LOGIK FÜR INFORMATIKER
WS 19/20
BLATT 3

GRUPPE 5
KAI KÖNIG
MAREIKE MALL

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Betrachte die Strukturen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{*\}$, wobei $*$ ein zweistelliges Funktionszeichen ist. Sind sie elementar äquivalent?

Angenommen $(\mathbb{Z}, +) \equiv (\mathbb{Q}, +)$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +) \models \chi \iff (\mathbb{Q}, +) \models \chi$

$\chi := \forall x \exists y : (y + y \doteq x)$

$(\mathbb{Q}, +) \models \chi \ \wedge \ (\mathbb{Z}, +) \not\models \chi$ $\lightning$

Da ein Aussage χ existiert, die nur von einer der beiden Strukturen erfüllt wird, sind die zwei Strukturen nicht äquivalent. $\blacksquare$

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ ist die Identität;
- Die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist eine Surjektion $f^{\mathcal{A}} : P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ derart, dass jede Faser $f^{-1}(a)$, für a in $Q^{\mathcal{A}}$, unendlich ist.

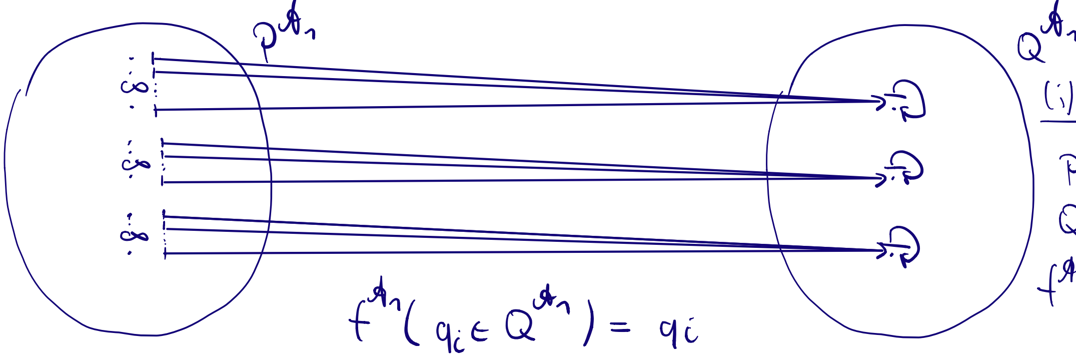
(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{ f, P, Q \}$ — f: zweistelliges Funktionszeichen; P, Q: einstellige Relationszeichen

$\mathcal{A}_i = (P^{\mathcal{A}_i} \cup Q^{\mathcal{A}_i} (P^{\mathcal{A}_i} \cap Q^{\mathcal{A}_i} = \emptyset), f^{\mathcal{A}_i}, P^{\mathcal{A}_i}, Q^{\mathcal{A}_i})$

(a) Beispiel $\mathcal{A}_1$



(i):

$P^{\mathcal{A}_1}: \mathbb{Q}^+ \setminus \{\mathbb{N}_0\}$

$Q^{\mathcal{A}_1}: \mathbb{N}_0$

$f^{\mathcal{A}_1}(x) = \begin{cases} - x \text{ für } x \in \mathbb{N}_0 \\ - \text{Dezimalbruch gerundet für } x \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$

$f^{\mathcal{A}_1}(q_i \in Q^{\mathcal{A}_1}) = q_i$

$|f^{\mathcal{A}_1^{-1}}(q_i \in Q^{\mathcal{A}_1})| = |\{p_j \in P^{\mathcal{A}_1}\}| = \infty$

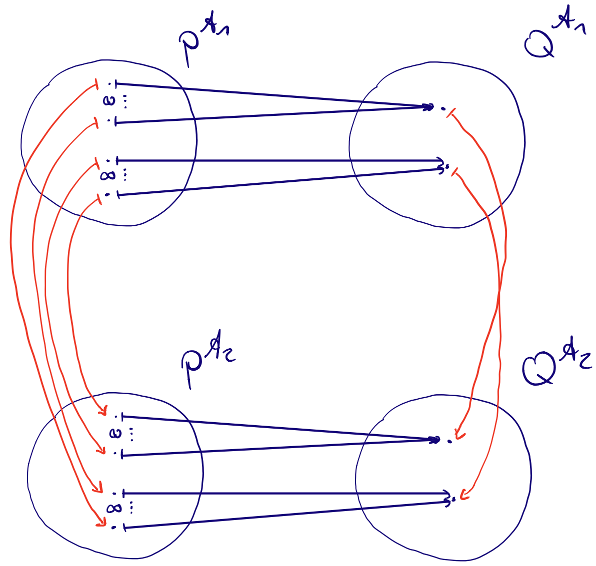
(i)
$\Rightarrow$ Es existiert eine Strukstur, welche die Eigenschaften erfüllt.
$\Rightarrow$ K ist nicht leer.

(b) Sind zwei Strukturen isomorph, so folgt, dass sie elementar äquivalent sind.

