Многомерный анализ, интегралы и ряды. Билеты.

Над файлом работали:
Баранников Андрей Б01-001
Дорин Даниил Б01-001
Киселев Никита Б01-001
Овсянников Михаил Б01-001
Панферов Иван Б01-001
Филиппенко Павел Б01-001
Курневич Станислав Б01-002
Лепарский Роман Б01-003
Артамонов Кирилл Б01-005
Белов Владислав Б01-005
Паншин Артём Б01-005
Глаз Роман Б01-007
Дурнов Алексей Б01-007
Талашкевич Даниил Б01-009
Фатыхов Тимур Б01-009

Version 4.5
Долгопрудный, 2021

Содержание

1 Билет 1 **4**
1.1 Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. . . 4
1.2 Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. 5
1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества. 8
1.4 Открытые и замкнутые множества, их свойства. 8
1.5 Внутренность, замыкание и граница множества. 11
1.6 Компакты. 11
1.7 Метрическое пространство. 11
1.8 Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в n–мерном евклидовом пространстве. 12

2 Билет 2 **14**
2.1 Предел числовой функции нелскольких переменных. 14
2.2 Предел функции по множеству. 15
2.3 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. . 16
2.4 Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). 17
2.5 Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области. . . 19

3 Билет 3 **20**
3.1 Частные производные функции нескольких переменных. 20
3.2 Дифференцируемость функции в точке 20
3.3 Достаточные условия дифференцируемости функции в точке 22
3.4 Дифференцируемость сложной функции 24
3.5 Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала отностительно замены переменных. 25
3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геомертический смысл. 26
3.7 Необходимые условия дифференцируемости 27

4 Билет 4 **29**
4.1 Частные производные высших порядков. 29
4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. 29
4.3 Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы. 31
4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных. 32

5 Билет 5 **33**
5.1 Необходимые определения и предложения билета. 33
5.2 Определение измеримости по Жордану множества в m-мерном евклидовом пространстве. 37
5.3 Критерий измеримости. 38
5.4 Примеры неизмеримых по Жордану множеств. 39
5.5 Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. . 39
5.6 Конечная аддитивность меры Жордана. 39
5.7 Измеримость и мера цилиндра в $(m + 1)$-мерном пространстве. 40

6 Билет 6 **41**
6.1 Определенный интеграл Римана. . . . 41
6.2 Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. . . . 42
6.3 Критерий интегрируемости функции. . . . 43
6.4 Классы интегрируемых функций. . . . 44

7 Билет 7 **46**
7.1 Некоторые свойства определенного интеграла. . . . 46
7.2 Оценки определенного интеграла. . . . 48
7.3 Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление определеннных интегралов. . . . 50

8 Билет 8 **54**
8.1 Геометрические приложения определенного интеграла. . . . 54
8.2 Вычисление площади поверхности вращения. . . . 55
8.3 Криволинейные интегралы первого рода. . . . 56
8.4 Несобственный интеграл. . . . 57
8.5 Несобственные интегралы от неотрицательных функций: . . . 58
8.6 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. . . . 59
8.7 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. . . . 59
8.8 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов. . . . 60

9 Билет 9 **62**
9.1 Числовые ряды. . . . 62
9.2 Критерий Коши сходимости ряда. . . . 63
9.3 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. . . . 64
9.4 Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. . . . 69
9.5 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. . . 72
9.6 Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда. . . . 72
9.7 Произведение абсолютно сходящихся рядов. . . . 73

10 Билет 10 **74**
10.1 Понятия функциональных последовательностей и рядов. . . . 74
10.2 Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве. . . . 75
10.3 Понятие равномерной сходимости на множестве. . . . 75
10.4 Критерий Коши равномерной сходимости. . . . 77
10.5 Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. . . . 78
10.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. . . . 79
10.7 Достаточные признаки сходимости функциональных рядов. . . . 82

11 Билет 11 **84**
11.1 Степенные ряды с комплексными числами . . . 84
11.2 Теорема 1. [Первая теорема Абеля] . . . 84
11.3 Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда]. . . . 85
11.4 Теорема 3. [Вторая теорема Абеля]. . . . 86
11.5 Теорема 4. . . . 87
11.6 Теорема 5. [Формула Коши-Адамара]. . . . 87

11.7 Теорема 6. 88
11.8 Теорема 7. 89

12 Билет 12 **90**
12.1 Степенные ряды с действительными членами. 90
12.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. 90
12.3 Единственность представления функции степенным рядом. 91
12.4 Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд 92
12.5 Ряд Тейлора 92
12.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. 93

13 Билет 13 **95**
13.1 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. 95
13.2 Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z. 97

1. Билет 1

Введем понятия:

1. $\mathbb{R}^m$ – m-мерное координатное пространство.

2. Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – точка m-мерного пространства, $x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, m$ – координата точки.

3. $x, y \in \mathbb{R}^m$; $\rho_e(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2}$ – расстояние между точками x и y.

4. $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e)$ – m-мерное евклидово пространство.

5. $\mathscr{M} = (M, \rho)$ – метрическое пространство, где $M \subset \mathbb{R}^m$ – некоторое множество, $\rho(x, y)$ – функция, задающая расстояние между точками x, y множества M (метрика).

6. $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ – m-мерный шар с центром в точке x_0 и радиусом ε (шаровая ε-окресность точки x_0).

7. $\Pi_{r_1, r_2, \ldots r_m}(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r_j,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$ – m-мерный прямоугольник с центром x_0 и сторонами $2r_1, 2r_2, \ldots, 2r_m$.

8. $\Pi_r(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r\}$ – m-мерный квадрат с центром в точке x_0 и стороной $2r$.

Предложение:

1. В любую шаровую окрестность можно вписать прямоугольную окрестность.

2. В любую прямоугольную окрестность можно вписать шаровую окрестность.

Доказательство: Пусть $B_\varepsilon(x_0),\ \Pi_r(x_0)$ – шаровая и прямоугольная окрестности точки x_0, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Везьмем $\delta = min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, тогда:

1. $\Pi_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0), \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

2. $B_\varepsilon(x_0) \subset \Pi_\delta(x_0), \quad \delta = \varepsilon$.

1.1. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве.

Обозначим $\mathscr{M} = (M, \rho)$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек в $\mathscr{M}$.

Определение: Последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ точек метрического пространства сходится к точке $a \in \mathscr{M}$, если:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^n, a) = 0$$

$$[\lim_{n\to\infty} x^n = a] \overset{\text{def}}{=} [\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon]$$

Любой шар с центром в точке a и радиусом ε содержит все члены последовательности $\{x^n\}$ за исключением быть может конечного числа N.

Лемма: Сходящаяся последовательность точек ограничена.

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

где $y_n = \rho(x^n, a)$. Тогда $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ – ограничена, т. е. $\exists\ C > 0\ :\ 0 \leqslant y_n = \rho(x^n, a) \leqslant C$.

Лемма: Сходящаяся последовательность точек имеет единственный предел.

Доказательство: Будем доказывать от противного: предположим, что

$$\exists\ a \neq b : \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} x^n = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 = N_1(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N_1 \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(2)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_2 = N_2(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N_2 \mapsto \rho(x^n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N\ :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(a, b) \leqslant \rho(x^n, a) + \rho(x^n, b) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что $\rho(a, b) = 0\ \Rightarrow\ a = b$ – противоречие.

1.2. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ ограничена, если $\exists R > 0\ \forall n \mapsto \rho(x^n, 0) \leqslant R$.

Теорема: Пусть $\{x^n\} = \{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_m^n\} \subset \mathbb{E}^m$ – последовательность точек m-мерного евклидового пространства, а $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{E}^m$ – точка m-мерного евклидового пространства, тогда

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ \Leftrightarrow\ \forall j\ x_j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_j$$

Доказательство:
Необходимость $(\Rightarrow)$

По условию дано:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j^n - a_j)^2} \Rightarrow |x_j^n - a_j| \leqslant \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Таким образом получаем:

$$[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N\ \ \&\ \ \forall j = 1, 2, \ldots, m \mapsto |x_j^n - a_j| < \varepsilon] \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} x_j^n = a_j$$

Достаточность ($\Leftarrow$)

Запишем определение покоординатной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_j = N_j(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N_j \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Пусть $N = max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ для всех j.

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j^n - a_j)^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a$$

Теорема [Теорема Больцано-Вейерштрасса]: Из любой ограниченной последовательности $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \subset \mathbb{E}^m$.

Доказательство:

$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ является ограниченной $\overset{def}{\Rightarrow} \exists R > 0\ \forall n \mapsto \rho_e(x^n, 0) \leqslant R$. Тогда для всех j последовательность $\{x_j^n\}$ так же ограничена (x_j^n – j-ая компонента).

$\{x_1^n\}$ ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности существует подпоследовательность $\{x_1^{k_{n_1}}\}$ такая, что $x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow[n_1\to\infty]{} a_1$.

Возьмём подпоследовательность $\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m$ (по номерам k_{n_1} выбираем из последовательности $\{x^n\}$ точки). И рассмотрим числовую последовательность $\{x_2^{k_{n_1}}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности) и следовательно, по теореме Больцано-Вейерштраса существует подпоследовательность $\{x_2^{k_{n_2}}\}$ такая, что $x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_2$. При этом все еще справедливо $x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_1$.

$$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_1^n\} \Rightarrow \{x_1^{k_{n_1}}\} \Rightarrow x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow[n_1\to\infty]{} a_1$$

$$\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_2^{k_{n_1}}\} \Rightarrow \{x_2^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_2 \\ x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow[n_2\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

$$\{x^{k_{n_2}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_3^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \{x_3^{k_{n_3}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_3^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_3 \\ x_2^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_2 \\ x_1^{k_{n_3}} \xrightarrow[n_3\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\{x^{k_{n_{m-1}}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_m^{k_{n_{m-1}}}\} \Rightarrow \{x_m^{k_{n_m}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a_m \\ \dots \\ x_1^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a_1 \end{cases}$$

Таким образом мы нашли подпоследовательность $\{x^{k_{n_m}}\} \subset \mathbb{E}^m$ такую, что $x^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m\to\infty]{} a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Определение: Последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N\ \&\ \forall k \geqslant N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$.

Определение: Метрическое пространство $\mathscr{M}$, в котором любая фундаментальная последовательность точек $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ является сходящейся, называется *полным*.

Теорема [Критерий Коши]: для того, чтобы последовательность $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:
Необходимость ($\Rightarrow$)

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$\forall n \geqslant N \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geqslant N \mapsto \rho(x^k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x^n, x^k) \leqslant \rho(x^n, a) + \rho(x^k, a) < \varepsilon$$

Достаточность ($\Leftarrow$)
Докажем, что евклидово пространство $\mathbb{E}^m$ является полным, то есть любая фундаментальная последовательность этого пространства является сходящейся.

Рассмотрим последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$, которая является фундаментальной. Распишем по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N\ \ \&\ \ \forall k \geqslant N \longmapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Воспользуемся утверждением:

$$\forall j \longmapsto |x_j^n - x_j^k| \leqslant \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что последовательность $\{x_j\}$ является фундаментальной, отсюда, по теореме Коши для обычной числовой последовельности, она являтся сходящейся, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) :\ |x_j - a_j| < \varepsilon$$

Последовательность $\{x^n\} \subset \mathscr{M}$ имеет покоординатную сходимость, а этого, как известно, достаточно для сходимости последовательности $\{x^n\}$.

Замечание: Таким образом, мы доказали, что **в евклидовом пространстве** справедлив критерий Коши.

Замечание: Для произвольных метрик может существовать последовательность, которая является фундаментальной, но при этом не сходится.

Контрпример: Рассмотрим метрическое пространство $\mathscr{M} = (\mathbb{Q}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Рассмотрим последовательность $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. Данная последовательность является фундаментальной, но при этом не является сходящейся в $\mathscr{M}$.

1.3. Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *внутренней точкой множества*, если существует $B_r(x_0) : B_r(x_0) \subset X$.

Определение: точка x_0 называется *предельной точкой множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность точки x_0 содержит по крайней мере одну точку множества X, отличную от x_0.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \neq x_0\ \ \&\ \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 множества $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *изолированной точкой множества*, если у этой точки существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества X.

$$\exists\ r > 0 : \forall x \in B_r(x_0) :\ x \neq x_0 \mapsto x \notin X$$

Определение: точка x_0 называется *точкой прикосновения множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества X.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X\ :\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Определение: точка x_0 называется *граничной точкой множества* $X \subset \mathscr{M} = (M, \rho)$, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x'_\varepsilon \in X\ \&\ x''_\varepsilon \notin X : x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

1.4. Открытые и замкнутые множества, их свойства.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *открытым*, если любая его точка внутренняя.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Теорема: открытые множества метрического пространства $\mathscr{M}$ обладают следующими свойствами:

1. $\mathscr{M}, \varnothing$ – открытые множества.

2. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ – объединение любого числа открытых множеств X_α есть открытое множество.

3. $\bigcap\limits_{j=1}^{K} X_j$ – пересечение конечного числа открытых множеств X_j есть открытое множество.

Доказательство свойства 2: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, тогда существует множество X_{α_0}, такое что $x \in X_{\alpha_0}$. Но X_{α_0} – открытое множество (по условию), поэтому $\exists\ \varepsilon_0 : B_{\varepsilon_0}(x) \subset X_{\alpha_0} \subset X$, таким образом, получается, что любая точка множества X входит в него с некоторой ε-окрестностью, это значит, что X – открытое множество.

Доказательство свойства 3: Возьмём произвольную точку $x \in X = \bigcap\limits_{j=1}^{K} X_j$, тогда $x \in X_j,\ j = 1, 2, \ldots, K$. Но каждое X_j – открытое множество, поэтому $\forall\ j\ \exists\ \varepsilon_j : B_{\varepsilon_j}(x) \subset X_j$. Пусть $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_K\}$, тогда $\forall\ j\ B_\varepsilon(x) \subset X_j \ \Rightarrow\ B_\varepsilon(x) \subset X$, это значит, что X – открытое множество.

Теорема:

1. $Y \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \backslash X_\alpha)$
2. $Y \backslash (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \backslash X_\alpha)$

Доказательство (1):
Пусть $x \in Y \backslash \left(\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Rightarrow [x \in Y]\ \&\ \left[x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \right] \Rightarrow \exists\ \alpha' \in A :\ x \notin X_{\alpha'}$.
Пусть $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \backslash X_\alpha) \Rightarrow \exists\ \alpha' :\ x \in Y \backslash X_{\alpha'} \Rightarrow [x \in Y]\ \&\ [x \notin X_{\alpha'}]$.

Таким образом в обоих случаях мы приходим к тому, что $\exists\ \alpha' \in A : [x \in Y]\ \&\ [x \notin X_{\alpha'}]$.

Доказательство (2): Проводим аналогичные рассуждения.

Теорема: множество X метрического пространства $\mathscr{M}$ является замкнутым $\Leftrightarrow CX = \mathscr{M} \backslash X$ – открытое множество. Причем CX называется *дополнением множества* X.

Доказательство:
Необходимость ($\Rightarrow$)

Доказываем от противного: предположим, что CX не является открытым множеством $\Rightarrow \exists\ x_0 \in CX :\ x_0$ не является внутренней точкой $CX \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \neq x_0 :\ x_\varepsilon \notin CX\ \&\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

тогда x_0 по определению является предельной точкой множества X и при этом $x_0 \notin X$ (т. к. $x_0 \in CX$); получается, что существует предельная точка множества X, не лежащая в этом множестве, но по условию X – замкнутое множество, а значит сожержит все свои предельные точки, таким образом приходим к противоречию.

Достаточность ($\Leftarrow$)

Доказываем от противного: предположим, что X не является замкнутым множеством, тогда:

$$\exists\, x_0 \notin X:\ x_0 - \text{предельная точка множества } X$$

По определению предельной точки:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \neq x_0:\ x_\varepsilon \in X\ \&\ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Тогда любой шарик $B_\varepsilon(x_0)$ с радиусом $r = \varepsilon$ и центром в точке x_0 не содержится в $CX\ \Rightarrow x_0$ не является внутренней точкой множества CX, но при этом $x_0 \in CX$, поскольку $x_0 \notin X$; однако, поусловию CX – открытое множество, а значит должно содержать все свои внутренние точки. Таким образом, приходим к противоречию.

Теорема: замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1. $\mathscr{M}, \varnothing$ – замкнутые множества.
2. $\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ – пересечение любого числа замкнутых множеств X_α есть замкнутое множество.
3. $\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j$ – объединение конечного числа замкнутых множеств X_j есть замкнутое множество.

Доказательство свойства 2: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X: рассмотрим $C(\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \mathscr{M}\backslash(\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(\mathscr{M}\backslash X_\alpha)$. X_α – замкнутое множество $\Rightarrow \mathscr{M}\backslash X_\alpha$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A}(\mathscr{M}\backslash X_\alpha) = C(\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ – замкнутое множество.

Доказательство свойства 3: Воспользуемся теоремой о дополнении множества X: рассмотрим $C(\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j) = \mathscr{M}\backslash(\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{K}(\mathscr{M}\backslash X_j)$. X_j – замкнутое множество $\Rightarrow \mathscr{M}\backslash X_j$ – открытое множество $\Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{K}(\mathscr{M}\backslash X_j) = C(\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j)$ – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества $\bigcup\limits_{j=1}^{K} X_j$ – замкнутое множество.

Замечание:

1. Если X – открытое множество, то $X = intX$.
2. Если X – замкнутое множество, то $\overline{X} = X$.
3. Пусть G – открытое множество, тогда в общем случае $int(\overline{G}) \neq G$.
4. Пусть F – замкнутое множество, тогда в общем случае $\overline{intF} \neq F$.

1.5. Внутренность, замыкание и граница множества.

Определение: $intX$ – совокупность всех внутренних точек множества $X \subset \mathscr{M}$ называется *внутренностью множества* X.

Определение: $\overline{X}$ – *замыкание множества* $X \subset \mathscr{M}$ – операция присоединения к множеству X всех его предельных точек.

Определение: ∂X – граница множеcтвва X – совокупность всех граничных точек множества X.

1.6. Компакты.

Определение: Множество $X \subset \mathscr{M}$ называется *компактом*, если если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству X.

$$\forall \{x^n\} \subset X \; \exists \{x^{k_n}\} \subset X : \lim_{n\to\infty} x^{k_n} = a \in X$$

Определение: Множество $X \subset \mathbb{R}^m$, любые 2 точки которого можно соеденить лежащей в нем непрерывной кривой, называется *линейно связным* (непрерывной кривой в m-мерной пространстве). («Введение в математический анализ.» Л. Д. Кудрявцев том 2).

Определение: Множества X_1 и X_2 метрического пространства $\mathscr{M}$ называются *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Определение: Множество X метрического пространства $\mathscr{M}$ называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

Определение: Открытое связное множество называется *областью*.

1.7. Метрическое пространство.

Определение: Пусть M – произвольное множество, для любых точек $x, y \in M$ поставим в соответствие число $\rho(x,y) \geqslant 0$ такое что

1. $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$

тогда $\mathscr{M} = (M, \rho)$ называется *метрическим пространством*, а функция $\rho(x,y)$ – его метрикой.

Теорема [Неравенство Коши-Буняковского]: для любых точек $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j b_j\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

Доказательство: Рассмотрим многочлен:

$$p(z) = \sum_{j=1}^{m} (a_j + b_j z)^2 = A + 2Bz + Cz^2$$

$$A = \sum_{j=1}^{m} a_j^2; \quad B = \sum_{j=1}^{m} a_j b_j; \quad C = \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

Заметим, что при любых значениях z многочлен $p(z) \geqslant 0$, поскольку является суммой неотрицательных членов, тогда справедливо $B^2 - AC \leqslant 0 \Rightarrow B^2 \leqslant AC$ (дискриминант квадратного уравнения, деленный на 4). Подставляя A, B, C получаем исходное неравенство.

Теорема [Неравенство Минковского]: для любых $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ справедливо:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m} (a_j + b_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}$$

Доказательство:

$$\sum_{j=1}^{m} (a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 + 2\sum_{j=1}^{m} a_j b_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^2$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^2 + 2\sum_{j=1}^{m} a_j b_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 \overset{\text{К-Б}}{\leqslant} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2} + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}\right)^2$$

Свернём правую чать по формуле квадрата суммы и получим:

$$\sum_{j=1}^{m} (a_j + b_j)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{m} b_j^2}\right)^2$$

Примеры метрических пространств:

$$\mathscr{M} = (M, \rho), \ \rho = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

$$\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e), \ \rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2}$$

$$\mathscr{M} = (\mathbb{R}^m, \rho_1), \ \rho_1(x, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j - y_j|$$

1.8. Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в n–мерном евклидовом пространстве.

