L05-常见分布的 R 语言函数

郑盼盼

2024-10-30

目录

5.1 二项分布 (Binomial Distribution)

$$\xi \sim B(n,p)$$

5.1.1 相关 R 语言函数

- `dbinom(k,n,p)` (**d**ensity of **binom**ial distribution)：计算参数为 n 和 p 的二项分布在 k 点的密度，即 $\mathrm{P}(\xi = k)$
$$\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$
- `pbinom(x,n,p)` (**p**robability of **binom**ial distribution)：计算参数为 n 和 p 的二项分布在 x 点的分布函数值，即 $F(x) = \mathrm{P}(\xi \le x)$
$$F(x) = \mathrm{P}(\xi \le x) = \sum_{k \le x} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
- `rbinom(m,n,p)` (**r**andom of **binom**ial distribution)：生成 m 个服从参数为 n 和 p 的二项分布的随机数。

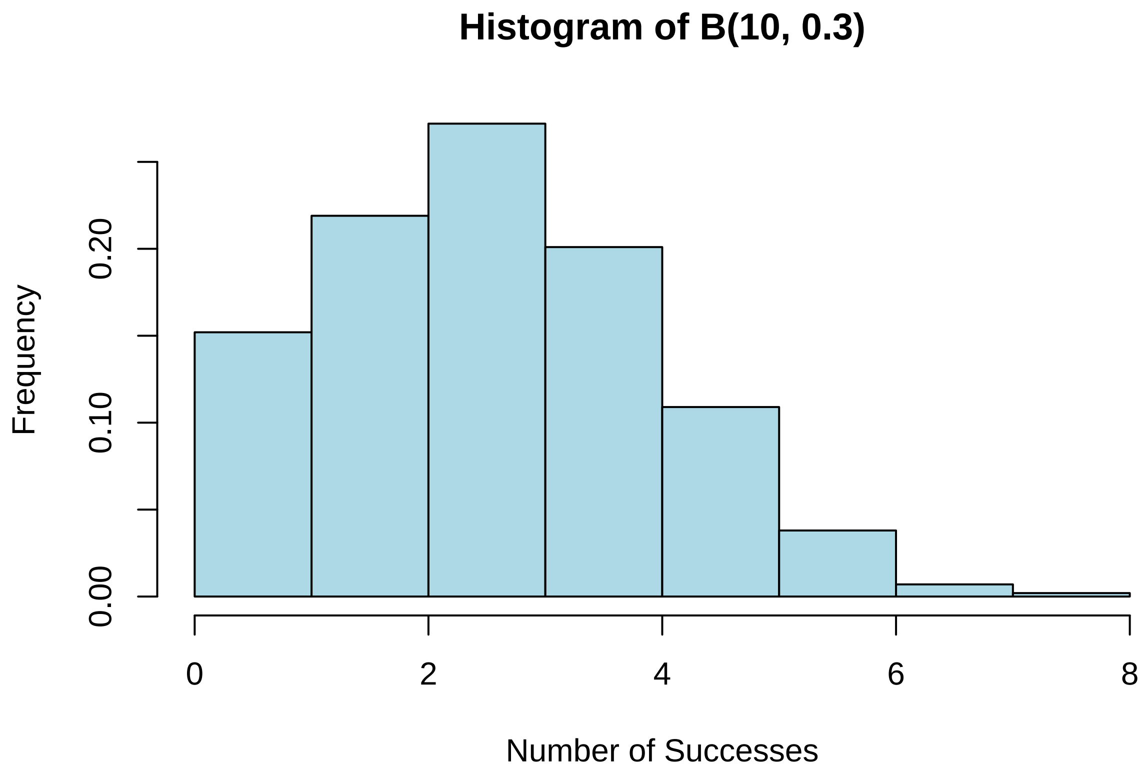
5.1.2 相关例题

例 1 模拟二项分布随机变量 假设某个实验成功的概率为 0.3，在一次实验中重复 10 次。请用 R 语言模拟 1000 次实验，输出每次实验成功的次数 ξ 分布，并通过 1000 次模拟，计算每次试验成功次数 ξ 的算术平均值。

```r
p <- 0.3
n <- 10
m <- 1000
results <- rbinom(m, n, p)
table(results)
```

```
## results
##    0   1   2   3   4   5   6   7   8
##   21 131 219 272 201 109  38   7   2
```

```r
hist(results,
     freq=F,
     col="lightblue",
     main="Histogram of B(10, 0.3)",
     xlab="Number of Successes",
     ylab="Frequency")
```




```r
mean(results)
```

```
## [1] 3.027
```

例 2 计算某个事件的概率 对于四选一的 10 道选择题，如果某人用随机猜测答案的方法，其猜对的题目个数 ξ 服从什么分布？计算恰好猜对 3 道题的概率。

```r
dbinom(3,10,1/4)
```

```
## [1] 0.2502823
```

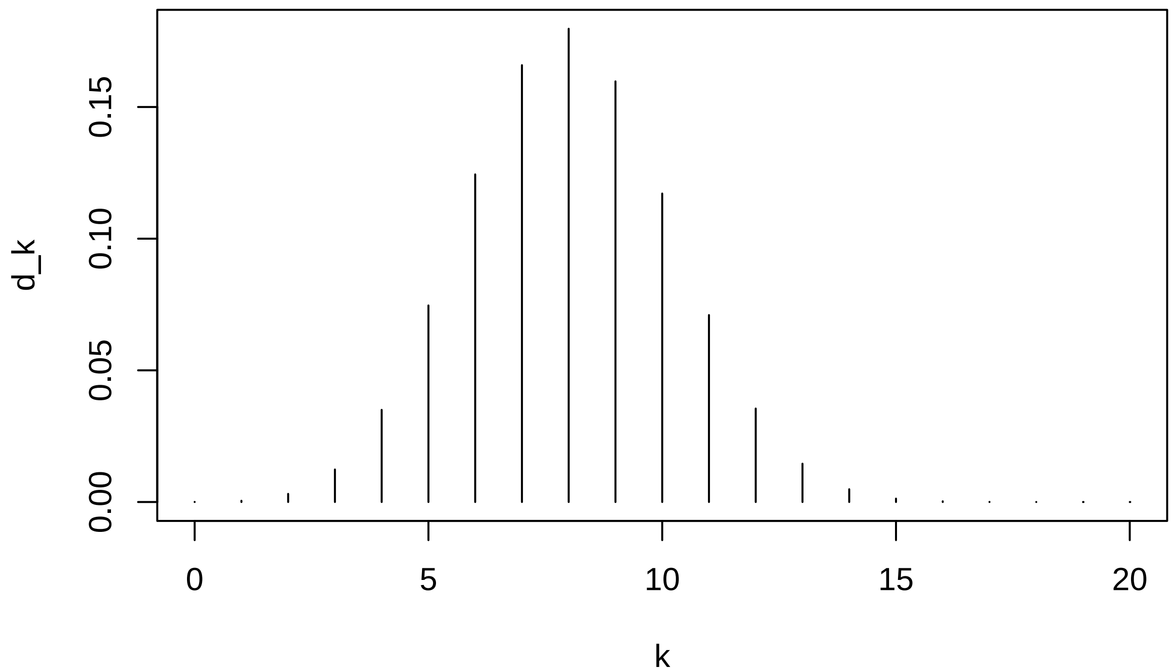
例 3 计算累积概率（分布函数值） 假设一台机器有 8 个零件，每个零件正常工作的概率是 0.9，计算至少有 6 个零件正常工作的概率。

```r
1 - pbinom(5, 8, 0.9)
```

```
## [1] 0.9619082
```

