

# МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ. БИЛЕТЫ.

## **Над файлом работали:**

Баранников Андрей Б01-001  
Дорин Даниил Б01-001  
Киселев Никита Б01-001  
Овсянников Михаил Б01-001  
Панферов Иван Б01-001  
Филиппенко Павел Б01-001  
Курневич Станислав Б01-002  
Лепарский Роман Б01-003  
Артамонов Кирилл Б01-005  
Белов Владислав Б01-005  
Паншин Артём Б01-005  
Глаз Роман Б01-007  
Дурнов Алексей Б01-007  
Талашкевич Даниил Б01-009  
Фатыхов Тимур Б01-009

# Содержание

<b>1</b>	<b>Билет 1</b>	<b>4</b>
1.1	Предел последовательности точек в $n$ -мерном евклидовом пространстве. . .	4
1.2	Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. . . . .	5
1.3	Внутренние, предельные, изолированные точки множества. . . . .	8
1.4	Открытые и замкнутые множества, их свойства. . . . .	8
1.5	Внутренность, замыкание и граница множества. . . . .	11
1.6	Компакты. . . . .	11
1.7	Метрическое пространство. . . . .	11
1.8	Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в $n$ -мерном евклидовом пространстве. . . . .	12
<b>2</b>	<b>Билет 2</b>	<b>14</b>
2.1	Предел числовой функции нескольких переменных. . . . .	14
2.2	Предел функции по множеству. . . . .	15
2.3	Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. .	16
2.4	Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). . . . .	17
2.5	Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области. . .	19
<b>3</b>	<b>Билет 3</b>	<b>20</b>
3.1	Частные производные функции нескольких переменных. . . . .	20
3.2	Дифференцируемость функции в точке . . . . .	20
3.3	Достаточные условия дифференцируемости функции в точке . . . . .	22
3.4	Дифференцируемость сложной функции . . . . .	24
3.5	Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. . . . .	25
3.6	Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл. .	26
3.7	Необходимые условия дифференцируемости . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Билет 4</b>	<b>29</b>
4.1	Частные производные высших порядков. . . . .	29
4.2	Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. . . . .	29
4.3	Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы. .	31
4.4	Формула Тейлора для функций нескольких переменных. . . . .	32
<b>5</b>	<b>Билет 5</b>	<b>33</b>
5.1	Необходимые определения и предложения билета. . . . .	33
5.2	Определение измеримости по Жордану множества в $m$ -мерном евклидовом пространстве. . . . .	37
5.3	Критерий измеримости. . . . .	38
5.4	Примеры неизмеримых по Жордану множеств. . . . .	39
5.5	Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. .	39
5.6	Конечная аддитивность меры Жордана. . . . .	39
5.7	Измеримость и мера цилиндра в $(m + 1)$ -мерном пространстве. . . . .	40

<b>6</b>	<b>Билет 6</b>	<b>41</b>
6.1	Определенный интеграл Римана. . . . .	41
6.2	Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. . . . .	42
6.3	Критерий интегрируемости функции. . . . .	43
6.4	Классы интегрируемых функций. . . . .	44
<b>7</b>	<b>Билет 7</b>	<b>46</b>
7.1	Некоторые свойства определенного интеграла. . . . .	46
7.2	Оценки определенного интеграла. . . . .	48
7.3	Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов. . . . .	50
<b>8</b>	<b>Билет 8</b>	<b>54</b>
8.1	Геометрические приложения определенного интеграла. . . . .	54
8.2	Вычисление площади поверхности вращения. . . . .	55
8.3	Криволинейные интегралы. . . . .	56
8.4	Существование криволинейных интегралов, их вычисление. . . . .	57
8.5	Несобственный интеграл. . . . .	58
8.6	Несобственные интегралы от неотрицательных функций: . . . . .	59
8.7	Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. . . . .	60
8.8	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. . . . .	60
8.9	Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов. . . . .	61
<b>9</b>	<b>Билет 9</b>	<b>63</b>
9.1	Числовые ряды. . . . .	63
9.2	Критерий Коши сходимости ряда. . . . .	64
9.3	Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. . . . .	65
9.4	Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. . . . .	70
9.5	Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. . . . .	72
9.6	Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда. . . . .	73
9.7	Произведение абсолютно сходящихся рядов. . . . .	74
<b>10</b>	<b>Билет 10</b>	<b>75</b>
10.1	Понятия функциональных последовательностей и рядов. . . . .	75
10.2	Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве. . . . .	76
10.3	Понятие равномерной сходимости на множестве. . . . .	76
10.4	Критерий Коши равномерной сходимости. . . . .	78
10.5	Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. . . . .	79
10.6	Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. . . . .	80
10.7	Достаточные признаки сходимости функциональных рядов. . . . .	83
<b>11</b>	<b>Билет 11</b>	<b>85</b>
11.1	Степенные ряды с комплексными числами . . . . .	85
11.2	Теорема 1. [Первая теорема Абеля] . . . . .	85
11.3	Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда]. . . . .	86
11.4	Теорема 3. [Вторая теорема Абеля]. . . . .	87
11.5	Теорема 4. . . . .	87

11.6 Теорема 5. [Формула Коши-Адамара]. . . . .	88
11.7 Теорема 6. . . . .	89
<b>12 Билет 12</b>	<b>90</b>
12.1 Степенные ряды с действительными членами. . . . .	90
12.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. . . . .	90
12.3 Единственность представления функции степенным рядом. . . . .	91
12.4 Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд . . . . .	92
12.5 Ряд Тейлора . . . . .	92
12.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. . . . .	93
<b>13 Билет 13</b>	<b>95</b>
13.1 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ , $\ln(1+x)$ , $(1+x)^\alpha$ . . . . .	95
13.2 Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции $e^z$ . . . . .	97

# 1. Билет 1

Введем понятия:

1.  $\mathbb{R}^m$  –  $m$ -мерное координатное пространство.
2. Точка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  – точка  $m$ -мерного пространства,  $x_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  – координата точки.
3.  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ;  $\rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2}$  – расстояние между точками  $x$  и  $y$ .
4.  $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e)$  –  $m$ -мерное евклидово пространство.
5.  $\mathcal{M} = (M, \rho)$  – метрическое пространство, где  $M \subset \mathbb{R}^m$  – некоторое множество,  $\rho(x, y)$  – функция, задающая расстояние между точками  $x, y$  множества  $M$  (метрика).
6.  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$  –  $m$ -мерный шар с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $\varepsilon$  (шаровая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$ ).
7.  $\Pi_{r_1, r_2, \dots, r_m}(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  –  $m$ -мерный прямоугольник с центром  $x_0$  и сторонами  $2r_1, 2r_2, \dots, 2r_m$ .
8.  $\Pi_r(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_j - x_{0j}| < r\}$  –  $m$ -мерный квадрат с центром в точке  $x_0$  и стороной  $2r$ .

## Предложение:

1. В любую шаровую окрестность можно вписать прямоугольную окрестность.
2. В любую прямоугольную окрестность можно вписать шаровую окрестность.

**Доказательство:** Пусть  $B_\varepsilon(x_0)$ ,  $\Pi_r(x_0)$  – шаровая и прямоугольная окрестности точки  $x_0$ ,  $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ . Возьмем  $\delta = \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ , тогда:

1.  $\Pi_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0)$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ .
2.  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Pi_\delta(x_0)$ ,  $\delta = \varepsilon$ .

## 1.1. Предел последовательности точек в $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Обозначим  $\mathcal{M} = (M, \rho)$ ,  $\{x^n\}_{n=1}^\infty$  – последовательность точек в  $\mathcal{M}$ .

**Определение:** Последовательность  $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$  точек метрического пространства сходится к точке  $a \in \mathcal{M}$ , если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^n, a) = 0$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon]$$

Любой шар с центром в точке  $a$  и радиусом  $\varepsilon$  содержит все члены последовательности  $\{x^n\}$  за исключением быть может конечного числа  $N$ .

**Лемма:** Сходящаяся последовательность точек ограничена.

**Доказательство:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

где  $y_n = \rho(x^n, a)$ . Тогда  $\{y_n\}$  – бесконечно малая последовательность  $\Rightarrow \{y_n\}$  – ограничена, т. е.  $\exists C > 0 : 0 \leq y_n = \rho(x^n, a) \leq C$ .

**Лемма:** Сходящаяся последовательность точек имеет единственный предел.

**Доказательство:** Будем доказывать от противного: предположим, что

$$\exists a \neq b : \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto \rho(x^n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \mapsto \rho(a, b) \leq \rho(x^n, a) + \rho(x^n, b) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что  $\rho(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$  – противоречие.

## 1.2. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности.

**Определение:** Последовательность точек  $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$  ограничена, если  $\exists R > 0 \forall n \mapsto \rho(x^n, 0) \leq R$ .

**Теорема:** Пусть  $\{x^n\} = \{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_m^n\} \subset \mathbb{E}^m$  – последовательность точек  $m$ -мерного евклидова пространства, а  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{E}^m$  – точка  $m$ -мерного евклидова пространства, тогда

$$x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow \forall j \quad x_j^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_j$$

**Доказательство:**

*Необходимость ( $\Rightarrow$ )*

По условию дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^n - a_j)^2} \Rightarrow |x_j^n - a_j| \leq \rho(x^n, a) < \varepsilon$$

Таким образом получаем:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall j = 1, 2, \dots, m \mapsto |x_j^n - a_j| < \varepsilon] \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n = a_j$$

*Достаточность* ( $\Leftarrow$ )

Запишем определение покоординатной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_j = N_j(\varepsilon) : \forall n \geq N_j \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Пусть  $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\} \Rightarrow \forall n \geq N \mapsto |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$  для всех  $j$ .

$$\rho(x^n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^n - a_j)^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a$$

**Теорема [Теорема Больцано-Вейерштрасса]:** Из любой ограниченной последовательности  $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{k_n}\} \subset \mathbb{E}^m$ .

**Доказательство:**

$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$  является ограниченной  $\stackrel{def}{\Rightarrow} \exists R > 0 \forall n \mapsto \rho_e(x^n, 0) \leq R$ . Тогда для всех  $j$  последовательность  $\{x_j^n\}$  так же ограничена ( $x_j^n$  —  $j$ -ая компонента).

$\{x_1^n\}$  ограничена, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности существует подпоследовательность  $\{x_1^{k_{n_1}}\}$  такая, что  $x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} a_1$ .

Возьмём подпоследовательность  $\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m$  (по номерам  $k_{n_1}$  выбираем из последовательности  $\{x^n\}$  точки). И рассмотрим числовую последовательность  $\{x_2^{k_{n_1}}\}$ . Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности) и следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность  $\{x_2^{k_{n_2}}\}$  такая, что  $x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_2$ . При этом все еще справедливо  $x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_1$ .

$$\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_1^n\} \Rightarrow \{x_1^{k_{n_1}}\} \Rightarrow x_1^{k_{n_1}} \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} a_1$$

$$\{x^{k_{n_1}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_2^{k_{n_1}}\} \Rightarrow \{x_2^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_2^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_2 \\ x_1^{k_{n_2}} \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} a_1 \end{cases}$$

$$\{x^{k_{n_2}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_3^{k_{n_2}}\} \Rightarrow \{x_3^{k_{n_3}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_3^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_3 \\ x_2^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_2 \\ x_1^{k_{n_3}} \xrightarrow{n_3 \rightarrow \infty} a_1 \end{cases}$$

...

$$\{x^{k_{n_m-1}}\} \subset \mathbb{E}^m \Rightarrow \{x_m^{k_{n_m-1}}\} \Rightarrow \{x_m^{k_{n_m}}\} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m \rightarrow \infty]{} a_m \\ \dots \\ x_1^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m \rightarrow \infty]{} a_1 \end{cases}$$

Таким образом мы нашли подпоследовательность  $\{x^{k_{n_m}}\} \subset \mathbb{E}^m$  такую, что  $x^{k_{n_m}} \xrightarrow[n_m \rightarrow \infty]{} a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

**Определение:** Последовательность точек  $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall k \geq N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$ .

**Определение:** Метрическое пространство  $\mathcal{M}$ , в котором любая фундаментальная последовательность точек  $\{x^n\} \subset \mathcal{M}$  является сходящейся, называется *полным*.

**Теорема [Критерий Коши]:** для того, чтобы последовательность  $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

**Доказательство:**

*Необходимость* ( $\Rightarrow$ )

$$x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$\forall n \geq N \mapsto \rho(x^n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geq N \mapsto \rho(x^k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x^n, x^k) \leq \rho(x^n, a) + \rho(x^k, a) < \varepsilon$$

*Достаточность* ( $\Leftarrow$ )

Докажем, что евклидово пространство  $\mathbb{E}^m$  является полным, то есть любая фундаментальная последовательность этого пространства является сходящейся.

Рассмотрим последовательность  $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$ , которая является фундаментальной. Рассмотрим по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall k \geq N \mapsto \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Воспользуемся утверждением:

$$\forall j \mapsto |x_j^n - x_j^k| \leq \rho(x^n, x^k) < \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что последовательность  $\{x_j\}$  является фундаментальной, отсюда, по теореме Коши для обычной числовой последовательности, она является сходящейся, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_j - a_j| < \varepsilon$$

Последовательность  $\{x^n\} \subset \mathbb{E}^m$  имеет покоординатную сходимость, а этого, как известно, достаточно для сходимости последовательности  $\{x^n\}$ .



**Замечание:** Таким образом, мы доказали, что в евклидовом пространстве справедлив критерий Коши.

**Замечание:** Для произвольных метрик может существовать последовательность, которая является фундаментальной, но при этом не сходится.

**Контрпример:** Рассмотрим метрическое пространство  $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, \rho)$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Рассмотрим последовательность  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ . Данная последовательность является фундаментальной, но при этом не является сходящейся в  $\mathcal{M}$ .

### 1.3. Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

**Определение:** точка  $x_0$  множества  $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$  называется *внутренней точкой* множества, если существует  $B_r(x_0) : B_r(x_0) \subset X$ .

**Определение:** точка  $x_0$  называется *предельной точкой* множества  $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$ , если любая окрестность точки  $x_0$  содержит по крайней мере одну точку множества  $X$ , отличную от  $x_0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \neq x_0 \ \& \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

**Определение:** точка  $x_0$  множества  $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$  называется *изолированной точкой* множества, если у этой точки существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества  $X$ .

$$\exists r > 0 : \forall x \in B_r(x_0) : x \neq x_0 \mapsto x \notin X$$

**Определение:** точка  $x_0$  называется *точкой прикосновения* множества  $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$ , если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества  $X$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

**Определение:** точка  $x_0$  называется *граничной точкой* множества  $X \subset \mathcal{M} = (M, \rho)$ , если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству  $X$ , так и не принадлежащие ему.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_\varepsilon \in X \ \& \ x''_\varepsilon \notin X : x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

### 1.4. Открытые и замкнутые множества, их свойства.

**Определение:** Множество  $X \subset \mathcal{M}$  называется *открытым*, если любая его точка внутренняя.

**Определение:** Множество  $X \subset \mathcal{M}$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

**Теорема:** открытые множества метрического пространства  $\mathcal{M}$  обладают следующими свойствами:

1.  $\mathcal{M}, \emptyset$  – открытые множества.

2.  $\bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \text{СТВО}}} X_\alpha$  – объединение любого числа открытых множеств  $X_\alpha$  есть открытое множество.
3.  $\bigcap_{j=1}^K X_j$  – пересечение конечного числа открытых множеств  $X_j$  есть открытое множество.

**Доказательство свойства 2:** Возьмём произвольную точку  $x \in X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , тогда существует множество  $X_{\alpha_0}$ , такое что  $x \in X_{\alpha_0}$ . Но  $X_{\alpha_0}$  – открытое множество (по условию), поэтому  $\exists \varepsilon_0 : B_{\varepsilon_0}(x) \subset X_{\alpha_0} \subset X$ , таким образом, получается, что любая точка множества  $X$  входит в него с некоторой  $\varepsilon$ -окрестностью, это значит, что  $X$  – открытое множество.

**Доказательство свойства 3:** Возьмём произвольную точку  $x \in X = \bigcap_{j=1}^K X_j$ , тогда  $x \in X_j, j = 1, 2, \dots, K$ . Но каждое  $X_j$  – открытое множество, поэтому  $\forall j \exists \varepsilon_j : B_{\varepsilon_j}(x) \subset X_j$ . Пусть  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K\}$ , тогда  $\forall j B_\varepsilon(x) \subset X_j \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset X$ , это значит, что  $X$  – открытое множество.

### Теорема:

1.  $Y \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$
2.  $Y \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$

### **Доказательство (1):**

Пусть  $x \in Y \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Rightarrow [x \in Y] \& \left[ x \notin \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right] \Rightarrow \exists \alpha' \in A : x \notin X_{\alpha'}$ .

Пусть  $x \in \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \Rightarrow \exists \alpha' : x \in Y \setminus X_{\alpha'} \Rightarrow [x \in Y] \& [x \notin X_{\alpha'}]$ .

Таким образом в обоих случаях мы приходим к тому, что  $\exists \alpha' \in A : [x \in Y] \& [x \notin X_{\alpha'}]$ .

**Доказательство (2):** Проводим аналогичные рассуждения.

**Теорема:** множество  $X$  метрического пространства  $\mathcal{M}$  является замкнутым  $\Leftrightarrow CX = \mathcal{M} \setminus X$  – открытое множество. Причем  $CX$  называется *дополнением множества  $X$* .

