Blatt 1, Logik für Informatiker, 13.11.2019

Freitag, 8. November 2019 09:28

Christoph Janus (4719108), Stefan Haug (2014279)

Gruppe 6,	Tutor Sören Andres

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Beschreibe vollständig alle induzierten Funktionen der Terme in n Variablen bezüglich der Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ in der leeren Sprache sowie der Strukturen $(\mathbb{Z}, +, -)$ und $(\mathbb{Z}, 2, +, -, \cdot)$.

① LEERE SPRACHE $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$, hat keine Konstanten, Funktionen und Relationen

STRUKTUR: $\mathcal{Z}_\emptyset = (\mathbb{Z}, \{ \})$

$\rightarrow$ Terme können nur einzelne Variablen sein (Stufe 0)

$\rightarrow$ $t = x_i$ für Variable x_i $\rightarrow$ $t^A[a_1, .., a_n] = a_i$ ($i \in \{1, .., n\}$)

FUNKTIONEN: $x_i^{\mathcal{Z}_\emptyset} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$

$x_i^{\mathcal{Z}_\emptyset}$ $(a_1, .. a_n) \longmapsto a_i$ $i \in \{1, ... n\}$

② $\mathcal{L} = \{ f_1 : +, f_2 : - \}$, **STRUKTUR:** $\mathcal{Z}_2 = (\mathbb{Z}, f_1^{\mathcal{Z}_2} : +, f_2^{\mathcal{Z}_2} -)$

FUNKTIONEN: • $x_i^{\mathcal{Z}_2} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$

$(a_1, .. a_n) \longmapsto a_i$ $i \in \{1, ... n\}$ (analog zu ①)

• Falls $t = f_i^{\mathcal{Z}_2}(t_1, t_2)$ folgt

$t^A[a_1 .., a_n] = f_i^{\mathcal{Z}_2}(t^A[a_1, .., a_n], t^A[a_1, .., a_n])$ $i \in \{1, 2\}$

(rekursive Definition der Terme, Rekursionsstufe beliebig)

Von diesen Termen werden folgende Funktionen $y_i^{\mathcal{Z}_2}$ induziert

$y_i^{\mathcal{Z}_2} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ $i \in \mathbb{N}$

$(a_1, ..., a_n) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot a_j$ $z_j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

<u>Bem</u> $z_j^+ \cdot a_j$ ist zu interpretieren als $\underbrace{a_j + . + a_j}_{z_j^+ \text{-mal}}$

Aufgabe 1

③ $\mathcal{L} = \{ 2, +, -, \cdot \}$, **STRUKTUR:** $Z_3 = (\mathbb{Z}, c^{Z_3}: 2, f_1^{Z_3}: +, f_2^{Z_3}: -, f_3^{Z_3}: \cdot)$

FUNKTIONEN:

- $x_i^{Z_3}: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

  $(a_1, .., a_n) \mapsto a_i \quad i \in \{1, .. n\}$ (analog zu ① und ②)

- $Y_i^{Z_3}: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \quad i \in \mathbb{N}$

  $(a_1, .. a_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot a_j + z_0 \cdot 2 \quad z_j, z_0 \in \mathbb{Z}$

- Falls $t = c = 2$ ist $t^A = 2$, von diesem Term wird die folgende konstante Funktion induziert:

  $z_c^{Z_3}: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

  $(a_1, .., a_n) \mapsto 2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (4 Punkte).

(a) Beschreibe die von der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen erzeugte Unterstruktur der Struktur $\mathbb{Q}$ in der leeren Sprache. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

$\mathcal{N}_{ungerade}$ = Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

$\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{L}$-STRUKTUR $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \{\})$

$\mathcal{L}$-UNTERSTRUKTUR $\mathcal{N}_{ungerade} = (\mathbb{N}_{ungerade}, \{\})$ (keine Relationen, Funktionen, Konstanten)

Da $|\mathbb{N}_{ungerade}| = \infty$ und $\mathcal{L} = \emptyset$ ist $\mathcal{N}_{ungerade}$ NICHT endlich erzeugt. ☒

(b) Beschreibe die von der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen erzeugte Unterstruktur der Struktur $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

$\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, $\mathcal{L}$-STRUKTUR $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$

$\mathcal{L}$-UNTERSTRUKTUR $\mathcal{N}_{ungerade} = (\mathbb{N}_{ungerade}, 0, 1, +, -, \cdot)$

Die Unterstruktur $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ der ganzen Zahlen ist in $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ enthalten ($\mathcal{B}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$) und kann durch $\{1\}$ endlich erzeugt werden.

