复习

统计学的定义及内涵

研究未知现象流程图

收集数据的方法（观测与实验）

随机现象与不确定现象

复杂未知现象研究团队的效率

统计学、数学、概率论、统计软件

统计学导论B

第二章 概率

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

2.1

随机现象及基本概念

1651年的夏天，法国数学家、物理学家布莱瑟·帕斯卡(Blaise Pascul,1623—1662)在前往浦挨托镇的旅行途中，偶然遇到了一位名叫梅雷（又译梅勒，Chevalier Mere）的贵族公子哥儿，他是一位赌场的好手。为了消磨旅途的寂寞，他同帕斯卡谈起了他曾经在赌博中遇到的问题，这是一个十分有趣的“分赌注”的问题。

梅雷说有一次他和赌友掷骰子时各押32个金币的赌注，双方约定如果先掷出三次6点梅雷获胜，如果先掷出三次4点，则对方获胜。当掷出两次6点，一次4点时，梅雷因有事赌博只好中断。剩下的问题是两人如何分这64个金币，他俩因这个问题产生了争执。

赌友说：他要再碰上两次4点，或梅雷要再碰上一次6点就算赢，所以他有权分得梅雷分得的一半，即梅雷分64个金币的2/3，自己分64个金币的1/3。

梅雷则认为，应以未来继续赌博获胜的**可能性**，作为分账依据：

如果下一次掷出6点，自己获胜，能得到全部64个；如果掷出了4点，两人此时比分相同，应平分赌资，他也还可以得1/2，即32个金币。其他情况重来。因此，无论上述哪种情况发生，他至少能得到1/2，也即32个金币。

至于剩下的另一半，两个人的可能性相同，所以应该平分，也即他应再分16个金币（1/4）。

所以他应该分得64个金币的3/4（1/2+1/4），48枚金币；赌友只能分得64个金币的1/4，16枚金币。

两人到底谁算得对呢?

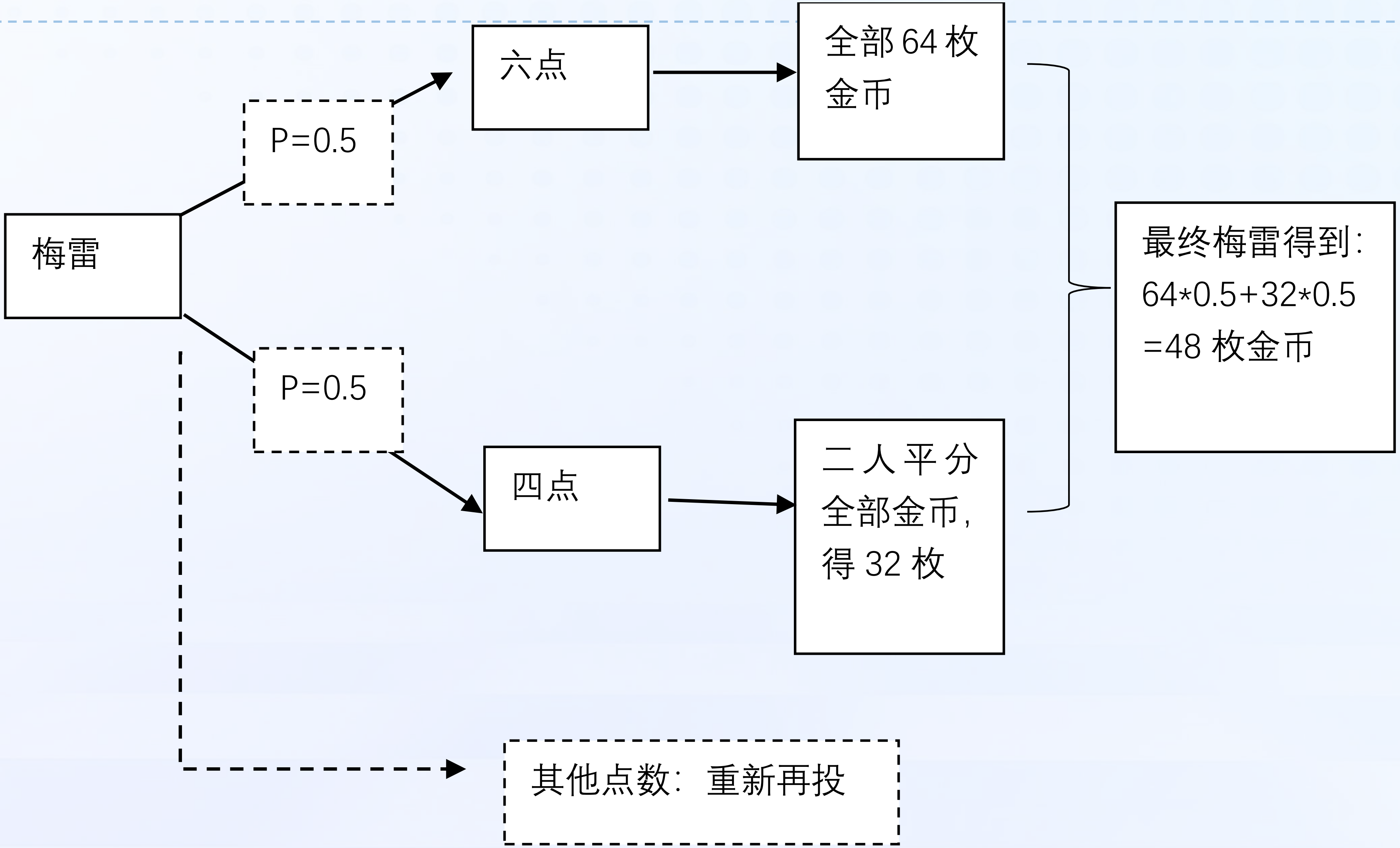
布莱瑟·帕斯卡(Blaise Pascul,1623—1662)　费尔马（PierreFermat,1601—1665）

