Blatt 3, Logik für Informatiker, 20.11.2019

Christoph Janus (4719108), Stefan Haug (2014279)

Gruppe 6,	Tutor Sören Andres

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Betrachte die Strukturen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{*\}$, wobei $*$ ein zweistelliges Funktionszeichen ist. Sind sie elementar äquivalent?

Gegeben $\mathcal{L}$ - STRUKTUREN $Z = (\mathbb{Z}, *)$ $\mathcal{L}$ - SPRACHE : $\{ * \}$

$Q = (\mathbb{Q}, *)$

FRAGE Ist Z elementar äquivalent zu Q $(Z \equiv Q)$?

Sei X folgende Aussage : $\exists Y$ im Universum U mit $Y + Y = 1$

① Es gilt $Q \models X$, mit $Y = \frac{1}{2}$ gilt $Y + Y = 1$ und $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $1 \in \mathbb{Q}$

② Allerdings ist $Z \not\models X$, da für alle ungeraden Zahlen x
$\nexists Y$ mit $Y + Y = X$.

Aus ① und ② folgt : Z und Q nicht logisch äquivalent.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ ist die Identität;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist eine Surjektion $f^{\mathcal{A}} : P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ derart, dass jede Faser $f^{-1}(a)$, für a in $Q^{\mathcal{A}}$, unendlich ist.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{ f, \quad P, Q \}$

f: einstellige Funktion

P, Q: einstellige Relationen

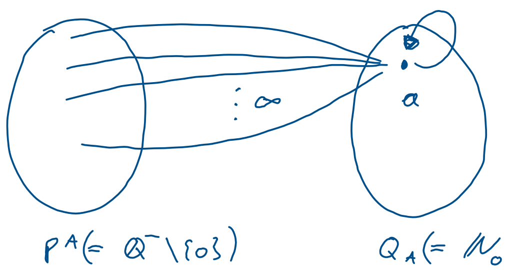
Klasse K aller $\mathcal{L}$-Strukturen $K = \{ P^A \cup Q^A, f, P, Q \}$

wobei gilt: ① $P^A \cap Q^A = \emptyset$, P^A und Q^A unendlich.

② $f_A(Q^A) = id_{Q^A}$

③ $f_A(P^A)$ ist surjektive Abbildung $P^A \to Q^A$ so dass $|f_A^{-1}(a)| = \infty$ für $a \in Q^A$

Bildlich:

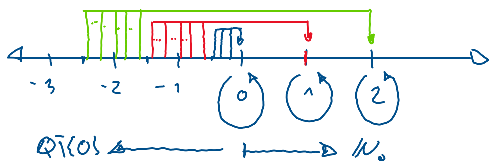


Beispiel:

$P^A = \mathbb{Q}^- \setminus \{0\}$ (negative rationale Zahlen)

$Q^A = \mathbb{N}_0$ (natürliche Zahlen mit 0)

$$f_A(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ -(\text{Dezimalbruch gerundet}) & \text{für } x \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$$



a) Nein, K ist nicht leer (s. Beispiel oben)

b) Es wäre für alle Strukturen $A, B \in K$ folgende Abbildung F denkbar:

$F: \quad A \to B$

$a_A \to a_B \qquad (a_A \in Q_A,\ a_B \in Q_B)$

$f^{-1}(a_A) \to f^{-1}(a_B)$ (jedes Element der Faser von a_A in Q_A wird auf ein Element der Faser von Q_B abgebildet)

Für F gilt:

① F ist bijektiv

② $F(f(x)) = a_b = f(F(x))$ für $x \in P^A \cup Q^A$

③ $P^A(x) \iff P^B(F(x))$ und

$Q^A(x) \iff Q^B(F(x))$ für $x \in P^A \cup Q^A$

Somit ist F ein Isomorphismus $A \to B$. Aus $A \simeq B$ folgt $A \equiv B$.

Somit sind immer zwei Strukturen $A, B \in K$ elementar äquivalent.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen E. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelationen mit zwei Äquivalenzklassen ist und ferner beide Klassen unendlich sind.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{E\}$ E sei 2-stelliges Relationszeichen.

$\mathcal{L}$ - Struktur $A = \{\mathcal{U}, E^A\}$, es gelte

① E^A ist Äquivalenzrelation mit 2 Äquivalenzklassen E_1^A, E_2^A, $|E_1^A| = |E_2^A| = \infty$

② $E_1^A \cap E_2^A = \emptyset$

K ist Menge aller entsprechenden $\mathcal{L}$ - Strukturen.

