Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Дискретные случайные процессы. Лекция 8.

Выполнил: Дурнов Алексей Николаевич
студент Б01-009

Долгопрудный, 2023

Замечание. *Теорема о единственном продолжении неотрицательной ограниченной счётно-аддитивной меры с кольца на порождённое им σ-кольцо с сохранением sigma-аддитивности меры - главная теорема курса*

Обозначение. *Пусть K - множественное кольцо $\xrightarrow[\sigma_{add}]{\mu} [0, N]$. Тогда $\bigcup K := E := \bigcup\limits_{A \in K} A = \bigcup\{A | A \in K\}$.*

Определение 1. *Множество $M \in E$ назовём K_σ-покрываемым, если $\exists (A_1, A_2, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такое, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}_{\in K}) \equiv \bigsqcup\limits_{m=1}^{\infty} (\underbrace{A_m \setminus \bigcup\{A_k|_: k < m\}}_{\in K})$.*

Обозначение. $\mathcal{P}_{K_\sigma}(E) = \{M |\, M$ *является* K_σ*-покрываемым*$\}$.

$$\mu^*(M) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) |\, \forall k \in N\, C_k \in K;\ M \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k\} \leqslant N$$

$$\rho_\mu^* : \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \times \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \to [0, N] : (A, B) \to \mu^*(A \Delta B),\ \forall M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$$

$$\mu_*(M) = \sup\{\mu(A) |\, A \in K,\, A \subset M\} \leqslant N$$

Будем называть μ^* внешней мерой, а μ_* - внутренней.

Определение 2. *$\mu*$-измеримыми подмножества в $E \equiv \bigcup K$ назовём такие $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что для некоторой $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такие, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv U$, выполнено соотношение:*

$$\mu^*(M) + \mu^*(U \setminus M) = \mu^*(U) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \right\} \text{(конструкция Каратеодори)}$$

Определение 3. *ρ_μ^*-измеримым называется такое $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что $\exists (A_{k,l})_{k,l=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, что $\rho_\mu^* \left(\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,l} \right), M \right) = 0$ (Лебег).*

Упражнение* 1. *Система μ^*-измеримых подмножеств в E совпадает с системой ρ_μ^*-измеримый подмножеств E, является σ-кольцом, которое называется σ-кольцом множеств, измеримых относительно естественного продолжения меры μ, обозначим $\bar{K}^\mu$.*

$$\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} =: \bar{\mu} -\ \sigma\text{-адд}$$

$$\bar{\mu}\big|_{K} = \mu^*\big|_{K^\mu} = \mu$$

Замечание. *Вообще говоря, $\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} \neq \bar{\mu}$*

Замечание. *$\rho_{\bar{\mu}}$ порождает ту же самую метрику на фактор пространстве $\bar{K}/\tilde{\rho}_{\bar{\mu}}$, что и копия аналогично получаемой метрики из пополнения полуметрического пространства (K, ρ_μ), т.е. классу эквивалентных фундаментальных последовательностей будет соответствовать один класс эквивалентных измеримых множеств из $(\bar{K}^\mu, \rho_{\bar{\mu}})$.*

Обозначение. *$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ - борелевская σ-алгебра, т.е. наименьшее σ-кольцо или σ-алгебра, содержащая все декартовы произведения одномерных промежутков. Она же порождается и открытами шарами, и просто открытыми множествами в $\mathbb{R}^d$, и значит замкнутыми.*

Конструкция d-мерной меры Лебега.

a) 1

b) 2

c)

Теорема 1. *Определение λ^d корректно: λ^d называется полной d-мерной мерой.*

Замечание. $\mathtt{Card}(B(\mathbb{R}^d)) = \mathsf{C}$ *(continuum), где* $\mathfrak{Card}$ *- количество элементов (кардинальное число), мощность.*