МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.А. Любомудров

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ. МЕТОДЫ ПЕРЕВОДА ЧИСЕЛ ИЗ ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ p_1 В ПОЗИЦИОННУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ p_2

Рекомендовано к изданию УМО «Ядерные физика и технологии»

УДК [511.11+511.12] (07) ББК 22.130я7 Л 93

Любомудров А.А. Системы счисления. Методы перевода чисел из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 : Учебно-методическое пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2014. 28 с.

Составлено в соответствии с программой изучения дисциплины «Дискретная математика» и предназначено для подготовки студентов к практическому занятию по теме «Системы счисления. Методы перевода чисел из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 ». В пособии приводятся теоретические основы, примеры, а также предлагаются тесты для проверки знаний студентов по этой теме.

Предназначено для студентов направления «Информатика и вычислительная техника», а также может быть полезно для аспирантов и преподавателей данного направления.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент нач. НИУ-4 ОАО «Концерн «Системпром», канд. техн. наук *С.В. Коротков*.

ISBN 978-5-7262-2029-1

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2014

Содержание

1. Понятия числа и системы счисления	4
2. Развёрнутая и сокращённая записи чисел в позиционных	
системах счисления	5
3. Постановка задачи перевода чисел из позиционной	
счисления с основанием p_1 в позиционную систему	
счисления с основанием р2	8
4. Перевод целых чисел из позиционной системы счисления	
с основанием p_1 в позиционную систему счисления	
с основанием р2	9
5. Перевод дробей из позиционной системы счисления	
с основанием p_1 в позиционную систему счисления	
с основанием р2	13
6. Перевод чисел из системы счисления с основанием p_1 =2	
в систему счисления с основанием $p_2=2^k$	
и обратно	.17
7. Перевод чисел из десятичной системы счисления	
в двоично-десятичную систему счисления	
и обратно	.18
8. Перевод чисел с использованием промежуточных	
систем счисления	19
9. Тесты	20
Список литературы	27

1. Понятия числа и системы счисления

Понятие числа введено и, соответственно, применяется человеком с глубокой древности. Понятие числа использовалось древними шумерами, проживавшими на территории Древнего Египта, далее древними египтянами, древними индусами и древними греками. Очевидно, что введение понятия числа являлось необходимостью и применялось человеком при измерениях площадей, расстояний, количества продуктов питания.

Одним из определений числа является следующее определение. Определение. *Число* – это есть безразмерная величина.

Запись одного и того же числа (величины) может быть выполнена различными способами. При этом вид записи зависит от применяемой системы счисления. Так, например, запись десятичного числа $A_{10}=25_{10}$ в двоичной системе счисления имеет вид $A_2=11001_2$, в троичной системе счисления имеет вид $A_3=221_3$, в двоично-десятичной системе счисления 8421 $A_{8421}=0010$ 0101, в двоично-десятичной системе счисления 8421 $A_{8421+3}=0101$ 1000, в римской системе счисления $A_{\text{рим.}}=XXV$, в системе счисления в остаточных классах с основаниями $p_1=7, p_2=8, p_3=9$ $A_{7,8,9}==\{4,1,7\}$.

<u>Определение</u>. Системой счисления называется система (математический приём) изображения чисел с помощью ограниченного количества символов.

Наиболее широко применяются на практике позиционные системы счисления и, в частности, десятичная и двоичная системы счисления. В десятичной системе счисления для изображения чисел используется десять символов (цифр). Этими символами для изображения чисел в десятичной системе являются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В двоичной системе счисления для изображения чисел используются два символа, а именно, цифры 0 и 1.

<u>Определение</u>. *Позиционная система счисления* — это система счисления, в которой вклад отдельных цифр в величину числа зависит от позиции цифры в записи числа относительно запятой.

Так, например, в числе $A=25,3_{10}$ вклад цифры 2 в величину числа равен 2×10^1 , вклад цифры 5 в величину числа равен 5×10^0 , а вклад цифры 3 равен 3×10^{-1} .

<u>Определение</u>. Количество символов (цифр), которое используется для записи чисел в позиционной системе счисления, называется основанием позиционной системы счисления.

Так, например, в десятичной системе счисления для изображения всех чисел используются, как отмечалось выше, десять цифр и, соответственно, основание десятичной системы счисления равно p=10. В двоичной системе счисления для изображения всех чисел используются, как отмечалось выше, только две цифры и, соответственно, основание двоичной системы счисления равно p=2.

