Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Дискретные случайные процессы.
Лекция 8.

Выполнил: Дурнов Алексей Николаевич
студент Б01-009

Долгопрудный, 2023

Замечание. *Теорема о единственном продолжении неотрицательной ограниченной счётно-аддитивной меры с кольца на порождённое им σ-кольцо с сохранением σ-аддитивности меры – главная теорема курса.*

Обозначение. *Пусть K – множественное кольцо $\xrightarrow[\sigma_{add}]{\mu} [0, N]$.*

$$\text{Тогда } \bigcup K := E := \bigcup_{A \in K} A = \bigcup \{A \mid A \in K\}.$$

Определение 1. *Множество $M \in E$ назовём K_σ-покрываемым, если $\exists (A_1, A_2, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такая, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}_{\in K}) \equiv \bigsqcup\limits_{m=1}^{\infty} (\underbrace{A_m \setminus \bigcup \{A_k \,|_{:}\, k < m\}}_{\in K})$.*

Обозначение. $\mathcal{P}_{K_\sigma}(E) = \{M \mid M$ *является K_σ-покрываемым*$\}$.

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) \,\middle|\, \forall k \in N\, C_k \in K; M \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k \right\} \leqslant N$$
$$\rho_\mu^* : \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \times \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \to [0, N] : (A, B) \to \mu^*(A \Delta B),$$
$$\forall M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)\ \mu_*(M) = \sup\{\mu(A) \mid A \in K,\, A \subset M\} \leqslant N$$

Будем называть μ^* внешней мерой, а μ_* – внутренней.

Определение 2. *μ^*-измеримыми подмножествами в $E \equiv \bigcup K$ назовём такие $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что для некоторой $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такая, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv U$, выполнено соотношение:*

$$\mu^*(M) + \mu^*(U \setminus M) = \mu^*(U) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \right\} \text{ (конструкция Каратеодори).}$$

Определение 3. *ρ_μ^*-измеримым называется такое $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что $\exists (A_{k,l})_{k,l=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, что*

$$\rho_\mu^* \left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,l} \right), M \right) = 0 \text{ (Лебег).}$$

Упражнение 1 (*). *Система μ^*-измеримых подмножеств в E совпадает с системой ρ_μ^*-измеримых подмножеств в E, является σ-кольцом, которое называется σ-кольцом множеств, измеримых относительно естественного продолжения меры μ, обозначим $\bar{K}^\mu$.*

$$\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} =: \bar{\mu} - \ \sigma\text{-аддитивна}$$
$$\bar{\mu}\big|_K = \mu^*\big|_{K^\mu} = \mu.$$

Замечание. *Вообще говоря, $\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} \neq \bar{\mu}$.*

Замечание. *$\rho_{\bar{\mu}}$ порождает ту же самую метрику на фактор пространстве $\bar{K}/\tilde{\rho}_{\bar{\mu}}$, что и копия аналогично получаемой метрики из пополнения полуметрического пространства (K, ρ_μ), т.е. классу эквивалентных фундаментальных последовательностей будет соответствовать один класс эквивалентных измеримых множеств из $(\bar{K}^\mu, \rho_{\bar{\mu}})$.*

Обозначение. *$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ – борелевская σ-алгебра, т.е. наименьшее σ-кольцо или σ-алгебра, содержащая все декартовы произведения одномерных промежутков. Она же порождается и открытыми шарами, и просто открытыми множествами в $\mathbb{R}^d$, и значит замкнутыми.*

Конструкция d-мерной меры Лебега.

a)

Определение 4. *Рассматриваем те ограниченные множества* $M \subset [-N,N]^d \subset \mathbb{R}^d$*, что* $\mathbb{1}_{M\subset[-N,N]^d} \in R\left([-N,N]^d\right)$*, такие* M *называются измеримыми по Жордану,*

$$\int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \mathbb{1}_{M\subset[-N,N]^d}(x_1,...,x_d)dx_1 \dots dx_d = |M|_d - \text{ } d\text{-мерная мера Жордана.}$$

b) Кольцо всех измеримых по Жордану подмножеств в фиксированном кубе не является σ-кольцом, но мера Жордана (d-мерная) на этом кольце счётно-аддитивная, и мы можем по теореме продолжить:

Пусть $J([-N,N]^d)$ – кольцо измеримых по Жордану подмножеств в $[-N,N]^d$, $\lambda_{J([-N,N]^d)} \equiv \lambda^d_{J,N} : J([-N,N]^d) \to [0,+\infty) : M \to |M|_d$, тогда $\overline{\lambda^d_{J,N}} \equiv \lambda^d_N : \overline{J([-N,N]^d)}^{\lambda^d_{J,N}} \equiv M^d_{\lambda,N} \to [0,(2N)^d]$, где $\overline{J([-N,N]^d)}^{\lambda^d_{J,N}}$ – измеримые по Лебегу подмножества куба.

Замечание. $0 < N_1 < N_2 \Rightarrow \forall m \in M^d_{\lambda,N_1}\ \lambda^d_{N_1}(m) = \lambda^d_{N_2}(m)$*, т.е* $\lambda^d_{N_1} = \lambda_{N_2}\big|_{M^d_{\lambda,N_1}}$.