Schreibt man das so: $\langle\{1\}\rangle_{\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}} = \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$?

Da $\mathcal{N}_{ungerade} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ muss $\mathcal{N}_{ungerade}$ auch endlich erzeugbar sein. ☒

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Ein *Graph* (V, E) ist eine nichtleere Menge V von *Punkten* zusammen mit einer Menge E, welche aus 2-elementigen Teilmengen von V (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von (V, E) ist ein Graph (V', E') derart, dass $V' \subset V$ und $E' \subset E$.

Jeder Graph kann als Struktur in der Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R betrachtet werden.

(a) Zeige, dass jede Unterstruktur (in der Graphensprache) eines Graphen ein Teilgraph ist.

$\mathcal{L}_{GRAPH} = \{R\}$, R ist eine zweistellige Relation für die gilt:
$(x, y) \in R \Leftrightarrow \{x, y\} \in E$ $\quad (x, y \in V)$

L-STRUKTUR: $G = (V, R)$ $\quad V =$ Punktemenge, Struktur G für einen Graphen

Für den Teilgraphen G' von G gilt: $V' \subset V$ und $E' \subset E$

ZZ Jede Unterstruktur eines Graphen ist ein Teilgraph

Bew

G_s' sei Unterstruktur von G_s in der Graphensprache: $G_s' \subset G_s$

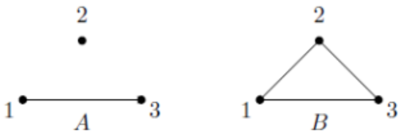
$\to$ Für das Universum V' von G_s' gilt $V' \subset V$

$\to$ E' sind alle $(x, y) \in R$ mit $x, y \in V'$

$\to$ $E' \subset E$ $\quad$ ($|V'|$ ist ja kleiner $|V|$)

$\to$ $V' \subset V$ und $E' \subset E$

$\to$ G_s' ist ein Teilgraph von G_s



(b) Im obigen Bild, ist A ein Teilgraph von B? Ist die vom Graph A induzierte Struktur eine Unterstruktur von der vom Graph B induzierten Struktur?

Da $V_A \subseteq V_B$ und $E_A \subseteq E_B$ ist A ein Teilgraph von B laut obiger Definition
(A ist ein unzusammenhängender Graph)

Wenn A Unterstruktur von B muss gelten

1. $V_A \subseteq V_B$, das stimmt, da $V_A = V_B$
2. $id_A : A \to B$ ist eine Einbettung, da

$(x_A, y_A) \in R_A \to (id_A(x_A), id_A(y_A)) = (x_B, y_B) \in R_B$

konkret: $(1, 3) \in R_A \to (1, 3) \in R_B$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$, deren Universum die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$ ist und ferner $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ eine Surjektion $P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ und eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ die Identität ist.

Seien nun $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei abzählbare $\mathcal{L}$-Strukturen in $\mathcal{K}$ mit folgenden Zusatzeigenschaften: In $Q^{\mathcal{B}}$ gibt es ein Element b_0 derart, dass für $b \neq b_0$ aus $Q^{\mathcal{B}}$ die Faser $f^{-1}(b)$ unendlich ist, aber $f^{-1}(b_0)$ Größe 2 hat. In $Q^{\mathcal{C}}$ gibt es zwei Elemente c_1 und c_2 derart, dass für $c \neq c_1, c_2$ aus $Q^{\mathcal{C}}$ die Faser $f^{-1}(c)$ unendlich ist, aber die Fasern $f^{-1}(c_1)$ und $f^{-1}(c_2)$ jeweils Größe 5 haben.

(a) Lassen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sich jeweils ineinander einbetten?