2. Развёрнутая и сокращённая записи чисел в позиционных системах счисления

С учётом изложенного, любое число в позиционной системе счисления с основанием p=10, т.е. в десятичной системе счисления, возможно представить в виде развёрнутой записи:

 $X_{10} = \pm (x_1 \cdot 10^{m-1} + x_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + x_{m-1} \cdot 10^1 + x_m \cdot 10^0 + x_{m+1} \cdot 10^1 + \dots + x_n \cdot 10^{m-n}),$ (2.1) или представить в виде сокращённой записи:

$$X_{10} = \pm \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 10^{m-i} = \pm 10^m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 10^{-i} .$$
 (2.2)

В записях (2.1) и (2.2) x_i – цифра i-го десятичного разряда числа $X(x_i = 0, ..., 9)$, n – разрядность числа X, m – количество разрядов в пелой части числа X.

Возможны позиционные системы счисления с любым целым положительным основанием p > 1.

По аналогии с десятичным представлением, развернутая и сокращённая записи числа X в позиционной системе счисления с основанием p имеют, соответственно, следующий вид:

$$X_p = \pm (x_1 \cdot p^{m-1} + x_2 \cdot p^{m-2} + \dots + x_{m-1} \cdot p^1 + x_m \cdot p^0 + x_{m+1} \cdot p^{-1} + \dots + x_n \cdot p^{m-n}), \quad (2.3)$$

$$X_p = \pm \sum_{i=1}^n x_i \cdot p^{m-i} = \pm p^m \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot p^{-i} , \qquad (2.4)$$

где x_i – цифра i -го разряда числа X ($x_i = 0,..., p$ -1), n – разрядность числа X, m – количество разрядов в целой части числа X.

В записях (2.3) и (2.4) величина основания системы счисления p имеет величину p>10. В этом случае для обозначения цифр, по величине больших 9, вводятся некоторые дополнительные обозначения. Так, например, в позиционной шестнадцатеричной системе счисления с основанием p=16, в дополнение к цифрам 0, 1,..., 9, применяются также цифры 10, 11, 12, 13, 14, 15, которые имеют следующие обозначения. Цифра «десять» обозначается буквой A, цифра 11 обозначается буквой B, цифра 12 — буквой C, цифра 13 — буквой D, цифра 14 — буквой E, цифра 15 — буквой F.

Как отмечалось выше, вид записей чисел в различных системах счисления, в том числе и позиционных с различными величинами основания p, различен. Для оценки величин чисел и, соответственно, сравнения чисел по величине, числа необходимо записывать в некоторой единой системе счисления, наиболее широко используемой человеком на практике, и которая наиболее привычна для человека. Такой системой счисления, очевидно, является десятичная система счисления.

Формулами, которые позволяют перейти от записи чисел в позиционных системах счисления с произвольной величиной основания p к записи чисел в десятичной системе счисления, являются формулы (2.3) и (2.4). Так, например, записи десятичного числа $36,75_{10}$ в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления выглядят как 100100.11_2 , 44.6_8 и $24.C_{16}$, соответственно. Используя формулу (2.3) для упомянутых записей чисел, получаем одну и ту же величину:

$$\begin{array}{l} \text{100100.11}_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 36.75_{10} \,, \\ 44.6_8 = 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} = 36.75_{10} \,, \\ 24.C16 = 2 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 + C \cdot 16^{-1} = 36.75_{10} \,. \end{array}$$

Таким образом, если требуется оценить величину числа, записанного в позиционной системе счисления с основанием p, или требуется сравнить два числа, записанных в позиционных системах

счисления с различными основаниями, то для этого достаточно воспользоваться формулами (2.3) и (2.4).

Помимо позиционных систем счисления с основанием p, где p целое положительное число (p> 1), на практике также применяются двоично-десятичные системы счисления. По своей сути двоично-десятичные системы счисления — это десятичные системы счисления, десятичные цифры в которых представлены двоичными кодами, содержащими по четыре двоичных разряда. Использование двоичного кодирования десятичных цифр создаёт известное удобство для воспроизведения десятичной арифметике на ЭВМ. В этом случае сложение, вычитание и умножение десятичных цифр сводится, соответственно, к сложению, вычитанию и умножению двочиных кодов. На практике широкое применение нашли такие двочино-десятичные системы счисления как 8421 и 8421+3. Соответствия десятичных цифр и четырёхразрядных двоичных кодов в этих системах представлены в табл. 2.1.

Таблина 2.1

Десятичная цифра	Двоичные коды $2^3 2^2 2^1 2^0$	Десятичная цифра
Система 8421 5 6 7 8 9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	О 1 2 3 4 5 6 7 8 9

В системах 8421 и 8421+3 число 36.75_{10} будет выглядеть следующим образом:

$$36.75_{10} = 0011 \ 0110. \ 0111 \ 0101_{8421},$$

 $36.75_{10} = 0110 \ 1001. \ 1010 \ 1000_{8421+3}.$

3. Постановка задачи перевода чисел из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2

Пусть задано число A, содержащее целую и дробную части, которое представлено в позиционной системе счисления с основанием p_1 , т.е. представлено в виде $A = A_{p1} = A_{p1}$ цел. часть, A_{p1} др. часть.

Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием p_2 .

Запись числа A в позиционной системе счисления с основанием p_2 означает представление этого числа в виде

$$A = A_{p2} = A_{p2 \text{ цел. часть}}, A_{p2 \text{ др. часть}} = b_1 b_2 \dots b_m, b_{m+1} b_{m+2} \dots b_n,$$

где $b_1b_2 \dots b_m$ — целая часть числа A, $b_{m+1}b_{m+2} \dots b_n$ — дробная часть числа A, b_i (i= 1, 2, ..., n) — цифры числа A в системе счисления с основанием p_2 .

При этом развёрнутая запись числа A в позиционной системе счисления с основанием p_2 будет иметь вид

$$A = A_{p2} = b_{1} \cdot p_{2}^{m-1} + b_{2} p_{2}^{m-2} + \dots + b_{m-2} \cdot p_{2}^{2} + b_{m-1} \cdot p_{2}^{1} + b_{m} \cdot p_{2}^{0} + b_{m+1} p_{2}^{-1} + b_{m+2} p_{2}^{-2} + b_{m+3} p_{2}^{-3} \dots + b_{n} \cdot p_{2}^{m-n}.$$
(3.1)

В формуле (3.1) целая часть числа A, записанная в позиционной системе счисления с основанием p_2 , имеет вид

$$A_{p2 \text{ цел. часть}} = b_1 \cdot p_2^{m-1} + b_2 p_2^{m-2} + \dots + b_{m-2} \cdot p_2^2 + b_{m-1} \cdot p_2^1 + b_m \cdot p_2^0. \tag{3.2}$$

В формуле (3.1) дробная часть числа A, записанная в позиционной системе счисления с основанием p_2 , имеет вид

$$A_{p2\,\text{др. часть}} = b_{m+1} \, p_2^{-1} + b_{m+2} \, p_2^{-2} + b_{m+3} \, p_2^{-3} \dots + b_n \cdot p_2^{m-n} \,. \tag{3.3}$$

4. Перевод целых чисел из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2

Предположим, что целое число или целую часть смешанного числа, заданные в позиционной системе счисления с основанием p_1 , требуется записать в позиционной системе счисления с основанием p_2 .

Из выражения (3.2) следует, что искомые цифры b_i (i= 1, 2, ..., m) целого числа в позиционной системе счисления с основанием p_2 возможно получить посредством последовательного деления выражения (3.2) на p_2 . При этом искомые цифры будут получаться как остатки при этом делении.

Этот подход положен в основу следующего метода перевода целых чисел (или целых частей смешанных чисел) из системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 .

Метод перевода $A_{p1} \rightarrow A_{p2}$.

- 1. Число A_{p1} делится на p_2 . В результате деления получаем частное 1 и остаток 1. Проверяем выполнение неравенства частное 1 < $< p_2$. Если неравенство не выполняется, то выполняется п. 2.
- 2. Частное 1 делится на p_2 . В результате деления получаем частное 2 и остаток 2. Проверяем выполнение неравенства частное 2 < p_2 . Если неравенство не выполняется, то выполняется п. 3.
- 3. Частное 2 делится на p_2 . В результате деления получаем частное 3 и остаток 3. Проверяем выполнение неравенства частное $3 < p_2$.
- 4. На некотором этапе, в силу того, что величины частных уменьшаются, получаем частное $m > p_2$. Здесь перевод числа завершается.

Получаемые остатки являются искомыми цифрами числа в позиционной системе счисления с основанием p_2 , начиная с цифры младшего разряда. Последнее частное, которое по величине строго меньше p_2 , является старшей цифрой в искомой записи числа.

Все действия выполняются в системе счисления с основанием p_1 .

Пример 4.1.
$$A_2 = 100000000_2$$
. $A_2 \rightarrow A_{10} = ?$

 $101_2 = 5_{10} \text{ (остаток 2)}$ $10_2 = 2_{10} \text{ (частное} < 1010_2)$ Ответ: $A_{10} = 256_{10}$.

Пример 4.2.
$$A_{10} = 194_{10}$$
. $A_{10} \rightarrow A_{2} = ?$

Решение.

$$194_{10}: 2_{10} = 97_{10} \text{ (oct. } 1 = 0)$$
 $97_{10}: 2_{10} = 48_{10} \text{ (oct. } 2 = 1)$
 $48_{10}: 2_{10} = 24_{10} \text{ (oct. } 3 = 0)$
 $24_{10}: 2_{10} = 12_{10} \text{ (oct. } 4 = 0)$
 $12_{10}: 2_{10} = 6_{10} \text{ (oct. } 5 = 0)$
 $6_{10}: 2_{10} = 3_{10} \text{ (oct. } 6 = 0)$
 $3_{10}: 2_{10} = 1_{10} \text{ (oct. } 7 = 1)$
 $1 \text{ (частное} < 2)$

Otbet: $A_2 = 11000010_2$.