### **Доказательство:**

*Необходимость ( $\Rightarrow$ )*

Доказываем от противного: предположим, что  $CX$  не является открытым множеством  $\Rightarrow \exists x_0 \in CX : x_0$  не является внутренней точкой  $CX \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \neq x_0 : x_\varepsilon \notin CX \& x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

тогда  $x_0$  по определению является предельной точкой множества  $X$  и при этом  $x_0 \notin X$  (т. к.  $x_0 \in CX$ ); получается, что существует предельная точка множества  $X$ , не лежащая в этом множестве, но по условию  $X$  – замкнутое множество, а значит соержит все свои предельные точки, таким образом приходим к противоречию.

### Достаточность ( $\Leftarrow$ )

Доказываем от противного: предположим, что  $X$  не является замкнутым множеством, тогда:

$$\exists x_0 \notin X : x_0 - \text{предельная точка множества } X$$

По определению предельной точки:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \neq x_0 : x_\varepsilon \in X \ \& \ x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$$

Тогда любой шарик  $B_\varepsilon(x_0)$  с радиусом  $r = \varepsilon$  и центром в точке  $x_0$  не содержится в  $CX \Rightarrow x_0$  не является внутренней точкой множества  $CX$ , но при этом  $x_0 \in CX$ , поскольку  $x_0 \notin X$ ; однако, по условию  $CX$  – открытое множество, а значит должно содержать все свои внутренние точки. Таким образом, приходим к противоречию.

**Теорема:** замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1.  $\mathcal{M}, \emptyset$  – замкнутые множества.
2.  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$  – пересечение любого числа замкнутых множеств  $X_\alpha$  есть замкнутое множество.
3.  $\bigcup_{j=1}^K X_j$  – объединение конечного числа замкнутых множеств  $X_j$  есть замкнутое множество.

**Доказательство свойства 2:** Воспользуемся теоремой о дополнении множества  $X$ : рассмотрим  $C(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \mathcal{M} \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{M} \setminus X_\alpha)$ .  $X_\alpha$  – замкнутое множество  $\Rightarrow \mathcal{M} \setminus X_\alpha$  – открытое множество  $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{M} \setminus X_\alpha) = C(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha)$  – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$  – замкнутое множество.

**Доказательство свойства 3:** Воспользуемся теоремой о дополнении множества  $X$ : рассмотрим  $C(\bigcup_{j=1}^K X_j) = \mathcal{M} \setminus (\bigcup_{j=1}^K X_j) = \bigcap_{j=1}^K (\mathcal{M} \setminus X_j)$ .  $X_j$  – замкнутое множество  $\Rightarrow \mathcal{M} \setminus X_j$  – открытое множество  $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^K (\mathcal{M} \setminus X_j) = C(\bigcup_{j=1}^K X_j)$  – открытое множество, тогда по теореме о дополнении множества  $\bigcup_{j=1}^K X_j$  – замкнутое множество.

**Замечание:**

1. Если  $X$  – открытое множество, то  $X = \text{int}X$ .
2. Если  $X$  – замкнутое множество, то  $\overline{X} = X$ .
3. Пусть  $G$  – открытое множество, тогда в общем случае  $\text{int}(\overline{G}) \neq G$ .
4. Пусть  $F$  – замкнутое множество, тогда в общем случае  $\overline{\text{int}F} \neq F$ .

## 1.5. Внутренность, замыкание и граница множества.

**Определение:**  $\text{int}X$  – совокупность всех внутренних точек множества  $X \subset \mathcal{M}$  называется *внутренностью* множества  $X$ .

**Определение:**  $\overline{X}$  – замыкание множества  $X \subset \mathcal{M}$  – операция присоединения к множеству  $X$  всех его предельных точек.

**Определение:**  $\partial X$  – граница множества  $X$  – совокупность всех граничных точек множества  $X$ .

## 1.6. Компакты.

**Определение:** Множество  $X \subset \mathcal{M}$  называется *компактом*, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству  $X$ .

$$\forall \{x^n\} \subset X \exists \{x^{k_n}\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x^{k_n} = a \in X$$

**Определение:** Множество  $X \subset \mathbb{R}^m$ , любые 2 точки которого можно соединить лежащей в нем непрерывной кривой, называется *линейно связным* (непрерывной кривой в  $m$ -мерной пространстве). («Введение в математический анализ.» Л. Д. Кудрявцев том 2).

**Определение:** Множества  $X_1$  и  $X_2$  метрического пространства  $\mathcal{M}$  называются *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

**Определение:** Множество  $X$  метрического пространства  $\mathcal{M}$  называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух отделимых множеств.

**Определение:** Открытое связное множество называется *областью*.

## 1.7. Метрическое пространство.

**Определение:** Пусть  $M$  – произвольное множество, для любых точек  $x, y \in M$  поставим в соответствие число  $\rho(x, y) \geq 0$  такое что

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

тогда  $\mathcal{M} = (M, \rho)$  называется *метрическим пространством*, а функция  $\rho(x, y)$  – его метрикой.

**Теорема [Неравенство Коши-Буняковского]:** для любых точек  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$  справедливо:

$$\left( \sum_{j=1}^m a_j b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^m a_j^2 \cdot \sum_{j=1}^m b_j^2$$

**Доказательство:** Рассмотрим многочлен:

$$p(z) = \sum_{j=1}^m (a_j + b_j z)^2 = A + 2Bz + Cz^2$$

$$A = \sum_{j=1}^m a_j^2; \quad B = \sum_{j=1}^m a_j b_j; \quad C = \sum_{j=1}^m b_j^2$$

Заметим, что при любых значениях  $z$  многочлен  $p(z) \geq 0$ , поскольку является суммой неотрицательных членов, тогда справедливо  $B^2 - AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$  (дискриминант квадратного уравнения, деленный на 4). Подставляя  $A, B, C$  получаем исходное неравенство.

**Теорема [Неравенство Минковского]:** для любых  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$  справедливо:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2}$$

**Доказательство:**

$$\sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^m a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^m a_j b_j + \sum_{j=1}^m b_j^2$$

$$\sum_{j=1}^m a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^m a_j b_j + \sum_{j=1}^m b_j^2 \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \left( \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} \right)^2 + 2 \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} + \left( \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} \right)^2$$

Свернём правую часть по формуле квадрата суммы и получим:

$$\sum_{j=1}^m (a_j + b_j)^2 \leq \left( \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} \right)^2$$

**Примеры метрических пространств:**

$$\mathcal{M} = (M, \rho), \quad \rho = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$$\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_e), \quad \rho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2}$$

$$\mathcal{M} = (\mathbb{R}^m, \rho_1), \quad \rho_1(x, y) = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j|$$

## 1.8. Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в $n$ -мерном евклидовом пространстве.

**Определение:** Множество  $X \subset \mathbb{E}^m$  называется ограниченным, если существует  $m$ -мерный шар  $\overline{B_R(0)}$  такой, что  $X \subset \overline{B_R(0)}$  («Курс математического анализа» Л. Д. Кудрявцев том 2).

**Теорема:**  $X \subset \mathbb{E}^m$  является компактом  $\Leftrightarrow X$  – ограниченное и замкнутое множество.

**Доказательство:**

*Необходимость* ( $\Rightarrow$ )

Пусть  $X \subset \mathbb{E}^m$  является компактом, докажем, что  $X$  является замкнутым множеством. Возьмём произвольную предельную точку  $a$  множества  $X$  и будем рассматривать её окрестности:  $B_{\frac{1}{n}}(a)$ :

$r_1 = 1$ , тогда по определению предельной точки  $\exists x_1 \neq a : x_1 \in X \ \& \ x_1 \in B_1(a)$

$r_2 = \frac{1}{2}$ , тогда по определению предельной точки  $\exists x_2 \neq a : x_2 \in X \ \& \ x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(a)$

$\dots$

$r_n = \frac{1}{n}$ , тогда по определению предельной точки  $\exists x_n \neq a : x_n \in X \ \& \ x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$

$\dots$

Таким образом, мы построили последовательность точек  $\{x^n\} \subset X$  такую, что выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \frac{1}{\varepsilon} : \forall n \geq N \mapsto \rho(a, x^n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

или, что то же самое:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = a$$

но, по условию,  $X$  – компакт, а значит  $a \in X$ , таким образом, в силу произвольности точки  $a$ , компакт  $X$  содержит все свои предельные точки, а значит, является замкнутым множеством.

Заметим, что неограниченное множество  $X$  не может быть компактом, так как в неограниченном множестве можно построить последовательность точек, которая не будет являться сходящейся.

*Достаточность* ( $\Leftarrow$ )

Пусть  $X \subset \mathbb{E}^m$  – ограниченное, замкнутое множество. Возьмём последовательность точек  $\{x^n\} \subset X$ , по теореме Больцано-Вейерштрасса, в силу ограниченности этой последовательности, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{k_n}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ , в силу замкнутости множества  $a \in X$ , но тогда получается, что  $X$  – компакт.

## 2. Билет 2

### 2.1. Предел числовой функции нескольких переменных.

**Обозначения:**  $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \rho)$ ,  $a \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{U}(a)$ ,  $w = f(x)$  - некоторая функция, заданная в  $\mathcal{U}(a)$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ .

**Определение (по Гейне):**

$$[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} \left[ \forall \{x^n\} : [x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a] \ \& \ [x^n \neq a \ \forall n] \mapsto w^n = f(x^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \right].$$

**Определение (по Коши):**

$$[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x : 0 < \rho(x, a) < \delta] \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon].$$

**Пример:**

$$\begin{aligned} w = f(x, y) &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 &\neq 0, \quad \vec{0} = (0, 0) \\ [\lim_{(x, y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) - \text{не существует}] \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательности:

$$\begin{aligned} \{z^n\}' &= \{(x^n, y^n)\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \{z^n\}'' &= \{(x^n, y^n)\} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \rho(\{z^n\}'', \vec{0}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Однако  $f(\{z^n\}') = 1$ ,  $f(\{z^n\}'') = -1$ . Поэтому предел функции  $f(x, y)$  в точке  $\vec{0} = (0, 0)$  не существует.

**Предложение:** Пусть  $a \in \mathcal{M}$  и  $w = f(x)$ ,  $w = g(x)$  определены в  $\mathcal{U}(a)$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0$$

Доказательство аналогично доказательству для функций одной переменной.

**Определение:** Функция  $\alpha = \alpha(x)$ , определенная в  $\mathcal{U}(a)$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ , называется бесконечно малой, если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

**Предложение:**

$$[f(x) : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \Rightarrow [\alpha = \alpha(x) = f(x) - b - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow a].$$

## 2.2. Предел функции по множеству.

**Обозначения:**  $a$  - предельная точка множества  $A \subset \mathcal{M}$ ,  $w = f(x)$  определена в  $A$ .

**Определение:** Предел функции по множеству:

$$\left[ \lim_{x \xrightarrow{x \in A} a} f(x) = b \right] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

**Обозначения:**  $D \subset \mathbb{E}^m$  - неограниченное множество.  $w = f(x)$  - определена на  $D$ .

**Определение:** Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\left[ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \right] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D : \rho(x, \vec{0}) > \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

Здесь  $\vec{0} = (0, \dots, 0)_m$ .

**Определение:** Пусть функция  $w = f(x)$  определена на множестве  $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$  и  $\forall x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1), x \neq x_0 \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b$ . Тогда говорят, что у функции  $w = f(x, y)$  существует повторный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = b$ . Пусть  $\forall y \in (y_0 - r_2, y_0 + r_2), y \neq y_0 \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y), \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = c$ . Тогда говорят, что у функции  $w = f(x, y)$  существует повторный предел  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = c$ .

**Замечание:** Из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов. А из существования и равенства повторных пределов не следует существования предела в точке.

**Примеры:**

1.

$$w = f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

Но предел функции в точке  $(0, 0)$  не существует.

2.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$|f(x, y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : 0 < \rho(x, a) < \delta \mapsto |f(x) - b| < \varepsilon]$$

$$\lim_{(x, y) \xrightarrow{y \neq 0} \vec{0}} f(x, y) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ однако}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  - не существует.



**Предложение:** Пусть  $w = f(x, y)$  определена в  $\prod_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < |x - x_0| < r_1, 0 < |y - y_0| < r_2\}$  и  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = b$ . Пусть, кроме того,  $\forall x : 0 < |x - x_0| < r_1 \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  и  $\forall y : 0 < |y - y_0| < r_2 \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y)$ . Тогда повторные пределы существуют и равны числу  $b$ .

### 2.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

**Определение:** Функция  $w = f(x)$ , определенная в  $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{M}$  называется непрерывной в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Обозначения:**  $w = f(x)$  определена на  $A \subset \mathcal{M}$  и  $a$  предельная точка множества  $A$ .

**Определение:** Функция  $w = f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$  по множеству  $A$ , если  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$ .

**Определение:** Функция  $w = f(x)$  называется непрерывной на множестве  $\mathbb{X} \subset \mathcal{M}$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $\mathbb{X}$  по множеству  $\mathbb{X}$ .

**Предложение:**

$$[f - \text{непрерывна в точке } a \in \mathcal{M}] \Leftrightarrow [\Delta f(x) = f(x) - f(a) - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow a]$$

**Обозначения:**

$$w = f(x), \quad x \in \mathbb{E}^m; \quad \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x^0)$$

Частичное приращение функции  $w = f(x)$  в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  соответствуют приращению  $\Delta x_k$  аргумента  $x_k$ .

**Определение:** Функция  $w = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x^0$  по переменной  $x_k$ , если  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k f(x^0, \Delta x_k) = 0$ .

**Замечание:** Из непрерывности функции  $w = f(x)$  в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  следует непрерывность функции по каждой переменной, но из непрерывности функции по каждой переменной не следует непрерывность функции в точке.

**Контрпримеры:**

1.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_x f(\vec{0}, x) = \Delta_y f(\vec{0}, y) = 0.$$

Функция непрерывна в точке  $\vec{0} = (0, 0)$  по переменной  $x$  и по переменной  $y$ . Однако пусть  $y = kx$ , тогда:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0, \text{ при } k \neq 0. \text{ Поэтому функция } f(x, y) \text{ не является непрерывной в точке } \vec{0}.$$

2.

$$w = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

Функция  $f$  непрерывна в точке  $\vec{0}$  по переменной  $x$  и по переменной  $y$ , непрерывна по множеству  $y = kx$ , однако не является непрерывной в точке  $\vec{0}$  по множеству  $y = x^2$ :  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

## 2.4. Свойства функций, непрерывных на компакте: ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора).

**Предложение:** Пусть функции  $w = f(x)$  и  $w = g(x)$  непрерывны в точке  $a \in \mathcal{M}$ . Тогда функции  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  - непрерывны в точке  $a$ , в случае частного  $g(a) \neq 0$ .

**Обозначения:**  $x \in \mathbb{E}^m$ ,  $x_j = \varphi_j(t)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{E}^k$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $\forall t \in T \subset \mathbb{E}^k \mapsto x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$ .

**Теорема [О непрерывности суперпозиции функций]:** Пусть функция  $x_j = \varphi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , непрерывна в точке  $a$ , функция  $f$  - непрерывна в точке  $b = (b_1, \dots, b_m)$ , причем  $b_j = \varphi_j(a)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . На  $T \subset \mathbb{E}^k$  определена сложная функция

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$$

Тогда функция  $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство:**

$$[w = f(x) \text{ непрерывна в точке } b] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\forall x : \rho(x, b) < \delta] \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon]$$

$$[\varphi_j \text{ непрерывна в точке } a, j = 1, \dots, m] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \delta > 0 \exists \sigma_j = \sigma_j(\delta) > 0,$$

$$j = 1, \dots, m : [\forall t : \rho(t, a) < \sigma_j] \mapsto |\varphi_j(t) - \varphi_j(a)| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}]$$

$$\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \Rightarrow \forall t : \rho(t, a) < \sigma \Rightarrow |x_j - b_j| < \frac{\delta}{\sqrt{m}}$$

$$\rho(x, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - b_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\delta^2}{m}} = \delta \mapsto |f(x) - f(b)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) - f(\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a))| < \varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(a)| < \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : [\forall t : \rho(t, a) < \sigma] \mapsto |F(t) - F(a)| < \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} [F(t) \text{ - непрерывна в точке } a.]$$

**Теорема [О локальном сохранении знака непрерывной функции]:** пусть  $w = f(x)$  определена на  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$  и непрерывна в точке  $x = a$ ,  $f(a) \neq 0$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : \forall x : \rho(x, a) < \delta \mapsto f(x) \cdot f(a) > 0$ .

**Доказательство:** используется "ε - δ" определение непрерывности функции функции в точке и выбором  $0 < \varepsilon < |f(a)|$ .

**Теорема Вейерштрасса:** Пусть функция  $w = f(x)$  непрерывна на компакте  $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$ . Тогда она ограничена на  $\mathbb{X}$  и достигает на  $\mathbb{X}$  своих верхней и нижней граней.

**Доказательство(по Бесову):** проведем доказательство лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для одномерного случая:  $\mathbb{X} = [a, b]$ .