例 4 绘制二项分布的密度图像 假设某个事件发生的概率是 0.4，重复 20 次，绘制事件发生次数的密度图像：

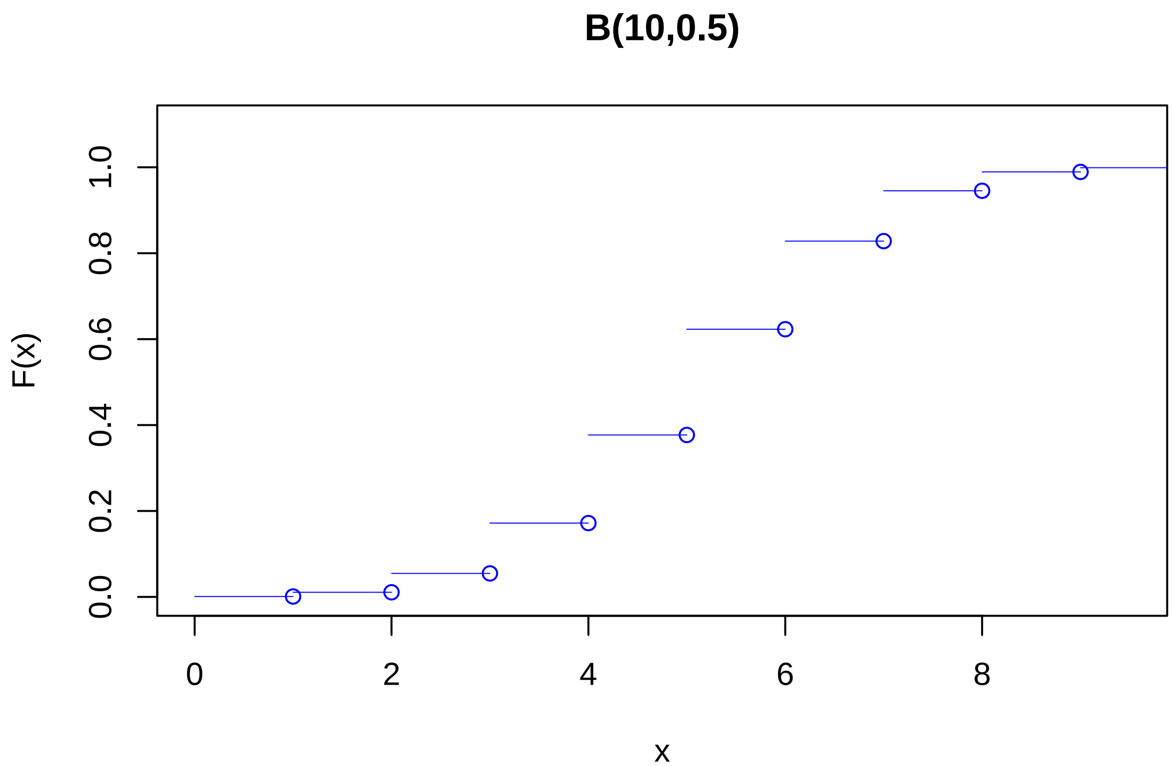
```
k <- 0:20 # 事件发生次数所有可能的取值 [0,20]
d_k <- dbinom(k, 20, 0.4)
plot(k, d_k,
     type="h")
```



例 5 绘制二项分布的分布函数图像 假设一项产品的合格率是 50，某公司抽检了 10 件产品，绘制合格产品数的分布函数。

```
x <- 0:10
y <- pbinom(x, 10, 0.5)
plot(c(0,1), c(y[1], y[1]),
     col = "blue",
     type = "l",
     lwd = .5,
     ylab = "F(x)",
     xlab = "x",
     ylim = c(0,1.1),
     xlim = c(0,9.5),
     main = "B(10,0.5)"
     )

for (i in 2:10) {
```

```
  points(i-1,y[i-1], col="blue")
  lines(c(i-1,i), c(y[i], y[i]),
        col="blue", lwd=.5)
}
```



5.2 超几何分布 (Hypergeometric Distribution)

$$\xi \sim H(M, K, n)$$

5.2.1 相关 R 语言函数

- dhyper(i, K, M-K, n) (**d**ensity of **hyper**geometric distribution)：计算参数为 M, K 和 n 的超几何分布在 i 处的密度，即 $\mathrm{P}(\xi = i)$

$$\mathrm{P}(\xi = i) = \frac{\binom{K}{i}\binom{M-K}{n-i}}{\binom{M}{n}}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- phyper(x, K, M-K, n) (**p**robability of **hyper**geometric distribution)：计算参数为 M, K 和 n 的超

几何分布在 x 点的分布函数值，即 $\mathrm{P}(\xi \leq x)$

$$F(x) = \mathrm{P}(\xi \leq x) = \sum_{i \leq x} \mathrm{P}(\xi = i) = \sum_{i \leq x} \frac{\binom{K}{i}\binom{M-K}{n-i}}{\binom{M}{n}}$$

- `rhyper(m, K, M-K, n)` (**r**andom of **hyper**geometric distribution)：生成 m 个服从参数为 M, K 和 n 的超几何分布的随机数。

5.2.2 相关例题

例 1 计算超几何分布的概率 假设一个箱子里有 20 个球，其中 8 个是红球，12 个是黑球。现在从中随机抽取 5 个球（不放回），求其中正好有 3 个红球的概率。

```
M = 20
K = 8
n = 5

dhyper(3, K, M-K, n)
```

```
## [1] 0.2383901
```

例 2 累积概率（分布函数）计算 假设有 50 名学生，其中 30 名学生通过了考试，20 名学生未通过。现随机抽取 10 名学生，求至少有 6 名学生通过考试的概率。

```
K = 30
M = 50
n = 10

1 - phyper(5, K, M-K, n)
```

```
## [1] 0.6450269
```

```
phyper(4, M-K, K, n)
```

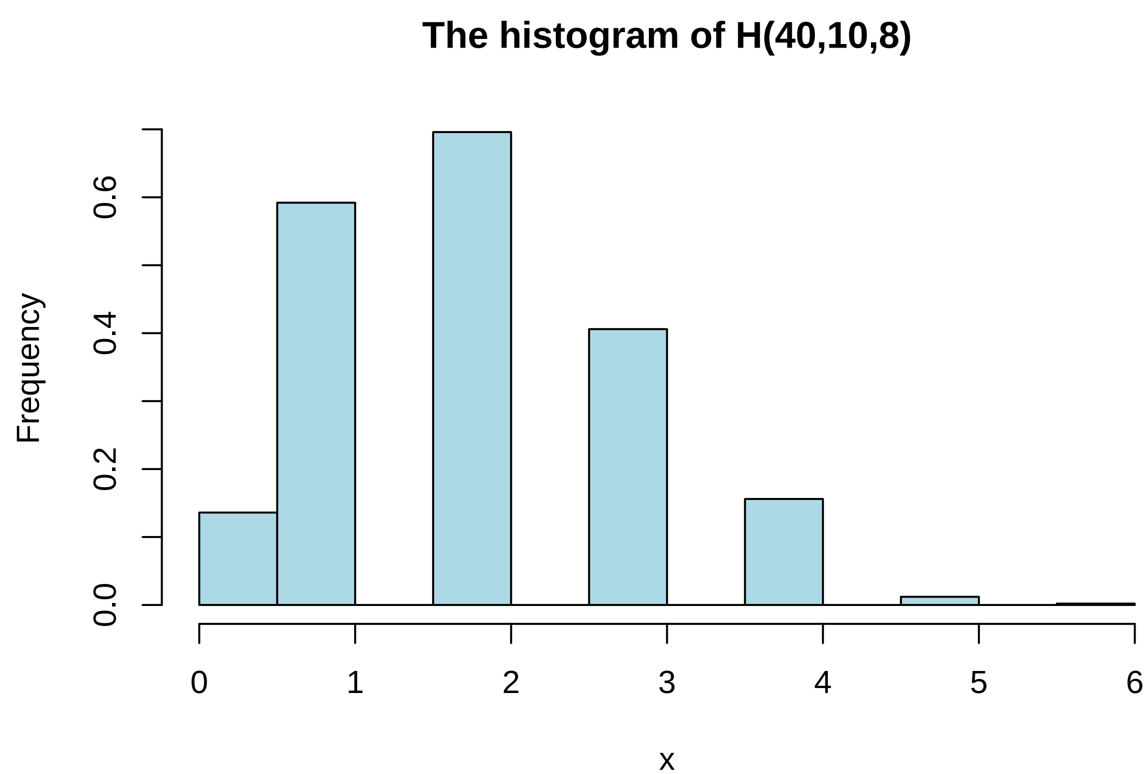
```
## [1] 0.6450269
```

例 3 模拟超几何分布随机变量 假设一个卡片组里有 40 张卡片，其中 10 张是稀有卡。随机抽取 8 张卡片，模拟 1000 次试验，观察每次抽取的稀有卡数量。并绘制其直方图

```r
M = 40
K = 10
n = 8
results = rhyper(1000, K, M-K, n)
table(results)
```

