L12-假设检验

郑盼盼

2024-12-18

目录

12.1 假设检验基本原理

案例 如何检验（判断）一枚硬币是否均匀？设

$$X = \begin{cases} 1, & \text{掷出正面} \\ 0, & \text{掷出反面} \end{cases}$$

则 $X \sim B(1, \theta)$，据此提出假设：

$$H_0 : \theta = 0.5 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq 0.5$$

如何根据样本观测值 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 来判断如上的假设？

在根据样本对于假设进行检验时，存在如图1所示的四种情况。

假设检验的步骤：

1. 根据实际问题写出问题的原假设和备择假设
2. 给定显著性水平 α，通常为 $0.01, 0.05$ 等。
3. 由样本构造统计量，计算原假设成立的条件下，**不利于原假设**的 p-值。（即犯 I 类错误的可能性）

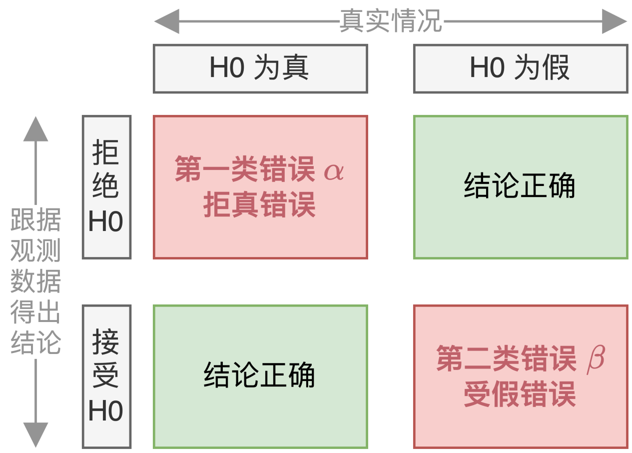


图 1: 假设检验的四种情形

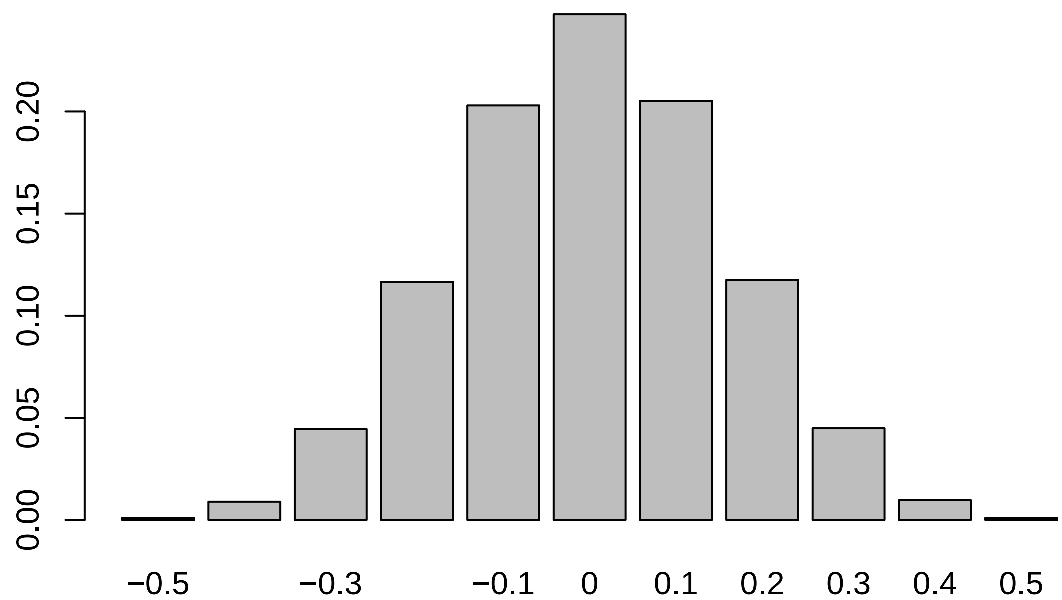
4. 若 p-值小于显著水平 α，则拒绝原假设，否则无理由拒绝原假设。(即当犯 I 类错误的可能性特别小时，即可拒绝原假设，接受备择假设)