Пусть  $B := \sup_{\mathbb{X}} f \leq +\infty$ . Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек  $\{x^n\}$ ,  $x^n \in \mathbb{X} \forall n \in \mathbb{N}$  такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = B$ . Последовательность  $\{x^n\}$  ограничена в силу ограниченности множества  $\mathbb{X}$ . В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса выделим из  $\{x^n\}$  сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ . Пусть  $x^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k}$ . Точка  $x^0$  принадлежит  $\mathbb{X}$  в силу замкнутости  $\mathbb{X}$ . Следовательно,  $f$  непрерывна в точке  $x^0$  по множеству  $\mathbb{X}$ .

Теперь из соотношений

$$f(x^{n_k}) \rightarrow B, \quad f(x^{n_k}) \rightarrow f(x^0) \text{ при } k \rightarrow \infty$$

вытекает, что  $f(x^0) = B$ , т.е. что верхняя грань функции  $f$  достигается в точке  $x^0 \in \mathbb{X}$ . Следовательно, верхняя грань  $\sup_{\mathbb{X}} f$  конечна, а функция  $f$  ограничена сверху на  $\mathbb{X}$ .

Аналогично доказывается, что функция  $f$  достигает своей нижней грани на  $\mathbb{X}$  и ограничена снизу на  $\mathbb{X}$ . Теорема доказана.

**Определение:** функция  $f$  называется равномерно непрерывной на множестве  $\mathbb{X} \subset \mathcal{M}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число  $\delta$  такое, что для всех точек  $x', x'' \in \mathbb{X}$ , таких, что  $\rho(x', x'') < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

На языке кванторов:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \mathbb{X}, \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

**Теорема [Теорема Кантора]:** Пусть функция  $f$  непрерывна на компакте  $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$ . Тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{X}$ .

**Доказательство(по Бесову):** Предположим, что теорема неверна, то есть, что существует  $f$ , непрерывная, но не равномерно непрерывная на  $\mathbb{X}$ . Тогда:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in \mathbb{X} : \rho(x, y) < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Будем в качестве  $\delta$  брать  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и обозначать через  $x^n, y^n$  соответствующую пару точек  $x, y$ . Тогда имеем:

$$x^n, y^n \in \mathbb{X}, \quad \rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n},$$

$$|f(x^n) - f(y^n)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности  $x^n$  сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = x^0$ , что возможно по теореме Больцано-Вейерштрасса в силу ограниченности  $x^n$ . Тогда из

$\rho(x^n, y^n) < \frac{1}{n}$  следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{n_k} = x^0$ . Точка  $x^0 \in \mathbb{X}$ , так как  $\mathbb{X}$  замкнуто. В силу непрерывности  $f$  в точке  $x^0$  по множеству  $\mathbb{X}$  имеем:  $f(x^{n_k}) \rightarrow f(x^0)$ ,  $f(y^{n_k}) \rightarrow f(x^0)$  при  $k \rightarrow \infty$ , так что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \leq |f(x^{n_k}) - f(x^0)| + |f(y^{n_k}) - f(x^0)| \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{n_k}) - f(y^{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Теорема доказана.

## 2.5. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Теорема [Прохождение непр. функции через промежуточные значения]:

Пусть функция  $w = f(x)$  непрерывна на линейно связном множестве  $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}^m$ ,  $a, b \in \mathbb{X}$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Пусть число  $C$  лежит между числами  $A$  и  $B$ . Тогда на любой кривой соединяющей точки  $a$  и  $b$  и лежащей в  $\mathbb{X}$ , найдется точка  $c$ , такая, что  $f(c) = C$ .

**Доказательство:** Пусть  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{E}^1$ ,  $x_j = \varphi_j(t)$ ,  $\varphi_j(\alpha) = a_j$ ,  $\varphi_j(\beta) = b_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m)$ ,  $\varphi_j$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ .

$$\Gamma = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

соединяющая точки  $a$  и  $b$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{X}$ .

Рассмотрим функцию одной переменной  $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ . По теореме о непрерывности суперпозиции функций  $F(t)$  - непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ ,  $F(\alpha) = A$ ,  $F(\beta) = B \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha, \beta) : F(\gamma) = C$  (т. Больцано - Коши). Тогда  $c = (\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_m(\gamma)) \Rightarrow f(c) = C$ .

### 3. Билет 3

#### 3.1. Частные производные функции нескольких переменных.

**Определение:**  $f$  определена  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ . Если существует и конечен  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = b \in R$ , то этот предел называется частной производной функции  $w = f(x)$  в точке  $a$  по аргументу  $x_k$ .

**Обозначение.**  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  или  $f'_{x_k}$

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

(Только на месте  $k$ -ого аргумента есть приращение).

**Замечания.**

1. При вычислении  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$  вычисляется как для функций одной переменной  $x_k$  при фиксированных остальных переменных (остальные переменные – постоянные).

2.  $\left[ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, m \right] \not\Rightarrow [f \text{ непрерывна в точке } a]$

**Контрпример.**

$$\omega = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

Однако,  $f$  не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ , т.к. в этой точке у нее не существует  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

3. Определение частной производной функции  $w = f(x)$  дано для внутренней точки множества определения функции. Оно не пригодно для граничной предельной точки множества, поскольку в граничной точке не всегда можно определить частное приращение. Поэтому частная производная в граничной предельной точке множества определения функции находится как предел частной производной по множеству.

Точка  $a \in X$  – предельная граничная точка.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2) \\ (x,y) \in X}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

#### 3.2. Дифференцируемость функции в точке

Некоторые замечания, которые нужны для определения дифференцируемости функции в точке:

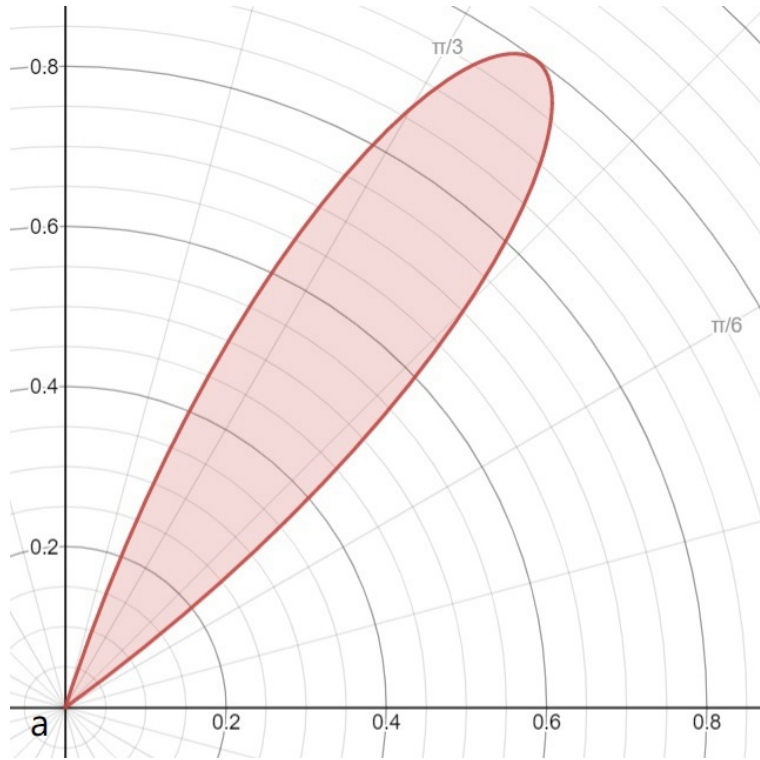


Рис. 1: Пример того, как частную производную следует искать как предел по множеству в точке  $a$ .

Рассмотрим  $w = f(x)$ , она определена в  $\mathcal{U}(a)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) : a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) \in \mathcal{U}(a)$

Рассмотрим  $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ ,  $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow \bar{0}$ , где  $\bar{0} = \overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^m$ .

$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$  – Полное приращение функции в точке  $a$ , соответствующее приращению аргументов  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ .

**Определение:** Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $a$ , если  
**Условие 1:**

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

где  $A_j$  – постоянные,  $j = 1, \dots, m$ , не зависят от  $\Delta x$ ,  $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x)$  – б.м. функции при  $\Delta x \rightarrow 0$ ;  $\alpha_j = 0$  при  $\Delta x = \bar{0}$ .

**Условие 2:**

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

(По сути  $\rho$  – расстояние от точки  $\Delta x$  до  $\bar{0}$ ).

**Предложение.** Условия 1 и 2 определения дифференцируемости функции в точке эквиваленты.

**Доказательство.**

$1 \Rightarrow 2$

Покажем, что  $\alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m = o(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\rho \neq 0$ .

Заметим, что

$$\left| \frac{\Delta x_j}{\rho} \right| \leq 1, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$$

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq \rho \cdot \left( |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \dots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right) \leq \rho \cdot (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|)$$

В силу того, что  $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow \bar{0}$ ,  $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|$  также стремиться к нулю, как конечная сумма б.м. функций.

Значит,  $\rho \cdot (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) = o(\rho)$ . Показали, что это выражение действительно есть б.м. функция.

$2 \Rightarrow 1$

$$\begin{aligned} o(\rho) &= \frac{\rho^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} \\ o(\rho) &= \left( \frac{\Delta x_1}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} \right) \Delta x_1 + \dots + \left( \frac{\Delta x_m}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho} \right) \Delta x_m \end{aligned}$$

Понятно, что  $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho} \frac{o(\rho)}{\rho}$ , но  $\frac{\Delta x_j}{\rho}$  величина ограниченная, а  $\frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow$  при  $\Delta x \rightarrow \bar{0}$ .  $\alpha_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , только при  $\Delta x = \bar{0}$ .

*Доказано.*

### 3.3. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке

**Теорема 2.** Пусть  $w = f(x)$  определена в  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$  и в этой окрестности существуют  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Если  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$  непрерывны в точке  $a$ , то функция  $f$  дифференцируема в точке  $a$ .

**Доказательство.** Проведем доказательство для  $m = 2$ ,  $w = f(x, y)$ ,  $a = (a_1, a_2)$ .

Рассмотрим точку  $(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) \in \mathcal{U}(a)$ .

Рассмотрим

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) + f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$$

Введем функцию  $\varphi(x) = f(x, a_2 + \Delta y)$  и  $\psi(y) = f(a_1, y)$

$$\begin{aligned} \Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) &= \Delta \varphi(a_1, \Delta x) + \Delta \psi(a_2, \Delta y) = \\ &= \varphi(a_1 + \Delta x) - \varphi(a_1) + \psi(a_2 + \Delta y) - \psi(a_2) \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа для функции одной переменной:  $\exists \theta_1 : 0 < \theta_1 < 1$  и  $\exists \theta_2 : 0 < \theta_2 < 1$  :

$$f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) \Delta x$$

$$f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

$$f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \Delta y) = f'_x(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y); \quad \alpha_1 \rightarrow 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

$$f'_y(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y); \quad \alpha_2 \rightarrow 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\Delta f(a, (\Delta x, \Delta y)) = f'_x(a) \Delta x + f'_y(a) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

Получили в точности определение дифференцируемости функции  $f$  в точке  $a$ .  
*Доказано.*

**Примеры.** (Доказательство дифференцируемости ф-ции в точке)

$$w = f(x, y), \bar{0} = (0, 0), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\Delta y + o(\rho), \rho \rightarrow 0.$$

**Пример 1.**  $f(x, y) = y^2 \sin x$

Заметим, что  $f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0$

Из определения частной производной:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Частные производные равны нулю, значит, надо показать, что  $f(x, y) = o(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow 0$ .  
 Надо показать, что  $F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$ , при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

$$|F(x, y)| = \left| \frac{y^2 \sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq [|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}] \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall (x, y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \mapsto |F(x, y)| < \varepsilon] \stackrel{def}{=} \left[ \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = 0 \right] \Leftrightarrow [f(x, y) = o(\rho), \rho \rightarrow 0].$$

**Пример 2.**  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ,  $\bar{0} = (0, 0)$

$$f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $F(x, y) = \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|}$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(\rho, \varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(\rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Значит,  $f$  не является дифференцируемой в точке  $(0, 0)$ .

**Пример 3. (Очень важный для понимания теории)**

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{|x|}, x \neq 0$$

$$f(0, y) = y^2 \sin \frac{1}{|y|}, y \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{|x|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{|y|} = 0$$

Теперь докажем, что эта функция дифференцируема в  $(0, 0)$

Введем функцию

$$F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$|F(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall (x, y) : 0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \mapsto |F(x, y)| < \varepsilon \stackrel{def}{=}$$

$$[\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) = 0] \Leftrightarrow [f(x, y) = o(\rho), \rho \rightarrow 0] \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$  дифференцируема в  $(0, 0)$

Посмотрим на частные производные этой функции по  $x$  и  $y$  вне точки  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 + y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ не существует} \Rightarrow f'_x \text{ не является непрерывной в } (0, 0).$$

Пример показывает, что непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции.

**Замечание.** Непрерывность частных производных функции  $f$  в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в точке. Это условие достаточно (Теорема 2).

### 3.4. Дифференцируемость сложной функции

Рассматриваем функции  $x_j = \varphi_j(t)$  в окрестности точки  $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{E}^k$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Рассматриваем функцию  $w = f(x)$ , которая определена в окрестности точки  $a = (a_1, \dots, a_m)$ , причем  $a_j = \varphi_j(t^0)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .  $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$  – суперпозиция функций  $f$  и функций  $\varphi_1(t) \dots$  (сложная функция)

#### Теорема 3 [О дифференцируемости сложной функции]:

Пусть функции  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  дифференцируемы в точке  $t^0$ , функция  $f$  дифференцируема в точке, причем  $a_j = \varphi_j(t^0)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Тогда  $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$  дифференцируема в точке  $t^0$  и

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(t^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_j}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_j}(t^0), j = 1, \dots, k$$

**Доказательство.**  $t^0 + \Delta t \in \mathcal{U}(t^0)$ ,  $a + \Delta x \in \mathcal{U}(a)$ ,  $\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}$ .

Условия дифференцируемости функции  $\varphi_j$  в точке  $t^0$ :

$$\Delta \varphi_j(t^0, \Delta t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho), \rho \rightarrow 0; \rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta t \rightarrow \bar{0}.$$

Условия дифференцируемости функции  $f$  в точке  $a$ :

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.$$

Подставим вместо  $\Delta x_1 \dots \Delta x_m$  приращения функции  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \Delta f(a, \Delta x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \left[ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \\ &\quad + \alpha_1 \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_m \left[ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \right]. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t_0) \right] \Delta t_1 + \dots \\ &\quad \dots + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t_0) \right] \Delta t_k + \\ &\quad + o(\rho) \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) + \alpha_1 + \dots + \alpha_m \right] + \\ &\quad + \rho \left[ \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \right] \frac{\Delta t_1}{\rho} + \dots \\ &\quad \dots + \rho \left[ \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \right] \frac{\Delta t_k}{\rho}. \end{aligned}$$

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho) \gamma + \rho \Lambda_1 + \dots + \rho \Lambda_k$$

$\gamma$  - ограничена,  $\Delta x_j = \Delta \varphi_j \xrightarrow{\Delta t \rightarrow \bar{0}} 0$ ,  $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta t \rightarrow \bar{0} = (0, \dots, 0)$ .  $\Rightarrow \alpha_j \rightarrow 0$ , при  $\rho \rightarrow 0$

$$\Lambda_j = [\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \alpha_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)] \frac{\Delta t_j}{\rho} \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$$

Перепишем:

$$\Delta F(t^0, \Delta t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0) \Delta t_k + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

*Доказано.*

### 3.5. Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

Рассматриваем функцию  $w = f(x)$  определенную в  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ . Мы предполагаем, что  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Поскольку функция дифференцируема в точке  $a$ , то

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

**Определение:** Дифференциалом функции  $f$  в точке  $a$  называется главная линейная часть (относительно  $\Delta x_j$ ) приращения функции  $f$  в точке  $a$ , соответствующая приращению аргументов  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ .

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\Delta x_m$$

Поскольку дифференциал независимой переменной  $x_j$  есть произвольное число, то  $dx_j = \Delta x_j$ .

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m \quad (*)$$

**Предложение. [Инвариантность формы 1-го дифференциала]**

Выражение (\*) универсально, оно справедливо и в случае, когда  $x_j = \varphi_j(t)$ ,  $t \in \mathcal{U}(t^0) \subset \mathbb{E}^k$ ,  $a_j = \varphi_j(t^0)$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $\varphi_j$  дифференцируема в точке  $t^0$ ).

*Доказательство.*

$$d\varphi_j(t^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t^0)dt_k, \quad j = 1, \dots, m$$

Введем функцию  $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$

$$\begin{aligned} dF(t^0) &= \frac{\partial F}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_k}(t^0)dt_k \\ dF(t^0) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0) \right] dt_1 + \dots \\ &+ \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0) \right] dt_k \end{aligned}$$

Перегруппируем:

$$\begin{aligned} dF(t^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t^0)dt_k \right] + \dots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \left[ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1}(t^0)dt_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t^0)dt_k \right] \end{aligned}$$

Получаем:

$$dF(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m$$

*Доказано.*

### 3.6. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

Рассматриваем функцию  $w = f(x)$  определенную в  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^m$ . Мы предполагаем, что  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Возьмём единичный вектор  $\vec{n} = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m)$ ,  $|\vec{n}| = 1$ .

$$l : \begin{cases} x_1 = a_1 + t \cos \alpha_1; \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_m = a_m + t \cos \alpha_m; \end{cases}$$

Рассмотрим суперпозицию:

$$F(t) = f(a_1 + t \cos \alpha_1, \dots, a_m + t \cos \alpha_m)$$

$F$  дифференцируема в точке  $t = 0$ .