Пример 4.3. $A_6 = 1442_6$. $A_6 \rightarrow A_7 = ?$

Решение.

Otbet: $A_7 = 1061_{7}$.

Пример 4.4.
$$A_7 = 1061_{7.}$$
 $A_7 \rightarrow A_6 = ?$

Otbet: $A_6 = 1442_6$

Вторым подходом к переводу целых чисел (и целых частей смешанных чисел) является следующий подход.

Величина числа не зависит от системы счисления и является инвариантом. Это позволяет, опираясь на известную величину числа, представленного в позиционной системе счисления с основанием p_1 , переходить к записи этого числа в позиционной системе счисления с основанием p_2 . Этот переход удобно выполнять с использованием формулы (3.2).

Приведём примеры перевода целых чисел (и целых частей смешанных чисел) из позиционной системы с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 .

Пример 4.5.
$$A_2 = 11001010_2$$
. $A_2 \rightarrow A_{10} = ?$

Решение.

Величина числа $A_2 = 11001010_2$, при её записи в десятичной системе счисления, равна

$$A_2 = 1.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 202_{10} = A_{10}$$

В силу того, что величина числа A_2 , представленная в десятичной системе счисления, совпадает с искомой записью числа, записываем ответ $A_{10} = 202_{10}$.

Otbet:
$$A_{10} = 202_{10}$$
.

Пример 4.6.
$$A_{10} = 176_{10}$$
. $A_{10} \rightarrow A_{2} = ?$

Исходно величина числа A_{10} в силу его записи в десятичной системе счисления известна и равна $A_{10} = 176_{10}$.

Записываем величину числа A_{10} с использованием двоичной системы счисления:

$$176_{10} = b_1 \cdot 2^7 + b_2 \cdot 2^6 + b_3 \cdot 2^5 + b_4 \cdot 2^4 + b_5 \cdot 2^3 + b_6 \cdot 2^2 + b_7 \cdot 2^1 + b_8 \cdot 2^0$$

и подбираем величины b_i , где i=1,2,...,8. При выполнении подбора получаем $b_1=1$; $b_2=1$; $b_3=0$; $b_4=0$; $b_5=0$; $b_6=0$; $b_7=1$; $b_8=0$.

Действительно, $176_{10} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.

Таким образом, $A_2 = 11000010_2$.

<u>Пояснения.</u> В качестве максимальной степени m формируемого полинома выбираем такое минимальное значение m, при котором выполняется неравенство $A_{10} < 2^{m-1}$, т.е. m = 7.

Otbet: $A_2 = 11000010_2$

Пример 4.7.
$$A_5 = 1034_5$$
. $A_5 \rightarrow A_7 = ?$

Решение.

$$A_5 = 1034_5$$

Записываем величину числа $A_5 = 1034_5$ в десятичной системе счисления:

$$A_5 = 1034_5 = 1.5^3 + 0.5^2 + 3.5^1 + 4.5^0 = 125 + 15 + 4 = 144_{10}$$

и далее с использованием семеричной системы счисления

$$144_{10} = b_1 \cdot 7^2 + b_2 \cdot 7^1 + b_3 \cdot 7^0.$$

Подбирая величины b_i (i=1,2,3), получаем $b_1=2$; $b_2=6$; $b_3=4$. Таким образом, $A_5=1034_5=144_{10}=7^2+6\cdot7^1+4\cdot7^0=264_7=A_7$.

Ответ: $A_7 = 264_{7}$.

Пример 4.8.
$$A_8 = 724_{8.}$$
 $A_8 \rightarrow A_7 = ?$

$$A_8 = 724_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 468_{10} = A_{10};$$

$$A_7 = b_1 \cdot 7^2 + b_2 \cdot 7^1 + b_3 \cdot 7^0 = 468_{10} = A_{10};$$

$$b_1 = 5; b_2 = 1; b_3 = 1;$$

$$5 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 511_7 = 468_{10} = A_{10}.$$

Ответ: $A_7 = 511_7$

5. Перевод дробей из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2

Допустим, задано число $A_{p1} = A_{p1}$ _{цел. часть}, A_{p1} _{др. часть}, записанное в позиционной системе счисления с основанием p_1 .