例 12.1.1 观察一枚均匀硬币投掷 $10, 50, 100$ 次 $|\bar{X} - 0.5|$ 的分布

```
n = c(10, 50, 100)
m = 100000
# 10 次
x <- matrix(rbinom(m*n[1],1,0.5), m, n[1])
xBar <- apply(x, 1, mean)
y <- as.factor(xBar - 0.5)
u <- table(y)
v <- prop.table(u)
v
```

```
## y
##    -0.5    -0.4    -0.3    -0.2    -0.1       0     0.1     0.2     0.3     0.4
## 0.00105 0.00895 0.04451 0.11656 0.20296 0.24758 0.20520 0.11759 0.04489 0.00968
##     0.5
## 0.00103
```

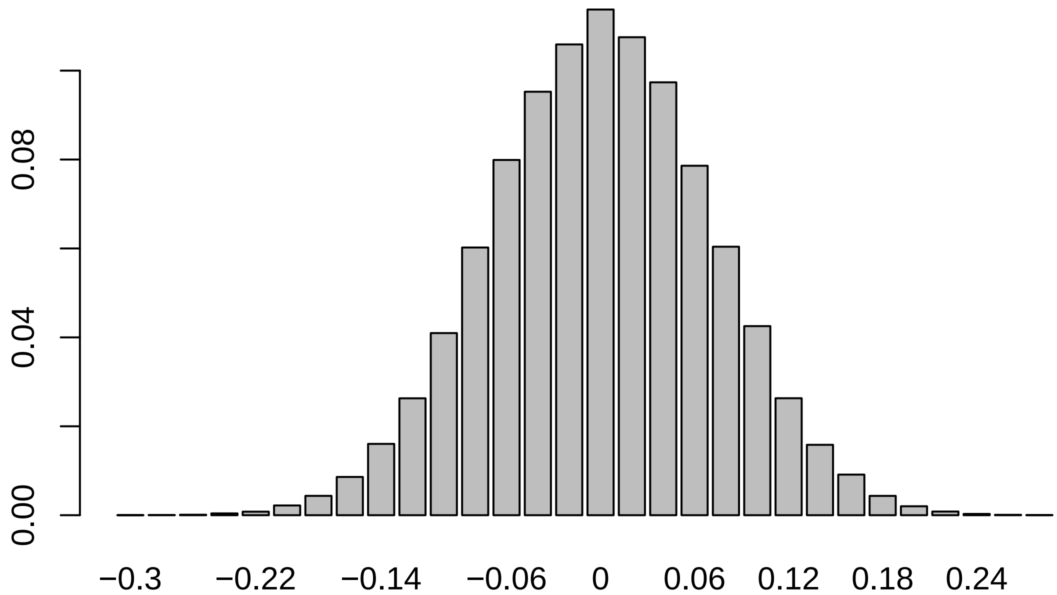
```
barplot(v)
```




```
# 50 次
x <- matrix(rbinom(m*n[2],1,0.5), m, n[2])
xBar <- apply(x, 1, mean)
y <- as.factor(xBar - 0.5)
u <- table(y)
v <- prop.table(u)
v
```

```
## y
##    -0.3   -0.28   -0.26   -0.24   -0.22    -0.2   -0.18   -0.16   -0.14   -0.12
## 0.00001 0.00005 0.00010 0.00040 0.00079 0.00219 0.00435 0.00860 0.01604 0.02629
##    -0.1   -0.08   -0.06   -0.04   -0.02       0    0.02    0.04    0.06    0.08
## 0.04096 0.06021 0.07990 0.09525 0.10589 0.11374 0.10751 0.09737 0.07860 0.06039
##     0.1    0.12    0.14    0.16    0.18     0.2    0.22    0.24    0.26    0.28
## 0.04253 0.02631 0.01583 0.00913 0.00434 0.00201 0.00082 0.00028 0.00008 0.00003
```

