Многомерный анализ, интегралы и ряды. Билеты.

Над файлом работали:
Баранников Андрей Б01-001
Дорин Даниил Б01-001
Киселев Никита Б01-001
Овсянников Михаил Б01-001
Панферов Иван Б01-001
Филиппенко Павел Б01-001
Курневич Станислав Б01-002
Лепарский Роман Б01-003
Артамонов Кирилл Б01-005
Белов Владислав Б01-005
Паншин Артём Б01-005
Глаз Роман Б01-007
Дурнов Алексей Б01-007
Талашкевич Даниил Б01-009
Фатыхов Тимур Б01-009

Version 4.7
Долгопрудный, 2021

Содержание

1. Билет 1

Введем понятия:

1. $\mathbb{R}^m$ – m-мерное координатное пространство.

2. Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – точка m-мерного пространства,
$x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, m$ – координата точки.

3. $x, y \in \mathbb{R}^m$; $\rho_e(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2}$ – расстояние между точками x и y.

4. $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e)$ – m-мерное евклидово пространство.

5. $\mathscr{M} = (M, \rho)$ – метрическое пространство, где $M \subset \mathbb{R}^m$ – некоторое множество, $\rho(x, y)$ – функция, задающая расстояние между точками x, y множества M (метрика).

6. $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ – m-мерный шар с центром в точке x_0 и радиусом ε (шаровая ε-окресность точки x_0).

7. $\Pi_{r_1, r_2, \ldots r_m}(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r_j,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$ – m-мерный прямоугольник с центром x_0 и сторонами $2r_1, 2r_2, \ldots, 2r_m$.

8. $\Pi_r(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r\}$ – m-мерный квадрат с центром в точке x_0 и стороной $2r$.

Предложение:

1. В любую шаровую окрестность можно вписать прямоугольную окрестность.

2. В любую прямоугольную окрестность можно вписать шаровую окрестность.

Доказательство: Пусть $B_\varepsilon(x_0),\ \Pi_r(x_0)$ – шаровая и прямоугольная окрестности точки x_0, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Везьмем $\delta = min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, тогда:

1. $\Pi_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0), \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

2. $B_\varepsilon(x_0) \subset \Pi_\delta(x_0), \quad \delta = \varepsilon$.

1.1. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве.

Обозначим $\mathscr{M} = (M, \rho)$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек в $\mathscr{M}$.

Определение: Последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ точек метрического пространства сходится к точке $a \in \mathscr{M}$, если:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^n, a) = 0$$

$$[\lim_{n\to\infty} x^n = a] \overset{\text{def}}{=} [\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon]$$

Любой шар с центром в точке a и радиусом ε содержит все члены последовательности $\{x^n\}$ за исключением быть может конечного числа N.

Лемма: Сходящаяся последовательность точек ограничена.

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

где $y_n = \rho(x^n, a)$. Тогда $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ – ограничена, т. е. $\exists\ C > 0\ :\ 0 \leqslant y_n = \rho(x^n, a) \leqslant C$.

Лемма: Сходящаяся последовательность точек имеет единственный предел.

Доказательство: Будем доказывать от противного: предположим, что

$$\exists\ a \neq b : \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} x^n = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1)\ \ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_1 = N_1(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N_1 \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(2)\ \ \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_2 = N_2(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N_2 \mapsto \rho(x^n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N\ :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(a, b) \leqslant \rho(x^n, a) + \rho(x^n, b) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что $\rho(a, b) = 0\ \Rightarrow\ a = b$ – противоречие.

1.2. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ ограничена, если $\exists R > 0\ \forall n \mapsto \rho(x^n, 0) \leqslant R$.

Теорема: Пусть $\{x^n\} = \{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots, x_m^n\} \subset \mathbb{E}^m$ – последовательность точек m-мерного евклидового пространства, а $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{E}^m$ – точка m-мерного евклидового пространства, тогда

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ \Leftrightarrow\ \forall j\ x_j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_j$$

Доказательство:
Необходимость $(\Rightarrow)$

По условию дано:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j^n - a_j)^2} \Rightarrow |x_j^n - a_j| \leqslant \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Таким образом получаем:

$$[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N\ \ \&\ \ \forall j = 1, 2, \ldots, m \mapsto |x_j^n - a_j| < \varepsilon] \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} x_j^n = a_j$$

Достаточность ($\Leftarrow$)

Запишем определение покоординатной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_j = N_j(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N_j \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ для всех j.

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j^n - a_j)^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a$$

Теорема [Теорема Больцано-Вейерштрасса]: Из любой ограниченной последовательности $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \subset \mathbb{E}^m$.

Доказательство:

$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ является ограниченной $\overset{def}{\Rightarrow} \exists R > 0\ \forall n \mapsto \rho_e(x^n, 0) \leqslant R$. Тогда для всех j последовательность $\{x_j^n\}$ так же ограничена (x_j^n – j-ая компонента).

$\{x_1^n\}$ ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности существует подпоследовательность $\{x_1^{k_{n_1}}\}$ такая, что $x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow[n_1\to\infty]{} a_1$.

Возьмём подпоследовательность $\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m$ (по номерам k_{n_1} выбираем из последовательности $\{x^n\}$ точки). И рассмотрим числовую последовательность $\{x_2^{k_{n_1}}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности) и следовательно, по теореме Больцано-Вейерштраса существует подпоследовательность $\{x_2^{k_{n_2}}\}$ такая, что $x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_2$. При этом все еще справедливо $x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_1$.

$$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_1^n\} \Rightarrow \{x_1^{k_{n_1}}\} \Rightarrow x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow[n_1\to\infty]{} a_1$$

$$\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_2^{k_{n_1}}\} \Rightarrow \{x_2^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_2 \\ x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

$$\{x^{k_{n_2}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_3^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \{x_3^{k_{n_3}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_3^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_3 \\ x_2^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_2 \\ x_1^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\{x^{k_{n_{m-1}}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_m^{k_{n_{m-1}}}\} \Rightarrow \{x_m^{k_{n_m}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a_m \\ \dots \\ x_1^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

Таким образом мы нашли подпоследовательность $\{x^{k_{n_m}}\} \subset \mathbb{E}^m$ такую, что $x^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ называется *фундаменталной*, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N\ \&\ \forall k \geqslant N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$.

Определение: Метрическое пространство $\mathscr{M}$, в котором любая фундаментальная последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ является сходящейся, называется *полным*.

Теорема [Критерий Коши]: для того, чтобы последовательность $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:
Необходимость $(\Rightarrow)$

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$\forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geqslant N \mapsto \rho(x^k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x^n, x^k) \leqslant \rho(x^n, a) + \rho(x^k, a) < \varepsilon$$

Достаточность $(\Leftarrow)$
Докажем, что евклидово пространство $\mathbb{E}^m$ является полным, то есть любая фундаментальная последовательность этого пространства является сходящейся.

Рассмотрим последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$, которая является фундаментальной. Распишем по определению:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N\ \ \&\ \ \forall k \geqslant N \longmapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Воспользуемся утверждением:

$$\forall j \longmapsto |x_j^n - x_j^k| \leqslant \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что последовательность $\{x_j\}$ является фундаментальной, отсюда, по теореме Коши для обычной числовой последовельности, она являтся сходящейся, то есть:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) :\ |x_j - a_j| < \varepsilon$$

Последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ имеет покоординатную сходимость, а этого, как известно, достаточно для сходимости последовательности $\{x^n\}$.

Замечание: Таким образом, мы доказали, что **в евклидовом пространстве** справедлив критерий Коши.

Замечание: Для произвольных метрик может существовать последовательность, которая является фундаментальной, но при этом не сходится.

Контрпример: Рассмотрим метрическое пространство $\mathscr{M} = (\mathbb{Q}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Рассмотрим последовательность $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. Данная последовательность является фундаментальной, но при этом не является сходящейся в $\mathscr{M}$.

1.3. Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *внутренней точкой множества*, если существует $B_r(x_0) : B_r(x_0) \subset X$.

Определение: точка x_0 называется *предельной точкой множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность точки x_0 содержит по крайней мере одну точку множества X, отличную от x_0.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \neq x_0\ \ \&\ \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *изолированной точкой множества*, если у этой точки существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества X.

$$\exists\ r > 0 : \forall x \in B_r(x_0) :\ x \neq x_0 \mapsto x \notin X$$

Определение: точка x_0 называется *точкой прикосновения множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества X.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X\ :\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 называется *граничной точкой множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x'_\varepsilon \in X\ \&\ x''_\varepsilon \notin X : x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

1.4. Открытые и замкнутые множества, их свойства.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *открытым*, если любая его точка внутренняя.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Теорема: открытые множества метрического пространства $\mathscr{M}$ обладают следующими свойствами:

1. $\mathscr{M}, \varnothing$ – открытые множества.

2. $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ – объединение любого числа открытых множеств X_α есть открытое множество.

3. $\bigcap\limits_{j=1}^{K} X_j$ – пересечение конечного числа открытых множеств X_j есть открытое множество.

Доказательство свойства 2: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, тогда существует множество X_{α_0}, такое что $x \in X_{\alpha_0}$. Но X_{α_0} – открытое множество (по условию), поэтому $\exists\ \varepsilon_0 : B_{\varepsilon_0}(x) \subset X_{\alpha_0} \subset X$, таким образом, получается, что любая точка множества X входит в него с некоторой ε-окрестностью, это значит, что X – открытое множество.

Доказательство свойства 3: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcap\limits_{j=1}^{K} X_j$, тогда $x \in X_j,\ j = 1, 2, \ldots, K$. Но каждое X_j – открытое множество, поэтому $\forall\ j\ \exists\ \varepsilon_j : B_{\varepsilon_j}(x) \subset X_j$. Пусть $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_K\}$, тогда $\forall\ j\ B_\varepsilon(x) \subset X_j\ \Rightarrow\ B_\varepsilon(x) \subset X$, это значит, что X – открытое множество.

Теорема:

1. $Y \backslash (\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} (Y \backslash X_\alpha)$
2. $Y \backslash (\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in A} (Y \backslash X_\alpha)$

Доказательство (1):
Пусть $x \in Y \backslash \left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \Rightarrow [x \in Y]\ \&\ \left[x \notin \bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right] \Rightarrow \exists\ \alpha' \in A :\ x \notin X_{\alpha'}$.

Пусть $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} (Y \backslash X_\alpha) \Rightarrow \exists\ \alpha' :\ x \in Y \backslash X_{\alpha'} \Rightarrow [x \in Y]\ \&\ [x \notin X_{\alpha'}]$.

Таким образом в обоих случаях мы приходим к тому, что $\exists\ \alpha' \in A : [x \in Y]\ \&\ [x \notin X_{\alpha'}]$.

Доказательство (2): Проводим аналогичные рассуждения.

Теорема: множество X метрического пространства $\mathscr{M}$ является замкнутым $\Leftrightarrow CX = \mathscr{M} \backslash X$ – открытое множество. Причем CX называется *дополнением множества* X.

Доказательство:
Необходимость ($\Rightarrow$)

Доказываем от противного: предположим, что CX не является открытым множеством $\Rightarrow \exists\ x_0 \in CX :\ x_0$ не является внутренней точкой $CX \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \neq x_0 :\ x_\varepsilon \notin CX\ \&\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

тогда x_0 по определению является предельной точкой множества X и при этом $x_0 \notin X$ (т. к. $x_0 \in CX$); получается, что существует предельная точка множества X, не лежащая в этом множестве, но по условию X – замкнутое множество, а значит сожержит все свои предельные точки, таким образом приходим к противоречию.

Достаточность ($\Leftarrow$)

Доказываем от противного: предположим, что X не является замкнутым множеством, тогда:

$$\exists\ x_0 \notin X:\ x_0 - \text{предельная точка множества } X$$

По определению предельной точки:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \neq x_0:\ x_\varepsilon \in X\ \&\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Тогда любой шарик $B_\varepsilon(x_0)$ с радиусом $r = \varepsilon$ и центром в точке x_0 не содержится в $CX \Rightarrow x_0$ не является внутренней точкой множества CX, но при этом $x_0 \in CX$, поскольку $x_0 \notin X$; однако, по условию CX – открытое множество, а значит должно содержать все свои внутренние точки. Таким образом, приходим к противоречию.

Теорема: замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1. $\mathscr{M}, \varnothing$ – замкнутые множества.
2. $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ – пересечение любого числа замкнутых множеств X_α есть замкнутое множество.
3. $\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j$ – объединение конечного числа замкнутых множеств X_j есть замкнутое множество.

Доказательство свойства 2: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X: рассмотрим $C(\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \mathscr{M} \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (\mathscr{M} \backslash X_\alpha)$. X_α – замкнутое множество $\Rightarrow \mathscr{M} \backslash X_\alpha$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} (\mathscr{M} \backslash X_\alpha) = C(\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ – замкнутое множество.

Доказательство свойства 3: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X: рассмотрим $C(\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j) = \mathscr{M} \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{K} (\mathscr{M} \backslash X_j)$. X_j – замкнутое множество $\Rightarrow \mathscr{M} \backslash X_j$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{K} (\mathscr{M} \backslash X_j) = C(\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j$ – замкнутое множество.

Замечание:

1. Если X – открытое множество, то $X = intX$.
2. Если X – замкнутое множество, то $\overline{X} = X$.
3. Пусть G – открытое множество, тогда в общем случае $int(\overline{G}) \neq G$.
4. Пусть F – замкнутое множество, тогда в общем случае $\overline{intF} \neq F$.

1.5. Внутренность, замыкание и граница множества.

Определение: $intX$ – совокупность всех внутренних точек множества $X \subset \mathscr{M}$ называется *внутренностью множества* X.

Определение: $\overline{X}$ – *замыкание множества* $X \subset \mathscr{M}$ – операция присоединения к множеству X всех его предельных точек.

Определение: ∂X – граница множесвва X – совокупность всех граничных точек множества X.

1.6. Компакты.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *компактом*, если если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству X.

$$\forall \{x^n\} \subset X \ \exists \{x^{k_n}\} \subset X : \lim_{n\to\infty} x^{k_n} = a \in X$$

Определение: Множество $X \subset \mathbb{R}^m$, любые 2 точки которого можно соеденить лежащей в нем непрерывной кривой, называется *линейно связным* (непрерывной кривой в m-мерной пространстве). («Введение в математический анализ.» Л. Д. Кудрявцев том 2).

Определение: Множества X_1 и X_2 метрического пространства $\mathscr{M}$ называются *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Определение: Множество X метрического пространства $\mathscr{M}$ называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

Определение: Открытое связное множество называется *областью*.

1.7. Метрическое пространство.

Определение: Пусть M – произвольное множество, для любых точек $x, y \in M$ поставим в соответствие число $\rho(x,y) \geqslant 0$ такое что

1. $\rho(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$

тогда $\mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *метрическим пространством*, а функция $\rho(x,y)$ – его метрикой.

Теорема [Неравенство Коши-Буняковского]: для любых точек $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j b_j\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

Доказательство: Рассмотрим многочлен:

$$p(z) = \sum_{j=1}^{m}(a_j + b_j z)^2 = A + 2Bz + Cz^2$$

$$A = \sum_{j=1}^{m} a_j^2; \quad B = \sum_{j=1}^{m} a_j b_j; \quad C = \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

Заметим, что при любых значениях z многочлен $p(z) \geqslant 0$, поскольку является суммой неотрицательных членов, тогда справедливо $B^2 - AC \leqslant 0 \Rightarrow B^2 \leqslant AC$ (дискриминант квадратного уравнения, деленный на 4). Подставляя A, B, C получаем исходное неравенство.

Теорема [Неравенство Минковского]: для любых $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(a_j + b_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}$$

Доказательство:

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 + 2\sum_{j=1}^{m} a_j b_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^2 + 2\sum_{j=1}^{m} a_j b_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 \overset{\text{К-Б}}{\leqslant} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2} + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}\right)^2$$

Свернём правую чать по формуле квадрата суммы и получим:

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j + b_j)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}\right)^2$$

Примеры метрических пространств:

$$\mathscr{M} = (M, \rho), \ \rho = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

$$\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e), \ \rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2}$$

$$\mathscr{M} = (\mathbb{R}^m, \rho_1), \ \rho_1(x, y) = \underset{1 \leqslant j \leqslant m}{max} |x_j - y_j|$$

1.8. Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в n–мерном евклидовом пространстве.

Определение: Множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется ограниченным, если существует m-мерный шар $B_R(0)$ такой, что $X \subset B_R(0)$ («Курс математического анализа» Л. Д. Кудрявцев том 2).

__**Теорема:**__ $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом $\Leftrightarrow$ X – ограниченное и замкнутое множество.

Доказательство:
Необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом, докажем, что X является замкнутым множеством. Возьмём произвольную предельную точку a множества X и будем рассматривать её окрестности: $B_{\frac{1}{n}}(a)$:

$$
\begin{gathered}
r_1 = 1, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_1 \neq a : x_1 \in X \ \&\ x_1 \in B_1(a)\\
r_2 = \tfrac{1}{2}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_2 \neq a : x_2 \in X \ \&\ x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(a)\\
\dots\\
r_n = \tfrac{1}{n}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_n \neq a : x_n \in X \ \&\ x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)\\
\dots
\end{gathered}
$$

Таким образом, мы построили последовательность точек $\{x^n\} \subset X$ такую, что выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \frac{1}{\varepsilon} :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(a, x^n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

или, что то же самое:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = a$$

но, по условию, X – компакт, а значит $a \in X$, таким образом, в силу произвольности точки a, компакт X содержит все свои предельные точки, а значит, является замкнутым множеством.

Заметим, что неограниченное множество X не может быть компактом, так как в неограниченном множестве можно построить последовательность точек, которая не будет являться сходящейся.

Достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ – ограниченное, замкнутое множество. Возьмём последовательность точек $\{x^n\} \subset X$, по теореме Больцано-Вейерштрасса, в силу ограниченности этой последовательности, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, в силу замкнутости множества $a \in X$, но тогда получается, что X – компакт.

2. Билет 2

2.1. Предел числовой функции нескольких переменных.

Обозначения: $\mathscr{M} = (\mathbb{M}, \rho)$, $a \in \mathscr{M}$, $\mathscr{U}(a)$, $w = f(x)$ - некоторая функция, заданная в $\mathscr{U}$(a), за исключением, быть может, самой точки a.

Определение (по Гейне):
$[\lim\limits_{x \to a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} \Big[\forall \{x^n\} : [x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a] \ \& \ [x^n \neq a \ \forall n] \mapsto w^n = f(x^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b\Big]$.

Определение (по Коши):
$[\lim\limits_{x \to a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x : \ 0 < \rho(x, a) < \delta] \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$.

Пример:

$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \ ,$$

$$x^2 + y^2 \neq 0, \ \vec{0} = (0, 0)$$

$$[\lim_{(x,y) \to \vec{0}} f(x, y) - \text{не существует}]$$

Рассмотрим последовательности:

$$\{z^n\}' = \{(x^n, y^n)\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\{z^n\}'' = \{(x^n, y^n)\} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}'', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Однако $f(\{z^n\}') = 1, \quad f(\{z^n\}'') = -1$. Поэтому предел функции $f(x, y)$ в точке $\vec{0} = (0, 0)$ не существует.

Предложение: Пусть $a \in \mathscr{M}$ и $w = f(x)$, $w = g(x)$ определены в $\mathscr{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Тогда:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$$

.

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{b}{c}, \ c \neq 0$$

.

Доказательство аналогично доказательству для функций одной переменной.

Определение: Функция $\alpha = \alpha(x)$, определенная в $\mathscr{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a, называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Предложение:

$[f(x) : \lim\limits_{x \to a} f(x) = b] \Rightarrow [\alpha = \alpha(x) = f(x) - b - \text{бесконечно малая при } x \to a]$.

2.2. Предел функции по множеству.

Обозначения: a - предельная точка множества $A \subset \mathscr{M}$, $w = f(x)$ определена в A.

Определение: Предел функции по множеству:

$$[\lim_{x \xrightarrow[x \in A]{} a} f(x) = b] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : \ 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

Обозначения: $D \subset \mathbb{E}^m$ - неограниченное множество. $w = f(x)$ - определена на D.