Требуется записать дробную часть $A_{p1 \text{ др. часть}}$ в позиционной системе с основанием p_2 , т.е., согласно (3.3), записать её в виде

$$A_{p2 \text{ др. часть}} = b_{m+1} p_2^{-1} + b_{m+2} p_2^{-2} + b_{m+3} p_2^{-3} \dots + b_n \cdot p_2^{m-n}.$$

Из (3.3) следует, что для нахождения искомых цифр b_i (i=m+1, m+2, ..., n) достаточно выражение для A_{p2} др. часть (3.3) последовательно умножать на величину p_2 . При умножении целые части результатов умножения будут являться искомыми цифрами b_i ($i=m+1, m+2, \ldots, n$).

На изложенном принципе основан следующий метод перевода дробей и дробных частей смешанных чисел из системы счисления с основанием p_1 в систему счисления с основанием p_2 .

Метод перевода дроби $A_{p1} \rightarrow A_{p2}$.

- 1. Дробь A_{p1} умножается на p_2 . Результат умножения содержит целую часть 1 и дробную часть 1.
- 2. Дробная часть 1 умножается на p_2 . Результат умножения содержит целую часть 2 и дробную часть 2.
- 3. Дробная часть 2 умножается на p_2 . Результат умножения содержит целую часть 3 и дробную часть 3. И т.д.

Целые части являются искомыми цифрами дроби A_{p2} в позиционной системе счисления с основанием p_2 , начиная с цифры старшего разряда.

Все вышеуказанные действия выполняются в системе счисления с основанием p_1 .

Пример 5.1. Дана десятичная дробь $A_{10} = 0.31_{10}$. Требуется записать эту дробь в двоичной системе счисления.

Решение.

$$0,31$$
 $\times 2$
 1 -я цифра $\rightarrow 0,62$
 $\times 2$
 2 -я цифра $\rightarrow 1,24$
 $\times 2$
 3 -я цифра $\rightarrow 0,48$
 $\times 2$
 4 -я цифра $\rightarrow 0,96$
 $\times 2$
 5 -я цифра $\rightarrow 1,92$
 $\times 2$
 6 -я цифра $\rightarrow 1,84$
 $\times 2$
 $\times 2$
 $\times 2$
 $\times 2$
 $\times 2$
 $\times 2$

Otbet: $A_2 = 0.0100111...$

При переводе дробей из системы счисления с основанием p_1 в систему счисления с основанием p_2 вышеизложенным методом возникает вопрос о необходимом количестве цифр после запятой в записи дроби A_{p2} .

Необходимое количество цифр n_2 после запятой в записи дроби A_{p2} определяется из равенства

$$p_1^{-n1} = p_2^{-n2} (5.1)$$

Из равенства (5.1) следует

$$n_2 = (n_1 \cdot \lg p_1) : (\lg p_2),$$
 (5.2)

где n_1 — количество цифр после запятой в записи дроби A_{p1} , n_2 — количество цифр после запятой в записи дроби A_{p2} .

Равенства (5.1) и (5.2) обеспечивают равенство точностей при записях чисел в системах счисления с основанием p_1 и p_2 соответственно.

Так как выражение (5.2) содержит целую и дробную части, то на практике для нахождения n_2 применяют следующую формулу:

$$n_2 = [(n_1 \cdot \lg p_1) : (\lg p_2)] + 1,$$

в которой квадратные скобки обозначают, что от выражения $(n_1 \cdot \lg p_1) : (\lg p_2)$ берётся целая часть.

Для рассмотренного примера по переводу дроби $A_{10}=0.31_{10}$ в двоичную систему счисления

$$n_2 = [(2 \cdot \lg 10) : \lg 2] + 1 = 7.$$

Приведём примеры перевода дробей A_{p1} из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 .

Пример 5.2.
$$A_3 = 0.21_3$$

 $\lg 3 = 0.477$
 $\underline{\lg 5 = 0.699}$
 $A_3 \rightarrow A_5 = ?$

Решение.

$$n_2 = [(2 \cdot \lg 3) : (\lg 5)] + 1 = [(2 \cdot 0.477) : 0.699] + 1 = [1.37] + 1 = 2.$$

Otbet: $A_5 = 0.34_5$.

Пример 5.3.
$$A_5 = 0.34_5$$

 $\lg 5 = 0.699$
 $\underline{\lg 3 = 0.477}$
 $A_5 \rightarrow A_3 = ?$

$$n_2 = [(2 \cdot \lg 5) : (\lg 3)] + 1 = [(2 \cdot 0,699) : 0.477] + 1 = [2.73] + 1 = 3$$

Otbet: $A_5 = 0.202_5$.

