A1)

- $\mathbb{Z}$ $\{x_1, \dots, x_n\}$

WICHTIG: Begründung angeben

$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$

- $(\mathbb{Z}, +, -)$

$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \qquad z_i \in \mathbb{Z}$

- $(\mathbb{Z}, 2, +, -, \cdot)$

$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} z_i x_1^{k_1,i} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n,i} \qquad z_i \in \mathbb{Z}$

A3)

$\mathcal{L} = \{R\}$ $\qquad$ Graph $= (V, E)$

$G' = (V', E')$

$V' \subset V$ $\qquad$ $id_{G'} : G' \to G$

$g' \to g'$

hier keine Quantoren

f.a. $x_1, x_2 \in V' : \; x_1, x_2 \in V$, da $V' \subset V$

$\Rightarrow (x_1, x_2) \in E'$, falls $(x_1, x_2) \in E$

$\Rightarrow E' \subset E$ $\quad\blacksquare$

b)(i) $A = (\underbrace{\{1, 2, 3\}}_{V^A}, \underbrace{\{(1, 3)\}}_{E^A})$

$B = (\underbrace{\{1, 2, 3\}}_{V^B}, \underbrace{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}}_{E^B})$

$\Rightarrow V^A = V^B, \quad E^A \subset E^B$

$\Rightarrow A$ ist Teilgraph von B

(ii) $(1, 2) \notin A$, $(1, 2) \in B$ $\Rightarrow$ Deshalb keine Unterstruktur

$\left((a, b) \in A \Leftrightarrow (id(a), id(b)) \notin US \Leftrightarrow (a, b) \notin B \right)$

A4) $B, C \in \mathcal{K}$ $\mathcal{L} = \{f, P, Q\}$

$b_0 \in Q^B$ $|f^{(-1)^B}(b_0)| = 2$

$c_1, c_2 \in Q^C$ $|f^{(-1)^C}(c_1)| = |f^{-1}(c_2)| = 5$

$Q^B = \{b_0, b_1, \dots\}$

$Q^C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$

$f^{(-1)^B}(b_i)$ $f^{(-1)^C}(c_{i+3})$

$F_i : f^{(-1)^B}(b_i) \to f^{(-1)^C}(c_{i+3}) \setminus \{c_{i+3}\}$ (Abbildung kann immer injektiv bleiben)

$F: B \to C$ durch

$$F(b) = \begin{cases} c_{i+3} & \text{falls } b \in Q^B, \text{ d.h. } b = b_i \\ F_i(b) & \text{falls } b \in P^B, \text{ d.h. } f^B(b) = b_i \end{cases}$$

$b \in Q^P \iff F(b) = c_{i+3}$

$\iff c_{i+3} \in Q^C$

$b \in P^B \iff b \in f^{(-1)^C}(b_i)$ weil ein Element aus Q herausgenommen wurde (ObdA)

$\iff F_i(b) \in P^C$

- $b \in Q^B$, $b = b_i$ für ein i

$F(f^B(b_i)) = F(b_i) = c_{i+3}$

$= f^C(c_{i+3}) = f^C(F(b_i))$

- $b \in P^B$, $b \in f^{(-1)^B}(b_i)$ für ein i

$F(f^B(b)) = F(b_i) = c_{i+3}$

$= f^C(F_i(b))$

$= f^C(F(b))$

$\Rightarrow$ B lässt sich in C einbetten

C lässt sich in B einbetten

c_i abbilden auf b_{i+1} ("endliche Faser werden übersprungen")

b) Angenommen es gibt Isomorphismus

$\varphi : C \to B$

es gibt ein i $\varphi(c_i) = b_0$, $|f^{(-1)C}(c_i)| > 2$

$d_1, d_2, d_3 \in f^{(-1)C}(c_i)$

$f^B(\varphi(d_j)) = \varphi(f^C(d_j)) = \varphi(c_i) = b_0$, also $\varphi(d_j) \in f^{(-1)B}(b_0)$

für $j \in \{1, 2, 3\}$

$|f^{(-1)B}(b_0)| \geq 3$ ↯