**Определение:** Производной функции  $f$  по направлению  $l$  в точке  $x = a$  называется производная функции  $F$  в точке  $t = 0$ .

**Обозначения.**

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t \cos \alpha_1, \dots, a_m + t \cos \alpha_m) - f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cos \alpha_m$$

**Определение:** Градиентом функции  $f$  называется вектор

$$\text{grad} f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

Из этого определения и выражения для производной по направлению  $l$  в точке  $a$  функции  $f$  мы получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (\text{grad} f(a), \vec{n})$$

**Предложение.** Градиент функции  $f$  в точке  $a$  характеризует направление и величину максимального роста производной по направлению функции  $f$  в точке  $a$ .

*Доказательство.*

По определению производной по направлению в точке  $a$ :

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = |\text{grad} f(a)| |\vec{n}| \cos \varphi = |\text{grad} f(a)| \cos \varphi$$

$\cos \varphi$  имеет наибольшее значение равное 1  $\Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \vec{n}$  и  $\text{grad}$  — направление совпадают, т.к. в этом случае  $\varphi = 0$ .

*Доказано.*

### 3.7. Необходимые условия дифференцируемости

**Необходимое условие 1.**

$$[f \text{ дифференцируема в точке } a] \Rightarrow [\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, m]$$

**Доказательство.**

Возьмем  $j = k$ , рассматриваем  $\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$ . Тогда  $\Delta f(a, \Delta x) = \Delta_k f(a, \Delta x_k)$ . Тогда используя 1-ое условие определения получим:

$$\Delta f(a, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

Получаем следующее:

$$\Delta_k f(a, \Delta x_k) = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$$

$$\frac{\Delta_k f(a, \Delta x_k)}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \rightarrow A_k, \Delta x_k \rightarrow 0 \Rightarrow A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

В силу произвольности мы доказано для всех переменных.

*Доказано.*

Таким образом мы уточнили определение, например, перепишем определение 1:

$$\Delta f(a, \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$$

**Необходимое условие 2.** Если  $w = f(x), x \in \mathbb{E}^m$  дифференцируема в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.**

$\Delta f(a, \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \Delta x_m + \alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_m(\Delta x) \Delta x_m$ .  
Если  $\Delta x \rightarrow \bar{0}$ , то  $f(a + \Delta x) - f(a) \rightarrow 0 \Rightarrow f$  непрерывна в точке  $a$ .

*Доказано.*

**Необходимое условие 3.** (Не было в лекции Знаменской)

Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда в этой точке функция  $f$  имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

[Взято из Кудрявцева, Том 2, стр. 267]

## 4. Билет 4

### 4.1. Частные производные высших порядков.

**Определение:** Пусть  $\omega = f(x)$  - дифференцируема в  $D \subset \mathbb{E}^m$ ,  $D$  - область. И  $\forall x \in D \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Пусть  $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , и в точке  $x$ :  $\exists \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$ . Тогда

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x)$$

называется частной производной 2-го порядка функции  $f$  в точке  $x$ . Частные производные высших порядков определяются так же.

**Обозначения:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x), \quad f''_{x_j x_k}(x), \quad f_{x_j x_k}^{(2)}(x)$$

$$j = k : \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$$

**Примечание:** если  $k \neq j$ , производная  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$  называется смешанной.

### 4.2. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования.

**Примеры:**

1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left( -\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2 + x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{y^2 + x^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x, 0) = f(0, y) = f(0, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$f'_x = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - y^4) + 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Из этих примеров видно, что в общем случае смешанные производные зависят от порядка дифференцирования.

**Теорема:** Пусть в  $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{E}^2$  определены  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , и эти производные непрерывны в точке  $a = (a_1, a_2)$ , тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

**Доказательство:** Рассмотрим функцию

$$U(x, y) = f(x, y) - f(x, a_2) - f(a_1, y) + f(a_1, a_2)$$

Пусть  $\Pi = \{(x, y) : |x - a_1| \leq r_1, |y - a_2| \leq r_2\}$ ,  $\Pi \subset \mathcal{U}(a)$ , где определены смешанные производные. Фиксируем  $y \in (a_2 - r_2, a_2 + r_2)$  и на интервале  $(a_1 - r_1, a_1 + r_1)$  рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, a_2)$$

$\varphi$  дифференцируема на интервале  $(a_1 - r_1, a_1 + r_1)$  и  $U(x, y) = \varphi(x) - \varphi(a_1)$ . Тогда, по теореме Лагранжа  $\exists \theta_1 : 0 < \theta_1 < 1$ :

$$U(x, y) = \varphi'(a_1 + \theta_1 \Delta x) \Delta x$$

где  $\Delta x = x - a_1$

$$U(x, y) = [f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, y) - f'_x(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2)] \Delta x$$

К выражению, стоящему в [...] применим теорему Лагранжа.

$\exists \theta_2 : 0 < \theta_2 < 1$ :

$$U(x, y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \Delta x$$

где  $\Delta y = y - a_2$ .

Аналогично фиксируем  $x \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1)$  и на интервале  $(a_2 - r_2, a_2 + r_2)$  получаем

$$U(x, y) = f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) \Delta y \Delta x$$

$$f''_{yx}(a_1 + \theta_3 \Delta x, a_2 + \theta_4 \Delta y) = f''_{xy}(a_1 + \theta_1 \Delta x, a_2 + \theta_2 \Delta y)$$

Учитывая непрерывность в точке  $a$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , получаем  $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$ .

**Определение:** Функция  $\omega = f(x, y)$  называется  $n$  раз дифференцируемой в точке  $x = a \in \mathbb{E}^m$ , если все ее частные производные порядка  $n - 1$  есть дифференцируемые функции

**Теорема:** (без доказательства) Пусть  $\omega = f(x, y)$  дважды дифференцируема в точке  $a$ , тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

### 4.3. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности их формы.

**Определение:** Пусть  $\omega = f(x)$  дважды дифференцируема в  $D \subset \mathbb{E}^m$ .  $\forall x \in D$   $df(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$ . Тогда дифференциалом 2 порядка будем называть

$$d^2 f(x) = d(df)(x) = \sum_{j=1}^m d \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) dx_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) dx_k \right) dx_j$$

Дифференциалы высших порядков определяются таким же образом.

**Замечание:** Если рассмотреть дифференциал, как оператор

$$d = \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$$

То дифференциал  $n$ -ого порядка можно записать в виде

$$d^n = \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n$$

**Предложение:** Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

**Доказательство:** Пусть  $\omega = f(x)$ ,  $x_j = \varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $f, \varphi_j$  - дважды дифференцируемы.

$$df(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j, \quad dx_j = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(t) dt_i$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_i dx_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d^2 x_j$$

причем

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d^2 x_j \neq 0$$



#### 4.4. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

**Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Лагранжа]:** Пусть функция  $\omega = f(x)$  обладает непрерывными частными производными порядка  $n+1$  в шаре  $B_\delta(a)$ ,  $\Delta x$  таково, что  $a + \Delta x \in B_\delta(a)$ . Тогда найдется  $0 < \theta < 1$  такое, что

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(a)}{k!} + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{d^{n+1} f(a + \theta \Delta x)}{(n+1)!}$$

**Примечание:**  $dx_j$  трактуется как  $\Delta x_j$

**Доказательство:**  $a + \Delta x \in B_\delta(a) \Rightarrow a - \Delta x \in B_\delta(a), \forall t \in [-1, 1], a + t\Delta x \in B_\delta(a)$ .

$$f(a + t\Delta x) = f(a_1 + t\Delta x_1, \dots, a_m + t\Delta x_m) = \varphi(t)$$

$$\varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + t\Delta x_j) \Delta x_j = df(a + t\Delta x)$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_k=1}^m \dots \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} \Delta x_{j_1} \dots \Delta x_{j_k} = d^k f(a + t\Delta x)$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + r_{n+1}(\theta)$$

где

$$r_{n+1}(\theta) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{(n+1)}$$

Подставив  $t = 1$  получим требуемое равенство.

**Теорема [Разложение с остаточным членом в форме Пеано]:** (без доказательства)  
Пусть  $f$   $n$ -раз дифференцируема в точке  $x = a$ , тогда

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(a)}{k!} + o(\rho), \rho \rightarrow 0, \rho = \rho(\Delta x, 0)$$

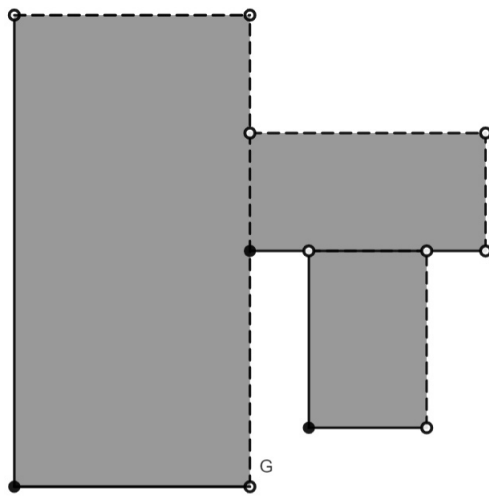
## 5. Билет 5

### 5.1. Необходимые определения и предложения билета.

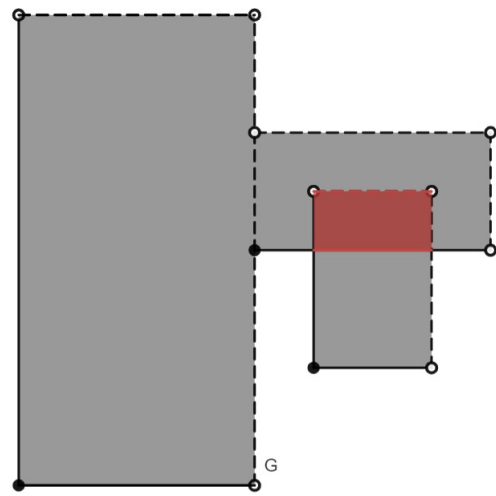
**Определение:** множество  $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$  будем называть клеткой в  $\mathbb{E}^m$ .

**Определение:** множество  $G \subset \mathbb{E}^m$  будем называть клеточным, если оно является объединением **конечного** числа попарно непересекающихся клеток:

$$G = \bigcup_{j=1}^k Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$



G - клеточное множество



G - не клеточное множество

**Свойства клеточных множеств:**

1° Объединение **конечного** числа попарно непересекающихся клеточных множеств есть клеточное множество.

**Доказательство:**

$G$  и  $H$  - клеточные множества. Тогда:

$$G = \bigcup_{j=1}^k Q_j, \quad H = \bigcup_{j=k+1}^n Q_j.$$

Значит:

$$G \cup H = \bigcup_{j=1}^n Q_j - \text{клеточное множество.}$$

2° Пересечение двух клеток есть клетка.

**Доказательство:**

Пусть  $Q_1 = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$ , а  $Q_2 = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \times \dots \times [c_m, d_m)$ . Тогда возможны два случая:

- а)  $\exists j: [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = \emptyset \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  - клетка;
- б)  $\forall j \mapsto [a_j, b_j) \cap [c_j, d_j) = [e_j, f_j) \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = [e_1, f_1) \times [e_2, f_2) \times \dots \times [e_m, f_m)$  - клетка.

3° Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

**Доказательство:**

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  - клеточные множества.

$$G_1 = Q_1^1 \cup Q_2^1 \cup \dots \cup Q_k^1$$

$$G_2 = Q_1^2 \cup Q_2^2 \cup \dots \cup Q_n^2$$

Обозначим  $Q_{ij} = Q_i^1 \cap Q_j^2$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

$Q_{ij}$  - клетка (свойство  $2^\circ$ ).

$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{i,j} Q_{ij} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^n Q_{ij}$  - объединение попарно непересекающихся клеток есть клеточное множество.

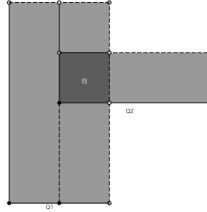
4° Разность двух клеток есть клеточное множество.

**Доказательство:**

$Q_1$  и  $Q_2$  - клетки.  $Q = Q_1 \cap Q_2$  - клетка (свойство  $2^\circ$ ). Тогда

$$Q_1 \setminus Q_2 = Q_1 \setminus Q.$$

Существует такое разбиение клетки  $Q_1$  на более мелкие клетки, что  $Q$  является одной из них  $\Rightarrow Q_1 \setminus Q_2$  - клеточное множество.



5° Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.

**Доказательство:**

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^k Q_j^1, \quad G_2 = \bigcup_{j=1}^n Q_j^2.$$

$$G_1 \setminus Q_1^2 = \bigcup_{i=1}^k (Q_i^1 \setminus Q_1^2) = \bigcup_{i=1}^k G_{i1}$$

$G_{i1}$  - клеточное множество (свойство  $4^\circ$ ).

$G_{i1} \cap Q_{j1} = \emptyset$ , если  $i \neq j \Rightarrow G_1 \setminus Q_1^2$  - клеточное множество (свойство  $1^\circ$ ).

Аналогично для других клеток  $G_2$

$$G_1 \setminus G_2 = G_1 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^n Q_j^2 \right) = \bigcap_{j=1}^n (G_1 \setminus Q_j^2)$$

Последнее является клеточным множеством по свойству  $3^\circ$ . Откуда получаем, что  $G_1 \setminus G_2$  - клеточное множество.

6° Объединение **конечного** числа клеточных множеств есть клеточное множество.

**Доказательство:**

1)  $G_1$  и  $G_2$ .

$$G_1 \cup G_2 = (G_1 \setminus G_2) \cup (G_2 \setminus G_1) \cup (G_1 \cap G_2);$$

Последние три скобки являются попарно непересекающимися клеточными множествами  $\xrightarrow{1^\circ} G_1 \cup G_2$  - клеточное множество.

2) Далее для  $G_3, G_4, \dots, G_n$  по индукции.

Таким образом, объединение, пересечение и разность конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

**Определение:** мерой клетки  $Q$  назовем число:

$$m(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m);$$

$$m(\emptyset) = 0.$$

**Определение:** мерой клеточного множества  $G$  назовем число:

$$m(G) = \sum_{j=1}^k m(Q_j); \quad m(\emptyset) = 0.$$

**Лемма:** мера клеточного множества  $G$  не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

**Доказательство:**

Пусть  $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$  и также  $G = Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_n$ . Тогда обозначим  $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Понятно, что

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^n Q_{ij}, \quad Q'_j = \bigcup_{i=1}^k Q_{ij}.$$

Тогда:

$$m(G) = \sum_{i=1}^k m(Q_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k m(Q_{ij}) = \sum_{j=1}^n m(Q'_j) = m(G).$$

**Предложение 1:** если клеточные множества  $G_1, G_2, \dots, G_n$  попарно не пересекаются, то для  $G = \bigcup_{j=1}^n G_j$  выполняется  $m(G) = \sum_{j=1}^n m(G_j)$ .

**Доказательство:**

$$G_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} Q_i^j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$G = \bigcup_{j=1}^n G_j = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{k_j} Q_i^j = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq k_j}} Q_i^j$$

Все клетки из последнего объединения попарно не пересекаются, поэтому:

$$m(G) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq k_j}} m(Q_i^j) = \sum_{j=1}^n m(G_j).$$

**Предложение 2:** если  $G_1$  и  $G_2$  - клеточные множества и  $G_1 \subset G_2$ , то  $m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \setminus G_1)$ ,  $m(G_1) \leq m(G_2)$ .

**Доказательство:**

$$G_2 = G_1 \cup (G_2 \setminus G_1) = G_1 \cup G.$$

$$G_1 \cap G = \emptyset \xrightarrow{\text{np.1}} m(G_2) = m(G_1) + m(G_2 \setminus G_1) \Rightarrow m(G_1) \leq m(G_2).$$

**Предложение 3:** если  $G_1, G_2, \dots, G_k$  - клеточные множества,  $G = \bigcup_{j=1}^k G_j$ , то  $m(G) \leq$

$$\sum_{j=1}^k m(G_j).$$

**Доказательство:**

Для  $G_1$  и  $G_2$  по предложению 2, а далее по индукции.

**Предложение 4:** для любого клеточного множества  $G$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon$  - клеточные множества такие, что:

- 1)  $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \text{int } G \subset G$ ;  $m(G) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ ;
- 2)  $G \subset \overline{G} \subset \text{int } G^\varepsilon \subset G^\varepsilon$ ;  $m(G^\varepsilon) - m(G) < \varepsilon$ .

**Доказательство:**

- 1)  $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$ .