Пример 5.4.
$$A_5 = 0.43_5$$

 $\lg 5 = 0.699$
 $\underline{\lg 7 = 0.845}$
 $A_5 \rightarrow A_7 = ?$

Решение.

$$n_2 = [(2 \cdot \lg 5) : (\lg 7)] + 1 = [(2 \cdot 0,699) : 0,845] + 1 = [1,65] + 1 = 2$$

Ответ: $A_7 = 0.63_7$.

Пример 5.5.
$$A_7 = 0.63_7$$

 $\lg 7 = 0.845$
 $\underline{\lg 5 = 0.699}$
 $A_7 \rightarrow A_5 = ?$

$$n_2 = [(2 \cdot \lg 7) : (\lg 5)] + 1 = [(2 \cdot 0,845) : 0,699] + 1 = [2,41] + 1 = 3$$

$$0,63_7 \qquad 0,41_7 \qquad 0,65_7$$

$$\times \qquad \times \qquad \times$$

$$1_{1} \text{ u.} \rightarrow \underline{4},41_7 \qquad 2_{1} \text{ u.} \rightarrow \underline{2},65_7 \qquad 3_{1} \text{ u.} \rightarrow \underline{4},54$$

Otbet: $A_5 = 0,424_5$.

6. Перевод чисел из системы счисления с основанием $p_1=2$ в систему счисления с основанием $p_2=2^k$ и обратно

Пусть задано число $A_2 = a_1, a_2, ..., a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m-n}$, представленное в двоичной системе счисления. Требуется представить это число в системе счисления с основанием $p_2 = 2^k$, где k = 2, 3, 4, ...

Перевод числа A_2 из системы счисления с основанием p_1 =2 в систему счисления с основанием p_2 = 2^k осуществляется следующим образом. Двоичные цифры исходного числа A_2 разбиваются на группы по k разрядов влево и вправо от запятой. Каждая из сформированных групп даёт запись искомых цифр в системе счисления с основанием $p_2 = 2^k$.

Пример 6.1. Пусть задано число A_2 =110011101,101010001₂, представленное в двоичной системе счисления. Требуется записать это число в системе счисления с основанием $p_2 = 2^4$, т.е. при k = 4.

$$A_2 = 1$$
 1001 1101, 1010 1000 1_{2} ; $A_{16} = 1$ 9 D , A 8 8_{16} .

Пример 6.2. Пусть задано число $A_2 = 101011000,00011011_2$, представленное в двоичной системе счисления. Требуется записать это число в системе счисления с основанием $p_2 = 2^3$, т.е. при k = 3.

$$A_2 = 101 \ 011 \ 000, \ 000 \ 110 \ 11_{2};$$

 $A_8 = 5 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6 \ 6_8$

<u>Обратный перевод</u>. Перевод числа A_{p1} из системы счисления с основанием $p_1 = 2^k$ в систему счисления с основанием p_2 =2 осуществляется посредством замены цифр числа A_{p1} их двоичными эквивалентами.

Пример 6.3. Пусть задано число $A_{16} = 19D$, $A81_{16}$ в системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется записать это число в системе счисления с основанием $p_2 = 2$.

$$A_{16} = 1$$
 9 D , A 8 1_{16} ; $A_2 = 0001$ 1001 1101 , 1010 1000 0001₂.

Пример 6.4. Пусть задано число $A_8 = 530$, 066_8 в системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в системе счисления с основанием $p_2 = 2$.

$$A_8 = 5$$
 3 0, 0 6 G_8 ; $A_2 = 101$ 011 000, 000 110 110₂.

7. Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоично-десятичную систему счисления и обратно

Этот перевод выполняется таблично без выполнения арифметических операций. Каждая десятичная цифра при этом переводе с помощью табл. 2.1 заменяется четырёхразрядным двоичным эквивалентом (тетрадой).

Пример 7.1. Пусть нам задано десятичное число $A_{10} = 246,053_{10}$. Требуется записать это число в двоично-десятичных системах 8421 и 8421+3.

Заменяя цифры исходного числа $A_{10} = 246,053_{10}$ с помощью табл. 2.1 четырёхразрядными двоичными эквивалентами, получаем:

$$A_{10} = 2$$
 4 6, 0 5 3_{10} ;
 $A_{8421} = 0010$ 0100 0110, 0000 0101 0011 $_{8421}$;
 $A_{8421+3} = 0101$ 0111 1001, 0011 1000 0110 $_{8421+3}$.

Обратный перевод чисел из систем счисления 8421 и 8421+3 в десятичную систему счисления выполняется также таблично посредством замены тетрад соответствующими десятичными цифрами.

Пример 7.2. Пусть задано число $A_{8421} = 0011 \ 1000 \ 1001, \ 0101 \ 0001 \ 0110_{8421}$, записанное в двоично-десятичной системе счисления 8421. Требуется записать это число в десятичной системе счисления.