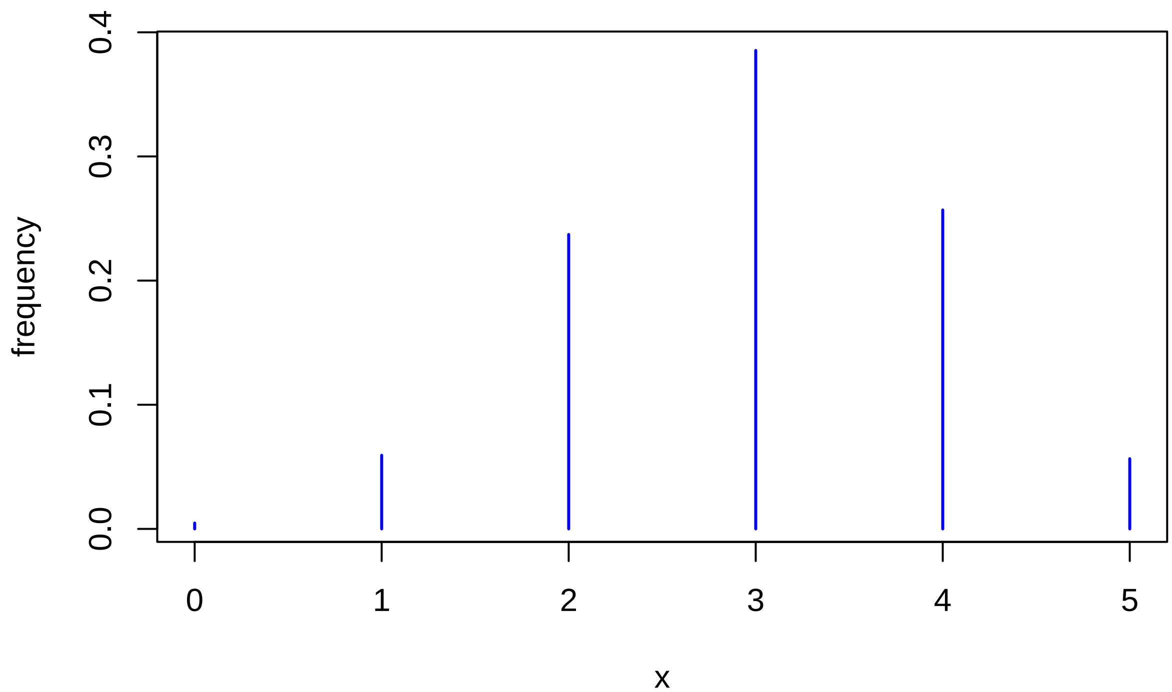
```
## results
##   0   1   2   3   4   5   6
##  68 296 348 203  78   6   1
```

```r
hist(results, freq=F,
     col="lightblue",
     xlab="x",
     ylab="Frequency",
     main="The histogram of H(40,10,8)")
```



例 4 绘制超几何分布的密度图像 假设一个队伍有 15 名女生和 10 名男生，从中随机抽取 5 人。绘制抽到不同数量女生的密度函数。

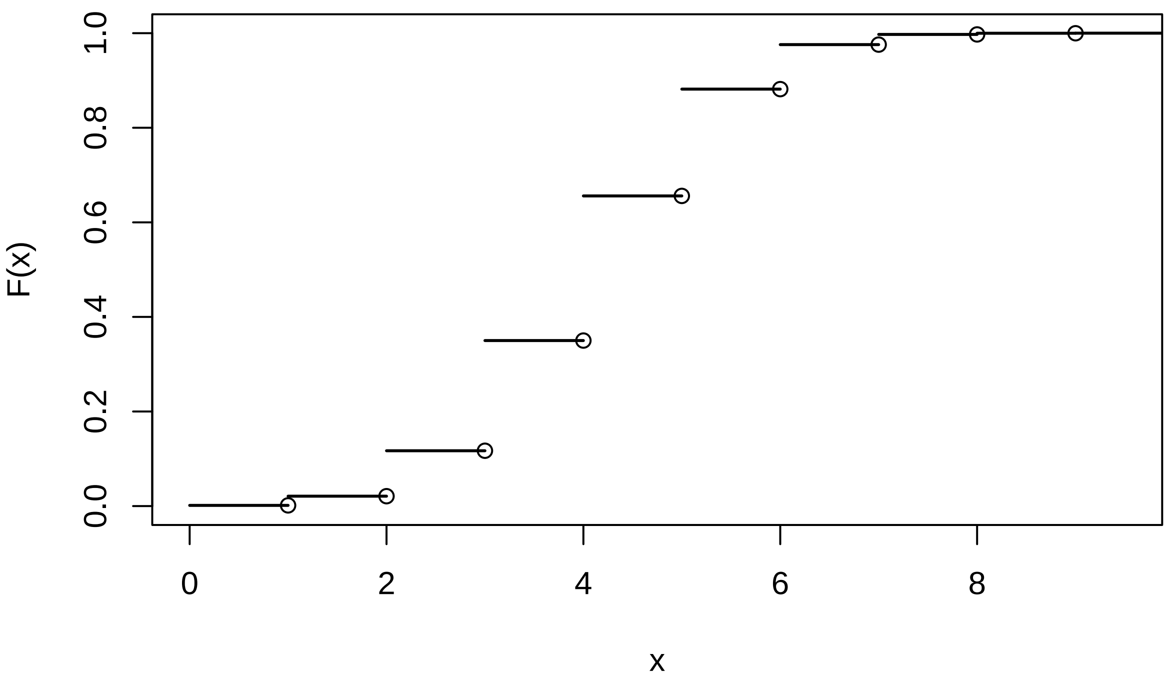
```r
M = 25
K = 15
n = 5
k = 0:n

plot(k, dhyper(k, K, M-K, n),
     type = "h",
     col = "blue",
     xlab = "x", ylab = "frequency",
     lwd = 1.5)
```



例 5 绘制超几何分布的分布函数 假设一个项目组有 30 名员工，其中 12 名是女性。随机抽取 10 名员工，绘制不同抽取女性员工数量的累积分布函数图。

```r
M <- 30
K <- 12
n <- 10

x <- 0:10
y <- phyper(x, K, M-K,n)

plot(c(x[1], x[2]), c(y[1], y[1]),
```

