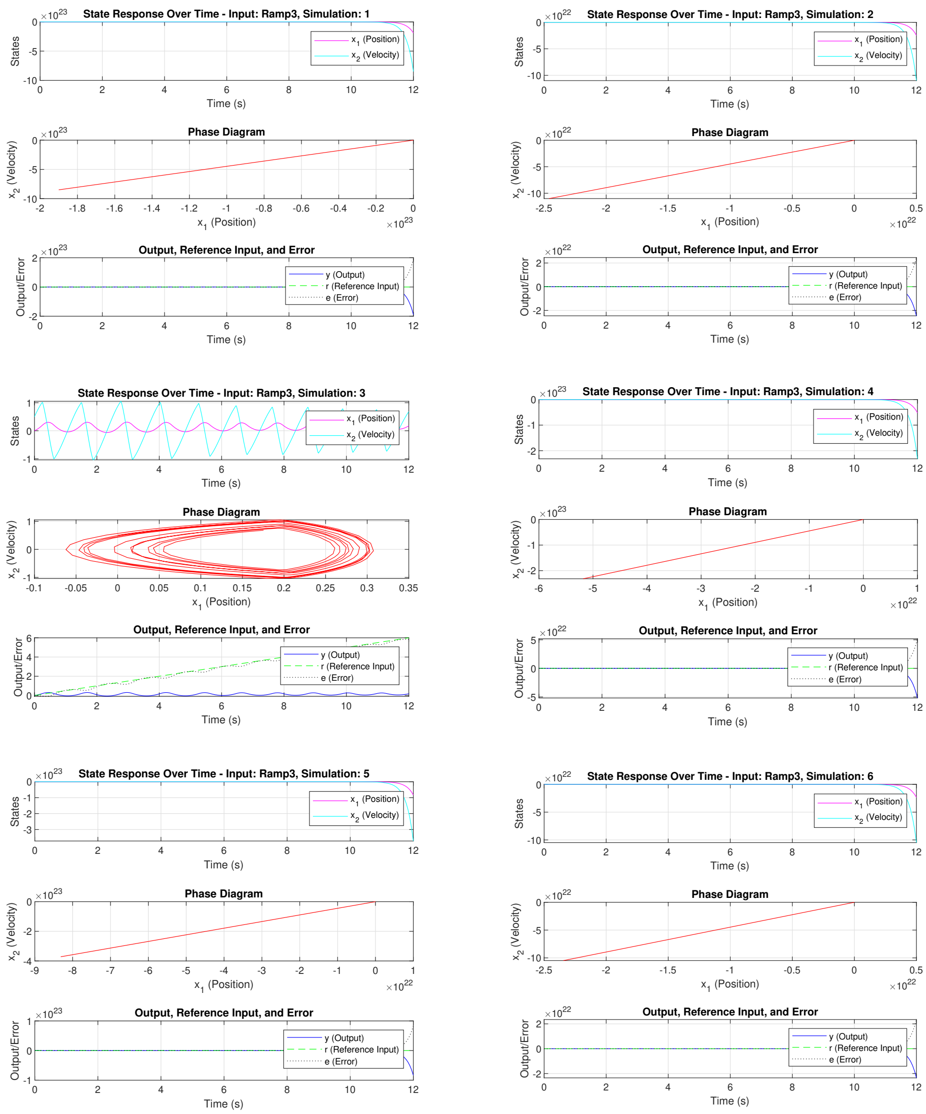


Figure 6: Diagrams for Ramp Input r_3 Simulations

2 Τμήμα B

2.1 Ερώτημα 1^o

2.1.1 i)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{2}$$

Εξετάζουμε την περίπτωση $u(x) = 0$.
Σημεία ισορροπίας:

Από $\dot{x}_1 = 0$, προκύπτει:

$$x_2 = x_1 \quad (1)$$

Από $\dot{x}_2 = 0$, έχουμε:

$$-x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 0 \quad (2)$$

Από (1) και (2), τα σημεία ισορροπίας είναι:

$$(0,0) \quad \text{και} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Ο πίνακας F είναι:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ x_2 - 1 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Για το σημείο $(0,0)$:

$$F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

Οι ρίζες είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Η πραγματική συνιστώσα:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) = -\frac{1}{2} < 0$$