Заменяя с помощью табл. 2.1 тетрады соответствующими десятичными цифрами, получаем:

$$A_{8421} = 0011 \ 1000 \ 1001, 0101 \ 0001 \ 0110_{8421};$$

 $A_{10} = 3 \ 8 \ 9 \ 5 \ 1 \ 6_{10}.$

Пример 7.3. Пусть задано число $A_{8421+3} = 0101 \ 1100 \ 0011, \ 0101 \ 0111 \ 1011_{8421+3}$, записанное в двоично-десятичной системе счисления 8421 + 3. Требуется записать это число в десятичной системе счисления.

Заменяя с помощью табл. 2.1 тетрады соответствующими десятичными цифрами, получаем:

$$A_{8421+3} = 0101 \ 1100 \ 0011, \ 0101 \ 0111 \ 1011_{8421+3};$$

 $A_{10} = 2 \quad 9 \quad 0 \quad , \quad 2 \quad 4 \quad 8_{10}.$

8. Перевод чисел с использованием промежуточных систем счисления

В некоторых случаях перевод чисел удобно выполнять с использованием промежуточных систем счисления.

Пример 8.1. Пусть требуется выполнить перевод числа $A_8 = 372$, 025_8 в шестнадцатеричную систему счисления.

При выполнении этого перевода удобно воспользоваться следующей схемой: $A_8 \to A_2 \to A_{16}$. Применяя эту схему, получаем:

$$A_8 = 3$$
 7 2, 0 2 S_8 ;
 $A_2 = 011$ 111 010, 000 010 101₂;
 $A_2 = 1111$ 1010, 0000 1010 1000₂;
 $A_{16} = F$ A , 0 A S_{16} .

Пример 8.2. Пусть требуется выполнить перевод числа $A_{16} = FA_{10}A_{16}$ в четверичную систему счисления.

При выполнении этого перевода удобно воспользоваться следующей схемой: $A_{16} \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$. Применяя эту схему, получаем:

9. Тесты

Тесты представляют собой задания для самостоятельной работы и выполняются студентом на практическом занятии в течение 20 минут.

В тестах предлагается два задания.

Первое задание взаимосвязано с непосредственным переводом чисел, имеющих целую и дробную части, из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 .

Второе задание связано с переводом чисел, имеющих целую и дробную части, из позиционной системы счисления с основанием p_1 в позиционную систему счисления с основанием p_2 с применением промежуточных систем счисления.

Вариант № 1

- 1. Задано число $A_7 = 651,243_7$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 7$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 4$.
- 2. Задано число $A_{16} = F05,4E3_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 2

1. Задано число $A_8 = 721,432_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 5$.

2. Задано число $A_8 = 725,344_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 3

- 1. Задано число $A_9 = 825,144_9$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 9$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 6$.
- 2. Задано число $A_{16} = AB3,12E_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 4

- 1. Задано число $A_8 = 623,244_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 7$.
- 2. Задано число $A_8 = 707,105_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 5

- 1. Задано число $A_7 = 625,343_7$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 7$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 8$.
- 2. Задано число $A=1E0,1FD_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 6

1. Задано число $A_6 = 541,242_6$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 6$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 9$.

2. Задано число $A_8 = 623,176_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 7

- 1. Задано число $A_5 = 431,123_5$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 5$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 8$.
- 2. Задано число $A_{16}=1DE$, $F02_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 8

- 1. Задано число $A_3 = 221,122_3$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 3$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 7$.
- 2. Задано число $A=176,144_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 9

- 1. Задано число $A_4 = 323,133_4$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 4$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 6$.
- 2. Задано число $A_{16} = 2EA, 1EA_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 10

1. Задано число $A_5 = 414,223_5$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 5$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 4$.

2. Задано число $A_8 = 157,105_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 11

- 1. Задано число $A_6 = 525,241_6$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 6$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 3$.
- 2. Задано число $A_{16}=3AB,C0D_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 12

- 1. Задано число $A_7 = 616,156_7$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 7$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 4$.
- 2. Задано число $A_8 = 525,107_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 13

- 1. Задано число $A_8 = 725,144_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 5$.
- 2. Задано число $A_{16}=4BC$, $A0E_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 14

1. Задано число $A_9 = 814,147_9$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 9$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 6$.

2. Задано число $A_8 = 441,624_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 15

- 1. Задано число $A_8 = 624,725_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 7$.
- 2. Задано число $A_{16}=1AF,3A3_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2=8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 16

- 1. Задано число $A_7 = 524,356_7$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 7$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 8$.
- 2. Задано число $A_8 = 326,621_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 17

- 1. $\overline{3}$ адано число $A=432,245_6$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1=6$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2=9$.
- 2. Задано число $A_{16} = 4FE, 1A5_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 18

1. Задано число $A_5 = 312,144_5$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 5$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 8$.

