Blatt 1, Logik für Informatiker, 4.11.2019

Christoph Janus (4719108), Stefan Haug (2014279)

Gruppe 6,	Tutor Sören Andres

AUFGABE 2

ZZ $\neg(P \to Q) \sim (\neg P \to \neg Q)$

Bew Aus der Definition der Implikation folgt

$$(P \to Q) \sim (\neg P \vee Q)$$

somit gilt (linke Seite):

$$\neg(P \to Q) \overset{\text{Def}}{\sim} \neg(\neg P \vee Q) \overset{\text{De Morgan Regel}}{\sim} (\neg\neg P \wedge \neg Q) \overset{\text{Doppelte neg.}}{\sim} (P \wedge \neg Q)$$

analog für rechte Seite:

$$(\neg P \to \neg Q) \overset{\text{Def}}{\sim} (\neg\neg P \vee \neg Q) \overset{\text{Doppelte neg}}{\sim} (P \vee \neg Q)$$

Da $(P \vee \neg Q) \not\sim (P \wedge \neg Q)$

ist $(P \to Q) \not\sim (\neg P \vee Q)$, die beiden Formeln sind nicht äquivalent $\boxtimes$

AUFGABE 1

Gebe KNF und DNF für folgende aussagenlogischen Formeln an:

a) $((P \to Q) \to (R \wedge Q))$ — Def von "->"

$\sim ((\neg P \vee Q) \to (R \wedge Q))$ — Def. von "->"

$\sim (\neg(\neg P \vee Q) \vee (R \wedge Q))$ — De Morgan

$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q))$ — entspricht DNF, Distributivgesetz

$\sim (((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q)))$ — Distr., Assoziativgesetz

$\sim ((P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge (\underbrace{\neg Q \vee Q}_{\sim T}))$ — T-Regel

$\sim ((P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q))$ — KNF

b) $(\neg(P \to Q) \vee (P \to R))$ — Def von "->"

$\sim (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$ — De Morgan

$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$ — Distr $\vee$ über $\wedge$

$\sim (((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R)$ — Distr $\vee$ über $\wedge$

$\sim ((P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$ — = KNF, Prinzip ausgeschl. Dritten

$\sim (T \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$ — Idempotenz

$\sim ((\neg Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg P) \vee (R \wedge R))$ — = DNF

AUFGABE 3

Prüfe mit Tableau Methode ob folgende Aussagen Tautologien sind:

a) $(\neg(P \to Q) \vee (Q \to P))$

Gibt es Belegung β so dass $\beta(\alpha)) = 0$? (analoge Beweisführung bei den folgenden Aufgaben)

$$(\neg(P \to Q) \overset{1}{\vee} (Q \to P)) : 0$$

$\downarrow 1$

$\overset{2}{\neg}(P \to Q) : 0$ & $(Q \overset{4}{\to} P) : 0$

$\downarrow 2$ $\downarrow 4$

$(P \overset{3}{\to} Q) : 1$ $Q : 1$, $P : 0$ (erfüllbar)

3: (elementar) $P : 0$ $Q : 1$

=> bei $P : 0$ und $Q : 1$ ist $(\neg(P \to Q) \vee (Q \to P))$ falsch und somit keine Tautologie

b) $(((P \to R) \wedge (R \to Q)) \to (P \to Q))$

$$(((P \to R) \wedge (R \to Q)) \overset{1}{\to} (P \to Q)) : 0$$

$\downarrow 1$

$((P \to R) \overset{2}{\wedge} (R \to Q)) : 1$ & $(P \overset{5}{\to} Q) : 0$

2: $(P \overset{3}{\to} R) : 1$ $(R \overset{4}{\to} Q) : 1$ $\downarrow 5$ $P : 1$, $Q : 0$

3: $P : 0$ $R : 1$ 4: $R : 0$ $Q : 1$

] es findet sich keine erfüllende Belegung so dass b) falsch ist (schließt)

-> b) kann nicht falsch sein und ist daher eine Tautologie

c) $(((P \vee Q) \to (R \wedge S)) \to ((P \wedge Q) \to (R \vee S)))$

$$(((P \vee Q) \to (R \wedge S)) \overset{1}{\to} ((P \wedge Q) \to (R \vee S))) : 0$$

$\downarrow 1$

$((P \vee Q) \overset{5}{\to} (R \wedge S)) : 1$, & $((P \wedge Q) \overset{2}{\to} (R \vee S)) : 0$

5: $(P \overset{6}{\vee} Q) : 0$ $(R \overset{7}{\wedge} S) : 1$ $\downarrow 2$ $(P \overset{3}{\wedge} Q) : 1$ & $(R \overset{4}{\vee} S) : 0$

$\downarrow 6$ $\downarrow 7$ $\downarrow 3$ $\downarrow 4$

$P : 0$, $Q : 0$ $R : 1$, $S : 1$ $P : 1$, $Q : 1$ $R : 0$, $S : 0$] nicht erfüllbar (schließt)