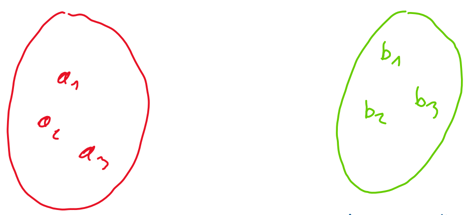
Bedingungen Äquivalenzrelation

① REFLEXIVITÄT: $(a, a) \in \sim$ wenn $a \in E_1^A$ o. E_2^A

② SYMMETRIE: $(a, b) \in \sim \Rightarrow (b, a) \in \sim$ wenn $a, b \in E_1^A$ o E_2^A

③ TRANSITIVITÄT: $(a, b) \in \sim$ und $(b, c) \in \sim \Rightarrow (a, c) \in \sim$ wenn $a, b, c \in E_1^A$ o E_2^A

Beispiel: $\mathcal{U}$ = Menge aller roten und grünen Möbelstücke



E_1^A = Rote Möbel E_2^A = Grüne Möbel

E^A vergleicht die Farbe der Möbel. Man sieht leicht, die ÄR ist symmetr., reflexiv und transitiv

a) Die Klasse ist nicht leer, siehe Beispiel.

b) Gegeben: Zwei $\mathcal{L}$ - Strukturen $A, B \in K$.

Abbildung F: $A \to B$

$x_{E_1^A} \mapsto x_{E_1^B}$
$x_{E_2^A} \mapsto x_{E_2^B}$ } bildet je ein Element aus E_1^A auf eines aus E_1^B bzw. aus E_2^A auf E_2^B ab

F ist bijektiv (da $|E_1^A| = |E_1^B| = |E_2^A| = |E_2^B| = \infty$)

Da gilt: $E^A(x_1, x_2) \Leftrightarrow E^B(F(x_1), F(x_2))$ für $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$

Somit ist $A \simeq B \to A \equiv B$, je zwei Strukturen aus K sind also elementar äquivalent

Aufgabe 4

Aufgabe 4 (5 Punkte).
In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A. Schliesse daraus, dass

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

VORÜBERLEGUNGEN

F sei Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur A in die Struktur B, d.h. per Definition gilt:

(i) $F(c^A) = c^B$ für Konstantenzeichen $c^A \in A$ u. $c^B \in B$

(ii) $F(f^A(a_1 \ldots a_n)) = f^B(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \quad \forall\, a_1 \ldots a_n \in A$
für Funktionszeichen f mit Stelligkeit n

Für jede $\mathcal{L}$-Struktur A definiert ein Term $t = t[x_1 \ldots x_m]$ eine Funktion

$$t^A : \quad A^m \to A$$
$$(a_1, \ldots a_m) \to t^A[a_1 \ldots a_m]$$

$t^A[a_1 \ldots a_m]$ ist der Wert von t evaluiert für $x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m$.
Terme können daher folgende Werte annehmen ("induktive Definition")

① $t = c \quad \to \quad t^A$ ist die konstante Funktion mit Wert c^A

② $t = x_i \quad \to \quad t^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$ für eine Variable x_i

③ $t = f(t_1 \ldots t_n) \to t^A[a_1 \ldots a_m] = f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 (5 Punkte).
In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

a) $$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A. Schliesse daraus, dass

b) $$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

BEWEIS

a)

1. Falls $t = c$ $\Rightarrow$ $F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(c^A) \overset{(i)}{=} c^B = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

2. Falls $t = x_i$ für Variable x_i ist $t^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$

$\Rightarrow F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(a_i) = b_i = t^B[b_1 \ldots b_m] = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

3. Falls $t = f(t_1 \ldots t_m)$ $\Rightarrow$ $t^A[a_1 \ldots a_m] = f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$

$\Rightarrow$ $F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m]))$

- $t^A[a_1 \ldots a_m]$ ersetzen mit $f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$
- bis (1) $t_1^A[a_1 \ldots a_m] = c^A$ oder
- (2) $t_1^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$

$= F(f^A(\ldots f^A(t_{i1}^A[a_1 \ldots a_m], t_{im}[a_1 \ldots a_m]) \ldots))$

$\overset{(1),(2),ii}{=} f^B(\ldots f^B(t_{i1}^B[F(a_1) \ldots F(a_m)] \ldots t_{im}^B[F(a_1) \ldots F(a_m)]) \ldots)$

$= t[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

b) Wenn A Unterstruktur von B ist ($A \subset B$) gilt die "Mengentheoretische Inklusion" $id_A: A \to B$ (Def. 2.5).
Somit ist $F(a_1) = a_1, \ldots, F(a_n) = a_n$ bzw. $F(t^A[a_1 \ldots a_n]) = t^A[a_1 \ldots a_n]$.

$F(t^A[a_1 \ldots a_n]) = t^A[a_1 \ldots a_n] = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)] = t^B[a_1 \ldots a_n]$

$\boxtimes$