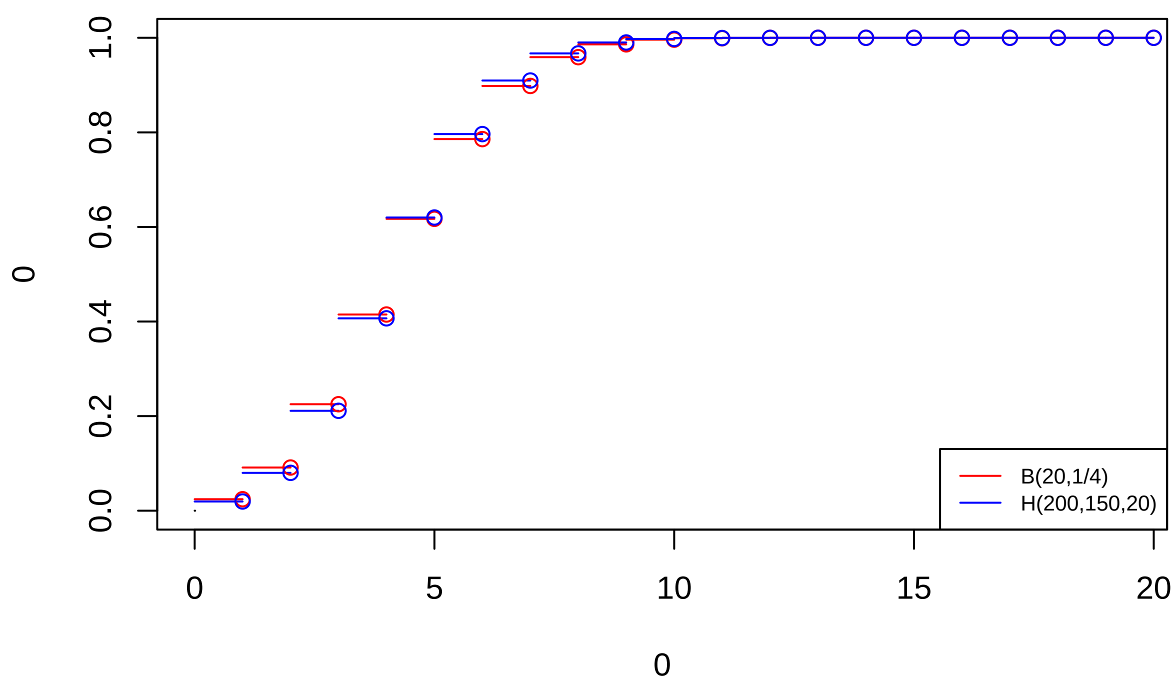
```
     type="l",
     lwd=1.5,
     xlim=c(0,9.5),
     ylim=c(0,1),
     xlab="x",
     ylab="F(x)")


for (i in 2:10) {
  points(i-1, y[i-1])
  lines(c(i-1, i), c(y[i], y[i]),lwd=1.5)
}
```



例 6 二项分布和超几何分布的对比 假设一个库存有 200 个产品，其中 50 个是有缺陷的，150 个是完好的。分别使用放回和不放回的抽样方式随机抽取 20 个产品，抽到的有缺陷产品的数目分别记为 X 和 Y，在一张图中绘制 X 和 Y 的分布函数图像。

```
M <- 200
K <- 50
n <- 20
p <- K/M
```

```r
k <- 0:20
X <- pbinom(k, n, p)
Y <- phyper(k, K, M-K, n)

# 创建一个空的图片，以便后续通过循环添加
plot(0,0,type='h',
     xlim = c(0,19.5),
     ylim = c(0,1)
     )
for (i in 2:length(k)) {
  lines(c(k[i-1], k[i]), c(X[i], X[i]),
        col="red")
  lines(c(k[i-1], k[i]), c(Y[i], Y[i]),
        col="blue")
  points(k[i], X[i],col="red")
  points(k[i], Y[i],col="blue")
}
legend("bottomright", legend = c("B(20,1/4)", "H(200,150,20)"),
       lty=c(1,1),
       col = c("red", "blue"),
       cex=.7)
```



5.3 泊松分布 (Poisson Distribution)

$$\xi \sim P(\lambda)$$

5.3.1 相关 R 语言函数

- `dpois(k, )` (**d**ensity of **Pois**son distribution)：计算参数为 λ 的泊松分布在 k 点的密度值，即 $\mathrm{P}(\xi = k)$
$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
- `ppois(x, )` (**p**robability of **Pois**son distribution)：计算参数为 λ 的泊松分布在 x 点的分布函数值，即 $\mathrm{P}(\xi \leq x)$
$$\mathrm{P}(\xi \leq x) = \sum_{k \leq x} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
- `rpois(m, )` (**r**andom of **Pois**son distribution)：生成 m 个服从参数为 λ 的泊松分布的随机数。

