

**Logik für Studierende  
der Informatik**  
Blatt 1  
Abgabe: 6.11.2019, 14 Uhr  
**Gruppennummer angeben!**

**Aufgabe 1** (6 Punkte).

Gib (ohne Wahrheitstabellen zu benutzen) aussagenlogische Formeln sowohl in KNF als auch in DNF an, welche logisch äquivalent zu den folgenden aussagenlogischen Formeln sind.

- (a)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge Q)$   
(b)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

**Aufgabe 2** (3 Punkte).

Sind die Aussagen  $\neg(P \rightarrow Q)$  und  $(\neg P \rightarrow \neg Q)$  logisch äquivalent? (Ohne Wahrheitstabellen zu benutzen!)

**Aufgabe 3** (5 Punkte).

Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende Aussagen Tautologien sind.

- (a)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$   
(b)  $((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$   
(c)  $((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S))$   
(d)  $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$   
(e)  $(P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

**Aufgabe 4** (6 Punkte).

- (a) In der Sprache  $\mathcal{L} = \{c, <\}$  seien  $c$  ein Konstantenzeichen und  $<$  ein zweistelliges Relationszeichen. Betrachte die  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{R}_1$  mit Universum  $\mathbb{R}$  und den Interpretationen  $c^{\mathcal{R}_1} = \pi$  sowie  $<^{\mathcal{R}_1}$  als die übliche lineare Ordnung. Ferner sei  $\mathcal{R}_2$  die  $\mathcal{L}$ -Struktur mit Universum  $\mathbb{R}$  und Interpretationen  $c^{\mathcal{R}_2} = -\sqrt{2}$  sowie  $<^{\mathcal{R}_2}$  als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  isomorphe  $\mathcal{L}$ -Strukturen sind.  
(b) Sei  $d$  ein weiteres Konstantenzeichen. Wir betrachten nun die Sprache  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$  und erweitern die obigen beiden Strukturen zu  $\mathcal{L}'$ -Strukturen  $\mathcal{R}'_1$  und  $\mathcal{R}'_2$ , indem wir  $d$  wie folgt interpretieren:

$$d^{\mathcal{R}'_1} = 0 = d^{\mathcal{R}'_2}.$$

Sind  $\mathcal{R}'_1$  und  $\mathcal{R}'_2$  isomorphe  $\mathcal{L}'$ -Strukturen?

# LOGIK FÜR STUDIERENDE DER INFORMATIK

WS 19/20

## BLATT 1

---

### Aufgabe 1 (6 Punkte).

Gib (ohne Wahrheitstafeln zu benutzen) aussagenlogische Formeln sowohl in KNF als auch in DNF an, welche logisch äquivalent zu den folgenden aussagenlogischen Formeln sind.

(a)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge Q)$

(b)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

a)  $(P \rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$

$$(R \wedge Q) = \neg(\neg R \vee \neg Q)$$

also ist  $((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge Q)) \sim (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee \neg Q))$

$$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg R \vee \neg Q))$$

$$\sim ((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q)) \quad \text{DNF}$$

$$\sim ((P \vee (R \wedge Q)) \wedge (\neg Q \vee (R \wedge Q)))$$

$$\sim ((P \vee R) \wedge (P \vee Q)) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q)$$

$$\sim (P \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \quad \text{KNF}$$

b)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \sim \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$

$$\sim (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$$

$$\sim (P \vee (\neg P \vee R)) \wedge (\neg Q \vee (\neg P \vee R))$$

$$\sim (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R) \quad \text{KNF}$$

$$\sim \neg Q \vee \neg P \vee R \quad \text{DNF}$$

### Aufgabe 2 (3 Punkte).

Sind die Aussagen  $\neg(P \rightarrow Q)$  und  $(\neg P \rightarrow \neg Q)$  logisch äquivalent? (Ohne Wahrheitstafeln zu benutzen!)