梅雷提出的“分赌注”的问题，把帕斯卡这位神童数学家难住了。他苦苦思考，不得要领。一直过了两三年，到1654年才想出点眉目。于是他写信给好友费尔马讨论这个问题，两人讨论取得了一致的意见：认为梅雷的分法是对的，他应得64个金币的3/4，赌友应得64个金币的1/4

费尔马 ⟷ 帕斯卡 ⟵ 梅雷　　3次6点

梅雷 ↕ 赌友　　3次4点

问题：出现2次6点，1次4点因某种原因必须终止，如何分配赌资（32+32=64金币）？2/3 还是 3/4?


梅雷
P=0.5
六点
全部64枚金币
P=0.5
四点
二人平分全部金币，得32枚
最终梅雷得到：64*0.5+32*0.5=48枚金币
其他点数：重新再投

样本空间与随机事件

样本点和样本空间

案例2.1

掷一枚骰子可能出现许多结果，如“1点”、“偶数点”、“点数小于3”，等等．有些结果可以分解为更小的结果，如“点数小于3”是由结果“1点”和“2点”组成；有些结果不能分解为更小的结果，如“1点”．

在未知现象的研究过程中，称没有必要分解的结果为**样本点**（或**基本事件**），用ω表示;

全体样本点所组成的集合称为**样本空间**，常用Ω表示．

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

例2.1.1 抛两枚硬币的样本点和样本空间是什么?

此时样本点$\omega=(x_1,x_2)$,其中x_1和x_2分别代表第1枚和第2枚硬币抛出的结果. 所以样本空间为

$$\Omega=\{(x_1,x_2): x_i\in\{\text{正面},\text{反面}\},i=1,2\}$$

如用0表示正面，1表示反面，样本点变为(0,0)，(0,1), (1,0), (1,1)，其中第1和第2分量分别表示第1和第2枚硬币出现的结果。此时可把样本空间表示为:

$$\Omega=\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

例2.1.1 抛两枚硬币的样本点和样本空间是什么？

另一种解法:

分别用0、1和2表示抛出“0个正面”、“1个正面”和“2个正面”，则样本点为0,1和2，样本空间为

$$\Omega_1=\{0,1,2\}$$

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

问题： 哪种解法正确?

- 两种解法都正确，都满足题目的要求，他们的差异在于对“没有必要分解的结果”的理解不同.
- 事实上， Ω_1表达事件的能力更弱，如它不能表达事件$\{(1,0)\}$；另外Ω_1中各个样本点出现的概率不等，从而不能直接在此概率空间上应用有关古典概型的结论计算事件的概率.
- 样本空间中的样本点是构成事件的基本单位：样本点越小，构造事件的能力就越强（即能构造更多的事件）.

北京师範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

随机事件

部分样本点组成的集合（样本空间的子集）称为**随机事件**，简称**事件**．常用大写字母$A, B, C\cdots$表示.

一定要发生的事件称为**必然事件**，用 Ω 表示；

一定不发生的事件称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示.

例2.1.2

考察某网站在1小时内被点击次数，试写出相应的样本空间，并用样本点表达“该网站至多被点击2次”和“该网站被点击有限次”两个事件.

用自然数n表示结果“该网站在1小时内被点击n次”，则样本点可以用非负整数表示，样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$$

例2.1.2

考察某网站在1小时内被点击次数，试写出相应的样本空间，并用样本点表达“该网站至多被点击2次”和“该网站被点击有限次”两个事件.

用A和B分别表示“该网站至多被点击2次”和“该网站被点击有限次”两个事件，则

$$A=\{0,1,2\},\qquad B=\{0,1,2,\cdots\}$$

例2.1.3

考察24小时内北京的最高气温与最低气温的记录，试写出相应的样本空间，并表达事件“最高气温为30°C”和不可能事件.

用 x 代表24小时内的最低气温(单位：°C)，y 代表24小时内的最高气温，则样本点可以表示为(x,y)，样本空间为

$$\Omega=\{(x,y):x<y\}.$$

例2.1.3

考察24小时内北京的最高气温与最低气温的记录，试写出相应的样本空间，并表达事件“最高气温为30°C”和不可能事件.

用A代表事件“最高气温为30°C”，则

$$A=\{(x,y): y=30, x < y\},$$

$$\varnothing=\{(x,y): x > y\}.$$

在上例中，不可能事件有多种表达方式，如$\varnothing=\{(x,y): y=\infty\}$等.

样本空间

- 样本空间可以为有限、可数和不可数集.
- 如果关心的结果不同，其样本点的定义可以不同，从而样本空间也不同. 选择合适的样本空间，可以简化研究过程。
- 同一现象的样本点和样本空间的表示方法不唯一. 可用文字、数和符号表示样本点，但这些表示方法本质上相同，结果之间有一一对应关系.