Определение: Множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется ограниченным, если существует m-мерный шар $B_R(0)$ такой, что $X \subset B_R(0)$ («Курс математического анализа» Л. Д. Кудрявцев том 2).

Теорема: $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом $\Leftrightarrow X$ – ограниченное и замкнутое множество.

Доказательство:
Необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ является компактом, докажем, что X является замкнутым множеством. Возьмём произвольную предельную точку a множества X и будем рассматривать её окрестности: $B_{\frac{1}{n}}(a)$:

$$r_1 = 1, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_1 \neq a : x_1 \in X \ \&\ x_1 \in B_1(a)$$
$$r_2 = \tfrac{1}{2}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_2 \neq a : x_2 \in X \ \&\ x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(a)$$
$$\dots$$
$$r_n = \tfrac{1}{n}, \text{ тогда по определению предельной точки } \exists\, x_n \neq a : x_n \in X \ \&\ x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$$
$$\dots$$

Таким образом, мы построили последовательность точек $\{x^n\} \subset X$ такую, что выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \frac{1}{\varepsilon} :\ \forall n \geqslant N \mapsto \rho(a, x^n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

или, что то же самое:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a$$

но, по условию, X – компакт, а значит $a \in X$, таким образом, в силу произвольности точки a, компакт X содержит все свои предельные точки, а значит, является замкнутым множеством.

Заметим, что неограниченное множество X не может быть компактом, так как в неограниченном множестве можно построить последовательность точек, которая не будет являться сходящейся.

Достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $X \subset \mathbb{E}^m$ – ограниченное, замкнутое множество. Возьмём последовательность точек $\{x^n\} \subset X$, по теореме Больцано-Вейерштраса, в силу ограниченности этой последовательности, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, в силу замкнутости множества $a \in X$, но тогда получается, что X – компакт.

2. Билет 2

2.1. Предел числовой функции нелскольких переменных.

Обозначения: $\mathscr{M} = (\mathbb{M}, \rho)$, $a \in \mathscr{M}$, $\mathscr{U}(a)$, $w = f(x)$ - некоторая функция, заданная в $\mathscr{U}$(a), за исключением, быть может, самой точки a.

Определение (по Гейне):
$[\lim\limits_{x\to a} f(x) = b] \overset{def}{=} \left[\forall \{x^n\} : [x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a] \;\&\; [x^n \neq a \;\forall n] \mapsto w^n = f(x^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b\right]$.

Определение (по Коши):
$[\lim\limits_{x\to a} f(x) = b] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x :\; 0 < \rho(x, a) < \delta] \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$.

Пример:

$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\ ,$$

$$x^2 + y^2 \neq 0,\ \vec{0} = (0, 0)$$

$$[\lim_{(x,y)\to\vec{0}} f(x, y) - \text{не существует}]$$

Рассмотрим последовательности:

$$\{z^n\}' = \{(x^n, y^n)\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\{z^n\}'' = \{(x^n, y^n)\} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}'', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Однако $f(\{z^n\}') = 1, \quad f(\{z^n\}'') = -1$. Поэтому предел функции $f(x, y)$ в точке $\vec{0} = (0, 0)$ не существует.

Предложение: Пусть $a \in \mathscr{M}$ и $w = f(x)$, $w = g(x)$ определены в $\mathscr{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = b \pm c$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$$

.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{b}{c},\ c \neq 0$$

.

Доказательство аналогично доказательству для функций одной переменной.

Определение: Функция $\alpha = \alpha(x)$, определенная в $\mathscr{U}(a)$, за исключением, быть может, самой точки a, называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Предложение:

$[f(x) : \lim\limits_{x\to a} f(x) = b] \Rightarrow [\alpha = \alpha(x) = f(x) - b -$ бесконечно малая при $x \to a]$.

2.2. Предел функции по множеству.

Обозначения: a - предельная точка множества $A \subset \mathscr{M}$, $w = f(x)$ определена в A.

Определение: Предел функции по множеству:

$$[\lim_{x \xrightarrow[x\in A]{} a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : \; 0 < \rho(x,a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

Обозначения: $D \subset \mathbb{E}^m$ - неограниченное множество. $w = f(x)$ - определена на D.

Определение: Предел функции при $x \to \infty$:

$$[\lim_{x\to\infty} f(x) = b] \stackrel{def}{=} \left[\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D : \rho(x, \vec{0}) > \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon\right]$$

Здесь $\vec{0} = (0, ..., 0)_m$.

Определение: Пусть функция $w = f(x)$ определена на множестве $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$ и $\forall x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1),\; x \neq x_0 \; \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x,y)$ существует повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = b$. Пусть $\forall y \in (y_0 - r_2, y_0 + r_2),\; y \neq y_0 \; \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \psi(y) = c$. Тогда говорят, что у функции $w = f(x,y)$ существует повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = c$.

Замечание: Из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов. А из существования и равенства повторных пределов не следует существования предела в точке.

Примеры:

1.
$$w = f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

Но предел функции в точке $(0,0)$ не существовует.

2.
$$w = f(x,y) = \begin{cases} x \cdot sin\left(\frac{1}{y}\right), \; y \neq 0 \\ 0, \; y = 0 \end{cases}$$

$|f(x,y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$

$[\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : \; 0 < \rho(x,a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$

$\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[y\neq 0]{} \vec{0}} f(x,y) = 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, однако

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ – не существует.

Предложение: Пусть $w = f(x,y)$ определена в $\prod_r(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x-x_0| < r_1,\ 0 < |y-y_0| < r_2\}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$. Пусть, кроме того, $\forall x:\ 0 < |x-x_0| < r_1\ \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ и $\forall y:\ 0 < |y-y_0| < r_2\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$. Тогда повторные пределы существуют и равны числу b.

2.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Определение: Функция $w = f(x)$, определенная в $\mathscr{U}(a) \subset \mathscr{M}$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Обозначения: $w = f(x)$ определена на $A \subset \mathscr{M}$ и a предельная точка множества A.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке a по множеству A, если $\lim\limits_{x\xrightarrow[x\in A]{}a} f(x) = f(a)$.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathscr{M}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbb{X}$ по множеству $\mathbb{X}$.

Предложение:

$$[f - \text{непрерывна в точке } a \in \mathscr{M}] \Leftrightarrow [\Delta f(x) = f(x) - f(a) - \text{бесконечно малая при } x \to a]$$

Обозначения:

$$w = f(x),\ x \in \mathbb{E}^m; \quad \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = f({x_1}^0, ..., {x_{k-1}}^0, {x_k}^0 + \Delta x_k, {x_{k+1}}^0, ..., {x_m}^0) - f(x^0)$$

Частичное приращение функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = ({x_1}^0, ..., {x_m}^0)$ соответствуют приращению Δx_k аргумента x_k.

Определение: Функция $w = f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 по переменной x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0} \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = 0$.

Замечание: Из непрерывности функции $w = f(x)$ в точке $x^0 = ({x_1}^0, ..., {x_m}^0)$ следует непрерывность функции по каждой переменной, но из непрерывности функции по каждой переменной не следует непрерывность функции в точке.

Контрпримеры:

1.
$$w = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0; \\ 0,\ x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
$$\Delta_x f(\vec{0}, x) = \Delta_y f(\vec{0}, y) = 0.$$

Функция непрерывна в точке $\vec{0} = (0,0)$ по переменной x и по переменной y. Однако пусть $y = kx$, тогда:

$\lim\limits_{(x,y)\to\vec{0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$, при $k \neq 0$. Поэтому функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $\vec{0}$.

2.

$$w = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

Функция f непрерывна в точке $\vec{0}$ по переменной x и по переменной y, непрерывна по множеству $y = kx$, однако не является непрерывной в точке $\vec{0}$ по множеству $y = x^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to\vec{0}} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$.

2.4. Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора).

Предложение: Пусть функции $w = f(x)$ и $w = g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathscr{M}$. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ - непрерывны в точке a, в случае частного $g(a) \neq 0$.

Обозначения: $x \in \mathbb{E}^m$, $x_j = \varphi_j(t)$, $t \in T \subset \mathbb{E}^k$, $j = 1, ..., m$; $\forall t \in T \subset \mathbb{E}^k \mapsto x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$.

Теорема [О непрерывности суперпозиции функций]: Пусть функция $x_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, ..., m$, непрерывна в точке a, функция f – непрерывна в точке $b = (b_1, ..., b_m)$, причем $b_j = \varphi_j(a)$, $j = 1, ..., m$. На $T \subset \mathbb{E}^k$ определена сложная функция

$$F(t) = f(\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t))$$

Тогда функция $F(t) = f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t))$ непрерывна в точке a.

Доказательство:

$$[w = f(x) \text{ непрерывна в точке } b] \overset{def}{=}$$
$$[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x :\ \rho(x,b) < \delta] \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon]$$

$$[\varphi_j \text{ непрерывна в точке } a,\ j = 1, ..., m] \overset{def}{=} [\forall \delta > 0\ \exists \sigma_j = \sigma_j(\varepsilon) > 0,$$
$$j = 1, ..., m : [\forall t :\ \rho(t,a) < \sigma_j] \mapsto |\varphi_j(t) - \varphi_j(a)| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}]$$

$$\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) = min\{\sigma_1, ..., \sigma_m\} \Rightarrow \forall t : \rho(t,a) < \sigma \Rightarrow |x_j - b_j| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}$$

$$\rho(x,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j - b_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta^2}{m}} = \delta \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) - f(\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a))| < \varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(a)| < \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0 : [\forall t :\ \rho(t,a) < \sigma] \mapsto |F(t) - F(a)| < \varepsilon] \overset{def}{=} [F(t) - \text{непрерывна в точке а.}]$$

Теорема [О локальном сохранении знака непрерывной функции]: пусть $w = f(x)$ определена на $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и непрерывна в точке $x = a$, $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x : \rho(x, a) < \delta \mapsto f(x) \cdot f(a) > 0$.

Доказательство: используется "ε - δ" определение непрерывности функции функции в точке и выбором $0 < \varepsilon < |f(a)|$.

Теорема Вейерштрасса: Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда она ограничена на $\mathbb{X}$ и достигает на $\mathbb{X}$ своих верхней и нижней граней.

Доказательство(по Бесову): проведем доказательство лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для одномерного случая: $\mathbb{X} = [a,\ b]$.

Пусть $B := \sup\limits_{\mathbb{X}} f \leq +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^n\},\ x^n \in \mathbb{X}\ \forall n \in \mathbb{N}$ такая, что

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = B$. Последовательность $\{x^n\}$ ограничена в силу ограниченности множества $\mathbb{X}$. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса выделим из $\{x^n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^0 = \lim\limits_{k\to\infty} x^{n_k}$. Точка x^0 принадлежит $\mathbb{X}$ в силу замкнутости $\mathbb{X}$. Следовательно, f непрерывна в точке x^0 по множеству $\mathbb{X}$.

Теперь из соотношений

$$f(x^{n_k}) \to B,\ f(x^{n_k}) \to f(x^0) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^0) = B$, т.е. что верхняя грань функции f достигается в точке $x^0 \in \mathbb{X}$, Следовательно, верхняя грань $\sup\limits_{\mathbb{X}} f$ конечна, а функция f ограничена сверху на $\mathbb{X}$.

Аналогично доказывается, что функция f достигает своей нижней грани на $\mathbb{X}$ и ограничена снизу на $\mathbb{X}$. Теорема доказана.

Определение: функция f называется равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{X} \subset \mathscr{M}$, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что для всех точек $x',\ x" \in \mathbb{X}$, таких, что $\rho(x',\ x") < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x")| < \varepsilon$.

На языке кванторов: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x',\ x" \in \mathbb{X},\ \rho(x', x") < \delta \mapsto |f(x') - f(x")| < \varepsilon$

Теорема [Теорема Кантора]: Пусть функция f непрерывна на компакте $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$. Тогда f равномерно непрерывна на $\mathbb{X}$.

Доказательство(по Бесову): Предположим, что теорема неверна, то есть, что существует f, непрерывная, но не равномерно непрерывная на $\mathbb{X}$. Тогда:
$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x,\ y \in \mathbb{X} :\ \rho(x, y) < \delta :\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$
Будем в качестве δ брать $\delta_n = \frac{1}{n}$ и обозначать через $x^n,\ y^n$ соответствующую пару точек $x,\ y$. Тогда имеем:

$$x^n,\ y^n \in \mathbb{X},\ \rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n},$$

$$|f(x^n) - f(y^n)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности x^n сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{n_k} = x^0$, что возможно по теореме Больцано-Вейерштрасса в силу ограниченности x^n. Тогда из

$\rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{n_k} = x^0$. Точка $x^0 \in \mathbb{X}$, так как $\mathbb{X}$ замкнуто. В силу непрерывности f в точке x^0 по множеству $\mathbb{X}$ имеем: $f(x^{n_k}) \to f(x^0),\ f(y^{n_k}) \to f(x^0)$ при $k \to \infty$, так что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \le |f(x^{n_k}) - f(x^0)| + |f(y^{n_k}) - f(x^0)| \to 0, \text{ при } k \to \infty$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \ge \varepsilon_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Теорема доказана.

2.5. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Теорема [Прохождение непр. функции через промежуточные значения]:

Пусть функция $w = f(x)$ непрерывна на линейно связном множестве $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m,\ a,\ b \in \mathbb{X}\ \ f(a) = A,\ f(b) = B$. Пусть число C лежит между числами A и B. Тогда на любой кривой соединяющей точки a и b и лежащей в $\mathbb{X}$, найдется точка c, такая, что $f(c) = C$.

Доказательство: Пусть $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{E}^1$, $x_j = \varphi_j(t)$, $\varphi_j(\alpha) = a_j$, $\varphi_j(\beta) = b_j$, $j = 1, ..., m$; $a = (a_1, ..., a_m)$, $\quad b = (b_1, ..., b_m)$, $\quad \varphi_j$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

$$\Gamma = \{\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$$

соединяющая точки a и b, $\Gamma \subset \mathbb{X}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $F(t) = f(\varphi_1(t),\ ...,\ \varphi_m(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции функций $F(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$ $F(\alpha) = A,\ F(\beta) = B \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha, \beta):\ F(\gamma) = C$ (т. Больцано - Коши). Тогда $c = (\varphi_1(\gamma),\ ...,\ \varphi_m(\gamma)) \Rightarrow f(c) = C$.

3. Билет 3

3.1. Частные производные функции нескольких переменных.

Определение: f определена $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Если существует и конечен $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = b \in R$, то этот предел называется частной производной функции $w = f(x)$ в точке a по аргументу x_k.

Обозначение. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ или f'_{x_k}

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

(Только на месте k-ого аргумента есть приращение).

Замечания.

1. При вычислении $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ вычисляется как для функций одной переменной x_k при фиксированных остальных переменных (остальные переменные – постоянные).

2. $\left[\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, m\right] \not\Rightarrow [f$ непрерывна в точке a$]$

Контрпример.

$$\omega = f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

Однако, f не является непрерывной в точке $(0, 0)$, т.к. в этой точке у нее не существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3. Определение частной производной функции $w = f(x)$ дано для внутренней точки множества определения функции. Оно не пригодно для граничной предельной точки множетсва, поскольку в граничной точке не всегда можно определить частное приращение. Поэтому частная производная в граничной предельной точке множества определения функции находиться как предел частной производной по множеству.

Точка $a \in X$ – предельная граничная точка.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2) \\ (x,y)\in X}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2) \\ (x,y)\in X}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

3.2. Дифференцируемость функции в точке

Некоторые замечания, которые нужны для определения дифференцируемости функции в точке:

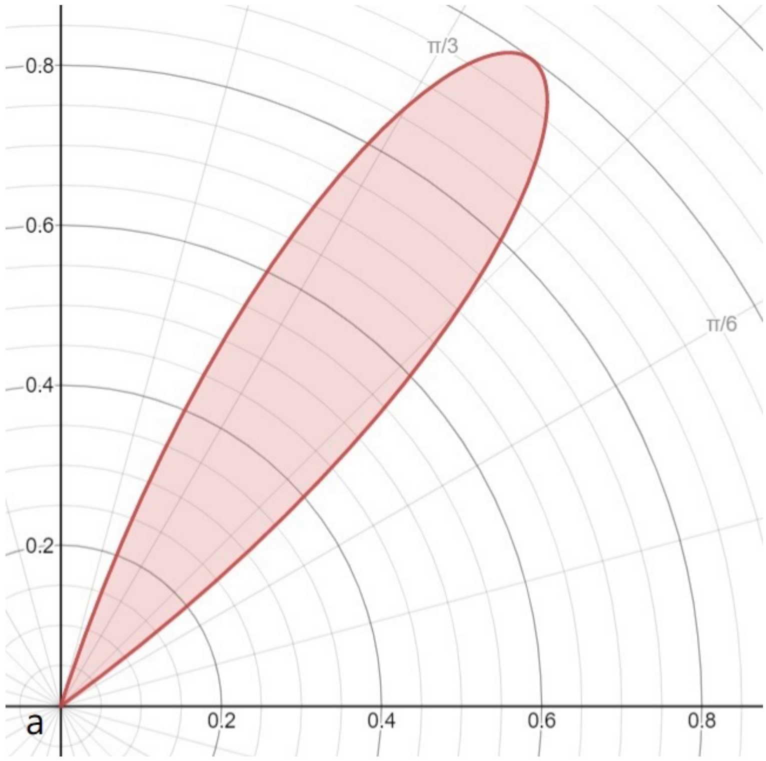


Рис. 1: Пример того, как частную производную следует искать как предел по множеству в точке a.

Рассмотрим $w = f(x)$, она определена в $\mathscr{U}(a), a = (a_1, \ldots, a_m), \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$: $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_m + \Delta x_m) \in \mathscr{U}(a)$

Рассмотрим $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$, $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to \bar{0}$, где $\bar{0} = \overbrace{(0, 0 \ldots, 0)}^{m}$.

$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$ – Полное приращение функции в точке а, соответствующее приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$.

Определение: Функция f называется дифференцируемой в точке а, если
Условие 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

где A_j – постоянные, $j = 1, \ldots, m$, не зависят от Δx, $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x)$ – б.м. функции при $\Delta x \to 0$; $\alpha_j = 0$ при $\Delta x = \bar{0}$.

Условие 2:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho), \rho \to 0$$

(По сути ρ – расстояние от точки Δx до $\bar{0}$).

Предложение. Условия 1 и 2 определения дифференцируемости функции в точке эквиваленты.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$
Покажем, что $\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m = o(\rho),\ \rho \to 0,\ \rho \neq 0$.

Заметим, что

$$\left|\frac{\Delta x_j}{\rho}\right| \le 1,\ \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$$

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots \alpha_m \Delta x_m| \le \rho \cdot (|\alpha_1|\frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \ldots + |\alpha_m|\frac{|\Delta x_m|}{\rho}) \le \rho \cdot (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|)$$

В силу того, что $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to \bar{0}$, $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|$ также стремиться к нулю, как конечная сумма б.м. функций.
Значит, $\rho \cdot (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|) = o(\rho)$. Показали, что это выражение действительно есть б.м. функция.

$2 \Rightarrow 1$

$$o(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho}\frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}{\rho}\frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$o(\rho) = (\frac{\Delta x_1}{\rho}\frac{o(\rho)}{\rho})\Delta x_1 + \ldots + (\frac{\Delta x_m}{\rho}\frac{o(\rho)}{\rho})\Delta x_m$$

Понятно, что $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho}\frac{o(\rho)}{\rho}$, но $\frac{\Delta x_j}{\rho}$ величина ограниченная, а $\frac{o(\rho)}{\rho} \to 0,\ \rho \to 0 \Rightarrow$ при $\Delta x \to \bar{0}$. $\alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, m$, только при $\Delta x = \bar{0}$.

Доказано.

3.3. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке

Теорема 2. Пусть $w = f(x)$ определена в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ и в этой окрестности существуют $\frac{\partial f}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, m$. Если $\frac{\partial f}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, m$ непрерывны в точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

Докательство. Проведем доказательство для $m = 2,\ w = f(x, y),\ a = (a_1, a_2)$.
Рассмотрим точку $(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) \in \mathscr{U}(a)$.

Рассмотрим

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) + f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

Введем функцию $\varphi(x) = f(x, a_2 + \Delta y)$ и $\psi(y) = f(a_1, y)$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = \Delta\varphi(a_1, \Delta x) + \Delta\psi(a_2, \Delta y) = \\ = \varphi(a_1 + \Delta x) - \varphi(a_1) + \psi(a_2 + \Delta y) - \psi(a_2)$$

По теореме Лагранжа для функции одной переменной: $\exists\theta_1 :\ 0 < \theta_1 < 1$ и $\exists\theta_2 :\ 0 < \theta_2 < 1 :$

$$f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1 + \theta_1\Delta x, a_2 + \Delta y)\Delta x$$

$$f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2 + \theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$f'_x(a_1 + \theta_1\Delta x, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y);\ \alpha_1 \to 0,\ (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

$$f'_y(a_1, a_2 + \theta_2\Delta y) = f'_y(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y);\ \alpha_2 \to 0,\ (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f'_x(a)\Delta x + f'_y(a)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

Получили в точности определение дифференцируемости функции f в точке a.
Доказано.

