Blatt 1, Logik für Informatiker, 4.11.2019

Christoph Janus (4719108), Stefan Haug (2014279)

Gruppe 6,	Tutor Sören Andres

AUFGABE 2

ZZ $\neg(P \to Q) \sim (\neg P \to \neg Q)$

Bew Aus der Definition der Implikation folgt

$$(P \to Q) \sim (\neg P \vee Q)$$

somit gilt (linke Seite):

$$\neg(P \to Q) \overset{\text{Def}}{\sim} \neg(\neg P \vee Q) \overset{\text{De Morgan Regel}}{\sim} (\neg\neg P \wedge \neg Q) \overset{\text{Doppelte neg.}}{\sim} (P \wedge \neg Q)$$

analog für rechte Seite:

$$(\neg P \to \neg Q) \overset{\text{Def}}{\sim} (\neg\neg P \vee \neg Q) \overset{\text{Doppelte neg}}{\sim} (P \vee \neg Q)$$

Da $(P \vee \neg Q) \not\sim (P \wedge \neg Q)$

ist $(P \to Q) \not\sim (\neg P \vee Q)$, die beiden Formeln sind nicht äquivalent ☒

AUFGABE 1

Gebe KNF und DNF für folgende aussagenlogischen Formeln an:

a) $((P \to Q) \to (R \wedge Q))$ Def von "$\to$"

$\sim ((\neg P \vee Q) \to (R \wedge Q))$ Def. von "$\to$"

$\sim (\neg(\neg P \vee Q) \vee (R \wedge Q))$ De Morgan

$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q))$ **entspricht** DNF, Distributivgesetz

$\sim (((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q)))$ Distr., Assoziativgesetz

$\sim ((P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge \underbrace{(\neg Q \vee Q)}_{\sim T})$ T - Regel

$\sim ((P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q))$ KNF

b) $(\neg(P \to Q) \vee (P \to R))$ Def von "$\to$"

$\sim (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$ De Morgan

$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$ Distr $\vee$ uber $\wedge$

$\sim (((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R)$ Distr $\vee$ über $\wedge$

$\sim ((P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$ = KNF, Prinzip ausgeschl. Dritten

$\sim (T \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$ Idempotenz

$\sim ((\neg Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg P) \vee (R \wedge R)$ = DNF

AUFGABE 3

Prüfe mit Tableau Methode ob folgende Aussagen Tautologien sind:

a) $(\neg(P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P))$

Gibt es Belegung β so dass $\beta(\alpha)) = 0$? (analoge Beweisführung bei den folgenden Aufgaben)

$$(\neg(P \rightarrow Q) \overset{①}{\lor} (Q \rightarrow P)) : 0$$

↓①

$$\overset{②}{\neg}(P \rightarrow Q) : 0 \ \& \ (Q \overset{④}{\rightarrow} P) : 0$$

↓② ↓④

$$\overset{③}{(P \rightarrow Q)} : 1 \qquad Q : 1,\ P : 0 \quad \text{(erfüllbar)}$$

③

(elementar) $P : 0$ $Q : 1$

=> bei $P:0$ und $Q:1$ ist $(\neg(P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P))$ falsch und somit keine Tautologie

b) $(((P \rightarrow R) \land (R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$

$$(((P \rightarrow R) \land (R \rightarrow Q)) \overset{①}{\rightarrow} (P \rightarrow Q)) : 0$$

↓①

$$((P \rightarrow R) \overset{②}{\land} (R \rightarrow Q)) : 1 \ \& \ (P \overset{⑤}{\rightarrow} Q) : 0$$

② ↓⑤

$$(P \overset{③}{\rightarrow} R) : 1 \qquad (R \overset{④}{\rightarrow} Q) : 1 \qquad P : 1,\ Q : 0$$

③ ④

$$P : 0 \qquad R : 1 \qquad R : 0 \qquad Q : 1$$

] es findet sich keine erfüllende Belegung so dass b) falsch ist (schließt)

-> b) kann nicht falsch sein und ist daher eine Tautologie

c) $(((P \lor Q) \rightarrow (R \land S)) \rightarrow ((P \land Q) \rightarrow (R \lor S)))$

$$(((P \lor Q) \rightarrow (R \land S)) \overset{①}{\rightarrow} ((P \land Q) \rightarrow (R \lor S))) : 0$$

