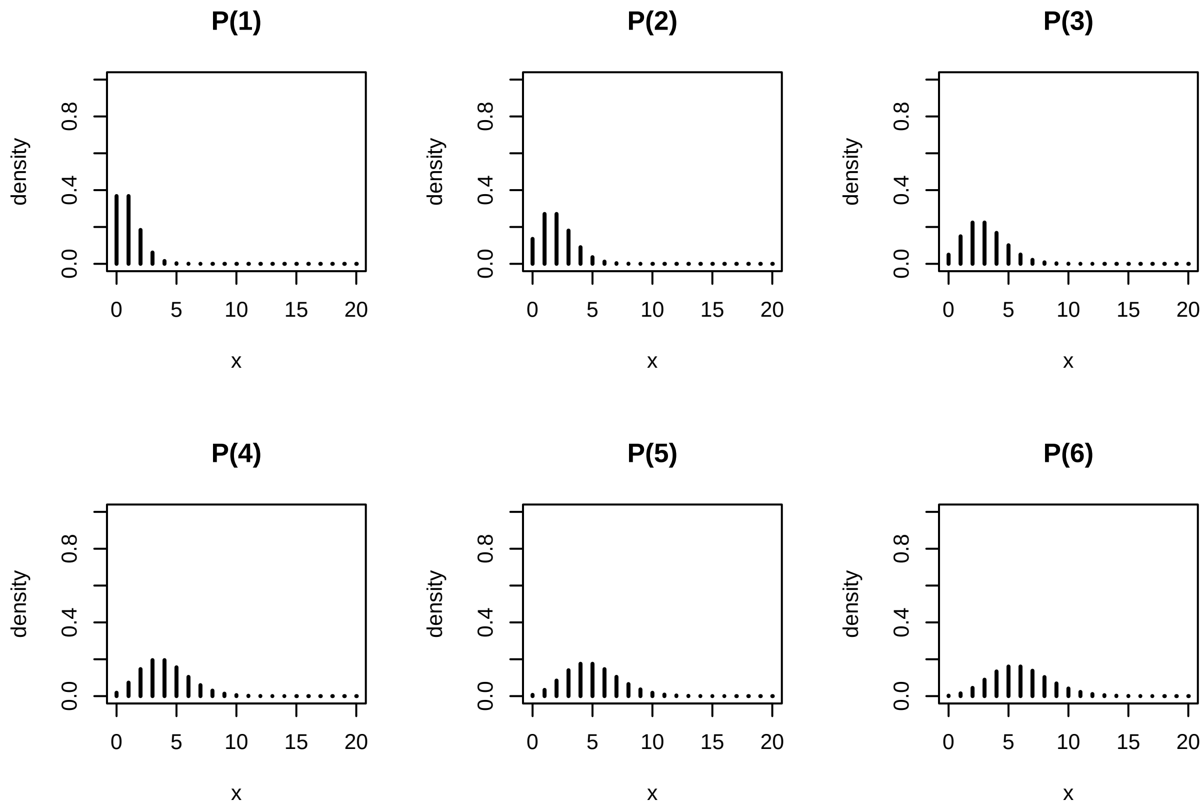
E5

郑盼盼

2024-10-19

1. 绘制 $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$ 的在区间 $[0, 20]$ 范围上的密度函数图像，总结泊松分布的密度图像随着参数 λ 增加的变化规律。

```r
x <- 0:20 # 根据区间 [0,20] 定义一个向量 x=0:20，之后计算泊松分布在该向量每个点
↪ 上的密度
par(mfrow=c(2,3)) # 设置多张图的布局，此处需要绘制 6 张图，因此选择，2 行 3 列的
↪ 布局
# 遍历 1:6 并赋给循环变量 lambda
for (lambda in 1:6) {
  y <- dpois(x, lambda) # 计算 P(lambda) 在 {0,1,...,20} 点上的密度并赋给 y
  plot(x,y,     # 以 x 为横坐标，y 为纵坐标绘制图像
       type="h",# 设置图的类型为“直方图状的垂直线”，即每个点从 x 轴引出一条垂
        ↪ 直线到数据点
       lwd=2,   # 设置线的宽度为 2，lwd: line's width
       xlim=c(0,20), # 设置 x 轴的范围为 [0,20]，xlim: x's limitations
       ylim=c(0,1),  # 设置 y 轴的范围为 [0,1]，ylim: y's limitations
       xlab="x",   # 设置 x 轴的标签为"x"
       ylab="density", # 设置 y 轴的标签为"density"
       main=paste("P(", lambda, ")", sep="")) # 设置图的标题为 P(lambda)
}
```