Примеры. (Доказательство дифференцируемости ф-ции в точке)
$w = f(x,y),\ \bar{0} = (0{,}0),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0.$

Пример 1. $f(x,y) = y^2 \sin x$

Заметим, что $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$

Из определения частной производной: $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$

Частные производные равны нулю, значит, надо показать, что $f(x,y) = o(\rho),\ \rho \to 0.$ Надо показать, что $F(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, при $(x,y) \to (0,0)$.
$|F(x,y)| = |\frac{y^2\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}| \le \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le [\ \ |y| \le \sqrt{x^2+y^2}\ \ ] \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \le \delta = \varepsilon$
$[\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall(x,y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \mapsto |F(x,y)| < \varepsilon] \overset{def}{=} [\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0] \Leftrightarrow [f(x,y) = o(\rho), \rho \to 0].$

Пример 2. $f(x,y) = \sqrt{|xy|},\ \bar{0} = (0,0)$
$f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
$F(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
Перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ F(x,y) = \sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}$
$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(\rho,\varphi) = 0$
$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ne 0$
Значит, f не является дифференцируемой в точке (0, 0).

Пример 3.(Очень важный для понимания теории)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(x,0) = x^2 \sin\frac{1}{|x|}, x \ne 0$
$f(0,y) = y^2 \sin\frac{1}{|y|}, y \ne 0$
$f(0{,}0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} = \frac{f(x,0)-f(0,0))}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} = \frac{f(0,y)-f(0,0))}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{|y|} = 0$

Теперь докажем, что эта функция дифференцируема в (0, 0)
Введем функцию

$$F(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|F(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon:\forall(x,y):0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta\mapsto|F(x,y)|<\varepsilon]\stackrel{def}{=}$$

$$[\lim_{(x,y)\to(0,0)}F(x,y)=0]\Leftrightarrow[f(x,y)=o(\rho),\rho\to0]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\text{дифференцируема в }(0,\,0)$$

Посмотрим на частные производные этой функции по x и y вне точки (0, 0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ не существует $\Rightarrow f'_x$ не является непрерывной в (0, 0).
Пример показывает, что непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции.

Замечание. Непрерывность частных производных функции f в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в точке. Это условие достаточно (Теорема 2).

3.4. Дифференцируемость сложной функции

Рассматриваем функции $x_j=\varphi_j(t)$ в окрестности точки $t^0=(t_1^0,\ldots,t_k^0)\in\mathbb{E}^k,\ j=1,\ldots,m$. Рассматриваем функцию $w=f(x)$, которая определена в окрестности точки $a=(a_1,\ldots,a_m)$, причем $a_j=\varphi_j(t^0),\ j=1,\ldots,m$. $F(t)=f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))$ – суперпозиция функций f и функций $\varphi_1(t)\ldots$ (сложная функция)

Теорема 3 [О дифференцируемости сложной функции]:
Пусть функции $\varphi_j,\ j=1,\ldots,m$ дифференцируемы в точке t^0, функция f дифференцируема в точке a, причем $a_j=\varphi_j(t^0),\ j=1,\ldots,m$. Тогда $F(t)=f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))$ дифференцируема в точке t^0 и

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t^0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j}(t^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_j}(t^0)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial\varphi_m}{\partial t_j}(t^0),j=1,\ldots,k$$

.

Доказательство. $t^0+\Delta t\in\mathscr{U}(t^0),a+\Delta x\in\mathscr{U}(a),\rho=\sqrt{(\Delta t_1)^2+\ldots+(\Delta t_k)^2}$.

Условия дифференцируемости функции φ_j в точке t^0:

$$\Delta\varphi_j(t^0,\Delta t)=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1+\ldots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k+o(\rho),\ \rho\to0;\ \rho\to0\Leftrightarrow\Delta t\to\bar{0}.$$

Условия дифференцируемости функции f в точке a:

$$\Delta f(a,\Delta x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m.$$

Подставим вместо $\Delta x_1 \dots \Delta x_m$ приращения функции φ:

$$\begin{aligned}\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \ldots \\ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \\ + \alpha_1\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right] + \ldots \\ \ldots + \alpha_m\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\right].\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\varphi_m}{\partial t_1}(t_0)\right]\Delta t_1 + \ldots \\ \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\varphi_m}{\partial t_k}(t_0)\right]\Delta t_k + \\ + o(\rho)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m\right] + \\ + \rho\left[\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\right]\frac{\Delta t_1}{\rho} + \ldots \\ \ldots + \rho\left[\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\right]\frac{\Delta t_k}{\rho}.\end{aligned}$$

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho)\gamma + \rho\Lambda_1 + \ldots + \rho\Lambda_k$$

γ - ограниченна, $\Delta x_j = \Delta\varphi_j \xrightarrow[\Delta t \to \bar{0}]{} 0$, $\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to \bar{0} = (0, \ldots, 0)$. $\Rightarrow \alpha_j \to 0$, при $\rho \to 0$

$$\Lambda_j = [\alpha_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \alpha_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)]\frac{\Delta t_j}{\rho} \to 0,\ \rho \to 0$$

Перепишем:

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)\Delta t_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)\Delta t_k + o(\rho),\ \rho \to 0$$

Доказано.

3.5. Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке a. Поскольку функция дифференцируема в точке a, то

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + o(\rho), \rho \to 0$$

Определение: Дифференциалом функции f в точке а называется главная линейная часть (относительно Δx_j) приращения функции f в точке а, соответствующая приращению аргументов $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m$$

Поскольку дифференциал независимой переменной x_j есть произвольное число, то $dx_j = \Delta x_j$.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m \qquad (*)$$

Предложение.[Инвариантность формы 1-го дифференциала]

Выражение (*) универсально, оно справедливо и в случае, когда $x_j = \varphi_j(t),\ t \in \mathscr{U}(t^0) \subset \mathbb{E}^k,\ a_j = \varphi_j(t^0),\ j = 1, \ldots,\ m$ (φ_j дифференцируема в точке t^0).

Доказательство.

$$d\varphi_j(t^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0)dt_k,\ j = 1, \ldots, m$$

Введем функцию $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$

$$dF(t^0) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)dt_k$$

$$dF(t^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)\right]dt_1 + \ldots$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)\right]dt_k$$

Перегруппируем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)dt_k\right] + \ldots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)dt_k\right]$$

Получаем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m$$

Доказано.

3.6. Производная по направлению и градиент, их связь и геомертический смысл.

Рассматриваем функцию $w = f(x)$ определенную в $\mathscr{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$. Мы предполагаем, что f дифференцируема в точке а. Возьмём единичный вектор $\vec{n} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m), |\vec{n}| = 1$.

$$l : \begin{cases} x_1 = a_1 + t\cos\alpha_1; \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ x_m = a_m + t\cos\alpha_m; \end{cases}$$

Рассмотрим суперпозицию:

$$F(t) = f(a_1 + t\cos\alpha_1, \dots, a_m + t\cos\alpha_m)$$

F дифференцируема в точке $t = 0$.

Определение: Производной функции f по направлению l в точке $x = a$ называется производная функции F в точке $t = 0$.

Обозначения.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1 + t\cos\alpha_1, \dots, a_m + t\cos\alpha_m) - f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\cos\alpha_m$$

Определение: Градиентом функции f называется вектор

$$\mathrm{grad} f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a))$$

Из этого определения и выражения для производной по направлению l в точке a функции f мы получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (\mathrm{grad} f(a), \vec{n})$$

Предложение. Градиент функции f в точке a характеризует направление и величину максимального роста производной по направлению функции f в точке a.

Доказательство.

По определению производной по направлению в точке a:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = |\mathrm{grad} f(a)||\vec{n}|\cos\varphi = |\mathrm{grad} f(a)|\cos\varphi$$

$\cos\varphi$ имеет наибольшее значение равное $1 \Rightarrow cos\varphi = 1 \Rightarrow \vec{n}$ и grad – направление совпадают, т.к. в этом случае $\varphi = 0$.

Доказано.

3.7. Необходимые условия дифференцируемости

Необходимое условие 1.

[f дифференцируема в точке a] $\Rightarrow [\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = 1, \dots, m]$

Доказательство.

Возьмем $j = k$, рассматриваем $\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$. Тогда $\Delta f(a, \Delta x) = \Delta_k f(a, \Delta x_k)$. Тогда используя 1-ое условие определения получим:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

Получаем следующее:

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = A_k\Delta x_k + \alpha_k\Delta x_k$$

$$\frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \to A_k,\ \Delta x_k \to 0 \Rightarrow A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

В силу произвольности мы доказано для всех переменных.
Доказано.

Таким образом мы уточнили определение, например, перепишем определение 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$$

Необходимое условие 2. Если $w = f(x), x \in \mathbb{E}^m$ дифференцируема в точке а, то f непрерывна в точке a.

Доказательство.
$\Delta f(a, \Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m + \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m(\Delta x)\Delta x_m$.
Если $\Delta x \to \bar{0}$, то $f(a + \Delta x) - f(a) \to 0 \Rightarrow$ f непрерывна в точке а.
Доказано.

Необходимое условие 3.(Не было в лекции Знаменской)
Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

[Взято из Кудрявцева, Том 2, стр. 267]

4. Билет 4

4.1. Частные производные высших порядков.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ - дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$, D - область. И $\forall x \in D\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = \overline{1, m}$.

Пусть $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, и в точке x: $\exists \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$. Тогда

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$$

называется частной производной 2-го порядка функции f в точке x. Частные производные высших порядков определяются так же.

Обозначения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x),\ f''_{x_j x_k}(x),\ f^{(2)}_{x_j x_k}(x)$$

$$j = k:\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x)$$

Примечание: если $k \neq j$, производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ называется смешанной.

4.2. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования.

Примеры:

1.

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y^2 + x^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$f_x^{'}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y^{'}=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-y^4)+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x^{'}(0,y)-f_x^{'}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^5}{y^5}=-1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y^{'}(x,0)-f_y^{'}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5}=1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Из этих примеров видно, что в общем случае смешанные производные зависят от порядка дифференцирования.

Теорема: Пусть в $\mathscr{U}(a)\subset\mathbb{E}^2$ определены $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, и эти производные непрерывны в точке $a=(a_1,a_2)$, тогда
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)$$

Доказательство: Рассмотрим функцию
$$U(x,y)=f(x,y)-f(x,a_2)-f(a_1,y)+f(a_1,a_2)$$

Пусть $\Pi=\{(x,y):|x-a_1|\leqslant r_1,|y-a_2|\leqslant r_2\}$, $\Pi\subset\mathscr{U}(a)$, где определены смешанные производные. Фиксируем $y\in(a_2-r_2,a_2+r_2)$ и на интервале (a_1-r_1,a_1+r_1) рассмотрим функцию
$$\varphi(x)=f(x,y)-f(x,a_2)$$
φ дифференцируема на интервале (a_1-r_1,a_1+r_1) и $U(x,y)=\varphi(x)-\varphi(a_1)$. Тогда, по теореме Лагранжа $\exists\theta_1:0<\theta_1<1$:
$$U(x,y)=\varphi^{'}(a_1+\theta_1\Delta x)\Delta x$$
где $\Delta x=x-a_1$
$$U(x,y)=[f_x^{'}(a_1+\theta_1\Delta x,y)-f_x^{'}(a_1+\theta_1\Delta x,a_2)]\Delta x$$

К выражению, стоящему в [...] применим теорему Лагранжа.
$\exists\theta_2:0<\theta_2<1$:
$$U(x,y)=f_{xy}^{''}(a_1+\theta_1\Delta x,a_2+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x$$

где $\Delta y = y - a_2$.

Аналогично фиксируем $x \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1)$ и на интервале $(a_2 - r_2, a_2 + r_2)$ получаем

$$U(x,y) = f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y)\Delta y \Delta x$$

$$f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y)$$

Учитывая непрерывность в точке a при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, получаем $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

Определение: Функция $\omega = f(x,y)$ называется n раз дифференцируемой в точке $x = a \in \mathbb{E}^m$, если все ее частные производные порядка $n-1$ есть дифференцируемые функции

Теорема: (без доказательства) Пусть $\omega = f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке a, тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

4.3. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы.

Определение: Пусть $\omega = f(x)$ дважды дифференцируема в $D \subset \mathbb{E}^m$. $\forall x \in D$ $df(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j$. Тогда дифференциалом 2 порядка будем называть

$$d^2 f(x) = d(df)(x) = \sum_{j=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)dx_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)dx_k\right)dx_j$$

Дифференциалы высших порядков определяются таким же образом.

Замечание: Если рассмотреть дифференциал, как оператор

$$d = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$$

То дифференциал n-ого порядка можно записать в виде

$$d^n = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n$$

Предложение: Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

Доказательство: Пусть $\omega = f(x)$, $x_j = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, f, φ_j - дважды дифференцируемы.

$$df(x) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j,\ dx_j = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(i)dt_i$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx_i dx_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d^2 x_j$$

причем

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d^2 x_j \neq 0$$

4.4. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Лагранжа]: Пусть функция $\omega = f(x)$ обладает непрерывными частными производными порядка n+1 в шаре $B_\delta(a)$, Δx таково, что $a + \Delta x \in B_\delta(a)$. Тогда найдется $0 < \theta < 1$ такое, что

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(a)}{k!} + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{d^{n+1} f(a + \theta \Delta x)}{(n+1)!}$$

Примечание: dx_j трактуется как Δx_j

Доказательство: $a + \Delta x \in B_\delta(a) \Rightarrow a - \Delta x \in B_\delta(a)$, $\forall t \in [-1, 1], a + t\Delta x \in B_\delta(a)$.

$$f(a + t\Delta x) = f(a_1 + t\Delta x_1, \ldots, a_m + t\Delta x_m) = \varphi(t)$$
$$\varphi(0) = f(a)$$
$$\varphi^{'}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t\Delta x_j)\Delta x_j = df(a + t\Delta x)$$
$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_k=1}^{m} \cdots \sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}} \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_k} = d^k f(a + t\Delta x)$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^k(0)}{k!} t^k + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{(n+1)}$$

Подставив $t = 1$ получим требуемое равенство.

Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Пеано]:(без доказательства)
Пусть f n-раз дифференцируема в точке $x = a$, тогда

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(a)}{k!} + o(\rho), \ \rho \to 0, \ \rho = \rho(\Delta x, 0)$$

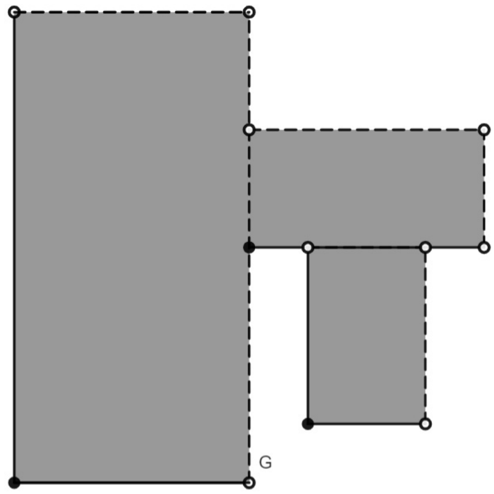
5. Билет 5

5.1. Необходимые определения и предложения билета.

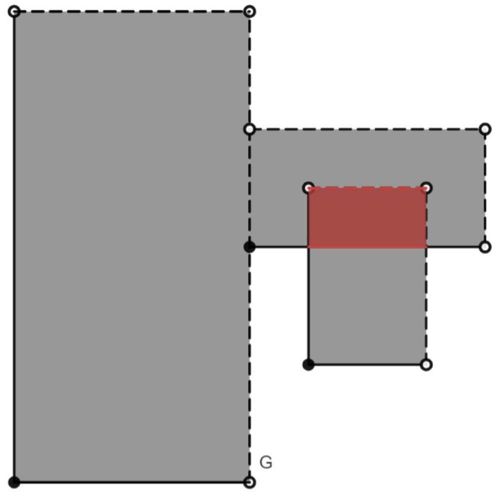
Определение: множество $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$ будем называть клеткой в $\mathbb{E}^m$.

Определение: множество $G \subset \mathbb{E}^m$ будем называть клеточным, если оно является объединением **конечного** числа попарно непересекающихся клеток:

$$G = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j, \qquad Q_i \cap Q_j = \varnothing,\ i \neq j.$$



G - клеточное множество



G - не клеточное множество

Свойства клеточных множеств:

1° Объединение **конечного** числа попарно непересекающихся клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

G и H - клеточные множества. Тогда:

$$G = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j, \qquad H = \bigcup_{j=k+1}^{n} Q_j.$$

Значит:

$$G \cup H = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j - \text{клеточное множество.}$$

2° Пересечение двух клеток есть клетка.

Доказательство:

Пусть $Q_1 = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$, а $Q_2 = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \times \dots \times [c_m, d_m)$. Тогда возможны два случая:

а) $\exists j$: $[a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = \varnothing \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ - клетка;

б) $\forall j \longmapsto [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = [e_j, f_j) \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = [e_1, f_1) \times [e_2, f_2) \times \ldots \times [e_m, f_m)$ - клетка.

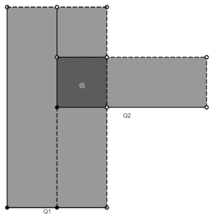
3° Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство:

Пусть G_1 и G_2 - клеточные множества.
$G_1 = Q_1^1 \cup Q_2^1 \cup \ldots \cup Q_k^1$
$G_2 = Q_1^2 \cup Q_2^2 \cup \ldots \cup Q_n^2$
Обозначим $Q_{ij} = Q_i^1 \cap Q_j^2,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}$.
Q_{ij} - клетка (свойство **2**°).

$G_1 \cap G_2 = \bigcup\limits_{i,j} Q_{ij} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_{ij}$ - объединение попарно непересекающихся клеток есть клеточное множество.

4° Разность двух клеток есть клеточное множество.
Доказательство:
Q_1 и Q_2 - клетки. $Q = Q_1 \cap Q_2$ - клетка (свойство **2**°). Тогда
$Q_1 \backslash Q_2 = Q_1 \backslash Q$.
Существует такое разбиение клетки Q_1 на более мелкие клетки, что Q является одной из них $\Rightarrow Q_1 \backslash Q_2$ - клеточное множество.



5° Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.
Доказательство:

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j^1, \qquad G_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j^2.$$

$$G_1 \backslash Q_1^2 = \bigcup_{i=1}^{k} \left(Q_i^1 \backslash Q_1^2\right) = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i1}$$

G_{i1} - клеточное множество (свойство **4**°).
$G_{i1} \cap G_{j1} = \varnothing$, если $i \neq j \Rightarrow G_1 \backslash Q_1^2$ - клеточное множество (свойство **1**°).
Аналогично для других клеток G_2

$$G_1 \backslash G_2 = G_1 \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_j^2\right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(G_1 \backslash Q_j^2\right)$$

Последнее является клеточным множеством по свойству **3**°. Откуда получаем, что $G_1 \backslash G_2$ - клеточное множество.

6° Объединение **конечного** числа клеточных множеств есть клеточное множество.
Доказательство:
1) G_1 и G_2.
$G_1 \cup G_2 = (G_1 \backslash G_2) \cup (G_2 \backslash G_1) \cup (G_1 \cap G_2)$;
Последние три скобки являются попарно непересекающимися клеточными множествами $\stackrel{\mathbf{1}^\circ}{\Rightarrow} G_1 \cup G_2$ - клеточное множество.
2) Далее для $G_3, G_4, \ldots, G_n$ по индукции.

Таким образом, объединение, пересечение и разность конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

Определение: мерой клетки Q назовем число:
$m(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$;
$m(\varnothing) = 0$.

Определение: мерой клеточного множества G назовем число:

$$m(G) = \sum_{j=1}^{k} m(Q_j); \qquad m(\varnothing) = 0.$$

Лемма: мера клеточного множества G не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

Доказательство:
Пусть $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$ и также $G = Q'_1 \cup Q'_2 \cup \ldots \cup Q'_n$. Тогда обозначим $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}$.
Понятно, что

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^{n} Q_{ij}, \qquad Q'_j = \bigcup_{i=1}^{k} Q_{ij}.$$

Тогда:

$$m(G) = \sum_{i=1}^{k} m(Q_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} m(Q'_j) = m(G).$$

Предложение 1: если клеточные множества $G_1, G_2, \ldots, G_n$ попарно не пересекаются, то для $G = \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_j$ выполняется $m(G) = \sum\limits_{j=1}^{n} m(G_j)$.