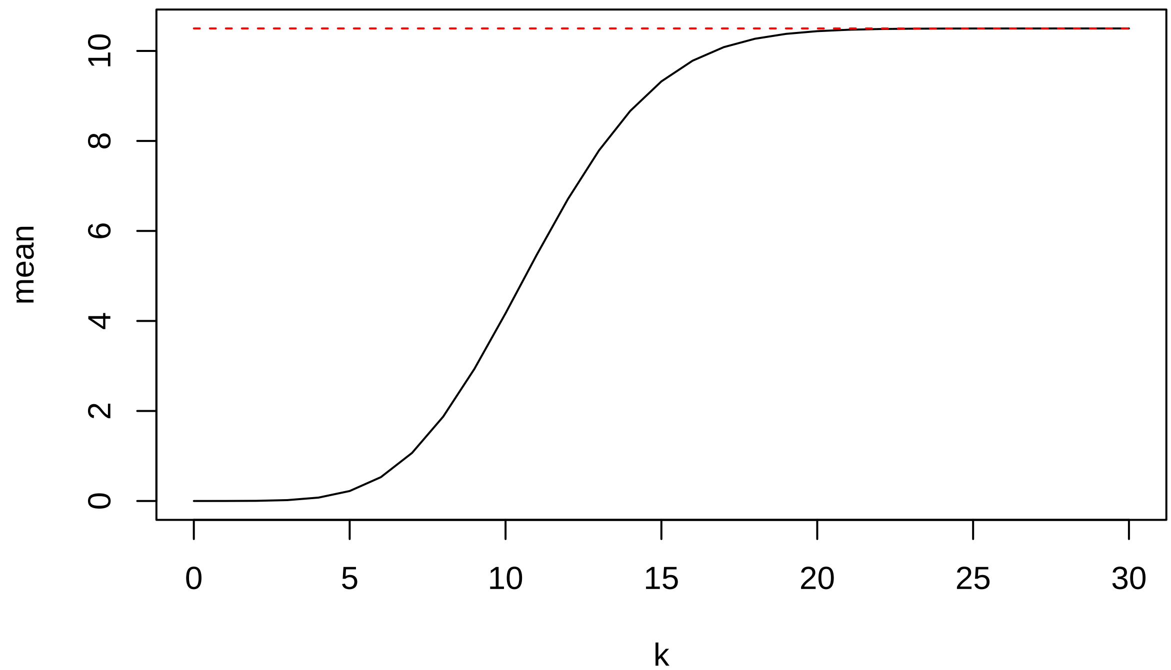
5.3.2 例题

例 1

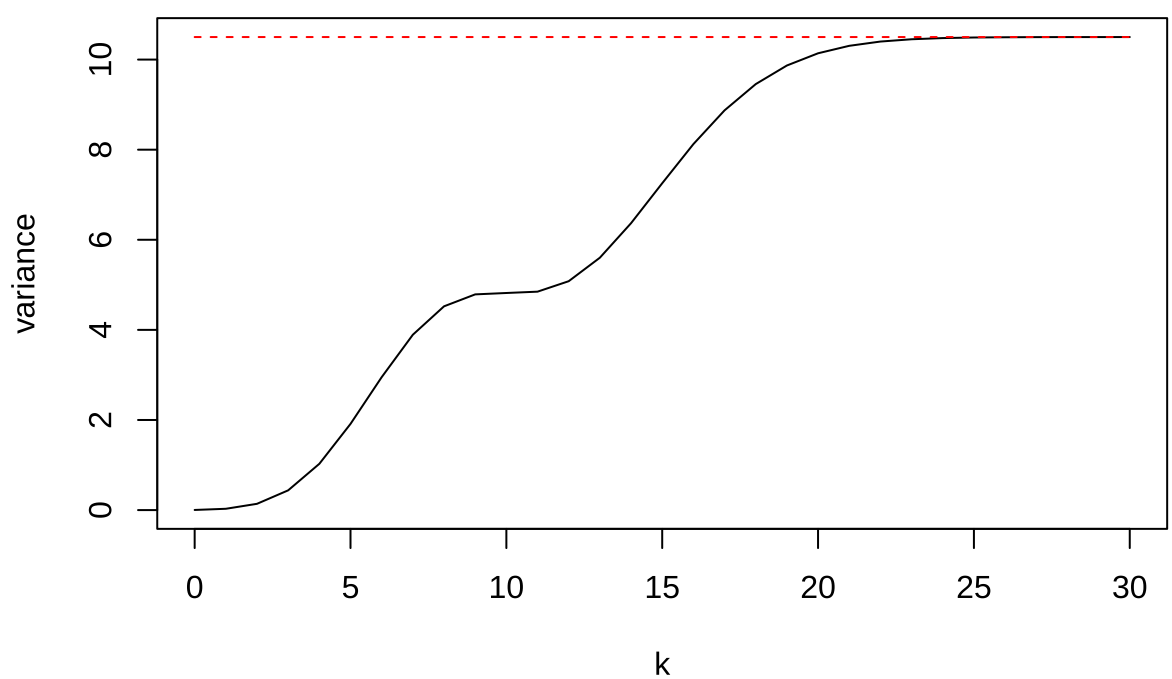
- **利用数学期望和方差的定义** 使用 R 语言估算 $\xi \sim P(10.5)$ 的数学期望和方差

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(\xi = k)$$
$$D(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} [k - \mathbb{E}(\xi)]^2 \cdot \mathbb{P}(\xi = k)$$

```
lambda = 10.5
k = 0:30
p <- dpois(k, lambda)
# 利用 cumsum 函数计算向量的前 n 项和，通过计算 k*p 的前 n 项和可以近似得到随机变量
↪ 的数学期望
plot(k, cumsum(k*p),
     xlab="k", ylab="mean",
     type="l")
lines(c(0,30), c(lambda,lambda), lty=2,col="red")
```




```
# 利用 cumsum 函数计算向量的前 n 项和，通过计算 (k-10.5)**2*p 的前 n 项和可以近似得
↪ 到随机变量的数学期望
plot(k, cumsum((k - lambda)**2*p),
     xlab="k", ylab="variance",
     type="l")
lines(c(0,30), c(lambda,lambda), lty=2,col="red")
```



- **利用大数定律**估计 $\xi \sim P(10.5)$ 的数学期望

```
N = 100000
sample_from_pois = rpois(N, 10.5)
mean(sample_from_pois)
```

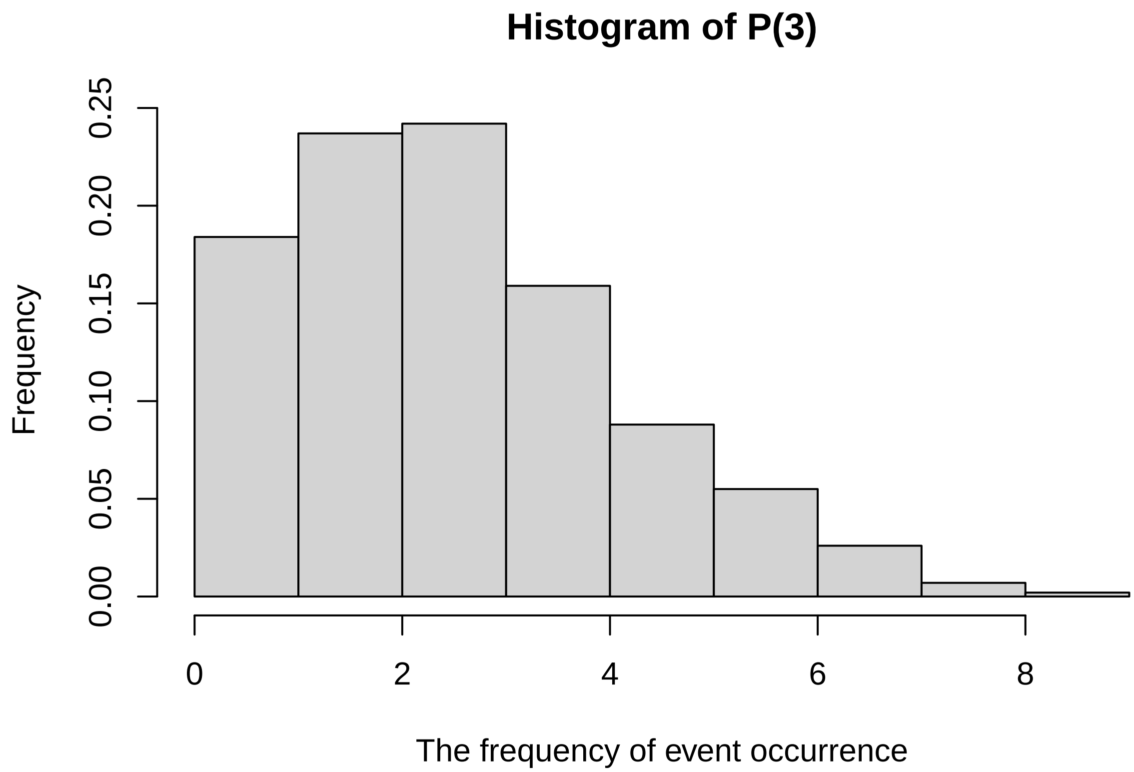
```
## [1] 10.49942
```

例 2 假设在某地区，每分钟发生的某种事件的平均发生次数是 3 次。请生成 1000 个随机样本，表示每分钟发生的事件次数。

```
N = 1000
lambda = 3
results = rpois(N, lambda)
table(results)
```

```
## results
##   0   1   2   3   4   5   6   7   8   9
##  57 127 237 242 159  88  55  26   7   2
```

```
hist(results,
     freq=F,
     xlab="The frequency of event occurrence",
     ylab="Frequency",
     main="Histogram of P(3)")
```



例 3 计算发生某事件的概率 假设在某银行，每小时接待 10 名客户的平均概率符合泊松分布。求每小时接待 5 名客户的概率。

```r
lambda = 10
dpois(5, lambda)
```

```
## [1] 0.03783327
```

例 4 计算事件发生的累计概率（分布函数） 假设在某工厂，每小时的事故发生次数的平均值是 2。求每小时发生不超过 4 起事故的概率。

```r
lambda <- 2
ppois(4, lambda)
```

```
## [1] 0.947347
```

5.4 均匀分布 (Uniform Distribution)

$$\xi \sim U(a, b)$$

5.4.1 相关 R 语言函数

- `dunif(x, a, b)` (**d**ensity of **unif**orm distribution)：计算 $U(a,b)$ 在 x 点的概率密度值：$p(x)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- `punif(x, a, b)` (**p**robability of **unif**orm distribution)：计算 $U(a,b)$ 在 x 点的分布函数值：$F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & b \le x \end{cases}$$

- `runif(m, a, b)` (**r**andom of **unif**orm distribution)：生成 m 个服从 $U(a,b)$ 的随机数。

5.4.2 例题

例 1 通过公式，计算 $U(1,20)$ 的均值和方差

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx$$
$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathbb{E}(\xi)]^2 \cdot p(x)\,dx$$

```r
integrate(function(x) x * dunif(x, 1, 20), -Inf,Inf)
```

```
## 10.5 with absolute error < 0.00064
```