$$\neg(P \rightarrow Q) \sim \neg(\neg P \vee Q)$$

$$\sim P \wedge \neg Q$$

$$\left. \begin{array}{l} \neg(P \rightarrow Q) \sim \neg(\neg P \vee Q) \\ \sim P \wedge \neg Q \end{array} \right\} (P \wedge \neg Q) \neq (P \vee \neg Q)$$

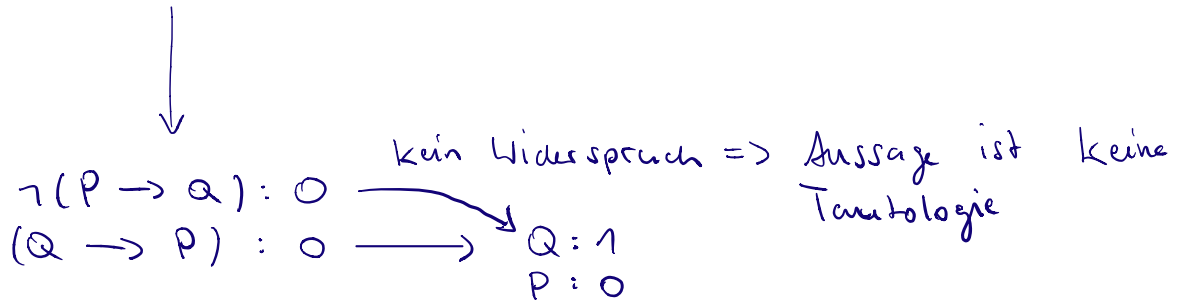
$$(\neg P \rightarrow \neg Q) \sim P \vee \neg Q$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte).

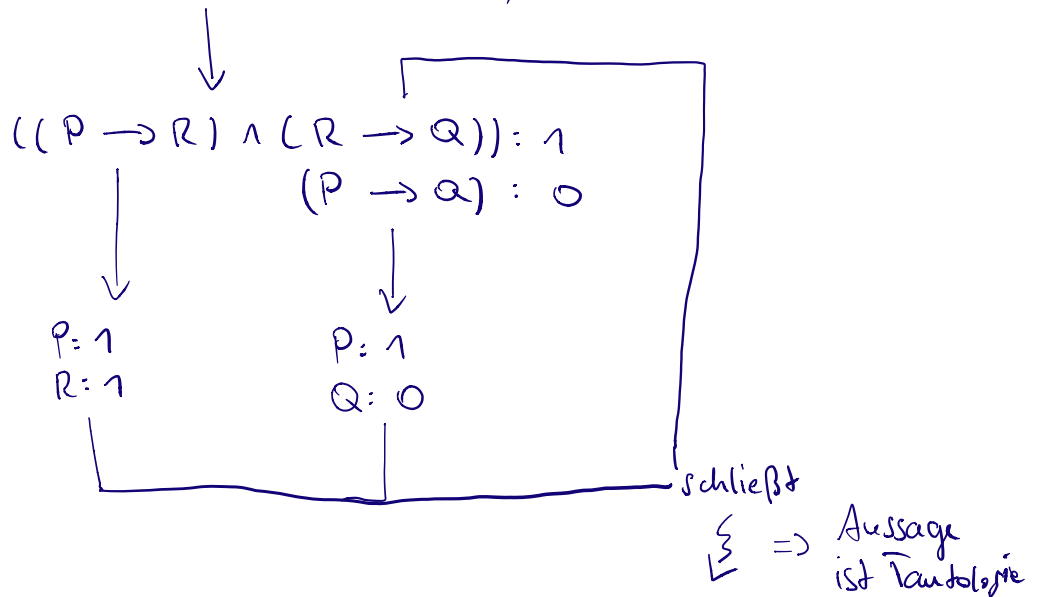
Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende Aussagen Tautologien sind.