Рассмотрим отдельную клетку  $Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$

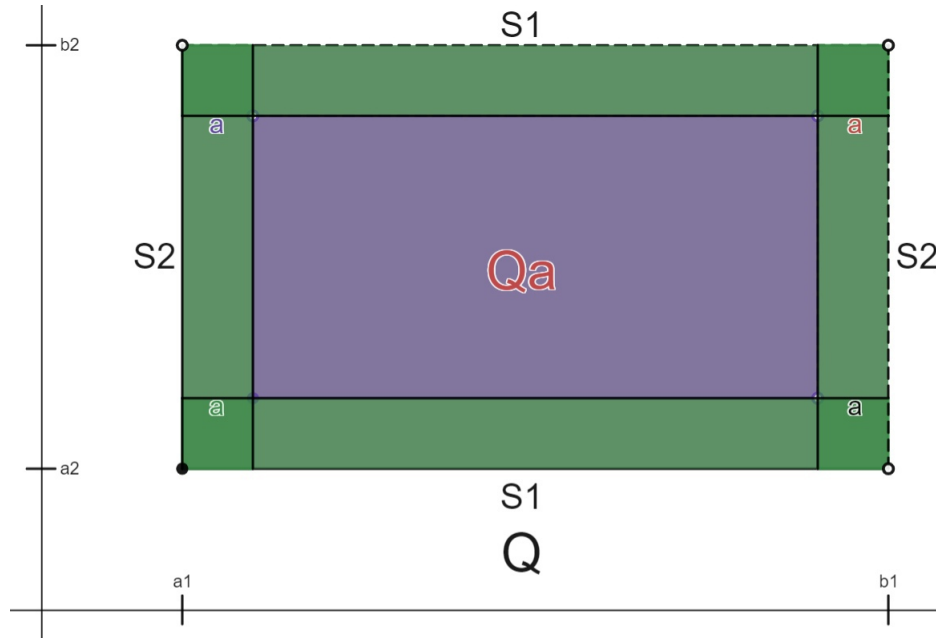


Рис. 2: Случай при  $m = 2$

$$m(Q_a) = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j - 2a), \quad Q_a \subset Q$$

$$S_j = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m (b_i - a_i);$$

Тогда

$$m(Q) \leq m(Q_a) + 2a \cdot \sum_{j=1}^m S_j = m(Q_a) + 2aS \Rightarrow m(Q) - m(Q_a) \leq 2aS = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда для одной клетки  $a = \frac{\varepsilon}{4S}$ .

Так как  $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$ , то  $a = \frac{\varepsilon}{4Sk}$ .

Получаем  $G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^k (Q_a)_i$ .

Таким образом,  $G_\varepsilon \subset \overline{G_\varepsilon} \subset \text{int } G \subset G$ .

2) Доказывается аналогично 1).

## 5.2. Определение измеримости по Жордану множества в $m$ -мерном евклидовом пространстве.

**Определение:** множество  $X \subset \mathbb{E}^m$  называется измеримым по Жордану, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon$  и  $G^\varepsilon$  - клеточные множества такие, что  $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$  и  $m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Определение:** мерой измеримого по Жордану множества  $X \subset \mathbb{E}^m$  называется такое число  $m(X)$ , что  $\forall G_\varepsilon, G^\varepsilon$  таких, что  $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \mapsto m(G_\varepsilon) \leq m(X) \leq m(G^\varepsilon)$ .

**Лемма:** для любого измеримого по Жордану множества  $X$  его мера  $m(X)$  существует и единственна, причем

$$m(X) = \overline{m}(X) = \underline{m}(X),$$

где  $\overline{m}(X) = \inf_{X \subset G^\varepsilon} m(G^\varepsilon)$  - верхняя (внешняя) мера  $X$ ;  
 $\underline{m}(X) = \sup_{G_\varepsilon \subset X} m(G_\varepsilon)$  - нижняя (внутренняя) мера  $X$ .

**Доказательство:**

Так как  $G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon$ , то  $m(G_\varepsilon) \leq m(G^\varepsilon) \Rightarrow \{m(G_\varepsilon)\}$  ограничена сверху  $\Rightarrow \Rightarrow \exists \alpha = \sup_{G_\varepsilon} m(G_\varepsilon) = \underline{m}(X)$ .

Аналогично:  $\{m(G^\varepsilon)\}$  ограничена снизу  $\Rightarrow \exists \beta = \inf_{G^\varepsilon} m(G^\varepsilon) = \overline{m}(X)$ .

По теореме об отделимости множеств:  $m(G_\varepsilon) \leq \alpha \leq \beta \leq m(G^\varepsilon)$ .

Пусть  $m(X) = \alpha$ .

$\forall \varepsilon > 0 \mapsto 0 \leq \beta - \alpha \leq m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Откуда  $\beta = \alpha \Rightarrow m(X)$  единственна.

**Предложение 5:** пусть множество  $X$  измеримо по Жордану и  $\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$ . Тогда  $m(X) = 0$ .

**Доказательство:**

Возьмем  $G_\varepsilon = \emptyset$ . Тогда:

$\forall \varepsilon > 0 \mapsto G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon \ \& \ m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) = m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \Rightarrow 0 \leq m(X) < \varepsilon \Rightarrow m(X) = 0$ .

**Замечание:** измеримое по Жордану множество, обладающее свойством из предыдущего предложения, будем называть множеством меры нуль.

**Предложение 6:** подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

**Доказательство:**

Пусть  $m(X) = 0$  и  $Y \subset X$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon$ .

Как следствие:

$\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon: Y \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(Y) = 0$ .

**Предложение 7:** объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

**Доказательство:**

$$m(X_1) = m(X_2) = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G_1^\varepsilon : X_1 \subset G_1^\varepsilon, m(G_1^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\exists G_2^\varepsilon : X_2 \subset G_2^\varepsilon, m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Тогда } X_1 \cup X_2 \subset G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon = G^\varepsilon.$$

$$m(G^\varepsilon) \stackrel{\text{пр.3}}{\leq} m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow m(X_1 \cup X_2) = 0.$$

Далее по индукции.

### 5.3. Критерий измеримости.

**Теорема [Критерий измеримости]:**

$$[X - \text{измеримо по Жордану}] \iff [X \text{ ограничено и } m(\partial X) = 0].$$

**Доказательство:**

$\implies$ :

$$X - \text{измеримо по Жордану: } \forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon : G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon,$$

$$m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\text{Из предложения 4 } \Rightarrow \exists \widetilde{G}^\varepsilon : \overline{G^\varepsilon} \subset \text{int } \widetilde{G}^\varepsilon \subset \widetilde{G}^\varepsilon, m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(G^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\exists \widetilde{G}_\varepsilon : \widetilde{G}_\varepsilon \subset \text{int } G_\varepsilon \subset G_\varepsilon, m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда:

$$m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(G^\varepsilon) + m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) + m(G_\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\widetilde{G}_\varepsilon$  не содержит точки  $\partial X$ , а  $\widetilde{G}^\varepsilon$  содержит их все, откуда:

$$\widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon - \text{клеточное множество и } \partial X \subset \widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon$$

$$m(\widetilde{G}^\varepsilon \setminus \widetilde{G}_\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow m(\partial X) = 0.$$

$\longleftarrow$ :

$$X - \text{ограничено} \Rightarrow \exists Q - \text{клетка: } X \subset Q;$$

$$[m(\partial X) = 0] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists G^\varepsilon : \partial X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) < \varepsilon]$$

$$Q \setminus G^\varepsilon - \text{клеточное множество} \Rightarrow Q \setminus G^\varepsilon = \bigcup_{j=1}^k Q_j, \quad \text{где } Q_j \text{ не содержат точек } \partial X.$$

Тогда есть два варианта:

$$[Q_j \subset X] \text{ либо } [Q_j \cap X = \emptyset]$$

$$\text{Пусть без потери общности } Q_1, Q_2, \dots, Q_l : Q_j \subset X, j = \overline{1, l};$$

$$Q_{l+1}, Q_{l+2}, \dots, Q_k : Q_j \cap X = \emptyset, j = \overline{l+1, k};$$

$$\widetilde{G}_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^l Q_j, \quad \widetilde{G}^\varepsilon = \widetilde{G}_\varepsilon \cup G^\varepsilon = Q \setminus \left( \bigcup_{j=l+1}^k Q_j \right)$$

$$\widetilde{G}_\varepsilon \subset X \subset \widetilde{G}^\varepsilon$$

$m(G^\varepsilon) = m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow X$  измеримо по Жордану.

#### 5.4. Примеры неизмеримых по Жордану множеств.

[1]  $X = \{x \in [0, 1] : x \in \mathbb{Q}\}, X \subset \mathbb{E}^1$ .  
 $\partial X = [0, 1] \Rightarrow m(\partial X) = 1 \neq 0 \Rightarrow X$  неизмеримо.

[2]  $Y = X \times X$ , где  $X$  из [1].  
 $\partial Y = [0, 1] \times [0, 1] \Rightarrow m(\partial Y) = 1 \neq 0 \Rightarrow Y$  неизмеримо.

[3]  $X$  из [1].  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, 0 \leq a_j \leq 1$

Пусть  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}), 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ .

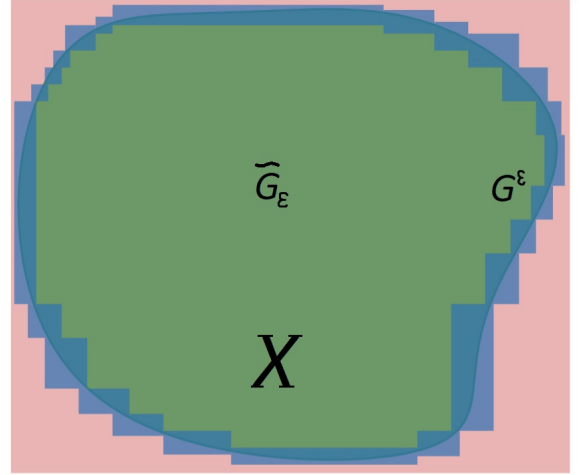
$B$  открыто как объединение открытых множеств.

Обозначим  $B_k = \bigcup_{j=1}^k (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}; a_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$

$$m(B_k) \leq \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{j-1}} = \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) = \varepsilon \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right) < 2\varepsilon$$

Тогда  $\underline{m}(B) \leq 2\varepsilon < 1$ . Но  $[0, 1] \subset B \Rightarrow \overline{m}(B) > 1$ .

То есть  $\underline{m}(B) \neq \overline{m}(B) \Rightarrow B$  неизмеримо.



#### 5.5. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

1° Если  $X_1$  и  $X_2$  измеримы по Жордану, то  $X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2, X_1 \setminus X_2$  - измеримые по Жордану множества.

**Доказательство:**

$X_1$  и  $X_2$  измеримы по Жордану  $\Rightarrow X_1$  и  $X_2$  ограничены и  $m(\partial X_1) = m(\partial X_2) = 0$ . Тогда и  $m(\partial X_1 \cup \partial X_2) = 0$ .

$$\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2; \partial(X_1 \setminus X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2$$

$$\downarrow$$

$$m(\partial(X_1 \cup X_2)) = m(\partial(X_1 \cap X_2)) = m(\partial(X_1 \setminus X_2)) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2$  и  $X_1 \setminus X_2$  измеримы.

#### 5.6. Конечная аддитивность меры Жордана.

2° Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_k$  - измеримые по Жордану множества, тогда множество  $X = \bigcup_{j=1}^k X_j$  измеримо и:



$$1) m(X) \leq \sum_{j=1}^k m(X_j);$$

$$2) \text{ Если } X_j \cap X_i = \emptyset \text{ при } i \neq j, \text{ то } m(X) = \sum_{j=1}^k m(X_j).$$

**Доказательство:** (для  $k = 2$ , а дальше по индукции)

1)  $X_1$  и  $X_2$  измеримы по Жордану  $\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$  измеримо.

$\forall \varepsilon > 0 \exists G_1^\varepsilon, G_2^\varepsilon: X_1 \subset G_1^\varepsilon, X_2 \subset G_2^\varepsilon$  и:

$$m(X_1) > m(G_1^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(X_2) > m(G_2^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда  $G^\varepsilon = G_1^\varepsilon \cup G_2^\varepsilon$  - клеточное множество и  $X \subset G^\varepsilon$ .

Получаем:

$$m(X) \leq m(G^\varepsilon) \leq m(G_1^\varepsilon) + m(G_2^\varepsilon) < m(X_1) + m(X_2) + \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon \Rightarrow m(X) \leq m(X_1) + m(X_2)$  \*

2)  $X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$

$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon^1, G_\varepsilon^2: G_\varepsilon^1 \subset X_1, G_\varepsilon^2 \subset X_2$  и:

$$m(G_\varepsilon^1) > m(X_1) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(G_\varepsilon^2) > m(X_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$G_\varepsilon = G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$  и  $G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2 = \emptyset$ , а также  $G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2 \subset X$ .

Тогда  $m(X) \geq m(G_\varepsilon) = m(G_\varepsilon^1) + m(G_\varepsilon^2) > m(X_1) + m(X_2) - \varepsilon$ .

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем  $m(X) \geq m(X_1) + m(X_2)$  \*\*

Из \* и \*\*  $\Rightarrow m(X) = m(X_1) + m(X_2)$ .

## 5.7. Измеримость и мера цилиндра в $(m+1)$ -мерном пространстве.

**Предложение:** пусть  $X \subset \mathbb{E}^m, m \geq 1$ , - измеримо, тогда множество  $Y = X \times [a, b] \subset \mathbb{E}^{m+1}$  - измеримо.  $m(Y) = m(X)(b-a)$ .

**Доказательство:**

$$[X \text{ измеримо}] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, G^\varepsilon : G_\varepsilon \subset X \subset G^\varepsilon, m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a}].$$

Рассмотрим клеточные множества:  $\widetilde{G}_\varepsilon = G_\varepsilon \times [a, b]$  и  $\widetilde{G}^\varepsilon = G^\varepsilon \times [a, b]$ ;

Тогда  $\widetilde{G}_\varepsilon \subset Y \subset \widetilde{G}^\varepsilon$ , а  $m(\widetilde{G}_\varepsilon) = m(G_\varepsilon)(b-a)$  и  $m(\widetilde{G}^\varepsilon) = m(G^\varepsilon)(b-a)$ ;

Получаем:  $m(\widetilde{G}^\varepsilon) - m(\widetilde{G}_\varepsilon) = (m(G^\varepsilon) - m(G_\varepsilon))(b-a) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow Y$  измеримо.

## 6. Билет 6

### 6.1. Определенный интеграл Римана.

**Обозначения:**

$y = f(x)$  некоторая функция,  $x \in [a, b]$

$T$  – разбиение отрезка  $[a, b] : T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $\Delta_T = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta x_j$  – мелкость разбиения

$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = \overline{1, n}$

**Определение:** Число  $I\{T, \xi\} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j$  называется интегральной суммой.

**Определение:** Число  $I$  называется пределом интегральных сумм  $I\{T, \xi\}$  при  $\Delta_T \rightarrow 0$ , Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \mapsto |I\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$ .

**Определение:** Функция  $y = f(x)$  называется интегрируемой на  $[a, b]$ , если существует конечный предел  $I$  интегральных сумм  $I\{T, \xi\}$  при  $\Delta_T \rightarrow 0$ .

Указанный предел  $I$  называется определенным интегралом функции  $f$  на  $[a, b]$ .

**Обозначение:**  $I = \int_a^b f(x) dx$

**Пример:**  $y(x) \equiv C$ ,  $x \in [a, b]$

$$I\{T, \xi\} = C(b - a) \Rightarrow I = \int_a^b C dx = C(b - a)$$

**Предложение:** [Необходимое условие интегрируемости функции]:

$$[f - \text{интегрируема на } [a, b]] \Rightarrow [f - \text{ограничена на } [a, b]]$$

**Доказательство:** от противного:

Пусть  $f$  не является ограниченной на  $[a, b]$  это означает, что  $\exists k$  : на  $[x_{k-1}, x_k]$  функция не является ограниченной, то есть,  $|f(\xi_k)| \Delta x_k$  может быть как угодно большим за счет выборки точки  $\xi_k \Rightarrow I\{T, \xi\}$  неогречена и предел  $I\{T, \xi\} \Delta_T \rightarrow 0$  не существует – противоречие.

**Замечание:** Не всякая ограниченная функция является интегрируемой на отрезке.

**Пример:** функция Дирихле на любом отрезке  $[a, b]$  ограничена

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

Однако:

$$\xi'_j \in \mathbb{Q}, j = \overline{1, n}$$

$$\xi''_j \in \mathbb{J}, j = \overline{1, n}$$

$$I\{T, \xi'\} = b - a \neq 0$$

$I\{T, \xi''\} = 0$ , откуда  $D(x)$  не является интегрируемой

## 6.2. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.

**Определение:** Пусть  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , ограничена на данном отрезке;  $T$ -разбиение отрезка  $[a, b]$ .

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), j = \overline{1, n}, \text{ тогда:}$$

$$\underline{S}_T = \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j \text{—нижняя сумма Дарбу по разбиению } T$$

$$\overline{S}_T = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j \text{—верхняя сумма Дарбу по разбиению } T$$

Очевидно, что при фиксированном  $T$  выполняется  $\underline{S}_T \leq I\{T, \xi\} \leq \overline{S}_T$

**Свойство 1:** Для фиксированного  $T$  выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi', \xi'' : \overline{S}_T - I\{T, \xi'\} < \varepsilon, I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < \varepsilon$$

**Доказательство:** из определения  $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi'_j \in [x_{j-1}, x_j] : f(\xi'_j) > M_j - \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow M_j - f(\xi'_j) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\sum_{j=1}^n (M_j - f(\xi'_j)) \Delta x_j < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_j = \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^n (M_j - f(\xi'_j)) \Delta x_j =$$

$$\overline{S}_T - I\{T, \xi'\} < \varepsilon$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

**Определение:**  $T'$ -измельчение разбиения  $T$ , если  $T' = T \cup \{b_1 \dots b_k\}$ , то есть, мы добавляем еще  $k$  точек, таким образом  $\Delta_{T'} \leq \Delta_T$ .