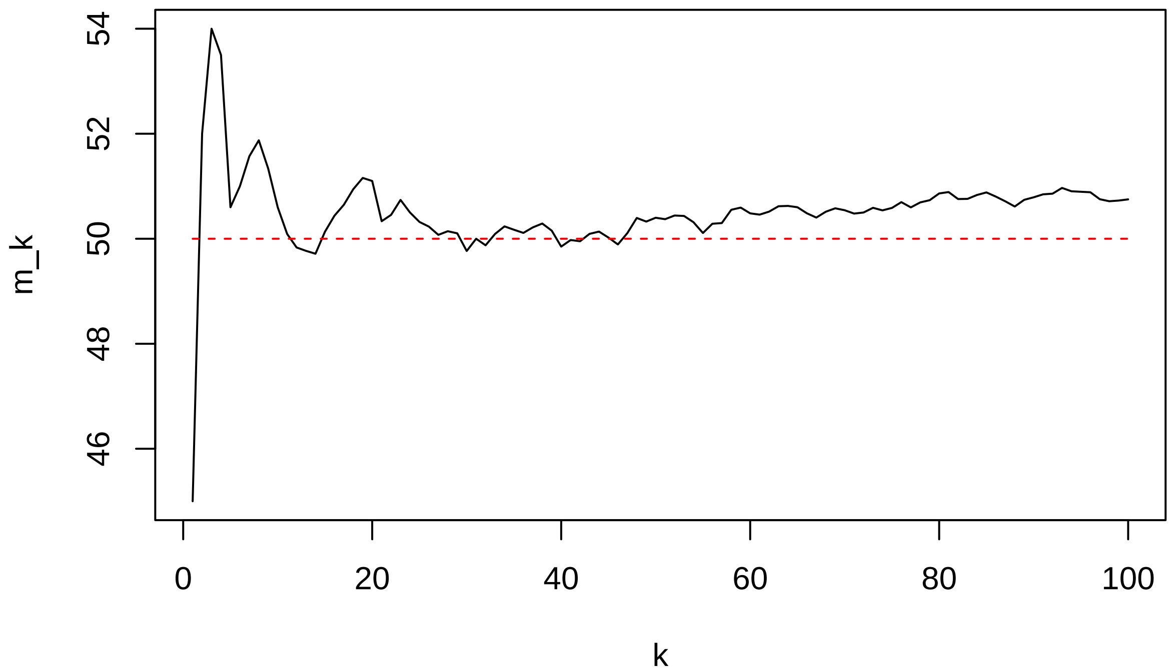
2. 已知 $\xi \sim P(50)$，模拟 ξ 的 100 次重复观测数据。用 m_k 表示这些数据中的前 k 个数据的算术平均值，绘制依次连接点

$$(1, m_1), (2, m_2), \dots, (100, m_{100})$$

的折线图，观察随着横坐标的增加折线的变化趋势，解释其中的原因。

```
set.seed(1) # 设置随机数生成器的种子的函数。使随机数生成具有可重复性。设定种子后，每次运行同样的随机过程（如生成随机数、随机采样等）都会得到相同的结果。
m <- rpois(100,50)  # 生成 100 个服从 P(50) 的随机数
mean_k <- c()       # 生成一个空向量命名为 mean_k 用于存储 m 中前 k 个元素的均值
# 遍历 1 到 100 的整数，循环变量为 k
for (k in 1:100) {
  mean_k <- c(mean_k, mean(m[1:k])) # 计算 m 中前 k 个元素的均值并添加为 mean_k 的最后一个元素
}
plot(1:100, mean_k, # 以 1:100 为横坐标，mean_k 为纵坐标，绘制图像
     type="l",   # 设置图的类型为折线图; l: lines
     xlab="k",   # 设置 x 轴的标签为"k"
     ylab="m_k"  # 设置 y 轴的标签为"m_k"
)
# 绘制 P(50) 的数学期望
```

