L11-不同估计方法的比较和极大似然估计

郑盼盼

2024-12-11

目录

11.1 不同估计方法的随机模拟比较

设置参数 a 的实际值为 a_0，用计算机重复模拟样本数据。对于第 k 此模拟的样本数据计算估计量 T 的值 $T_k, 1 \le k \le n$，记

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k \tag{11.1}$$

$$\widehat{\mathrm{mse}}(T, a_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T_k - a_0)^2 \tag{11.2}$$

依据大数定律，当 n 充分大时，$\bar{T}$ 和 $\widehat{\mathrm{mse}}(T, a_0)$ 分别接近于 $\mathbb{E}(T)$ 和 $\mathrm{mse}(T, a_0)$。

例 11.1.1 若 X_1, X_2, X_3 是来自总体变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，就可分别以样本方差 S^2 和统计量 $T = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(X_k - \bar{X})^2$ 估计样本方差。试用随机模拟的方法判断 S^2 和 T 中哪一个估计总体方差的效果更好。

1. 模拟真实参数为 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 0.5, 0.8, 1, 2, 5$ 的情况，重复估计 10000 次，通过估计量的算术平均值和均方误差估计两种估计方法的效果。

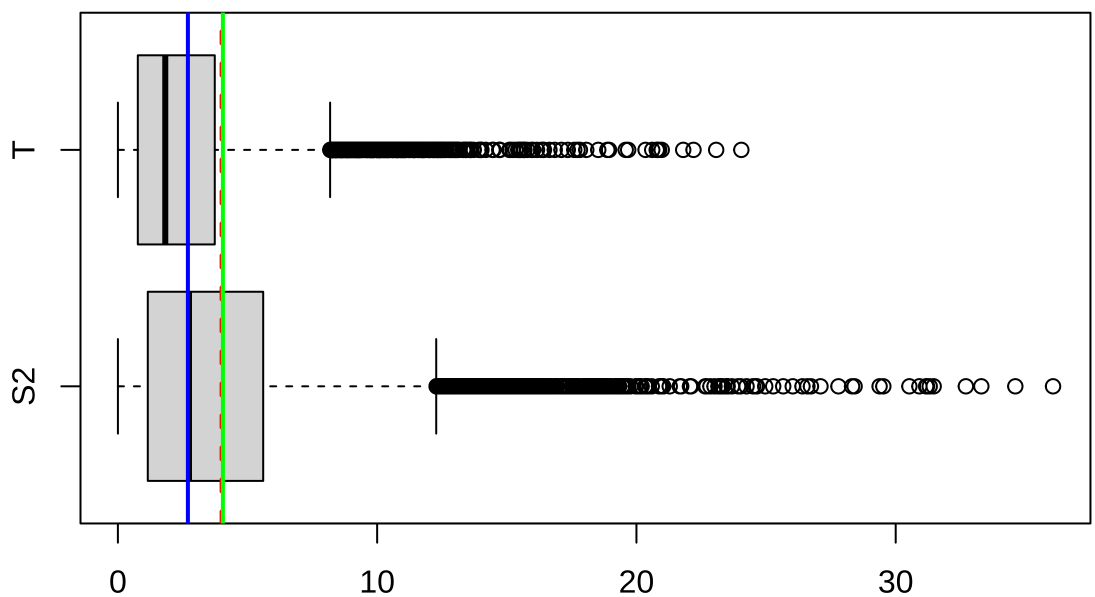
```
m <- 10000    # 重复估计次数为 10000
barS2 <- c()  # 存储不同 sigma 参数下，估计量 S2 的平均值
barT <- c()   # 存储不同 sigma 参数下，估计量 T 的平均值
mseS2 <- c()  # 存储不同 sigma 参数下，估计量 S2 的均方误差
mseT <- c()   # 存储不同 sigma 参数下，估计量 T 的均方误差
# 通过 for 循环遍历不同 sigma 的情形
for (trueSigma in c(0.5, 0.8, 1,2,5)) {
  tmpX <- matrix(rnorm(3 * m, 0, trueSigma), m, 3) # 生成 3*m 个观测值，并排列成 m
 ↪  行 3 列的矩阵
  tmpS2 <- apply(tmpX, 1, var) # 使用 apply 函数对于矩阵的每一行进行操作
  tmpT <- 2/3 * tmpS2           # 通过 S2 计算 T
  barS2 <- c(barS2, mean(tmpS2))  # 将 S2 的均值存储到向量 barS2 中
  barT <- c(barT, mean(tmpT))     # 将 T 的均值存储到向量 barT 中
  mseS2 <- c(mseS2, mean((tmpS2 - trueSigma^2)^2)) # 将 S2 的均方误差存储到向量
 ↪  mseS2 中
  mseT <- c(mseT, mean((tmpT - trueSigma^2)^2))   # 将 T 的均方误差存储到向量
 ↪  mseT 中
}
myResults <- c(barS2, barT, mseS2, mseT) # 将结果拼接成一个长向量
myResults <- matrix(myResults, 5,4)    # 将结果向量转换成一个 5 行 4 列的矩阵
# 将结果转换成一个数据框，其行名为 mean(S2), mean(T), mse(S2), mse(T)
myResults <- data.frame(t(myResults),
                        row.names = c('mean(S2)', 'mean(T)', 'mse(S2)', 'mse(T)'))
names(myResults) <- c(0.25,0.64,1,4,25) # 将数据框的列名改为 0.25,0.64,1,4,25
round(myResults,3)  # 将结果保留 3 位小数
```

```
##           0.25  0.64     1      4      25
## mean(S2) 0.246 0.636 0.995  4.004  25.281
## mean(T)  0.164 0.424 0.664  2.669  16.854
## mse(S2)  0.060 0.411 0.990 16.237 642.235
## mse(T)   0.034 0.230 0.553  8.987 351.762
```