事件关系及运算

可以用集合的方式来表达事件

$$A=\{\text{“没有被点击”},\text{“被点击1次”},\text{“被点击2 次”}\},$$

$$B=\{\text{“被点击1次”}\}.$$

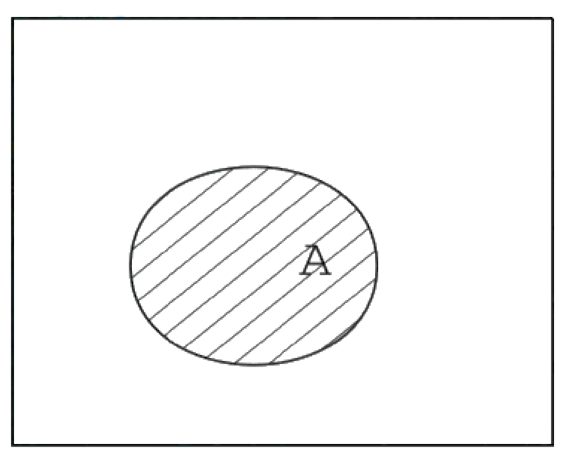
如用数字n表示事件“被点击n次”，则

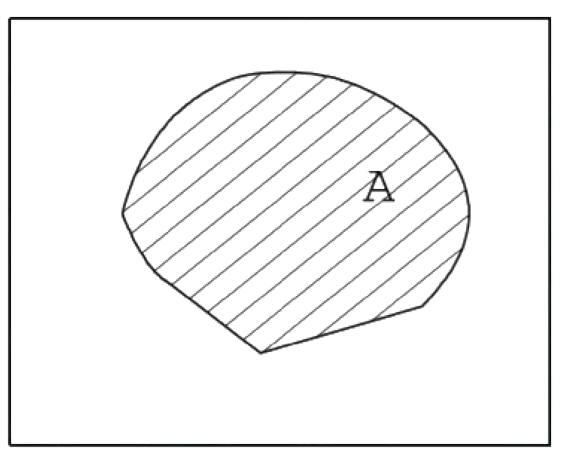
$$A=\{0,1,2\},$$

$$B=\{1\},$$

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

用一个矩形（或其它平面图形）区域代表样本空间，其内部的区域代表一个事件，称这样的示意图为维恩图。

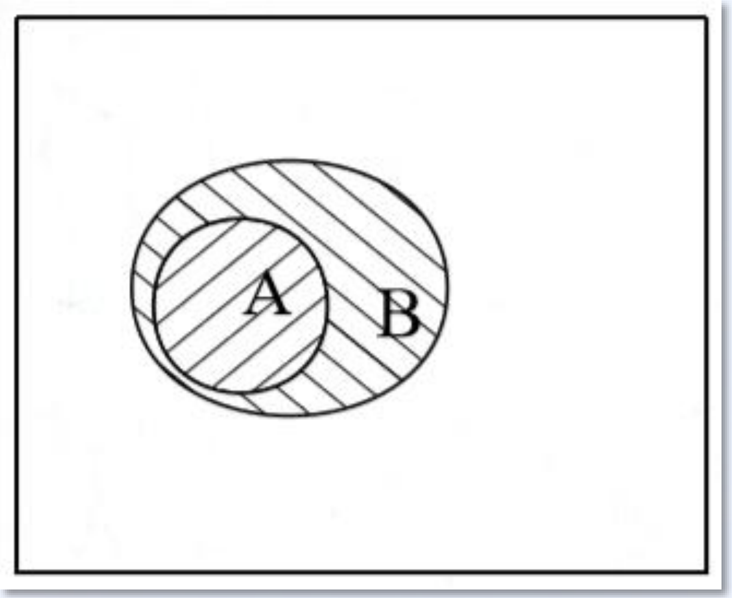




事件A发生： $\omega \in A.$

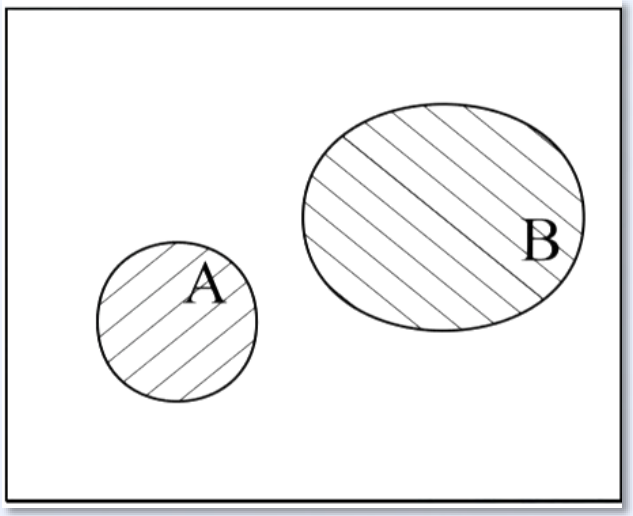
事件A不发生: $\omega \notin A.$

定义 如果事件A发生能够推出事件B发生，就称**事件A包含于B，事件B包含事件A**，记 $A \subset B$,**或** $B \supset A$.



如果A包含B,同时B包含A,就称**事件A等于事件B**，记为$A=B$.

