# Blatt 3, Logik für Informatiker, 20.11.2019

Christoph Janus (4719108), Stefan Haug (2014279)

Gruppe 6, Tutor Sören Andres

**Aufgabe 1** (4 Punkte).
Betrachte die Strukturen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{*\}$, wobei $*$ ein zweistelliges Funktionszeichen ist. Sind sie elementar äquivalent?

Gegeben $\mathcal{L}$-STRUKTUREN $Z = (\mathbb{Z}, *)$ $\mathcal{L}$-SPRACHE: $\{ * \}$

$Q = (\mathbb{Q}, *)$

FRAGE Ist $Z$ elementar äquivalent zu $Q$ $(Z \equiv Q)$?

Wir haben keinen Isomorphismus von $Z$ nach $Q$ gefunden (vermutlich existiert keiner), daher Suche nach einer „PARTIELLEN ELEMENTAREN ABBILDUNG" $F_p$.

Es sei $F_p : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}+}$ ( $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}+} \mathrel{\hat=}$ positive ganze Zahlen aus $\mathbb{Q}$, somit ist $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}+} \subset \mathbb{Q}$ )

$x \mapsto x$ (d.h. $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, ... )

Für jede Formel $\varphi[x_1, .. x_n]$ (entspricht hier Verkettungen der zweistelligen Operation $*$) gilt:

$$Z \models \varphi[z_1, \dots, z_n] \iff Q \models \varphi[F_p(z_1), \dots, F_p(z_n)]$$

für alle $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}^+$. Das ist trivial, da $\mathbb{Z}^+$ und $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}+}$ die gleichen Elemente enthalten und $F_p$ gleiche Zahlen aufeinander abbildet.

Somit ist $F_p$ eine elementare partielle Abbildung (Def 2.19).

Es folgt: $(\mathbb{Z}, +) \equiv (\mathbb{Q}, +)$, da laut Bem 2.20 zwei Strukturen elementar äquivalent sind wenn eine partielle elementare Abbildung existiert

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2** (6 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen $f$ sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen $P$ und $Q$ besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ ist die Identität;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist eine Surjektion $f^{\mathcal{A}}: P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ derart, dass jede Faser $f^{-1}(a)$, für $a$ in $Q^{\mathcal{A}}$, unendlich ist.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{ f, \quad P, \; Q \}$

$f$: einstellige Funktion

$P, Q$: einstellige Relationen

Klasse $K$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $K = \{ P^A \cup Q^A, f, P, Q \}$

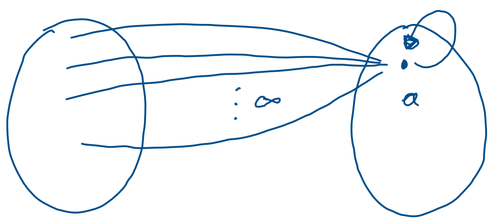
wobei gilt: ① $P^A \cap Q^A = \emptyset$, $P^A$ und $Q^A$ unendlich.

② $f_A(Q^A) = id_{Q^A}$

③ $f_A(P^A)$ ist surjektive Abbildung $P^A \to Q^A$ so dass

$|f_A^{-1}(a)| = \infty$ für $a \in Q^A$

**Bildlich:**



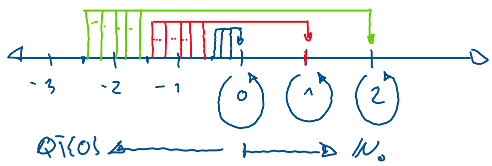

$P^A (= \mathbb{Q}^- \setminus \{0\})$ $\qquad$ $Q_A (= \mathbb{N}_0$ z.B.)

**Beispiel:**

$P^A = \mathbb{Q}^- \setminus \{0\}$ (negative rationale Zahlen)

$Q^A = \mathbb{N}_0$ (natürliche Zahlen mit 0)

$$f_A(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ -(\text{Dezimalbruch gerundet}) & \text{für } x \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$$




a) Nein, $K$ ist nicht leer (s. Beispiel oben)

b) Es wäre für alle Strukturen $A, B \in K$ folgende Abbildung $F$ denkbar:

$F: \quad A \to B$

$\quad a_A \to a_B \qquad (a_a \in Q_A, \; a_B \in Q_B)$

$\quad f^{-1}(a_A) \to f^{-1}(a_B)$ (jedes Element der Faser von $a_A$ in $Q_A$ wird auf ein Element der Faser von $Q_B$ abgebildet)

Für $F$ gilt:

① $F$ ist bijektiv

② $F(f(x)) = a_b = f(F(x))$ für $x \in P^A \cup Q^A$

③ $P^A(x) \Leftrightarrow P^B(F(x))$ und

$Q^A(x) \Leftrightarrow Q^B(F(x))$ für $x \in P^A \cup Q^A$

Somit ist $F$ ein Isomorphismus $A \to B$. Aus $A \simeq B$ folgt $A \equiv B$.

Somit sind immer zwei Strukturen $A, B \in K$ elementar äquivalent.

# Aufgabe 3

**Aufgabe 3** (5 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen $E$. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelationen mit zwei Äquivalenzklassen ist und ferner beide Klassen unendlich sind.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{E\}$ E sei 2-stelliges Relationszeichen.

$\mathcal{L}$ – Struktur $A = \{\mathcal{U}, E^A\}$, es gelte

① $E^A$ ist Äquivalenzrelation mit 2 Äquivalenzklassen $E_1^A$, $E_2^A$, $|E_1^A| = |E_2^A| = \infty$

② $E_1^A \cap E_2^A = \emptyset$

K ist Menge aller entsprechenden $\mathcal{L}$ – Strukturen.