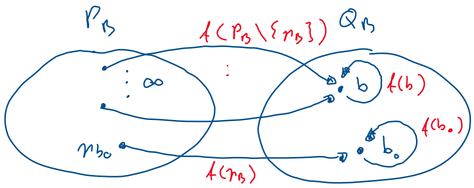
Für das eigene Verständnis (Lösung auf der Folgeseite)

$\mathcal{L} = \{ f, P, Q \}$

$\mathcal{L}$-Struktur $\quad A_i = (P^{A_i} \cup Q^{A_i}, f, P, Q)$. $\quad i \in \mathbb{N} \quad |P^{A_i}| = |Q^{A_i}| = \infty$

$\mathcal{K} = \{ A_i \mid$ für die f eingeschränkt auf P^{A_i} Surjektion $P^A \to Q^A$ und f eingeschränkt auf Q^{A_i} die Identität, $i \in \mathbb{N} \}$

$\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$:

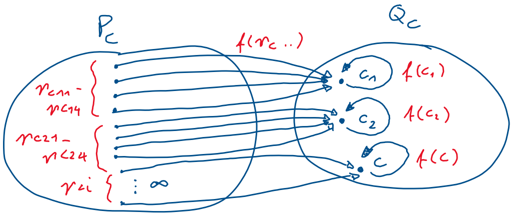


$b \neq b_0$

$f^{-1}(b_0) = \{ b_0, r_{b_0} \}, \quad |f^{-1}(b_0)| = 2$

$f^{-1}(b) = \{ b, r_{B1}, r_{B2}, \cdot r_{Bi} \} \quad i \in \mathbb{N}, \quad |f^{-1}(b)| = \infty$

$\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{C}$:



$c \neq c_1, c_2$

$f^{-1}(c) = \{ c, r_{c1}, r_{c2}, \ldots, r_{ci} \}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad f^{-1}(c) = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(c_1) = \{ c_1, r_{c11}, r_{c12}, r_{c13}, r_{c14} \} \\ f^{-1}(c_2) = \{ c_2, r_{c21}, r_{c22}, r_{c23}, r_{c24} \} \end{array}\right\} |f^{-1}(c_1)| = 5 = |f^{-1}(c_2)|$$

Aufgabe 4

a) Folgende Abbildung F ist eine Einbettung der Struktur $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$

$$F: P^{\mathcal{B}} \cup Q^{\mathcal{B}} \longrightarrow P^{\mathcal{C}} \cup Q^{\mathcal{C}}$$

$$b_0 \longmapsto c_1$$

$$p_{b_0} \longmapsto p_{c_{11}}$$

$p_{\mathcal{B}} \longmapsto p_{\mathcal{C}}$ injektive Abbildung jeweils eines $p_{\mathcal{B}} \in f^{-1}(b)$ auf ein $p_{\mathcal{C}} \in f^{-1}(c)$

$b \longrightarrow c$ $b \neq b_0$, $b \in Q_{\mathcal{B}}$, $c \neq c_1, c_2$, $c = Q_{\mathcal{C}}$

da gilt:
- F ist injektiv und
- $F(f^{\mathcal{B}}(b_0)) = c_1 = f^{\mathcal{C}}(F(b_0))$,
  $F(f^{\mathcal{B}}(p_{b_0})) = c_1 = f^{\mathcal{C}}(F(p_{b_0}))$,
  $F(f^{\mathcal{B}}(b)) = c = f^{\mathcal{C}}(F(b))$,
  $F(f^{\mathcal{B}}(p_{\mathcal{B}})) = c = f^{\mathcal{C}}(F(b))$ und
- $p_{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{B}} \iff F(p_{\mathcal{B}}) \in P^{\mathcal{C}}$,
  $q_{\mathcal{B}} \in Q^{\mathcal{B}} \iff F(q_{\mathcal{B}}) \in Q^{\mathcal{C}}$

Für $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ lässt sich keine injektive Abbildung zwischen den Strukturen finden, da für die Bedingung

$$F(f^{\mathcal{C}}(p_{c_{i,j}})) = f^{\mathcal{B}}(F(p_{c_{i,j}})) \qquad i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2,3,4\}$$

alle $p_{c_{11}} \dots p_{c_{14}}$ und $p_{c_{21}} \dots p_{c_{24}}$ (= 8 Elemente) auf p_{b_0} abgebildet werden müssten.

(b) Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ isomorph?

b) Da F keine surjektive (ergo bijektive) Einbettung ist (auf $p_{c_{12}}$ wird z.B. nicht abgebildet) sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ NICHT isomorph.