Το σημείο $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Πεδίο Έλξης:
Γραμμικοποίηση γύρω από $(0,0)$:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Η εξίσωση Lyapunov είναι:

$$J^\top P + PJ = 0.2I$$

Λύνοντας:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Συνάρτηση Lyapunov:

$$V = x^T P x$$

Έπειτα από αντικαταστάσεις:

$$V = \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{5}x_1 x_2 + \frac{3}{10}x_2^2 \rightarrow \text{Ελλειπτικό πεδίο έλξης}$$

Στη συνέχεια κάνουμε προσομοιώσεις και παίρνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Για τις αρχικές συνθήκες $[0.1, 0.1]$ και $[0.4, 0.4]$, έχουμε σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας.
- Για τις αρχικές συνθήκες που αποκλίνουν, οι τιμές του συστήματος αυξάνονται εκθετικά, όπως φαίνεται από το διάγραμμα στο επίπεδο κατάστασης και το διάγραμμα απόκρισης ως προς τον χρόνο.

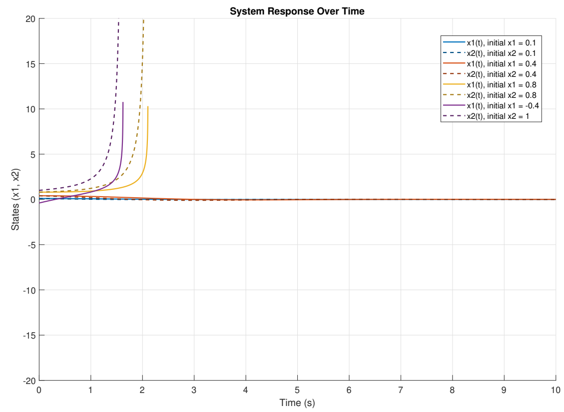


Figure 7: System Response Over Time

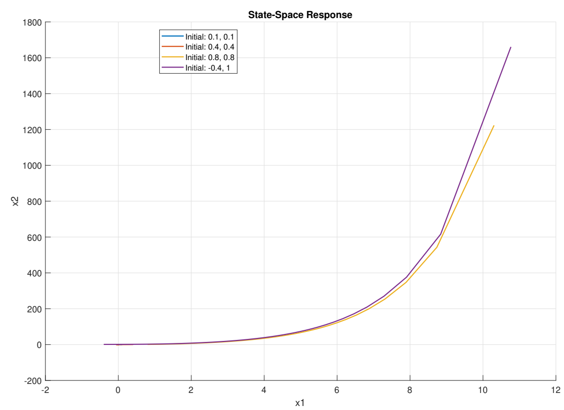


Figure 8: State-Space Response of the System

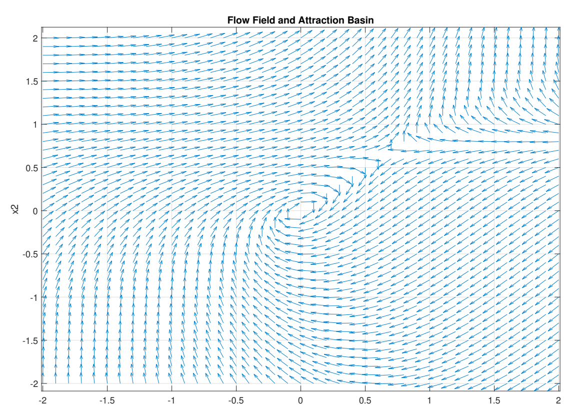


Figure 9: Flow Field and Attraction Basin

2.1.2 ii)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + g(x) + u(x)$$

Για :

$$u(x) = -g(x) - k_1 x_1 - k_2 x_2$$

έχουμε:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(1 + k_1) - k_2 x_2$$

Επομένως:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{όπου:} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -(1+k_1) & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(1+k_1) & 3 - k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 2(3 - k_2) - 1(-(1 + k_1)) = 6 - 2k_2 + 1 + k_1 = 7 + k_1 - 2k_2$$