Доказательство:
$G_j = \bigcup\limits_{i=1}^{k_j} Q_i^j,\ j = \overline{1,n}$.
Тогда
$G = \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n}\bigcup\limits_{i=1}^{k_j} Q_i^j = \bigcup\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n,\\ 1\leqslant i\leqslant k_j}} Q_i^j$
Все клетки из последнего объединения попарно не пересекаются, поэтому:
$m(G) = \sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n,\\ 1\leqslant i\leqslant k_j}} m(Q_i^j) = \sum\limits_{j=1}^{n} m(G_j)$.

Предложение 2: если G_1 и G_2 - клеточные множества и $G_1 \subset G_2$, то $m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \backslash G_1)$, $m(G_1) \leqslant m(G_2)$.

Доказательство:
$G_2 = G_1 \cup (G_2 \backslash G_1) = G_1 \cup G$.
$G_1 \cap G = \varnothing \overset{\text{пр.1}}{\Longrightarrow} m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \backslash G_1) \Rightarrow m(G_1) \leqslant m(G_2)$.

Предложение 3: если $G_1, G_2, \ldots, G_k$ - клеточные множества, $G = \bigcup\limits_{j=1}^{k} G_j$, то $m(G) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} m(G_j)$.

Доказательство:
Для G_1 и G_2 по предложению 2, а далее по индукции.

Предложение 4: для любого клеточного множества G и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$ - клеточные множества такие, что:
1) $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \operatorname{int} G \subset G$; $\quad m(G) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$;
2) $G \subset \overline{G} \subset \operatorname{int} G^\varepsilon \subset G^\varepsilon$; $\quad m(G^\varepsilon) - m(G) < \varepsilon$.

Доказательство:
1) $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$.
Рассмотрим отдельную клетку $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_m, b_m)$

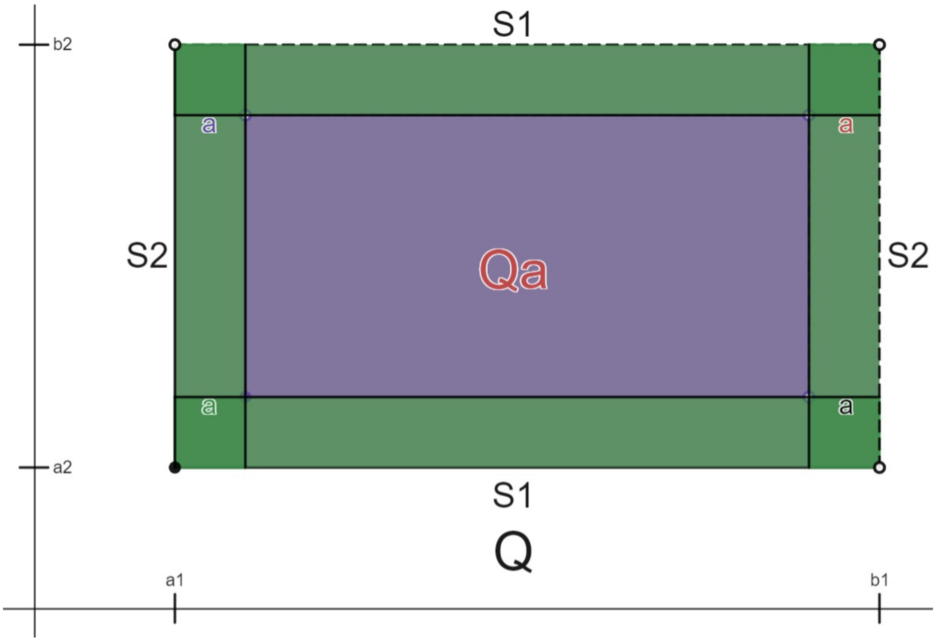


Рис. 2: Случай при $m = 2$

$$m(Q_a) = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j - 2a),\ Q_a \subset Q$$

$$S_j = \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{m}(b_i - a_i);$$

Тогда

$$m(Q) \leqslant m(Q_a) + 2a \cdot \sum_{j=1}^{m} S_j = m(Q_a) + 2aS \Rightarrow m(Q) - m(Q_a) \leqslant 2aS = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда для одной клетки $a = \frac{\varepsilon}{4S}$.
Так как $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$, то $a = \frac{\varepsilon}{4Sk}$.
Получаем $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (Q_a)_i$.

Таким образом, $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \operatorname{int} G \subset G$.

2) Доказывается аналогично 1).

5.2. Определение измеримости по Жордану множества в m-мерном евклидовом пространстве.

Определение: множество $X \subset \mathbb{E}^m$ называется измеримым по Жордану, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon$ и G^ε - клеточные множества такие, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$ и $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Определение: мерой измеримого по Жордану множества $X \subset \mathbb{E}^m$ называется такое число $m(X)$, что $\forall G_\varepsilon$, G^ε таких, что $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \longmapsto m(G_\varepsilon) \leqslant m(X) \leqslant m(G^\varepsilon)$.

Лемма: для любого измеримого по Жордану множества X его мера $m(X)$ существует и единственна, причем

$$m(X) = \overline{m}(X) = \underline{m}(X),$$

где $\overline{m}(X) = \inf\limits_{X \subset G^\varepsilon} m(G^\varepsilon)$ - верхняя (внешняя) мера X;
$\underline{m}(X) = \sup\limits_{G_\varepsilon \subset X} m(G_\varepsilon)$ - нижняя (внутренняя) мера X.

Доказательство:
Так как $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$, то $m(G_\varepsilon) \leqslant m(G^\varepsilon) \Rightarrow \{m(G_\varepsilon)\}$ ограничена сверху $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \beta = \sup\limits_{G_\varepsilon} m(G_\varepsilon) = \underline{m}(X)$.
Аналогично: $\{m(G^\varepsilon)\}$ ограничена снизу $\Rightarrow \exists \alpha = \inf\limits_{G^\varepsilon} m(G^\varepsilon) = \overline{m}(X)$.

По теореме об отделимости множеств: $m(G_\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant m(G^\varepsilon)$.

Пусть $m(X) = \alpha$.
$\forall \varepsilon > 0 \longmapsto 0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$.
Откуда $\beta = \alpha \Rightarrow m(X)$ единственна.

Предложение 5: пусть множество X измеримо по Жордану и $\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon$: $X \subset G^\varepsilon$, $m(G^\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $m(X) = 0$.

Доказательство:
Возьмем $G_\varepsilon = \varnothing$. Тогда:
$\forall \varepsilon > 0 \longmapsto G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon\ \&\ m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) = m(G^\varepsilon) < \varepsilon \ \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leqslant m(X) < \varepsilon \ \Rightarrow m(X) = 0$.

Замечание: измеримое по Жордану множество, обладающее свойством из предыдущего предложения, будем называть множеством меры нуль.

Предложение 6: подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:
Пусть $m(X) = 0$ и $Y \subset X$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon : X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$.
Как следствие:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G^\varepsilon : Y \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(Y) = 0$.

Предложение 7: объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство:
$m(X_1) = m(X_2) = 0$.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_1^\varepsilon : X_1 \subset G_1^\varepsilon, m(G_1^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$;
$\exists G_2^\varepsilon : X_2 \subset G_2^\varepsilon, m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Тогда $X_1 \cup X_2 \subset G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon = G^\varepsilon$.
$m(G^\varepsilon) \overset{\text{пр.3}}{\leqslant} m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow m(X_1 \cup X_2) = 0$.
Далее по индукции.

5.3. Критерий измеримости.

Теорема [Критерий измеримости]:

$$[X - \text{измеримо по Жордану}] \Longleftrightarrow [X \text{ ограничено и } m(\partial X) = 0].$$

Доказательство:
$\Longrightarrow$:
X - измеримо по Жордану: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$: $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$, $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;

Из предложения 4 $\Rightarrow \exists \widetilde{G^\varepsilon}$: $\overline{G^\varepsilon} \subset \operatorname{int} \widetilde{G^\varepsilon} \subset \widetilde{G^\varepsilon}$, $m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(G^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$;
$\exists \widetilde{G_\varepsilon}$: $\overline{\widetilde{G_\varepsilon}} \subset \operatorname{int} G_\varepsilon \subset G_\varepsilon$, $m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда:
$m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(G^\varepsilon) + m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) + m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

$\widetilde{G_\varepsilon}$ не содержит точки ∂X, а $\widetilde{G^\varepsilon}$ содержит их все, откуда:
$\widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}$ - клеточное множество и $\partial X \subset \widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}$
$m(\widetilde{G^\varepsilon} \backslash \widetilde{G_\varepsilon}) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \varepsilon \Rightarrow m(\partial X) = 0$.

$\Longleftarrow$:
X - ограничено $\Rightarrow \exists Q$ - клетка: $X \subset Q$;

$[m(\partial X) = 0] \overset{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists G^\varepsilon : \partial X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon]$

$Q \backslash G^\varepsilon$ - клеточное множество $\Rightarrow Q \backslash G^\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$, где Q_j не содержат точек ∂X.

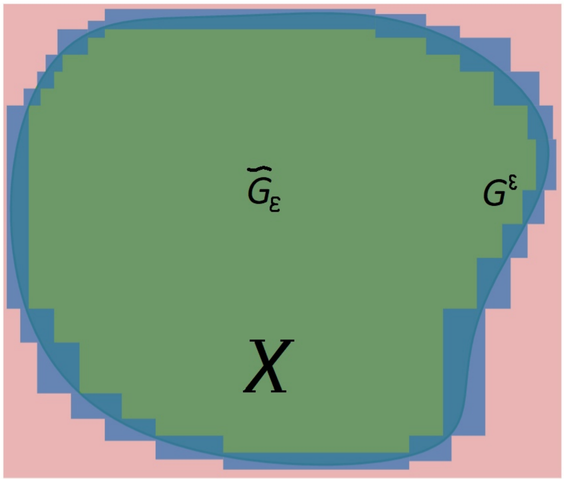
Тогда есть два варианта:
$[Q_j \subset X]$ либо $[Q_j \cap X = \varnothing]$

Пусть без потери общности $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$: $Q_j \subset X$, $j = \overline{1, l}$;
$Q_{l+1}, Q_{l+2}, \ldots, Q_k$: $Q_j \cap X = \varnothing$, $j = \overline{l+1, k}$;

$$\widetilde{G_\varepsilon} = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \quad \widetilde{G^\varepsilon} = \widetilde{G_\varepsilon} \cup G^\varepsilon = Q \backslash \left(\bigcup_{j=l+1}^{k} Q_j \right)$$

$\widetilde{G_\varepsilon} \subset X \subset \widetilde{G^\varepsilon}$

$m(G^\varepsilon) = m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) < \varepsilon \Rightarrow X$ измеримо по Жордану.



5.4. Примеры неизмеримых по Жордану множеств.

$\boxed{1}$ $X = \{x \in [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}, \ X \subset \mathbb{E}^1$.
$\partial X = [0{,}1] \Rightarrow m(\partial X) = 1 \neq 0 \Rightarrow X$ неизмеримо.

$\boxed{2}$ $Y = X \times X$, где X из $\boxed{1}$.
$\partial Y = [0{,}1] \times [0{,}1] \Rightarrow m(\partial Y) = 1 \neq 0 \Rightarrow Y$ неизмеримо.

$\boxed{3}$ X из $\boxed{1}$. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $0 \leqslant a_j \leqslant 1$
Пусть $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.
B открыто как объединение открытых множеств.
Обозначим $B_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$

$$m(B_k) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{j-1}} = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \varepsilon\frac{1-\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < 2\varepsilon$$

Тогда $\underline{m}(B) \leqslant 2\varepsilon < 1$. Но $[0,1] \subset B \Rightarrow \overline{m}(B) > 1$.
То есть $\underline{m}(B) \neq \overline{m}(B) \Rightarrow B$ неизмеримо.

5.5. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

1° Если X_1 и X_2 измеримы по Жордану, то $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \backslash X_2$ - измеримые по Жордану множества.

Доказательство:
X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X_1$ и X_2 ограничены и $m(\partial X_1) = m(\partial X_2) = 0$. Тогда и $m(\partial X_1 \cup \partial X_2) = 0$.

$$\underbrace{\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2;\ \partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2;\ \partial(X_1 \backslash X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2}_{\Downarrow}$$

$$m(\partial(X_1 \cup X_2)) = m(\partial(X_1 \cap X_2)) = m(\partial(X_1 \backslash X_2)) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2$ и $X_1 \backslash X_2$ измеримы.

5.6. Конечная аддитивность меры Жордана.

2° Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ - измеримые по Жордану множества, тогда множество $X = \bigcup\limits_{j=1}^{k} X_j$ измеримо и:

1) $m(X) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} m(X_j)$;

2) Если $X_j \cap X_i = \varnothing$ при $i \neq j$, то $m(X) = \sum\limits_{j=1}^{k} m(X_j)$.

Доказательство: (для $k = 2$, а дальше по индукции)

1) X_1 и X_2 измеримы по Жордану $\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ измеримо.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G_1^\varepsilon, G_2^\varepsilon$: $X_1 \subset G_1^\varepsilon$, $X_2 \subset G_2^\varepsilon$ и:
$m(X_1) > m(G_1^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$
$m(X_2) > m(G_2^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $G^\varepsilon = G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon$ - клеточное множество и $X \subset G^\varepsilon$.
Получаем:
$m(X) \leqslant m(G^\varepsilon) \leqslant m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < m(X_1) + m(X_2) + \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(X) \leqslant m(X_1) + m(X_2)$ $\boxed{*}$

2) $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $X = X_1 \cup X_2$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon^1, G_\varepsilon^2$: $G_\varepsilon^1 \subset X_1$, $G_\varepsilon^2 \subset X_2$ и:
$m(G_\varepsilon^1) > m(X_1) - \frac{\varepsilon}{2}$
$m(G_\varepsilon^2) > m(X_2) - \frac{\varepsilon}{2}$

$G_\varepsilon = G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$ и $G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2 = \varnothing$, а также $G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2 \subset X$.

Тогда $m(X) \geqslant m(G_\varepsilon) = m(G_\varepsilon^1) + m(G_\varepsilon^2) > m(X_1) + m(X_2) - \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $m(X) \geqslant m(X_1) + m(X_2)$ $\boxed{**}$

Из $\boxed{*}$ и $\boxed{**}$ $\Rightarrow m(X) = m(X_1) + m(X_2)$.

5.7. Измеримость и мера цилиндра в $(m+1)$-мерном пространстве.

Предложение: пусть $X \subset \mathbb{E}^m$, $m \geqslant 1$, - измеримо, тогда множество $Y = X \times [a, b) \subset \mathbb{E}^{m+1}$ - измеримо. $m(Y) = m(X)(b - a)$.

Доказательство:
$[X \text{ измеримо}] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon : G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon,\ m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a}\right]$.

Рассмотрим клеточные множества: $\widetilde{G_\varepsilon} = G_\varepsilon \times [a, b)$ и $\widetilde{G^\varepsilon} = G^\varepsilon \times [a, b)$;

Тогда $\widetilde{G_\varepsilon} \subset Y \subset \widetilde{G^\varepsilon}$, а $m(\widetilde{G_\varepsilon}) = m(G_\varepsilon)(b - a)$ и $m(\widetilde{G^\varepsilon}) = m(G^\varepsilon)(b - a)$;
Получаем: $m(\widetilde{G^\varepsilon}) - m(\widetilde{G_\varepsilon}) = (m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon))(b - a) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon \Rightarrow Y$ измеримо.

6. Билет 6

6.1. Определенный интеграл Римана.

Обозначения:

$y = f(x)$ некоторая функция, $x \in [a,b]$
T – разбиение отрезка $[a,b] : T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\Delta_T = \max\limits_{1 \le j \le n} \Delta x_j$ – мелкость разбиения
$\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$, $j = \overline{1,n}$

Определение: Число $I\{T,\xi\} = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ называется интегральной суммой.

Определение: Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T,\xi\}$ при $\Delta_T \longrightarrow 0$, Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta\ \&\ \forall \{\xi\} \longmapsto |I\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм $I\{T,\xi\}$
при $\Delta_T \longrightarrow 0$.
Указанный предел I называется определенным интегралом функции f на $[a,b]$.

Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

Пример: $y(x) \equiv C$, $x \in [a,b]$
$I\{T,\xi\} = C(b - a) \Rightarrow I = \int\limits_a^b Cdx = C(b - a)$

Предложение:[Необходимое условие интегрируемости функции]:

$$[f\text{–интегрируема на } [a,b]\ ] \Rightarrow [f\text{–ограничена на } [a,b]]$$

Доказательство: от противного:
Пусть f не является ограниченной на $[a,b]$ это означает, что $\exists k$: на $[x_{k-1},x_k]$ функция не является ограниченной, то есть, $|f(\xi_k)|\Delta x_k$ может быть как угодно большим за счет выборки точки $\xi_k \ \Rightarrow I\{T,\xi\}$ неограчена и предел $I\{T,\xi\}$ $\Delta_T \to 0$ не существует–противоречие.

Замечание: Не всякая ограниченная функция является интегрируемой на отрезке.

Пример: функция Дирихле на любом отрезке $[a,b]$ ограничена

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

Однако:

$$\xi'_j \in \mathbb{Q},\ j = \overline{1,n}$$

$$\xi''_j \in \mathbb{J},\ j = \overline{1,n}$$

$$I\{T,\xi'\} = b - a \neq 0$$

$$I\{T,\xi''\} = 0, \text{ отсюда } D(x) \text{ не является интегрируемой}$$

6.2. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.

Определение: Пусть $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, ограничена на данном отрезке; T–разбиение отрезка $[a,b]$.

$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$
$m_j = \inf\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$, $M_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$, $j = \overline{1,n}$, тогда:

$\underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$–нижняя сумма Дарбу по разбиению T

$\overline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j$–верхняя сумма Дарбу по разбиению T

Очевидно, что при фиксированном T выполняется $\underline{S}_T \leq I\{T,\xi\} \leq \overline{S}_T$

Свойство 1: Для фиксированного T выполняется:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \xi', \xi'' : \overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \varepsilon$, $I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < \varepsilon$

Доказательство: из определения $M_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \xi'_j \in [x_{j-1},x_j] : \ f(\xi'_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{b-a} \ \Rightarrow \ M_j - f(\xi'_j) < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - f(\xi'_j))\Delta x_j < \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_j = \varepsilon \ \Rightarrow \ \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - f(\xi'_j))\Delta x_j =$
$\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \varepsilon$
Второе неравество доказывается аналогично.

Определение: T'–измельчение разбиения T, если $T' = T \cup \{b_1 \ldots b_k\}$, то есть, мы добавляем еще k точек, таким образом $\Delta_{T'} \leq \Delta_T$.

Свойство 2: При измельчении разбиения T нижние суммы Дарбу не уменьшаются, а верхние не увеличиваются.
T'–измельчение разбиения T, $\underline{S}_T \leq \underline{S}_{T'} \leq \overline{S}_{T'} \leq \overline{S}_T$

Доказательство: Добавим одну точку на $[x_{j-1},x_j] \ : \ \ b \in (x_{j-1},x_j), \Delta x_j = \Delta x'_j + \Delta x''_j$, $M'_j \leq M_j$; $M''_j \leq M_j$, тогда:

$$\overline{S}_T - \overline{S}_{T'} = M_j \Delta x_j - (M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j) = (M_j - M'_j)\Delta x' + (M_j - M''_j)\Delta x'' \geq 0$$

$\Rightarrow \ \overline{S}_{T'} \leq \overline{S}_T$
Аналогично доказывается для нижних сумм.

Свойство 3: Пусть T' и T'' произвольные разбиения отрезка $[a,b]$, тогда: $\underline{S}_{T'} \leq \overline{S}_{T''}$, $\underline{S}_{T''} \leq \overline{S}_{T'}$

Доказательство: $T = T' \cup T''$–измельчение разбиений T', T''
Тогда из свойства 2 следует, что $\underline{S}_{T'} \leq \underline{S}_T \leq \overline{S}_T \leq \overline{S}_{T''}$ и
$\underline{S}_{T''} \leq \underline{S}_T \leq \overline{S}_T \leq \overline{S}_{T'}$

Свойство 4: существуют числа $\underline{I}$, $\overline{I}$:
$\underline{I} = \sup\limits_T \underline{S}_T$, $\overline{I} = \inf\limits_T \overline{S}_T$ такие, что для произвольных разбиений T', T'' выполняется: $\underline{S}_{T'} \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}_{T''}$

$\overline{I}$–верхний интеграл Дарбу
$\underline{I}$–нижний интеграл Дарбу.