定义 如果事件A和事件B不能同时发生，就称**事件A和事件B互斥**，或**事件A和事件B不相容。**



如果n个事件（一个事件列）的任意两个事件都互斥，就称这n个事件（事件列）**两两互斥**，或**两两不相容。**

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

例2.1.4

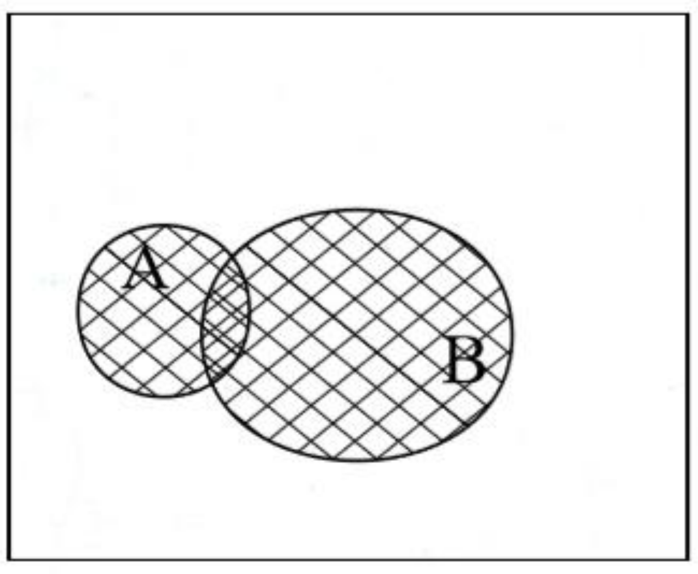
在网站24小时被点击次数例子中，若

$$A=\{2n+1:\ n=0,1,2,\cdots\},$$
$$B=\{3\},$$
$$C=\{6,7,8,\ldots\},$$

则$B\subset A$,B和C互斥，A和C不互斥

在实际应用中，人们经常用简单的事件来构造复杂事件，其中涉及事件的运算. 下面介绍常用的几种事件的运算，都可以从集合运算的角度理解这些运算.

定义 把事件A和B的样本点合到一起所构成的事件称为**事件A与B的并**，记为$A \cup B$

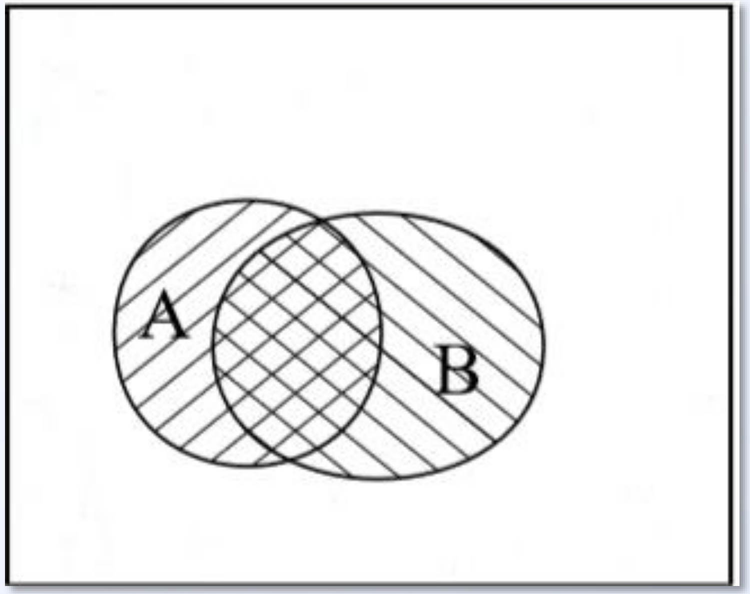


显然

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\},$$

且$A \cup B$等价于A和B至少一个发生。

定义 把事件A和B所共有的样本点构成的事件称为**事件A与B的交**，记为$A\cap B$, 或AB



显然

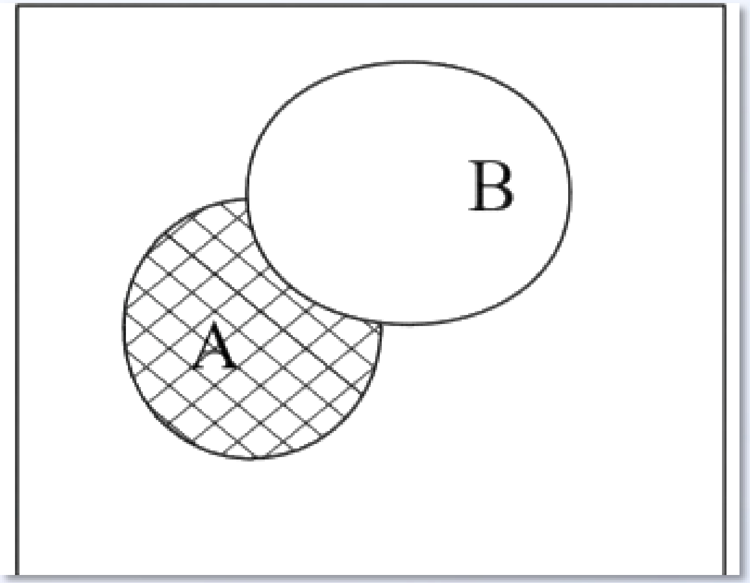
$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},$$