Λύνοντας την εξίσωση: $\det(A - \lambda I) = 0$, παίρνουμε

$$7 + k_1 - 2k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 5$$

Τελικά:

$$u(x) = -g(x) - 3x_1 - 5x_2$$

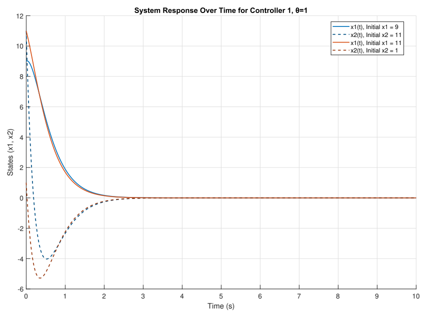


Figure 10: System Response Over Time for Controller 1, $\theta = 1$

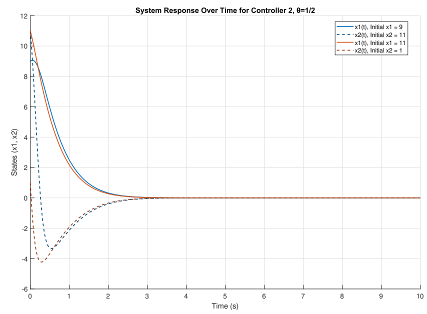


Figure 11: System Response Over Time for Controller 2, $\theta = 1/2$

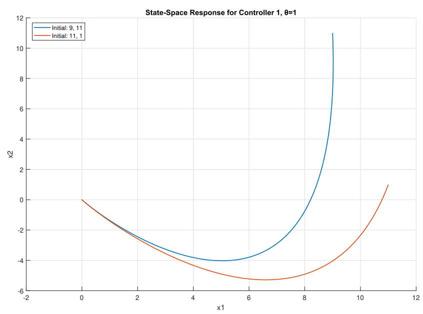


Figure 12: State-Space Response for Controller 1, $\theta = 1$

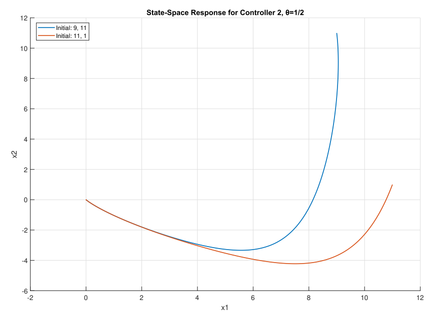


Figure 13: State-Space Response for Controller 2, $\theta = 1/2$

Με βάση τις προσομοιώσεις έχουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Και στις δύο περιπτώσεις, το σύστημα παρουσιάζει σύγκλιση ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.
- Δεν παρατηρείται καμία αξιοσημείωτη διαφορά στα διαγράμματα για τις διαφορετικές τιμές του θ.

2.1.3 iii)

$$\text{Γραμμικό Τμήμα:}\quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{όπου:} A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Εξίσωση Lyapunov:

$$A^\top P + PA = -Q \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow ...$$

Τελικά:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Παράγωγος της Συνάρτησης Lyapunov:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}}$$

Όπου:

$$\frac{d(\mathbf{x}^\top P \mathbf{x})}{dt} = 2\mathbf{x}^\top P \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d(\tilde{\theta}^2)}{dt} = 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -2\gamma x_2 \tilde{\theta}^2$$

Θεωρούμε:

$$u(\mathbf{x}) = -x_1 x_2 + k\tilde{\theta} x_2^2$$

Οι εξισώσεις γίνονται:

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2(\theta + k\tilde{\theta}), \quad \dot{\tilde{\theta}} = k\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\dot{V} = -2\mathbf{x}^\top P x_1 + 2\mathbf{x}^\top P x_2 - 2\mathbf{x}^\top P x_1 + 2\mathbf{x}^\top P(\theta + k\tilde{\theta}) x_2^2 - 2k\tilde{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -4x_1^2 - 8x_2^2 - 2(\theta + k\tilde{\theta}) x_1 x_2^2 + 20(\theta + k\tilde{\theta}) x_2^3 - 2k\tilde{\theta}^2 \Rightarrow$$

$(k = -1)$:

$$\dot{V} = -4x_1^2 - 8x_2^2 - 2\tilde{\theta} x_1 x_2^2 + 20\tilde{\theta} x_2^3 - 2k\tilde{\theta}^2 < 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \tilde{\theta} \to 0$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$.