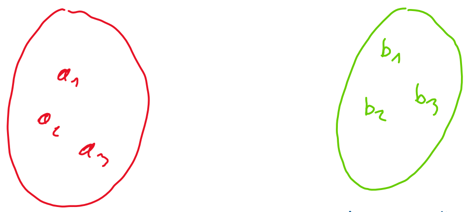
Bedingungen Äquivalenzrelation

① REFLEXIVITÄT: $(a, a) \in \sim$ wenn $a \in E_1^A$ o. $E_2^A$

② SYMMETRIE: $(a, b) \in \sim \Rightarrow (b, a) \in \sim$ wenn $a, b \in E_1^A$ o $E_2^A$

③ TRANSITIVITÄT: $(a, b) \in \sim$ und $(b, c) \in \sim \Rightarrow (a, c) \in \sim$ wenn $a, b, c \in E_1^A$ o $E_2^A$

**Beispiel:** $\mathcal{U}$ = Menge aller roten und grünen Möbelstücke




$E_1^A$ = Rote Möbel $E_2^A$ = Grüne Möbel

$E^A$ vergleicht die Farbe der Möbel. Man sieht leicht, die ÄR ist symmetr. reflexiv und transitiv

a) Die Klasse ist nicht leer, siehe Beispiel.

b) Gegeben: Zwei $\mathcal{L}$ – Strukturen $A, B \in K$.

Abbildung $F: A \to B$

$$\left.\begin{array}{l} x_{E_1^A} \mapsto x_{E_1^B} \\ x_{E_2^A} \mapsto x_{E_2^B} \end{array}\right\}$$ bildet je ein Element aus $E_1^A$ auf eines aus $E_1^B$ bzw. aus $E_2^A$ auf $E_2^B$ ab

F ist bijektiv (da je $|E_1^A| = |E_1^B| = |E_2^A| = |E_2^B| = \infty$)

Da gilt:

$$E^A(x_1, x_2) \Leftrightarrow E^B(F(x_1), F(x_2)) \quad \text{für } x_1, x_2 \in \mathcal{U}$$

Somit ist $A \cong B \to A \equiv B$, je zwei Strukturen aus K sind also elementar äquivalent

# Aufgabe 4

**Aufgabe 4** (5 Punkte).
In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei $F$ eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$. Schliesse daraus, dass

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

## VORÜBERLEGUNGEN

F sei Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur A in die Struktur B, d.h. per Definition gilt:

(i) $F(c^A) = c^B$ für Konstantenzeichen $c^A \in A$ u. $c^B \in B$

(ii) $F(f^A(a_1 \ldots a_n)) = f^B(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \quad \forall a_1 \ldots a_n \in A$
für Funktionszeichen $f$ mit Stelligkeit $n$

Für jede $\mathcal{L}$-Struktur A definiert ein Term $t = t[x_1 \ldots x_m]$ eine Funktion

$$t^A: A^m \to A$$
$$(a_1 \ldots a_m) \to t^A[a_1 \ldots a_m]$$

$t^A[a_1 \ldots a_m]$ ist der Wert von $t$ evaluiert für $x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m$.
Terme können daher folgende Werte annehmen

1. $t = c \to t^A$ ist die konstante Funktion mit Wert $c^A$
2. $t = x_i \to t^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$ für eine Variable $x_i$
3. $t = f(t_1 \ldots t_n) \to t^A[a_1 \ldots a_m] = f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$

# Aufgabe 4

**Aufgabe 4** (5 Punkte).
In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei $F$ eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

a) $$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$. Schliesse daraus, dass

b) $$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

**BEWEIS**

a)

① Falls $t = c$ $\Rightarrow$ $F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(c^A) \overset{(i)}{=} c^B = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

② Falls $t = x_i$ für Variable $x_i$ ist $t^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$

$\Rightarrow F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(a_i) = b_i = t^B[b_1 \ldots b_m] = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

③ Falls $t = f(t_1 \ldots t_m) \Rightarrow t^A[a_1 \ldots a_m] = f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$

$\Rightarrow F(t^A[a_1 \ldots a_m]) = F(f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m]))$

- $t^A[a_1 \ldots a_m]$ ersetzen mit $f^A(t_1^A[a_1 \ldots a_m] \ldots t_m^A[a_1 \ldots a_m])$
- bis ① $t_1^A[a_1 \ldots a_m] = c^A$ oder
- ② $t_1^A[a_1 \ldots a_m] = a_i$

$= F(f^A(\ldots f^A(t_{i1}^A[a_1 \ldots a_m], t_{im}[a_1 \ldots a_m])\ldots))$

$\overset{①,②,ii}{=} f^B(\ldots f^B(t_{i1}^B[F(a_1) \ldots F(a_m)] \ldots t_{im}^B[F(a_1) \ldots F(a_m)])\ldots)$

$= t[F(a_1) \ldots F(a_m)]$

b) Wenn $A$ Unterstruktur von $B$ ist ($A \subset B$) gilt die "Mengentheoretische Inklusion" $\mathrm{id}_A: A \to B$ (Def. 2.5).

Somit ist $F(a_1) = a_1, \ldots, F(a_n) = a_n$ bzw. $F(t^A[a_1 \ldots a_n]) = t^A[a_1 \ldots a_n]$.

$F(t^A[a_1 \ldots a_n]) = t^A[a_1 \ldots a_n] = t^B[F(a_1) \ldots F(a_m)] = t^B[a_1 \ldots a_n]$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$