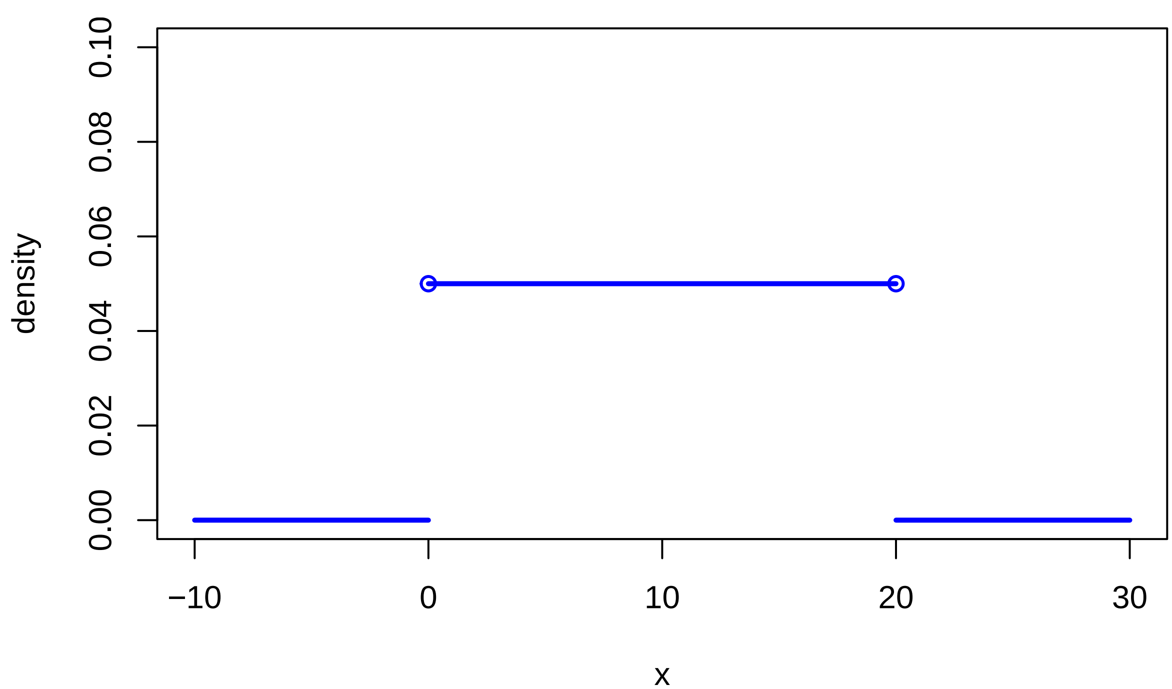
```r
integrate(function(x) (x-10.5)**2* dunif(x, 1,20), -Inf, Inf)
```

```
## 30.08337 with absolute error < 0.00066
```

例 2 绘制均匀分布的密度函数图像 若 $\xi \sim U(1,20)$ 绘制 ξ 的密度函数图像:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{19}, & 0 < x < 20 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

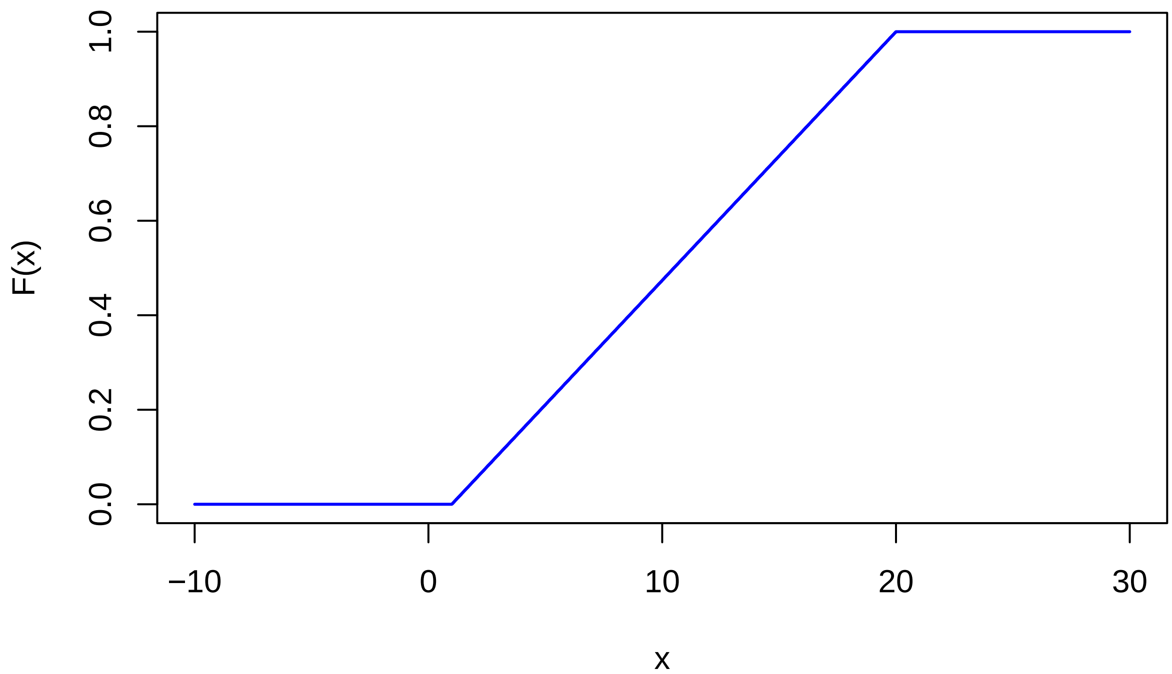
```
x <- seq(-10, 30, by = 0.001)
plot(x[x >= 0 & x <= 20], dunif(x[x >= 0 & x <= 20], 0, 20),
  type = "l",
  lwd = 2.5,
  col = "blue",
  xlim = c(-10, 30),
  ylim = c(0, 0.1),
  xlab = "x",
  ylab = "density"
)
lines(x[x < 0], dunif(x[x < 0]), lwd = 2.5, col = "blue")
points(c(0, 20), dunif(c(0, 20), 0, 20), col = "blue", lwd = 1.5)
lines(x[x > 20], dunif(x[x > 20]), lwd = 2.5, col = "blue")
```



例 3 绘制均匀分布的分布函数图像 若 $\xi \sim U(1,20)$ 绘制 ξ 的分布函数图像:

```
x <- seq(-10,30,by=0.001)
plot(x, punif(x,1,20),
```