Wir definieren eine bijektive Einbettung zweier Strukturen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$:

$$F: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$$

$$q_i \in Q^{\mathcal{A}_1} \longmapsto q_i \in Q^{\mathcal{A}_2}$$
$$p_j \in P^{\mathcal{A}_1} \longmapsto p_j \in P^{\mathcal{A}_2}$$



So dass nun gilt $\forall a \in (Q^{\mathcal{A}_1} \cup P^{\mathcal{A}_1})$

- $F(f^{\mathcal{A}_1}(a)) = f^{\mathcal{A}_2}(F(a))$
- $a \in P^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow F(a) \in P^{\mathcal{A}_2}$
- $a \in Q^{\mathcal{A}_1} \Leftrightarrow F(a) \in P^{\mathcal{A}_2}$

$\overset{\text{Def. 2.3}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$

$\overset{\text{Bem. 2.20}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$

Je zwei Strukturen aus K sind äquivalent. $\boxtimes$

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen E. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelationen mit zwei Äquivalenzklassen ist und ferner beide Klassen unendlich sind.

(a) Ist die Klasse $\mathcal{K}$ leer?

(b) Sind je zwei Strukturen aus $\mathcal{K}$ elementar äquivalent?

$\mathcal{L} = \{ E \}$

(a) Beispiel $\mathcal{L}$-Struktur $A := \{ \mathbb{Z}, E^A \}$

$E^A := a \sim b \iff a$ hat gleiches Vorzeichen wie b

Es bleiben also genau zwei Äquivalenzklassen übrig, die unendlich sind.

Somit existiert eine Struktur und die Klasse K ist nicht leer. ▨

(b) Gegeben zwei Strukturen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in K$

Abbildung $F: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$

$x \in E_1^{\mathcal{A}_1} \mapsto x \in E_1^{\mathcal{A}_2}$

$x \in E_2^{\mathcal{A}_1} \mapsto x \in E_2^{\mathcal{A}_2}$

(F ist also eine bijektive Abbildung, welche alle Elemente der ersten Äquivalenzklasse aus $\mathcal{A}_1$ in die erste ÄK aus $\mathcal{A}_2$ abbildet. Analoges gilt für die zweite ÄK.)

Für das Relationszeichen gilt:

$$(a_1, a_2) \in E^{\mathcal{A}_1} \iff (F(a_1), F(a_2)) \in E^{\mathcal{A}_2} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Es liegt also eine bijektive Einbettung vor.

$\Rightarrow \mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$ ■

Aufgabe 4 (5 Punkte).

In einer Sprache $\mathcal{L}$ sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A. Schliesse daraus, dass

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n],$$

für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A, wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

F ist eine Einbettung $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

$\overset{\text{Def 2.3}}{\Longrightarrow}$ Es gilt:

- (i) Für jedes Konstantenzeichen c aus $\mathcal{L}$ ist $F(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- (ii) Für jedes Funktionszeichen f aus $\mathcal{L}$ mit Stelligkeit n und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt:

$$F(f^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = f^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$$

(- (iii) Relationszeichen sind in Termen nicht vorhanden.)

zz A): Durch Induktion über den Aufbau des Terms sieht man, dass gilt: $F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$

Bew:

Ein Term kann wie folgt aufgebaut sein:

1) falls $t = c$, ist $t^{\mathcal{A}}$ die konstante Funktion mit Wert $c^{\mathcal{A}}$

$$\Rightarrow F(t^{\mathcal{A}}[a]) = F(c^{\mathcal{A}}) \overset{(i)}{=} c^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{B}}[F(a)]$$

2) falls $t = x_i$ für eine Variable x_i, ist $t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m] = a_i$

$$\Rightarrow F(t^{\mathcal{A}}[a_i]) = F(a_i) = b_i = t^{\mathcal{B}}[F(a_i)] \qquad a \in A, b \in B$$

3) falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, ist

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m])$$

$$\Rightarrow F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = F(f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m]))$$

$$\overset{(ii)}{=} f^{\mathcal{B}}(F(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m]), \ldots, F(t_n[a_1, \ldots, a_m]))$$

$$\overset{\text{Bem:}}{=} t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$$

Bem:

Nun sind die Terme $t_1, \ldots, t_n$ entweder wieder Funktionsterme und der Aufbau kann rekursiv aufgelöst werden bis wir Terme der Form 1) o. 2) erhalten oder es handelt sich um einen dieser atomaren Fälle.

(b) Wenn $\mathfrak{A}$ US von $\mathfrak{B}$ ist, gilt $A \subset B$ und es existiert eine Einbettung in Form der mengentheoretischen Inklusion: $Id_A : A \to B$.

$\Rightarrow$ 1) $Id_A(c^A) = c^A$ für eine beliebige Konstante aus $\mathfrak{A}$

2) $Id_A(a_i) = a_i$ für ein beliebiges $a_i \in A$

Aus 1) und 2) folgt, dass die atomaren Fälle der Terme immer gleich ausgewertet werden, da die Elemente identisch sind.

Somit gilt für alle Terme

$f^A[a_1, \ldots, a_n] = f^B[a_1, \ldots, a_n]$ ■