$A\cap B$等价于A和B同时发生，

且A与B互斥$\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

定义 在事件A中而不在B中的那些样本点所构成的事件称为事件A与B的差，记为$A-B$

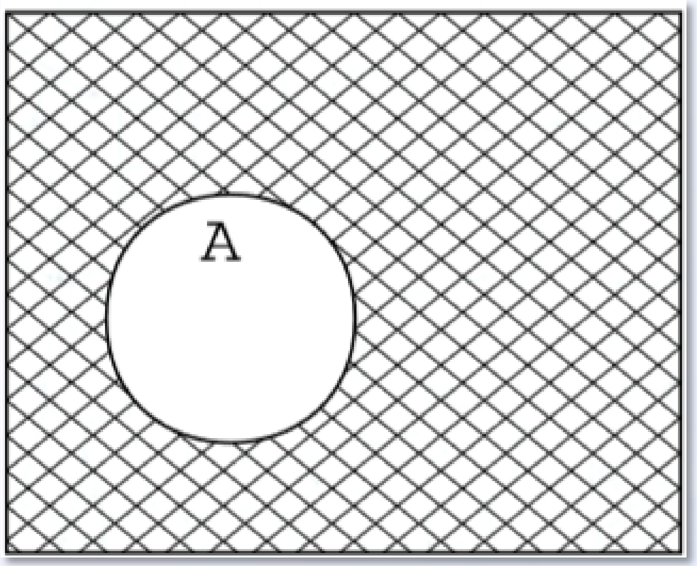


显然

$$A-B=\{\omega:\ \omega\in A\ \text{且}\ \omega\notin B\}$$

它等价于A发生且B不发生

定义 称 $\Omega - A$为**事件A的余事件，**或事件A的补事件，记为$\bar{A}$.



$$\bar{A}$$

例2.1.5

在掷骰子实验中，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，记$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求 $A\cup B, A\cap B, A-B, B-A$，$\bar{A}$和$\bar{B}$.

解： 由定义知

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega,\quad A\cap B=\{3\},$$
$$A-B=\{1,2\},\quad B-A=\{4,5,6\},$$
$$\bar{A}=\{4,5,6\},\quad \bar{B}=\{1,2\}.$$

定理 事件运算的对偶律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \tag{2.1}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{2.2}$$

证明：往证（2.1）

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{A \cup B} &\Longleftrightarrow \omega \notin A \cup B \\ &\Longleftrightarrow \omega \notin A \text{ 且 } \omega \notin B \\ &\Longleftrightarrow \omega \in \bar{A} \text{ 且 } \omega \in \bar{B} \\ &\Longleftrightarrow \omega \in \bar{A} \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

所以 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，即结论（2.1）成立.

对于给定的n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$,

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示“这n个事件中至少有一个事件发生”，称之为n个事件之并，它是将A_1，A_2，$\cdots$, A_n中的样本点合并在一起构成的事件;

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 表示“这n个事件同时发生”，称之为n个事件之交，它是$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的所有公共样本点构成的事件.

对于给定的事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,$

可类似地定义 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

例2.1.6 在某网站24小时内被点击的次数的例中，记

$$A_n = \{n\}, \quad B_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\},$$

使用A_n表示必然事件和B_n，使用B_n表示不可能事件.

解:

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

例2.1.6

又由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ 表示“网站被点击无穷多次”，所以

$$\varnothing = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

事件运算的优先规则

- 优先括号内的运算；
- 然后是补运算；
- 再次是交或并运算；
- 最后是减运算.

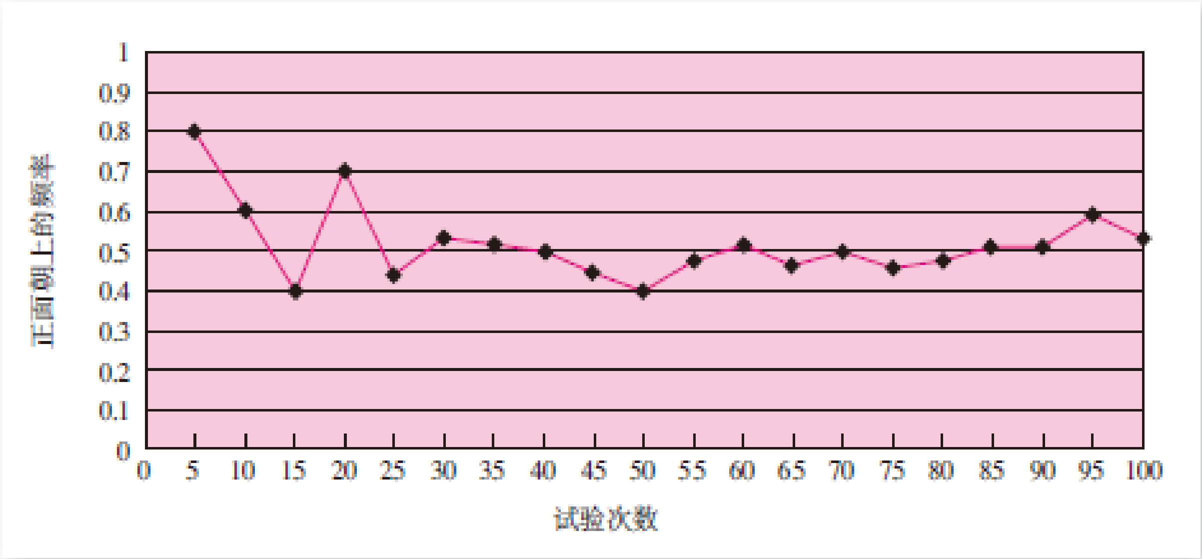
北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

频率的简单性质

定义 考虑一个随机现象可能会出现的事件A，在相同的条件下重复观测该现象n次，用$n(A)$表示在n次观测中A出现的次数，称

$$\mathbb{F}(A)=\frac{n(A)}{n}$$

为事件A发生的频率



对于随机现象，当$n \to \infty$时，频率$\mathbb{F}(A)$稳定于某一数的附近. 因此人们猜想这个频率的“极限”存在，并称它为事件A发生的概率，记为$\mathbb{P}(A)$.