**Свойство 2:** При измельчении разбиения  $T$  нижние суммы Дарбу не уменьшаются, а верхние не увеличиваются.

$T'$ -измельчение разбиения  $T$ ,  $\underline{S}_T \leq \underline{S}_{T'} \leq \overline{S}_{T'} \leq \overline{S}_T$

**Доказательство:** Добавим одну точку на  $[x_{j-1}, x_j] : b \in (x_{j-1}, x_j), \Delta x_j = \Delta x'_j + \Delta x''_j, M'_j \leq M_j; M''_j \leq M_j$ , тогда:

$$\overline{S}_T - \overline{S}_{T'} = M_j \Delta x_j - (M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j) = (M_j - M'_j) \Delta x' + (M_j - M''_j) \Delta x'' \geq 0$$

$$\Rightarrow \overline{S}_{T'} \leq \overline{S}_T$$

Аналогично доказывается для нижних сумм.

**Свойство 3:** Пусть  $T'$  и  $T''$  произвольные разбиения отрезка  $[a, b]$ , тогда:  $\underline{S}_{T'} \leq \overline{S}_{T''}, \underline{S}_{T''} \leq \overline{S}_{T'}$

**Доказательство:**  $T = T' \cup T''$ -измельчение разбиений  $T', T''$

Тогда из свойства 2 следует, что  $\underline{S}_{T'} \leq \underline{S}_T \leq \overline{S}_T \leq \overline{S}_{T''}$  и

$$\underline{S}_{T''} \leq \underline{S}_T \leq \overline{S}_T \leq \overline{S}_{T'}$$

**Свойство 4:** существуют числа  $\underline{I}, \bar{I}$ :

$\underline{I} = \sup_T \underline{S}_T, \bar{I} = \inf_T \bar{S}_T$  такие, что для произвольных разбиений  $T', T''$  выполняется:  $\underline{S}_{T'} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{S}_{T''}$   
 $\bar{I}$ –верхний интеграл Дарбу  
 $\underline{I}$ –нижний интеграл Дарбу.

**Доказательство:** следует из свойства 3 и теоремы об отделимости множеств.

**Свойство 5 [Лемма Дарбу]:**

- 1)  $[\underline{I} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon]$
- 2)  $[\bar{I} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \bar{S}_T] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon]$

**Доказательство:** 2)

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), m = \inf_{[a,b]} f(x)$$

а)  $M = m$  – тривиальный случай;

б)  $M > m$ ;  $\bar{I} = \inf_T \bar{S}_T$  из определения *inf*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T^* : \bar{S}_{T^*} < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \bar{S}_{T^*} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$T\text{–произвольное разбиение: } \Delta_T = \max_j \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2(M-m)k}$$

$k$ –количество точек разбиения  $T^*$ , лежащих на  $(a, b)$

рассмотрим  $T' = T \cup T^*$

$$0 \leq \bar{S}_T - \bar{S}_{T'} \leq (M - m)k\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (оценили сверху) отсюда:}$$

$$0 \leq \bar{S}_T - \bar{S}_{T'} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Из свойств 3 и 4:  $\bar{I} \leq \bar{S}_{T'} \leq \bar{S}_{T^*}$

$$0 \leq \bar{S}_{T'} - \bar{I} \leq \bar{S}_{T^*} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{S}_{T'} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Складываем (1) и (2), получаем  $\bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$

Итак:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)k} > 0 \forall T : \Delta_T < \delta \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$

### 6.3. Критерий интегрируемости функции.

**Теорема 1:** Пусть функция  $f$  ограничена на  $[a, b]$

$[f \text{ интегрируема на } [a, b]] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon]$

**Доказательство [Необходимость]:**  $\Rightarrow$

$[f \text{ интегрируема на } [a, b]] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \{\xi\} \mapsto |I - I\{T, \xi\}| < \frac{\varepsilon}{4}]$

из свойства 1:  $\exists \xi', \xi''$ :

$\bar{S}_T - I\{T, \xi'\} < \frac{\varepsilon}{4}, I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{4}$ , тогда

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = |\bar{S}_T - I\{T, \xi'\} + I\{T, \xi'\} - I + I - I\{T, \xi''\} + I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T| \leq \bar{S}_T - I\{T, \xi'\} + |I\{T, \xi'\} - I| + |I - I\{T, \xi''\}| + I\{T, \xi''\} - \underline{S}_T < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

**Доказательство [Достаточность]:**  $\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon : \bar{S}_{T_\varepsilon} - \underline{S}_{T_\varepsilon} < \varepsilon$$

Из свойства 4: существуют числа  $\underline{I}, \bar{I} : \forall T \mapsto \underline{S}_T \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{S}_T \Rightarrow$

$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \bar{S}_{T^*} - \underline{S}_{T^*} < \varepsilon$  так как это выполняется для любых  $\varepsilon > 0 \Rightarrow$  это возможно лишь при  $\bar{I} - \underline{I} = 0, \bar{I} = \underline{I} = I$

По Лемме Дарбу:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_1 \mapsto \bar{S}_T - \bar{I} < \varepsilon$$

$$\text{для этого же } \varepsilon \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta_2 \mapsto \underline{I} - \underline{S}_T < \varepsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall T \Delta_T < \delta \mapsto$$

$$\bar{S}_T - I < \frac{\varepsilon}{2}, I - \underline{S}_T < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall T \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \xi = \{\xi_j\} \mapsto$$

$$\underline{S}_T \leq I \leq \bar{S}_T \quad (1)$$

$$\text{также используем то, что } \underline{S}_T \leq I\{T, \xi\} \leq \bar{S}_T \Rightarrow$$

$$-\bar{S}_T \leq -I\{T, \xi\} \leq -\underline{S}_T \quad (2)$$

$$\text{Сложим (1) и (2)} \Rightarrow |I - I\{T, \xi\}| \leq \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

## 6.4. Классы интегрируемых функций.

**Теорема 2:** Если  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство:**  $f$  ограничена на  $[a, b]$  по первой теореме Вейерштрасса,  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$  по теореме Кантора  $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \mapsto$$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\text{Для этого же } \varepsilon \exists T : \Delta_T < \delta, T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$\text{По 2 теореме Вейерштрасса } \forall j \exists x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j] :$$

$$M_j = \max_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) = f(x'_j), m_j = \min_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) = f(x''_j)$$

$$\text{тогда из р.н. получаем, что } \forall j M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n \Delta x_j = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon.$$

**Теорема 3:** Если функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и монотонна на отрезке, то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство:** для неубывающей функции:  $\forall x \in [a, b] \mapsto$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow \text{ограничена}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}, T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$j = \overline{1, n} \ [x_{j-1}, x_j] \mapsto M_j = f(x_j), m_j = f(x_{j-1})$$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$$

$$- f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$$

**Теорема 4:** Если функция  $y = f(x)$  ограничена на  $[a, b]$  и  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечное число интервалов, покрывающих точки разрыва функции  $f$ , сумма длин которых не превосходит  $\varepsilon \Rightarrow f$  интегрируема на  $[a, b]$

**Доказательство:** Пусть  $M = \sup_{[a, b]} f(x), m = \inf_{[a, b]} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists X_1 = \bigcup_{j=1}^n \delta_j^1$  – интервал, покрывающий точки разрыва и  $|\delta_j^1|$  – его длина  $\Rightarrow \sum_{j=1}^n |\delta_j^1| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$

$$X_2 = (a, b) \setminus \overline{X_1}$$

$(a, b)$  – открытое,  $\overline{X_1}$  – замкнутое  $\Rightarrow X_2$  – открытое, то есть, мы отбросили интервалы с точками разрыва.

$X_2 = \bigcup_{j=1}^k \delta_j^2$  на каждом  $\delta_j^2$  –  $f$  непрерывна  $\Rightarrow f$  равномерно непрерывна на  $\overline{X_2}$  (Замыкание, то есть  $\overline{X_2}$  компакт – ограниченное и замкнутое)

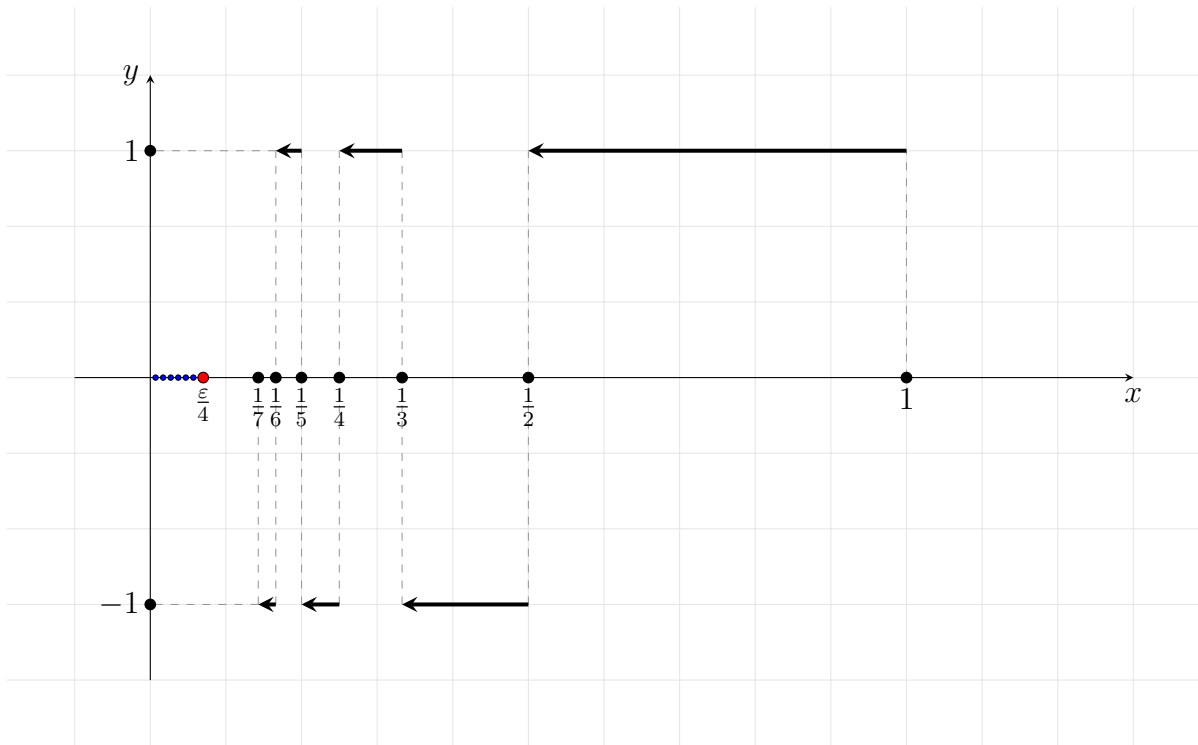
Тогда из опр. р.н.  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \overline{X_2} \mapsto |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, T = \{\delta_j^1, \delta_i^2\}_{j=1}^n, \substack{k \\ i=1}$ , то есть концы интервалов образует разбиение отрезка  $[a, b]$ .

$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |\delta_j^1| + \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) |\delta_i^2| \leq (M - m) \sum_{j=1}^n |\delta_j^1| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^k |\delta_i^2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon \Rightarrow f$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Следствие:** Если функция  $y = f(x)$  ограничена на  $[a, b]$  и имеет на нем конечное число точек разрыва, то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$

Рассмотрим пример функции, имеющей на отрезке бесконечное число точек разрыва:

**Пример:**  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], n \in \mathbb{N} \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], n \in \mathbb{N} \end{cases}$   
 $x \in [0, 1]$



Точки разрыва  $\frac{1}{n}, n > 1$  на  $[0, 1]$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto 0 < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Оставшиеся  $N$  точек вне данного интервала покрываем интервалами длины  $\frac{\varepsilon}{4N}$ , тогда сумма длин итервалов покрытия равна  $\frac{\varepsilon}{4} + N \frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$  интегрируема по теореме 4.

## 7. Билет 7

### 7.1. Некоторые свойства определенного интеграла.

**Свойство 1:**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

**Свойство 2:**

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

**Свойство 3:**

Если  $f, g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $h = \alpha f + \beta g$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство:**

$$I_h\{\tau, \xi\} = \sum_{j=1}^n [\alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j)] \Delta x_j = \alpha \cdot \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^n g(\xi_j) \Delta x_j = \alpha I_f\{\tau, \xi\} + \beta I_g\{\tau, \xi\}.$$

**Свойство 4:**

Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то  $h = f \cdot g$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство:**

$\exists A > 0 \wedge \exists B > 0 : |f(x)| \leq A, |g(x)| \leq B \forall x \in [a, b] \Rightarrow h$  ограничена на  $[a, b]$

$$\begin{aligned} |h(x') - h(x'')| &= |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x'')g(x') + \\ &+ f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')| \leq |g(x')| \cdot |f(x') - f(x'')| + |f(x'')| \cdot |g(x') - \\ &- g(x'')| \leq B|f(x') - f(x'')| + A|g(x') - g(x'')| \Rightarrow [M_j(h) - m_j(h)] \leq \\ &B[M_j(f) - m_j(f)] + A[M_j(g) - m_j(g)] \end{aligned}$$

$$f, g \text{ интегрируемы на } [a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T' : \bar{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$$

$$\exists T'' : \bar{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$T = T' \cup T''$$

$$\underline{S}_{T'}(f) \leq \underline{S}_T(f) \leq \bar{S}_T(f) \leq \bar{S}_{T'}(f) \Rightarrow \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \leq \bar{S}_{T'}(f) - \underline{S}_{T'}(f) < \frac{\varepsilon}{2B}$$

$$\underline{S}_{T''}(g) \leq \underline{S}_T(g) \leq \bar{S}_T(g) \leq \bar{S}_{T''}(g) \Rightarrow \bar{S}_T(g) - \underline{S}_T(g) \leq \bar{S}_{T''}(g) - \underline{S}_{T''}(g) < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_T(h) - \underline{S}_T(h) < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \Rightarrow h \text{ интегрируемая на } [a, b].$$

**Свойство 5:**

$f$  интегрируема на  $[a, b]$  &  $[c, d] \in [a, b] \Rightarrow f$  интегрируема на  $[c, d]$ .

**Доказательство:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$$

$$T' = T \cup \{c, d\}$$

$$\overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} \leq \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$$

Рассмотрим разбиение  $T^*$  отрезка  $[c, d]$ , порождаемое разбиением  $T'$ , то есть в  $T^*$  включены все точки разбиения  $T'$ , лежащие на отрезке  $[c, d]$ .  $\Rightarrow \overline{S_{T^*}} - \underline{S_{T^*}} \leq \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$

### Свойство 6:

Если  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

### Доказательство:

Пусть  $a < c < b$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists T', T''$  отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$   $\overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\overline{S_{T''}} - \underline{S_{T''}} < \frac{\varepsilon}{2}$

$T = T' \cup T''$  – разбиение отрезка  $[a, b]$ .

$$\underline{S_{T'}} = \underline{S_T}^1 \leq \overline{S_T}^1 = \overline{S_{T'}}$$

$$\underline{S_{T''}} = \underline{S_T}^2 \leq \overline{S_T}^2 = \overline{S_{T''}}$$

$\overline{S_T} - \underline{S_T} = \overline{S_T}^1 + \overline{S_T}^2 - \underline{S_T}^1 - \underline{S_T}^2 < \varepsilon \Rightarrow f$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow$  интегральная сумма на  $[a, b]$  есть сумма интегральных сумм на  $[a, c]$  и  $[c, b]$ .

Пусть  $c < a < b$  или  $a < b < c$ :

$[a, b]$  есть часть отрезка  $[c, b]$  или  $[a, c] \Rightarrow$  ввиду того, что интегрируемая на отрезке интегрируема на любом его участке, то  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ .

Пусть  $a < b < c$ :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Аналогично доказывается для  $c < a < b$ .

### Свойство 7:

Пусть  $f$  ограничена на  $(a, b]$ ,  $\forall \alpha > 0 : 0 < \alpha < b - a$ ,  $f$  интегрируема на  $[\alpha + a, b]$ , тогда при любом доопределении  $f$  в точке  $a$ , получится функция, интегрируемая на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{a+\alpha}^b f(x)dx.$$

### Доказательство:

$$\exists A > 0 : \forall x \in (a, b] \mapsto |f(x)| \leq A, f(a) = B$$

$$M = \max\{A, |B|\} \Rightarrow \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0 : 2M\alpha < \varepsilon/2$$



Для  $[a + \alpha, b]$  найдется такое  $\exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon/2$

$$\exists T' = T \cup \{a\}, \overline{S_{T'}} - \underline{S_{T'}} = \overline{S_T} - \underline{S_T} + (M_0 - m_0)\alpha < \varepsilon/2 + 2M\alpha < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

## 7.2. Оценки определенного интеграла.

**Оценка 1:**

$f$  интегрируема на  $[a, b]$  &  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

**Доказательство:**

$f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \forall T \text{ & } \forall \{\xi\} \mapsto I\{T, \xi\} \geq 0, I -$  предел интегральных сумм.

Теперь надо доказать, что при  $\Delta_T \rightarrow 0 \mapsto I \geq 0$

От противного:

$I < 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|I|}{2} \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T, \Delta_T < \delta \mapsto |I\{T, \xi\} - I| < \frac{|I|}{2} \Rightarrow I - \frac{|I|}{2} < I\{T, \xi\} < I + \frac{|I|}{2} < 0 \Rightarrow I\{T, \xi\} < 0 -$  противоречие.