Определение: Предел функции при $x \to \infty$:

$$[\lim_{x \to \infty} f(x) = b] \overset{def}{=} \left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D : \rho(x, \vec{0}) > \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon\right]$$

Здесь $\vec{0} = (0, ..., 0)_m$.

Определение: Пусть функция $w = f(x)$ определена на множестве $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$ и $\forall x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1),\ x \neq x_0 \ \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x, y)$ существует повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = b$. Пусть $\forall y \in (y_0 - r_2, y_0 + r_2),\ y \neq y_0 \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$, $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = c$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x, y)$ существует повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = c$.

Замечание: Из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов. А из существования и равенства повторных пределов не следует существования предела в точке.

Примеры:

1.
$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$$

Но предел функции в точке $(0, 0)$ не существует.

2.
$$w = f(x, y) = \begin{cases} x \cdot sin\left(\frac{1}{y}\right),\ y \neq 0 \\ 0,\ y = 0 \end{cases}$$

$|f(x, y)| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$

$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : \ 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$

$\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[y \neq 0]{} \vec{0}} f(x, y) = 0 \quad \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$, однако

$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ – не существует.

Предложение: Пусть $w = f(x, y)$ определена в $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x-x_0| < r_1,\ 0 < |y-y_0| < r_2\}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$. Пусть, кроме того, $\forall x :\ 0 < |x - x_0| < r_1\ \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ и $\forall y :\ 0 < |y-y_0| < r_2\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$. Тогда повторные пределы существуют и равны числу b.

2.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Определение: Функция $w = f(x)$, определенная в $\mathscr{U}(a) \subset \mathscr{M}$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Обозначения: $w = f(x)$ определена на $A \subset \mathscr{M}$ и a предельная точка множества A.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке a по множеству A, если $\lim\limits_{x \xrightarrow[x\in A]{} a} f(x) = f(a)$.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathscr{M}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbb{X}$ по множеству $\mathbb{X}$.

Предложение:

$$[f - \text{непрерывна в точке } a \in \mathscr{M}] \Leftrightarrow [\Delta f(x) = f(x) - f(a) - \text{бесконечно малая при } x \to a]$$

Обозначения:

$$w = f(x),\ x \in \mathbb{E}^m; \quad \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = f({x_1}^0, ..., {x_{k-1}}^0, {x_k}^0 + \Delta x_k, {x_{k+1}}^0, ..., {x_m}^0) - f(x^0)$$

Частичное приращение функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = ({x_1}^0, ..., {x_m}^0)$ соответствуют приращению Δx_k аргумента x_k.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 по переменной x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0} \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = 0$.

Замечание: Из непрерывности функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = ({x_1}^0, ..., {x_m}^0)$ следует непрерывность функции по каждой переменной, но из непрерывности функции по каждой переменной не следует непрерывность функции в точке.

Контрпримеры:

1.
$$w = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0; \\ 0,\ x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_x f(\vec{0}, x) = \Delta_y f(\vec{0}, y) = 0.$$

Функция непрерывна в точке $\vec{0} = (0, 0)$ по переменной x и по переменной y. Однако пусть $y = kx$, тогда:

$\lim\limits_{(x,y)\to\vec{0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$, при $k \neq 0$. Поэтому функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $\vec{0}$.

2.

$$w = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

Функция f непрерывна в точке $\vec{0}$ по переменной x и по переменной y, непрерывна по множеству $y = kx$, однако не является непрерывной в точке $\vec{0}$ по множеству $y = x^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to\vec{0}} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$.

2.4. Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора).

Предложение: Пусть функции $w = f(x)$ и $w = g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathscr{M}$. Тогда функции $f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ - непрерывны в точке a, в случае частного $g(a) \neq 0$.

Обозначения: $x \in \mathbb{E}^m,\ x_j = \varphi_j(t),\ t \in T \subset \mathbb{E}^k,\ j = 1, ..., m;\ \forall t \in T \subset \mathbb{E}^k \mapsto x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$.

Теорема [О непрерывности суперпозиции функций]: Пусть функция $x_j = \varphi_j(t), j = 1, ..., m$, непрерывна в точке a, функция f – непрерывна в точке $b = (b_1, ..., b_m)$, причем $b_j = \varphi_j(a),\ j = 1, ..., m$. На $T \subset \mathbb{E}^k$ определена сложная функция

$$F(t) = f(\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t))$$

Тогда функция $F(t) = f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t))$ непрерывна в точке a.

Доказательство:

$$[w = f(x) \text{ непрерывна в точке } b] \overset{def}{=}$$

$$[\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x :\ \rho(x,b) < \delta] \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon]$$

$$[\varphi_j \text{ непрерывна в точке } a,\ j = 1, ..., m] \overset{def}{=} [\forall\delta > 0\ \exists\sigma_j = \sigma_j(\varepsilon) > 0,$$

$$j = 1, ..., m : [\forall t :\ \rho(t,a) < \sigma_j] \mapsto |\varphi_j(t) - \varphi_j(a)| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}]$$

$$\exists\sigma = \sigma(\varepsilon) = min\{\sigma_1, ..., \sigma_m\} \Rightarrow \forall t : \rho(t,a) < \sigma \Rightarrow |x_j - b_j| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}$$

$$\rho(x,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j - b_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta^2}{m}} = \delta \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) - f(\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a))| < \varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(a)| < \varepsilon$$

$$[\forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0 : [\forall t :\ \rho(t,a) < \sigma] \mapsto |F(t) - F(a)| < \varepsilon] \overset{def}{=} [F(t) - \text{непрерывна в точке а.}]$$

Теорема [О локальном сохранении знака непрерывной функции]: пусть $w = f(x)$ определена на $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и непрерывна в точке $x = a$, $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x : \rho(x,\, a) < \delta \mapsto f(x) \cdot f(a) > 0$.

Доказательство: используется "ε - δ" определение непрерывности функции функции в точке и выбором $0 < \varepsilon < |f(a)|$.

Теорема Вейерштрасса: Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда она ограничена на $\mathbb{X}$ и достигает на $\mathbb{X}$ своих верхней и нижней граней.

Доказательство(по Бесову): проведем доказательство лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для одномерного случая: $\mathbb{X} = [a,\ b]$.

Пусть $B := \sup\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^n\},\ x^n \in \mathbb{X}\ \forall n \in \mathbb{N}$ такая, что

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = B$. Последовательность $\{x^n\}$ ограничена в силу ограниченности множества $\mathbb{X}$. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса выделим из $\{x^n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^0 = \lim\limits_{k\to\infty} x^{n_k}$. Точка x^0 принадлежит $\mathbb{X}$ в силу замкнутости $\mathbb{X}$. Следовательно, f непрерывна в точке x^0 по множеству $\mathbb{X}$.

Теперь из соотношений

$$f(x^{n_k}) \to B,\ f(x^{n_k}) \to f(x^0) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^0) = B$, т.е. что верхняя грань функции f достигается в точке $x^0 \in \mathbb{X}$, Следовательно, верхняя грань $\sup\limits_{\mathbb{X}} f$ конечна, а функция f ограничена сверху на $\mathbb{X}$.

Аналогично доказывается, что функция f достигает своей нижней грани на $\mathbb{X}$ и ограничена снизу на $\mathbb{X}$. Теорема доказана.

Определение: функция f называется равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathscr{M}$, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что для всех точек $x',\ x" \in \mathbb{X}$, таких, что $\rho(x',\ x") < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x")| < \varepsilon$.

На языке кванторов: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x',\ x" \in \mathbb{X},\ \rho(x', x") < \delta \mapsto |f(x') - f(x")| < \varepsilon$

Теорема [Теорема Кантора]: Пусть функция f непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда f равномерно непрерывна на $\mathbb{X}$.

Доказательство(по Бесову): Предположим, что теорема неверна, то есть, что существует f, непрерывная, но не равномерно непрерывная на $\mathbb{X}$. Тогда:
$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x,\ y \in \mathbb{X} :\ \rho(x, y) < \delta :\ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$
Будем в качестве δ брать $\delta_n = \frac{1}{n}$ и обозначать через $x^n,\ y^n$ соответствующую пару точек $x,\ y$. Тогда имеем:

$$x^n,\ y^n \in \mathbb{X},\ \rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n},$$

$$|f(x^n) - f(y^n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности x^n сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{n_k} = x^0$, что возможно по теореме Больцано-Вейерштрасса в силу ограниченности x^n. Тогда из

$\rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{n_k} = x^0$. Точка $x^0 \in \mathbb{X}$, так как $\mathbb{X}$ замкнуто. В силу непрерывности f в точке x^0 по множеству $\mathbb{X}$ имеем: $f(x^{n_k}) \to f(x^0),\ f(y^{n_k}) \to f(x^0)$ при $k \to \infty$, так что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \leqslant |f(x^{n_k}) - f(x^0)| + |f(y^{n_k}) - f(x^0)| \to 0, \text{ при } k \to \infty$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Теорема доказана.

2.5. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Теорема [Прохождение непр. функции через промежуточные значения]:

Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на линейно связном множестве $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m,\ a,\ b \in \mathbb{X}\ \ f(a) = A,\ f(b) = B$. Пусть число C лежит между числами A и B. Тогда на любой кривой соединяющей точки a и b и лежащей в $\mathbb{X}$, найдется точка c, такая, что $f(c) = C$.

Доказательство: Пусть $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{E}^1$, $x_j = \varphi_j(t)$, $\varphi_j(\alpha) = a_j$, $\varphi_j(\beta) = b_j$, $j = 1, ..., m$; $a = (a_1, ..., a_m)$, $\quad b = (b_1, ..., b_m)$, $\quad \varphi_j$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

$$\Gamma = \{\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

соединяющая точки a и b, $\Gamma \subset \mathbb{X}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $F(t) = f(\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции функций $F(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$ $F(\alpha) = A,\ F(\beta) = B \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha, \beta):\ F(\gamma) = C$ (т. Больцано - Коши). Тогда $c = (\varphi_1(\gamma),\ ...,\ \varphi_m(\gamma)) \Rightarrow f(c) = C$.

3. Билет 3

3.1. Частные производные функции нескольких переменных.

Определение: f определена $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Если существует и конечен $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = b \in R$, то этот предел называется частной производной функции $w = f(x)$ в точке а по аргументу x_k.

Обозначение. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ или f'_{x_k}

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)$$

(Только на месте k-ого аргумента есть приращение).

Замечания.

1. При вычислении $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ вычисляется как для функций одной переменной x_k при фиксированных остальных переменных (остальные переменные – постоянные).

2. $\left[\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \ldots, m\right] \not\Rightarrow [f$ непрерывна в точке а$]$

Контрпример.

$$\omega = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

Однако, f не является непрерывной в точке (0, 0), т.к. в этой точке у нее не существует $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

3. Определение частной производной функции $w = f(x)$ дано для внутренней точки множества определения функции. Оно не пригодно для граничной предельной точки множетсва, поскольку в граничной точке не всегда можно определить частное приращение. Поэтому частная производная в граничной предельной точке множества определения функции находится как предел частной производной по множеству.

Точка $a \in X$ – предельная граничная точка.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \to (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \to (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

3.2. Дифференцируемость функции в точке

Некоторые замечания, которые нужны для определения дифференцируемости функции в точке:

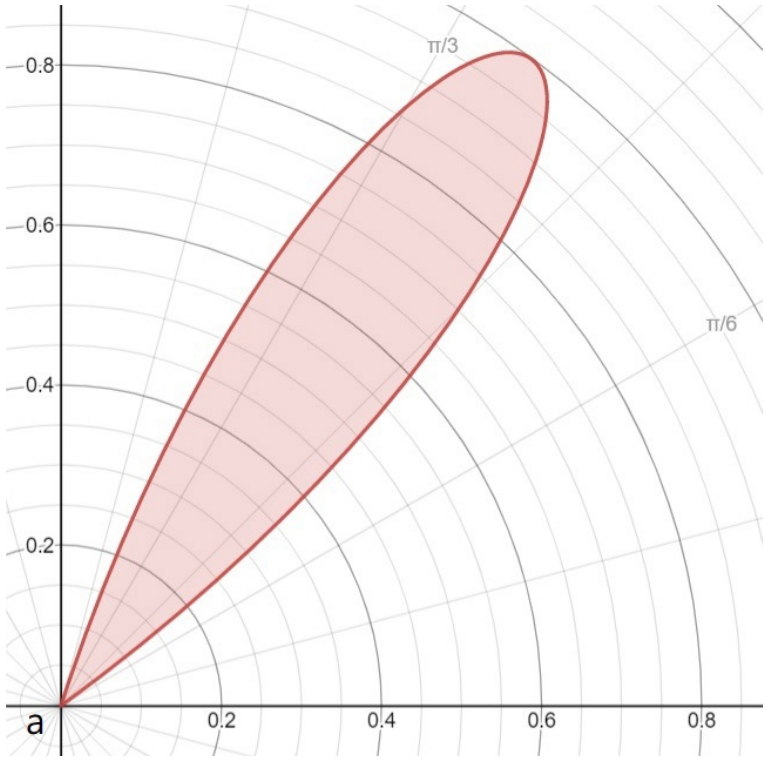


Рис. 1: Пример того, как частную производную следует искать как предел по множеству в точке a.

Рассмотрим $w = f(x)$, она определена в $\mathscr{U}(a), a = (a_1, \ldots, a_m), \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$: $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_m + \Delta x_m) \in \mathscr{U}(a)$

Рассмотрим $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$, $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to \bar{0}$, где $\bar{0} = \overbrace{(0, 0 \ldots, 0)}^{m}$.

$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$ – Полное приращение функции в точке a, соответствующее приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$.

Определение: Функция f называется дифференцируемой в точке a, если
Условие 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

где A_j – постоянные, $j = 1, \ldots, m$, не зависят от Δx, $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x)$ – б.м. функции при $\Delta x \to 0$; $\alpha_j = 0$ при $\Delta x = \bar{0}$.

Условие 2:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho), \rho \to 0$$

(По сути ρ – расстояние от точки Δx до $\bar{0}$).

Предложение. Условия 1 и 2 определения дифференцируемости функции в точке эквиваленты.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$
Покажем, что $\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m = o(\rho),\ \rho \to 0,\ \rho \neq 0.$

Заметим, что

$$\left|\frac{\Delta x_j}{\rho}\right| \leqslant 1,\ \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$$

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots \alpha_m \Delta x_m| \leqslant \rho \cdot (|\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \ldots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho}) \leqslant \rho \cdot (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|)$$

В силу того, что $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to \bar{0}$, $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|$ также стремиться к нулю, как конечная сумма б.м. функций.
Значит, $\rho \cdot (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|) = o(\rho)$. Показали, что это выражение действительно есть б.м. функция.

$2 \Rightarrow 1$

$$o(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$o(\rho) = (\frac{\Delta x_1}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}) \Delta x_1 + \ldots + (\frac{\Delta x_m}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}) \Delta x_m$$

Понятно, что $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}$, но $\frac{\Delta x_j}{\rho}$ величина ограниченная, а $\frac{o(\rho)}{\rho} \to 0,\ \rho \to 0 \Rightarrow$ при $\Delta x \to \bar{0}$. $\alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, m$, только при $\Delta x = \bar{0}$.

Доказано.

3.3. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке

Теорема 2. Пусть $w = f(x)$ определена в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и в этой окрестности существуют $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Если $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, m$ непрерывны в точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

Докательство. Проведем доказательство для $m = 2,\ w = f(x, y),\ a = (a_1, a_2)$.
Рассмотрим точку $(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) \in \mathscr{U}(a)$.

Рассмотрим

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) + f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

Введем функцию $\varphi(x) = f(x, a_2 + \Delta y)$ и $\psi(y) = f(a_1, y)$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = \Delta\varphi(a_1, \Delta x) + \Delta\psi(a_2, \Delta y) = \\ = \varphi(a_1 + \Delta x) - \varphi(a_1) + \psi(a_2 + \Delta y) - \psi(a_2)$$

По теореме Лагранжа для функции одной переменной: $\exists \theta_1 :\ 0 < \theta_1 < 1$ и $\exists \theta_2 :\ 0 < \theta_2 < 1 :$

$$f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) \Delta x$$

$$f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

$$f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y);\ \alpha_1 \to 0,\ (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

$$f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y);\ \alpha_2 \to 0,\ (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f'_x(a) \Delta x + f'_y(a) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

Получили в точности определение дифференцируемости функции f в точке a.
Доказано.

Примеры. (Доказательство дифференцируемости ф-ции в точке)
$w = f(x,y),\ \bar{0} = (0{,}0),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0.$

Пример 1. $f(x,y) = y^2 \sin x$

Заметим, что $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$

Из определения частной производной: $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$

Частные производные равны нулю, значит, надо показать, что $f(x,y) = o(\rho),\ \rho \to 0.$
Надо показать, что $F(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, при $(x,y) \to (0,0)$.
$|F(x,y)| = |\frac{y^2 \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant [\ \ |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\ \ ] \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \delta = \varepsilon$
$[\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall (x,y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \mapsto |F(x,y)| < \varepsilon] \overset{def}{=} [\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0] \Leftrightarrow [f(x,y) = o(\rho), \rho \to 0].$

Пример 2. $f(x,y) = \sqrt{|xy|},\ \bar{0} = (0,0)$
$f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
$F(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
Перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ F(x,y) = \sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|}$
$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(\rho,\varphi) = 0$
$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$
Значит, f не является дифференцируемой в точке (0, 0).

Пример 3.(Очень важный для понимания теории)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(x,0) = x^2 \sin\frac{1}{|x|}, x \neq 0$
$f(0,y) = y^2 \sin\frac{1}{|y|}, y \neq 0$
$f(0{,}0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} = \frac{f(x,0)-f(0,0))}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} = \frac{f(0,y)-f(0,0))}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{|y|} = 0$

Теперь докажем, что эта функция дифференцируема в (0, 0)
Введем функцию

$$F(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|F(x,y)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall(x,y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \mapsto |F(x,y)| < \varepsilon] \overset{def}{=}$$

$$[\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0] \Leftrightarrow [f(x,y) = o(\rho), \rho \to 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\text{дифференцируема в } (0,\,0)$$

Посмотрим на частные производные этой функции по x и y вне точки (0, 0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ не существует $\Rightarrow f'_x$ не является непрерывной в (0, 0).
Пример показывает, что непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции.

Замечание. Непрерывность частных производных функции f в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в точке. Это условие достаточно (Теорема 2).

3.4. Дифференцируемость сложной функции

Рассматриваем функции $x_j = \varphi_j(t)$ в окрестности точки $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0) \in \mathbb{E}^k,\ j = 1, \ldots, m$. Рассматриваем функцию $w = f(x)$, которая определена в окрестности точки $a = (a_1, \ldots, a_m)$, причем $a_j = \varphi_j(t^0),\ j = 1, \ldots, m$. $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ – суперпозиция функций f и функций $\varphi_1(t)\ldots$ (сложная функция)

Теорема 3 [О дифференцируемости сложной функции]:
Пусть функции $\varphi_j,\ j = 1, \ldots, m$ дифференцируемы в точке t^0, функция f дифференцируема в точке , причем $a_j = \varphi_j(t^0),\ j = 1, \ldots, m$. Тогда $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ дифференцируема в точке t^0 и

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(t^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_j}(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_j}(t^0), j = 1, \ldots, k$$

.

Доказательство. $t^0 + \Delta t \in \mathscr{U}(t^0), a + \Delta x \in \mathscr{U}(a), \rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}$.

Условия дифференцируемости функции φ_j в точке t^0:

$$\Delta\varphi_j(t^0, \Delta t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho),\ \rho \to 0;\ \rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to \bar{0}.$$

Условия дифференцируемости функции f в точке a:

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m.$$

Подставим вместо $\Delta x_1 \dots \Delta x_m$ приращения функции φ:

$$\begin{aligned}\Delta f(a,\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \ldots \\ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \\ + \alpha_1\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \ldots \\ \ldots + \alpha_m\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right].\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\varphi_m}{\partial t_1}(t_0)\right]\Delta t_1 + \ldots \\ \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\varphi_m}{\partial t_k}(t_0)\right]\Delta t_k + \\ + o(\rho)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m\right] + \\ + \rho\left[\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\right]\frac{\Delta t_1}{\rho} + \ldots \\ \ldots + \rho\left[\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\right]\frac{\Delta t_k}{\rho}.\end{aligned}$$

$$\Delta F(t^0,\Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\gamma + \rho\Lambda_1 + \ldots + \rho\Lambda_k$$

γ - ограниченна, $\Delta x_j = \Delta\varphi_j \xrightarrow[\Delta t \to \bar{0}]{} 0$, $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to \bar{0} = (0,\ldots,0)$. $\Rightarrow \alpha_j \to 0$, при $\rho \to 0$

$$\Lambda_j = [\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)]\frac{\Delta t_j}{\rho} \to 0,\ \rho \to 0$$

Перепишем:

$$\Delta F(t^0,\Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho),\ \rho \to 0$$

Доказано.