严格来说，这个“概率”的定义并不严格，因为其中“极限”是否存在并没有证明.

定理 频率$\mathbb{F}$具有如下基本性质：

非负性： $\mathbb{F}(A) \geqslant 0$，$\forall$ 事件A；

规范性： $\mathbb{F}(\Omega) = 1$，$\mathbb{F}(\varnothing) = 0$；

可加性： 若事件A与B不相容，则

$$\mathbb{F}(A \cup B) = \mathbb{F}(A) + \mathbb{F}(B).$$

频率$\mathbb{F}$的基本性质：**非负性、规范性、可加性**

证明：显然非负性和规范性成立，注意到当A与B不相容时有$A \cap B = \emptyset$, 因此

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

即可加性成立。

第二次作业

104页练习2.1、2.2、2.4、2.5、2.7

北京师范大学
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

2.2

概率空间

概率论的主要任务是研究<u>**概率所共有的性质**</u>，这里的概率当然指的是研究者<u>**所感兴趣的那些事件的概率**</u>.

可以通过运算把感兴趣的事件表示为简单事件，进而简化所关心事件的概率计算.

案例

在掷骰子实验中，若我们关心的事件 A 为“掷出的点数小于或等于5”. 显然 $\bar{A}$ 的构造更简单，并且

$$\mathbb{F}(A) = 1 - \mathbb{F}\left(\bar{A}\right), \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right),$$

可以通过$\mathbb{P}(\bar{A})$计算A的概率，因此 $\bar{A}$ 也应该成为我们的研究的事件.

事件类 $\mathscr{F}$

一般地，用$\mathcal{F}$表示概率所涉及的事件全体，它应该
1.包含必然事件和不可能事件；
2.包括所有感兴趣的事件；
3.对于事件的有限或可数次运算封闭，称满足如上述条件$\mathcal{F}$的为**事件类**[1]。

如无特殊声明，以后事件都是指某一事件类中的事件，

注：事件类中的元素为事件，即样本点的集合。

概率空间

概率论公理源于频率的性质，可将频率的三条性质抽象为概率的三条公理，先引进一个术语：如果对于任意的事件$A\in \mathcal{F}$，都有与它相对应的一个实数$\mathbb{P}(A)$，就称$\mathbb{P}(.)$为$\mathcal{F}$到实数的一个映射.

定义 （概率的基本公理）

如果从$\mathscr{F}$到实数集上的映射$\mathbb{P}(\cdot)$满足如下条件：

1°．非负性：$\mathbb{P}(A) \geqslant 0$，$\forall A \in \mathscr{F}$

2°．规范性：$\mathbb{P}(\Omega)=1$；

3°．可列可加性：对于$\mathscr{F}$两两不相容的事件列$\{A_n\}$，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

就称$\mathbb{P}$为$\mathscr{F}$上的**概率测度**，简称为**概率**；称$\mathbb{P}(A)$为**事件A的概率**；称$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为**概率空间.**

- 安德列·柯尔莫哥洛夫（1903年4月25日 - 1987年10月20日），20世纪苏联最杰出的数学家，也是20世纪世界上为数极少的百科全书式的数学天才；
- 他的研究几乎遍及数学的所有领域，做出许多开创性的贡献；
- 他于1933出版的《概率论的基本概念》标志着概率论的公理化体系的建立.

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

概率空间：$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

例1

投掷一枚硬币，结果不是正面向上，就是反面向上. 此时可以通过频率估计出现正面（反面）的概率.

很多随机现象（如产品质量是否合格，成绩是否及格，药品是否有效等）都呈现出与例子相同的特点：只有两个基本事件. 可以把其中一个称为**成功**，另一个称为**失败**.

定义

若随机实验只有“成功”与“失败”两个基本事件，就称该实验为**伯努利实验**. 称“成功”出现的概率为**成功概率**，称“失败”出现的概率为**失败概率.**

伯努利试验 样本空间Ω = {成功，失败}，事件域取

$$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{成功\}, \{失败\}, \Omega\}$$

定义： $\mathbb{P}(\{成功\}) \triangleq p$， $\mathbb{P}(\{失败\}) \triangleq q$，

$\mathbb{P}(\emptyset) \triangleq 0$，$\mathbb{P}(\Omega) \triangleq 1$，

其中$0<p<1$, $q=1-p$. 显然$\mathbb{P}$为定义在$\mathscr{F}$上的概率，称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为**伯努利概率空间。**

有限个点组成的样本空间

样本空间$\Omega=\{w_1, \ldots, w_n\}$，$\mathscr{F}$由$\Omega$的一切子集所构成. 如果样本点$w_i$出现的概率为$p_i$，$1 \le i \le n$，定义

$$\mathbb{P}(A) \triangleq \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{2.9}$$

可以验证$\mathbb{P}$为定义在$\mathscr{F}$上的概率测度，称$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为**有限概率空间.**

例如

在掷骰子实验中Ω ={1，2，3，4，5，6}，

$\mathscr{F}=\{A:\ A\subset\Omega\}$， $p_i=\mathbb{P}(\{i\})$，$i\in\Omega$.

那么在(2.9)之下，(Ω，$\mathscr{F}$，$\mathbb{P}$) 为有限概率空间. 此时

$$P(\{2,4,6\})=\sum_{i:w_i\in\{2,4,6\}}p_i=p_2+p_4+p_6$$

定义2.2.3

若$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为有限概率空间，且各个样本点出现的概率相等，就称这个概率空间为**古典概率空间**，相应的概率称为**古典概率**.