**Оценка 2:**

$f$  непрерывна на  $[a, b]$  &  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ & } f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \gamma > 0$ .

**Доказательство:**

$\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 2\alpha > 0 \Rightarrow$  [по теореме о сохранении знака непрерывной функции]  
 $\Rightarrow \exists [c, d] \subset [a, b], x \in [c, d] : f(x) \geq \alpha > 0$  на  $[c, d] \Rightarrow f(x) - \alpha \geq 0$  на  $[c, d]$  <sup>св-во 5 и оц-ка 1</sup>  
 $\int_c^d (f(x) - \alpha)dx \geq 0 \Rightarrow \int_c^d f(x)dx \geq \int_c^d \alpha dx = \alpha(d - c) = \gamma > 0$

$$\int_c^d f(x)dx \geq \gamma > 0 \Rightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \geq 0 + \gamma + 0 > 0$$

**Оценка 3:**

$f, g$  интегрируемы на  $[a, b]$  &  $\forall x \in [a, b] \mapsto f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

**Доказательство:**

$$f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \xRightarrow{\text{оц-ка 1}} \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \xRightarrow{\text{св-во 3}} \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

**Оценка 4:** Если  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $y = |f(x)|$  интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

**Доказательство:**

Пусть  $f$  — интегрируема.

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x), m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

$$\overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |f(x)|, \overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} |f(x)|$$

$$\overline{M}_j - \overline{m}_j \leq M_j - m_j \quad (*)$$

1)  $M_j > 0, m_j > 0 \Rightarrow$  очевидное равенство в  $(*)$

2)  $M_j < 0, m_j < 0 \Rightarrow$  очевидное равенство в  $(*)$

3)  $M_j > 0, m_j < 0 \Rightarrow \overline{M}_j - \overline{m}_j < M_j - m_j$

Из  $(*)$  следует:

$$\overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) \leq \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f| \text{ интегрируема и } -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Вспомним, что если  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ , тогда

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Замечание:**  $|f|$  – интегрируема  $\nRightarrow f$  – интегрируема.

**Пример:**

$$y = \tilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$$

**Оценка 5:**

Пусть  $y = f(x), y = g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ .

Если  $M = \sup_{[a,b]} f(x), m = \inf_{[a,b]} f(x)$ , то

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

**Доказательство:**

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0 \Rightarrow m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

$\Rightarrow$  исходное условие доказано исходя из оценки 3 и свойства 3.

**Предложение [Формула среднего значения]:**

Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f(x), m = \inf_{[a,b]} f(x)$ . Тогда  $\exists \mu : m \leq \mu \leq M$

такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

**Доказательство:**

Из оценки интегрирования неравенств (результата предыдущего пункта) при  $g \equiv 1 \Rightarrow$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

**Теорема [Интегральная теорема о среднем]:**

Пусть  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ .  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{[a,b]} f(x)$  и  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

(либо  $g(x) \leq 0$ ). Тогда  $\exists \mu : m \leq \mu \leq M$  такая, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

В частности, если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b] :$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

**Доказательство:**

$$1. 1) \int_a^b g(x)dx = 0$$

$\Rightarrow$  оценка интегрирования неравенства  $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) = 0$  и  $\mu$  — любое число

$$2. 2) \int_a^b g(x)dx > 0$$

$\Rightarrow$  Оценка интегрирования неравенства

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M \text{ и } \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

Если  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow \exists \xi : \mu = f(\xi)$

**Предложение:**

Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $m = \inf_{[a,b]} f$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int_a^b f(x)dx =$

$\mu(b-a)$ , если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) [g \equiv 1]$ .

### 7.3. Интегралы с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов.

**Определение:**

Пусть  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \forall x \in [a, b]$  существует

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)$$

Этот интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом.

**Теорема:**

Любая непрерывная на  $[a, b]$  функция  $y = f(x)$  имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$$

**Доказательство:**

$\forall x \in [a, b], x + \Delta x \in [a, b]$ . Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем  $\exists \xi$ , лежащая между  $x$  и  $x + \Delta x : F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x \Rightarrow \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$

Так как  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то при  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow f(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$  и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

**Замечание:**

Из доказательства теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

**Предложение:** Если  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $F$  непрерывна на  $[a, b]$ .

**Доказательство:**

$\forall x \in [a, b], x + \Delta x \in [a, b], F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x, \Delta x)$ .

$\Delta F(x, \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x : m \leq \mu \leq M$  (Формула среднего значения)

$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta F(x, \Delta x) \rightarrow 0 \Rightarrow F$  непрерывна в  $X$ .

**Замечание:**

Если  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow \forall \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ .

$$\Phi(a) = C, \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

### Теорема [Формула Ньютона-Лейбница]:

Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ , где  $\Phi$  — любая первообразная функции  $f$ .

#### **Доказательство:**

См. предыдущее замечание..

### Теорема 7:

Если  $f$ :

- 1) интегрируема на  $[a, b]$ ;
- 2) обладает на  $[a, b]$  первообразной  $\Phi$ ;

то справедлива формула  $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

#### **Замечание:**

- 1)  $y = \operatorname{sgn} x$ ,  $x \in [-1, 1]$  интегрируема на  $[-1, 1]$ , но не обладает первообразной.

- 2)  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  является первообразной для

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0, \text{ но } f \text{ не является интегрируемой на } [-1, 1] \text{ (не ограничена).}$$

### Теорема [Замена переменных в определенном интегрировании]:

Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$
- 2)  $x = g(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$
- 3)  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$  и  $\forall t \in [\alpha, \beta] \mapsto a \leq g(t) \leq b$

тогда справедлива формула  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$ .

#### **Доказательство:**

$\Phi$  — первообразная функции  $f \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

Т.к.  $\Phi$  и  $g$  дифференцируемы на  $[a, b]$  и  $[\alpha, \beta]$  соответственно, то

$$\frac{d}{dt} [\Phi(g(t))] = \Phi'(g(t)) \cdot g'(t), \text{ но } \Phi'(x) = f(x) \rightarrow \Phi'(g(t)) = f(g(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} [\Phi(g(t))] = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

По условию  $f(g(t)) \cdot g'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  и  $\Phi(g(t))$  — её первообразная.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

### Теорема [Формула интегрирования по частям]:

Пусть  $u = u(x), v = v(x)$  непрерывно дифференцируемые на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

**Доказательство:**

Функция  $u \cdot v$  является первообразной функции  $uv' + u'v$ . Каждая из этих функций непрерывная  $\Rightarrow$

$$\int_a^b [uv' + u'v] dx = [uv]_a^b$$

## 8. Билет 8

### 8.1. Геометрические приложения определенного интеграла.

**Площадь криволинейной трапеции.**

**Определение:**

Пусть на  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f : \forall x \in [a, b] \rightarrow f(x) \geq 0$

Множество  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  называется криволинейной трапецией.

Измеримость криволинейной трапеции по Жордану была доказана ранее. (нет ☺)

**Предложение:**

Площадь  $m(X)$  криволинейной трапеции  $X$  определяется формулой  $m(X) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Доказательство:**

$f$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T : \overline{S_T} - \underline{S_T} < \varepsilon$

НО  $m(G_\varepsilon) = \underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T} = m(G^\varepsilon)$

$m(G_\varepsilon) \leq m(X) \leq m(G^\varepsilon)$

$m(X) = I = \int_a^b f(x) dx$ .

**Площадь криволинейного сектора.**

**Определение:**

$r = r(\varphi)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ . Криволинейный сектор  $X$  измерим по Жордану.

**Приложение:**

Площадь  $m(X)$  криволинейного сектора  $X$  вычисляется по формуле  $m(X) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$ .

**Доказательство:**

$T = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta\}$

$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, i = \overline{1, n}$

$R_i = \max_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi) \quad r_i = \min_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$

$\overline{S_T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \underline{S_T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\varphi_i$ .

Это верхняя и нижняя сумма Дарбу функции  $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ .

Это функция интегрируема на  $[\alpha, \beta]$ .

$\underline{S_T} \leq I \leq \overline{S_T}$  и  $I = m(X) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$ .

**Объем тела вращения:.**

**Определение:**

Тело, полученное путем вращения криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$  назовём телом вращения.

**Предложение:**

Объем  $m(X)$  тела вращения  $X$  криволинейной трапеции вокруг  $Ox$  вычисляется по формуле  $m(X) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

**Доказательство:**  $T = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\overline{S_T} = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i, \quad \underline{S_T} = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i$$

Это суммы Дарбу функции  $y = \pi f^2(x)$ , которая интегрируема на  $[a, b]$

$$\underline{S_T} \leq m(X) = I \leq \overline{S_T} \Rightarrow m(X) = I = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Длина дуги кривой.**

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  непрерывно дифференцируема  $\Rightarrow$  спрямляемая кривая.

**Предложение:**

Если кривая  $\Gamma$  непрерывно дифференцируема, то ее длина  $L$  вычисляется по формуле  $L = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt$ .

**Доказательство:**  $S'(t) = |\vec{r}'(t)|$

$$L = S(\beta) - S(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} S'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt.$$

$$1. \vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in [\alpha, \beta] \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$2. y = f(x), \alpha \leq x \leq \beta \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$3. r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r' \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \\ y' = r' \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + (r)^2$$

(1)

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + (r)^2} d\varphi$$

(2)

## 8.2. Вычисление площади поверхности вращения.

Пусть  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  и  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Рассмотрим поверхность  $\Pi$  вращения графика функции  $f$  вокруг  $Ox$ .  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ .



$$A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)) \dots A_n(x_n, f(x_n)) .$$

Строим ломанную  $A_0, A_1 \dots A_n$ . При вращении ломанной вокруг оси  $Ox$ , получаем поверхность  $\Pi_T$ , составляющую одну из боковых поверхностей усеченных конусов, обозначим эту площадь за  $P_T$ .

$$P_T = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] l_i, \text{ где } l_i - \text{длина звена } A_{i-1}A_i.$$

**Определение:** Число  $P$  называется пределом площади  $P_T$  при мелкости разбиения, стремящимся к нулю, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \rightarrow |P_T - P| < \varepsilon$ .

**Определение:** Поверхность  $\Pi$  называется квадратируемой, если существует предел площадей  $P_T$  при мелкости разбиения, стремящейся к 0. При этом  $P$  называется площадью поверхности  $\Pi$ .

**Предложение:** Если  $y = f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ , то поверхность вращения  $\Pi$  графика  $y = f(x)$  вокруг  $x$ , квадратируема и ее площадь вычисляется по формуле  $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ .

Без доказательства.

### 8.3. Криволинейные интегралы.

$\mathbb{E}^2$

$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  – спрямляемая кривая,  $\vec{r}(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$

$f, P, Q$  – непрерывные на  $\Gamma$  функции

$T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta\}$  – разбиение

$M_j(x_j, y_j)$  – точка,  $x_j = \varphi(t_j), y_j = \psi(t_j), j = 0, 1, \dots, k$

$$\Delta s_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \Delta s_T = \max_{1 \leq j \leq k} \Delta s_j$$

$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j], N_j(\xi_j, \eta_j)$  – точка,  $\xi_j = \varphi(\tau_j), \eta_j = \psi(\tau_j)$

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) dt = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})$$

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^k f(N_j) \Delta s_j$$

$$\sigma_T^x = \sum_{j=1}^k P(N_j) \Delta x_j$$

$$\sigma_T^y = \sum_{j=1}^k Q(N_j) \Delta y_j$$

**Определение:** число  $I$  является пределом  $\sigma_T$  при  $\Delta s_T \rightarrow 0$ , если

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta \ \& \ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T - I| < \varepsilon]$$

**Определение:** число  $I_{x,y}$  является пределом  $\sigma_T^{x,y}$  при  $\Delta s_T \rightarrow 0$ , если

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta s_T < \delta \ \& \ \forall \{N_j\}_{j=1}^k \mapsto |\sigma_T^{x,y} - I_{x,y}| < \varepsilon]$$

Число  $I$  называется *криволинейным интегралом 1-го рода*:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = I$$

Числа  $I_{x,y}$  называются *криволинейными интегралами 2-го рода*:

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = I_x \quad \int_{\Gamma} Q(x, y) dy = I_y$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \text{общий криволинейный интеграл 2-го рода}$$

**Замечание:** криволинейные интегралы 2-го рода зависят от направления обхода кривой, и при его изменении у этих интегралов меняется знак.

#### 8.4. Существование криволинейных интегралов, их вычисление.

**Теорема:** Пусть  $\Gamma = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  – гладкая кривая, функции  $f, P, Q$  непрерывны на  $\Gamma$ . Тогда криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода от этих функций по кривой  $\Gamma$  существуют и вычисляются по формулам

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = I$$

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = I_x$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt = I_y$$

**Доказательство:**

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^k f(N_j) \Delta s_j = \sum_{j=1}^k f(\varphi(\tau_j), \psi(\tau_j)) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

$$\sigma_T - I = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\varphi(\tau_j), \psi(\tau_j)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

$$\Phi(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \text{ (т.к. гладкая кривая)}$$

$$M = \max_{[\alpha, \beta]} \Phi(t), \quad m = \min_{[\alpha, \beta]} \Phi(t) > 0 \Rightarrow m \Delta t_j \leq \Delta s_j \leq M \Delta t_j$$

$$\frac{\Delta s_j}{M} \leq \Delta t_j \leq \frac{\Delta s_j}{m} \Rightarrow \Delta s_T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta_T \rightarrow 0$$

$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$  непрерывна на  $[\alpha, \beta] \Rightarrow F(t)$  РН на  $[\alpha, \beta]$  (т. Кантора), т.е.

$\left[ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta \mapsto |F(t') - F(t'')| < \frac{\varepsilon}{L} \right]$  ( $L$  – длина кривой)

$$\forall T : \Delta_T < \delta \Rightarrow \frac{\Delta s_T}{M} < \Delta_T < \delta \Rightarrow |\sigma_T - I| < \frac{\varepsilon}{L} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$$

## 8.5. Несобственный интеграл.

### Определение:

Пусть  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a, \xi] \forall \xi : \xi > a$ . Символ  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется несобственным интегралом функции  $y = f(x)$  по промежутку  $[a; +\infty)$ .

Если существует и конечен предел  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} I(\xi) = A, A \in R$ , то несобственный интеграл  $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется сходящимся и равен числу  $A$ .

**Обозначение:**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty \equiv$  интеграл сходится.

**Соглашение:** несобственный интеграл будет записываться как  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $b = +\infty$  или  $b$  - вертикальная асимптота  $f(x)$ .

### Свойства несобственных интегралов и их вычисление:

1.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$   
 $\forall c : a \leq c < b :$

$$\left[ \int_a^b f(x)dx < \infty \right] \Leftrightarrow \left[ \int_c^b f(x)dx < \infty \right]$$

2.  $\left[ \int_a^b f(x)dx < \infty \right] \& \left[ \int_a^b g(x)dx < \infty \right] \Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

3. Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b)$  и  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = F(b-0) \in R$ .

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) \quad \text{Формула Ньютона-Лейбница}$$

4.  $[u, v]$  - непрерывно дифференцируемы на  $[a, b)$  и  $\exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} u(\xi)v(\xi) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx < \infty \Rightarrow \left[ \int_a^b u(x)v'(x)dx < \infty \text{ и } \int_a^b u(x)v'(x)dx = uv|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \right]$$

5. Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b)$ ,  $x = \varphi(t)$  непрерывна дифференцируема и возрастает на  $[\alpha, \beta)$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

при условии сходимости хотя бы одного интегралов равенства

6.

$$\left[ \left[ \int_a^b f(x) dx < \infty \right] \ \& \ \left[ \int_a^b g(x) dx < \infty \right] \ \& \ [f(x) < g(x)] \right] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

## 8.6. Несобственные интегралы от неотрицательных функций:

**Теорема 1:**  $\left[ \int_a^b f(x) dx < \infty \right] \Leftrightarrow [I(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx \text{ ограничена на } [a, b) ]$ .

**Доказательство:**

Необходимость:  $\int_a^b f(x) dx < \infty \Rightarrow I(\xi)$  ограничена на  $[a, b)$ .

$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R \Rightarrow A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$  (A – это точная верхняя грань)  
 $\Rightarrow 0 \leq I(\xi) \leq A \Rightarrow$  функция ограничена.

Достаточность:  $I(\xi)$  ограничена на  $[a, b) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \infty$

$I(\xi)$  ограничена на  $[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \exists C > 0 : \forall \xi \in [a, b) \mapsto 0 \leq I(\xi) \leq C \Rightarrow \exists A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$

Из  $A = \sup_{\xi \in [a, b)} I(\xi)$  следует:

1.  $\forall \xi \in [a, b) \mapsto I(\xi) \leq A$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi_\varepsilon \in (a, b) : I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$   
 $\xi_\varepsilon = \delta \Rightarrow \forall \xi \in (\delta, b) \mapsto I(\xi) \geq I(\xi_\varepsilon) > A - \varepsilon$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi \in (\delta, b) \mapsto 0 \leq A - I(\xi) < \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) dx < \infty$ .