3.5. Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке a. Поскольку функция дифференцируема в точке a, то

$$\Delta f(a,\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + o(\rho), \rho \to 0$$

Определение: Дифференциалом функции f в точке a называется главная линейная часть (относительно Δx_j) приращения функции f в точке a, соответствующая приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m$$

Поскольку дифференциал независимой переменной x_j есть произвольное число, то $dx_j = \Delta x_j$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m \qquad (*)$$

Предложение.[Инвариантность формы 1-го дифференциала]

Выражение (*) универсально, оно справедливо и в случае, когда $x_j = \varphi_j(t),\ t \in \mathscr{U}(t^0) \subset \mathbb{E}^k,\ a_j = \varphi_j(t^0),\ j = 1, \ldots,\ m$ (φ_j дифференцируема в точке t^0).

Доказательство.

$$d\varphi_j(t^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0)dt_k,\ j = 1, \ldots, m$$

Введем функцию $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$

$$dF(t^0) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)dt_k$$

$$dF(t^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\right]dt_1 + \ldots$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\right]dt_k$$

Перегруппируем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)dt_k\right] + \ldots$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)dt_k\right]$$

Получаем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m$$

Доказано.

3.6. Производная по направлению и градиент, их связь и геомертический смысл.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке a. Возьмём единичный вектор $\vec{n} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m)$, $|\vec{n}| = 1$.

$$l : \begin{cases} x_1 = a_1 + t\cos\alpha_1; \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ x_m = a_m + t\cos\alpha_m; \end{cases}$$

Рассмотрим суперпозицию:

$$F(t) = f(a_1 + t\cos\alpha_1, \ldots, a_m + t\cos\alpha_m)$$

F дифференцируема в точке $t = 0$.

Определение: Производной функции f по направлению l в точке $x = a$ называется производная функции F в точке $t = 0$.

Обозначения.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + t\cos\alpha_1, \ldots, a_m + t\cos\alpha_m) - f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\cos\alpha_m$$

Определение: Градиентом функции f называется вектор

$$\mathrm{grad} f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a))$$

Из этого определения и выражения для производной по направлению l в точке a функции f мы получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (\mathrm{grad} f(a), \vec{n})$$

Предложение. Градиент функции f в точке a характеризует направление и величину максимального роста производной по направлению функции f в точке a.

Доказательство.

По определению производной по направлению в точке a:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = |\mathrm{grad} f(a)||\vec{n}|\cos\varphi = |\mathrm{grad} f(a)|\cos\varphi$$

$\cos\varphi$ имеет наибольшее значение равное $1 \Rightarrow cos\varphi = 1 \Rightarrow \vec{n}$ и grad – направление совпадают, т.к. в этом случае $\varphi = 0$.

Доказано.

3.7. Необходимые условия дифференцируемости

Необходимое условие 1.

[f дифференцируема в точке a] $\Rightarrow$ [$\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = 1, \ldots, m$]

Доказательство.

Возьмем $j = k$, рассматриваем $\Delta x = (0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$. Тогда $\Delta f(a, \Delta x) = \Delta_k f(a, \Delta x_k)$. Тогда используя 1-ое условие определения получим:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

Получаем следующее:

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = A_k\Delta x_k + \alpha_k\Delta x_k$$

$$\frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \to A_k,\ \Delta x_k \to 0 \Rightarrow A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

В силу произвольности мы доказано для всех переменных.
Доказано.

Таким образом мы уточнили определение, например, перепишем определение 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

Необходимое условие 2. Если $w = f(x), x \in \mathbb{E}^m$ дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

Доказательство.
$\Delta f(a, \Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$.
Если $\Delta x \to \bar{0}$, то $f(a+\Delta x) - f(a) \to 0 \Rightarrow$ f непрерывна в точке a.
Доказано.

Необходимое условие 3.(Не было в лекции Знаменской)
Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

[Взято из Кудрявцева, Том 2, стр. 267]

4. Билет 4

4.1. Частные производные высших порядков.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ - дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$, D - область. И $\forall x \in D\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = \overline{1, m}$.

Пусть $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, и в точке x: $\exists \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$. Тогда

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$$

называется частной производной 2-го порядка функции f в точке x. Частные производные высших порядков определяются так же.

Обозначения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x),\ f''_{x_j x_k}(x),\ f^{(2)}_{x_j x_k}(x)$$

$$j = k:\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x)$$

Примечание: если $k \neq j$, производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ называется смешанной.

4.2. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования.

Примеры:

1.

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y^2 + x^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$f_x^{'}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y^{'}=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-y^4)+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x^{'}(0,y)-f_x^{'}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^5}{y^5}=-1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y^{'}(x,0)-f_y^{'}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5}=1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Из этих примеров видно, что в общем случае смешанные производные зависят от порядка дифференцирования.

Теорема: Пусть в $\mathscr{U}(a)\subset\mathbb{E}^2$ определены $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, и эти производные непрерывны в точке $a=(a_1,a_2)$, тогда
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)$$

Доказательство: Рассмотрим функцию
$$U(x,y)=f(x,y)-f(x,a_2)-f(a_1,y)+f(a_1,a_2)$$

Пусть $\Pi=\{(x,y):|x-a_1|\leqslant r_1,|y-a_2|\leqslant r_2\}$, $\Pi\subset\mathscr{U}(a)$, где определены смешанные производные. Фиксируем $y\in(a_2-r_2,a_2+r_2)$ и на интервале (a_1-r_1,a_1+r_1) рассмотрим функцию
$$\varphi(x)=f(x,y)-f(x,a_2)$$
φ дифференцируема на интервале (a_1-r_1,a_1+r_1) и $U(x,y)=\varphi(x)-\varphi(a_1)$. Тогда, по теореме Лагранжа $\exists\theta_1:0<\theta_1<1$:
$$U(x,y)=\varphi^{'}(a_1+\theta_1\Delta x)\Delta x$$
где $\Delta x=x-a_1$
$$U(x,y)=[f_x^{'}(a_1+\theta_1\Delta x,y)-f_x^{'}(a_1+\theta_1\Delta x,a_2)]\Delta x$$

К выражению, стоящему в [...] применим теорему Лагранжа.
$\exists\theta_2:0<\theta_2<1$:
$$U(x,y)=f_{xy}^{''}(a_1+\theta_1\Delta x,a_2+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x$$

где $\Delta y = y - a_2$.

Аналогично фиксируем $x \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1)$ и на интервале $(a_2 - r_2, a_2 + r_2)$ получаем

$$U(x, y) = f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y)\Delta y \Delta x$$

$$f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y)$$

Учитывая непрерывность в точке a при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, получаем $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

Определение: Функция $\omega = f(x, y)$ называется n раз дифференцируемой в точке $x = a \in \mathbb{E}^m$, если все ее частные производные порядка $n - 1$ есть дифференцируемые функции

Теорема: (без доказательства) Пусть $\omega = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке a, тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

4.3. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ дважды дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$. $\forall x \in D$ $df(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j$. Тогда дифференциалом 2 порядка будем называть

$$d^2 f(x) = d(df)(x) = \sum_{j=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)dx_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)dx_k\right)dx_j$$

Дифференциалы высших порядков определяются таким же образом.

Замечание: Если рассмотреть дифференциал, как оператор

$$d = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$$

То дифференциал n-ого порядка можно записать в виде

$$d^n = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n$$

Предложение: Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

Доказательство: Пусть $\omega = f(x)$, $x_j = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, f, φ_j - дважды дифференцируемы.

$$df(x) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j,\ dx_j = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(i)dt_i$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx_i dx_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d^2 x_j$$

причем

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d^2 x_j \neq 0$$

4.4. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Лагранжа]: Пусть функция $\omega = f(x)$ обладает непрерывными частными производными порядка $n+1$ в шаре $B_\delta(a)$, Δx таково, что $a + \Delta x \in B_\delta(a)$. Тогда найдется $0 < \theta < 1$ такое, что

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(a)}{k!} + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{d^{n+1} f(a+\theta\Delta x)}{(n+1)!}$$

Примечание: dx_j трактуется как Δx_j

Доказательство: $a + \Delta x \in B_\delta(a) \Rightarrow a - \Delta x \in B_\delta(a)$, $\forall t \in [-1,1], a + t\Delta x \in B_\delta(a)$.

$$f(a+t\Delta x) = f(a_1 + t\Delta x_1, \ldots, a_m + t\Delta x_m) = \varphi(t)$$

$$\varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi^{'}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t\Delta x_j)\Delta x_j = df(a+t\Delta x)$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_k=1}^{m} \cdots \sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}} \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_k} = d^k f(a+t\Delta x)$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^k(0)}{k!} t^k + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{(n+1)}$$

Подставив $t = 1$ получим требуемое равенство.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Пеано]:(без доказательства) Пусть f n-раз дифференцируема в точке $x = a$, тогда

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(a)}{k!} + o(\rho),\ \rho \to 0,\ \rho = \rho(\Delta x, 0)$$

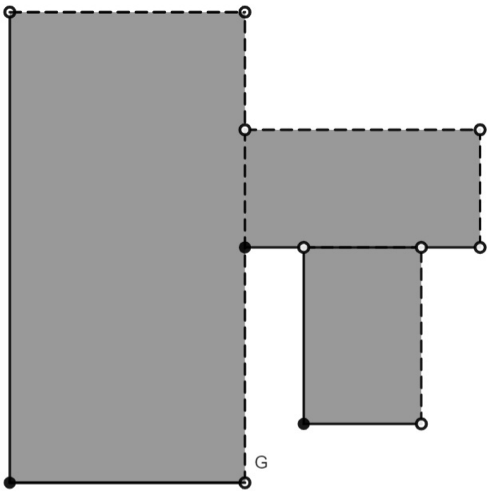
5. Билет 5

5.1. Необходимые определения и предложения билета.

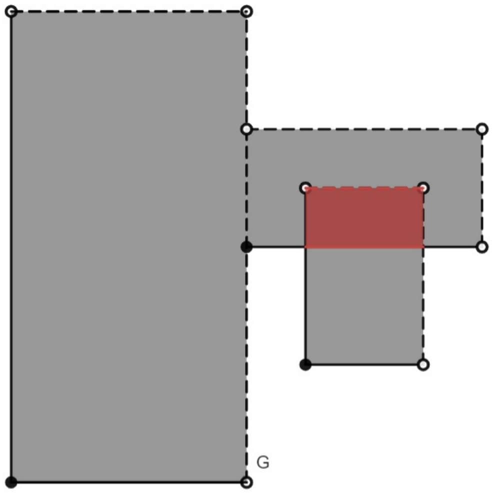
Определение: множество $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$ будем называть клеткой в $\mathbb{E}^m$.

Определение: множество $G \subset \mathbb{E}^m$ будем называть клеточным, если оно является объединением **конечного** числа попарно непересекающихся клеток:

$$G = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j, \qquad Q_i \cap Q_j = \varnothing,\ i \neq j.$$



G - клеточное множество



G - не клеточное множество

Свойства клеточных множеств:

1° Объединение **конечного** числа попарно непересекающихся клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

G и H - клеточные множества. Тогда:

$$G = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j, \qquad H = \bigcup_{j=k+1}^{n} Q_j.$$

Значит:

$$G \cup H = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j - \text{клеточное множество.}$$

2° Пересечение двух клеток есть клетка.

Доказательство:

Пусть $Q_1 = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$, а $Q_2 = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \times \dots \times [c_m, d_m)$. Тогда возможны два случая:

а) $\exists j$: $[a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = \varnothing \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ - клетка;

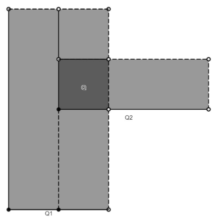
б) $\forall j \longmapsto [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = [e_j, f_j) \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = [e_1, f_1) \times [e_2, f_2) \times \ldots \times [e_m, f_m)$ - клетка.

3° Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

Пусть G_1 и G_2 - клеточные множества.
$G_1 = Q_1^1 \cup Q_2^1 \cup \ldots \cup Q_k^1$
$G_2 = Q_1^2 \cup Q_2^2 \cup \ldots \cup Q_n^2$
Обозначим $Q_{ij} = Q_i^1 \cap Q_j^2,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}$.
Q_{ij} - клетка (свойство $\mathbf{2}^\circ$).
$G_1 \cap G_2 = \bigcup\limits_{i,j} Q_{ij} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_{ij}$ - объединение попарно непересекающихся клеток есть клеточное множество.

$\mathbf{4}^\circ$ Разность двух клеток есть клеточное множество.
Доказательство:
Q_1 и Q_2 - клетки. $Q = Q_1 \cap Q_2$ - клетка (свойство $\mathbf{2}^\circ$). Тогда
$Q_1 \backslash Q_2 = Q_1 \backslash Q$.
Существует такое разбиение клетки Q_1 на более мелкие клетки, что Q является одной из них $\Rightarrow Q_1 \backslash Q_2$ - клеточное множество.



$\mathbf{5}^\circ$ Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.
Доказательство:

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j^1, \qquad G_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j^2.$$

$$G_1 \backslash Q_1^2 = \bigcup_{i=1}^{k} \left(Q_i^1 \backslash Q_1^2\right) = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i1}$$

G_{i1} - клеточное множество (свойство $\mathbf{4}^\circ$).
$G_{i1} \cap G_{j1} = \varnothing$, если $i \neq j \Rightarrow G_1 \backslash Q_1^2$ - клеточное множество (свойство $\mathbf{1}^\circ$).
Аналогично для других клеток G_2

$$G_1 \backslash G_2 = G_1 \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_j^2 \right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(G_1 \backslash Q_j^2\right)$$

Последнее является клеточным множеством по свойству $\mathbf{3}^\circ$. Откуда получаем, что $G_1 \backslash G_2$ - клеточное множество.

$\mathbf{6}^\circ$ Объединение **конечного** числа клеточных множеств есть клеточное множество.
Доказательство:
1) G_1 и G_2.
$G_1 \cup G_2 = (G_1 \backslash G_2) \cup (G_2 \backslash G_1) \cup (G_1 \cap G_2)$;
Последние три скобки являются попарно непересекающимися клеточными множествами $\overset{\mathbf{1}^\circ}{\Rightarrow} G_1 \cup G_2$ - клеточное множество.
2) Далее для $G_3, G_4, \ldots, G_n$ по индукции.

Таким образом, объединение, пересечение и разность конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

Определение: мерой клетки Q назовем число:
$m(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$;
$m(\varnothing) = 0$.

Определение: мерой клеточного множества G назовем число:

$$m(G) = \sum_{j=1}^{k} m(Q_j); \qquad\qquad m(\varnothing) = 0.$$

Лемма: мера клеточного множества G не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

Доказательство:
Пусть $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$ и также $G = Q'_1 \cup Q'_2 \cup \ldots \cup Q'_n$. Тогда обозначим $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}$.
Понятно, что

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^{n} Q_{ij}, \qquad\qquad Q'_j = \bigcup_{i=1}^{k} Q_{ij}.$$

Тогда:

$$m(G) = \sum_{i=1}^{k} m(Q_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} m(Q'_j) = m(G).$$

Предложение 1: если клеточные множества $G_1, G_2, \ldots, G_n$ попарно не пересекаются, то для $G = \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_j$ выполняется $m(G) = \sum\limits_{j=1}^{n} m(G_j)$.

Доказательство:
$G_j = \bigcup\limits_{i=1}^{k_j} Q_i^j,\ j = \overline{1,n}$.
Тогда
$G = \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n}\bigcup\limits_{i=1}^{k_j} Q_i^j = \bigcup\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n,\\ 1\leqslant i\leqslant k_j}} Q_i^j$
Все клетки из последнего объединения попарно не пересекаются, поэтому:
$m(G) = \sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n,\\ 1\leqslant i\leqslant k_j}} m(Q_i^j) = \sum\limits_{j=1}^{n} m(G_j)$.

Предложение 2: если G_1 и G_2 - клеточные множества и $G_1 \subset G_2$, то $m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \backslash G_1)$, $m(G_1) \leqslant m(G_2)$.

Доказательство:
$G_2 = G_1 \cup (G_2 \backslash G_1) = G_1 \cup G$.
$G_1 \cap G = \varnothing \overset{\text{пр.1}}{\Longrightarrow} m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \backslash G_1) \Rightarrow m(G_1) \leqslant m(G_2)$.

Предложение 3: если $G_1, G_2, \ldots, G_k$ - клеточные множества, $G = \bigcup\limits_{j=1}^{k} G_j$, то $m(G) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} m(G_j)$.

Доказательство:

Для G_1 и G_2 по предложению 2, а далее по индукции.

Предложение 4: для любого клеточного множества G и $\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$ - клеточные множества такие, что:

1) $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \operatorname{int} G \subset G$; $\qquad m(G) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$;

2) $G \subset \overline{G} \subset \operatorname{int} G^\varepsilon \subset G^\varepsilon$; $\qquad m(G^\varepsilon) - m(G) < \varepsilon$.

Доказательство:

1) $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$.

Рассмотрим отдельную клетку $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_m, b_m)$

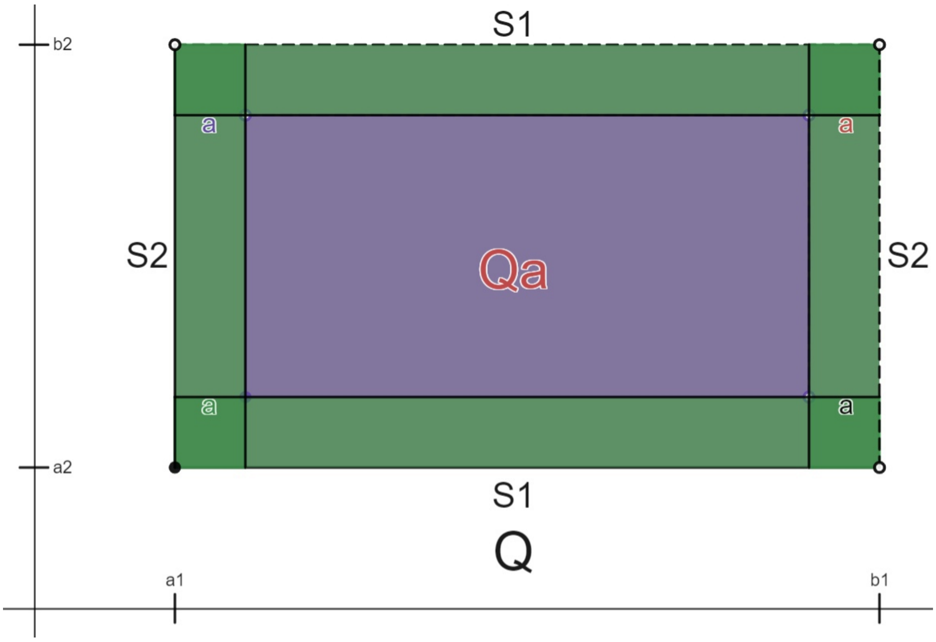


Рис. 2: Случай при $m = 2$

$$m(Q_a) = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j - 2a),\ Q_a \subset Q$$

$$S_j = \prod_{\substack{i=1,\\ i \neq j}}^{m} (b_i - a_i);$$

Тогда

$$m(Q) \leqslant m(Q_a) + 2a \cdot \sum_{j=1}^{m} S_j = m(Q_a) + 2aS \Rightarrow m(Q) - m(Q_a) \leqslant 2aS = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда для одной клетки $a = \frac{\varepsilon}{4S}$.

Так как $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$, то $a = \frac{\varepsilon}{4Sk}$.

Получаем $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (Q_a)_i$.

Таким образом, $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \operatorname{int} G \subset G$.