Доказательство: следует из свойства 3 и теоремы об отделимости множеств.

Свойство 5 [Лемма Дарбу]:
1)$[\underline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} \underline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon]$
2)$[\overline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} \overline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon]$

Доказательство: 2)
$M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$
a)$M = m$–тривиальный случай;
b)$M > m$; $\overline{I} = \inf\limits_{T} \overline{S}_T$ из определения inf
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^* : \ \overline{S}_{T^*} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow \ \overline{S}_{T^*} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$
T–произвольное разбиение: $\Delta_T = \max\limits_{j} \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2(M-m)k}$
k–количество точек разбиения T^*, лежащих на (a,b)
рассмотрим $T' = T \cup T^*$
$0 \le \overline{S}_T - \overline{S}_{T'} \le (M-m)k\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2}$ (оценили сверху) отсюда:
$0 \le \overline{S}_T - \overline{S}_{T'} \le \frac{\varepsilon}{2}$ (1)
Из свойств 3 и 4: $\overline{I} \le \overline{S}_{T'} \le \overline{S}_{T^*}$
$0 \le \overline{S}_{T'} - \overline{I} \le \overline{S}_{T^*} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow$
$\overline{S}_{T'} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)
Складываем (1) и (2), получаем $\overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$
Итак:$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)k} > 0 \ \forall T : \Delta_T < \delta \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$

6.3. Критерий интегрируемости функции.

Теорема 1: Пусть функция f ограничена на $[a,b]$
$[\, f$ интегрируема на $[a,b]\,] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon]$

Доказательство [Необходимость]: $\Rightarrow$
$[\, f$ интегрируема на $[a,b]\,] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T :$
$\Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \longmapsto |I - I\{T, \xi\}| < \frac{\varepsilon}{4}]$
из свойства 1: $\exists \xi', \xi''$:
$\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} < \frac{\varepsilon}{4}$, $I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{4}$, тогда
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = |\overline{S}_T - I\{T,\xi'\} + I\{T,\xi'\} - I + I - I\{T,\xi''\} + I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T| \le \overline{S}_T - I\{T,\xi'\} + |I\{T,\xi'\} - I| + |I - I\{T,\xi''\}| + I\{T,\xi''\} - \underline{S}_T < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \ \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

Доказательство [Достаточность]: $\Leftarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^*_\varepsilon : \ \overline{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$
Из свойства 4: существуют числа $\underline{I}$, $\overline{I}$: $\forall T \longmapsto \underline{S}_T \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_T \ \Rightarrow$
$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \overline{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$ так как это выполняется для любых $\varepsilon > 0 \ \Rightarrow$ это возможно лишь при $\overline{I} - \underline{I} = 0$, $\overline{I} = \underline{I} = I$
По Лемме Дарбу:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_1 \longmapsto \overline{S}_T - \overline{I} < \varepsilon$

для этого же ε $\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_2 \longmapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon$
$\delta = min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow \forall T\ \Delta_T < \delta \longmapsto$
$\overline{S}_T - I < \frac{\varepsilon}{2}$, $I - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall T\ \Delta_T < \delta\ \&\ \forall\xi = \{\xi_j\} \longmapsto$
$\underline{S}_T \leq I \leq \overline{S}_T$ (1)
также используем то, что $\underline{S}_T \leq I\{T,\xi\} \leq \overline{S}_T \Rightarrow$
$-\overline{S}_T \leq -I\{T,\xi\} \leq -\underline{S}_T$ (2)
Сложим (1) и (2) $\Rightarrow |I - I\{T,\xi\}| \leq \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

6.4. Классы интегрируемых функций.

Теорема 2: Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то f интегрирума на $[a,b]$.

Доказательство: f ограничена на $[a,b]$ по первой теореме Вейерштрасса, f равномерно непрерывна на $[a,b]$ по теореме Кантора $\Rightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x',\ x'' \in [a,b] :\ |x' - x''| < \delta \longmapsto$
$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
Для этого же ε $\exists T :\ \Delta_T < \delta$, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
По 2 теореме Вейерштрасса $\forall j\ \exists x'_j,\ x''_j \in [x_{j-1},x_j]$:
$M_j = \max\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x) = f(x'_j)$, $m_j = \min\limits_{[x_{j-1},x_j]} f(x) = f(x''_j)$
тогда из р.н. получаем, что $\forall j\ M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta x_j = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \Rightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists T :\ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$.

Теорема 3: Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна на отрезке, то f интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство: для неубывающей функции: $\forall x \in [a,b] \longmapsto$
$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow$ ограничена
$\forall\varepsilon > 0\ \exists T :\ \Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
$j = \overline{1,n}\ [x_{j-1},x_j] \longmapsto M_j = f(x_j)$, $m_j = f(x_{j-1})$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$
$- f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)} = \varepsilon \Rightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists T :\ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$

Теорема 4: Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и $\forall\varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих точки разрыва функции f, сумма длин которых не превосходит $\varepsilon \Rightarrow$ f интегрируема на $[a,b]$

Доказательство: Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists X_1 = \cup_{j=1}^{n}\delta_j^1$ – интервал, покрывающий точки разрыва и $|\delta_j^1|$ – его длина $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} |\delta_j^1| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$
$X_2 = (a,b) \setminus \overline{X_1}$
(a,b) – открытое, $\overline{X_1}$ – замкнутое $\Rightarrow$ X_2 – открытое, то есть, мы отбросили интервалы с

точками разрыва.
$X_2 = \cup_{j=1}^{k} \delta_j^2$ на каждом δ_j^2 – f непрерывна $\Rightarrow$ f равномерно непрерывна на $\overline{X_2}$ (Замыкание, то есть $\overline{X_2}$ компакт – ограниченное и замкнутое)

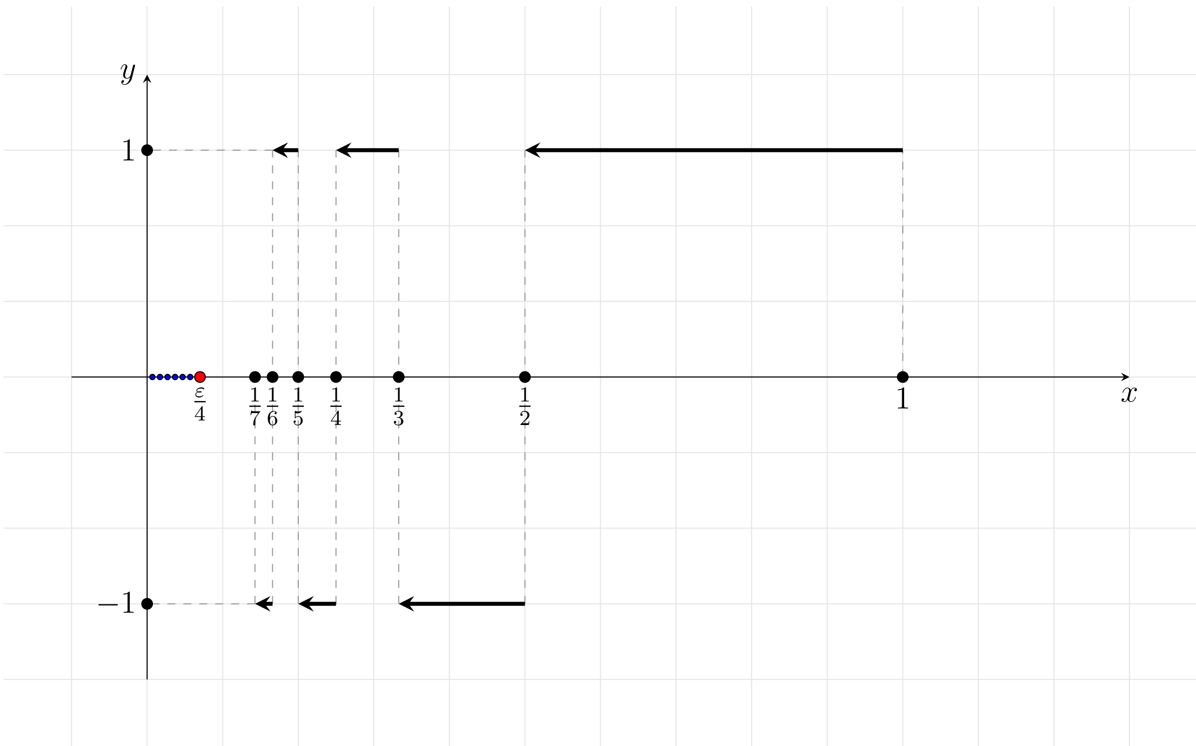
Тогда из опр. р.н. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x',\, x'' \in \overline{X_2} \;\longmapsto$
$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $T = \{\delta_j^1,\, \delta_i^2\}_{j=1,\; i=1}^{n \qquad k}$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|\delta_j^1| + \sum\limits_{i=1}^{k} (M_i - m_i)|\delta_i^2| \leq (M-m) \sum\limits_{j=1}^{n} |\delta_j^1| + + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum\limits_{i=1}^{k} |\delta_i^2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T :\ \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon \Rightarrow$ f интегрируема на $[a,b]$.

Следствие: Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то f интегрируема на $[a,b]$

Рассмотрим пример функции, имеющей на отрезке бесконечное число точек разрыва:

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], n \in \mathbb{N} \\ -1,\ x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$x \in [0,1]$$



Точки разрыва $\frac{1}{n}$, $n > 1$ на $[0,1]$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geq N \longmapsto 0 < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$
Оставшиеся N точек вне данного интервала покрываем интервалами длины $\frac{\varepsilon}{4N}$, тогда сумма длин итервалов покрытия равна $\frac{\varepsilon}{4} + N\frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$ интегрируема по теореме 4.

7. Билет 7

7.1. Некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

Свойство 2:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Свойство 3:
Если f, g интегрируемы на $[a, b]$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $h = \alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство:

$I_n\{\tau, \xi\} = \sum\limits_{j=1}^{n} [\alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j)] \Delta x_j = \alpha \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j) \Delta x_j + \beta \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} g(\xi_j) \Delta x_j =$
$\alpha I_f\{\tau, \xi\} + \beta I_g\{\tau, \xi\}$.

Свойство 4:
Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $h = f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство:
$\exists A > 0 \wedge \exists B > 0 : |f(x)| \le A,\ |g(x)| \le B \ \ \forall x \in [a, b] \Rightarrow h$ ограничена на $[a, b]$
$|h(x') - h(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x')+$
$|f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')| \le |g(x')| \cdot |f(x') - f(x'')| + |f(x'')| \cdot |g(x')-$
$g(x'')| \le B|f(x') - f(x'')| + A|g(x') - g(x'')| \Rightarrow [M_j(h) - m_j(h)] \le$
$B[M_j(f) - m_j(f)] + A[M_j(g) - m_j(g)]$

f, g интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists T' : \overline{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$
$\exists T'' : \overline{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$

$T = T' \cup T''$
$\underline{S}_{T'}(f) \le \underline{S}_T(f) \le \overline{S}_T(f) \le \overline{S}_{T'}(f) \Rightarrow \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \le \overline{S}_{T'}(f)-$
$\underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$
$\underline{S}_{T''}(g) \le \underline{S}_T(g) \le \overline{S}_T(g) \le \overline{S}_{T''}(f) \Rightarrow \overline{S}_T(g) - \underline{S}_T(g) \le \overline{S}_{T''}(g)-$
$\underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A} \Rightarrow$
$\overline{S}_T(h) - \underline{S}_T(h) < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \Rightarrow h$ интегрируемая на $[a, b]$.

Свойство 5:
f интегрируема на $[a,b]$ & $[c,d] \in [a,b] \Rightarrow f$ интегрируема на $[c,d]$.

Доказательство:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
$T' = T \cup \{c,d\}$
$\overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} \leq \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
T^* порожденное разбиением $T' \Rightarrow \overline{S_{T^*}} - \underline{S_{T^*}} \leq \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$

Свойство 6:
Если f интегрируема на отрезке $[a, c]$ и $[c, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство:
Пусть $a < c < b$: $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists T', T''$ отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ $\quad \overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{S}_{T''} - \underline{S}_{T''} < \frac{\varepsilon}{2}$
$T = T' \cup T''$ – разбиение отрезка $[a,b]$.
$\underline{S}_{T'} = \underline{S}_T^1 \leq \overline{S}_T^1 = \overline{S}_{T'}$
$\underline{S}_{T''} = \underline{S}_T^2 \leq \overline{S}_T^2 = \overline{S}_{T''}$
$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \overline{S}_T^1 + \overline{S}_T^2 - \underline{S}_T^1 + \underline{S}_T^2 < \varepsilon \Rightarrow f$ интегируема на $[a, b] \Rightarrow$ интегральная сумма на $[a, b]$ есть сумма интегральных сумм на $[a,c]$ и $[c, b]$.

Пусть $c < a < b$ или $a < b < c$:

$[a, b]$ есть часть отрезка $[c, b]$ или $[a, c] \Rightarrow$ ввиду того, что интегрируемая на отрезке интегрируема на любом его участке, то f интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $a < b < c$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Аналогично доказывается для $c < a < b$.

Свойство 7:
Пусть f ограничена на $(a,b], \forall\alpha > 0 : 0 < \alpha < b - a, f$ интегрируема на $[\alpha + a, b]$,тогда при любом доопределении f в точке a, получится функция, интегрируемая на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{a+\alpha}^b f(x)dx$.

Доказательство:

$$\exists A > 0 : \forall x \in (a,b] \longmapsto |f(x)| \leq A, f(a) = B$$

$$M = max\{A, |B|\} \Rightarrow \forall x \in [a,b], |f(x)| \leq M$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha = \alpha(\varepsilon) : 2M\alpha < \varepsilon/2$$

Для $[a+\alpha, b]$ найдется такое $\exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon/2$

$$\exists T' = T \cup \{a\}, \overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} = \overline{S_T} - \underline{S_T} + (M_0 - m_0)\alpha < \varepsilon/2 + 2M\alpha < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

7.2. Оценки определенного интеграла.

Оценка 1:

f интегрируема на $[a,b]$ & $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

Доказательство:
$f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b] \Rightarrow \forall T$ & $\forall \{\xi\} \mapsto I\{T,\xi\} \geq 0, I -$ предел интегральных сумм.
Теперь надо доказать, что при $\Delta_T \to 0 \mapsto I \geq 0$
От противного:
$I < 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|I|}{2} \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T, \Delta_T < \delta \mapsto |I\{T,\xi\} - I| < \frac{|I|}{2} \Rightarrow I - \frac{|I|}{2} < I\{T,\xi\} < I + \frac{|I|}{2} < 0 \Rightarrow I\{T,\xi\} < 0 -$ противоречие.

Оценка 2:

f непрерывна на $[a,b]$ & $f(x) \geqslant 0 \forall \in [a,b]$ & $\not\equiv 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant j > 0.$

Доказательство:
$\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 2\alpha > 0 \Rightarrow$ [по теореме о сохранении знака непрерывной функции] $\Rightarrow \exists [c,d] \subset [a,b], x \in [c,d] : f(x) \geq \alpha > 0$ на $[c,d] \Rightarrow f(x) - \alpha \geq 0$ на $[c,d] \stackrel{\text{св-во 5 и оц-ка 1}}{\Rightarrow}$ $\int\limits_c^d (f(x) - \alpha)dx \geq 0 \Rightarrow \int\limits_c^d f(x)dx \geq \int\limits_c^d \alpha dx = \alpha(d-c) = j > 0$

$\int\limits_c^d f(x)dx \geq j > 0 \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx \geq 0 + j + 0 > 0$

Оценка 3:

f,g интегрируемы на $[a,b]$ & $\forall x \in [a,b] \mapsto f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$

Доказательство:

$f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in [a,b] \stackrel{\text{оц-ка 1}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \stackrel{\text{св-во 2}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x) \geq 0$

Оценка 4: Если $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $y = |f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Доказательство:
Пусть $|f|$ — интегрируема.

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

$$M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x),\ m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$$

$$\overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} |f(x)|,\ \overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f(x)|$$

$$\overline{M}_j - \overline{m}_j \leq M_j - m_j \quad (*)$$

1) $M_j > 0,\ m_j > 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

2) $M_j < 0,\ m_j < 0 \Rightarrow$ очевидное равенство в $(*)$

3) $M_j > 0, m_j < 0 \Rightarrow \overline{M}_j - \overline{m}_j < M_j - m_j$

Из $(*)$ следует:

$$\overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) \leq \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T:\ \overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f| \text{ интегрируема и } -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Вспомним, что если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$, тогда

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Замечание: $|f|$ – интегрируема $\not\Rightarrow f$ – интегрируема.

Пример:

$$y = \tilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$$

Оценка 5:
Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$.
Если $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство:
$m \leq f(x) \leq M\ \ \forall x \in [a,b]\ \ g(x) \geq 0 \Rightarrow m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$

$\Rightarrow$ исходное условие доказано исходя из оценки 3 и свойства 3.

Предложение [Формула среднего значения]:
Пусть f интегрируема на $[a,b]$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $\exists \mu:\ \ m \leq \mu \leq M$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Доказательство:

Из оценки интегрирования неравенств (результата предыдущего пункта) при $g \equiv 1 \Rightarrow$ $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow \mu = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Теорема [Интегральная теорема о среднем]:

Пусть f и g интегрируемы на $[a,b]$. $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ и $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ (либо $g(x) \leq 0$). Тогда $\exists \mu : m \leq \mu \leq M$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

В частности, если f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство:

1. 1) $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$

   $\Rightarrow$ оценка интегрирования неравенства $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x) = 0$ и μ — любое число

2. 2) $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$

   $\Rightarrow$ Оценка интегрирования неравенства

   $m \leq \dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M$ и $\mu = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$

   Если f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi : \mu = f(\xi)$

Предложение:

Пусть f интегрируема на $[a,b], m = \inf\limits_{[a,b]} f, M = \sup\limits_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx =$ $\mu(b-a)$, если f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $[g \equiv 1]$.

7.3. Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление опре- деленнных интегралов.

Определение:

Пусть $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \quad \forall x \in [a,b]$ существует

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$$

Этот интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема:

Любая непрерывная на $[a,b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$$

Доказательство:

$\forall x \in [a,b],\ x + \Delta x \in [a,b]$. Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем $\exists \xi$, лежащая между x и $x + \Delta x : F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x \Rightarrow$ $\dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$

Так как f непрерывна на $[a,b]$, то при $\Delta x \to 0 \Rightarrow f(\xi) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Замечание:

Из доказательства теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$$

Предложение: Если f интегрируема на $[a,b]$, то F непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство:

$\forall x \in [a,b], x + \Delta x \in [a,b],\ F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x + \Delta x)$.

$\Delta F(x, \Delta x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x : m \le \mu \le M$ (Формула среднего значения)

$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta F(x, \Delta x) \to 0 \Rightarrow F$ непрерывна в X.

Замечание:

Если f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \forall \phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

$\phi(a) = C,\ \phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + C \quad \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$.

Теорема [Формула Ньютона-Лейбница]:

Если f непрерывна на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$, где $\phi -$ любая паравообразная функции f.

Доказательство:
См. предыдущее замечание..

Теорема 7:
Если f:
1) интегрируема на $[a,b]$;
2) обладает на $[a,b]$ первообразной ϕ;
то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$.

Замечание:
1) $y = sgnx, x \in [-1,1]$ интегрируема на $[-1,1]$, но не обладает первообразной.
2) $F(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2}, |x| \le 1, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ является первообразной для
$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, |x| \le 1, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$
$F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0$ f не является интегрируемой на $[-1,1]$ (не ограничена).

Теорема [Замена переменных в определенном интегрировании]:
Пусть выполнены следующие условия:
1) $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$
2) $x = g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$
3) $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \longmapsto a \le g(t) \le b$
тогда справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Доказательство:
$\phi -$ первообразная функции $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$.
Т.к. ϕ и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $[\alpha, \beta]$ соответственно, то
$\frac{d}{dt}\Big[\phi(g(t))\Big] = \phi'(g(t)) \cdot g'(t)$, но $\phi'(x) = f(x) \to \phi'(g(t)) = f(g(t)) \Rightarrow$
$\frac{d}{dt}\Big[\phi(g(t))\Big] = f(g(t)) \cdot g'(t)$
По условию $f(g(t)) \cdot g'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $\phi(g(t)) -$ её первообразная.

$$\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \phi(g(\beta)) - \phi(g(\alpha)) = \phi(b) - \phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема [Формула интегрирования по частям]:

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые на $[a{,}b]$. Тогда

$$\int_a^b udv = [uv]|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство:

Функция $u \cdot v$ является первообразной функции $uv' + u'v$. Каждая их этих функций непрерывная $\Rightarrow$

$$\int_a^b [uv' + u'v]dx = [uv]|_a^b$$

8. Билет 8

8.1. Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь криволинейной трапеции.