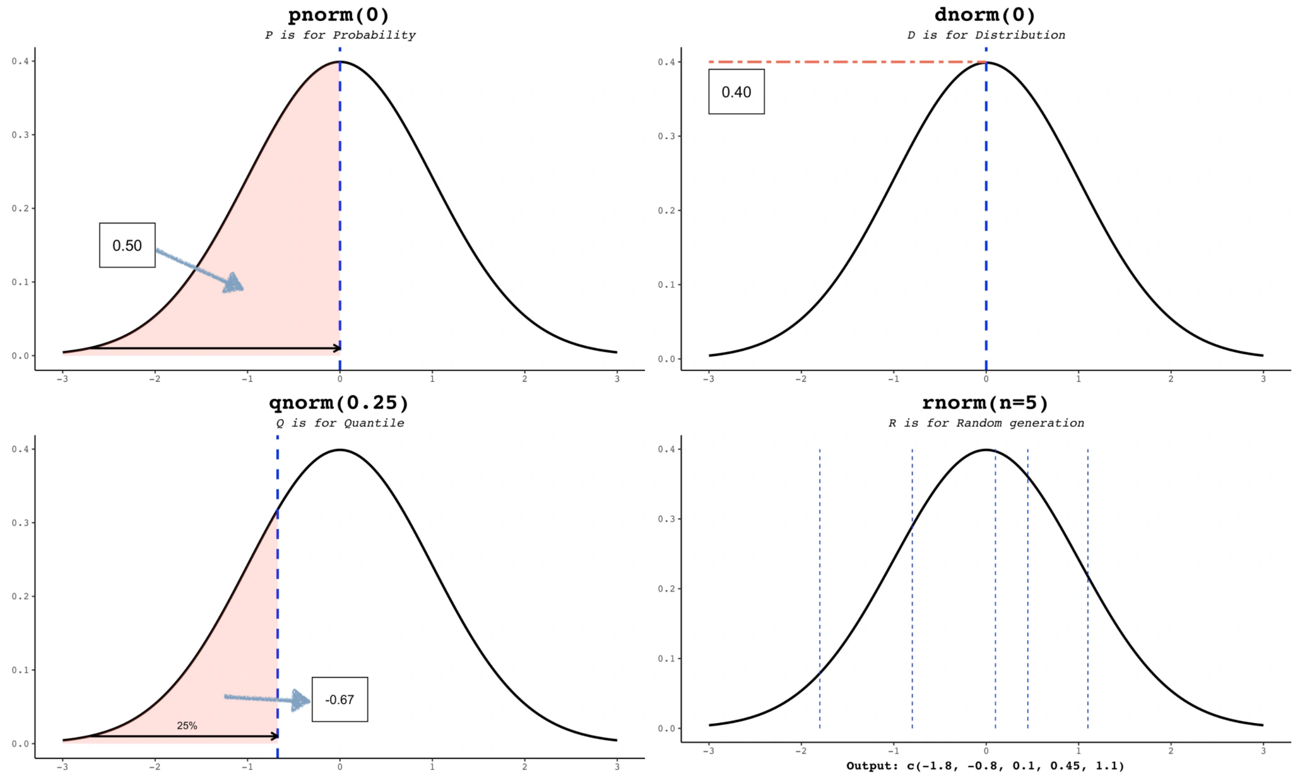
```
    type='l',
    col='blue',
    xlab="x", ylab="F(x)",
    lwd=1.5)
```



5.5 正态分布 (Normal Distribution)

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$$

5.5.1 相关 R 语言函数



- `dnorm(x, mu, sigma)` (**d**ensity of **norm**al distribution)：计算 $N(\mu, \sigma^2)$ 在 x 点的密度，即 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- `pnorm(x, mu, sigma)` (**p**robability of **norm**al distribution)：计算 $N(\mu, \sigma^2)$ 在 x 点的分布函数值，即 $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\, dt$$

- `rnorm(m, mu, sigma)` (**r**andom of **norm**al distribution)：生成 m 个服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 随机数。
- `qnorm(p, mu, sigma)` (**q**uantile of **norm**al distribution)：计算正态分布函数的反函数：

$$p = \Phi_{\mu,\sigma}(x)$$
$$x = \Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(p)$$

5.5.2 例题

例 1 计算 $N(\mu,\sigma^2)$ 的数学期望和方差 根据连续型随机变量数学期望和方差的定义，计算 $N(3,9)$ 的数学期望和方差

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx$$
$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathbb{E}(\xi)]^2 \cdot p(x)\,dx$$

```
integrate(function(x) x * dnorm(x, 3,3), -Inf, Inf)
```

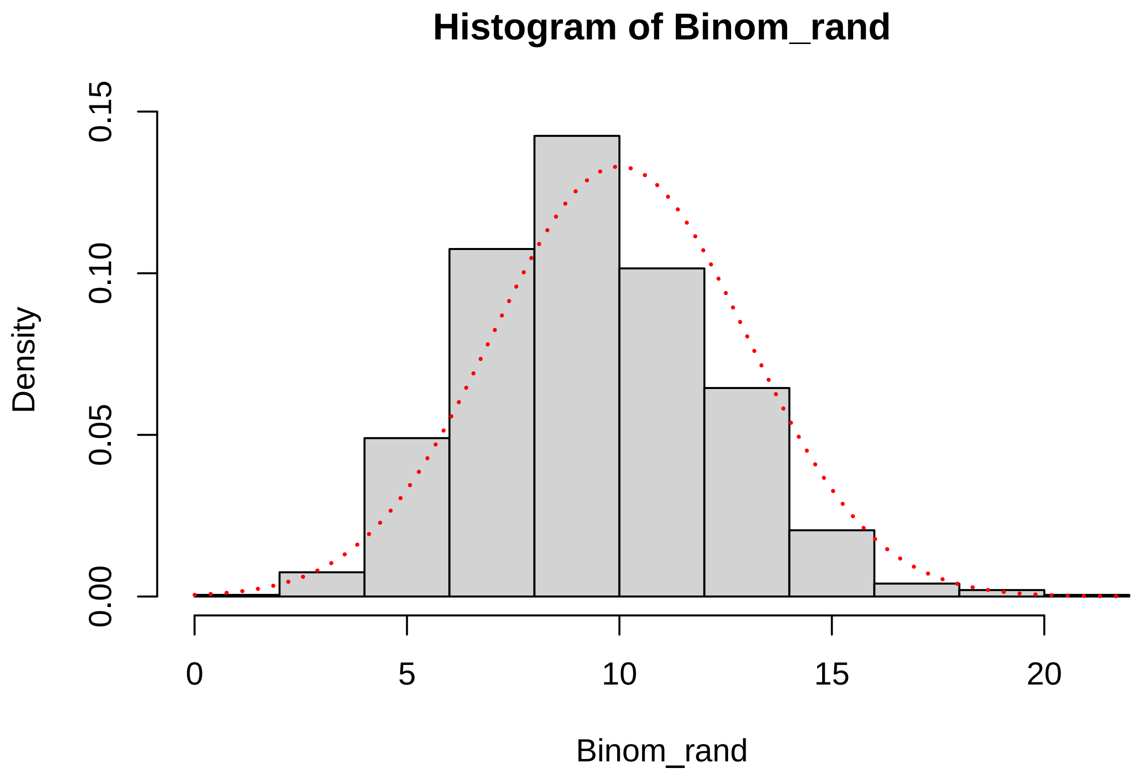
```
## 3 with absolute error < 1.8e-05
```

```
integrate(function(x) (x - 3)^2 * dnorm(x, 3,3), -Inf, Inf)
```

```
## 9 with absolute error < 0.00052
```