2) Доказывается аналогично 1).

5.2. Определение измеримости по Жордану множества в m-мерном евклидовом пространстве.

Определение: множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется измеримым по Жордану, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon$ и G^ε - клеточные множества такие, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$ и $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Определение: мерой измеримого по Жордану множества $X \subset \mathbb{E}^m$ называется такое число $m(X)$, что $\forall G_\varepsilon$, G^ε таких, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \longmapsto m(G_\varepsilon) \leqslant m(X) \leqslant m(G^\varepsilon)$.

Лемма: для любого измеримого по Жордану множества X его мера $m(X)$ существует и единственна, причем

$$m(X) = \overline{m}(X) = \underline{m}(X),$$

где $\overline{m}(X) = \inf\limits_{X \subset G^\varepsilon} m(G^\varepsilon)$ - верхняя (внешняя) мера X;
$\underline{m}(X) = \sup\limits_{G_\varepsilon \subset X} m(G_\varepsilon)$ - нижняя (внутренняя) мера X.

Доказательство:
Так как $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$, то $m(G_\varepsilon) \leqslant m(G^\varepsilon) \Rightarrow \{m(G_\varepsilon)\}$ ограничена сверху $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \alpha = \sup\limits_{G_\varepsilon} m(G_\varepsilon) = \underline{m}(X)$.
Аналогично: $\{m(G^\varepsilon)\}$ ограничена снизу $\Rightarrow \exists \beta = \inf\limits_{G^\varepsilon} m(G^\varepsilon) = \overline{m}(X)$.

По теореме об отделимости множеств: $m(G_\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant m(G^\varepsilon)$.

Пусть $m(X) = \alpha$.
$\forall \varepsilon > 0 \longmapsto 0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.
Откуда $\beta = \alpha \Rightarrow m(X)$ единственна.

Предложение 5: пусть множество X измеримо по Жордану и $\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon$: $X \subset G^\varepsilon$, $m(G^\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $m(X) = 0$.

Доказательство:
Возьмем $G_\varepsilon = \varnothing$. Тогда:
$\forall \varepsilon > 0 \longmapsto G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon\ \&\ m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) = m(G^\varepsilon) < \varepsilon \ \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leqslant m(X) < \varepsilon \ \Rightarrow m(X) = 0$.

Замечание: измеримое по Жордану множество, обладающее свойством из предыдущего предложения, будем называть множеством меры нуль.

Предложение 6: подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:
Пусть $m(X) = 0$ и $Y \subset X$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon : X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$.
Как следствие:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon : Y \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(Y) = 0$.

Предложение 7: объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:
$m(X_1) = m(X_2) = 0.$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_1^\varepsilon : X_1 \subset G_1^\varepsilon, m(G_1^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2};$
$\exists G_2^\varepsilon : X_2 \subset G_2^\varepsilon, m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$
Тогда $X_1 \cup X_2 \subset G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon = G^\varepsilon.$
$m(G^\varepsilon) \overset{\text{пр.3}}{\leqslant} m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow m(X_1 \cup X_2) = 0.$
Далее по индукции.

5.3. Критерий измеримости.

Теорема [Критерий измеримости]:

$$[X - \text{измеримо по Жордану}] \Longleftrightarrow [X \text{ ограничено и } m(\partial X) = 0]\,.$$

Доказательство:
$\Longrightarrow$:
X - измеримо по Жордану: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$: $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$, $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;

Из предложения 4 $\Rightarrow \exists \widetilde{G^\varepsilon}$: $\overline{G^\varepsilon} \subset \operatorname{int} \widetilde{G^\varepsilon} \subset \widetilde{G^\varepsilon}$, $m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(G^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;
$\exists \widetilde{G_\varepsilon}$: $\overline{\widetilde{G_\varepsilon}} \subset \operatorname{int} G_\varepsilon \subset G_\varepsilon$, $m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда:
$m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(G^\varepsilon) + m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) + m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

$\widetilde{G_\varepsilon}$ не содержит точки ∂X, а $\widetilde{G^\varepsilon}$ содержит их все, откуда:
$\widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}$ - клеточное множество и $\partial X \subset \widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}$
$m(\widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \varepsilon \Rightarrow m(\partial X) = 0.$

$\Longleftarrow$:
X - ограничено $\Rightarrow \exists Q$ - клетка: $X \subset Q$;

$[m(\partial X) = 0] \overset{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists G^\varepsilon : \partial X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon]$

$Q \backslash G^\varepsilon$ - клеточное множество $\Rightarrow Q \backslash G^\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j,$ где Q_j не содержат точек ∂X.

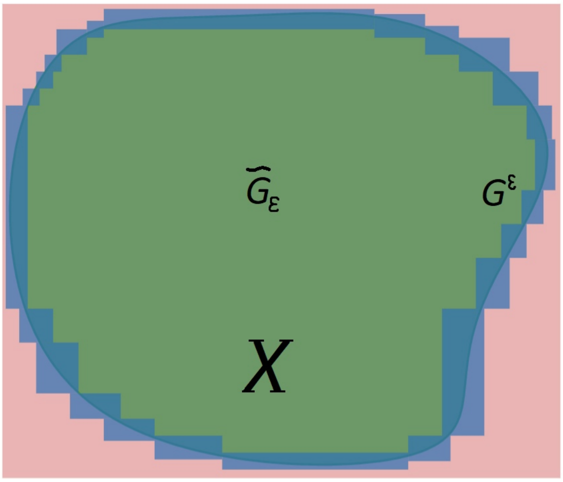
Тогда есть два варианта:
$[Q_j \subset X]$ либо $[Q_j \cap X = \varnothing]$

Пусть без потери общности $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$: $Q_j \subset X$, $j = \overline{1,l}$;
$Q_{l+1}, Q_{l+2}, \ldots, Q_k$: $Q_j \cap X = \varnothing$, $j = \overline{l+1,k}$;

$$\widetilde{G_\varepsilon} = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \quad \widetilde{G^\varepsilon} = \widetilde{G_\varepsilon} \cup G^\varepsilon = Q \backslash \left(\bigcup_{j=l+1}^{k} Q_j \right)$$

$\widetilde{G_\varepsilon} \subset X \subset \widetilde{G^\varepsilon}$

$m(G^\varepsilon) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \varepsilon \Rightarrow X$ измеримо по Жордану.



5.4. Примеры неизмеримых по Жордану множеств.

$\boxed{1}$ $X = \{x \in [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}, \ X \subset \mathbb{E}^1$.
$\partial X = [0{,}1] \Rightarrow m(\partial X) = 1 \neq 0 \Rightarrow X$ неизмеримо.

$\boxed{2}$ $Y = X \times X$, где X из $\boxed{1}$.
$\partial Y = [0{,}1] \times [0{,}1] \Rightarrow m(\partial Y) = 1 \neq 0 \Rightarrow Y$ неизмеримо.

$\boxed{3}$ X из $\boxed{1}$. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $0 \leqslant a_j \leqslant 1$
Пусть $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.
B открыто как объединение открытых множеств.
Обозначим $B_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$

$$m(B_k) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{j-1}} = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \varepsilon\frac{1-\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < 2\varepsilon$$

Тогда $\underline{m}(B) \leqslant 2\varepsilon < 1$. Но $[0,1] \subset B \Rightarrow \overline{m}(B) > 1$.
То есть $\underline{m}(B) \neq \overline{m}(B) \Rightarrow B$ неизмеримо.

5.5. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

1° Если X_1 и X_2 измеримы по Жордану, то $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \backslash X_2$ - измеримые по Жордану множества.

Доказательство:
X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X_1$ и X_2 ограничены и $m(\partial X_1) = m(\partial X_2) = 0$. Тогда и $m(\partial X_1 \cup \partial X_2) = 0$.

$$\underbrace{\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \ \partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \ \partial(X_1 \backslash X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2}_{\Downarrow}$$

$$m(\partial(X_1 \cup X_2)) = m(\partial(X_1 \cap X_2)) = m(\partial(X_1 \backslash X_2)) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2$ и $X_1 \backslash X_2$ измеримы.

5.6. Конечная аддитивность меры Жордана.

2° Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ - измеримые по Жордану множества, тогда множество $X = \bigcup\limits_{j=1}^{k} X_j$ измеримо и:

1) $m(X) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} m(X_j)$;

2) Если $X_j \cap X_i = \varnothing$ при $i \neq j$, то $m(X) = \sum\limits_{j=1}^{k} m(X_j)$.

Доказательство: (для $k=2$, а дальше по индукции)

1) X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ измеримо.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G_1^\varepsilon, G_2^\varepsilon$: $X_1 \subset G_1^\varepsilon$, $X_2 \subset G_2^\varepsilon$ и:
$m(X_1) > m(G_1^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$
$m(X_2) > m(G_2^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $G^\varepsilon = G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon$ - клеточное множество и $X \subset G^\varepsilon$.
Получаем:
$m(X) \leqslant m(G^\varepsilon) \leqslant m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < m(X_1) + m(X_2) + \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(X) \leqslant m(X_1) + m(X_2)$ $\boxed{*}$

2) $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $X = X_1 \cup X_2$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon^1, G_\varepsilon^2$: $G_\varepsilon^1 \subset X_1$, $G_\varepsilon^2 \subset X_2$ и:
$m(G_\varepsilon^1) > m(X_1) - \frac{\varepsilon}{2}$
$m(G_\varepsilon^2) > m(X_2) - \frac{\varepsilon}{2}$

$G_\varepsilon = G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$ и $G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2 = \varnothing$, а также $G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2 \subset X$.

Тогда $m(X) \geqslant m(G_\varepsilon) = m(G_\varepsilon^1) + m(G_\varepsilon^2) > m(X_1) + m(X_2) - \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $m(X) \geqslant m(X_1) + m(X_2)$ $\boxed{**}$

Из $\boxed{*}$ и $\boxed{**}$ $\Rightarrow m(X) = m(X_1) + m(X_2)$.

5.7. Измеримость и мера цилиндра в $(m+1)$-мерном пространстве.

Предложение: пусть $X \subset \mathbb{E}^m$, $m \geqslant 1$, - измеримо, тогда множество $Y = X \times [a, b) \subset \mathbb{E}^{m+1}$ - измеримо. $m(Y) = m(X)(b-a)$.

Доказательство:
$[X \text{ измеримо}] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon : G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon,\ m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a}\right]$.

Рассмотрим клеточные множества: $\widetilde{G_\varepsilon} = G_\varepsilon \times [a, b)$ и $\widetilde{G^\varepsilon} = G^\varepsilon \times [a, b)$;

Тогда $\widetilde{G_\varepsilon} \subset Y \subset \widetilde{G^\varepsilon}$, а $m(\widetilde{G_\varepsilon}) = m(G_\varepsilon)(b-a)$ и $m(\widetilde{G^\varepsilon}) = m(G^\varepsilon)(b-a)$;
Получаем: $m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) = (m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon))(b-a) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow Y$ измеримо.

6. Билет 6

6.1. Определенный интеграл Римана.

Обозначения:
$y = f(x)$ некоторая функция, $x \in [a,b]$
T – разбиение отрезка $[a,b] : T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\Delta_T = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta x_j$ – мелкость разбиения
$\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$, $j = \overline{1,n}$

Определение: Число $I\{T,\xi\} = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ называется интегральной суммой.

Определение: Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T,\xi\}$ при $\Delta_T \longrightarrow 0$, Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta\ \&\ \forall \{\xi\} \longmapsto |I\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм $I\{T,\xi\}$
при $\Delta_T \longrightarrow 0$.
Указанный предел I называется определенным интегралом функции f на $[a,b]$.

Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

Пример: $y(x) \equiv C$, $x \in [a,b]$
$I\{T,\xi\} = C(b-a) \Rightarrow I = \int\limits_a^b Cdx = C(b-a)$

Предложение:[Необходимое условие интегрируемости функции]:

$$[f \text{ – интегрируема на } [a,b]\ ] \Rightarrow [f \text{ – ограничена на } [a,b]]$$

Доказательство: от противного:
Пусть f не является ограниченной на $[a,b]$ это означает, что $\exists k$: на $[x_{k-1},x_k]$ функция не является ограниченной, то есть, $|f(\xi_k)|\Delta x_k$ может быть как угодно большим за счет выборки точки ξ_k $\Rightarrow I\{T,\xi\}$ неограчена и предел $I\{T,\xi\}$ $\Delta_T \to 0$ не существует – противоречие.

Замечание: Не всякая ограниченная функция является интегрируемой на отрезке.

Пример: функция Дирихле на любом отрезке $[a,b]$ ограничена

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

Однако:

$$\xi'_j \in \mathbb{Q},\ j = \overline{1,n}$$

$$\xi''_j \in \mathbb{J},\ j = \overline{1,n}$$

$$I\{T,\xi'\} = b - a \neq 0$$

$I\{T,\xi''\} = 0$, отсюда $D(x)$ не является интегрируемой

6.2. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.

Определение: Пусть $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, ограничена на данном отрезке; T–разбиение отрезка $[a,b]$.

$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

$m_j = \inf\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$, $M_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$, $j = \overline{1,n}$, тогда:

$\underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$–нижняя сумма Дарбу по разбиению T

$\overline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j$–верхняя сумма Дарбу по разбиению T

Очевидно, что при фиксированном T выполняется $\underline{S}_T \leqslant I\{T,\xi\} \leqslant \overline{S}_T$

Свойство 1: Для фиксированного T выполняется:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi', \xi'' : \overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \varepsilon,\ I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < \varepsilon$

Доказательство: из определения $M_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi'_j \in [x_{j-1},x_j] :\ f(\xi'_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{b-a}\ \Rightarrow\ M_j - f(\xi'_j) < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - f(\xi'_j))\Delta x_j < \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_j = \varepsilon\ \Rightarrow\ \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - f(\xi'_j))\Delta x_j =$

$\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \varepsilon$

Второе неравество доказывается аналогично.

Определение: T'–измельчение разбиения T, если $T' = T \cup \{b_1 \ldots b_k\}$, то есть, мы добавляем еще k точек, таким образом $\Delta_{T'} \leqslant \Delta_T$.

Свойство 2: При измельчении разбиения T нижние суммы Дарбу не уменьшаются, а верхние не увеличиваются.
T'–измельчение разбиения T, $\underline{S}_T \leqslant \underline{S}_{T'} \leqslant \overline{S}_{T'} \leqslant \overline{S}_T$

Доказательство: Добавим одну точку на $[x_{j-1},x_j]$: $b \in (x_{j-1},x_j), \Delta x_j = \Delta x'_j + \Delta x''_j$, $M'_j \leqslant M_j$; $M''_j \leqslant M_j$, тогда:

$$\overline{S}_T - \overline{S}_{T'} = M_j \Delta x_j - (M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j) = (M_j - M'_j)\Delta x' + (M_j - M''_j)\Delta x'' \geqslant 0$$

$\Rightarrow\ \overline{S}_{T'} \leqslant \overline{S}_T$

Аналогично доказывается для нижних сумм.

Свойство 3: Пусть T' и T'' произвольные разбиения отрезка $[a,b]$, тогда: $\underline{S}_{T'} \leqslant \overline{S}_{T''}$, $\underline{S}_{T''} \leqslant \overline{S}_{T'}$

Доказательство: $T = T' \cup T''$–измельчение разбиений T', T''
Тогда из свойства 2 следует, что $\underline{S}_{T'} \leqslant \underline{S}_T \leqslant \overline{S}_T \leqslant \overline{S}_{T''}$ и
$\underline{S}_{T''} \leqslant \underline{S}_T \leqslant \overline{S}_T \leqslant \overline{S}_{T'}$

Свойство 4: существуют числа $\underline{I}$, $\overline{I}$:
$\underline{I} = \sup\limits_{T} \underline{S}_T$, $\overline{I} = \inf\limits_{T} \overline{S}_T$ такие, что для произвольных разбиений T', T'' выполняется: $\underline{S}_{T'} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_{T''}$

$\overline{I}$–верхний интеграл Дарбу

$\underline{I}$–нижний интеграл Дарбу.

Доказательство: следует из свойства 3 и теоремы об отделимости множеств.

<u>Свойство 5 [Лемма Дарбу]</u>:

1)$[\underline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} \underline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon]$

2)$[\overline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} \overline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon]$

Доказательство: 2)
$M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$
a)$M = m$ – тривиальный случай;
b)$M > m$; $\overline{I} = \inf\limits_{T} \overline{S}_T$ из определения inf
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^* : \ \overline{S}_{T^*} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow \ \overline{S}_{T^*} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$
T–произвольное разбиение: $\Delta_T = \max\limits_{j} \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2(M-m)k}$
k–количество точек разбиения T^*, лежащих на (a,b)
рассмотрим $T' = T \cup T^*$
$0 \leqslant \overline{S}_T - \overline{S}_{T'} \leqslant (M-m)k\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2}$ (оценили сверху) отсюда:
$0 \leqslant \overline{S}_T - \overline{S}_{T'} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (1)
Из свойств 3 и 4: $\overline{I} \leqslant \overline{S}_{T'} \leqslant \overline{S}_{T^*}$
$0 \leqslant \overline{S}_{T'} - \overline{I} \leqslant \overline{S}_{T^*} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow$
$\overline{S}_{T'} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)
Складываем (1) и (2), получаем $\overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$
Итак:$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)k} > 0 \ \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$

6.3. Критерий интегрируемости функции.

<u>Теорема 1:</u> Пусть функция f ограничена на $[a,b]$
$[\, f$ интегрируема на $[a,b]\,] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon]$

Доказательство [Необходимость]: $\Rightarrow$
$[\, f$ интегрируема на $[a,b]\,] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T :$
$\Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \longmapsto |I - I\{T, \xi\}| < \frac{\varepsilon}{4}]$
из свойства 1: $\exists \xi'$, ξ'':
$\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \frac{\varepsilon}{4}$, $I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{4}$, тогда
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = |\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} + I\{T,\xi'\} - I + I - I\{T,\xi''\} + I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T| \leqslant \overline{S}_T - I\{T,\xi'\} + |I\{T,\xi'\} - I| + |I - I\{T,\xi''\}| + I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \ \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

Доказательство [Достаточность]: $\Leftarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^*_\varepsilon : \ \overline{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$
Из свойства 4: существуют числа $\underline{I}$, $\overline{I}$: $\forall T \longmapsto \underline{S}_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_T \ \Rightarrow$

$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant \overline{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$ так как это выполняется для любых $\varepsilon > 0 \ \Rightarrow$ это возможно лишь при $\overline{I} - \underline{I} = 0$, $\overline{I} = \underline{I} = I$
По Лемме Дарбу:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_1 \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$
для этого же ε $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_2 \longmapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon$
$\delta = min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow \forall T \ \Delta_T < \delta \longmapsto$
$\overline{S}_T - I < \frac{\varepsilon}{2}$, $I - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall T \ \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \xi = \{\xi_j\} \longmapsto$
$\underline{S}_T \leqslant I \leqslant \overline{S}_T$ (1)
также используем то, что $\underline{S}_T \leqslant I\{T,\xi\} \leqslant \overline{S}_T \Rightarrow$
$-\overline{S}_T \leqslant -I\{T,\xi\} \leqslant -\underline{S}_T$ (2)
Сложим (1) и (2) $\Rightarrow |I - I\{T,\xi\}| \leqslant \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

6.4. Классы интегрируемых функций.

<u>**Теорема 2:**</u> Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то f интегрирума на $[a,b]$.

Доказательство: f ограничена на $[a,b]$ по первой теореме Вейерштрасса, f равномерно непрерывна на $[a,b]$ по теореме Кантора $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', \ x'' \in [a,b] : \ |x' - x''| < \delta \longmapsto$
$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
Для этого же ε $\exists T : \ \Delta_T < \delta$, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
По 2 теореме Вейерштрасса $\forall j \ \exists x'_j, \ x''_j \in [x_{j-1},x_j]$:
$M_j = \max\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x) = f(x'_j)$, $m_j = \min\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x) = f(x''_j)$
тогда из р.н. получаем, что $\forall j \ M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta x_j = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon.$

<u>**Теорема 3:**</u> Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна на отрезке, то f интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство: для неубывающей функции: $\forall x \in [a,b] \longmapsto$
$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow$ ограничена
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
$j = \overline{1,n}$ $[x_{j-1},x_j] \longmapsto M_j = f(x_j)$, $m_j = f(x_{j-1})$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$
$- f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)} = \varepsilon \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

<u>**Теорема 4:**</u> Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих точки разрыва функции f, сумма длин которых не превосходит $\varepsilon \Rightarrow \ f$ интегрируема на $[a,b]$

Доказательство: Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists X_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \delta_j^1$ – интервал, покрывающий точки разрыва и $|\delta_j^1|$ – его длина $\Rightarrow\ \sum\limits_{j=1}^{n} |\delta_j^1| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$

$X_2 = (a,b) \setminus \overline{X_1}$

(a,b) – открытое, $\overline{X_1}$ – замкнутое $\Rightarrow\ X_2$ – открытое, то есть, мы отбросили интервалы с точками разрыва.