Определение:
Пусть на $[a, b]$ задана функция $f: \ \forall x \in [a, b] \to f(x) \geq 0$
Множество $G = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ называется криволинейной трапецией
Интегрируемость криволиенйной трапеции по Жордану была доказана ранее.

Предложение:

Площадь $m(X)$ криволинейной трапеции X определяется формулой $m(X) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство:
f интегр. на $[a, b] \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$
НО $m(G_\varepsilon) = \underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T} = m(G^\varepsilon)$
$m(G_\varepsilon) \leq m(x) \leq m(G^\varepsilon)$
$m(x) = I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейного сектора.

Определение:
$r = r(\varphi)$ непр. на $[\alpha, \beta]$. Криволинейный сектор измерим по Жордану.

Приложение:

Площадь $m(X)$ криволинейного сектора вычисляется по формуле $m(X) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Доказательство:
$T = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta\}$
$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, i = \overline{1, n}$
$R_i = \max r(\varphi) \ \ [\varphi_i, \varphi_{i-1}] \qquad r_i = \min r(\varphi) \ \ [\varphi_i, \varphi_{i-1}]$
$\overline{S_T} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n R_i^2 \Delta\varphi_i, \qquad \underline{S_T} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n r_i^2 \Delta\varphi_i$.
Это верхняя и нижняя сумма Дарбу функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$.
Это функция интегр. на $[a, b]$.
$\underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T}$ и $I = m(X) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Объем тела вращения:.

Определение:
Тело, полученное путем вращения криволинейной трапеции вокруг оси x назовём телом вращения.

Предложение:
Объем $m(X)$ тела вращения X криволинейной трапеции вокруг x вычисляется по формуле $m(X) = \pi\int\limits_a^b [f(x)]^2dx$.

Доказательство: $T = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$M_i = \max(f(x_{i-1}), f(x_i)), \qquad m_i = \min(f(x_{i-1}), f(x_i))$
$\overline{S_T} = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i, \qquad \underline{S_T} = \pi \sum\limits_{i}^{n} m_i^2 \Delta x_i$
Это суммы Дарбу функции $y = \pi f^2(x)$, которая интегрируема на $[\varepsilon_i, b]$
$\underline{S_T} \le m(X) = I \le \overline{S_T} \Rightarrow m(X) = I = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$

Длина дуги кривой.

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t)S, \quad \alpha \le t \le \beta\}$ непрерывно дифференцруема $\Rightarrow$ спрямляемая кривая.

Предложение:
Если кривая Γ непрерывно дифференцруема, то ее длина L вычисляется по формуле $L = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt.$

Доказательство: $S'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$
$L = S(\beta) - S(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta S'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta |\vec{r}\,'(t)dt|.$

1. $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in [\alpha, \beta]$ $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$
2. $y = f(x)$, $\alpha \le x \le \beta$ Ł $= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$
3. $r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) \\ y' = r'\sin(\varphi) + r\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + (r)^2 \tag{1}$$

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + (r)^2}d\varphi \tag{2}$$

8.2. Вычисление площади поверхности вращения.

Пусть $y = f(x), x \in [a, b]$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Рассмотрим поверхность П вращения графика функции f вокруг Ox. $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

$A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)) \dots A_n(x_n, f(x_n))$.

Строим ломанную $A_0, A_1 \dots A_n$. При вращении ломанной вокруг оси x, получаем поверхность Π_T, составляющую одну из боковых поверхностей усеченных конусов, обозначим эту площадь за P_T.

$P_T = 2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} l_i = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] l_i$, где l_i - длина звена $A_{i-1}A_i$.

Определение: Число P называется пределом площади P_T при мелкости разбиения, стремящимся к нулю, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \to |P_T - P| < \varepsilon$.

Определение: Поверхность Π называется квадрируемой, если существует предел площадей P_T при мелкости разбиения, стремещейся к 0. При этом P называется площадью поверхности Π.

Предложение: Если $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, то поверхность вращения Π графика $y = f(x)$ вокруг x, квадрируема и ее площадь вычисляется по форумуле $P = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Без доказательства.

8.3. Криволинейные интегралы первого рода.

Определение: Если существует предел I интегральной суммы σ_T при $\Delta S_T \to 0$, то этот предел называют *криволинейным интегралом первого рода* функции f по кривой Γ.

Обозначение: $I = \int\limits_\Gamma f(x,y) dS$

Определение: Если существует предел I интегральной суммы σ_T^x $[\sigma_T^y]$ при $\Delta S_T \to 0$, то этот предел называют криволинейным интегралом второго рода функции $P(Q)$ по кривой Γ.

Обозначение: $I = \int\limits_\Gamma P(x,y)dx, \int\limits_\Gamma Q(x,y)dy$.

Сумму $\int\limits_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ называют *криволинейный интеграл второго рода.*

Физический смысл крив. инт. 1-го рода - это масса кривой Γ, плотность которой задана функцией $\rho = f(x,y)$.

Физический смысл крив. инт. 2-го рода - это это работа по перемещению материальной точки вдоль кривой Γ под действием силы, имеющей компоненты $u = P(x,y)$, $v = Q(x,y)$.

Замечание: Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от направления обхода кривой Γ.

Для криволинейного интеграла 2-го рода изменение направления обхода меняет знак.

8.4. Несобственный интеграл.

Определение:

Пусть $y = f(x)$ интегр на $[a, \xi]$ $\forall \xi : \xi > a$. Символ $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ наз. несобств. интегралом функции $y = f(x)$ по промежутку $[a; +\infty]$.

Если существует и конечен предел $\lim\limits_{\xi \to \infty} I(\xi) = A,\ A \in R$, то несобственный интеграл $I = \int\limits_a^\infty f(x)dx$ назовается сходящимся и равен числу A.

Обозначение: $\int\limits_a^\infty f(x)dx < 0 \equiv$ интеграл сходится.

Соглашение: несобственный интеграл будет записываться как $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b = \infty$ или b - вертикальная асимптота $f(x)$.

Свойства несобственных интегралов и их вычисление:

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

   $\forall c:\ a < c < b:$

$$\left[\int_a^b f(x)dx < \infty\right] \Leftrightarrow \int_c^b f(x)dx < \infty$$

2. $\left[[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty]\ \ \&\ \ [\int\limits_a^b g(x)dx < \infty]\right] \Rightarrow \int\limits_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$

3. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} F(x) = F(b-0) \in R$.

   Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) \text{ Формула Ньютона-Лейбница}$$

4. Интегрирование по частям работает так же как и неопределенных интегралах.

5. Пусть $y = f(x)$ непр. на $[a, b)$, $x = \varphi(t)$ непр. дифф. и возр на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = b$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

   при условии сходимости хотя бы одного интегралов равенства

6.

$$\left[\left[\int_a^b f(x)dx < \infty\right]\ \&\ \left[\int_a^b g(x)dx < \infty\right]\ \&\ [f(x) < g(x)]\right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

8.5. Несобственные интегралы от неотрицательных функций:

Теорема 1: $\left[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty\right] \Leftrightarrow \left[I(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx \text{ огр. на } [a,b)\ \right].$

Доказательство:

Необходимость: $\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow$ $I(\xi)$ ограничена на $[a,b)$.

$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \exists \lim\limits_{\xi \to b-0} I(\xi) = A \in R \Rightarrow A = \sup\limits_{\xi \in [a,b)} I(\xi)$ (A – это точная верхняя грань) $\Rightarrow 0 \leq I(\xi) \leq A \Rightarrow$ функция ограничена.

Достаточность: $I(\xi)$ огр. на $[a,b) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$

$I(\xi)$ огр. на $[a,b) \overset{\text{def}}{=} \exists C > 0 : \forall \xi \in [a,b) \longmapsto 0 \leq I(\xi) \leq C \Rightarrow \exists A = \sup\limits_{\xi \in [a,b)} I(\xi)$

Из $A = \sup\limits_{\xi \in [a,b)} I(\xi)$ следует:

1. $\forall \xi \in [a,b) \mapsto I(\xi) \leq A$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi_\varepsilon \in (a,B) : I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$

   $\xi_\varepsilon = \delta \ \Rightarrow\ \forall \xi \in (\delta, b) \longmapsto I(\xi) \geq I(\xi_\epsilon) > A - \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall \xi \in (\delta, b) \longmapsto 0 \leq A - I(\xi) < \varepsilon \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\xi \to b-0} I(\xi) = A \in R \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

Теорема 2 [Признак сравнения]: Пусть $\forall x \in [a,b) \longmapsto 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1. $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx < \infty$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx = \infty$

Доказательство:

1. $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Longleftrightarrow$ (Из T_1) $G(\xi) = \int\limits_a^\xi g(x)dx$ ограничена на полуинтервале $\overset{\text{def}}{=} \exists C \geq 0 : \forall \xi \in [a,b) \longmapsto G(\xi) \leq C$.

   $I(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx \leq \int\limits_a^\xi g(x)dx \leq C \ \Rightarrow$ (из T_1) $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx = \infty$.

   В противном случае: $\int\limits_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow$ (из Π_1) $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$.

Следствие (Признак сравнения в предельной форме)

Если $f(x) > 0 \;\; g(x) > 0 \; \forall x \in [a, b) \;\; f(x) \sim g(x) \;\; x \to b-0$, $\int\limits_a^b f(x)dx \;\; \int\limits_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство:

$\big[\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\big] \Rightarrow \big[\varepsilon = 1/2.\ \exists \delta \in (a, b) : \forall x \in (\delta, b) \mapsto |\frac{f(x)}{g(x)} - 1| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$ Далее просто применяем T_2 и Π_2.

8.6. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Пусть функция интегрируема в собст. смысле на промежутке из $[a, b)$. Тогда:

$$[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (a, b) :\ \forall\xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto \left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx\right| < \varepsilon\big]$$

Доказательство:

$$[\int\limits_a^b f(x)dx < \infty\big] \Longleftrightarrow \big[\exists \lim_{\xi\to b-0}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0} I(\xi) = A \in R\big] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \big[\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (a, b) :\ \forall\xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto |I(\xi') - I(\xi'')| < \varepsilon\big]$$

$$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| < \varepsilon \Longleftrightarrow |\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| < \varepsilon$$

8.7. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Определение 1 Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ наз. абсолютно сход., если $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$.

Предложение: Если интеграл сходится абсолютно, он сходится условно.

Доказательство

$\forall \xi'\xi'' \in (a, b)$

$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| \le \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx$. Тогда по критерию Коши $|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx|$ сходится и из $_2$ сходится и $\int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx$.

Определение 2 Если $\int\limits_a^b |f(x)|dx = \infty$, а $\int\limits_a^b f(x)dx < \infty$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ наз. условно сходящимся.

Предложение: Если $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится абсолютно, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)+g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство: Абсолютная сходимость:
$\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty \Rightarrow |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \Rightarrow \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|dx < \infty$

В другую сторону: $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|dx < \infty \Rightarrow f(x) = \big[f(x)+g(x)\big] - g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x)+g(x)| \Rightarrow$ по $_2$ $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$.

8.8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема [Признак Дирихле]: Если выполнены условия:

1. $f(x)$ непр, $g(x)$ непр. дифф. на $[a,b)$
2. $F(x) = \int\limits_a^b f(t)dt$ ограничена на $[a,b)$
3. $g(x)$ монотонна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx < \infty$.

Доказательство:

$$\forall \xi', \xi'' \in [a{,}b)$$

Сделаем замену для интегрирования по частям:
$u = g(x), du = g'(x)dx,\ dv = f(x)dx, v = F(x)$.

$$\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx = g(x)\cdot F(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int\limits_{\xi'}^{\xi''} g'(x)F(x)dx$$

$$|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx| \leq M(|g(\xi')|+|g(\xi'')|) \pm M\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g'(x) \leq 2M(|g(\xi')|+|g(\xi'')|)$$

$$\big[\lim_{x\to b-0} g(x) = 0\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (a,b) \forall x \in (\delta, b) \longmapsto |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ \xi', \xi'' \in (\delta, b) \longmapsto |\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx| < 2M(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{по критерию Коши } \int\limits_a^b f(x)g(x) < \infty$$

Следствие (Признак Абеля): Если выполняются условия:

1. $f(x)$ непр, $g(x)$ непр. дифф. на $[a, b)$
2. $\int\limits_a^b f(x) < \infty$
3. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b)$

Тогда $\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)dx < \infty$.

Доказательство:
Из условия 3 следует, что $\exists \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = g(b-0) \in R$

$g_1(x) = g(x) - g(b-0) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0 \Rightarrow (\ ) \int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx < \infty$

$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx + g(b-0)\int\limits_a^b f(x)dx$

$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходятся, значит сходится и $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

9. Билет 9

9.1. Числовые ряды.

<u>**Определение:**</u> Пусть задана числовая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выражение $u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots$ будем называть *числовым рядом.*

Обозначение: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$
u_k – член ряда.
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ – n-ая частичная сумма ряда.

<u>**Определение:**</u> Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится*, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – *сумма ряда*. Если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *расходится.*

Обозначения:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ – ряд сходится
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$ – ряд расходится

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$

   $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots$

   $S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 0 \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходящаяся $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots$

   $$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

   а) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q} = S$

   б) $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

   в) $q = 1 \Rightarrow S_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

   г) $q = -1 \Rightarrow$ пример 1) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\xi x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < \xi < 1$$

   $$|e^x - S_n| \leqslant e^x \cdot \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

9.2. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon\right]$$

Доказательство:
$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|$
Условие теоремы означает, что $\{S_n\}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ сходится

Обозначение: $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ – n-й *остаток числового ряда*

Следствие:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}]$$

Доказательство:

$$[\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}] \Leftrightarrow [\text{условие критерия Коши}]$$

Следствие [Необходимое условие сходимости числового ряда]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Rightarrow \left[\lim_{k\to\infty} u_k = 0\right]$$

Доказательство:
Следует из условия критерия Коши при $p = 1$.

$$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto |u_{n+1}| < \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\lim_{k\to\infty} u_k = 0\right]$$

Отрицание условия Коши:

$$\left[\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \ \exists n_0 \geqslant n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k\right| \geqslant \varepsilon_0\right]$$

Пример:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ – гармонический ряд
$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, **но**

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} : \forall n \ \exists n_0 = n \ \& \ \exists p_0 = n : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

Предложение 1: Добавление (отбрасывание) конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.

Доказательство:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum\limits_{k=1}^{k_0} \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$
$\forall n > n_0 \mapsto \tilde{S}_n = S_n + A, \quad A = \sum\limits_{k=1}^{k_0} \alpha_k$
Если $\{S_n\}$ сходится [расходится], то $\{\tilde{S}_n\}$ сходится [расходится].

Предложение 2:
$\tilde{u}_k = cu_k, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ ведут себя одинаково.

9.3. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \geqslant 0 \quad \forall k, \quad \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая.

Теорема 2 [Критерий сходимости числового ряда с неотр. членами]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}]$$

Доказательство:

$$[\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}] \ \text{(т.к. монотонная)}$$

Теорема 3 [Признак сравнения]:
$\forall k \mapsto 0 \leqslant u_k \leqslant \tilde{u}_k$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Доказательство:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty,$ т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{R}$

   $\forall n \mapsto S_n \leqslant \tilde{S}_n \leqslant \tilde{S} \Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\overset{.2}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \overset{1)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 3** $\boxed{\forall k}$ можно заменить на $\boxed{\forall k \geqslant k_0, k_0 \in \mathbb{N}}$, т.к. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.
2. Неравенство $0 \leqslant u_k \leqslant \tilde{u}_k$ можно заменить $0 \leqslant u_k \leqslant c\tilde{u}_k, c > 0$, т.к. умножение на действительное число c не влияет на поведение числового ряда.

Следствие:

$$[\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } u_k \sim \tilde{u}_k] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \text{ ведут себя одинаково}\right]$$

Доказательство:

$$\left[\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\tilde{u}_k} = 1\right] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \left|\frac{u_k}{\tilde{u}_k} - 1\right| < \varepsilon\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k \geqslant K \mapsto (1-\varepsilon)\tilde{u}_k < u_k < (1+\varepsilon)\tilde{u}_k$$

$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$

Утверждение следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k = \dfrac{1}{3+b^k}$

   а) $b \leqslant 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} u_k \neq 0 \Rightarrow$ не выполнено **НУС** $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

   б) $b > 1$

   $$u_k = \frac{1}{3+b^k} \leqslant \left(\frac{1}{b}\right)^k = q^k, \quad 0 < q < 1$$

   $$\sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$

   $$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \qquad k > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \tilde{u}_k$

   $$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow \tilde{S}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \overset{.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

   $$\forall \alpha \geqslant 2 \mapsto \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \text{ при } \alpha \geqslant 2$$

Теорема 4 [Признак сравнения]:

$$\left[\forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k}\right] \Rightarrow$$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$

Доказательство:

$$\times \begin{cases} \dfrac{u_2}{u_1} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \\ \dfrac{u_3}{u_2} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_3}{\tilde{u}_2} \\ \dots \\ \dfrac{u_k}{u_{k-1}} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_{k-1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_k}{u_1} \leqslant \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_1} \Rightarrow u_k \leqslant c\tilde{u}_k, c = \frac{u_1}{\tilde{u}_k} > 0$$

Утверждение **Теоремы 4** следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

<u>Теорема 5 [Признак Даламбера]:</u>

$$\forall k \ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0$$

1. $\left[\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$
2. $\left[\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $\tilde{u}_k = q^k$

   $\dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q \Rightarrow \dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q < 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \overset{.4}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\tilde{u}_k = 1$

   $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant \dfrac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = 1, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \overset{.4}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

<u>Теорема 6 [Признак Даламбера в предельной форме]:</u>

$$[\forall k \ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0] \,\&\, \left[\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow$$

1. $[L < 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$
2. $[L > 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$

   $\varepsilon = \alpha \ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 < \dfrac{u_{k+1}}{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \overset{.5}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$

   $\varepsilon = \alpha\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \dfrac{u_{k+1}}{u_k} > L - \alpha = 1 \overset{.5}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 5** неравенство $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ **<u>нельзя</u>** заменить неравенством $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} < 1$.

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \mapsto \dfrac{k}{k+1} < 1\ \forall k$, **<u>но</u>** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$

2. Для $L = 1$ (в **Теореме 6**) признак Даламбера в предельной форме «не работает».

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{k+1} = 1$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{(k+1)^2} = 1$

<u>Теорема 7 [Признак Коши]:</u>

$$\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0$$

1. $\left[\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$

2. $\left[\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1\right] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $\tilde{u}_k = q^k \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \leqslant \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = q < 1 \Rightarrow u_k \leqslant \tilde{u}_k$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \overset{.3}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $\tilde{u}_k = 1 \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \geqslant \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = 1 \Rightarrow u_k \geqslant \tilde{u}_k$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \overset{.3}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

<u>Теорема 8 [Признак Коши в предельной форме]:</u>

$$[\forall k\ [\forall k \geqslant k_0] \mapsto u_k > 0]\,\&\left[\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = L \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow$$

1. $[L < 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$

2. $[L > 1] \Rightarrow \left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\right]$

Доказательство:

1. $L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$

   $\varepsilon = \alpha\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 < \sqrt[k]{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \overset{.7}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$

2. $L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$

   $\varepsilon = \alpha \ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto \sqrt[k]{u_k} > L - \alpha = 1 \overset{.7}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$

Замечание:

1. В **Теореме 7** неравенство $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ **<u>нельзя</u>** заменить неравенством $\sqrt[k]{u_k} < 1$.
2. Для $L = 1$ (в **Теореме 8**) признак Коши в предельной форме «не работает».
3. Предельный признак Коши более сильный, чем предельный признак Даламбера.

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \ u_k = \dfrac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}}, \ \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3 + (-1)^{k+1}}{3 + (-1)^k}$

$$\begin{cases} k = 1 : \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ k = 2 : \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ не существует}$$

<u>Теорема 9 [Признак Коши—Маклорена][интегральный признак]:</u>
Пусть f – неотрицательная и невозрастающая на $[m; +\infty), \ m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left[\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty\right] \Leftrightarrow \left[\exists \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha_n = \int\limits_m^n f(x)dx\right], \ n \geqslant m + 1$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \int\limits_m^{+\infty} f(x)dx\right)$$

Доказательство:
$\forall k \geqslant m + 1 \mapsto k - 1 \leqslant x \leqslant k \Rightarrow f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1)$
$[k-1; k]$: f – монотонная и ограниченная $\Rightarrow f$ интегрируема

$$f(k) \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k-1), \ k \geqslant m + 1$$

$$+\begin{cases} f(m+1) \leqslant \int\limits_m^{m+1} f(x)dx \leqslant f(m) \\ f(m+2) \leqslant \int\limits_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leqslant f(m+1) \\ \dots \\ f(n) \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant f(n-1) \end{cases}$$

$S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$

$$S_n - f(m) \leqslant \int\limits_m^n f(x)dx \leqslant S_{n-1} \Rightarrow \{\alpha_n\} \text{ сходится} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ ограничена}$$

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}},\ \alpha > 1$

$\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}}dx < \infty$, если $\alpha > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ при $\alpha > 1$.