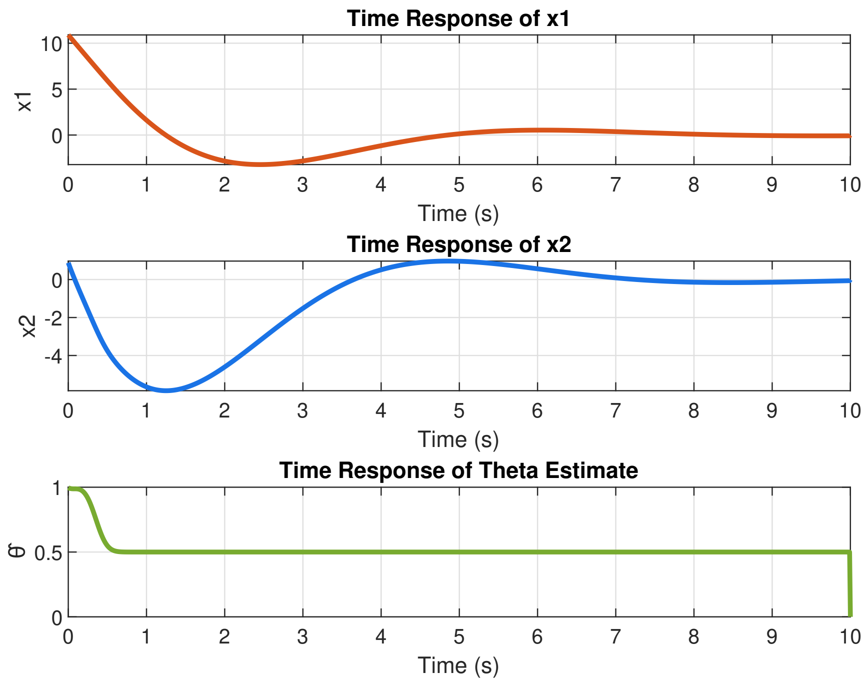


Figure 14: Time Response of x_1 (Orange), x_2 (Blue), and $\hat{\theta}$ (Green).

Με βάση τις προσομοιώσεις έχουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Το σύστημα συγκλίνει στην αρχή των αξόνων
- Όταν το θ έχει τεθεί ίσο με 0.5, παρατηρούμε ότι το $\tilde{\theta}$ φτάνει την επιθυμητή τιμή.

2.2 Ερώτημα 2^o

Θεωρούμε:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

τότε υπολογίζουμε:

$$\dot{V} = x_1(-x_1 + x_2) + x_2(-x_1 + g(x) + u(x)) \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x) + x_2 u(x).$$

Επιλέγουμε $u(x) = -x_2 - \alpha\|x\|^2$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x) + x_2(-x_2 - \alpha\|x\|^2) \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x) - x_2^2 - \alpha x_2\|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -\|x\|^2 - \alpha x_2\|x\|^2 + x_2 g(x).$$

Όμως, $|g(x)| \leq 2\|x\|^2$, άρα:

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - \alpha x_2\|x\|^2 + 2|x_2|\|x\|^2.$$

Για να εξασφαλιστεί ότι $\dot{V} \leq 0$, απαιτείται $\alpha \geq 2$, οπότε:

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - (\alpha - 2)x_2\|x\|^2.$$

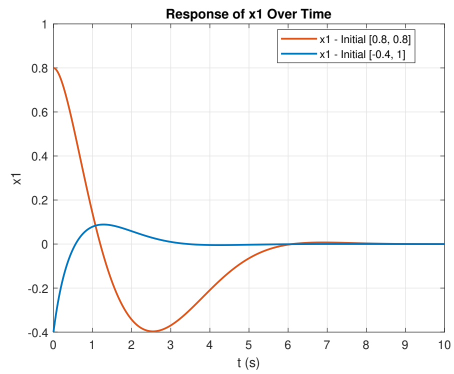
Με την επιλογή $\alpha = 2.3$, το $u(x)$ γίνεται:

$$u(x) = -x_2 - 2.3\|x\|^2.$$

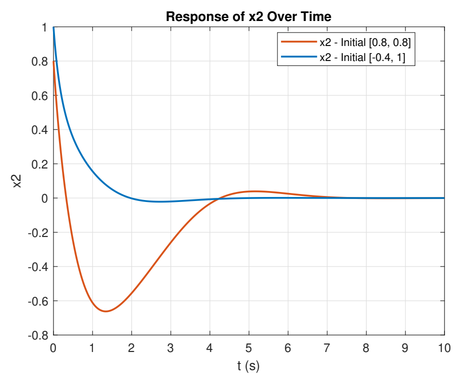
Τελικά, έχουμε:

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 - 0.3 \cdot x_2\|x\|^2 \leq 0.$$

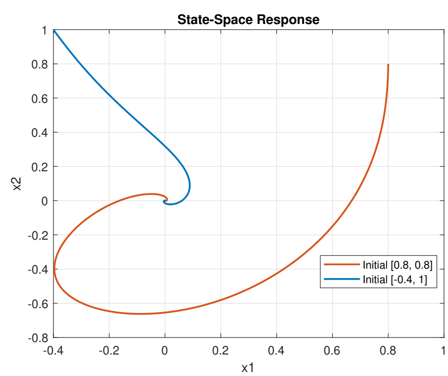
Επομένως, η αρχή των αξόνων στο σύστημα κλειστού βρόγχου να είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθής



(a) Response of x_1 Over Time



(b) Response of x_2 Over Time



(c) State-Space Response

Figure 15: Visualization of the system's behavior: (a) Response of x_1 over time, (b) Response of x_2 over time, and (c) State-space response.

Παρατήρηση: Μέσω των διαγραμμάτων βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών, το σύστημα συγκλίνει στο μηδέν.

3 Τμήμα Γ

3.1 Ερώτημα 1^o

$$e(t) = q - q_d \Rightarrow$$

$$\dot{e}(t) = \dot{q} - \dot{q}_d = \dot{q}, \quad \text{αφού} \quad \dot{q}_d = 0$$

Επιφανειακή μεταβλητή ολίσθησης:

$$s = \dot{e} + \lambda e \Rightarrow$$

$$s = \dot{q} - \dot{q}_d + \lambda(q - q_d) \Rightarrow$$

$$\dot{s} = H^{-1}(q)\big(u - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)\big) + \lambda \dot{e}$$

Επιλέγω ελεγκτή:

$$u = H(q)\big(-\lambda \dot{e} - 2 \cdot \mathrm{sat}(s)\big) + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q),$$

Έστω η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 \Rightarrow$$

$$\dot{V}(s) = s\dot{s}$$

Με χρήση του ελεγκτή, μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\dot{s} = -2 \cdot \mathrm{sat}(s),$$

Και

$$\dot{V}(s) = -2|s| \leq 0 \rightarrow \text{Σύστημα ευσταθές}$$

Στη συνέχεια μέσω γραμμικής παρεμβολής:

$$y = y_1 + \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα:

- $\hat{l}_{c1} = 0.25$
- $\hat{l}_{c2} = 0.175$
- $\hat{I}_1 = 0.26$
- $\hat{I}_2 = 0.08$
- $\hat{m}_l = 1$