$X_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \delta_j^2$ на каждом δ_j^2 – f непрерывна $\Rightarrow\ f$ равномерно непрерывна на $\overline{X_2}$ (Замыкание, то есть $\overline{X_2}$ компакт – ограниченное и замкнутое)

Тогда из опр. р.н. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x',\ x'' \in \overline{X_2}\ \longmapsto$
$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $T = \{\delta_j^1,\ \delta_i^2\}_{j=1,\ i=1}^{n\ \ \ k}$, то есть концы интервалов образует разбиение отрезка $[a,b]$.

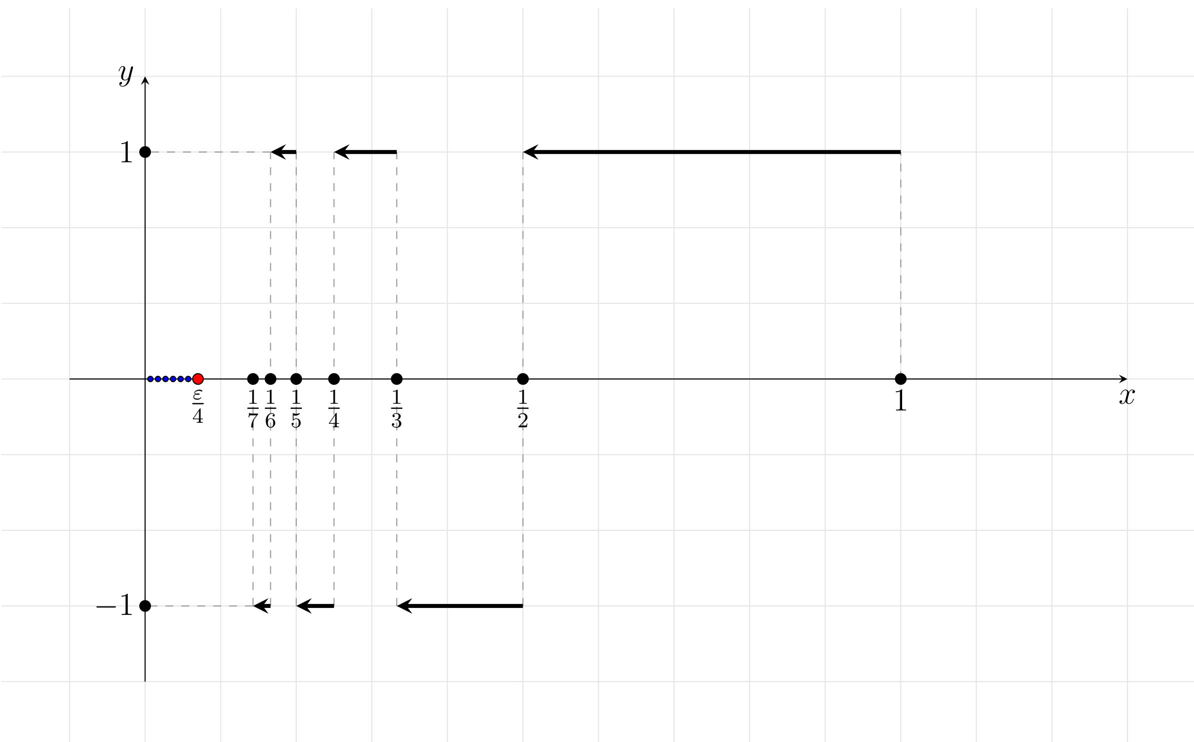
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|\delta_j^1| + \sum\limits_{i=1}^{k} (M_i - m_i)|\delta_i^2| \leqslant (M-m)\sum\limits_{j=1}^{n} |\delta_j^1| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum\limits_{i=1}^{k} |\delta_i^2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T :\ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon \Rightarrow\ f$ интегрируема на $[a,b]$.

Следствие: Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то f интегрируема на $[a,b]$

Рассмотрим пример функции, имеющей на отрезке бесконечное число точек разрыва:

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right],\ n \in \mathbb{N} \\ -1,\ x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right],\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$x \in [0,1]$$



Точки разрыва $\frac{1}{n}$, $n > 1$ на $[0,1]$.

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N \longmapsto 0 < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$

Оставшиеся N точек вне данного интервала покрываем интервалами длины $\frac{\varepsilon}{4N}$, тогда сумма длин итервалов покрытия равна $\frac{\varepsilon}{4} + N\frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$ интегрируема по теореме 4.

7. Билет 7

7.1. Некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

Свойство 2:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Свойство 3:

Если f, g интегрируемы на $[a,b]$, то $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ функция $h = \alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство:

$$I_h\{\tau,\xi\} = \sum_{j=1}^{n}[\alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j)]\Delta x_j = \alpha\cdot\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j + \beta\cdot\sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)\Delta x_j = \alpha I_f\{\tau,\xi\} + \beta I_g\{\tau,\xi\}.$$

Свойство 4:

Если f и g интегрируемы на $[a,b]$, то $h = f\cdot g$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство:

$\exists A > 0 \wedge \exists B > 0 : |f(x)| \leqslant A,\ |g(x)| \leqslant B\ \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow h$ ограничена на $[a,b]$

$|h(x') - h(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x') +$

$+ f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')| \leqslant |g(x')|\cdot|f(x') - f(x'')| + |f(x'')|\cdot|g(x') -$

$- g(x'')| \leqslant B|f(x') - f(x'')| + A|g(x') - g(x'')| \Rightarrow [M_j(h) - m_j(h)] \leqslant$

$B[M_j(f) - m_j(f)] + A[M_j(g) - m_j(g)]$

f,g интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists T' : \overline{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$

$\exists T'' : \overline{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$

$T = T' \cup T''$

$\underline{S}_{T'}(f) \leqslant \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_{T'}(f) \Rightarrow \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$

$\underline{S}_{T''}(g) \leqslant \underline{S}_T(g) \leqslant \overline{S}_T(g) \leqslant \overline{S}_{T''}(f) \Rightarrow \overline{S}_T(g) - \underline{S}_T(g) \leqslant \overline{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$

$\Rightarrow \overline{S}_T(h) - \underline{S}_T(h) < A\cdot\frac{\varepsilon}{2A} + B\cdot\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \Rightarrow h$ интегрируемая на $[a,b]$.

Свойство 5:

f интегрируема на $[a{,}b]$ & $[c{,}d] \in [a{,}b] \Rightarrow f$ интегрируема на $[c{,}d]$.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
$T' = T \cup \{c,d\}$
$\overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} \leqslant \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
Рассмотрим разбиение T^* отрезка $[c, d]$, порождаемое разбиением T', то есть в T^* включены все точки разбиения T', лежащие на отрезке $[c, d]$. $\Rightarrow \overline{S_{T^*}} - \underline{S_{T^*}} \leqslant \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$

Свойство 6:
Если f интегрируема на отрезке $[a, c]$ и $[c, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство:
Пусть $a < c < b$: $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists T', T''$ отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ $\quad \overline{S_{T'}}\ - \underline{S_{T'}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{S}_{T''}\ - \underline{S}_{T''} < \frac{\varepsilon}{2}$
$T = T' \cup T''$ – разбиение отрезка $[a,b]$.
$\underline{S}_{T'} = \underline{S}_T^1 \leqslant \overline{S}_T^1 = \overline{S}_{T'}$
$\underline{S}_{T''} = \underline{S}_T^2 \leqslant \overline{S}_T^2 = \overline{S}_{T''}$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \overline{S}_T^1 + \overline{S}_T^2 - \underline{S}_T^1 - \underline{S}_T^2 < \varepsilon \Rightarrow f$ интегируема на $[a, b] \Rightarrow$ интегральная сумма на $[a, b]$ есть сумма интегральных сумм на $[a,c]$ и $[c, b]$.

Пусть $c < a < b$ или $a < b < c$:

$[a, b]$ есть часть отрезка $[c, b]$ или $[a, c] \Rightarrow$ ввиду того, что интегрируемая на отрезке интегрируема на любом его участке, то f интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $a < b < c$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Аналогично доказывается для $c < a < b$.

Свойство 7:
Пусть f ограничена на $(a,b], \forall \alpha > 0 : 0 < \alpha < b - a, f$ интегрируема на $[\alpha + a, b]$, тогда при любом доопределении f в точке a, получится функция, интегрируемая на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{a+\alpha}^b f(x)dx$.

Доказательство:

$$\exists A > 0 : \forall x \in (a,b] \longmapsto |f(x)| \leqslant A, f(a) = B$$

$$M = max\{A, |B|\} \Rightarrow \forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0 : \ 2M\alpha < \varepsilon/2$$

Для $[a+\alpha,b]$ найдется такое $\exists T:\overline{S_T}-\underline{S_T}<\varepsilon/2$

$$\exists T'=T\cup\{a\},\overline{S_{T'}}-\underline{S_{T'}}=\overline{S_T}-\underline{S_T}+(M_0-m_0)\alpha<\varepsilon/2+2M\alpha<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

7.2. Оценки определенного интеграла.

Оценка 1:

f интегрируема на $[a,b]$ & $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx\geqslant 0.$

Доказательство:
$f(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow\forall T$ & $\forall\{\xi\}\mapsto I\{T,\xi\}\geqslant 0, I-$ предел интегральных сумм.
Теперь надо доказать, что при $\Delta_T\to 0\mapsto I\geqslant 0$
От противного:
$I<0\Rightarrow\varepsilon=\frac{|I|}{2}\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\forall T,\Delta_T<\delta\mapsto|I\{T,\xi\}-I|<\frac{|I|}{2}\Rightarrow I-\frac{|I|}{2}<I\{T,\xi\}<I+\frac{|I|}{2}<0\Rightarrow I\{T,\xi\}<0-$ противоречие.

Оценка 2:

f непрерывна на $[a,b]$ & $f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[a,b]$ & $f(x)\not\equiv 0\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx\geqslant\gamma>0.$

Доказательство:
$\exists x_0\in(a,b):f(x_0)=2\alpha>0\Rightarrow$ [по теореме о сохранении знака непрерывной функции] $\Rightarrow\exists[c,d]\subset[a,b],x\in[c,d]:f(x)\geqslant\alpha>0$ на $[c,d]\Rightarrow f(x)-\alpha\geqslant 0$ на $[c,d]\overset{\text{св-во 5 и оц-ка 1}}{\Rightarrow}$
$\int\limits_c^d(f(x)-\alpha)dx\geqslant 0\Rightarrow\int\limits_c^d f(x)dx\geqslant\int\limits_c^d\alpha dx=\alpha(d-c)=\gamma>0$

$\int\limits_c^d f(x)dx\geqslant\gamma>0\Rightarrow\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^d f(x)dx+\int\limits_d^b f(x)dx\geqslant 0+\gamma+0>0$

Оценка 3:

f, g интегрируемы на $[a,b]$ & $\forall x\in[a,b]\mapsto f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx\geqslant\int\limits_a^b g(x)dx.$

Доказательство:

$f(x)-g(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a,b]\overset{\text{оц-ка 1}}{\Rightarrow}\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]dx\geqslant 0\overset{\text{св-во 3}}{\Rightarrow}\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)\geqslant 0$

Оценка 4: Если $y=f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $y=|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int\limits_a^b|f(x)|dx$$

Доказательство:
Пусть f — интегрируема.

$$T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

$$M_j=\sup_{[x_{j-1},x_j]}f(x),\ m_j=\inf_{[x_{j-1},x_j]}f(x)$$

$$\overline{M}_j=\sup_{[x_{j-1},x_j]}|f(x)|,\ \overline{m}_j=\inf_{[x_{j-1},x_j]}|f(x)|$$

$$\overline{M}_j - \overline{m}_j \leqslant M_j - m_j \quad (*)$$

1) $M_j > 0,\ m_j > 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

2) $M_j < 0,\ m_j < 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

3) $M_j > 0, m_j < 0 \Rightarrow \overline{M}_j - \overline{m}_j < M_j - m_j$

Из $(*)$ следует:

$$\overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) \leqslant \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T:\ \overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f| \text{ интегрируема и } -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

Вспомним, что если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geqslant g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$, тогда

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Замечание: $|f|$ – интегрируема $\not\Rightarrow f$ – интегрируема.

Пример:

$$y = \tilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$$

Оценка 5:
Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b]$.
Если $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство:
$m \leqslant f(x) \leqslant M\ \ \forall x \in [a,b]\ \ g(x) \geqslant 0 \Rightarrow m\cdot g(x) \leqslant f(x)\cdot g(x) \leqslant M\cdot g(x)$

$\Rightarrow$ исходное условие доказано исходя из оценки 3 и свойства 3.

Предложение [Формула среднего значения]:
Пусть f интегрируема на $[a,b]$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $\exists \mu:\ \ m \leqslant \mu \leqslant M$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Доказательство:

Из оценки интегрирования неравенств (результата предыдущего пункта) при $g \equiv 1 \Rightarrow$

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a) \Rightarrow \mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Теорема [Интегральная теорема о среднем]:

Пусть f и g интегрируемы на $[a,b]$. $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ и $g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$ (либо $g(x) \leqslant 0$). Тогда $\exists \mu : m \leqslant \mu \leqslant M$ такая, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

В частности, если f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство:

1. 1) $\int_a^b g(x)dx = 0$

   $\Rightarrow$ оценка интегрирования неравенства $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) = 0$ и μ — любое число

2. 2) $\int_a^b g(x)dx > 0$

   $\Rightarrow$ Оценка интегрирования неравенства

   $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$ и $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

   Если f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi : \mu = f(\xi)$

Предложение:

Пусть f интегрируема на $[a,b], m = \inf\limits_{[a,b]} f, M = \sup\limits_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu : m \leqslant \mu \leqslant M : \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, если f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $[g \equiv 1]$.

7.3. Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление определеннных интегралов.

Определение:

Пусть $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \quad \forall x \in [a,b]$ существует

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$$

Этот интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема:

Любая непрерывная на $[a,b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$$

Доказательство:

$\forall x \in [a, b],\ x + \Delta x \in [a, b]$. Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем $\exists \xi$, лежащая между x и $x + \Delta x : F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x \Rightarrow$ $\dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$

Так как f непрерывна на $[a,b]$, то при $\Delta x \to 0 \Rightarrow f(\xi) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Замечание:

Из доказательства теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$$

Предложение: Если f интегрируема на $[a,b]$, то F непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство:

$\forall x \in [a,b], x + \Delta x \in [a,b],\ F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x, \Delta x)$.

$\Delta F(x, \Delta x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu\Delta x : m \leqslant \mu \leqslant M$ (Формула среднего значения)

$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta F(x, \Delta x) \to 0 \Rightarrow F$ непрерывна в X.

Замечание:

Если f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \forall \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

$\Phi(a) = C,\ \Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + C \quad \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Теорема [Формула Ньютона-Лейбница]:

Если f непрерывна на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где $\Phi -$ любая первообразная функции f.

Доказательство:
См. предыдущее замечание..

Теорема 7:
Если f:
1) интегрируема на $[a,b]$;
2) обладает на $[a,b]$ первообразной Φ;
то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Замечание:
1) $y = sgnx,\ x \in [-1,1]$ интегрируема на $[-1,1]$, но не обладает первообразной.
2) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, |x| \leqslant 1, x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$ является первообразной для
$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2},\ |x| \leqslant 1,\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$
$F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0$, но f не является интегрируемой на $[-1,1]$ (не ограничена).

Теорема [Замена переменных в определенном интегрировании]:
Пусть выполнены следующие условия:
1) $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$
2) $x = g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$
3) $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \longmapsto a \leqslant g(t) \leqslant b$
тогда справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Доказательство:
$\Phi -$ первообразная функции $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.
Т.к. Φ и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $[\alpha, \beta]$ соответственно, то
$\frac{d}{dt}\Big[\Phi(g(t))\Big] = \Phi'(g(t)) \cdot g'(t)$, но $\Phi'(x) = f(x) \to \Phi'(g(t)) = f(g(t)) \Rightarrow$
$\frac{d}{dt}\Big[\Phi(g(t))\Big] = f(g(t)) \cdot g'(t)$
По условию $f(g(t)) \cdot g'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $\Phi(g(t)) -$ её первообразная.

$$\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема [Формула интегрирования по частям]:

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b udv = [uv]|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Доказательство:

Функция $u \cdot v$ является первообразной функции $uv' + u'v$. Каждая их этих функций непрерывная $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b [uv' + u'v]dx = [uv]|_a^b$$

8. Билет 8

8.1. Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь криволинейной трапеции.

Определение:
Пусть на $[a,b]$ задана функция $f:\ \forall x \in [a,b] \to f(x) \geqslant 0$
Множество $G = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ называется криволинейной трапецией
Интегрируемость криволиенйной трапеции по Жордану была доказана ранее.

Предложение:

Площадь $m(X)$ криволинейной трапеции X определяется формулой $m(X) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство:
f интегр. на $[a,b] \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
НО $m(G_\varepsilon) = \underline{S_T} \leqslant I \leqslant \overline{S_T} = m(G^\varepsilon)$
$m(G_\varepsilon) \leqslant m(x) \leqslant m(G^\varepsilon)$
$m(x) = I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейного сектора.

Определение:
$r = r(\varphi)$ непр. на $[\alpha, \beta]$. Криволинейный сектор измерим по Жордану.

Приложение:

Площадь $m(X)$ криволинейного сектора вычисляется по формуле $m(X) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Доказательство:
$T = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta\}$
$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, i = \overline{1,n}$
$R_i = \max r(\varphi)\ \ [\varphi_i, \varphi_{i-1}]$ $\qquad r_i = \min r(\varphi)\ \ [\varphi_i, \varphi_{i-1}]$
$\overline{S_T} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n R_i^2 \Delta\varphi_i,$ $\qquad \underline{S_T} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n r_i^2 \Delta\varphi_i.$
Это верхняя и нижняя сумма Дарбу функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$.
Это функция интегр. на $[a,b]$.
$\underline{S_T} \leqslant I \leqslant \overline{S_T}$ и $I = m(X) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Объем тела вращения:.

Определение:
Тело, полученное путем вращения криволинейной трапеции вокруг оси x назовём телом вращения.

Предложение:
Объем $m(X)$ тела вращения X криволинейной трапеции вокруг x вычисляется по формуле $m(X) = \pi\int\limits_a^b [f(x)]^2 dx$.

Доказательство: $T = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$M_i = \max(f(x_{i-1}), f(x_i)), \qquad m_i = \min(f(x_{i-1}), f(x_i))$
$\overline{S_T} = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i, \qquad \underline{S_T} = \pi \sum\limits_{i}^{n} m_i^2 \Delta x_i$
Это суммы Дарбу функции $y = \pi f^2(x)$, которая интегрируема на $[\varepsilon_i, b]$
$\underline{S_T} \leqslant m(X) = I \leqslant \overline{S_T} \Rightarrow m(X) = I = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$

Длина дуги кривой.

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t)S, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ непрерывно дифференцруема $\Rightarrow$ спрямляемая кривая.

<u>**Предложение:**</u>
Если кривая Γ непрерывно дифференцруема, то ее длина L вычисляется по формуле $L = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt.$

Доказательство: $S'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$
$L = S(\beta) - S(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta S'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta |\vec{r}\,'(t)dt|.$

1. $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in [\alpha, \beta]$ $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$

2. $y = f(x)$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ Ł $= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

3. $r = r(\varphi), \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) \\ y' = r'\sin(\varphi) + r\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + (r)^2 \tag{1}$$

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + (r)^2}d\varphi \tag{2}$$

8.2. Вычисление площади поверхности вращения.