- (a)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$   
 (b)  $((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$   
 (c)  $((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S))$   
 (d)  $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$   
 (e)  $(P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

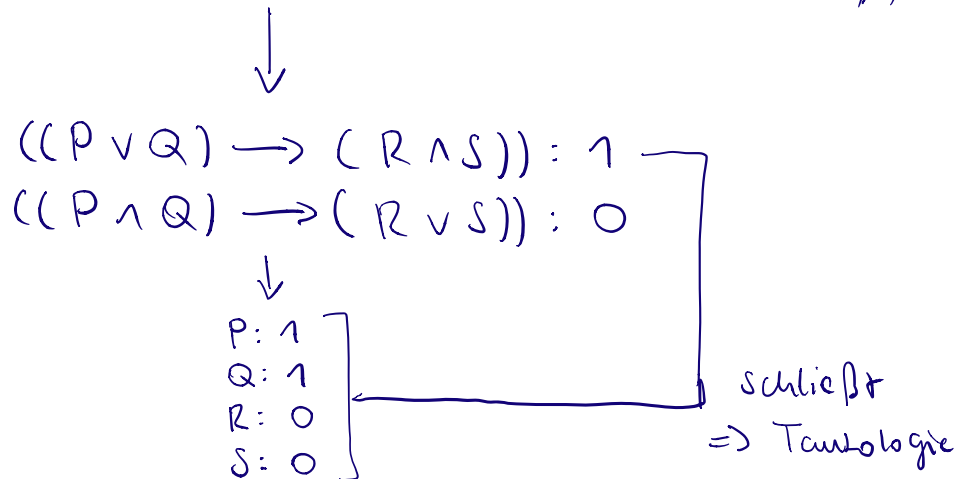
a)  $(\neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) : 0$



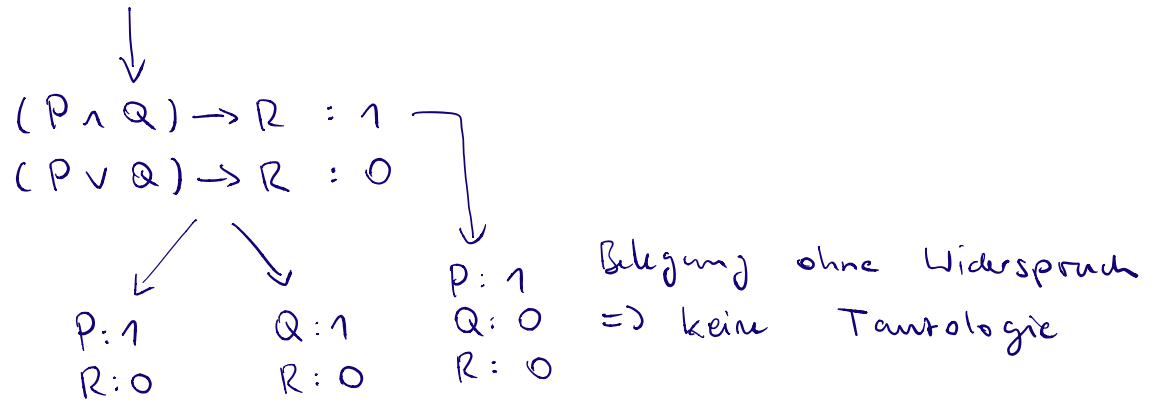
b)  $((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q) : 0$