↓①

$$((P \lor Q) \overset{⑤}{\rightarrow} (R \land S)) : 1, \ \& \ ((P \land Q) \overset{②}{\rightarrow} (R \lor S)) : 0$$

⑤ ↓②

$$(P \overset{⑥}{\lor} Q) : 0 \qquad (R \overset{⑦}{\land} S) : 1 \qquad (P \overset{③}{\land} Q) : 1 \ \& \ (R \overset{④}{\lor} S) : 0$$

↓⑥ ↓⑦ ↓③ ↓④

$$P : 0,\ Q : 0 \qquad R : 1,\ S : 1 \qquad P : 1,\ Q : 1 \qquad R : 0,\ S : 0$$

] nicht erfüllbar (schließt)

-> c) ist eine Tautologie (kann nicht falsch sein)

d) $(((P \wedge Q) \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$

$$(((P \wedge Q) \to R) \overset{\textcircled{1}}{\to} ((P \vee Q) \to R)) : 0$$

$\downarrow$ ①

$$((P \wedge Q) \overset{\textcircled{2}}{\to} R) : 1 \quad \& \quad ((P \vee Q) \overset{\textcircled{4}}{\to} R)) : 0$$

$\swarrow$ ② $\searrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ ④

$(P \overset{\textcircled{3}}{\wedge} Q) : 0 \qquad R : 1 \qquad (P \overset{\textcircled{5}}{\vee} Q) : 1 \;\&\; R : 0$

$\swarrow$ ③ $\searrow$ $\qquad\qquad$ $\swarrow$ ⑤ $\searrow$

$P : 0 \quad Q : 0 \qquad\qquad P : 1 \quad Q : 1$

Belegung ohne Widerspruch möglich z.B R 0, $P:1$, $Q:0$

→ d) ist KEINE TAUTOLOGIE

e) $((P \to (Q \to \neg P)) \to (P \to \neg Q))$

$$((P \to (Q \to \neg P)) \overset{\textcircled{1}}{\to} (P \to \neg Q)) : 0$$

$\downarrow$ ①

$$(P \overset{\textcircled{4}}{\to} (Q \to \neg P)) : 1 \quad \& \quad (P \overset{\textcircled{2}}{\to} \neg Q) : 0$$

$\swarrow$ ④ $\searrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ ②

$P : 0 \qquad (Q \overset{\textcircled{5}}{\to} \neg P) : 1 \qquad P : 1 \;\&\; \overset{\textcircled{3}}{\neg} Q : 0$

$\downarrow$ ⑤ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ ③

$Q : 0 \;\&\; P : 0 \qquad\qquad Q : 1$

schlecht, nicht erfüllbar

→ e) ist TAUTOLOGIE.

AUFGABE 4

Aufgabe 4 (6 Punkte).

(a) In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen und $<$ ein zweistelliges Relationszeichen. Betrachte die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{R}_1$ mit Universum $\mathbb{R}$ und den Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_1} = \pi$ sowie $<^{\mathcal{Z}_1}$ als die übliche lineare Ordnung. Ferner sei $\mathcal{R}_2$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{R}$ und Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_2} = -\sqrt{2}$ sowie $<^{\mathcal{Z}_2}$ als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

$c^{Z_1} = c^{R_1}$

$c^{Z_2} = c^{R_2}$

$\mathcal{L} = \{c, <\}$ $\qquad$ $R_1 := \{\mathbb{R}, <^{R_1}, c^{R_1} = \pi\}$ $\qquad$ (vermutlich sollen Z_1 u $Z_2 \in \mathbb{R}$ sein)

$R_2 := \{\mathbb{R}, <^{R_2}, c^{R_2} = -\sqrt{2}\}$

$\uparrow$ Menge $\quad$ $\uparrow$ Relation $\quad$ $\uparrow$ Konstante

Es sei α die bijektive lineare Abbildung $\alpha : R_1 \to R_2$

$\alpha : x \mapsto (\pi - \sqrt{2}) - x$

① $\alpha(c^{R_1}) = -\sqrt{2} = c^{R_2}$ und $\alpha(c^{R_2}) = \pi = c^{R_1}$

② $a <^{R_1} b \iff \alpha(a) <^{R_2} \alpha(b)$ $\qquad$ (α wächst streng monoton)

Aus ① u ② folgt: α ist ein "BIJEKTIVER STARKER HOMOMORPHISMUS" (Skript Ziegler)