在掷骰子实验中，当骰子的质地均匀时，$p_i=1/6$，描述该实验的概率空间为古典概率空间；当骰子的质地不均匀时，此概率空间不是古典概率空间，仅是有限概率空间.

可数个点组成的样本空间

考察$\Omega=\{w_1, w_2, \cdots\}$，$\mathscr{F}=\{A: A\subset\Omega\}$，对于任意$i\geq 1$
记$p_i \triangleq \mathbb{P}(\{w_i\})$，

$$\mathbb{P}(A) \triangleq \sum_{i:\omega_i\in A} p_i, \quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{2.10}$$

称$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为**可数概率空间.**

注：有限概率空间和可数概率空间统称为**离散概率空间.**

问题：如何理解“可数”？

答：就是这些样本点可以按照某种次序排列出来.

在网站点击次数例子中，令$\mathscr{F}=\{A: A\subset\Omega\}$，并按（2.10）式定义

$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{e}\sum_{i\in A}\frac{1}{i!},\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

其中i为非负整数，$p_i=\frac{1}{i!}e^{-1}$，则$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为可数概率空间，特别

$$\mathbb{P}(\text{“该网站被点击奇数次”})=\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)!}$$

几何概型

对于n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个区域A，用$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})$表示其“体积”．若$\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$满足$\mathbf{0} < \boldsymbol{m}(\boldsymbol{\Omega}) < \infty$.

$$\mathscr{F} \triangleq \{A : A\text{可求体积, 且 } A \subset \Omega\},$$

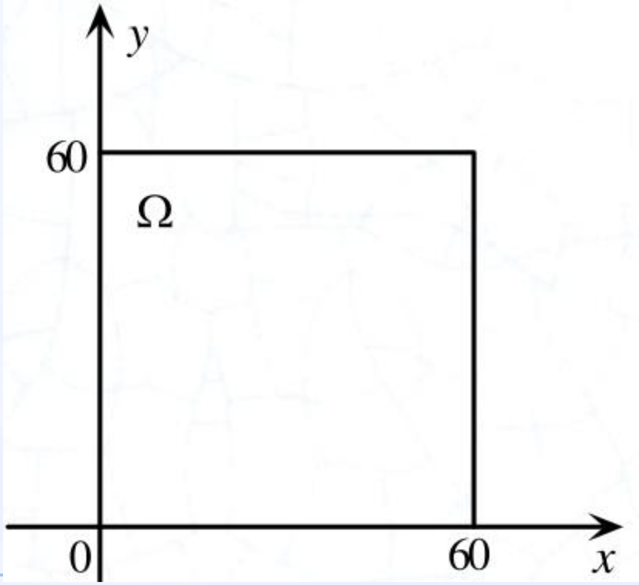
$$\mathbb{P}(A) \triangleq \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \forall A \in \mathscr{F}, \tag{2.11}$$

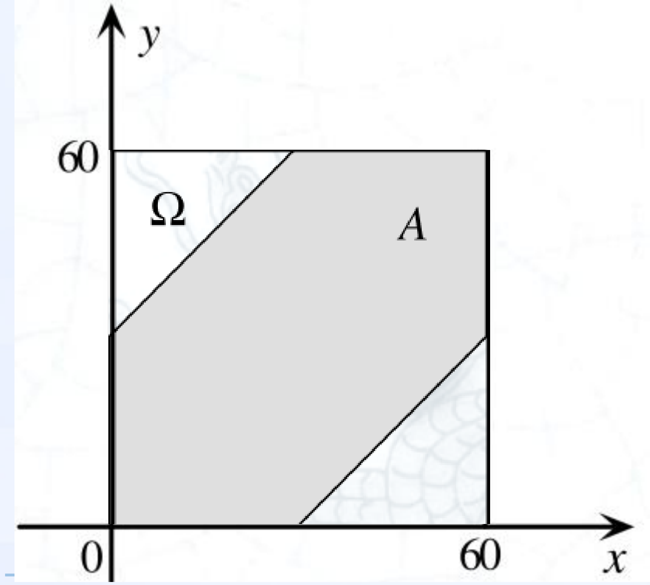
称概率$\mathbb{P}$为**几何概率**，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为**几何概率空间.**

几何概率的本质：相同体积事件的概率相等.

例2.2.2

甲乙二人约定在**12-13**点之间（不包括**12**点）的任何一个时刻到公园门口会面，规定先到者仅等候**30**分钟，试求事件**A**={甲乙能见面}的概率.





解： 用 x 和 y 分别表示甲和乙到达会面地点超过12点的分钟数, 则

$$\Omega = \{(x, y): 0 < x, y \le 60\}$$

$$A = \{(x, y): (x, y) \in \Omega, |x - y| \le 30\}$$

由二人到达时刻的任意性，可用几何概率来计算事件A的概率

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

定理 概率有如下性质:

4. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

5. **有限可加性：**对于两两不相容的事件$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i);$$

6. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

7. **可减性：**对任何事件$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, 有$\mathbb{P}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{B}) - \mathbb{P}(\boldsymbol{A})$;

8. **单调性：** 对任何事件$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, 有$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$；

9. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

10. **加法公式：** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$.