2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln^{\beta} k}$

$\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^{\beta} x} < \infty$ при $\beta > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln^{\beta} k} < \infty$ при $\beta > 1$.

9.4. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

Определение: Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – *абсолютно сходящийся* ряд.

Предложение:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty\right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty\right]$$

Доказательство:
По Критерию Коши сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Определение: Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| = \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – *условно сходящийся* ряд.

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}},\ \alpha > 1$

$\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}\right| = \dfrac{1}{k},\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ при $\alpha > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$ сходится абсолютно.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

$|u_k| = \dfrac{1}{k},\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} + \ldots$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} - \ldots + \dfrac{(-1)^n x^n}{n} + R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x) = [\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ 0<\theta<1$$

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ сходится условно}$$

Тождество Абеля:
$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}, \{v_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad S_n = u_1 + \ldots + u_n, \quad u_k = S_k - S_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_{k+1} - v_k)$$

Теорема [Признак Лейбница]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k,\ 0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k,\ v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\right] \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k < \infty\right]$$

Доказательство:
$S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots + v_{2n-1} - v_{2n} \geqslant 0$
$\{S_{2n}\}$ – неубывающая и ограниченная $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$
$S_{2n} = v_1 - \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(v_4 - v_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(v_{2n-2} - v_{2n-1})}_{\geqslant 0} - v_{2n} \Rightarrow S_{2n} \leqslant v_1\ \forall n$
$S_{2n-1} = S_{2n} + v_{2n} \Rightarrow S_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

Теорема [Признак Дирихле]: Пусть

1. $\{\mathscr{U}_n\}$ – послед. частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ограниченна, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство:
$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\mathscr{U}_n| \leqslant C$

$\{v_k\}$ – невозрастающая и $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K \mapsto 0 \leqslant v_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C}$

$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant Cv_{n+p} + Cv_n + C\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(v_k - v_{k+1}) \leqslant 2Cv_n < \varepsilon$

Следствие [Признак Абеля]: Пусть

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$
2. $\{v_k\}$ – монотонна и ограниченна

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$

Доказательство:
$\{v_k\}$ монотонна и ограниченна $\Rightarrow \{v_k\}$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} v_k = v \in \mathbb{R}$
$\tilde{v}_k = v_k - v$ монотонна и $\tilde{v}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
$\{\mathscr{U}_n\}$ сходится $\Rightarrow \{\mathscr{U}_n\}$ ограниченна

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tilde{v}_k}_{<\infty \text{ по пр. Дирихле}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k - v\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k}_{<\infty \text{ по усл.}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

Примеры:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ убывает и $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < \infty$ (по признаку Лейбница)
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k}, \quad x$ – фиксированное число, $x \neq 2\pi m$, т.к. получится гармонический ряд

   $v_k = \dfrac{1}{k},\ u_k = \cos kx,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{2k+1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2k-1}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\right]$$

   $|S_n| = \left|\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ \forall n,\ x \neq 2\pi m \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k} < \infty$ (по признаку Дирихле)
3. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{2}{9} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3k-2} + \dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{2}{3k}\right)$

   $v_k = \dfrac{1}{k}$
   $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = 1, u_5 = 1, u_6 = -2, \ldots$
   $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 2, S_6 = 0, \ldots$
   $S_n \leqslant 2\ \forall n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ (по признаку Дирихле)

9.5. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Теорема [Коши]:

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то любой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$, полученный из исходного перестановкой членов, является абсолютно сходящимся и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = S$.

Доказательство:

$\circledast$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, \quad \tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{u}_k$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сх. абс.}\right] \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S\right] \overset{\text{def}}{=} \left[\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \mapsto |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$N_0 = \max\{N_1; N_2\}$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{S}_n : \forall n \geqslant N : S_N \text{ содержит все } N_0 \text{ первых членов исходного ряда}$$

$$|\tilde{S}_n - S| = |(\tilde{S}_n - S_{N_0}) + (S_{N_0} - S)| \leqslant \underbrace{|\tilde{S}_n - S_{N_0}|}_{n-N_0 \text{ членов}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Число $p \in \mathbb{N}$ выбираем таким образом, чтобы $N_0 + p$ был больше номеров членов ряда, содержащихся в $\tilde{S}_n - S_{N_0} \Rightarrow |\tilde{S}_n - S_{N_0}| \leqslant \sum\limits_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$|\tilde{S}_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для доказательства абсолютной сходимости повторяем $\circledast$ для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k|$.

9.6. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$$

$$\begin{cases} \tilde{S}_{3m} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{3m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_n, \ n = 3m \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-2} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \frac{1}{2}\ln 2$$

Теорема [Риман]:

Если числовой ряд сходится условно, то каково бы ни было число S, члены ряда можно переставить так, что полученный ряд сходится к S.

9.7. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Теорема [О сумме абсолютно сходящихся рядов]: Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \mathscr{U} \in \mathbb{R}, \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = \mathscr{V} \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \mathscr{U} \pm \mathscr{V}$$

Доказательство:

$$\mathscr{U}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad \mathscr{V}_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) = \mathscr{U}_n \pm \mathscr{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathscr{U} \pm \mathscr{V}$$

Теорема [О произведении абсолютно сходящихся рядов]:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathscr{U} \text{ -- абс. сход.}, \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathscr{V} \text{ -- абс. сход.}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \text{ сход. абс. и } \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathscr{U} \cdot \mathscr{V}\right]$$

Доказательство:

$\bar{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j$

Пусть m – наибольший индекс из индексов k и l, входящих в $\bar{S}_n \Rightarrow \bar{S}_n \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сход. абс. $\Rightarrow \{\bar{\mathscr{U}}_m\}, \{\bar{\mathscr{V}}_m\}$ ограничены $\Rightarrow \{\bar{S}_n\}$ ограничена $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |w_j| < \infty$ $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j$ сход. абс.

$\mathscr{W}_n = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathscr{U} \cdot \mathscr{V} \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j = \mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$

10. Билет 10

10.1. Понятия функциональных последовательностей и рядов.

Определение: [функциональная последовательность]:
Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество.

$\forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow y = f_n(x), x \in X$

Множество занумерованных функций $f_1, f_2 \dots f_n \dots$ называют функциональной последовательностью, где

$$f_n \text{ — член последовательности}$$
$$X \text{ — область определения}$$

Определение: [функциональный ряд]:
сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

членов функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется функциональным рядом.

Замечание: изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей:

1. Каждому функциональному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

соответствует функциональная последовательность его частичных сумм

$$\{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

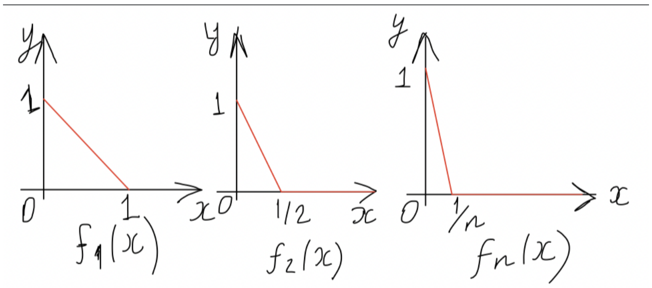
2. Каждой функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует функциональный ряд с членами $f_1(x) = S_1(x)$, $f_2(x) = S_2(x) - S_1(x)$ $\dots$, $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, $\dots$

Примеры:

1.
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

2. $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
   $S_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

   $S_{n+1}(x)$ отличается от e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа на $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$



10.2. Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве.

Определение: [сходимость в точке]:
Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Если указанная последовательность сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называют сходящейся в точке x_0.

Замечание: аналогичное верно и для функциональных рядов: Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называют сходящимся в точке x_0.

Определение: [область сходимости]:
Множество точек в которых сходится функциональная последовательность (или функциональный ряд) называют областью сходимости функциональной последовательности (функционального ряда).

Замечание: область сходимости функциональной последовательности(ряда) может совпадать с его областью определения X, составлять его части или быть $\varnothing$.

Определение: [предельная функция]:
Пусть $\widetilde{X} \subset X$ — область сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \widetilde{X}$ определяет на $\widetilde{X}$ функцию $y = f(x)$. Эта функция называется предельной функцией $y = f(x)$ функциональной последовательности.

Определение: [сумма ряда]:
Пусть $\widetilde{X} \subset X$ — область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$, совокупность пределов, взятых в точке $x \in \widetilde{X}$ определяет на $\widetilde{X}$ функцию $y = S(x)$. Эта функция называется суммой ряда $y = S(x)$ функциональной последовательности.

10.3. Понятие равномерной сходимости на множестве.

Определение:[равномерная сходимость функциональной последовательности]:
Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции $y = f(x)$ на множестве X если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(-): $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n\ \exists n_0 \geq n\ \&\ \exists x_n \in X : |f_{n_0}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$

Примеры:

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n\ \&\ x_n = \frac{1}{2n}$:

$f(x_n) = 0,\ f_n(x_n) = \frac{1}{2}$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \varepsilon_0$

2.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Для заданного $\delta > 0\ \exists N \longmapsto$

$f_n(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$

$f(x) \equiv 0$ на $[\delta, 1]$

Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[\delta;1]}{\rightrightarrows}} 0$.

Замечания:

1. N в определении не зависит от x, а только от ε. Один номер для всех $x \in X$ одновременно.

2. Из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ НЕ следует равномерная сходимость на X.

Замечание: Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X'}{\rightrightarrows}} f(x)$, где $X' \subset X$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Определение: [равномерная сходимость функционального ряда]:
Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X , если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$

10.4. Критерий Коши равномерной сходимости.

Теорема [Критерий Коши для функциональной последовательности]: Функциональная последовательность $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ сходится тогда или только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \longmapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]$$

Доказательство:

1. *Необходимость* $\Rightarrow$*:*

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$

Тогда:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\ \&\ x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$
Тогда и
$\forall p \in \mathbb{N}\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$

Воспользуемся правилом треугольника:

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. *Достаточность* $\Leftarrow$*:*

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N}\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]$$

Зафиксируем $x \in X$, тогда $\exists f(x)$ — предельное значение последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Тогда $f_{n+p}(x) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$

В неравенстве перейдем к предельному при $p \longrightarrow \infty$:
$\forall n \geq N\ \&\ \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда получим, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ по определнию.

Теорема [Критерий Коши для функционального ряда]:
Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши:

$$\big[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\&\ \forall p \in \mathbb{N}\&\ \forall x \in X \longmapsto$$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon]$$

Замечание: критерий Коши для функциональных рядов следует из критерия Коши для функциональных последовательностей, так как:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}| = S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

Отрицание условия Коши:

Для функциональной последовательности:
$\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall n\ \exists n_0 \geq n\ \&\ \exists p_0 \in \mathbb{N}\ \&\ \exists x_n \in X : |f_{n_0+p_0}(x_n) - f_{n_0}(x_n)| \geq \varepsilon_0$

Для функционального ряда:
$\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall n\ \exists n_0 \geq n\ \&\ \exists x_n \in X : |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \geq \varepsilon_0$

10.5. Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Теорема 1 [sup-критерий для функциональной последовательности]:
$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Доказательство:
Обозначим $M_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.
Тогда запишем наше равенство в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto 0 \leq M_n < \varepsilon$$

1. *Необходимость $\Rightarrow$:*

$$[f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)] \overset{def}{=} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\text{: } \forall n \geq N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right]$$

Отсюда, $M_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2. *Достаточность $\Leftarrow$:*
$\forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$

То есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \&\ \forall x \in X \longmapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 2 [sup-критерий для функционального ряда]:
Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0$$

Доказательство:

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

То есть $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

Но $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} S(x)$ тогда и только тогда, когда $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} 0$.

Примеры:
1. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $x \in [2, +\infty) \subset X$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{e^{nx}} = 0 \Rightarrow y = f(x) \equiv 0$
$f_n'(x) = nx(2-nx)e^{-nx} = 0$
$x_n = \frac{2}{n}$ – точка максимума, при $x > \frac{2}{n}$, $n > 1 \Rightarrow f_n'(x) < 0 \Rightarrow f_n$ убывает на X;

$$\sup_X f_n(x) \le f(\frac{2}{n}) = \frac{4}{ne^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} 0$.
2. $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $X = (0{,}2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{e^{nx}} = 0$$
$$\Rightarrow y = f(x) \equiv 0$$

$$f_n'(x) = n^2x(2-nx)e^{-nx} = 0$$

$x_n = \frac{2}{n}$, $n > 1$– точка максимума. $\Rightarrow$

$$\sup_X f_n(x) = \frac{4}{e^2} \underset{n\to\infty}{\not\rightarrow} 0$$

3.

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}},\ X = (0{,}1)$$

$$\forall n\ \exists n_0 = n\ \&\ \exists p_0 = n\ \&\ \exists x_n = \frac{1}{n}$$

$$|f_{2n}(x_n) - f_n(x_n)| = |\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \frac{\ln 1}{\sqrt{1}}| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} > \varepsilon_0 = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$$

Отсюда, равномерной сходимости нет.

10.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

<u>**Теорема 1:**</u> если члены функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

непрерывны на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$, то сумма ряда $y = S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство:

$\left[S_n(x) \overset{x\in[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)\right] \overset{def}{=} \left[\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geq N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right]$

Возьмем $n_0 \geq N \Rightarrow |S_{n_0}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

При $x_0 \in [a,b]$ выполняется:

$|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

В силу непрерывности f_k на $[a,b]$, S_{n_0} непрерывна на $[a,b]$, в частности в точке $x_0 \in [a,b]$, то есть:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\colon \forall x \in [a,b]\colon |x - x_0| < \delta \longmapsto |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x \in [a,b]\colon |x - x_0| < \delta \longmapsto$

$|S(x)-S(x_0)| = \big|[S(x)-S_{n_0}(x)]+[S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)]+[S_{n_0}(x_0)-S(x_0)]\big| \leq |S(x)-S_{n_0}(x)| + \big|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\big| + \big|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in [a,b]$ функция $y = S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ непрерывны на $[a,b]$ и последовательность сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Замечание: пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 и $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

$$\forall x_0 \in [a,b] \longmapsto \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$$

Отсюда,

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x)$$

При выполнении условий теоремы 1 возможен почленный переход к пределу под знаком суммы для равномерно сходяшегося функционального ряда, члены которого есть непрерывные функции.

Теорема 2: если члены функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt$ также сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = \int\limits_a^x S(t)dt$.

Доказательство: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к $y = S(x)$:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n \geqslant N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

По теореме 1 S непрерывны на $[a,b]$, следовательно S и f_k — интегрируемые функции ($\forall k$) на $[a,b]$. Обозначим:

$$I(x) = \int_a^x S(t)dt$$

и

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt = \int\limits_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt = \int\limits_a^x S_n(t)dt$$

$$|I(x) - I_n(x)| = \Big| \int\limits_a^x [S(t) - S_n(t)]dt\Big| \leq \int\limits_a^x |S_n(t) - S(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) < \varepsilon$$

Итак:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N\ \&\ \forall x \in [a,b] \longmapsto |I(a) - I_n(x)| < \varepsilon$, то есть функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt$$

сходится равномерно на $[a,b]$ к функции

$$\int\limits_a^x S(t)dt = \int\limits_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt = \int\limits_a^x [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)]dt$$

Теорема 2': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывны на $[a,b]$. и $f_n(x) \overset{[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $\int\limits_a^x f_n(t)dt \overset{[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^x f(t)dt$.

Замечания:

1. В теоремах 2,2' отрезок $[a,x]$ можно заменить отрезком $[x_0,x] \subset [a,b]$.
2. Теоремы 2 и 2' остаются справедливыми, если функции $y = f_k(x)$ интегрируемы на $[a,b]$.

Теорема 3: если члены функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a,b]$ и функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ ($x_0 \in [a,b]$) сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = S(x)$ и $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

Доказательство:

Обозначим:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Из условия теорем 3 и 1 $y = \widetilde{S}(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ можно почленно интегрировать(по теореме 2), то есть:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{S}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} [\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt]$$

.

Согласно теореме 2 ряд сходится равномерно на $[a,b]$.

Но $\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt = f_k(x) - f_k(x_0)$, следовательно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\int\limits_{x_0}^{x} f'_k(t)dt] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$$

Ряды слева и справа равномерно-сходящиеся, а значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{S}(t)dt = S(x) - S(x_0)$$

Левая часть – интеграл с переменным верхним пределом и его производная равна $\widetilde{S}(x)$ $\Rightarrow$ правая часть – дифференцируемая функция и $S'(x) = \widetilde{S}(x)$, то есть

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Замечания:

1. По условию теоремы 3: $\widetilde{S}(x) = S'(x)$ – непрерывная функция $\Rightarrow$ S – непрерывно-дифференцируемая на $[a,b]$.

2. Теорема 3 остается справедливой, если функции $y = f_k(x)$ являются дифференцируемыми функцими.

Теорема 3': если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на $[a,b]$, числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, где $x_0 \in [a,b]$; а функциональная последовательность $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a,b]$, то $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $y = f(x)$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x),\ x \in [a,b]$$

Замечание: можно сделать важный вывод: равномерная сходимость не выводит из класса непрерывных функций, а в случае равномерной сходимости производных – из класса непрерывно дифференцируемых функций.

10.7. Достаточные признаки сходимости функциональных рядов.

Теорема 1 [Признак Вейерштрасса]:
Если для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

можно указать такой числовой ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, что $\forall k \geq k_0$ и $\forall x \in X$ выполняется: $0 \leq |f_k(x)| \leq a_k$, то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на X.

Доказательство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\colon \forall n \geq N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \longmapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\exists N = max\{N_1, k_0\} \ \Rightarrow \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \longmapsto$$
$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Следствие: если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где $a_k = \sup\limits_{x \in X} |f_k(x)|$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.

Теорема 2 [Признак Дирихле]: Если:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

   имеет равномерно ограниченную на X последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

   $\exists M > 0\colon \forall x \in X \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |S_n(x)| \leq M$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ монотонна на X и $v_k(x) \underset{k \to \infty}{\overset{x \in X}{\rightrightarrows}} 0$:

   $v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \ \forall x \in X \& \ \forall k$
   $[v_k(x) \geq v_{k+1}(x)]$

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X.

Теорема 2 [Признак Абеля]: Если:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X.
2. $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и монотонна на X.

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится равномерно на X.

11. Билет 11

11.1. Степенные ряды с комплексными числами

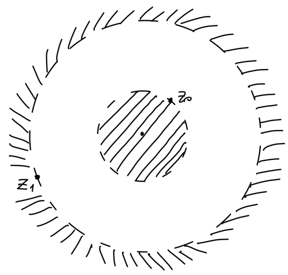
Определение: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - a)^k$; $c_k, a \in \mathbb{C}-$ фиксированные числа, $\zeta \in \mathbb{C}$ - переменная.
Такой функциональные ряд называется *степенным.*
c_k - коэф. степенного ряда. Этот ряд сходится в точке а.

$\zeta - a = z \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - будем рассматривать такой степенной ряд, который сходится в т. $z = 0$

11.2. Теорема 1. [Первая теорема Абеля]

1. Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в т. $z \neq 0$, то он сходится в круге: $k_0 = \{z = \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$

2. Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится в т. z_1, то он расходится в любой т. $z : |z| > |z_1|$



$$[\lim_{n\to\infty} z_n = a] \overset{\text{def}}{=} [\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

Доказательство:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty \Rightarrow c_k z_0^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ Ограничена: $\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leqslant M$

$\forall z : |z| < |z_0|$

$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0}\right)^k| \leqslant M \cdot [q(z)]^k, |q(z)| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k(z) < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty \Rightarrow \forall z : |z| > |z_1| -$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится, если бы в точке z_2 :

$|z_2| > |z_1|$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_2^k < \infty \overset{1)}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty$ - противоречие.

Следствие 1. Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty, z_0 \neq 0$, то $\forall \rho : 0 < \rho < |z_0|$ в круге $k_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \rho\}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно.