$\Rightarrow$ R_1 ist isomorph zu R_2 $\quad$ $(R_1 \cong R_2)$ $\quad$ ▨

(b) Sei d ein weiteres Konstantenzeichen. Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L}' = L \cup \{d\}$ und erweitern die obigen beiden Strukturen zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{R}_1'$ und $\mathcal{R}_2'$, indem wir d wie folgt interpretieren:

$$d^{\mathcal{R}_1'} = 0 = d^{\mathcal{R}_2'}.$$

Sind $\mathcal{R}_1'$ und $\mathcal{R}_2'$ isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$

$R_1' = \{ \mathbb{R}, <^{R_1}, c^{R_1} = \pi, d^{R_1} = 0 \}$, $R_2' = \{ \mathbb{R}, <^{R_2}, c^{R_2} = -\sqrt{2}, d^{R_2} = 0 \}$

Es sei α' die lineare bijektive Abbildung $\alpha : R_1' \to R_2'$

$\alpha : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot x - \sqrt{2}$

auch hier gilt.

① $\alpha'(c^{R_1}) = \alpha'(\pi) = 0 = d^{R_2}$ und $\alpha'(d^{R_2}) = \alpha'(0) = -\sqrt{2} = c^{R_2}$

② $a <^{R_1} b \iff \alpha'(a) <^{R_2} \alpha'(b)$ (α' wächst streng monoton)

Aus ① u ② folgt: α' ist ein "BIJEKTIVER STARKER HOMOMORPHISMUS" (Skript Zeichen)

$\Rightarrow$ R_1' ist isomorph zu R_2' ($R_1' \cong R_2'$) ▨

Musterlösung Aufgabe 4

Dienstag, 12. November 2019 17:22

AUFGABE 4 MUSTERLÖSUNG

a) $\mathcal{L} = \{c, <\}$ $\qquad$ zz $\quad F: \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ (surjektiv)

$\mathcal{R}_1 = (\mathbb{R}, \pi, <)$ $\qquad F: \quad x - (\pi + \sqrt{2})$ $\qquad$ (unsere Funktion hat die lineare Ordnung nicht erhalten.)

$\mathcal{R}_2 = (\mathbb{R}, -\sqrt{2}, <)$

① F ist bijektiv (trivial)

② $F(c^{\mathcal{R}_1}) = F(\pi) = -\sqrt{2}$ ✓

③ $a_1 <^{\mathcal{R}_1} a_2 \iff a_1 - (\pi + \sqrt{2}) < a_2 - (\pi + \sqrt{2})$

$\qquad$ — " — $\iff F(a_1) <^{\mathcal{R}_2} F(a_2)$

hier kann ich "$<^{\mathcal{R}_2}$" weglassen, da es sich bei beiden Relationen um das normale "<"-Zeichen handelt

$\Rightarrow \quad \mathcal{R}_1 \cong \mathcal{R}_2$ $\qquad \blacksquare$

b) wichtig: c muss auf c abbilden (bzw. c_1 auf c_1, c_2 auf c_2) und d auf d

Angenommen $\mathcal{R}_1'$ und $\mathcal{R}_2'$ isomorph

$G: \mathcal{R}_1' \to \mathcal{R}_2'$ $\qquad 0 <^{\mathcal{R}_1'} \hat{\pi}$

$$\iff G(0) <^{\mathcal{R}_2} G(\pi)$$

$$\iff 0 <^{\mathcal{R}_2} -\sqrt{2} \quad \lightning$$

FÜR ISOMORPHIE-BEWEISE FOLGENDE SCHRITTE

① Suche $F: \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ $\qquad$ FUNKTION FINDEN

② $\forall\, c \in \mathcal{L}: \quad F(c^{\mathcal{R}_1}) = c^{\mathcal{R}_2}$ $\qquad$ KONSTANTEN

③ $\forall\, f^n \in \mathcal{L}: \quad F(f^{\mathcal{R}_1}(a_1 \ldots a_n)) = f^{\mathcal{R}_2}(F(a_1) \ldots F(a_n))$ $\qquad$ FUNKTIONEN

④ $\forall\, R^n \in \mathcal{L}: \quad \forall\, a_i \in A \quad (a_1 \ldots a_n) \in R^{\mathcal{R}_1}$ $\qquad$ RELATIONEN

$\qquad \iff (F(a_1), \ldots, F(a_n)) \in R^{\mathcal{R}_2}$