

L04 integrate

郑盼盼

2024-10-23

目录

| | |
|------------------------|---|
| 定积分 | 1 |
| 使用 R 语言计算定积分 | 2 |

定积分

定积分 (Definite Integral) 是微积分中的基本概念之一, 用于描述一个函数在某个区间上的累积变化。它通常用于计算曲线与坐标轴之间的面积、物理量的累积、概率等问题。

在一个封闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 其定积分可以被定义为:

$$\int_a^b f(x) dx$$

其表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的累积值。几何上可以解释为曲线 $y = f(x)$ 和 x 轴之间在 $[a, b]$ 范围内围成的面积。上式中: a 和 b 分别称为积分的下界和上界 - $f(x)$ 被称为被积函数

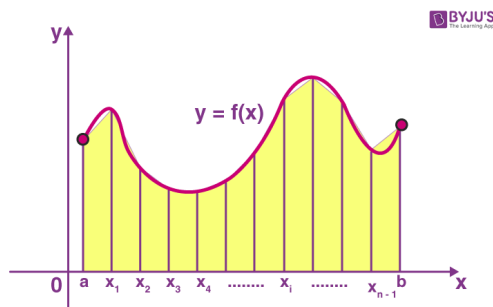


图 1: $\int_a^b f(x) dx$ 表示红色曲线和 x 轴以及 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的面积, 可以通过将区域划分为小矩形, 并计算每个小矩形的面积进行求和得到对于曲线下面积的近似。

使用 R 语言计算定积分

R 语言内置了函数 `integrate(f, a, b)` 用于计算函数 f 以 a 为下界, b 为上界的定积分; 例如, 我们可以通过如下的代码计算定积分:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

```
# 定义函数 f = x^2
f <- function(x){
  return(x^2)
}

# 利用 integrate 函数对于 f 进行积分, 下界为 0, 上界为 1
integrate(f,0,1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

但是很多时候, 我们可以通过使用匿名函数的方式直接计算 $\int_0^1 x^2 dx$, 不需要定义一个函数 f :

```
integrate(function(x) x^2, 0, 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

例: 根据连续型随机变量的均值和方差的定义:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 \cdot p(x) dx$$

其中 $p(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度函数。

使用 `integrate` 函数, 计算在 $0,1$ 上的均匀分布的均值和方差 (hints:R 内置了均匀分布的概率密度函数 `dunif(x, a, b)`)

```
integrate(function(x) x * dunif(x, 0, 1), -Inf, Inf)
```

```
## 0.5 with absolute error < 1.3e-09
```

```
integrate(function(x) (x - 0.5)^2 * dunif(x, 0, 1), -Inf, Inf)
```

```
## 0.08333333 with absolute error < 4.6e-08
```