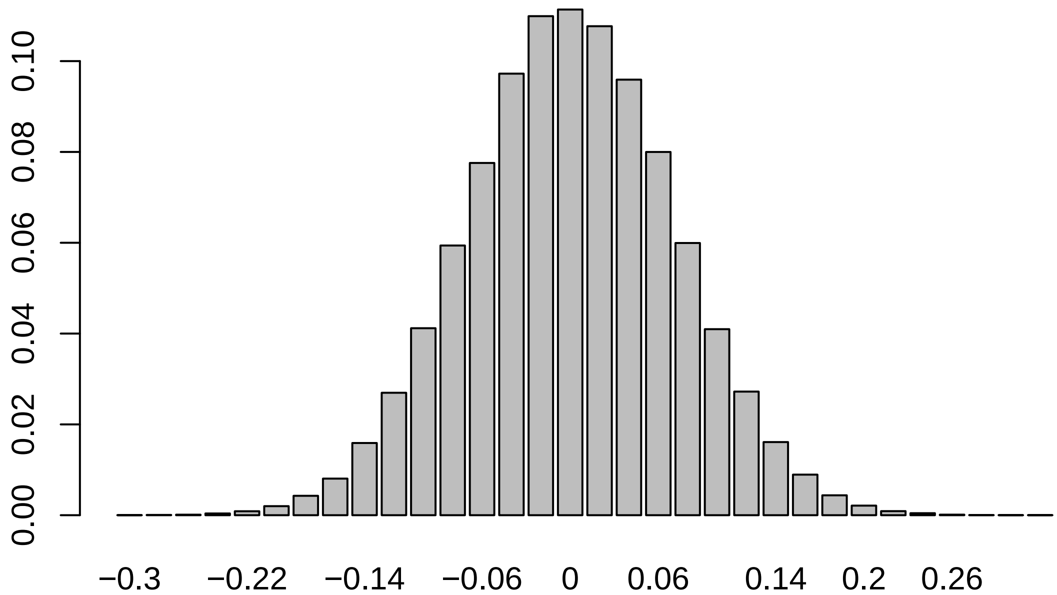
```
barplot(v)
```




```r
# 100 次
x <- matrix(rbinom(m*n[2],1,0.5), m, n[2])
xBar <- apply(x, 1, mean)
y <- as.factor(xBar - 0.5)
u <- table(y)
v <- prop.table(u)
v
```

```
## y
##    -0.3   -0.28   -0.26   -0.24   -0.22    -0.2   -0.18   -0.16   -0.14   -0.12
## 0.00001 0.00006 0.00011 0.00038 0.00087 0.00199 0.00427 0.00806 0.01590 0.02696
##    -0.1   -0.08   -0.06   -0.04   -0.02       0    0.02    0.04    0.06    0.08
## 0.04118 0.05939 0.07757 0.09724 0.10990 0.11136 0.10769 0.09592 0.07999 0.05994
##     0.1    0.12    0.14    0.16    0.18     0.2    0.22    0.24    0.26    0.28
## 0.04097 0.02722 0.01610 0.00893 0.00438 0.00211 0.00089 0.00044 0.00012 0.00003
##     0.3    0.32
## 0.00001 0.00001
```

```r
barplot(v)
```



例 12.1.2 设总体 $X \sim B(1,p)$，下表列出了总体容量为 30 的独立同分布样本的观测数据。考虑假设检验问题

$$H_0 : p \geq 0.8$$

若用样本均值作为检验统计量，计算 p 值，并在显著性水平 0.05 下给出检验结果。

$$30\bar{X} \sim B(30,p)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} < \bar{x}) &= \mathbb{P}(30\bar{X} < 30\bar{x}) \\ &= \sup_{0.8\leq p\leq 1}(\mathbb{P}_p(30\bar{X} \leq 30\bar{x}) - \mathbb{P}_p(30\bar{X} = 30\bar{x}))\end{aligned}$$

```r
x <- c(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,
       0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1)
tmpF <- function(p,x){
  return(pbinom(sum(x), 30, p) - dbinom(sum(x), 30, p))
}
optimize(tmpF, c(0.8,1), x=x, maximum=TRUE)$objective
```

```
## [1] 0.009474023
```

