Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 3
Abgabe: 20.11.2019, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Betrachte die Strukturen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{*\}$, wobei $*$ ein zweistelliges Funktionszeichen ist. Sind sie elementar äquivalent?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ ist die Identität;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist eine Surjektion $f^{\mathcal{A}} : P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ derart, dass jede Faser $f^{-1}(a)$, für a in $Q^{\mathcal{A}}$, unendlich ist.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen E. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelationen mit zwei Äquivalenzklassen ist und ferner beide Klassen unendlich sind.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A. Schliesse daraus, dass

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.