Пусть $y = f(x), x \in [a, b]$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
Рассмотрим поверхность П вращения графика функции f вокруг Ox. $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.
$A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)) \dots A_n(x_n, f(x_n))$.
Строим ломанную $A_0, A_1 \dots A_n$. При вращении ломанной вокруг оси x, получаем поверхность Π_T, составлящую одну из боковых поверхностей усеченных конусов, обозначим эту площадь за P_T.

$P_T = 2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} l_i = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] l_i$, где l_i - длина звена $A_{i-1}A_i$.

Определение: Число P называется пределом площади P_T при мелкости разбиения, стремящимся к нулю, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \to |P_T - P| < \varepsilon$.

Определение: Поверхность П называется квадрируемой, если существует предел площадей P_T при мелкости разбиения, стремещейся к 0. При этом P называется площадью поверхности П.

Предложение: Если $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b]$, то поверхность вращения П графика $y = f(x)$ вокруг x, квадрируема и ее площадь вычисляется по форумуле $P = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Без доказательства.

8.3. Криволинейные интегралы.

$\boxed{\mathbb{E}^2}$

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ – спрямляемая кривая, $\vec{r}(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$
f, P, Q – непрерывные на Г функции
$\mathrm{T} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta\}$ – разбиение
$M_j(x_j, y_j)$ – точка, $x_j = \varphi(t_j)$, $y_j = \psi(t_j), j = 0, 1, \ldots, k$
$\Delta s_j = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt$, $\Delta s_T = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} \Delta s_j$
$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $N_j(\xi_j, \eta_j)$ – точка, $\xi_j = \varphi(\tau_j)$, $\eta_j = \psi(\tau_j)$
$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t)dt = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})$

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^{k} f(N_j)\Delta s_j$$

$$\sigma_T^x = \sum_{j=1}^{k} P(N_j)\Delta x_j$$

$$\sigma_T^y = \sum_{j=1}^{k} Q(N_j)\Delta y_j$$

Определение: число I является пределом σ_T при $\Delta s_T \to 0$, если

$$\left[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta\ \&\ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T - I| < \varepsilon\right]$$

Определение: число $I_{x,y}$ является пределом $\sigma_T^{x,y}$ при $\Delta s_T \to 0$, если

$$\left[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta\ \&\ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T^{x,y} - I_{x,y}| < \varepsilon\right]$$

Число I называется *криволинейным интегралом 1-го рода*:

$$\int_\Gamma f(x,y)ds = I$$

Числа $I_{x,y}$ называются *криволинейными интегралами 2-го рода*:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = I_x \qquad \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy = I_y$$

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ – \textit{общий криволинейный интеграл 2-го рода}}$$

Замечание: криволинейные интегралы 2-го рода зависят от направления обхода кривой, и при его изменении у этих интегралов меняется знак.

8.4. Существование криволинейных интегралов, их вычисление.

Теорема: Пусть $\Gamma = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ – гладкая кривая, функции f, P, Q непрерывны на Γ. Тогда криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода от этих функций по кривой Γ существуют и вычисляются по формулам

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = I$$

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt = I_x$$

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt = I_y$$

Доказательство:

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^{k} f(N_j)\Delta s_j = \sum_{j=1}^{k} f(\varphi(\tau_j),\psi(\tau_j)) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt$$

$$\sigma_T - I = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\varphi(\tau_j),\psi(\tau_j)) - f(\varphi(t),\psi(t))] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt$$

$$\Phi(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \ \forall t \in [\alpha,\beta] (\text{т.к. гладкая кривая})$$

$$M = \max_{[\alpha,\beta]} \Phi(t), \ m = \min_{[\alpha,\beta]} \Phi(t) > 0 \Rightarrow m\Delta t_j \leqslant \Delta s_j \leqslant M\Delta t_j$$

$$\frac{\Delta s_j}{M} \leqslant \Delta t_j \leqslant \frac{\Delta s_j}{m} \Rightarrow \Delta s_T \to 0 \Leftrightarrow \Delta_T \to 0$$

$F(t) = f(\varphi(t),\psi(t))$ непрерывна на $[\alpha,\beta] \Rightarrow F(t)$ РН на $[\alpha,\beta]$ (т. Кантора), т.е.

$$\left[\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha,\beta] : |t' - t''| < \delta \mapsto |F(t') - F(t'')| < \frac{\varepsilon}{L}\right] \text{(L – длина кривой)}$$

$$\forall T : \Delta_T < \delta \Rightarrow \frac{\Delta s_T}{M} < \Delta_T < \delta \Rightarrow |\sigma_T - I| < \frac{\varepsilon}{L}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = \frac{\varepsilon}{L}\cdot L = \varepsilon$$

8.5. Несобственный интеграл.

Определение:

Пусть $y = f(x)$ интегр на $[a, \xi]$ $\forall \xi : \xi > a$. Символ $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ наз. несобств. интегралом функции $y = f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$.

Если существует и конечен предел $\lim\limits_{\xi \to \infty} I(\xi) = A,\ A \in R$, то несобственный интеграл $I = \int\limits_a^\infty f(x)dx$ назовается сходящимся и равен числу A.

Обозначение: $\int\limits_a^\infty f(x)dx < 0 \equiv$ интеграл сходится.

Соглашение: несобственный интеграл будет записываться как $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b = \infty$ или b - вертикальная асимптота $f(x)$.

Свойства несобственных интегралов и их вычисление:

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
   $\forall c:\ a < c < b:$
   $$\left[\int_a^b f(x)dx < \infty\right] \Leftrightarrow \int_c^b f(x)dx < \infty$$
2. $\left[[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty]\ \ \&\ \ [\int\limits_a^b g(x)dx < \infty]\right] \Rightarrow \int\limits_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$
3. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} F(x) = F(b-0) \in R$.

   Тогда:
   $$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) \text{ Формула Ньютона-Лейбница}$$
4. Интегрирование по частям работает так же как и неопределенных интегралах.
5. Пусть $y = f(x)$ непр. на $[a, b)$, $x = \varphi(t)$ непр. дифф. и возр на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = b$. Тогда:
   $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
   при условии сходимости хотя бы одного интегралов равенства
6. $$\left[\left[\int_a^b f(x)dx < \infty\right]\ \&\ \left[\int_a^b g(x)dx < \infty\right]\ \&\ [f(x) < g(x)]\right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

8.6. Несобственные интегралы от неотрицательных функций:

Теорема 1: $\left[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty\right] \Leftrightarrow \left[I(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx \text{ огр. на } [a,b)\ \right]$.

Доказательство:

Необходимость: $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty \Rightarrow\ I(\xi)$ ограничена на $[a,b)$.

$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \exists \lim\limits_{\xi\to b-0} I(\xi) = A \in R \Rightarrow A = \sup\limits_{\xi\in[a,b)} I(\xi)$ (A – это точная верхняя грань) $\Rightarrow 0 \leqslant I(\xi) \leqslant A \Rightarrow$ функция ограничена.

Достаточность: $I(\xi)$ огр. на $[a,b) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$

$I(\xi)$ огр. на $[a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \exists C > 0 : \forall\xi \in [a,b) \longmapsto 0 \leqslant I(\xi) \leqslant C \Rightarrow \exists A = \sup\limits_{\xi\in[a,b)} I(\xi)$

Из $A = \sup\limits_{\xi\in[a,b)} I(\xi)$ следует:

1. $\forall\xi \in [a,b) \mapsto I(\xi) \leqslant A$
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\xi_\varepsilon \in (a,B) : I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$

   $\xi_\varepsilon = \delta\ \Rightarrow\ \forall\xi \in (\delta,b) \longmapsto I(\xi) \geqslant I(\xi_\epsilon) > A - \varepsilon$

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (a,b) : \forall\xi \in (\delta,b) \longmapsto 0 \leqslant A - I(\xi) < \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{\xi\to b-0} I(\xi) = A \in R \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

Теорема 2 [Признак сравнения]: Пусть $\forall x \in [a,b) \longmapsto 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда:

1. $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx = \infty$

Доказательство:

1. $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Longleftrightarrow$ (Из T_1) $G(\xi) = \int\limits_a^\xi g(x)dx$ ограничена на полуинтервале $\stackrel{\text{def}}{=} \exists C \geqslant 0 : \forall\xi \in [a,b) \longmapsto G(\xi) \leqslant C$.

   $I(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\xi g(x)dx \leqslant C\ \Rightarrow$ (из T_1) $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx = \infty$.

   В противном случае: $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow$ (из Π_1) $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

Следствие (Признак сравнения в предельной форме)

Если $f(x) > 0 \;\; g(x) > 0 \; \forall x \in [a, b) \;\; f(x) \sim g(x) \;\; x \to b-0$, $\int\limits_a^b f(x)dx \;\; \int\limits_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

$\big[\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\big] \Rightarrow \big[\varepsilon = 1/2.\ \exists \delta \in (a, b) : \forall x \in (\delta, b) \mapsto |\frac{f(x)}{g(x)} - 1| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$ Далее просто применяем T_2 и Π_2.

8.7. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Пусть функция интегрируема в собст. смысле на промежутке из $[a, b)$. Тогда:

$$[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b):\ \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx\right| < \varepsilon\big]$$

Доказательство:

$$[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty\big] \Longleftrightarrow \big[\exists \lim_{\xi\to b-0} \int\limits_a^\xi f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0} I(\xi) = A \in R\big] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b):\ \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto |I(\xi') - I(\xi'')| < \varepsilon\big]$$

$$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| < \varepsilon \Longleftrightarrow |\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| < \varepsilon$$

8.8. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Определение 1 Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ наз. абсолютно сход., если $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$.

Предложение: Если интеграл сходится абсолютно, он сходится условно.

Доказательство
$\forall \xi'\xi'' \in (a, b)$
$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| \leqslant \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx$. Тогда по критерию Коши $|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx|$ сходится и из $_2$ сходится и $\int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx$.

Определение 2 Если $\int\limits_a^b |f(x)|dx = \infty$, а $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ наз. условно сходящимся.

Предложение: Если $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится абсолютно, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)+g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство: Абсолютная сходимость:
$\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty \Rightarrow |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \Rightarrow \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|dx < \infty$

В другую сторону: $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|dx < \infty \Rightarrow f(x) = \big[f(x)+g(x)\big] - g(x) \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f(x)+g(x)| \Rightarrow$ по $_2$ $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$.

8.9. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема [Признак Дирихле]: Если выполнены условия:

1. $f(x)$ непр, $g(x)$ непр. дифф. на $[a,b)$
2. $F(x) = \int\limits_a^b f(t)dt$ ограничена на $[a,b)$
3. $g(x)$ монотонна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx < \infty$.

Доказательство:

$$\forall \xi', \xi'' \in [a{,}b)$$

Сделаем замену для интегрирования по частям:
$u = g(x), du = g'(x)dx,\ dv = f(x)dx, v = F(x)$.

$$\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx = g(x)\cdot F(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g'(x)F(x)dx$$

$$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx| \leqslant M(|g(\xi')|+|g(\xi'')|) \pm M\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g'(x) \leqslant 2M(|g(\xi')|+|g(\xi'')|)$$

$$\big[\lim_{x\to b-0} g(x) = 0\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (a,b) \forall x \in (\delta, b) \longmapsto |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ \xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto |\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx| < 2M(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{по критерию Коши } \int\limits_a^b f(x)g(x) < \infty$$

Следствие (Признак Абеля): Если выполняются условия:

1. $f(x)$ непр, $g(x)$ непр. дифф. на $[a, b)$
2. $\int\limits_a^b f(x) < \infty$
3. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b)$

Тогда $\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)dx < \infty$.

Доказательство:
Из условия 3 следует, что $\exists \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = g(b-0) \in R$

$g_1(x) = g(x) - g(b-0) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0 \Rightarrow (\ ) \int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx < \infty$

$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx + g(b-0)\int\limits_a^b f(x)dx$

$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходятся, значит сходится и $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

9. Билет 9

9.1. Числовые ряды.

Определение: Пусть задана числовая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выражение $u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots$ будем называть *числовым рядом.*

Обозначение: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$
u_k – член ряда.
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ – n-ая частичная сумма ряда.

Определение: Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится*, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – *сумма ряда.* Если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *расходится.*

Обозначения:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ – ряд сходится
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ – ряд расходится

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$

   $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots$

   $S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 0 \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходящаяся $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots$

   $$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

   а) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1 - q} = S$

   б) $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

   в) $q = 1 \Rightarrow S_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

   г) $q = -1 \Rightarrow$ пример 1) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\xi x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < \xi < 1$$

   $$|e^x - S_n| \leqslant e^x \cdot \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

9.2. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon\right]$$

Доказательство:
$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|$
Условие теоремы означает, что $\{S_n\}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ сходится

Обозначение: $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ – n-й *остаток числового ряда*

Следствие:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}]$$

Доказательство:

$$[\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}] \Leftrightarrow [\text{условие критерия Коши}]$$

Следствие [Необходимое условие сходимости числового ряда]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Rightarrow \left[\lim_{k\to\infty} u_k = 0\right]$$

Доказательство:
Следует из условия критерия Коши при $p = 1$.

$$[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto |u_{n+1}| < \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\lim_{k\to\infty} u_k = 0\right]$$

Отрицание условия Коши:

$$\left[\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall n\ \exists n_0 \geqslant n\ \&\ \exists p_0 \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k\right| \geqslant \varepsilon_0\right]$$

Пример:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ – гармонический ряд
$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, **но**

$$\exists\varepsilon_0 = \frac{1}{4} : \forall n\ \exists n_0 = n\ \&\ \exists p_0 = n : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

Предложение 1: Добавление (отбрасывание) конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.

Доказательство:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum\limits_{k=1}^{k_0} \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$
$\forall n > n_0 \mapsto \tilde{S}_n = S_n + A, \quad A = \sum\limits_{k=1}^{k_0} \alpha_k$
Если $\{S_n\}$ сходится [расходится], то $\{\tilde{S}_n\}$ сходится [расходится].

Предложение 2:
$\tilde{u}_k = cu_k, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ ведут себя одинаково.

9.3. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \geqslant 0 \quad \forall k, \quad \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая.

Теорема 2 [Критерий сходимости числового ряда с неотр. членами]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}]$$

Доказательство:

$$[\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}] \text{ (т.к. монотонная)}$$

Теорема 3 [Признак сравнения]:
$\forall k \mapsto 0 \leqslant u_k \leqslant \tilde{u}_k$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Доказательство:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty$, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{R}$

   $\forall n \mapsto S_n \leqslant \tilde{S}_n \leqslant \tilde{S} \Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\overset{т.2}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \overset{1)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 3** $\boxed{\forall k}$ можно заменить на $\boxed{\forall k \geqslant k_0, k_0 \in \mathbb{N}}$, т.к. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.
2. Неравенство $0 \leqslant u_k \leqslant \tilde{u}_k$ можно заменить $0 \leqslant u_k \leqslant c\tilde{u}_k, c > 0$, т.к. умножение на действительное число c не влияет на поведение числового ряда.

Следствие:

$$[\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } u_k \sim \tilde{u}_k] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \text{ ведут себя одинаково}\right]$$

Доказательство:

$$\left[\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\tilde{u}_k} = 1\right] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \left|\frac{u_k}{\tilde{u}_k} - 1\right| < \varepsilon\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k \geqslant K \mapsto (1-\varepsilon)\tilde{u}_k < u_k < (1+\varepsilon)\tilde{u}_k$$

$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$
Утверждение следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k = \dfrac{1}{3+b^k}$

   а) $b \leqslant 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} u_k \neq 0 \Rightarrow$ не выполнено **НУС** $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

   б) $b > 1$

   $u_k = \dfrac{1}{3+b^k} \leqslant \left(\dfrac{1}{b}\right)^k = q^k, \quad 0 < q < 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$

   $\dfrac{1}{k^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} = \infty$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \qquad k > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \tilde{u}_k$

   $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \Rightarrow \tilde{S}_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$

   $\forall \alpha \geqslant 2 \mapsto \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} < \infty$ при $\alpha \geqslant 2$

Теорема 4 [Признак сравнения]:

$$\left[\forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k}\right] \Rightarrow$$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Доказательство:

$$\times \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_1} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \\ \dfrac{u_3}{u_2} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_3}{\tilde{u}_2} \\ \dots \\ \dfrac{u_k}{u_{k-1}} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_{k-1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_k}{u_1} \leqslant \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_1} \Rightarrow u_k \leqslant c\tilde{u}_k,\ c = \frac{u_1}{\tilde{u}_1} > 0$$

Утверждение **Теоремы 4** следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

Теорема 5 [Признак Даламбера]:

$$\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0$$

1. $\left[\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$
2. $\left[\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $\tilde{u}_k = q^k$

   $\dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q \Rightarrow \dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q < 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \overset{.4}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\tilde{u}_k = 1$

   $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant \dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = 1, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \overset{.4}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Теорема 6 [Признак Даламбера в предельной форме]:

$$[\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0] \,\&\, \left[\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow$$

1. $[L < 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$
2. $[L > 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$

   $\varepsilon = \alpha\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 < \dfrac{u_{k+1}}{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \overset{.5}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$

$\varepsilon = \alpha\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \dfrac{u_{k+1}}{u_k} > L - \alpha = 1 \overset{.5}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 5** неравенство $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ **нельзя** заменить неравенством $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} < 1$.

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \mapsto \dfrac{k}{k+1} < 1\ \forall k$, **но** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$

2. Для $L = 1$ (в **Теореме 6**) признак Даламбера в предельной форме «не работает».

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{k+1} = 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{(k+1)^2} = 1$

Теорема 7 [Признак Коши]:

$$\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0$$

1. $\left[\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$

2. $\left[\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $\tilde{u}_k = q^k \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \leqslant \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = q < 1 \Rightarrow u_k \leqslant \tilde{u}_k$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \overset{.3}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\tilde{u}_k = 1 \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \geqslant \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = 1 \Rightarrow u_k \geqslant \tilde{u}_k$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \overset{.3}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Теорема 8 [Признак Коши в предельной форме]:

$$[\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0]\,\&\left[\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = L \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow$$

1. $[L < 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$

2. $[L > 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$

   $\varepsilon = \alpha\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 < \sqrt[k]{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \overset{.7}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$

$\varepsilon = \alpha \ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \sqrt[k]{u_k} > L - \alpha = 1 \overset{.7}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 7** неравенство $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ <u>**нельзя**</u> заменить неравенством $\sqrt[k]{u_k} < 1$.
2. Для $L = 1$ (в **Теореме 8**) признак Коши в предельной форме «не работает».
3. Предельный признак Коши более сильный, чем предельный признак Даламбера.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \ u_k = \dfrac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}}, \ \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3 + (-1)^{k+1}}{3 + (-1)^k}$

$$\begin{cases} k = 1 : \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ k = 2 : \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ не существует}$$

<u>**Теорема 9 [Признак Коши—Маклорена][интегральный признак]:**</u>
Пусть f – неотрицательная и невозрастающая на $[m; +\infty), \ m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left[\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty\right] \Leftrightarrow \left[\exists \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha_n = \int\limits_m^n f(x)dx\right], \ n \geqslant m + 1$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \int\limits_m^{+\infty} f(x)dx\right)$$

Доказательство:
$\forall k \geqslant m + 1 \mapsto k - 1 \leqslant x \leqslant k \Rightarrow f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1)$
$[k-1; k]$: f – монотонная и ограниченная $\Rightarrow f$ интегрируема

$$f(k) \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k-1), \ k \geqslant m + 1$$

$$+\begin{cases} f(m+1) \leqslant \int\limits_m^{m+1} f(x)dx \leqslant f(m) \\ f(m+2) \leqslant \int\limits_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leqslant f(m+1) \\ \dots \\ f(n) \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant f(n-1) \end{cases}$$

$S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$

$$S_n - f(m) \leqslant \int\limits_m^n f(x)dx \leqslant S_{n-1} \Rightarrow \{\alpha_n\} \text{ сходится} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ ограничена}$$

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},\ \alpha > 1$

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$, если $\alpha > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ при $\alpha > 1$.

2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\beta k}$

$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} < \infty$ при $\beta > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\beta k} < \infty$ при $\beta > 1$.