2. 以 $\mu = 2, \sigma^2 = 4$ 为例，通过图像来对比两种估计的效果

```
m <- 3      # 样本量
n <- 10000  # 重复估计次数
hatPara <- data.frame(S2 = rep(0,n), T = rep(0,n)) # 构建一个 n 行的数据框用于存
 ↪  储重复估计的结果
```

```r
for (i in 1:n) {
  tmpSample <- rnorm(m, mean=0, sd=2) # 生成估计样本
  hatPara$S2[i] <- var(tmpSample)     # 计算 S2 并赋给数据框 S2 这一列的 i 行
  hatPara$T[i] <- var(tmpSample) * (m-1)/m # 计算 T 并赋给数据框 T 这一列的 i 行
}
boxplot(hatPara, horizontal=T)  # 绘制箱型图
abline(v=4,col="red", lty=2, lwd=2) # 绘制实际的参数（方差）
abline(v=mean(hatPara$S2), col="green", lwd=2) # 绘制 S2 的均值
abline(v=mean(hatPara$T), col="blue", lwd=2)   # 绘制 T 的均值
```



11.2 极大似然估计 (maximum likelihood estimation)

案例 11.2.1 已知一枚硬币出现正面的概率 p 或为 0.1 或为 0.9，若掷这枚硬币 1 次，如何根据实验结果判定 p? 于是存在两种准则

- **准则一**：判断结论使得样本数据出现的概率大。即出现正面，判断 $p = 0.9$；否则，判断 $p = 0.1$
- **准则二**：判断结论使得样本数据出现的概率小。即出现正面，判断 $p = 0.1$；否则，判断 $p = 0.9$

```r
p <- 0.1   # 定真实参数为 0.1
n <- 10000 # 重复观测 1000 次
# 定义一个数据框，用于存储在不同观测次数下使用不同准则估计的结果
myR <- data.frame("rule1" = rep(0,n), "rule2" = rep(0,n))
# 利用 for 循环重复观测 1000 次
for (i in 1:n) {
```

```
  x <- rbinom(1, size = 1, prob = p)  # 根据总体生成 1 个观测值
  myR$rule1[i] = ifelse(x == 1, 0.9, 0.1) # 根据准则一若 x 的取值为 1, 则判断 p=0.9,
↪  否则为 0.1
  myR$rule2[i] = ifelse(x == 1, 0.1, 0.9) # 根据准则一若 x 的取值为 1, 则判断 p=0.1,
↪  否则为 0.9
}
sum(myR$rule1 == p) / n # 计算估计正确的频率
```

```
## [1] 0.9013
```

```
sum(myR$rule2 == p) / n
```

```
## [1] 0.0987
```

