Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Дискретные случайные процессы.
Лекция 8.

Выполнил: Дурнов Алексей Николаевич
студент Б01-009

Долгопрудный, 2023

Замечание. *Теорема о единственном продолжении неотрицательной ограниченной счётно-аддитивной меры с кольца на порождённое им σ-кольцо с сохранением sigma-аддитивности меры — главная теорема курса*

Обозначение. *Пусть K — множественное кольцо $\xrightarrow[\sigma_{add}]{\mu} [0, N]$. Тогда $\bigcup K := E := \bigcup\limits_{A\in K} A = \bigcup\{A|A \in K\}$.*

Определение 1. *Множество $M \in E$ назовём K_σ-покрываемым, если $\exists(A_1, A_2, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такое, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}_{\in K}) \equiv \bigsqcup\limits_{m=1}^{\infty}(\underbrace{A_m \setminus \bigcup\{A_k\big|_: k < m\}}_{\in K})$.*

Обозначение. $\mathcal{P}_{K_\sigma}(E) = \{M|\, M$ *является K_σ-покрываемым*$\}$.

$$\mu^*(M) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(C_k)|\,\forall k \in N\, C_k \in K;\ M \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k\} \leqslant N$$

$$\rho^*_\mu : \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \times \mathcal{P}_{K_\sigma}(E) \to [0, N] : (A, B) \to \mu^*(A\Delta B),\ \forall M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$$

$$\mu_*(M) = \sup\{\mu(A)|\, A \in K,\, A \subset M\} \leqslant N$$

Будем называть μ^* внешней мерой, а μ_* — внутренней.

Определение 2. *$\mu*$-измеримыми подмножества в $E \equiv \bigcup K$ назовём такие $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что для некоторой $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ такие, что $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \equiv U$, выполнено соотношение:*

$$\mu^*(M) + \mu^*(U \setminus M) = \mu^*(U) \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right\} \text{(конструкция Каратеодори)}$$

Определение 3. *ρ^*_μ-измеримым называется такое $M \in \mathcal{P}_{K_\sigma}(E)$, что $\exists(A_{k,l})_{k,l=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, что $\rho^*_\mu\left(\bigcap\limits_{l=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,l}\right), M\right) = 0$ (Лебег).*

Упражнение 1 (*). *Система μ^*-измеримых подмножеств в E совпадает с системой ρ^*_μ-измеримый подмножеств E, является σ-кольцом, которое называется σ-кольцом множеств, измеримых относительно естественного продолжения меры μ, обозначим $\bar{K}^\mu$.*

$$\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} =: \bar{\mu} - \ \sigma\text{-адд}$$

$$\bar{\mu}\big|_K = \mu^*\big|_{K^\mu} = \mu$$

Замечание. *Вообще говоря, $\mu^*\big|_{\bar{K}^\mu} \neq \bar{\mu}$*

Замечание. *$\rho_{\bar{\mu}}$ порождает ту же самую метрику на фактор пространстве $\bar{K}/\tilde{\rho}_{\bar{\mu}}$, что и копия аналогично получаемой метрики из пополнения полуметрического пространства (K, ρ_μ), т.е. классу эквивалентных фундаментальных последовательностей будет соответствовать один класс эквивалентных измеримых множеств из $(\bar{K}^\mu, \rho_{\bar{\mu}})$.*

Обозначение. *$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра, т.е. наименьшее σ-кольцо или σ-алгебра, содержащая все декартовы произведения одномерных промежутков. Она же порождается и открытами шарами, и просто открытыми множествами в $\mathbb{R}^d$, и значит замкнутыми.*

Конструкция d-мерной меры Лебега.

a)

Определение 4. *Рассматриваем те ограниченные множества $M \subset [-N,N]^d \subset \mathbb{R}^d$, что $\mathbb{1}_{M\subset[-N,N]^d} \in R\left([-N,N]^d\right)$, такие M называются измеримыми по Жордану,*

$$\int\limits_{-N}^{N} \cdots \int\limits_{-N}^{N} \mathbb{1}_{M\subset[-N,N]^d}(x_1,...,x_d)dx_1\dots dx_d = |M|_d - \text{ } d\text{-мерная мера Жордана}$$

b) Кольцо всех измеримых по Жордану подмножеств в фиксированном кубе не является σ-кольцом, но мера Жордана (d-мерная) на этом кольце счётно-аддитивная, и мы можем по теореме продолжить:

Пусть $J([-N,N])$ — кольцо измеримых по Жордану подмножеств в $[-N,N]^d$, $\lambda_{J([-N,N]^d)} \equiv \lambda^d_{J,N} : J([-N,N]^d) \to [0,+\infty) : M \to |M|_d$, тогда $\overline{\lambda^d_{J,N}} \equiv \lambda^d_N : \overline{J([-N,N]^d)}^{\lambda^d_{J,N}} \equiv M^d_{\lambda,N} \to [0,(2N)^d]$, где $\overline{J([-N,N]^d)}^{\lambda^d_{J,N}}$ — измеримые по Лебегу подмножества куба

