Logik Übungsblatt 2 Gruppe 1

Jil Panter 4710861

① Struktur aus $\mathbb{Z}$ und der leeren Sprache

Für die leere Sprache gilt: es gibt keine Konstanten, Funktionen und Relationen

Struktur $Z_0 = (\mathbb{Z}, \{\})$

I $x_i^{Z_0} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

$(a_1, \dots, a_n) \to a_i \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\}$

II Sprache $\mathcal{L} = \{ f_1 : +, f_2 : - \}$,

Struktur $Z_1 = (\mathbb{Z}, f_1^{Z_1} : +, f_2^{Z_1} : -)$

Funktionen: · analog zu I

· $+^{Z_1} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \quad$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$

III Sprache $\mathcal{L} = \{ 2, f_1 +, f_2 : -, f_3 : \cdot \}$

Struktur $Z_2 = (\mathbb{Z}, 2, f_1^{Z_2} : +, f_2^{Z_2} - , f_3^{Z_2} : \cdot)$

Funktionen: · analog zu I und II

· $c^{Z_2} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

$(a_1, \dots, a_n) \mapsto 2 \quad$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$

· $r^{Z_2} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot a_i \quad ,$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$, $k_i \in \mathbb{Z}$

② a) Sei $\mathbb{N}_u$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

$\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{L}$-Struktur $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \{\})$

Betrachte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $N_u = (\mathbb{N}_u, \{\})$

keine Relationen, keine Konstanten, keine Funktionen

Da $|\mathbb{N}_u| = \infty$ und $\mathcal{L} = \emptyset$ ist N_u nicht endlich erzeugt.

b) $\mathbb{N}_u$ wie in a). $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, $\mathcal{L}$-Struktur $S_{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$

$\mathcal{L}$-Unterstruktur $N_u = (\mathbb{N}_u, 0, 1, +, -, \cdot)$

Betrachte US $S_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ der ganzen Zahlen

Es gilt $S_{\mathbb{Z}} \subset S_{\mathbb{Q}}$ und $B_{\mathbb{Z}}$ wird von 1 endlich erzeugt.

Da $N_u \subset S_{\mathbb{Z}}$ muss N_u auch endlich erzeugt sein.

③ a) $\mathcal{L}_G = \{R\}$, R zweistellige Relation mit

$(V_1, V_2) \in R \Leftrightarrow \{V_1, V_2\} \in E$, mit $V_1, V_2 \in V$

Struktur: $S_G = (V, R)$

Sei S_G die Struktur, die einen Graphen mit Punktemenge V und Kantenmenge E (durch R repräsentiert), darstellt.

Betrachte G' als Teilgraphen von G, mit $V' \subset V$ und $E' \subset E$

z.z. Jede Unterstruktur eines als Struktur betrachteten Graphen ist ein Teilgraph.

Beweis:

Sei S_G' Unterstruktur von S_G in $\mathcal{L}_G$.

Es gilt $S_G' \subset S_G$.

Somit gilt auch $V' \subset V$ für V' in S_G' und

E' besteht aus allen $(v_1', v_2') \in R$ mit $V_1', V_2' \in V'$

Da $|V'| \leq |V|$ folgt außerdem $E' \subset E$

$\Rightarrow V' \subset V$ und $E' \subset E$

Daher ist S_G' ein Teilgraph von S_G

b) Laut Definition ist A ein Teilgraph von B,

denn $V_A = \{1, 2, 3\}$ ist Teilmenge von $V_B = \{1, 2, 3\}$

und $E_A = \{\{1, 3\}\}$ ist Teilmenge von $E_B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Seien S_A, S_B die von A, B induzierten Strukturen.

Damit S_A Unterstruktur von S_B ist muss gelten

I $V_A \subset V_B$ und II es existiert eine Einbettung

$id_A: A \to B$

I $V_A \subset V_B$ gilt denn $V_A = V_B$

II $id_A: A \to B$ existiert, denn $(V_{A1}, V_{A2}) \in R_A$

$\to (id_A(V_{A1}), id_A(V_{A2})) = (V_{B1}, V_{B2}) \in R_B$.

Explizit $(1, 3) \in R_A \to (1, 3) \in R_B$