-> c) ist eine Tautologie (kann nicht falsch sein)

d) $(((P \wedge Q) \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$

$(((P \wedge Q) \to R) \overset{①}{\to} ((P \vee Q) \to R)) : 0$

$\downarrow ①$

$((P \wedge Q) \overset{②}{\to} R) : 1$ & $((P \vee Q) \overset{④}{\to} R)) : 0$

② $\swarrow \searrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow ④$

$(P \overset{③}{\wedge} Q) : 0$ $\qquad R : 1$ $\qquad (P \overset{⑤}{\vee} Q) : 1$ & $R : 0$

③ $\swarrow \searrow$ $\qquad\qquad$ ⑤ $\swarrow \searrow$

$P : 0$ $\quad Q : 0$ $\qquad\qquad P : 1$ $\quad Q : 1$

Belegung ohne Widerspruch möglich. z.B. $R : 0$, $P : 1$, $Q : 0$

$\Rightarrow$ d) ist KEINE TAUTOLOGIE

e) $((P \to (Q \to \neg P)) \to (P \to \neg Q))$

$((P \to (Q \to \neg P)) \overset{①}{\to} (P \to \neg Q)) : 0$

$\downarrow ①$

$(P \overset{④}{\to} (Q \to \neg P)) : 1$ & $(P \overset{②}{\to} \neg Q) : 0$

④ $\swarrow \searrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow ②$

$P : 0$ $\qquad (Q \overset{⑤}{\to} \neg P) : 1$ $\qquad P : 1$ & $\overset{③}{\neg} Q : 0$

$\downarrow ⑤$ $\qquad\qquad$ $\downarrow ③$

$Q : 0$ & $P : 0$ $\qquad\qquad Q : 1$

schließt, nicht erfüllbar

$\Rightarrow$ e) ist TAUTOLOGIE.

AUFGABE 4

Aufgabe 4 (6 Punkte).

(a) In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen und $<$ ein zweistelliges Relationszeichen. Betrachte die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{R}_1$ mit Universum $\mathbb{R}$ und den Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_1} = \pi$ sowie $<^{\mathcal{Z}_1}$ als die übliche lineare Ordnung. Ferner sei $\mathcal{R}_2$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{R}$ und Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_2} = -\sqrt{2}$ sowie $<^{\mathcal{Z}_2}$ als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

$c^{Z_1} = c^{R_1}$

$c^{Z_2} = c^{R_2}$

$\mathcal{L} = \{c, <\}$ $\qquad R_1 := \{\mathbb{R}, <^{R_1}, c^{R_1} = \pi\}$ $\qquad$ (vermutlich sollen Z_1 u $Z_2 \in \mathbb{R}$ sein)

$R_2 := \{\mathbb{R}, <^{R_2}, c^{R_2} = -\sqrt{2}\}$

Menge $\qquad$ Relation $\qquad$ Konstante

Es sei α die bijektive lineare Abbildung $\alpha : R_1 \to R_2$

$\alpha : x \mapsto (\pi - \sqrt{2}) - x$

① $\quad \alpha(c^{R_1}) = -\sqrt{2} = c^{R_2}$ und $\alpha(c^{R_2}) = \pi = c^{R_1}$

② $\quad a <^{R_1} b \iff \alpha(a) <^{R_2} \alpha(b)$ $\qquad$ (α wächst streng monoton)

Aus ① u ② folgt: α ist ein "BIJEKTIVER STARKER HOMOMORPHISMUS" (Skript Junker)

$\Rightarrow$ R_1 ist isomorph zu R_2 $\quad (R_1 \cong R_2)$ $\quad \boxtimes$

(b) Sei d ein weiteres Konstantenzeichen. Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L}' = L \cup \{d\}$ und erweitern die obigen beiden Strukturen zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{R}_1'$ und $\mathcal{R}_2'$, indem wir d wie folgt interpretieren:

$$d^{\mathcal{R}_1'} = 0 = d^{\mathcal{R}_2'}.$$

Sind $\mathcal{R}_1'$ und $\mathcal{R}_2'$ isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$

$R_1' = \{\mathbb{R}, <^{R_1}, c^{R_1} = \pi, d^{R_1} = 0\}$, $R_2' = \{\mathbb{R}, <^{R_2}, c^{R_2} = -\sqrt{2}, d^{R_2} = 0\}$

Es sei α' die lineare bijektive Abbildung $\alpha: R_1' \to R_2'$

$$\alpha: x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot x - \sqrt{2}$$

auch hier gilt:

① $\alpha'(c^{R_1}) = \alpha'(\pi) = 0 = d^{R_2}$ und $\alpha'(d^{R_2}) = \alpha'(0) = -\sqrt{2} = c^{R_2}$

② $a <^{R_1} b \iff \alpha'(a) <^{R_2} \alpha'(b)$ (α' wächst streng monoton)

Aus ① u ② folgt: α' ist ein "BIJEKTIVER STARKER HOMOMORPHISMUS" (Skript Zucker)

$\Rightarrow$ R_1' ist isomorph zu R_2' ($R_1' \cong R_2'$) $\boxtimes$