Доказательство:
$\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leqslant M$

$\forall z \in K_\rho$

$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k}| \leqslant M \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^k = M \cdot q^k$

$|q| = \frac{\rho}{|z_0|} < 1$ ($\frac{\rho}{|z_0|}$ не зависит от z),

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k < \infty \overset{\text{По пр. Вей.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно в круге K_ρ

Следствие 2 Если в т. $z_0 \neq 0$ вып. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty$, то

1) $\sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k z^{k-m}$ сходится абсолютно в круге K_0 и равномерно в круге K_ρ

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$ сходится абсолютно в круге K_0 и равномерно в круге K_ρ

Доказательство:
1) $\forall z \in k_0 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| = |c_k z_0^k \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k-m} \cdot \frac{1}{z_0^m}| \leqslant$

$\frac{M}{|z_0|^m} \cdot |\frac{z}{z_0}|^{k-m} = \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q^{k-m}(z), \quad q(z) = |\frac{z}{z0}| < 1$

$\sum\limits_{k=m}^{\infty} q^{k-m} < \infty$ - сходится абсолютно в K_0

$\forall z \in K_1 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| \leqslant \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q_1^{k-m}, \quad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|} < 1.$

$0 < q_1 < 1$ - не зависит от $z \Rightarrow$ по признаку Вейр. в K_1 ряд сходится равномерно
2) $\forall z \in K_0$

$|k c_k z^{k-1}| = |\frac{c_k z_0^k}{z_0} \cdot k \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k-1}| \leqslant \frac{M}{|z_0|} \cdot k q^{k-1}(z), q(z) = |\frac{z}{z_0}| < 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k q^k(z) < \infty$ по признаку Даламбера

11.3. Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда].

Для любого степенного ряда существует R ($R \geqslant 0$ или $R = +\infty$)
такое, что

1) $0 < R < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ в круге $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и расходится в $\mathbb{C} \backslash \overline{K}$

2)$R = 0$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ только в $z = 0$

3) $R = +\infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \; \forall z \in \mathbb{C}$

R - называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

K - круг сходимости.

Доказательство: Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ - множество сходимости степенного ряда; $\mathscr{D} \neq \varnothing$, т.к. $0 \in \mathscr{D}$

1) $\mathscr{D}$ - огран., $z_0 \in \mathscr{D}, z_0 \neq 0$

$R = \sup\limits_{z \in \mathscr{D}} |z|$ - сущ. т.к. $\mathscr{D}$ огранич. мн-во.

Докажем: $\forall\ z \in K \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$

$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{K} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$

По определению sup $\forall z' \in K\ \exists z_1 \in \mathscr{D} : |z'| < |z_1| \leqslant R$, т.к.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty \Rightarrow$ 1-я теорема Абеля $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty$ и сходится абсолютно $\Rightarrow$ В силу произв. $z' \in K \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абс. в круге K

Пусть $z' \notin K \Rightarrow |z'| > R \Rightarrow$ по опред. $\sup z' \notin \mathscr{D} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k = \infty \Rightarrow$ расходится вне круга K

2) $\mathscr{D}$ - огран.; если $\mathscr{D} = \{0\}$, то ряд сход в т. $z = 0$ и расх в $z \neq 0$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad z = 0 \quad \Rightarrow R = 0$

3) $\mathscr{D}$ - неогранич. $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \exists z' \in \mathscr{D}$:

$|z| < |z'|, \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty \overset{\text{1-я т. Аб.}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty.$

11.4. Теорема 3. [Вторая теорема Абеля].

Если $0 < R < +\infty$, R - радиус сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$, то на $[0, R]$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равномерно и его сумма $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непрерывна $\forall x \in [0, R]$

Доказательство: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k R^k}_{U_k} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}_{V_k}$

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$

2) $V_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad 0 \leqslant V_k \leqslant 1 \quad \forall x \in [0; R]$

$V_{k+1} = \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} < \left(\frac{x}{R}\right)^k = V_k \quad \forall k$

$\Downarrow$ признак Абеля

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k < \infty$ сходится равномерно на $[0, R]$

$f_k(x) = c_k x^k$ - непрерывна на $[0; R]$

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ непреревна на $[0; R]$

11.5. Теорема 4.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geqslant 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

2) Если $|c_k| > 0\ \forall k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \rho\ (\rho \geqslant 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$.

Доказательство:
$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\}$

$z_0 \in K : \sqrt[k]{|c_k z_0^k|} = |z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |z_0| \cdot \rho < \frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z_0^k| < \infty$

$z_1 : |z_1| > \frac{1}{\rho}$

$\sqrt[k]{|c_k z_1^k|} = |z_1| \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |z_1| \cdot > \frac{1}{\rho} \cdot \rho \Rightarrow$ По признаку Коши $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty$.

Пример (показывает, для чего нужна формула Коши-Адамара):

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{k^2} = z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + ... + z^{k^2} + ...$

$\{c_k\} = \{c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0, c_9 = 1, ...\}$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{|c_{k^2}|} = 1 \Rightarrow R = 1.$

11.6. Теорема 5. [Формула Коши-Адамара].

Если R - радиус сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, тогда $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$.

Доказательство: 1) $\{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ - неогр.

2) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = L > 0; \quad L \in R$

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0

1) Для бескон. числа номеров $k \in \mathbb{N}$

$|c_k z^k| > 1 \quad \forall z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$

$\Downarrow$

Не выполняется необходимое условие сходимости ряда

$\Downarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$

$\Downarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ только для $z = 0$

2) Докажем, что

а) $\forall z : |z| < \frac{1}{L}$ ряд сходится

б) $\forall z : |z| < \frac{1}{L}$ ряд расходится

а) $z : \quad |z| < \frac{1}{L}$ Тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : |z| < \frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{L}$

$\varepsilon > 0\ \exists\, k_0(\varepsilon) : \forall k \geqslant k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < L + \frac{\varepsilon}{2}$

$\sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$ в круге $K = \{z : |z| < \frac{1}{L}\}$

б) $\forall z : |z| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : |z| > \frac{1}{L-\varepsilon} > \frac{1}{L}$

$[\ \exists\ \{c_{k_n}\} : \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L\ ] \overset{\text{def}}{=} [\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|}\,]$

$\sqrt[k_n]{|c_{k_n}|z^{k_n}} = |z| \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > \frac{1}{L-\varepsilon} \cdot (L-\varepsilon) = 1 \quad \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |c_k z^{k_n}| > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Не выполняется необходимых условий сходимости

$\Downarrow$

Ряд расходится $\forall z : |z| > \frac{1}{L}$

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ сходится к 0.

$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 : \frac{1}{2|z|} = \varepsilon : \quad \exists\, k_0(\varepsilon) : \forall k \geqslant k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{2|z|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[k]{|c_k| \cdot |z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} < |z| \cdot \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2} < 1$

$\Downarrow$ По признаку Коши

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$

11.7. Теорема 6.

Для рядов

$$\underset{1)}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}, \qquad \underset{2)}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{k+1}}{k+1}}, \qquad \underset{3)}{\sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}}$$

радиус сходимости один и тот же.

1) R_1, K_1

2) R_2, K_2

3) R_3, K_3

Надо доказать: $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Доказательство: $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 1 \leqslant k \quad \times |c_k z^{k+1}|$

$|\frac{c_k}{k+1} z^{k+1}| \leqslant |z| \cdot |c_k z^k| \leqslant |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|$

$$\underbrace{|z| \cdot |c_k z^k| \leqslant |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|}_{1)} \qquad \underbrace{|\frac{c_k}{k+1} z^{k+1}| \leqslant |z| \cdot |c_k z^k|}_{2)}$$

1) $\forall z \neq 0 \in K_3 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \Rightarrow R_1 \geqslant R_3$

2) $\forall z \neq 0 \in K_1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} < \infty \Rightarrow R_1 \leqslant R_2$

В результате: $R_3 \leqslant R_1 \leqslant R_2$

Надо доказать, что $R_2 \leqslant R_3$

$z \in K_2 \quad \exists\, \rho < R_2 : z \in K_\rho \quad |k c_k z^{k-1}| = |k c_k z^{k-1} \cdot \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{z^2}{z^2}| = = |\frac{c_k}{k+1} \cdot z^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2}| = |\frac{c_k}{k+1} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2} \cdot \left(\frac{z}{\rho}\right)^{k+1}| \overset{\exists M>0}{\leqslant}$

$\leqslant \frac{M}{|z|^2} k(k+1) \rho_1^{k+1}$, где $|q_1| < 1 \quad q_1 = \frac{z}{\rho}$

$$\Downarrow \forall \in K_2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} < \infty \Rightarrow R_3 \geqslant R_2$$

Тогда в сумме $R_1 = R_2 = R_3 = R$

11.8. Теорема 7.

Если R - радиус степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x)$,

$x \in (a-R; a+R)$; $a_k, a, x \in R$, то

1) f бесконечно дифф. на $(a-R; a+R)$

$f^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} k(k-1)...(k-(m-1))a_k(x-1)^{k-m}$

2) $\forall x \in (a-R; a+R) \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$

При почленном дифференцировании ряда радиус не меняется.

Доказательство: $\forall \rho : 0 < \rho < R$ на $[a-\rho; a+\rho]$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ всё можно делать.

Следствие: $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

12. Билет 12

12.1. Степенные ряды с действительными членами.

Теорема:. Если R – радиус сходимости степенного ряда и выполнено следующее:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x),\ x \in (a-R, a+R),\ a_k, a \in (R)$$

то

1. f бесконечно дифференцируемая функция на $(a-R, a+R)$ и выполняется:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-(m-1))a_k(x-a)^{k-m}$$

2. $\forall\ x \in (a-R, a+R) \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$

Следствие. $a_n = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

12.2. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.

Покажем, что сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости.

Теорема:. Сумма степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ дифференцируема в интервале сходимости и производная равна

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1},$$

причём ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Члены ряда $c_n (x-x_0)^n$ являются непрерывно дифференцируемыми на всей числовой прямой функциями. Пусть $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ и точка x принадлежит интервалу сходимости (x_0-R, x_0+R). Тогда существует отрезок $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$, включающий точку x.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. Вычислим его радиус сходимости R'

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|nc_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|c_n|} \cdot \sqrt[n-1]{n}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (|c_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}} = R$$

Таким образом, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ имеют одинаковый интервал сходимости, и, следовательно, на отрезке $[a,b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-x_0)^{n-1}$ сходится равномерно.

По теореме о дифференцируемости суммы функционального ряда сумма степенного ряда $f(x)$ дифференцируема в точке x и верна формула

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \left(x - x_0\right)^{n-1}$$

что полностью доказывает теорему. □

Теперь в силу доказанной теоремы при дифференцировании суммы степенного ряда вновь получаем степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Это позволяет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема:. Сумма степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$ дифференцируема любое количество раз и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \left(x - x_0\right)^{n-k}$$

причём радиусы сходимости всех получающихся рядов одинаковы.

Доказательство. По предыдущей теореме функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$ дифференцируема и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n \left(x - x_0\right)^{n-1}$, причём радиусы сходимости обоих рядов совпадают. Далее, пусть существует

$$f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2) \left(x - x_0\right)^{n-k+1}$$

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x)$ предыдущую теорему, получаем, что $f^{(k-1)}(x)$ дифференцируема и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) \left(x - x_0\right)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости рядов для $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$ совпадают. Тем самым, следуя методу математической индукции, полностью доказывает эту теорему. □

12.3. Единственность представления функции степенным рядом.

Определение: Регулярная функция.

Пусть в каждой точке $z \in \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – множество точек комплексной плоскости, поставлено в соответствие комплексное число ω. На множестве $\mathbb{E}$ определена функция комплексного переменного, $\omega = f(z)$.

Если $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \sigma = \sigma_\epsilon > 0 :\ \forall z\ :\ |z - a| < \sigma_\epsilon \longmapsto |f(z) - f(a)| < \epsilon$, то функцию $f(z)$ называют непрерывной в точке a.

И , наконец, Функция комплексного переменного $f(z)$ называется регулярной в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и представима в некотором круге $|z - a| < \rho$, $\rho > 0$, сходящимся к $f(z)$ степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n \quad (*)$.

Теорема [Единственность представления функции степенным рядом]:
Функция $f(z)$, регулярная в точке a, единственным образом представляется рядом (*).

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ имеет два представления в виде степенного ряда в круге $K = \{z : |z-a| < \rho\}$, где $\rho > 0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} (z-a)^n \quad (**)$$

Теперь покажем, что $c_n = \widetilde{c_n}$, для $n = 0, 1, 2, \dots$

По условию ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} (z-a)^n$ сходятся в круге K, и поэтому эти ряды сходятся равномерно в круге $K_1 = \{z : |z-a| \leqslant \rho_1 < \rho\}$, а их общая сумма – непрерывная в круге K_1 функция.В частности, функция $f(z)$ непрерывна в точке a. Подходя к пределу при $z \to a$ в равенстве (**), получаем $c_0 = \widetilde{c_0}$. Отбрасывая одинаковые слагаемые c_0 и $\widetilde{c_0}$ в равенстве (**), получаем после деления на $(z-a)$ равенство:

$$c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \ \dots = \widetilde{c_1} + \widetilde{c_2}(z-a) + \widetilde{c_3}(z-a)^2 + \ \dots \ ,$$

которое справедливо в круге K с выколотой точкой a. Ряды в левой и правой части сходятся равномерно в круге K_1. Переходя в равенстве к пределу при $z \to a$, получаем $c_1 = \widetilde{c_1}$. Справедливость равенства $c_n = \widetilde{c_n}$ при любой $n \in (N)$ устанавливается при помощи индукции.

12.4. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

Теорема [Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к функции]:
Если f бесконечно дифференцируемая функция на $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$ и $\exists M > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \mapsto |f^{(k)}(x)| \leqslant M$, $k = 0{,}1, \dots$, то ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в каждой точке x нашего интервала:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ , \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Доказательство. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

$$\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ , где } \xi \text{ между } x \text{ и } a$$

$$|\mathbf{r}_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{т.к. } |x-a| \ \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|x-a|^k}{k!} = 0 \text{ , тогда справедливо следующее:}$$

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |\mathbf{r}_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{|\ x-a\ |^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \square \ .$$

12.5. Ряд Тейлора

Пусть функция f – бесконечно дифференцируема в точке a (т.е в этой точке у функции f существует производная любого порядка), тогда

Определение:. Рядом Тейлора функции f в точке a называется следующее выражение:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Замечание. Если функция регулярна в точке a, то она раскладывается в степенной ряд и этот степенной ряд и есть ряд Тейлора, однако не все функции раскладываются в степенной ряд, поэтому справедливо следующее выражение:

$$f(x) \neq f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \ , \ x \neq 0; \\ 0 \ , \ x = 0 \ . \end{cases}$$

Эта функция непрерывная в нуле. Найдем ее производные:

$$f^{'}(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{''}(x) = \left[\left(\frac{2}{x^3} \right)^2 - \frac{6}{x^4} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{'''}(x) = \left[\left(\frac{2}{x^3} \right)^3 - \frac{12}{x^7} - \frac{2^4}{x^4} + \frac{24}{x^5} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Таким образом $f^{(\mathrm{m})}(x) = Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $Q_{3m}(\frac{1}{x})$ – многочлен степени $3m$ от $\frac{1}{x}$. Тогда понятно, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(\mathrm{m})}(x) = \begin{cases} Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \ , \ x \neq 0; \\ 0 \ , \ x = 0 \ . \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq a$ ряд Тейлора будет представлять собой нулевой ряд, хотя сама функция не нулевая $\Rightarrow f(x) \neq f(a) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. $\square$

12.6. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Функция f – бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a, тогда этой функции соответствует некоторый ряд:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Обозначение. $P_n(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ – n-ая частичная суммма ряда Тейлора (многочлен Тейлора).

Тогда, если $\mathbf{r}_n(x) = f(x) - P_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, то это означает, что ряд Тейлора сходится к функции f в точке x:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Теорема:. Если $f^{(n+1)}$ непрерывна на $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, то:

1. $\mathbf{r}_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, т.е. её остаточный член на этом интервале представим в интегральной форме.
2. $\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Доказательство.

1. Доказательство будем проводить при помощи мат. индукции:

   (a) Мы знаем, что $f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)dt$. Тогда:

   $$\begin{cases} u = f'(t)\ ,\ dv = dt \\ du = f''(t)dt\ ,\ v = -(x-t),\ \text{x - это константа} \end{cases}$$

   получаем, что $f(x) - f(a) = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int\limits_a^x (x-t)f''(t)dt =$

   $= f'(a)(x-a) + \frac{1}{1!}\int\limits_a^x (x-t)f''(t)dt \Rightarrow$

   $\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{1}{1!}\int\limits_a^x (x-t)f''(t)dt.$

   Получили при $n = 1$ остаточный член в интегральной форме (получена база индукции).

   (b) Предположим, что при $n-1$ верно, тогда найдем для n :

   $$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

   Тогда:

   $$\begin{cases} u = f^n(t)\ ,\ dv = (x-t)^{n-1}dt \\ du = f^{n+1}(t)dt\ ,\ v = -\frac{(x-t)^n}{n} \end{cases}$$

   получаем, что $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!}\Big|_a^x + + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Тогда получаем, что:

   $$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \ \square$$

2. Это просто остаточный член в форме Лагранжа (доказывалось в прошлом семестре).

13. Билет 13

13.1. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

1. Показательная и гиперболические функции.

$$y = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$x \in (-\rho,\, \rho),\ \rho > 0$$

Поскольку $(e^x)^{(k)} = e^x$, то $0 < f(x) < e^\rho$ и $0 < f(x)^{(k)} < e^\rho$. Ряд Тейлора функции $y = e^x$ сходится к ней на $(-\rho,\, \rho)$ по теореме о достаточном условии представимости функции её рядом Тейлора.

$\forall \rho > 0 \Rightarrow R = +\infty$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y = \operatorname{sh} x,\ y = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ R = +\infty$$

2. Тригонометрические фунции.

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$|f^{(k)}(x)| \le 1,\ \forall k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},\ R = +\infty$$

3. Степенная функция.

$$y = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

1) $\alpha = 0,\ y = 1$

2) $\alpha = n,\ n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$ - бином Ньютона

3) α - произвольное, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$\mathrm{r}_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \int\limits_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt$$

Пусть $t = x\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, тогда $dt = xd\tau$

$$\mathrm{r}_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\int\limits_0^1\left(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\right)^n(1+x\tau)^{\alpha-1}d\tau$$

Пусть $|x| < 1$, тогда $|1+\tau x| \geqslant 1-\tau$

$$(1+x\tau)^{\alpha-1} \leqslant \beta(x) = \begin{cases}(1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1\\(1-|x|), & \alpha < 1\end{cases}$$

$|\alpha| \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n > m$

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \leqslant \frac{m(m+1)\dots(m+n}{n!} \leqslant \frac{(m+n)!}{n!} =$$
$$= (n+1)(n+2)\dots(n+m) \leqslant (2n)^m$$

В итоге

$$|\mathrm{r}_n(x)| \leqslant 2^m\beta(x)|x|\frac{n^m}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Так как

$$a = \frac{1}{|x|} > 1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^m}{a^n} = 0$$

Следовательно

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k,\ C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!},\ |x|<1,\ R=1$$

В частности:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,\ |x|<1$$

4. Логарифмические функции.

$$y = \ln(1-x),\ y' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$
$$y = \ln(1+x),\ y' = -\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

Раскладываем в интервалах сходимости каждую функцию в ряд Тейлора, а потом почленно интегрируем, и помним, что при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется.

$$y = \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\ |x|<1$$
$$y = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},\ |x|<1$$

5. Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции можно разложить в ряд Тейлора, сначала продифференцировав и воспользовавшись известными результатами.

13.2. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Докажем, что

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},\ \ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad R = +\infty$$

Доказательство:
Так как $z = x + iy$ и по формуле Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ \cos y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!},\ \sin y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{iy} = cosy + i\sin y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = e^{iy}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}$$

Докажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{j!\cdot(k-j)!} z_1^j z_2^{k-j} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^0}{0!} + \left(\frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^1}{1!}\cdot\frac{z_2^0}{0!}\right) +$$
$$+ \left(\frac{z_1^0}{0!}\cdot\frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1^1}{1!}\cdot\frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!}\cdot\frac{z_2^0}{0!}\right) + \ldots$$

Это можно проиллюстрировать следующим образом:

Мы обходим таблицу по диагоналям, так что сумма индексов элементов была константа для каждой группы слагаемых. Тогда действительно:

	u_0	u_1	u_2	u_3	$\dots$
v_0	$u_0 \cdot v_0$	$u_1 \cdot v_0$	$u_2 \cdot v_0$	$\dots$	
v_1	$u_0 \cdot v_1$	$u_1 \cdot v_0$	$\dots$		
v_2	$u_0 \cdot v_2$	$\dots$			
v_3	$\dots$				
$\dots$					

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

Тогда по доказанной выше лемме:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Теперь

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Что и требовалось доказать.