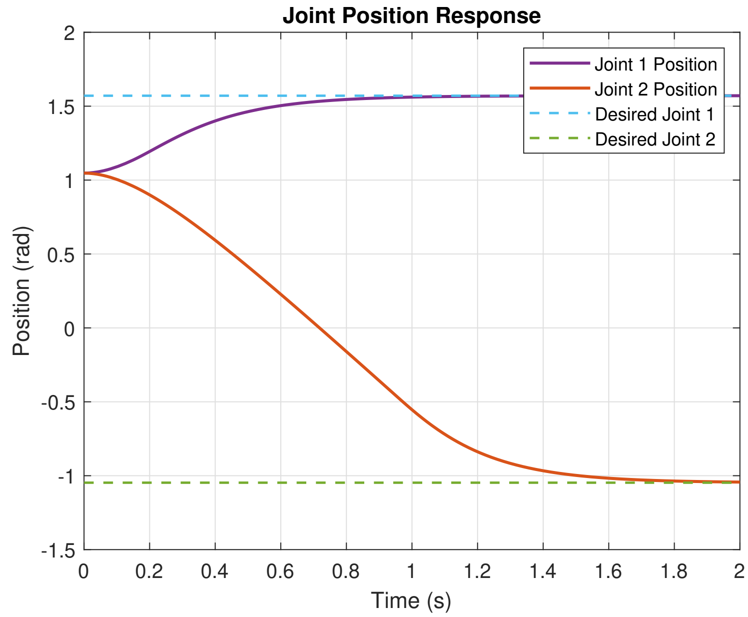


Figure 16: Joint Position Response

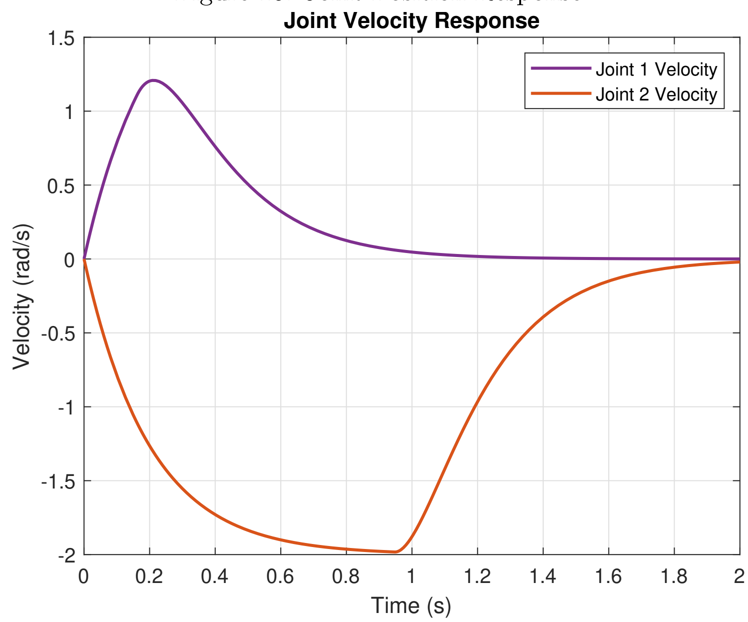


Figure 17: Joint Velocity Response

3.2 Ερώτημα 2^o

$$e(t) = q(t) - q_d(t) \Rightarrow$$

$$\dot{e}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t).$$

Επιφανειακή μεταβλητή:

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) + \lambda(q(t) - q_d(t)) \Rightarrow$$

$$\dot{s}(t) = \ddot{q}(t) - \ddot{q}_d(t) + \lambda \dot{e}(t).$$

Από την εξίσωση του συστήματος, παίρνουμε:

$$\ddot{q} = H^{-1}(q) \left(u - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) \right) \rightarrow$$

$$\dot{s}(t) = H^{-1}(q) \left(u - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) \right) - \ddot{q}_d(t) + \lambda \dot{e}(t).$$

Επιλέγω ελεγκτή:

$$u = H(q) \left(\ddot{q}_d(t) - \lambda \dot{e}(t) - 3 \cdot \text{sat}(s(t)) \right) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q),$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\dot{s}(t) = -3 \cdot \text{sat}(s(t)).$$

Έστω η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \Rightarrow ....$$

$$\dot{V}(s) = -3|s| \leq 0 \rightarrow \text{Σύστημα ευσταθές}$$

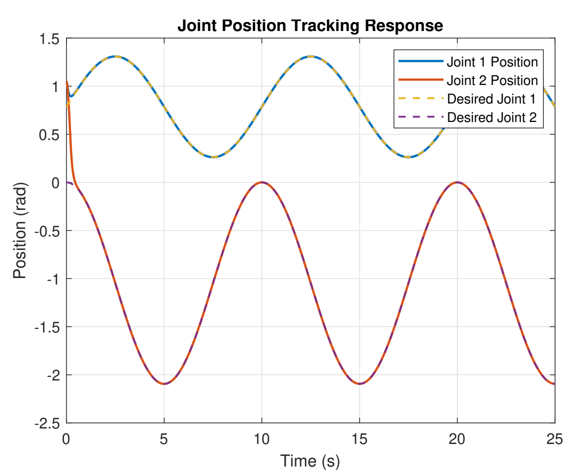


Figure 18: Joint Position Tracking Response.