9.4. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

Определение: Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – *абсолютно сходящийся* ряд.

Предложение:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty\right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$$

Доказательство:
По Критерию Коши сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Определение: Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| = \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – *условно сходящийся* ряд.

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha},\ \alpha > 1$

$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right| = \frac{1}{k}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ при $\alpha > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$ сходится абсолютно.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

$|u_k| = \frac{1}{k}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x) = [\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1$$

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится условно

Тождество Абеля:
$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}, \{v_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad S_n = u_1 + \ldots + u_n, \quad u_k = S_k - S_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_{k+1} - v_k)$$

Теорема [Признак Лейбница]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k,\ 0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k,\ v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k < \infty\right]$$

Доказательство:
$S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots + v_{2n-1} - v_{2n} \geqslant 0$
$\{S_{2n}\}$ – неубывающая и ограниченная $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$
$S_{2n} = v_1 - \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(v_4 - v_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(v_{2n-2} - v_{2n-1})}_{\geqslant 0} - v_{2n} \Rightarrow S_{2n} \leqslant v_1\ \forall n$
$S_{2n-1} = S_{2n} + v_{2n} \Rightarrow S_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

Теорема [Признак Дирихле]: Пусть

1. $\{\mathscr{U}_n\}$ – послед. частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ограниченна, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство:
$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\mathscr{U}_n| \leqslant C$

$\{v_k\}$ – невозрастающая и $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 \leqslant v_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C}$

$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant Cv_{n+p} + Cv_n + C\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(v_k - v_{k+1}) \leqslant 2Cv_n < \varepsilon$

Следствие [Признак Абеля]: Пусть

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и ограниченна

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство:
$\{v_k\}$ монотонна и ограниченна $\Rightarrow$ $\{v_k\}$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} v_k = v \in \mathbb{R}$
$\tilde{v}_k = v_k - v$ монотонна и $\tilde{v}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
$\{\mathscr{U}_n\}$ сходится $\Rightarrow$ $\{\mathscr{U}_n\}$ ограниченна

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k\tilde{v}_k}_{<\infty \text{ по пр. Дирихле}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k - v\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k}_{<\infty \text{ по усл.}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ убывает и $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < \infty$ (по признаку Лейбница)
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k}$, $\quad x$ – фиксированное число, $x \neq 2\pi m$, т.к. получится гармонический ряд

   $v_k = \dfrac{1}{k},\ u_k = \cos kx,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{2k+1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2k-1}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\right]$$

   $|S_n| = \left|\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ \forall n,\ x \neq 2\pi m \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k} < \infty$ (по признаку Дирихле)

3. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{2}{9} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3k-2} + \dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{2}{3k}\right)$

   $v_k = \dfrac{1}{k}$
   $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = 1, u_5 = 1, u_6 = -2, \ldots$
   $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 2, S_6 = 0, \ldots$
   $S_n \leqslant 2\ \forall n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ (по признаку Дирихле)

9.5. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

<u>**Теорема [Коши]:**</u>

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то любой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$, полученный из исходного перестановкой членов, является абсолютно сходящимся и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = S$.

Доказательство:

$\circledast$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, \quad \tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{u}_k$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сх. абс.}\right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1\ \&\ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S\right] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \mapsto |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$N_0 = \max\{N_1; N_2\}$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{S}_n : \forall n \geqslant N : \tilde{S}_N \text{ содержит все } N_0 \text{ первых членов исходного ряда}$$

$$|\tilde{S}_n - S| = |(\tilde{S}_n - S_{N_0}) + (S_{N_0} - S)| \leqslant \underbrace{|\tilde{S}_n - S_{N_0}|}_{n-N_0 \text{ членов}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Число $p \in \mathbb{N}$ выбираем таким образом, чтобы $N_0 + p$ был больше номеров членов ряда, содержащихся в $\tilde{S}_n - S_{N_0} \Rightarrow |\tilde{S}_n - S_{N_0}| \leqslant \sum\limits_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$|\tilde{S}_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для доказательства абсолютной сходимости повторяем $\circledast$ для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k|$.

9.6. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots = \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

$1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{4n} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$

$$\begin{cases} \tilde{S}_{3m} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{3m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_n,\ n = 3m \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-2} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \frac{1}{2} \ln 2$$

<u>**Теорема [Римана]:**</u>

Если числовой ряд сходится условно, то каково бы ни было число S, члены ряда можно переставить так, что полученный ряд сходится к S.

9.7. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Теорема [О сумме абсолютно сходящихся рядов]: Если

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \mathscr{U} \in \mathbb{R}, \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = \mathscr{V} \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \mathscr{U} \pm \mathscr{V}$$

Доказательство:

$$\mathscr{U}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad \mathscr{V}_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) = \mathscr{U}_n \pm \mathscr{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathscr{U} \pm \mathscr{V}$$

Теорема [О произведении абсолютно сходящихся рядов]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathscr{U} \text{ – абс. сход.}, \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathscr{V} \text{ – абс. сход.}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \text{ сход. абс. и } \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathscr{U} \cdot \mathscr{V}\right]$$

Доказательство:

$\bar{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} |w_j|$

Пусть m – наибольший индекс из индексов k и l, входящих в $\bar{S}_n \Rightarrow \bar{S}_n \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сход. абс. $\Rightarrow \{\bar{\mathscr{U}}_m\}, \{\bar{\mathscr{V}}_m\}$ ограничены $\Rightarrow \{\bar{S}_n\}$ ограничена $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |w_j| < \infty$ $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j$ сход. абс.

$\mathscr{W}_n = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathscr{U} \cdot \mathscr{V} \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j = \mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$

10. Билет 10

10.1. Понятия функциональных последовательностей и рядов.

Определение: [функциональная последовательность]:
Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество.

$\forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow y = f_n(x), x \in X$

Множество занумерованных функций $f_1, f_2 \dots f_n \dots$ называют функциональной последовательностью, где

$$f_n \text{ — член последовательности}$$
$$X \text{ — область определения}$$

Определение: [функциональный ряд]:
сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

членов функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется функциональным рядом.

Замечание: изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей:

1. Каждому функциональному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

соответствует функциональная последовательность его частичных сумм

$$\{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

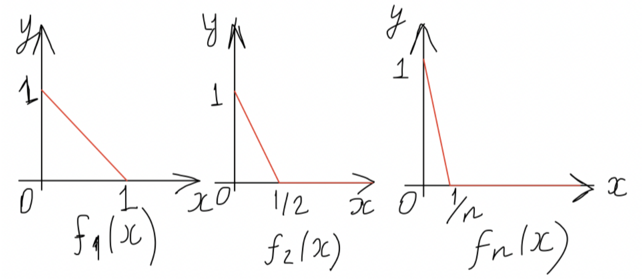
2. Каждой функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует функциональный ряд с членами $f_1(x) = S_1(x)$, $f_2(x) = S_2(x) - S_1(x)$ $\dots$, $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, $\dots$

Примеры:

1.
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

2. $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
$S_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$S_{n+1}(x)$ отличается от e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа на $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$



10.2. Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве.

Определение: [сходимость в точке]:
Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Если указанная последовательность сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называют сходящейся в точке x_0.

Замечание: аналогичное верно и для функциональных рядов: Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называют сходящимся в точке x_0.

Определение: [область сходимости]:
Множество точек в которых сходится функциональная последовательность (или функциональный ряд) называют областью сходимости функциональной последовательности (функционального ряда).

Замечание: область сходимости функциональной последовательности(ряда) может совпадать с его областью определения X, составлять его части или быть $\varnothing$.

Определение: [предельная функция]:
Пусть $\widetilde{X} \subset X$ — область сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \widetilde{X}$ определяет на $\widetilde{X}$ функцию $y = f(x)$. Эта функция называется предельной функцией $y = f(x)$ функциональной последовательности.

Определение: [сумма ряда]:
Пусть $\widetilde{X} \subset X$ — область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \widetilde{X}$ определяет на $\widetilde{X}$ функцию $y = S(x)$. Эта функция называется суммой ряда $y = S(x)$ функциональной последовательности.

10.3. Понятие равномерной сходимости на множестве.

Определение:[равномерная сходимость функциональной последовательности]:
Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции $y = f(x)$ на множестве X если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(-): $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \ \exists n_0 \geqslant n \ \& \ \exists x_n \in X : |f_{n_0}(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$

Примеры:

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n \ \& \ x_n = \frac{1}{2n}$:

$f(x_n) = 0, \ f_n(x_n) = \frac{1}{2}$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \varepsilon_0$

2.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Для заданного $\delta > 0 \ \exists N \longmapsto$

$f_n(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$

$f(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$

Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[\delta;1]}{\rightrightarrows}} 0$.

Замечания:

1. N в определении не зависит от x, а только от ε. Один номер для всех $x \in X$ одновременно.

2. Из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ НЕ следует равномерная сходимость на X.

Замечание: Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X^{/}}{\rightrightarrows}} f(x)$, где $X^{/} \subset X$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Определение: [равномерная сходимость функционального ряда]:
Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X , если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$

10.4. Критерий Коши равномерной сходимости.

Теорема [Критерий Коши для функциональной последовательности]: Функциональная последовательность $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ сходится тогда или только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \longmapsto \\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]$$

Доказательство:

1. *Необходимость* $\Rightarrow$*:*

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$

Тогда:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$
Тогда и
$\forall p \in \mathbb{N}\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$

Воспользуемся правилом треугольника:

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. *Достаточность* $\Leftarrow$*:*

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N}\ \&\ \forall x \in X \longmapsto \\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]$$

Зафиксируем $x \in X$, тогда $\exists f(x)$ — предельное значение последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Тогда $f_{n+p}(x) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$

В неравенстве перейдем к предельному при $p \longrightarrow \infty$:
$\forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда получим, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ по определнию.

Теорема [Критерий Коши для функционального ряда]:
Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши:

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\&\ \forall p \in \mathbb{N}\&\ \forall x \in X \longmapsto$$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon]$$

Замечание: критерий Коши для функциональных рядов следует из критерия Коши для функциональных последовательностей, так как:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}| = S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

Отрицание условия Коши:

Для функциональной последовательности:
$\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall n\ \exists n_0 \geqslant n\ \&\ \exists p_0 \in \mathbb{N}\ \&\ \exists x_n \in X : |f_{n_0+p_0}(x_n) - f_{n_0}(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$

Для функционального ряда:
$\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall n\ \exists n_0 \geqslant n\ \&\ \exists x_n \in X : |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \geqslant \varepsilon_0$

10.5. Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Теорема 1 [sup**-критерий для функциональной последовательности]:**
$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Доказательство:
Обозначим $M_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.
Тогда запишем наше равенство в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto 0 \leqslant M_n < \varepsilon$$

1. *Необходимость* $\Rightarrow$*:*

$$[f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)] \overset{def}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\text{: } \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right]$$

Отсюда, $M_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2. *Достаточность* $\Leftarrow$*:*
$\forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n$

То есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 2 [sup**-критерий для функционального ряда]:**
Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0$$

Доказательство:

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

То есть $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

Но $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$ тогда и только тогда, когда $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} 0$.

Примеры:
1. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $x \in [2, +\infty) \subset X$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{e^{nx}} = 0 \Rightarrow y = f(x) \equiv 0$
$f'_n(x) = nx(2-nx)e^{-nx} = 0$
 $x_n = \frac{2}{n}$ – точка максимума, при $x > \frac{2}{n}$, $n > 1 \Rightarrow f'_n(x) < 0 \Rightarrow f_n$ убывает на X;

$$\sup_X f_n(x) \leqslant f(\frac{2}{n}) = \frac{4}{ne^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} 0$.
2. $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $X = (0{,}2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{e^{nx}} = 0$$
$$\Rightarrow y = f(x) \equiv 0$$

$$f'_n(x) = n^2x(2-nx)e^{-nx} = 0$$

 $x_n = \frac{2}{n}$, $n > 1$– точка максимума. $\Rightarrow$

$$\sup_X f_n(x) = \frac{4}{e^2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

3.
$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}},\ X = (0{,}1)$$

$$\forall n\ \exists n_0 = n\ \&\ \exists p_0 = n\ \&\ \exists x_n = \frac{1}{n}$$

$$|f_{2n}(x_n) - f_n(x_n)| = |\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \frac{\ln 1}{\sqrt{1}}| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} > \varepsilon_0 = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$$

Отсюда, равномерной сходимости нет.

10.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Теорема 1: если члены функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

непрерывны на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$, то сумма ряда $y = S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство:
$\Big[S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} S(x)\Big] \overset{def}{=} \Big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\Big]$

Возьмем $n_0 \geqslant N \Rightarrow |S_{n_0}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

При $x_0 \in [a,b]$ выполняется:

$|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

В силу непрерывности f_k на $[a,b]$, S_{n_0} непрерывна на $[a,b]$, в частности в точке $x_0 \in [a,b]$, то есть:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\colon \forall x \in [a,b]\colon |x - x_0| < \delta \longmapsto |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x \in [a,b]\colon |x - x_0| < \delta \longmapsto$

$|S(x)-S(x_0)| = \big|[S(x)-S_{n_0}(x)]+[S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)]+[S_{n_0}(x_0)-S(x_0)]\big| \leqslant |S(x)-S_{n_0}(x)| + \big|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\big| + \big|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon$

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in [a,b]$ функция $y = S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ непрерывны на $[a,b]$ и последовательность сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Замечание: пусть ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$
удовлетворяет условиям теоремы 1 и $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.
$$\forall x_0 \in [a,b] \longmapsto \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$$
Отсюда,
$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_k(x)$$
При выполнении условий теоремы 1 возможен почленный переход к пределу под знаком суммы для равномерно сходяшегося функционального ряда, члены которого есть непрерывные функции.

Теорема 2: если члены функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^x f_k(t)dt$ также сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = \int\limits_a^x S(t)dt$.

Доказательство: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $y = S(x)$:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

По теореме 1 S непрерывны на $[a,b]$, следовательно S и f_k — интегрируемые функции ($\forall k$) на $[a,b]$. Обозначим:
$$I(x) = \int_a^x S(t)dt$$

и

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)dt = \int_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt = \int_a^x S_n(t)dt$$

$$|I(x) - I_n(x)| = \Big|\int_a^x [S(t) - S_n(t)]dt\Big| \leqslant \int_a^x |S_n(t) - S(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) < \varepsilon$$

Итак:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |I(a) - I_n(x)| < \varepsilon$, то есть функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)dt$$

сходится равномерно на $[a,b]$ к функции

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)dt = \int_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt$$

Теорема 2': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывны на $[a,b]$. и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $\int\limits_a^x f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^x f(t)dt$.

Замечания:

1. В теоремах 2,2' отрезок $[a,x]$ можно заменить отрезком $[x_0,x] \subset [a,b]$.
2. Теоремы 2 и 2' остаются справедливыми, если функции $y = f_k(x)$ интегрируемы на $[a,b]$.

Теорема 3: если члены функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a,b]$ и функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ ($x_0 \in [a,b]$) сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$ и $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

Доказательство:

Обозначим:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Из условия теорем 3 и 1 $y = \widetilde{S}(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ можно почленно интегрировать(по теореме 2), то есть:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{S}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} [\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt]$$

.

Согласно теореме 2 ряд сходится равномерно на $[a,b]$.

Но $\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt = f_k(x) - f_k(x_0)$, следовательно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$$

Ряды слева и справа равномерно-сходящиеся, а значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{S}(t)dt = S(x) - S(x_0)$$

Левая часть – интеграл с переменным верхним пределом и его производная равна $\widetilde{S}(x)$ $\Rightarrow$ правая часть – дифференцируемая функция и $S'(x) = \widetilde{S}(x)$, то есть

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Замечания:

1. По условию теоремы 3: $\widetilde{S}(x) = S'(x)$ – непрерывная функция $\Rightarrow S$ – непрерывно-дифференцируемая на $[a,b]$.

2. Теорема 3 остается справедливой, если функции $y = f_k(x)$ являются дифференцируемыми функцими.

Теорема 3': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на $[a,b]$, числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, где $x_0 \in [a,b]$; а функциональная последовательность $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a,b]$, то $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = f(x)$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x),\ x \in [a,b]$$

Замечание: можно сделать важный вывод: равномерная сходимость не выводит из класса непрерывных функций, а в случае равномерной сходимости производных – из класса непрерывно дифференцируемых функций.

10.7. Достаточные признаки сходимости функциональных рядов.

Теорема 1 [Признак Вейерштрасса]:

Если для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

можно указать такой числовой ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, что $\forall k \geqslant k_0$ и $\forall x \in X$ выполняется: $0 \leqslant |f_k(x)| \leqslant a_k$, то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на X.

Доказательство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \longmapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\exists N = max\{N_1, k_0\} \ \Rightarrow \forall n \geqslant N \ \& \ \forall x \in X \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \longmapsto$$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Следствие: если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где $a_k = \sup\limits_{x \in X} |f_k(x)|$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.

Теорема 2 [Признак Дирихле]: Если:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

   имеет равномерно ограниченную на X последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

   $\exists M > 0\colon \forall x \in X \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |S_n(x)| \leqslant M$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ монотонна на X и $v_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} 0$:

   $v_k(x) \leqslant v_{k+1}(x) \ \forall x \in X \& \ \forall k$
   $[v_k(x) \geqslant v_{k+1}(x)]$

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X.

Теорема 2 [Признак Абеля]: Если:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X.
2. $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и монотонна на X.

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X.

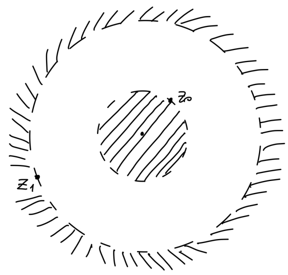
11. Билет 11

11.1. Степенные ряды с комплексными числами

<u>**Определение:**</u> $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - a)^k$; $c_k, a \in \mathbb{C}-$ фиксированные числа, $\zeta \in \mathbb{C}$ - переменная.
Такой функциональные ряд называется *степенным.*
c_k - коэф. степенного ряда. Этот ряд сходится в точке a.
$\zeta - a = z \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - будем рассматривать такой степенной ряд, который сходится в т. $z = 0$

11.2. Теорема 1. [Первая теорема Абеля]

1. Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в т. $z \neq 0$, то он сходится в круге: $k_0 = \{z = \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$
2. Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится в т. z_1, то он расходится в любой т. $z : |z| > |z_1|$



$$[\lim_{n\to\infty} z_n = a] \overset{\text{def}}{=} [\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

Доказательство:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty \Rightarrow c_k z_0^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ Ограничена: $\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leqslant M$
$\forall z : |z| < |z_0|$
$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0}\right)^k| \leqslant M \cdot [q(z)]^k, |q(z)| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k(z) < \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$
2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty \Rightarrow \forall z : |z| > |z_1| -$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится, если бы в точке $z_2 :$
$|z_2| > |z_1|$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_2^k < \infty \overset{1)}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty$ - противоречие.

Следствие 1. Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty, z_0 \neq 0$, то $\forall \rho : 0 < \rho < |z_0|$ в круге $k_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \rho\}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно.

Доказательство:
$\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leqslant M$

$\forall z \in K_\rho$

$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k}| \leqslant M \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^k = M \cdot q^k$

$|q| = \frac{\rho}{|z_0|} < 1$ ($\frac{\rho}{|z_0|}$ не зависит от z),

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k < \infty \overset{\text{По пр. Вей.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно в круге K_ρ

Следствие 2 Если в т. $z_0 \neq 0$ вып. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty$, то

1) $\sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k z^{k-m}$ сходится абсолютно в круге K_0 и равномерно в круге K_ρ

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$ сходится абсолютно в круге K_0 и равномерно в круге K_ρ

Доказательство:
1) $\forall z \in k_0 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k-m} \cdot \frac{1}{z_0^m}| \leqslant$

$\frac{M}{|z_0|^m} \cdot |\frac{z}{z_0}|^{k-m} = \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q^{k-m}(z), \quad q(z) = |\frac{z}{z0}| < 1$

$\sum\limits_{k=m}^{\infty} q^{k-m} < \infty$ - сходится абсолютно в K_0

$\forall z \in K_1 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| \leqslant \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q_1^{k-m}, \quad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|} < 1.$

$0 < q_1 < 1$ - не зависит от $z \Rightarrow$ по признаку Вейр. в K_1 ряд сходится равномерно
2) $\forall z \in K_0$

$|k c_k z^{k-1}| = |\frac{c_k z_0^k}{z_0} \cdot k \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k-1}| \leqslant \frac{M}{|z_0|} \cdot k q^{k-1}(z), q(z) = |\frac{z}{z_0}| < 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k q^k(z) < \infty$ по признаку Даламбера

11.3. Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда].