2. Задано число $A_8 = 324,124_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 19

- 1. Задано число $A_4 = 133,123_3$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 3$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 7$.
- 2. Задано число $A_{16} = 5EA, 3E4_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 20

- 1. Задано число $A_3 = 122,211_3$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 3$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 6$.
- 2. Задано число $A_8 = 663,463_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 21

- 1. $\overline{3}$ адано число $A_4 = 331,123_4$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 4$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 5$.
- 2. Задано число $A_{16} = 6DE$, $A05_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 22

1. Задано число $A_5 = 441,143_5$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 5$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 4$.

2. Задано число $A_8 = 456,244_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 23

- 1. Задано число $A6 = 525,153_6$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 6$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 3$.
- 2. Задано число $A_{16} = 7BC, 1A3_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 24

- 1. Задано число $A_7 = 661,136_7$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 7$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 4$.
- 2. Задано число $A_8 = 564,424_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 16$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Вариант № 25

- 1. Задано число $A_8 = 707,165_8$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 8$. Требуется записать это число в позиционной системе счисления с основанием $p_2 = 5$.
- 2. Задано число $A_{16} = 5EF, 10E_{16}$ в позиционной системе счисления с основанием $p_1 = 16$. Требуется перевести это число в позиционную систему счисления с основанием $p_2 = 8$. Перевод выполнить с применением промежуточной системы счисления.

Список литературы

- 1. Андреева Е.В., Фалина И.Н. Системы счисления и компьютерная арифметика: Учебное пособие. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.
- 2. Бурдинский И.Н. Системы счисления и арифметика ЭВМ: Учебное пособие. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. Гос. ун-та, 2008.
- 3. Виноградова Е.П. Системы счисления. Отношение делимости: Учебно-методическое пособие. Оренбург: ГУ "РЦРО", 2008.
- 4. Григорьев В.В. Системы счисления// Свойства. Конвертация. Алгоритмы: Учебное пособие. СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2011.
- 5. Деон А.Ф., Комаров С.С., Терентьев Ю.И. Программные преобразования числовой информации: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
- 6. Дударев В.А., Колыбанов К.Ю. Математические основы построения вычислительных систем: Учебное пособие. М.: МИТХТ им. Ломоносова, 2008.
- 7. Задорожный В.Н., Канева О.Н. Информатика: Конспект лекций. Изд-во ОмГТУ, 2005.
- 8. Иваницкий А.Ю., Алексеев Б.В., Егорова Д.В., Ефимова Г.Е. Представление чисел и особенности машинной арифметики: Учебнометодическое пособие. Чебоксары: Чувашский ун-т, 2004.
- 9. Казачек Н.А. Числовые системы: Учебно-методическое пособие. Чита: Изд-во ЗабГГПУ, 2008.
- 10. Лапшин В.П. Математика: системы счисления. Учебное пособие. Томск: Изд-во ТГПУ, 2009.
- 11. Лактионова Ю.С. Информатика: Учебное пособие. Магнитогорск: МаГУ, 2010.
- 12. Локтионова Ю.С. Инфоматика: Учебное пособие. Магнитогорск: МаГУ, 2010.
- 13. Лиокумович Л.Б., Сочава А.А. Введение в цифровую схемотехнику. Системы счисления и двоичная арифметика. Алгебра логики и логические схемы: Конспект лекций. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003.
- 14. Мейлахс А.Л. Практикум по математическим основам информатики. Ч.1// Системы счисления. Двоичная арифметика. Представле-

ние чисел в памяти ЭВМ: Методические указания. – М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2004.

- 15. Свиньин С.Ф. Теоретическая информатика: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.
- 16. Ситников В.М. Числовые системы: Учебное пособие. Челябинск: Изд-во Челябинского гос. пед. ун-та, 2009.
- 17. Тропин М.П. Числовые системы: Курс лекций для студентов 4-го курса математического факультета. Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2009.
- 18. Чепайкина Н.Г. Информатика. Арифметические основы вычислительной техники: Конспект лекций. Чебоксары: Чуваш. гос. унтим. И.Н. Ульянова, 2005.
- 19. Черникова Э.В., Полупанов А.А. Позиционные системы счисления: Практикум. Новороссийск: НГМА, 2005.

Редактор Е.Е. Шумакова

Подписано в печать 20.11.2014. Формат 60х84 1/16 Печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 140 экз. Изд. № 1/29. Заказ № 27.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ». 115409, Москва, Каширское ш., 31. OOO «Клаб Принт». 127018, Москва, Марьиной Рощи 3-й проезд, д. 40, корп. 1.