Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 2

Abgabe: 13.11.2019, 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Beschreibe vollständig alle induzierten Funktionen der Terme in n Variablen bezüglich der Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ in der leeren Sprache sowie der Strukturen $(\mathbb{Z}, +, -)$ und $(\mathbb{Z}, 2, +, -, \cdot)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

(a) Beschreibe die von der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen erzeugte Unterstruktur der Struktur $\mathbb{Q}$ in der leeren Sprache. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

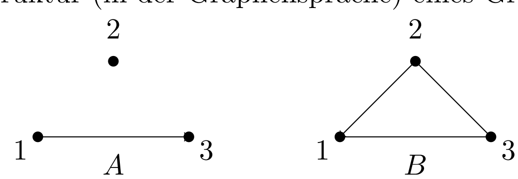
(b) Beschreibe die von der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen erzeugte Unterstruktur der Struktur $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Ein *Graph* (V, E) ist eine nichtleere Menge V von *Punkten* zusammen mit einer Menge E, welche aus 2-elementigen Teilmengen von V (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von (V, E) ist ein Graph (V', E') derart, dass $V' \subset V$ und $E' \subset E$.

Jeder Graph kann als Struktur in der Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R betrachtet werden.

(a) Zeige, dass jede Unterstruktur (in der Graphensprache) eines Graphen ein Teilgraph ist.



(b) Im obigen Bild, ist A ein Teilgraph von B? Ist die vom Graph A induzierte Struktur eine Unterstruktur von der vom Graph B induzierten Struktur?

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$, deren Universum die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$ ist und ferner $f^{\mathcal{A}}$ eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ eine Surjektion $P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ und eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ die Identität ist.

Seien nun $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei abzählbare $\mathcal{L}$-Strukturen in $\mathcal{K}$ mit folgenden Zusatzeigenschaften: In $Q^{\mathcal{B}}$ gibt es ein Element b_0 derart, dass für $b \neq b_0$ aus $Q^{\mathcal{B}}$ die Faser $f^{-1}(b)$ unendlich ist, aber $f^{-1}(b_0)$ Größe 2 hat. In $Q^{\mathcal{C}}$ gibt es zwei Elemente c_1 und c_2 derart, dass für $c \neq c_1, c_2$ aus $Q^{\mathcal{C}}$ die Faser $f^{-1}(c)$ unendlich ist, aber die Fasern $f^{-1}(c_1)$ und $f^{-1}(c_2)$ jeweils Größe 5 haben.

(a) Lassen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sich jeweils ineinander einbetten?

(b) Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ isomorph?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.