12.2 假设检验

12.2.1 方差已知-z 检验

Trick z 检验

1. 根据题意确定原假设 H_0 和备择假设 H_1，原假设 H_0 存在以下两种情形：
   - **双边假设**

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 \tag{8.1}$$

   - **单边假设**

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0 \tag{8.2}$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0 \tag{8.3}$$

2. 根据**中心极限定理**可知，对于来自总体（总体均值为 μ，方差为 σ^2）的重复观测样本 $X_1, \dots, X_n$，该样本的均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 其服从分布：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

   所以，我们可以对 $\bar{X}$ 进行标准化：

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

3. 我们可以根据 H_0 成立条件下样本均值 $\bar{X}$ 的分布进行标准化，计算 p-值：
   - 对于原假设 (8.1) p-值为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu_0| > |\bar{x} - \mu_0|) &= \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(-\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= 2\Phi\left(-\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

   - 对于原假设 (8.2) p-值为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{X} - \mu_0 < \bar{x} - \mu_0) &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

   - 对于原假设 (8.3) p-值为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{X} - \mu_0 > \bar{x} - \mu_0) &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

例 5.3.1 某种子公司在销售胡萝卜种子的说明书中声称：用此种胡萝卜的平均长度为 11.5 cm。某人种植这种胡萝卜后得到的胡萝卜长度数据见下表，若胡萝卜长度的标准差为 1.15 cm，问：在显著性水平 0.05 下，可接受该种子公司关于胡萝卜平均长度的说明吗?

表 5-10 40 根胡萝卜长度的数据 (单位: cm)

11.50	10.08	12.14	12.33	10.68	13.37	13.37
11.79	12.83	11.32	14.51	11.84	12.13	13.23
12.34	10.46	12.82	13.87	11.20	12.99	13.44
11.54	12.79	12.94	12.82	13.48	12.77	13.37
11.96	12.38	12.20	12.07	11.89	11.04	10.17
10.34	12.66	10.62	11.98	11.82		

- **答** 已知胡萝卜的长度 $X \sim N(\mu, 1.15^2)$

$$H_0 : \mu = 11.5$$

由于总体为正态分布，且方差已知，若原假设 H_0 成立，有:

$$\bar{X} - 11.5 \sim N\left(0, \frac{1.15^2}{40}\right)$$

我们可以计算 p 值:

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 11.5| > |\bar{x} - 11.5|) = 2\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 11.5}{1.15/\sqrt{n}} < -\frac{|\bar{x} - 11.5|}{11.15/\sqrt{n}}\right)$$

```r
x <- c(11.50,10.08,12.14,12.33,10.68,13.37,13.37,
       11.79,12.83,11.32,14.51,11.84,12.13,13.23,
       12.34,10.46,12.82,13.87,11.20,12.99,13.44,
       11.54,12.79,12.94,12.82,13.48,12.77,13.37,
       11.96,12.38,12.20,12.07,11.89,11.04,10.17,
       10.34,12.66,10.62,11.98,11.82)
n <- length(x)
sigma <- 1.15
mu <- 11.5
p <- 2 * pnorm(-abs(mean(x) - 11.5)/(1.15/sqrt(n)))
p
```

```
## [1] 0.0001966838
```

12.2.2 方差未知

当方差未知时，我们可以使用样本方差 S^2 作为总体方差 σ^2 的无偏估计，但此时，标准化后的随机变量不再服从标准正态分布，而是服从 t 分布：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