Для любого степенного ряда существует R ($R \geqslant 0$ или $R = +\infty$)
такое, что

1) $0 < R < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ в круге $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и расходится в $\mathbb{C} \backslash \overline{K}$

2)$R = 0$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ только в $z = 0$

3) $R = +\infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ $\forall z \in \mathbb{C}$

R - называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

K - круг сходимости.

Доказательство: Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ - множество сходимости степенного ряда; $\mathscr{D} \neq \varnothing$, т.к. $0 \in \mathscr{D}$

1) $\mathscr{D}$ - огран., $z_0 \in \mathscr{D}, z_0 \neq 0$

$R = \sup\limits_{z \in \mathscr{D}} |z|$ - сущ. т.к. $\mathscr{D}$ огранич. мн-во.

Докажем: $\forall\ z \in K \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$

$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{K} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$

По определению sup $\forall z' \in K\ \exists z_1 \in \mathscr{D} : |z'| < |z_1| \leqslant R$, т.к. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty \Rightarrow$ 1-я теорема Абеля $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty$ и сходится абсолютно $\Rightarrow$ В силу произв. $z' \in K \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абс. в круге K

Пусть $z' \notin K \Rightarrow |z'| > R \Rightarrow$ по опред. $\sup z' \notin \mathscr{D} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k = \infty \Rightarrow$ расходится вне круга K

2) $\mathscr{D}$ - огран.; если $\mathscr{D} = \{0\}$, то ряд сход в т. $z = 0$ и расх в $z \neq 0$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad z = 0 \quad \Rightarrow R = 0$

3) $\mathscr{D}$ - неогранич. $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \exists z' \in \mathscr{D}$:

$|z| < |z'|, \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty \overset{\text{1-я т. Аб.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty.$

11.4. Теорема 3. [Вторая теорема Абеля].

Если $0 < R < +\infty$, R - радиус сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$, то на $[0, R]$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равномерно и его сумма $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непрерывна $\forall x \in [0, R]$

Доказательство: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k R^k}_{U_k} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}_{V_k}$

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$

2) $V_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad 0 \leqslant V_k \leqslant 1 \quad \forall x \in [0; R]$

$V_{k+1} = \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} < \left(\frac{x}{R}\right)^k = V_k \quad \forall k$

$\Downarrow$ признак Абеля

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k < \infty$ сходится равномерно на $[0, R]$

$f_k(x) = c_k x^k$ - непрерывна на $[0; R]$

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непреревна на $[0; R]$

11.5. Теорема 4.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geqslant 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

2) Если $|c_k| > 0\ \forall k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \rho\ (\rho \geqslant 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$.

Доказательство:
$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\}$

$z_0 \in K : \sqrt[k]{|c_k z_0^k|} = |z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |z_0| \cdot \rho < \frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z_0^k| < \infty$

$z_1 : |z_1| > \frac{1}{\rho}$

$\sqrt[k]{|c_k z_1^k|} = |z_1| \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |z_1| \cdot > \frac{1}{\rho} \cdot \rho \Rightarrow$ По признаку Коши $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty$.

Пример (показывает, для чего нужна формула Коши-Адамара):

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{k^2} = z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + ... + z^{k^2} + ...$

$\{c_k\} = \{c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0, c_9 = 1, ...\}$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{|c_{k^2}|} = 1 \Rightarrow R = 1.$

11.6. Теорема 5. [Формула Коши-Адамара].

Если R - радиус сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, тогда $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$.

Доказательство: 1) $\{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ - неогр.

2) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = L > 0; \quad L \in R$

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0

1) Для бескон. числа номеров $k \in \mathbb{N}$

$|c_k z^k| > 1 \quad \forall z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$

$\Downarrow$

Не выполняется необходимое условие сходимости ряда

$\Downarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$

$\Downarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ только для $z = 0$

2) Докажем, что

а) $\forall z : |z| < \frac{1}{L}$ ряд сходится

б) $\forall z : |z| < \frac{1}{L}$ ряд расходится

а) $z : \quad |z| < \frac{1}{L}$ Тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : |z| < \frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{L}$

$\varepsilon > 0\ \exists\, k_0(\varepsilon) : \forall k \geqslant k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < L + \frac{\varepsilon}{2}$

$\sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ в круге $K = \{z : |z| < \frac{1}{L}\}$

б) $\forall z : |z| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : |z| > \frac{1}{L-\varepsilon} > \frac{1}{L}$

$[\ \exists\, \{c_{k_n}\} : \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L\ ] \overset{\text{def}}{=} [\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|}\,]$

$\sqrt[k_n]{|c_{k_n}| z^{k_n}} = |z| \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > \frac{1}{L-\varepsilon} \cdot (L - \varepsilon) = 1 \quad \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |c_k z^{k_n}| > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Не выполняется необходимых условий сходимости

$\Downarrow$

Ряд расходится $\forall z : |z| > \frac{1}{L}$

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0.

$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 : \frac{1}{2|z|} = \varepsilon : \quad \exists\, k_0(\varepsilon) : \forall k \geqslant k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{2|z|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[k]{|c_k| \cdot |z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} < |z| \cdot \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2} < 1$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$

11.7. Теорема 6.

Для рядов

$$\underset{1)}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}, \qquad \underset{2)}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{k+1}}{k+1}}, \qquad \underset{3)}{\sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}}$$

радиус сходимости один и тот же.

1) R_1, K_1

2) R_2, K_2

3) R_3, K_3

Надо доказать: $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Доказательство: $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 1 \leqslant k \quad \times |c_k z^{k+1}|$

$|\frac{c_k}{k+1} z^{k+1}| \leqslant |z| \cdot |c_k z^k| \leqslant |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|$

$$\underbrace{|z| \cdot |c_k z^k| \leqslant |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|}_{1)} \qquad \underbrace{|\frac{c_k}{k+1} z^{k+1}| \leqslant |z| \cdot |c_k z^k|}_{2)}$$

1) $\forall z \neq 0 \in K_3 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \Rightarrow R_1 \geqslant R_3$

2) $\forall z \neq 0 \in K_1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} < \infty \Rightarrow R_1 \leqslant R_2$

В результате: $R_3 \leqslant R_1 \leqslant R_2$

Надо доказать, что $R_2 \leqslant R_3$

$z \in K_2 \quad \exists\, \rho < R_2 : z \in K_\rho \quad |k c_k z^{k-1}| = |k c_k z^{k-1} \cdot \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{z^2}{z^2}| = |\frac{c_k}{k+1} \cdot z^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2}| = |\frac{c_k}{k+1} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2} \cdot \left(\frac{z}{\rho}\right)^{k+1}| \overset{\exists M>0}{\leqslant}$

$\leqslant \frac{M}{|z|^2} k(k+1) q_1^{k+1}$, где $|q_1| < 1 \quad q_1 = \frac{z}{\rho}$

$$\Downarrow \forall \in K_2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kc_k z^{k-1} < \infty \Rightarrow R_3 \geqslant R_2$$

Тогда в сумме $R_1 = R_2 = R_3 = R$

11.8. Теорема 7.

Если R - радиус степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x)$,

$x \in (a-R; a+R)$; $\quad a_k, a, x \in R$, то

1) f бесконечно дифф. на $(a-R; a+R)$

$f^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} k(k-1)...(k-(m-1))a_k(x-1)^{k-m}$

2) $\forall x \in (a-R; a+R) \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$

При почленном дифференцировании ряда радиус не меняется.

Доказательство: $\forall \rho : 0 < \rho < R$ на $[a-\rho; a+\rho]$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ всё можно делать.

Следствие: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

12. Билет 12

12.1. Степенные ряды с действительными членами.

Теорема:. Если R – радиус сходимости степенного ряда и выполнено следующее:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x),\ x \in (a-R, a+R),\ a_k, a \in (R)$$

то

1. f бесконечно дифференцируемая функция на $(a-R, a+R)$ и выполняется:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-(m-1))a_k(x-a)^{k-m}$$

2. $\forall\ x \in (a-R, a+R) \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$

Следствие. $a_n = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

12.2. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.

Покажем, что сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости.

Теорема:. Сумма степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ дифференцируема в интервале сходимости и производная равна

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1},$$

причём ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Члены ряда $c_n (x-x_0)^n$ являются непрерывно дифференцируемыми на всей числовой прямой функциями. Пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ и точка x принадлежит интервалу сходимости (x_0-R, x_0+R). Тогда существует отрезок $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$, включающий точку x.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. Вычислим его радиус сходимости R'

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|nc_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|c_n|} \cdot \sqrt[n-1]{n}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (|c_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}} = R$$

Таким образом, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ имеют одинаковый интервал сходимости, и, следовательно, на отрезке $[a,b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ сходится равномерно. По теореме о дифференцируемости суммы функционального ряда сумма степенного ряда $f(x)$ дифференцируема в точке x и верна формула

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$$

что полностью доказывает теорему. $\square$

Теперь в силу доказанной теоремы при дифференцировании суммы степенного ряда вновь получаем степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Это позволяет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема:. Сумма степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ дифференцируема любое количество раз и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$

причём радиусы сходимости всех получающихся рядов одинаковы.

Доказательство. По предыдущей теореме функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ дифференцируема и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$, причём радиусы сходимости обоих рядов совпадают. Далее, пусть существует

$$f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(x-x_0)^{n-k+1}$$

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x)$ предыдущую теорему, получаем, что $f^{(k-1)}(x)$ дифференцируема и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости рядов для $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$ совпадают. Тем самым, следуя методу математической индукции, полностью доказывает эту теорему. $\square$

12.3. Единственность представления функции степенным рядом.

Определение: Регулярная функция.

Пусть в каждой точке $z \in \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – множество точек комплексной плоскости, поставлено в соответствие комплексное число ω. На множестве $\mathbb{E}$ определена функция комплексного переменного, $\omega = f(z)$.

Если $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \sigma = \sigma_\epsilon > 0:\ \forall z\ :\ |z-a| < \sigma_\epsilon \longmapsto |f(z)-f(a)| < \epsilon$, то функцию $f(z)$ называют непрерывной в точке а.

И , наконец, Функция комплексного переменного $f(z)$ называется регулярной в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и представима в некотором круге $|z-a| < \rho$, $\rho > 0$, сходящимся к $f(z)$ степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (*)$.

Теорема [Единственность представления функции степенным рядом]:
Функция $f(z)$, регулярная в точке a, единственным образом представляется рядом (*).

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ имеет два представления в виде степенного ряда в круге $K = \{z : |z-a| < \rho\}$, где $\rho > 0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n}(z-a)^n \quad (**)$$

Теперь покажем, что $c_n = \widetilde{c_n}$, для $n = 0, 1, 2, \dots$

По условию ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n}(z-a)^n$ сходятся в круге K, и поэтому эти ряды сходятся равномерно в круге $K_1 = \{z : |z-a| \leqslant \rho_1 < \rho\}$, а их общая сумма – непрерывная в круге K_1 функция.В частности, функция $f(z)$ непрерывна в точке a. Подходя к пределу при $z \to a$ в равенстве (**), получаем $c_0 = \widetilde{c_0}$. Отбрасывая одинаковые слагаемые c_0 и $\widetilde{c_0}$ в равенстве (**), получаем после деления на $(z-a)$ равенство:

$$c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \ \cdots = \widetilde{c_1} + \widetilde{c_2}(z-a) + \widetilde{c_3}(z-a)^2 + \ \dots \ ,$$

которое справедливо в круге K с выколотой точкой a. Ряды в левой и правой части сходятся равномерно в круге K_1. Переходя в равенстве к пределу при $z \to a$, получаем $c_1 = \widetilde{c_1}$. Справедливость равенства $c_n = \widetilde{c_n}$ при любой $n \in (N)$ устанавливается при помощи индукции.

12.4. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

Теорема [Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к функции]:
Если f бесконечно дифференцируемая функция на $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$ и $\exists M > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \mapsto |f^{(k)}(x)| \leqslant M$, $k = 0{,}1,\dots$, то ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в каждой точке x нашего интервала:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ , \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Доказательство. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

$$\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ , где } \xi \text{ между } x \text{ и } a$$

$$|\mathbf{r}_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{т.к. } |x-a| \ \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|x-a|^k}{k!} = 0 \text{ , тогда справедливо следующее:}$$

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |\mathbf{r}_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{|\ x-a\ |^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \square \ .$$

12.5. Ряд Тейлора

Пусть функция f – бесконечно дифференцируема в точке a (т.е в этой точке у функции f существует производная любого порядка), тогда

Определение:. Рядом Тейлора функции f в точке a называется следующее выражение:

$$f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Замечание. Если функция регулярна в точке a, то она раскладывается в степенной ряд и этот степенной ряд и есть ряд Тейлора, однако не все функции раскладываются в степенной ряд, поэтому справедливо следующее выражение:

$$f(x)\neq f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ x\neq 0;\\ 0\ ,\ x=0\ .\end{cases}$$

Эта функция непрерывная в нуле. Найдем ее производные:

$$f^{'}(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{''}(x)=\left[\left(\frac{2}{x^3}\right)^2-\frac{6}{x^4}\right]\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{'''}(x)=\left[\left(\frac{2}{x^3}\right)^3-\frac{12}{x^7}-\frac{2^4}{x^4}+\frac{24}{x^5}\right]\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Таким образом $f^{(\mathrm{m})}(x)=Q_{3m}(\frac{1}{x})\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $Q_{3m}(\frac{1}{x})$ – многочлен степени $3m$ от $\frac{1}{x}$. Тогда понятно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(\mathrm{m})}(x)=\begin{cases} Q_{3m}(\frac{1}{x})\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ x\neq 0;\\ 0\ ,\ x=0\ .\end{cases}$$

Тогда $\forall x\neq a$ ряд Тейлора будет представлять собой нулевой ряд, хотя сама функция не нулевая $\Rightarrow f(x)\neq f(a)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. $\square$

12.6. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Функция f – бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a, тогда этой функции соответствует некоторый ряд:

$$f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Обозначение. $P_n(x)=f(a)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ – n-ая частичная суммма ряда Тейлора (многочлен Тейлора).

Тогда, если $\mathbf{r}_n(x) = f(x) - P_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то это означает, что ряд Тейлора сходится к функции f в точке x:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

<u>**Теорема:**</u>. Если $f^{(n+1)}$ непрерывна на $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, то:

1. $\mathbf{r}_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, т.е. её остаточный член на этом интервале представим в интегральной форме.
2. $\mathbf{r}_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Доказательство.

1. Доказательство будем проводить при помощи мат. индукции:

   (a) Мы знаем, что $f(x) - f(a) = \displaystyle\int\limits_a^x f^{'}(t)dt$. Тогда:

   $$\begin{cases} u = f^{'}(t)\ ,\ dv = dt \\ du = f^{''}(t)dt\ ,\ v = -(x-t),\ \text{x - это константа} \end{cases}$$

   получаем, что $f(x) - f(a) = -f^{'}(t)(x-t)\Big|_a^x + \displaystyle\int\limits_a^x (x-t)f^{''}(t)dt =$

   $= f^{'}(a)(x-a) + \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int\limits_a^x (x-t)f^{''}(t)dt \Rightarrow$

   $\Rightarrow f(x) = f(a) + \dfrac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int\limits_a^x (x-t)f^{''}(t)dt.$

   Получили при $n = 1$ остаточный член в интегральной форме (получена база индукции).

   (b) Предположим, что при $n-1$ верно, тогда найдем для n :

   $$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

   Тогда:

   $$\begin{cases} u = f^{n}(t)\ ,\ dv = (x-t)^{n-1}dt \\ du = f^{n+1}(t)dt\ ,\ v = -\frac{(x-t)^n}{n} \end{cases}$$

   получаем, что $f(x) = f(a)\ +\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\ -\ \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!}\Bigg|_a^x +\ \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-$ $t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Тогда получаем, что:

   $$f(x) = f(a)\ +\ \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\ \square$$

2. Это просто остаточный член в форме Лагранжа (доказывалось в прошлом семестре).

13. Билет 13

13.1. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

1. Показательная и гиперболические функции.

$$y = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$x \in (-\rho,\ \rho),\ \rho > 0$$

Поскольку $(e^x)^{(k)} = e^x$, то $0 < f(x) < e^\rho$ и $0 < f(x)^{(k)} < e^\rho$. Ряд Тейлора функции $y = e^x$ сходится к ней на $(-\rho,\ \rho)$ по теореме о достаточном условии представимости функции её рядом Тейлора.

$\forall \rho > 0 \Rightarrow R = +\infty$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y = \operatorname{sh} x,\ y = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ R = +\infty$$

2. Тригонометрические фунции.

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant 1,\ \forall k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},\ R = +\infty$$

3. Степенная функция.

$$y = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

1) $\alpha = 0,\ y = 1$

2) $\alpha = n,\ n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$ - бином Ньютона

3) α - произвольное, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$\mathrm{r}_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt$$

Пусть $t = x\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, тогда $dt = xd\tau$

$$\mathrm{r}_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\right)^n (1+x\tau)^{\alpha-1}d\tau$$

Пусть $|x| < 1$, тогда $|1+\tau x| \geqslant 1-\tau$

$$(1+x\tau)^{\alpha-1} \leqslant \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1 \\ (1-|x|), & \alpha < 1 \end{cases}$$

$|\alpha| \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n > m$

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \leqslant \frac{m(m+1)\dots(m+n}{n!} \leqslant \frac{(m+n)!}{n!} = \\ = (n+1)(n+2)\dots(n+m) \leqslant (2n)^m$$

В итоге

$$|\mathrm{r}_n(x)| \leqslant 2^m\beta(x)|x|\frac{n^m}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Так как

$$a = \frac{1}{|x|} > 1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^m}{a^n} = 0$$

Следовательно

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k,\ C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!},\ |x| < 1,\ R = 1$$

В частности:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,\ |x| < 1$$

4. Логарифмические функции.

$$y = \ln(1-x),\ y' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$y = \ln(1+x),\ y' = -\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

Раскладываем в интервалах сходимости каждую функцию в ряд Тейлора, а потом почленно интегрируем, и помним, что при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется.

$$y = \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},\ |x| < 1$$

$$y = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},\ |x| < 1$$

5. Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции можно разложить в ряд Тейлора, сначала продифференцировав и воспользовавшись известными результатами.

13.2. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Докажем, что

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},\ \ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad R = +\infty$$

Доказательство:
Так как $z = x + iy$ и по формуле Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i \sin y\right)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ \cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!},\ \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{iy} = cosy + i\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = e^{iy}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}$$

Докажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sum_{j=0}^{k}C_k^j z_1^j z_2^{k-j}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\cdot\frac{k!}{j!\cdot(k-j)!}z_1^j z_2^{k-j}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{z_1^j}{j!}\cdot\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!}=\frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^0}{0!}+\left(\frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^1}{1!}+\frac{z_1^1}{1!}\cdot\frac{z_2^0}{0!}\right)+$$
$$+\left(\frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_1^1}{1!}\cdot\frac{z_2^1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}\cdot\frac{z_2^0}{0!}\right)+\dots$$

Это можно проиллюстрировать следующим образом:

	u_0	u_1	u_2	u_3	$\dots$
v_0	$u_0\cdot v_0$	$u_1\cdot v_0$	$u_2\cdot v_0$	$\dots$	
v_1	$u_0\cdot v_1$	$u_1\cdot v_0$	$\dots$		
v_2	$u_0\cdot v_2$	$\dots$			
v_3	$\dots$				
$\dots$					

Мы обходим таблицу по диагоналям, так что сумма индексов элементов была константа для каждой группы слагаемых. Тогда действительно:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{z_1^j}{j!}\cdot\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_2^k}{k!}$$

Тогда по доказанной выше лемме:

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+iy)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Теперь

$$e^{iz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{-iz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}-i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Что и требовалось доказать.