11.2.1 （对数）似然函数

用极大似然思想估计参数的方法称为**极大似然方法**，用极大似然方法获得的 a 的估计称为**极大似然估计**，或**极大似然估计量**。一般地，总体变量 X 的重复观测样本 $X_1, \dots, X_n$

$$L(a) \triangleq p(x_1) \times p(x_2) \times \cdots \times p(x_n) \tag{11.3}$$

其中

$$p(x_i) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i), & 若X为离散型随机变量 \\ f(x_i), & 若X的密度函数为f(x) \end{cases}$$

因此使得 $L(a)$ 达到最大的 $\hat{a}$ 是 a 的极大似然估计，称 $L(a)$ 为**似然函数**。

由于对数函数是严格增函数，因此**对数似然函数**

$$l(a) \triangleq \log L(a) = \sum_{i=1}^{n} \log(p(x_i)) \tag{11.4}$$

的极大值点也是参数 a 的极大似然估计。

11.2.1 R 语言的实现

1. 定义对数似然函数 `myL(a,x)`，

- `a` 为我们估计的参数
- `x` 为我们的观测值

2. 然后通过优化函数 `optimize(f, x, interval, maximum)` 获取 `myL()` 的最大值点，即似然估计结果。

- `f` 对应于似然函数 `myL(a,x)`
- `x` 是我们的观测值，对应于 `myL(a,x)` 中的 `x`
- `interval` 是估计参数的取值范围
- `maximum` 由于我们希望似然函数能取到最大，因此，此处 `maximum = TRUE`

案例 5.2 假设总体 $\xi \sim B(10000, p)$，其中总体参数 $p \in [0,1]$，若 X 为总体的容量为 1 的观测样本。

1. 根据二项分布的密度函数

$$p(k) = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{10000}{k} p^k (1-p)^{10000-k}$$

因此，观测样本 X 出现的概率：

$$\mathbb{P}(\xi = X) = \binom{10000}{X} p^X (1-p)^{10000-X}$$

2. 由于此处仅有一个观测值，根据极大似然函数的定义：

$$L(p, X) = \binom{10000}{X} p^X (1-p)^{10000-X}$$

3. 因此，其对数似然函数：

$$\begin{aligned} l(p, X) &= \binom{10000}{X} + X \log p + (10000 - X) \log(1-p) \\ &\propto X \log p + (10000 - X) \log(1-p) \end{aligned}$$

```r
# 根据上面的对数似然函数，定义 myL
myL <- function(p, x){
  return (x * log(p) + (10000-x) * log(1-p))
}
y <- rbinom(1, 10000, 0.2) # 生成 1 个观测值 y
hatP <- optimize(f = myL, x = y, interval = c(0,1), maximum = T) # 找出最大值点
hatP[[1]] # 返回最大值
```

```
## [1] 0.2025155
```

例 5.1.4 下表是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的独立同分布样本数据，求 λ 的极大似然估计：

表 5-4 泊松分布样本数据

4	5	1	4	4	2	1	5	1	2	3	0	4	2	3	5	5	5	4	2
1	2	3	1	3	1	2	0	0	1	6	4	1	0	2	1	3	5	4	7

1. 根据泊松分布的密度函数：

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

所以样本 X 出现的概率为

$$\mathbb{P}(\xi = X) = \frac{\lambda^X}{X!} e^{-\lambda}$$

2. 根据似然函数的定义：

$$L(\lambda, X) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda} = (e^{-\lambda})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}$$

3. 于是有对数似然函数

$$\begin{aligned} l(\lambda, X) &= -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} [X_i \log \lambda - \log(X_i!)] \\ &\propto -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} X_i \log \lambda \end{aligned}$$

```r
y = c(4,5,1,4,4,2,1,5,1,2,3,0,4,2,3,5,5,5,4,2,
      1,2,3,1,3,1,2,0,0,1,6,4,1,0,2,1,3,5,4,7) # 观测数据 y
# 根据上面的对数似然函数，定义 tmpF
tmpF <- function(lambda, x){
  n <- length(x)
  return (-n * lambda + log(lambda) * sum(x))
}
# 使用 optimize 找出 tmpF 中的最大值点
hatLambda <- optimize(
  f = tmpF,
  x = y,
  interval = c(0,100),
  maximum=T
)
hatLambda[[1]] # 返回最大值点
```

```
## [1] 2.725003
```