因此，当方差未知时，我们一般使用 t 检验来对原假设进行检验。可根据原假设，将假设检验分成两类：

1. **双边假设**

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

2. **单边假设**

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$
$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

```r
x <- c(11.50,10.08,12.14,12.33,10.68,13.37,13.37,
       11.79,12.83,11.32,14.51,11.84,12.13,13.23,
       12.34,10.46,12.82,13.87,11.20,12.99,13.44,
       11.54,12.79,12.94,12.82,13.48,12.77,13.37,
       11.96,12.38,12.20,12.07,11.89,11.04,10.17,
       10.34,12.66,10.62,11.98,11.82)

# H0: mu == mu0
h <- t.test(x, mu=11.5, alternative = "two.side")
h$p.value
```

```
## [1] 0.00026216
```

```r
# H0: mu <= mu0
h <- t.test(x, mu=11.5, alternative = "greater")
h$p.value
```

```
## [1] 0.00013108
```

```r
# H0: mu >= mu0
h <- t.test(x, mu=11.5, alternative = "less")
h$p.value
```

```
## [1] 0.9998689
```

12.2.3 双正态总体均值的检验

考虑总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，用

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

表示 X 的重复观测样本；用

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

表示 Y 的重复观测样本。

类似的，有假设检验问题：1. 双边假设检验问题

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

2. 单边假设检验问题

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$
$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$$

例 下表分别来自甲班和乙班学生的数学成绩样本数据，试对比分析两个班级学生的平均数学成绩

表 5-11 甲班学生的数学成绩数据 (单位：分)

45	54	41	45	80	60	49	44	55	87	73	64	35	89	85	55	84	80	67	70
84	76	51	56	83	83	45	58	46	65	0	76	79	75	86	62	43	57	75	47

图 2: 甲班成绩

表 5-12 乙班学生的数学成绩数据 (单位：分)

45	46	78	45	47	83	67	36	80	55	45	0	75	68	53	85	44	51	67	64
73	62	65	72	84	75	58	56	55	38	83	73	67	72	76	67	83	43	57	60

图 3: 乙班成绩

```r
x <- c(45,54,41,45,80,60,49,44,55,87,73,64,35,89,85,55,84,80,67,70,
       84,76,51,56,83,83,45,58,46,65,0,76,79,75,86,62,43,57,75,47) # 甲班成绩
y <- c(45,46,78,45,47,83,67,36,80,55,45,0,75,68,53,85,44,51,67,64,
       73,62,65,72,84,75,58,56,55,38,83,73,67,72,76,67,83,43,57,60) # 乙班成绩
```

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$

```
h <- t.test(x,y, alternative = "two.side")
h$p.value
```

```
## [1] 0.7290064
```

2. $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$

```
h <- t.test(x,y, alternative = "less")
h$p.value
```

```
## [1] 0.6354968
```

3. $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$

```
h <- t.test(x,y, alternative = "greater")
h$p.value
```

```
## [1] 0.3645032
```

Questions

1. 在显著水平 0.10 下，利用例 5.3.1中的数据回答假设检验问题

$$H_0 : \mu = 12.10$$

2. 在显著水平 0.10 下，利用例 5.3.1中的数据回答假设检验问题

$$H_0 : \mu = 12.25$$

3. 问题：1. 和 2. 的结论矛盾吗？引起这种矛盾的原因是什么？

4. 对于例 5.3.1的背景问题，如果关心的是用户是否满意胡萝卜的平均长度问题，可以使用假设检验问题

$$H_0 : \mu \leq 12.18$$

解答吗？这样解答的后果是什么？

5. 请解释下列代码的功能

```
m <- 10000
n <- 30
tmpResults <- 1:m
for (i in 1:m){
```

```
  x <- rnorm(n, 12, 1.15)
  h <- t.test(x, mu=12, alternative = "two.side")
  tmpResults[i] <- ifelse(h$p.value < 0.05, 1, 0)
}
mean(tmpResults)
```

6. 请解释多次运行 5. 中程序代码所得的结果都在 0.05 的附近