日期： / /

主题：

连续性：设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x=x_0$ 处有定义。

$\varepsilon-\delta$ 语言：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta(\varepsilon, x_0)>0$，

s.t. $|x-x_0|<\delta$ 对 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立。

$f(x)$ 在集合 X 上每一点连续，$f(x)$ 在 $X=\{x\}$ 连续。

基本定理：① $f(x)$ 在闭区间有界

② 达到上下确界 ③ 介值定理

一致连续性：设 $f(x)$ 定义在 $X=\{x\}$ 上，(开区间 闭区间)

对每个 $\varepsilon>0$，$\exists \delta(\varepsilon)>0$，s.t. $\forall x', x'' \in X$

$|x'-x''|<\delta$，可得 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

基本定理：① 康托尔定理：有限闭区间连续函数一致连续。(##收敛速度得到控制)

② 导数有界 $\Rightarrow$ 一致连续。不太陡峭

$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2| \le M|x_1-x_2| \le M\delta$

一致连续 $\not\Rightarrow$ 导数有界

$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (无界)

绝对连续：
在区间 $[a,b]$ 中
$\sum_{i=1}^{n} |b_i-a_i|<\delta$
$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$

lipschitz 条件
$|f(a)-f(b)| \le k|a-b|$
最小 k 为 lipschitz 常数。

总结：

日期： / /

主题：

$sgn(xy) = sgn\,x \cdot sgn\,y$

$\Delta^2 f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)$

$\left|\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right| = 1$, $n \in Z^+$

$\left|\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} - \cos n\pi\right| = 1$

$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a \ge 0, b \ge 0$

* $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证：对 $\forall x_1, x_2 \ge 0$，有 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \ge \sqrt{|x_2 - x_1|}$

不妨设：$x_2 \ge x_1 \ge 0$，$x_2 \ge |x_2 - x_1|$

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \ge \sqrt{x_2} \ge \sqrt{|x_2 - x_1|}$

当 $x_1 \ne x_2$，$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \le \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{|x_2 - x_1|}}$

$= \sqrt{|x_2 - x_1|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

* x^n $(n \ge 2)$ 不一致连续.

证. $n=2$，对 $n \in N^+$，任取 $s_n = n$，$t_n = n + \frac{1}{2n}$

此时，$0 < t_n - s_n = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$

$t_n^2 - s_n^2 = (t_n + s_n)(t_n - s_n) = \frac{1}{2n}\left(2n + \frac{1}{2n}\right) > 1$

∴ x^2 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

$n \ge 3$ 时，$x_2 > x_1 \ge 1$ 则，$x_2^n - x_1^n > x_2^2 - x_1^2$

* $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续

证：$s_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \in (0,1)$，$t_n = \frac{1}{2n\pi} \in (0,1)$

$0 < t_n - s_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} < \frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{n}$

总结：

但：$\left|\sin\frac{1}{t_n} - \sin\frac{1}{s_n}\right| = \left|\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$.