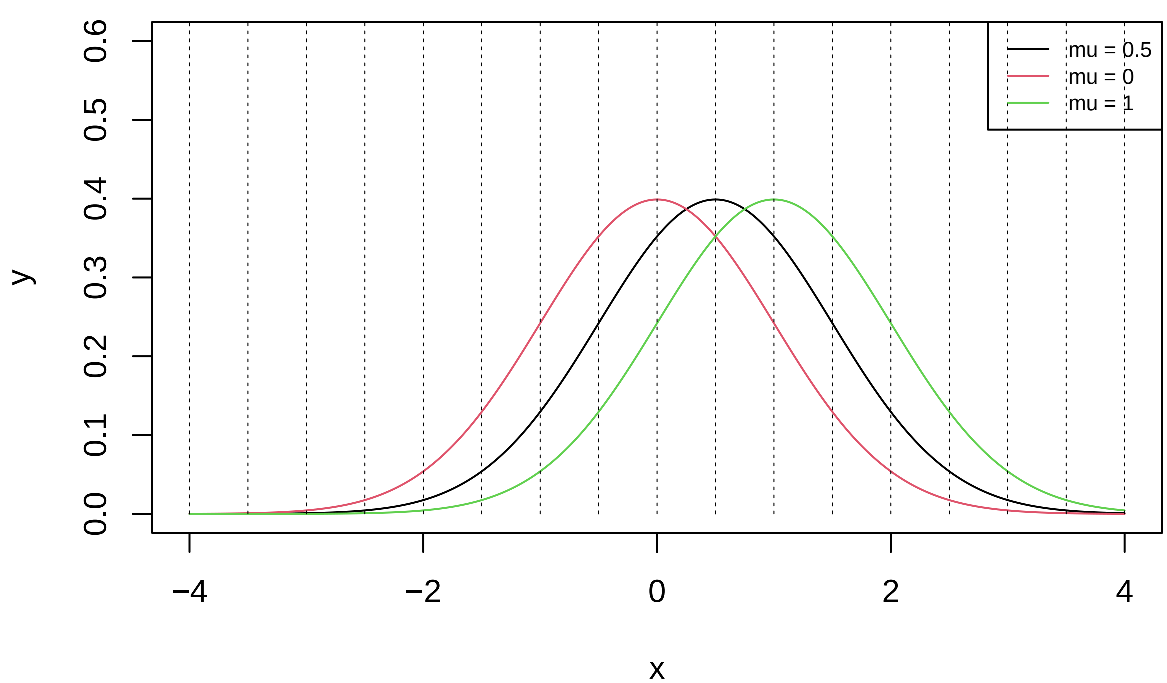
```r
lines(c(1,100), c(50,50),
      lty=2,  # 设置线的类型为虚线
      col="red" # 设置线的颜色为红色
)
```



3. 在同一直角坐标系内，用不同颜色绘制 $N(0.5,1), N(0,1)$ 和 $N(1,1)$ 的密度函数曲线（横坐标限定在 $[-4,4]$ 内），说明正态分布密度函数的峰值位置与其数学期望之间的关系。