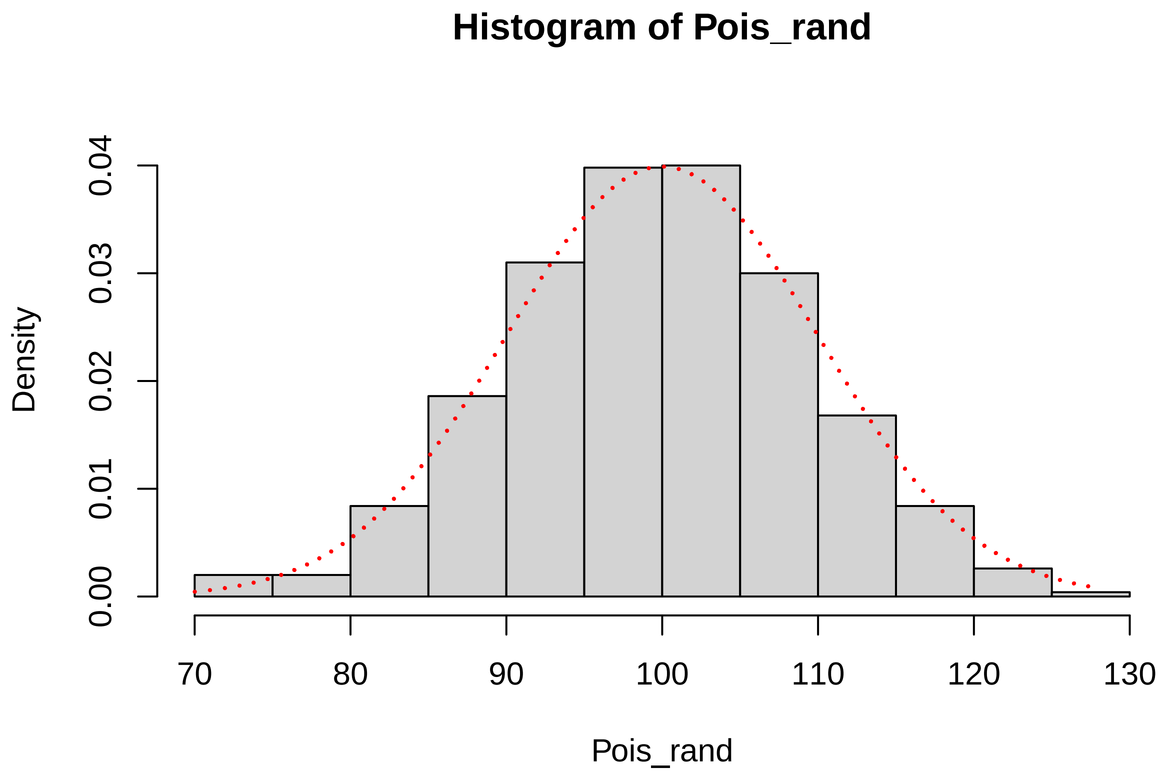
例 2 二项分布和正态分布的近似 对于 $B(n,p)$，当 n 足够大（一般认为大于或等于 30），且 np 和 $n(1-p)$ 均大于 5 时，我们可以用正态分布 $N(np, np(1-p))$ 近似该二项分布：例如，从 $B(50, 0.1)$ 中抽取 1000 个随机数，同时绘制这 1000 个随机数的直方图和 $N(5, 100\times 0.1\times 0.9)$ 的概率密度曲线图进行对比：

```
n <- 100
p <- 0.1
mu <- n*p
sigma <- sqrt(n*p*(1-p))
N <- 1000
Binom_rand <- rbinom(N, n, p)
x <- seq(min(Binom_rand) - 1, max(Binom_rand) +1, by=1e-3)
y <- dnorm(x, mu, sigma)
hist(Binom_rand, freq=F, ylim=c(0, 1.1*max(y)))
lines(x, y, lty=3, col="red", lwd=2)
```



例 3 泊松分布和正态分布的近似 当 $P(\lambda)$ 的参数 $\lambda \to \infty$ 时，其近似于正态分布 $N(\lambda, \lambda)$

```
lambda <- 100
N <- 1000
Pois_rand <- rpois(N, lambda)
x <- seq(min(Pois_rand), max(Pois_rand), by=1e-3)
y <- dnorm(x, lambda, sqrt(lambda))
hist(Pois_rand, freq=F, ylim=c(0, 1.1 * max(y)))
lines(x, dnorm(x, lambda, sqrt(lambda)), lty=3, col="red", lwd=2)
```



例 4 计算某范围内的概率 假设在某项考试中，分数符合均值为 75，标准差为 10 的正态分布。求分数在 65 到 85 之间的概率。

- **答** 定义分数为随机变量 $\xi \sim N(75, 10^2)$，题目要求我们计算 $\mathbb{P}(65 < \xi < 85)$。由于随机变量 ξ 为连续型随机变量，因此我们有:

$$\mathbb{P}(65 < \xi < 85) = \mathbb{P}(65 < \xi \leq 85) = \mathbb{P}(\xi \leq 85) - \mathbb{P}(\xi \leq 65) = \Phi_{75,10}(85) - \Phi_{75,10}(65)$$

```r
# 设置均值和标准差
mean_score <- 75
sd_score <- 10

# 计算分数在 65 到 85 之间的概率
probability <- pnorm(85, mean_score, sd_score) - pnorm(65, mean_score, sd_score)
print(probability)
```

```
## [1] 0.6826895
```

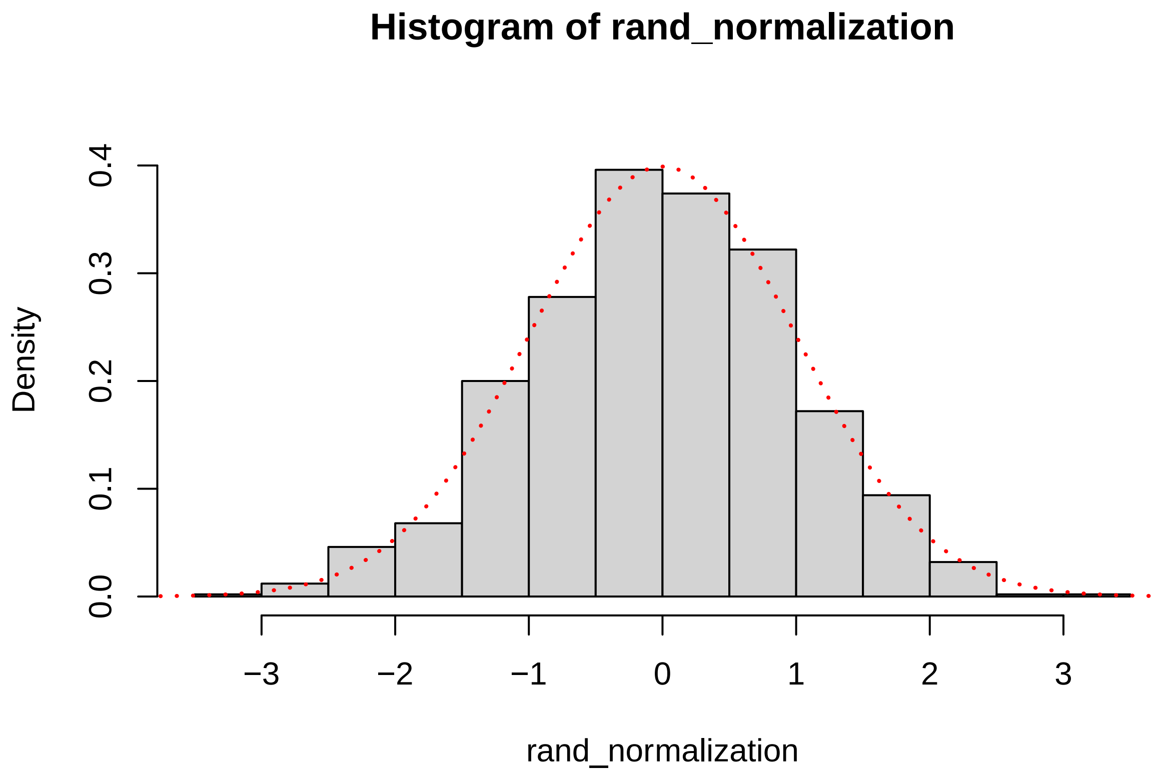
例 5 计算正态分布的分位数 假设某公司希望筛选出前 5% 的员工获得奖励。已知员工绩效分数符合均值为 70，标准差为 8 的正态分布。计算绩效分数的前 5% 阈值。

```
mean_score <- 70
std_score <- 8

threshold = qnorm(1 - 5e-2, mean_score, std_score)
print(threshold)
```

```
## [1] 83.15883
```

例 6 正态分布的标准化 生成 1000 个服从 $N(3,9)$ 的随机数，将其标准化后，绘制起直方图，与标准正态分布的概率密度曲线进行对比（即转化为标准正态分布，均值为 0，标准差为 1）。

```
mu = 3
sigma = sqrt(9)
N = 1000
rand_raw = rnorm(N, mu, sigma)
rand_normalization = (rand_raw - mu) / sigma
x = seq(-4,4,by=1e-3)
y = dnorm(x)

hist(rand_normalization, freq=F, ylim = c(0, 1.1*max(y)))
lines(x, y, lwd=2, col="red", lty=3)
```


Histogram of rand_normalization
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−3
−2
−1
0
1
2
3
rand_normalization