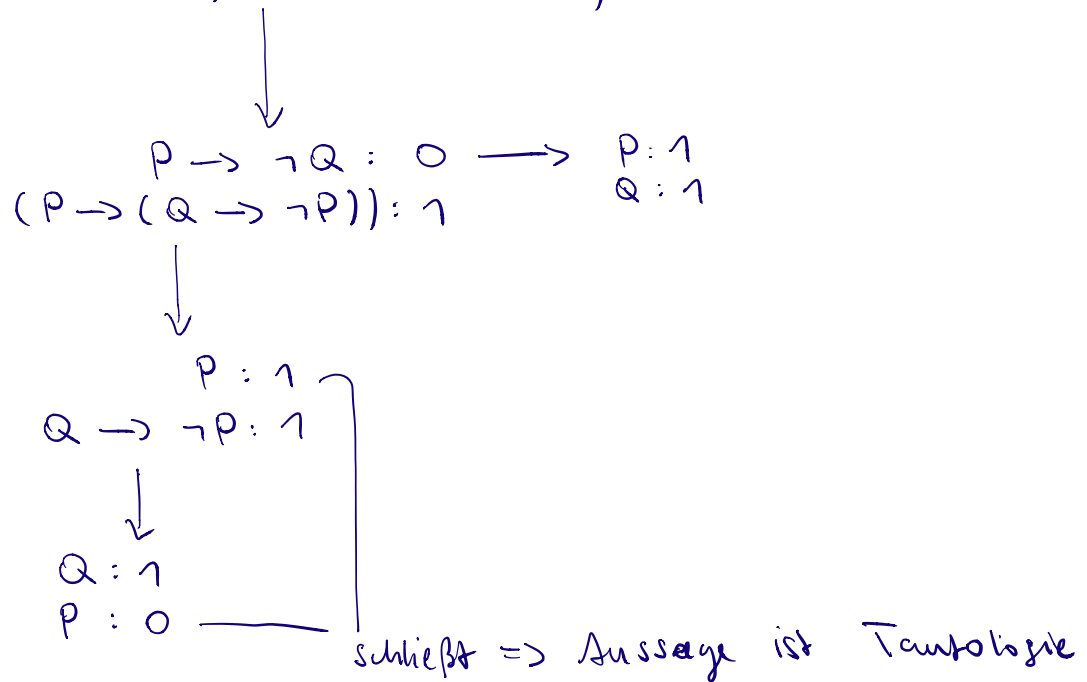
c)  $((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)) : 0$



$$d) ((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R) : 0$$



$$e) ((P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)) : 0$$



**Aufgabe 4** (6 Punkte).

- (a) In der Sprache  $\mathcal{L} = \{c, <\}$  seien  $c$  ein Konstantenzeichen und  $<$  ein zweistelliges Relationszeichen. Betrachte die  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{R}_1$  mit Universum  $\mathbb{R}$  und den Interpretationen  $c^{\mathcal{R}_1} = \pi$  sowie  $<^{\mathcal{R}_1}$  als die übliche lineare Ordnung. Ferner sei  $\mathcal{R}_2$  die  $\mathcal{L}$ -Struktur mit Universum  $\mathbb{R}$  und Interpretationen  $c^{\mathcal{R}_2} = -\sqrt{2}$  sowie  $<^{\mathcal{R}_2}$  als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  isomorphe  $\mathcal{L}$ -Strukturen sind.
- (b) Sei  $d$  ein weiteres Konstantenzeichen. Wir betrachten nun die Sprache  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$  und erweitern die obigen beiden Strukturen zu  $\mathcal{L}'$ -Strukturen  $\mathcal{R}'_1$  und  $\mathcal{R}'_2$ , indem wir  $d$  wie folgt interpretieren:

$$d^{\mathcal{R}'_1} = 0 = d^{\mathcal{R}'_2}.$$

Sind  $\mathcal{R}'_1$  und  $\mathcal{R}'_2$  isomorphe  $\mathcal{L}'$ -Strukturen?

a)  $\mathcal{L} = \{c, <\}$   $a <^{\mathcal{R}_1} b$

$f: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$  ist bijektiv  $\Leftrightarrow a < b$

$x \mapsto (\pi - \sqrt{2}) - x$   $\Leftrightarrow f(a) > f(b)$

$f(c^{\mathcal{R}_1}) = f(\pi) = -\sqrt{2} \checkmark$   $\Leftrightarrow f(b) <^{\mathcal{R}_2} f(a) \checkmark$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_1 \cong \mathcal{R}_2$$

b)  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$  Es gibt keine bijektive Abbildungsvorschrift

$f(\pi) = -\sqrt{2}$  von  $\mathcal{R}'_1$  nach  $\mathcal{R}'_2$  welche

$f(0) = 0$   $\pi$  auf  $-\sqrt{2}$  und  $0$  auf  $0$  abbildet

und die lineare Ordnung beibehält.

Denn der Abstand von  $-\sqrt{2}$  und  $\pi$

zur  $0$  ist nicht gleich.