例 5.1.5 下表来自于正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的独立同分布样本数据，求参数 σ 的极大似然估计

表 5-5 来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的独立同分布样本数据

3.14	0.72	−1.30	−0.10	1.35	1.36	−0.42	−4.93	1.17	0.47
2.23	−2.28	0.76	−0.74	4.49	−3.62	−1.58	−1.75	0.46	1.41

1. 根据 $N(0, \sigma^2)$ 的密度函数：

$$\varphi_{0,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

则样本 X 出现的概率密度为:

$$\varphi_{0,\sigma}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right)$$

2. 根据似然函数定义，对于 n 个观测值 $X_1, \dots, X_n$，似然函数

$$\begin{aligned} L(\sigma, X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_1^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_2^2}{2\sigma^2}\right) \cdots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_n^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

3. 因此，其对数似然函数为:

$$\begin{aligned} l(\sigma, X) &= -n\log\sigma - \frac{n}{2}\log 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2} \\ &\propto -n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{aligned}$$

```r
y <- c(3.14,0.72,-1.30,-0.10,1.35,1.36,-0.42,-4.93,1.17,0.47,
       2.23,-2.28,0.76,-0.74,4.49,-3.62,-1.58,-1.75,0.46,1.41) # 生成观测数据 y
# 根据上面的对数似然函数定义 myF
myF <- function(sigma, x){
  n <- length(x)
  return(- n * log(sigma) - 1/(2*sigma^2)*sum(x^2))
}
# 使用 optimize 找出使得似然函数最大的 sigma
hatSigma <- optimize(
  f = myF,
  x = y,
  interval = c(0,1000),
  maximum = T
)
hatSigma[[1]] # 返回最大值点
```

```
## [1] 2.169571
```

例 5.1.6 若下表是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的独立同分布 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 的观测数据，求参数 $a = (\mu, \sigma)$ 的极大似然估计

表 5-5 来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的独立同分布样本数据

3.14	0.72	−1.30	−0.10	1.35	1.36	−0.42	−4.93	1.17	0.47
2.23	−2.28	0.76	−0.74	4.49	−3.62	−1.58	−1.75	0.46	1.41

1. $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数：

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

因此，样本 X 出现的概率密度为:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

2. 根据似然函数的定义，对于重复随机观测 $X_1,X_2,\dots,X_n$，似然函数为：

$$\begin{aligned}L(a,X)&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(X_2-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\cdots\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(X_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\\&=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\end{aligned}$$

3. 因此，其对数似然函数：

$$\begin{aligned}l(a,X)&=-n\log\sigma-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\\&\propto -n\log\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\end{aligned}$$

```r
y <- c(3.14,0.72,-1.30,-0.10,1.35,1.36,-0.42,-4.93,1.17,0.47,
       2.23,-2.28,0.76,-0.74,4.49,-3.62,-1.58,-1.75,0.46,1.41) # 生成观测值 y
# 定义函数 tmpF，由于 optim 函数默认优化为最小值优化，所以需要对似然函数取其相反数
tmpF <- function(a, x){
  n <- length(x)
  mu <- a[1]
  sigma <- a[2]
  f <- -n*log(sigma) - sum((x - mu)^2)/(2*sigma^2)
  return(-f)
}

hatA <- optim(par=c(0,2), fn=tmpF, x=y) # 利用 optim 找出使得-l(a,X) 最小的 a
hatA[[1]]
```

```
## [1] 0.04190807 2.16903415
```

Questions

1. 将例 11.1.1中的总体分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 改为泊松分布 $P(3)$，其他条件不变，用随机模拟的方法比较 S^2 和 T 中哪一个估计总体方差的效果更好

2. 对于例 11.2.1实验，若硬币出现正面的概率 p 为 0.3 或 0.7，请通过随机模拟实验给出基于一次实验结果推断 p 是 0.3 还是 0.7 的好准则。
3. 已知 $X \sim B(10, 0.7)$，模拟生成 X 的重复观测数据 10000 个，用极大似然方法估计 X 的数学期望。