例2.2.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为古典概率空间，试证明

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n}, \quad \forall A \in \mathscr{F}, \tag{2.12}$$

其中$\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{\Omega}$中样本点的个数，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$为$\boldsymbol{A}$中的样本点的个数.

证明：不妨设$\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n\}$. 由定义2.2.3知

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

由概率的规范性和有限可加性得

$$\mathbf{1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega_{\mathbf{1}}\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{\omega_{\boldsymbol{n}}\}) = \boldsymbol{n}\mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

从而 $$\mathbb{P}(\{\omega_{\boldsymbol{i}}\}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\quad \forall \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{n}.$$

所以

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{n(A)}{n}.$$

例2.2.4

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$满足$0 < \boldsymbol{m}(\Omega) < \infty$, $\mathscr{F}$为Ω的可求体积的子区域的全体，并且

$$\mathbb{P}(A) = c \cdot m(A), \quad \forall A \in \mathscr{F},$$

其中c为与A无关的常数，$\boldsymbol{m}(A)$表示A的体积，证明$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为几何概率空间.

证明：由概率的规范性知： $\mathbf{1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{m}(\boldsymbol{\Omega})$, 即

$$c = \frac{1}{m(\Omega)},$$

亦即

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

所以 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为几何概率空间.

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

小结

频率和概率的性质

概率空间

小结

概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

有限概率空间

可数概率空间

几何概率空间

伯努利概率空间 —— 古典概率空间

概率的性质

小结

非负性、规范性、可列可加性

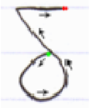
- 任何事件发生的概率大于等于0，小于等于1
- 不可能事件发生的概率等于0
- 有限可加性
- 单调性
- 可减性
- 对立事件的概率的计算公式
- 两个事件并的概率的加法公式

第三次作业

104-105页练习

2.8、2.9、2.11、 2.17、2.18

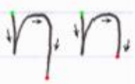
希腊语	古希腊语名字[1]	英语名字	英语发音	
			英式	美式
Α α	ἄλφα	Alpha	/ˈælfə/	
Β β	βῆτα	Beta	/ˈbiːtə/	/ˈbeɪtə/
Γ γ	γάμμα	Gamma	/ˈɡæmə/	
Δ δ	δέλτα	Delta	/ˈdɛltə/	
Ε ε	ἒψιλόν	Epsilon	/ˈɛpsɪlɒn/ , /ɛpˈsaɪlən/	/ˈɛpsɪlɒn/
Ζ ζ	ζῆτα	Zeta	/ˈziːtə/	/ˈzeɪtə/
Η η	ἦτα	Eta	/ˈiːtə/	/ˈeɪtə/
Θ θ	θῆτα	Theta	/ˈθiːtə/	/ˈθeɪtə/
Ι ι	ἰῶτα	Iota	/aɪˈoʊtə/	
Κ κ	κάππα	Kappa	/ˈkæpə/	
Λ λ	λάμβδα	Lambda	/ˈlæmdə/	
Μ μ	μῦ	Mu	/ˈmjuː/	/ˈmuː/
Ν ν	νῦ	Nu	/ˈnjuː/	/ˈnuː/
Ξ ξ	ξεῖ	Xi	/ˈzaɪ/, /ˈksaɪ/	
Ο ο	ὂμικρόν	Omicron	/oʊˈmaɪkrɒn/ , /ˈɒmɨkrɒn/	/ˈɒmɨkrɒn/
Π π	πεῖ	Pi	/ˈpaɪ/	
Ρ ρ	ῥῶ	Rho	/ˈroʊ/	
Σ σ ς（词尾）	σῖγμα	Sigma	/ˈsɪɡmə/	
Τ τ	ταῦ	Tau	/ˈtaʊ/ , /ˈtɔː/	
Υ υ	ὖψιλόν	Upsilon	/juːpˈsaɪlən/ , /ˈʊpsɪlɒn/ /ʌpˈsaɪlən/	/ˈʌpsɪlɒn/
Φ φ	φεῖ	Phi	/ˈfaɪ/	
Χ χ	χεῖ	Chi	/ˈkaɪ/	
Ψ ψ	ψεῖ	Psi	/ˈsaɪ/ , /ˈpsaɪ/	
Ω ω	ὦμέγα	Omega	/ˈoʊmɪɡə/[2]	/oʊˈmeɪɡə/



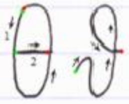
When written quickly, the angle at the top-left usually comes out as a curve.

An alternative way to draw this letter is like a c with a horizontal line in the middle (like this: ϵ, or just as the math symbol for "belongs" — for whomever is familiar with that — but in small size).

The length of the top horizontal line doesn't matter. Also, that line is sometimes slightly curved like a wide-open bowl. The hook at the bottom can be more closed or more open.



The first form is less common, but more consistent with Greek-style hand-writing. The second form is more common, and appears more familiar to non-Greeks, since it's identical to the Roman letter n.



The first form is thinner than its corresponding capital letter. The second form is cursive.

Looks complicated, but it's actually like a lowercase zeta (see it above), the curve of which has acquired an extra spike. Another way to see it is as a final sigma (or Roman s) on top of which stands a lowercase cursive tau (see it below).

In the first form, the top horizontal line is about as long as 1/2 diameter (or 1 radius) of the circle. The second form is the final sigma only (*never* use it instead of the mid-word sigma), and is identical to the Roman s. **Note**: some books written by non-Greek authors might suggest the Byzantine form c instead. *Nobody* writes a sigma like that today, save for the Greek Orthodox Church.