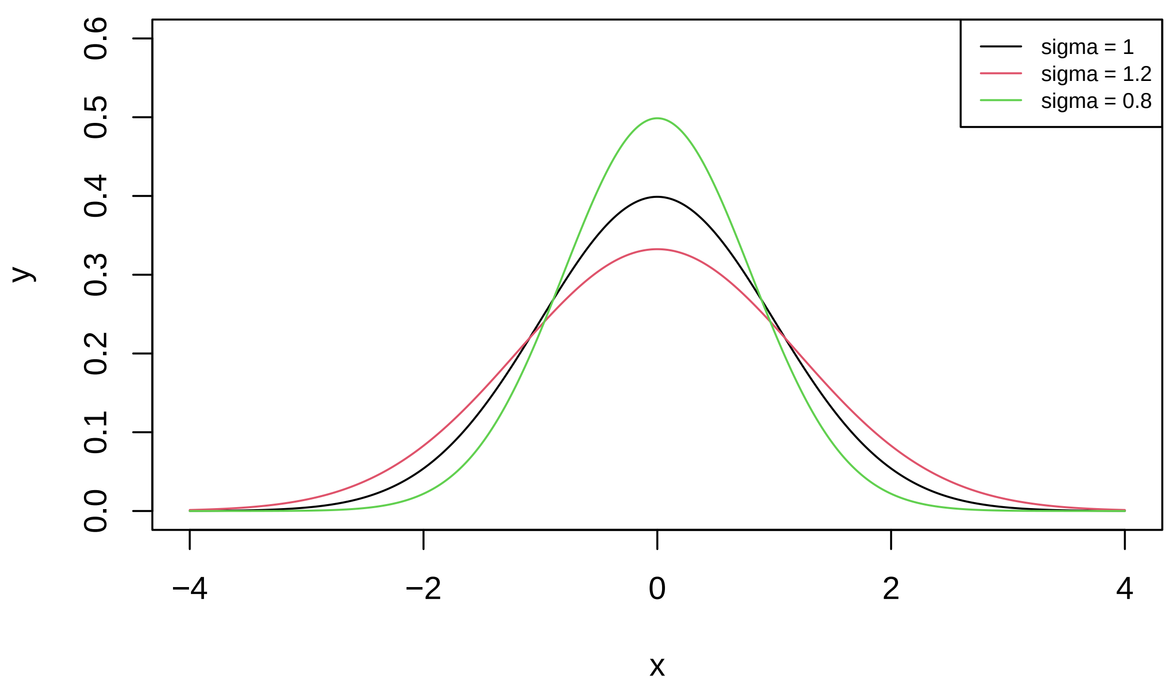
```r
mu <- c(0.5, 0, 1)      # 将不同的参数 mu 定义为一个向量 mu
x <- seq(-4,4,by=1e-3)  # 根据横坐标的范围定义一个向量 x 其为从-4 到 4 的等差数
↪ 列，公差为 0.001
y <- dnorm(x, mu[1], 1) # 计算 N(mu[1], 1) 在每个 x 点的密度
plot(x, y,     # 以 x 为横坐标，y 为纵坐标绘制图像
     type="l", # 图的类型为折线图；l: lines
     col=1,    # 线的颜色为 1（1，2，3 在 R 中有已经定义好的不同颜色）
     lwd=1,    # 线的宽度 1；lwd: lines' width
     xlim=c(-4,4), # 设置 x 轴的范围为-4 到 4
     ylim=c(0,0.6) # 设置 y 轴的范围为 0 到 0.6
)
# 使用 for 循环添加在 mu[2], mu[3] 为参数时，正态分布的概率密度图像
for(i in c(2,3)){
  y <- dnorm(x, mu[i], 1) # 计算 N(mu[i],1) 在 x 点的密度
  lines(x,y,    # 以 x 为横轴，y 为纵轴绘制折线图
```

```
       col=i,  # 设置线的颜色为 i
       lwd=1   # 设置线的宽度为 1
  )
}
# 使用 for 循环添加垂直于 x 轴的虚线，方便检查密度函数图像峰的位置
for (i in seq(-4,4,by=.5)){
  lines(c(i), c(10),
        type="h",
        lwd=.5,
        lty=2)
}
# 添加图例，注释不同颜色对应的参数值
legend("topright", # 设置图例的位置在右上角
       legend = paste("mu =",mu), # 图例的内容为"mu=i"
       col = 1:3,  # 对应的颜色为 1:3
       lty=rep(1,3), # 对应的线形为均为 1（实线）
       cex=0.7, # 设置图例的大小
       )
```



4. 在同一直角坐标系内，用不同颜色绘制 $N(0,1), N(0,1.44), N(0,0.64)$ 的密度函数曲线（横坐标限定在 $[-4,4]$ 内），说明正态分布密度函数的峰值陡峭程度与其方差之间的关系。

```r
# 整体类似于上面的代码，只是从变化 mu 变成了变化 sigma
sigma <- c(1, 1.2, 0.8)
x <- seq(-4,4,by=1e-3)
y <- dnorm(x, 0, sigma[1])
plot(x, y,
     col=1,
     type="l",
     lwd=1,
     xlim=c(-4,4),
     ylim=c(0,0.6))
for(i in c(2,3)){
  y <- dnorm(x, 0, sigma[i])
  lines(x,y,
       col=i,
       lwd=1)
}
legend("topright",
       legend = paste("sigma =",sigma),
       col = 1:3,
       lty=rep(1,3),
       cex=0.7,
       )
```



5. 利用 R 程序代码计算 $N(0,9)$ 的数学期望和方差

- **数学期望**-根据连续型随机变量数学期望的定义，若已知连续性随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$，则其数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt$$

根据题意，我们需要计算：

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \varphi_{0,3}(t)\, dt$$

可通过如下 R 程序代码计算：

```r
# 将我们需要积分的函数 g(x) = x * f(x) 封装成函数 g
g <- function(x){
  return(x * dnorm(x, 0, 3)) # 返回 x 和 N(0,3) 在 x 点概率密度的乘积
}
mean_norm <- integrate(g, -Inf, Inf) # 对函数 g 进行积分，上下限均为无穷
mean_norm
```

```
## 0 with absolute error < 0
```

- **方差**：根据连续型随机变量方差的定义：若随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则其方差为：

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(X)]^2 \cdot f(t)\, dt$$

根据题意可得，我们需要计算定积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-0)^2 \cdot \varphi_{0,3}(t)\, dt$$

可通过如下 R 程序代码实现：

```r
# 使用匿名函数的方式进行积分:
## function(x) (x-0)**2 * dnorm(x,0,3) 对应我们的被积函数
var_norm <- integrate(function(x) (x - 0) ** 2 * dnorm(x, 0, 3), -Inf, Inf)
var_norm
```

```
## 9 with absolute error < 1.9e-05
```