# L04 integrate

郑盼盼

2024-10-23

## 目录



## 定积分

定积分（Definite Integral）是微积分中的基本概念之一，用于描述一个函数在某个区间上的累积变化。它通常用于计算曲线与坐标轴之间的面积、物理量的累积、概率等问题。

在一个封闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，其定积分可以被定义为：

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

其表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的累积值。几何上可以解释为曲线 $y = f(x)$ 和 $x$ 轴之间在 $[a, b]$ 范围内围成的面积。上式中：

- $a$ 和 $b$ 分别称为积分的下界和上界
- $f(x)$ 被称为被积函数

### 使用 R 语言计算定积分

R 语言内置了函数 `integrate(f, a, b)` 用于计算函数 `f` 以 `a` 为下界，`b` 为上界的定积分；例如，我们可以通过如下的代码计算定积分：

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

```r
# 定义函数 f = x^2
f <- function(x){
  return(x^2)
}

# 利用 integrate 函数对于 f 进行积分，下界为 0，上界为 1
integrate(f,0,1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

但是很多时候，我们可以通过使用**匿名函数**的方式直接计算 $\int_0^1 x^2\,dx$，不需要定义一个函数 `f`：

```r
integrate(function(x) x^2, 0, 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

**例**： 根据连续型随机变量的均值和方差的定义：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x)\,dx \\
D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x-E(X)]^2\cdot p(x)\,dx
\end{aligned}
$$

其中 $p(x)$ 为连续型随机变量 $X$ 的概率密度函数。

使用 `integrate` 函数，计算在 $0,1$ 上的均匀分布的均值和方差（hints:R 内置了均匀分布的概率密度函数 `dunif(x, a, b)`

```r
integrate(function(x) x * dunif(x, 0, 1), -Inf, Inf)
```

```
## 0.5 with absolute error < 1.3e-09
```

```r
integrate(function(x) (x - 0.5)^2 * dunif(x, 0, 1), -Inf, Inf)
```

```
## 0.08333333 with absolute error < 4.6e-08
```

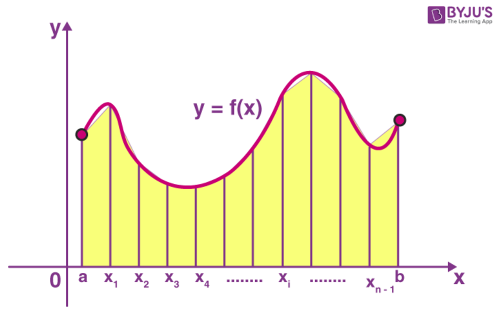


图 1: $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示红色曲线和 $x$ 轴以及 $x=a$ 和 $x=b$ 围成的面积，可以通过将区域划分为小矩形，并计算每个小矩形的面积进行求和得到对于曲线下面积的近似。

## 梯形法则 *

根据图1，我们可以通过将曲线下的面积划分成很 $n$ 个等高的小梯形来估计其定积分；令图1中的 $x_0 = a, x_n = b$，每个小梯形的高为 $h \triangleq (b-a)/n$，上下底的长度之和为 $f(x_i)+f(x_{i-1}), i=1,2,\dots,n$，于是有：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\cdot\frac{(b-a)}{n}\\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]\end{aligned}$$

具体可以写成如下代码：

```r
# 定义一个名为 trapezoid_int 的函数采用梯形法来估算定积分，f 为被积函数，a 为积分下
↪ 界，b 为积分上界，n 为小梯形的个数
trapezoid_int <- function(f, a, b, n=10000){
  x <- seq(a, b, length.out=n+1) # 由于我们需要将整个区域分成 n 块，所以我们需要在
↪ [a,b] 中定义 n+1 个点
  h = (b-a) / n # 计算间隔的长度（小梯形的高）
  y = f(x)      # 计算每个 f(x_i)

  integral = h/2 * (y[1] + y[n+1] + 2*sum(y[2:n])) # 根据上面的公式进行计算得到定积分
  return(integral) # 返回定积分的结果
}

trapezoid_int(function(x) x**2, 0, 1)
```

```
## [1] 0.3333333
```

# Questions

1. 计算 $\sin(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的定积分
2. 计算 $\sin(x) + \cos(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的定积分
3. 计算 $e^{-x}$ 在 $[0, +\infty]$ 上的定积分