Замечание. $0 < N_1 < N_2 \Rightarrow \forall m \in M^d_{\lambda,N_1}\ \lambda^d_{N_1}(m) = \lambda^d_{N_2}(m)$, *т.е* $\lambda^d_{N_1} = \lambda_{N_2}\big|_{M^d_{\lambda,N_1}}$

Упражнение 2. $\sigma_\varkappa\left(\bigcup\limits_{N>0} M^d_{\lambda,N}\right) = \sigma_\varkappa\left(\bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} M^d_{\lambda,N}\right) = \left\{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k | A_k \in M^d_{\lambda,N}\right\} \equiv M^d_\lambda \overset{*}{\Rightarrow}\equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, *где M^d_λ - система всех измеримых относительнго (полной) меры Лебега в $\mathbb{R}^d$ подмножеств.*

Определение 5. $\lambda^d : M^d_\lambda \to [0,+\infty]$, *такая что* $\lambda^d(\overset{\infty}{\underset{k=1}{\circlearrowright}} A_K) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda^d_k(A_k)$ *при* $A_k \in M^d_{\lambda,k}$. *λ^d называется полной d-мерной мерой Лебега.*

Теорема 1. *Определение λ^d корректно.*

Замечание. $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \mathfrak{C}$ *(continuum), где $Card$ — количество элементов (кардинальное число), мощность.*

Пример 1. *Канторово стандартное множество измеримо по Жордану, и все подмножества тоже, а этих подмножеств $\supset \mathfrak{C}$*

Определение 6. *Пусть S — система множеств, $\mu : S \to [0,+\infty]$, μ называется полной, если $\forall A \in S(\mu(A) = 0 \Rightarrow \forall B \subset A\, B \in S \& \mu(B) = 0)$. В этом случае и саму систему S называют полной относительно меры μ.*

Следствие. λ^d *- полна, M^d_λ — полна относительно λ^d.*

Определение 7. *σ-аддитивная неотрицательная мера на σ-алгребре σ с единицей E называется σ-конечной, если $\exists(A_1,A_2,\dots) \in \sigma^{\mathbb{N}}$, такие что*

(a) $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\circlearrowright}} A_n = E$

(b) $\forall n \in N\ \mu A_n < \infty$

Определение 8. *Пополнение неотрицательной σ конечной меры μ заданной на σ-алгебре σ — это новая мера $\bar{\mu} : \bar{\sigma} \to [0,+\infty]$, такая что* $\bar{\sigma} = \left\{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k | \forall k \mu * A_k = 0\right\} \bigcup \sigma \equiv \{B \subset (\bigcup \sigma) | \exists A \in \sigma\, \mu * (A \Delta B) = 0\}$.

И если A и B как только что описано, то $\bar{\mu}B = \mu A$.

Часто вводится d-мерная борелевская мера Лебега $\lambda^d_{\mathcal{B}} = \lambda^d\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$

Определение 9. *Пусть L — линейное(векторное) пространство над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $l : L \to K$ называется линейной (однородной) $\Leftrightarrow \forall v, w \in L$, $\forall c \in K$,*

$$l(v + cw) = l(v) + cl(w),$$

$c = 1$ — аддитивность, $v = 0$ — однородность 1-ой степени.

Определение 10. *Пусть L как выше, $L_0 \subset L$, $f : L_0 \to \mathbb{K}$ называется линейной (однородной), если $\exists$ линейная $l : L \to \mathbb{K}$ такая, что $l\big|_{L_0} = f$.*

Упражнение 3. *Пусть K — теоретико-множественное кольцо, $\mu : K \to \mathbb{K}$ аддитивна, $E = \bigcup K$, $L_0 = \{\mathbb{1}_{A\subset E}\big|_{:} A \in K\}, L_0 \subset \mathbb{K}^E$, $l_\mu(\mathbb{1}_{A\subset E}) = \mu(A) \forall A \in K$. l_μ — линейная.*

Определение 11. *Все линейные и непрерывные продолжения функционала l_μ называются интегралами по μ*

Упражнение 4. *На линейную оболочку $< \mathbb{1}_{A\subset E} >_{\mathbb{K}}$ продолжение l_μ с сохранением свойства линейности едиственно и элементы $< L_0 >_{\mathbb{K}}$ называются простыми интегрируемыми по μ функции на E.*

Если μ неотрицательная σ-аддитивная и σ-конечная на σ-алгебре σ, то

$$\sigma_{\text{fin},\mu} = \left\{A \in \sigma\big|_{:} \mu A < +\infty\right\}$$

(т.е. A — множество конечной меры μ) является δ-кольцом и простыми интегрируемыми по μ функциями называются элементы $< \left\{\mathbb{1}_{A\subset E}\big|_{:} A \in \sigma_{\text{fin},\mu}\right\} >_{\mathbb{R}} = L_{1,0}(\mu)$

$$\forall f = \sum_{k=1}^{n} c_K \mathbb{1}_{A_k\subset E} \in L_{1,0}(\mu)$$

такие, что $A_k \in \sigma_{\text{fin},\mu}$, $E \equiv \bigcup \sigma$

$$l_\mu(f) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \equiv \int\limits_E f(x)\mu(dx)$$