Упражнение 2.

$$\sigma_{\varkappa}\left(\bigcup_{N>0} M^d_{\lambda,N}\right) = \sigma_{\varkappa}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} M^d_{\lambda,N}\right) = \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid A_k \in M^d_{\lambda,N}\right\} \equiv M^d_\lambda \overset{*}{\Rightarrow}\equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),$$

где M^d_λ *- система всех измеримых относительнго (полной) меры Лебега в* $\mathbb{R}^d$ *подмножеств.*

Определение 5. $\lambda^d : M^d_\lambda \to [0,+\infty]$*, такая что* $\lambda^d(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_K) = \lim_{k\to\infty} \lambda^d_k(A_k)$ *при* $A_k \in M^d_{\lambda,k}$. λ^d *называется полной* d*-мерной мерой Лебега.*

Теорема 1. *Определение* λ^d *корректно.*

Замечание. $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \mathsf{C}$ *(continuum), где* $Card$ *– количество элементов (кардинальное число), мощность.*

Пример 1. *Канторово стандартное множество измеримо по Жордану, и все подмножества тоже, а этих подмножеств* $\supset \mathsf{C}$

Определение 6. *Пусть* S *– система множеств,* $\mu : S \to [0,+\infty]$*,* μ *называется полной, если* $\forall A \in S(\mu(A) = 0 \Rightarrow \forall B \subset A : B \in S \,\&\, \mu(B) = 0)$*. В этом случае и саму систему* S *называют полной относительно меры* μ*.*

Следствие. λ^d *- полна,* M^d_λ *– полна относительно* λ^d*.*

Определение 7. σ*-аддитивная неотрицательная мера на* σ*-алгребре* $\mathfrak{a}$ *с единицей* E *называется* σ*-конечной, если* $\exists(A_1, A_2, \dots) \in \mathfrak{a}^{\mathbb{N}}$ *такие, что*

1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$

2) $\forall n \in N\ \mu A_n < \infty$

Определение 8. *Пополнение неотрицательной σ конечной меры μ заданной на σ-алгебре $\mathfrak{a}$ – это новая мера $\bar{\mu} : \bar{\mathfrak{a}} \to [0, +\infty]$ такая, что*

$$\bar{\mathfrak{a}} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \,\middle|\, \forall k \, \mu^* A_k = 0 \right\} \bigcup \mathfrak{a} \equiv \left\{ B \subset \left(\bigcup \mathfrak{a} \right) \,\middle|\, \exists A \in \mathfrak{a} \; \mu^*(A \Delta B) = 0 \right\}.$$

И если A и B как только что описано, то $\bar{\mu}B = \mu A$.

Часто вводится d-мерная борелевская мера Лебега $\lambda^d_{\mathcal{B}} = \lambda^d\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$.

Определение 9. *Пусть L – линейное (векторное) пространство над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\ell : L \to K$ называется линейной (однородной) $\Leftrightarrow \forall v, w \in L$, $\forall c \in \mathbb{K}$,*

$$\ell(v + cw) = \ell(v) + c\ell(w),$$

$c = 1$ – аддитивность, $v = 0$ – однородность 1-ой степени.

Определение 10. *Пусть L как выше, $L_0 \subset L$, $f : L_0 \to \mathbb{K}$ называется линейной (однородной), если $\exists$ линейная $\ell : L \to \mathbb{K}$ такая, что $\ell\big|_{L_0} = f$.*

Упражнение 3. *Пусть K – теоретико-множественное кольцо, $\mu : K \to \mathbb{K}$ аддитивна, $E \equiv \bigcup K$, $L_0 = \{\mathbb{1}_{A \subset E} \big|_: A \in K\}, L_0 \subset \mathbb{K}^E$, $\ell_\mu(\mathbb{1}_{A \subset E}) = \mu(A)$ $\forall A \in K$. ℓ_μ – линейная.*

Определение 11. *Все линейные и непрерывные продолжения функционала ℓ_μ называются интегралами по μ.*

Упражнение 4. *На линейную оболочку $< \mathbb{1}_{A \subset E} >_{\mathbb{K}}$ продолжение ℓ_μ с сохранением свойства линейности едиственно и элементы $< L_0 >_{\mathbb{K}}$ называются простыми интегрируемыми по μ функции на E.*

Если μ неотрицательная σ-аддитивная и σ-конечная на σ-алгебре $\mathfrak{a}$, то

$$\mathfrak{a}_{\text{fin},\mu} = \left\{ A \in \mathfrak{a} \,\big|_:\, \mu A < +\infty \right\}$$

(т.е. A – множество конечной меры μ) является δ-кольцом и простыми интегрируемыми по μ функциями называются элементы $< \left\{ \mathbb{1}_{A \subset E} \,\big|_:\, A \in \mathfrak{a}_{\text{fin},\mu} \right\} >_{\mathbb{R}} = L_{1,0}(\mu)$

$$\forall f = \sum_{k=1}^{n} c_K \mathbb{1}_{A_k \subset E} \in L_{1,0}(\mu)$$

такие, что $A_k \in \mathfrak{a}_{\text{fin},\mu}$, $E \equiv \bigcup \mathfrak{a}$

$$\ell_\mu(f) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \equiv \int\limits_E f(x)\mu(dx)$$