**Теорема 2 [Признак сравнения]:** Пусть  $\forall x \in [a, b) \mapsto 0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда:

1.  $\int_a^b g(x) dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \infty$
2.  $\int_a^b f(x) dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = \infty$

**Доказательство:**

1.  $\int_a^b g(x) dx < \infty \iff (\text{Из } T_1) G(\xi) = \int_a^\xi g(x) dx \text{ ограничена на полуинтервале } \stackrel{\text{def}}{=} \exists C \geq 0 : \forall \xi \in [a, b) \mapsto G(\xi) \leq C$ .

$$I(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx \leq \int_a^\xi g(x) dx \leq C \Rightarrow (\text{из } T_1) \int_a^b f(x) dx < \infty.$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty.$$

В противном случае:  $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow (\text{из } \Pi_1) \int_a^b f(x)dx < \infty.$

### Следствие (Признак сравнения в предельной форме)

Если  $f(x) > 0$   $g(x) > 0 \forall x \in [a, b)$   $f(x) \sim g(x)$   $x \rightarrow b - 0$ ,  $\int_a^b f(x)dx$   $\int_a^b g(x)dx$  ведут себя одинаково.

#### Доказательство:

$$\left[ \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right] \Rightarrow [\varepsilon = 1/2. \exists \delta \in (a, b) : \forall x \in (\delta, b) \mapsto \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}]$$

$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$  Далее просто применяем  $T_2$ .

## 8.7. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Пусть функция интегрируема в собственном смысле на промежутке из  $[a, b)$ . Тогда:

$$\left[ \int_a^b f(x)dx < \infty \right] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon]$$

#### Доказательство:

$$\begin{aligned} \left[ \int_a^b f(x)dx < \infty \right] &\Leftrightarrow [\exists \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} I(\xi) = A \in R] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto |I(\xi') - I(\xi'')| < \varepsilon] \end{aligned}$$

$$|I(\xi') - I(\xi'')| = \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

## 8.8. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

**Определение 1** Интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  называется абсолютно сходящимся, если  $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$ .

**Определение 2** Если  $\int_a^b |f(x)|dx = \infty$ , а  $\int_a^b f(x)dx < \infty$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  называется условно сходящимся.

**Предложение:** Если интеграл сходится абсолютно, то и он сам сходится.

**Доказательство:**

$\forall \xi', \xi'' \in (a, b)$   
 $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| \leq \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx$ . Тогда по критерию Коши  $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right|$  сходится и из  $T_2$  сходится  
 и  $\int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx$ .

**Предложение:** Если  $\int_a^b g(x) dx$  сходится абсолютно, то  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx$  ведут себя одинаково.

**Доказательство:** Абсолютная сходимость:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\text{Если } \int_a^b |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_a^b |f(x) + g(x)| dx < \infty$$

В другую сторону:  $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx < \infty \Rightarrow f(x) = [f(x) + g(x)] - g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) + g(x)| + |g(x)| \Rightarrow$  по  $T_2$   $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ .

## 8.9. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

**Теорема [Признак Дирихле]:** Если выполнены условия:

1.  $f(x)$  непрерывна,  $g(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$
2.  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  ограничена на  $[a, b]$
3.  $g(x)$  монотонна на  $[a, b]$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$

Тогда  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx < \infty$ .

**Доказательство:**

$$\exists M > 0 : |F(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$$\xi'' > \xi' > a$$

$$\forall \xi', \xi'' \in [a, b]$$

Сделаем замену для интегрирования по частям:

$$u = g(x), du = g'(x) dx, dv = f(x) dx, v = F(x).$$

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx = g(x) \cdot F(x) \Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) F(x) dx$$

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx \right| \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + \left| \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) F(x) dx \right| \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x) F(x)| dx \leq$$

$$\leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) + M \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|) \pm M \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) dx \leq 2M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|)$$

$$\left[ \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0 \right] \stackrel{\text{def}}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (a, b) \forall x \in (\delta, b) \mapsto |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \mapsto \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)dx \right| < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{по критерию Коши } \int_a^b f(x)g(x) < \infty$$

**Следствие (Признак Абеля):** Если выполняются условия:

1.  $f(x)$  непрерывна,  $g(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$
2.  $\int_a^b f(x) < \infty$
3.  $g(x)$  монотонна и ограничена на  $[a, b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx < \infty.$$

**Доказательство:**

Из условия 3 следует, что  $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = g(b-0) \in R$

$$g_1(x) = g(x) - g(b-0) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0 \xrightarrow{\text{по Дирихле}} \int_a^b f(x)g_1(x)dx < \infty$$

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx - g(b-0) \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx \text{ и } \int_a^b f(x)dx \text{ сходятся, значит сходится и } \int_a^b f(x)g(x)dx$$

## 9. Билет 9

### 9.1. Числовые ряды.

**Определение:** Пусть задана числовая последовательность  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Выражение  $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$  будем называть *числовым рядом*.

**Обозначение:**  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$   
 $u_k$  — член ряда.

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  —  $n$ -ая частичная сумма ряда.

**Определение:** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  *сходится*, если последовательность  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится и  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  — *сумма ряда*. Если  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  расходится, то и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  *расходится*.

**Обозначения:**

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$  — ряд сходится

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$  — ряд расходится

**Примеры:**

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$$

$$S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 0 \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ расходящаяся} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + \dots + q^{n-1} + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

а)  $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} = S$

б)  $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

в)  $q = 1 \Rightarrow S_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

г)  $q = -1 \Rightarrow$  пример 1)  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \infty$

3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\xi x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$|e^x - S_n| \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



## 9.2. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема:

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow \left[ \text{Выполнено условие Коши: } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \right]$$

Доказательство:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|$$

Условие теоремы означает, что  $\{S_n\}$  – фундаментальна  $\Leftrightarrow \{S_n\}$  сходится

**Обозначение:**  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$  –  $n$ -й остаток числового ряда

**Следствие:**

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}]$$

Доказательство:

$$[\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}] \Leftrightarrow [\text{условие Коши}]$$

Следствие [Необходимое условие сходимости числового ряда]:

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Rightarrow \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0 \right]$$

Доказательство:

Следует из условия критерия Коши при  $p = 1$ .

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |u_{n+1}| < \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0 \right]$$

Отрицание условия Коши:

$$\left[ \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k \right| \geq \varepsilon_0 \right]$$

**Пример:**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  – гармонический ряд

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ , но

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} : \forall n \exists n_0 = n \ \& \ \exists p_0 = n : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

**Предложение 1:** Добавление (отбрасывание) конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.

**Доказательство:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$$

$$\forall n > n_0 \mapsto \tilde{S}_n = S_n + A, \quad A = \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k$$

Если  $\{S_n\}$  сходится [расходится], то  $\{\tilde{S}_n\}$  сходится [расходится].

**Предложение 2:**

$\tilde{u}_k = cu_k, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$  ведут себя одинаково.

### 9.3. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \geq 0 \quad \forall k, \quad \{S_n\}_{n=1}^{\infty} - \text{неубывающая.}$$

**Теорема 2 [Критерий сходимости числового ряда с неотр. членами]:**

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}]$$

**Доказательство:**

$$[\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}] \Leftrightarrow [\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена}] \quad (\text{т.к. монотонная})$$

**Теорема 3 [Признак сравнения]:**

$$\forall k \mapsto 0 \leq u_k \leq \tilde{u}_k$$

$$1. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$$

**Доказательство:**

$$1. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty, \quad \text{т.е.} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \mapsto S_n \leq \tilde{S}_n \leq \tilde{S} \Rightarrow \{S_n\} \text{ ограничена} \xrightarrow{T.2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \xrightarrow{1)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \text{ иначе в противном случае по пункту а) } \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \\ (\text{противоречие})$$

**Замечание:**

1. В **Теореме 3**  $\boxed{\forall k}$  можно заменить на  $\boxed{\forall k \geq k_0, k_0 \in \mathbb{N}}$ , т.к. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его поведение.
2. Неравенство  $0 \leq u_k \leq \tilde{u}_k$  можно заменить  $0 \leq u_k \leq c\tilde{u}_k, c > 0$ , т.к. умножение на действительное число  $c$  не влияет на поведение числового ряда.

**Следствие:**

$$[\forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } u_k \sim \tilde{u}_k] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \text{ ведут себя одинаково} \right]$$

**Доказательство:**

$$\left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\tilde{u}_k} = 1 \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \left| \frac{u_k}{\tilde{u}_k} - 1 \right| < \varepsilon \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall k \geq K \mapsto (1 - \varepsilon)\tilde{u}_k < u_k < (1 + \varepsilon)\tilde{u}_k$$

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Утверждение следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

**Примеры:**

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k = \frac{1}{3 + b^k}, b > 0$$

$$\text{а) } b \leq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \neq 0 \Rightarrow \text{не выполнено НУС} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

$$\text{б) } b > 1$$

$$u_k = \frac{1}{3 + b^k} \leq \left( \frac{1}{b} \right)^k = q^k, \quad 0 < q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \stackrel{.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \stackrel{T.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad k > 1 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \tilde{u}_k$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow \tilde{S}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \stackrel{T.3}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

$$\forall \alpha \geq 2 \mapsto \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \text{ при } \alpha \geq 2$$

**Теорема 4 [Признак сравнения]:**

$$\left[ \forall k \mapsto u_k > 0, \tilde{u}_k > 0 \text{ и } \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} \right] \Rightarrow$$

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty$$

**Доказательство:**

$$\times \begin{cases} \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \\ \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{\tilde{u}_3}{\tilde{u}_2} \\ \dots \\ \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_{k-1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_k}{u_1} \leq \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_1} \Rightarrow u_k \leq c\tilde{u}_k, \quad c = \frac{u_1}{\tilde{u}_1} > 0$$

Утверждение **Теоремы 4** следует из **Теоремы 3** и **Замечания 2**.

**Теорема 5 [Признак Даламбера]:**

$$\forall k \quad [\forall k \geq k_0] \mapsto u_k > 0$$

$$1. \quad \left[ \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1 \right] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. \quad \left[ \frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1 \right] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

**Доказательство:**

$$1. \quad \tilde{u}_k = q^k$$

$$\frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \xrightarrow{T.4} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \quad \tilde{u}_k = 1$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{u}_k} = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \xrightarrow{T.4} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

**Теорема 6 [Признак Даламбера в предельной форме]:**

$$[\forall k \mapsto u_k > 0] \& \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow$$

$$1. \quad [L < 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

$$2. \quad [L > 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$$

**Доказательство:**

$$1. \quad L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$$

$$\varepsilon = \alpha \quad \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 < \frac{u_{k+1}}{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \xrightarrow{T.5} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

$$2. \quad L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$$

$$\varepsilon = \alpha \quad \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \frac{u_{k+1}}{u_k} > L - \alpha = 1 \xrightarrow{T.5} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

**Замечание:**

1. В **Теореме 5** неравенство  $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1$  нельзя заменить неравенством  $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mapsto \frac{k}{k+1} < 1 \quad \forall k, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

2. Для  $L = 1$  (в **Теореме 6**) признак Даламбера в предельной форме «не работает».

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$$

**Теорема 7 [Признак Коши]:**

$$\forall k \quad [\forall k \geq k_0] \mapsto u_k \geq 0$$

1.  $[\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$
2.  $[\sqrt[k]{u_k} \geq 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$

**Доказательство:**

1.  $\tilde{u}_k = q^k \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \leq \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = q < 1 \Rightarrow u_k \leq \tilde{u}_k$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k < \infty \xrightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$
2.  $\tilde{u}_k = 1 \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \geq \sqrt[k]{\tilde{u}_k} = 1 \Rightarrow u_k \geq \tilde{u}_k$
- $$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \infty \xrightarrow{T.3} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

**Теорема 8 [Признак Коши в предельной форме]:**

$$[\forall k \mapsto u_k \geq 0] \& \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = L \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow$$

1.  $[L < 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$
2.  $[L > 1] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty \right]$

**Доказательство:**

1.  $L < 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 - 2\alpha \Rightarrow L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1$
- $$\varepsilon = \alpha \quad \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 \leq \sqrt[k]{u_k} < L + \alpha = 1 - \alpha = q < 1 \xrightarrow{T.7} \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$
2.  $L > 1 \Rightarrow \exists \alpha > 0 : L = 1 + \alpha \Rightarrow L - \alpha = 1$
- $$\varepsilon = \alpha \quad \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto \sqrt[k]{u_k} > L - \alpha = 1 \xrightarrow{T.7} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

**Замечание:**

1. В **Теореме 7** неравенство  $\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1$  нельзя заменить неравенством  $\sqrt[k]{u_k} < 1$ .
2. Для  $L = 1$  (в **Теореме 8**) признак Коши в предельной форме «не работает».
3. Предельный признак Коши более сильный, чем предельный признак Даламбера.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k = \frac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}}, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + (-1)^{k+1}}{3 + (-1)^k}$$

$$\begin{cases} k=1: \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ k=2: \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ не существует}$$

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{\frac{3 + (-1)^k}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сходится по предельному признаку Коши}$$

**Теорема 9 [Признак Коши—Маклорена][интегральный признак]:**

Пусть  $f$  — неотрицательная и невозрастающая на  $[m; +\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\left[ \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty \right] \Leftrightarrow \left[ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha_n = \int_m^n f(x) dx \right], \quad n \geq m+1$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_m^{+\infty} f(x) dx \right)$$

**Доказательство:**

$$\forall k \geq m+1 \mapsto k-1 \leq x \leq k \Rightarrow f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

$[k-1; k]$ :  $f$  — монотонная и ограниченная  $\Rightarrow f$  интегрируема

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1), \quad k \geq m+1$$

$$+ \begin{cases} f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f(x) dx \leq f(m) \\ f(m+2) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x) dx \leq f(m+1) \\ \dots \\ f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1) \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=m}^n f(k)$$

$$S_n - f(m) \leq \int_m^n f(x) dx \leq S_{n-1} \Rightarrow \{\alpha_n\} \text{ сходится} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ ограничена}$$

**Примеры:**

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < \infty, \text{ если } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty \text{ при } \alpha > 1.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} < \infty \text{ при } \beta > 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k} < \infty \text{ при } \beta > 1.$$

#### 9.4. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

**Определение:** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$  — абсолютно сходящийся ряд.

**Предложение:**

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \right] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \right]$$

**Доказательство:**

По Критерию Коши сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

**Определение:** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \infty$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  — условно сходящийся ряд.

**Примеры:**

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}, \alpha > 1$$

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} \right| = \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty \text{ при } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} \text{ сходится абсолютно.}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$|u_k| = \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = [\ln(1+x)]^{(n+1)} (\theta x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ сходитсЯ условно}$$

**Тождество Абеля:**

$$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}, \{v_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad S_n = u_1 + \dots + u_n, \quad u_k = S_k - S_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_{k+1} - v_k)$$

**Теорема [Признак Лейбница]:**

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k, \quad 0 \leq v_{k+1} \leq v_k, \quad v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \right] \Rightarrow \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k < \infty \right]$$

**Доказательство:**

$$S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots + v_{2n-1} - v_{2n} \geq 0$$

$$S_{2n} = v_1 - \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(v_4 - v_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(v_{2n-2} - v_{2n-1})}_{\geq 0} - v_{2n} \Rightarrow S_{2n} \leq v_1 \quad \forall n$$

$$\{S_{2n}\} - \text{неубывающая и ограниченная} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} + v_{2n} \Rightarrow S_{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

**Теорема [Признак Дирихле]:** Пусть

1.  $\{\mathcal{U}_n\}$  – послед. частичных сумм  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  ограничена,  $\mathcal{U}_n = \sum_{k=1}^n u_k$
2.  $\{v_k\}$  – монотонна и  $v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

**Доказательство:**

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\mathcal{U}_n| \leq C$$

$$\{v_k\} - \text{невозрастающая и } v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K \mapsto 0 \leq v_k \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| \leq C v_{n+p} + C v_n + C \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) \leq 2C v_n < \varepsilon$$

**Следствие [Признак Абеля]:** Пусть



$$1. \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$$

2.  $\{v_k\}$  – монотонна и ограничена

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

**Доказательство:**

$\{v_k\}$  монотонна и ограничена  $\Rightarrow \{v_k\}$  сходится  $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v \in \mathbb{R}$

$\tilde{v}_k = v_k - v$  монотонна и  $\tilde{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

$\{\mathcal{U}_n\}$  сходится  $\Rightarrow \{\mathcal{U}_n\}$  ограничена

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tilde{v}_k}_{< \infty \text{ по пр. Дирихле}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k - v \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k}_{< \infty \text{ по усл.}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty$$

**Примеры:**

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ убывает и } \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < \infty \text{ (по признаку Лейбница)}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \quad x - \text{фиксированное число, } x \neq 2\pi m, \text{ т.к. получится гармонический ряд}$$

$$v_k = \frac{1}{k}, \quad u_k = \cos kx, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \cos kx$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} \cdot S_n &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{2} \cdot \cos kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \sin \left( \frac{2k+1}{2} \right) x - \sin \left( \frac{2k-1}{2} \right) x \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin \left( \frac{2n+1}{2} \right) x - \sin \left( \frac{2n-1}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

$$|S_n| = \left| \frac{\sin \left( \frac{2n+1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad \forall n, \quad x \neq 2\pi m \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} < \infty \text{ (по признаку Дирихле)}$$

$$3. 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right)$$

$$v_k = \frac{1}{k}$$

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = 1, u_5 = 1, u_6 = -2, \dots$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 2, S_6 = 0, \dots$$

$$S_n \leq 2 \quad \forall n \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \text{ (по признаку Дирихле)}$$

## 9.5. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Теорема [Коши]:

Если  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  сходится абсолютно и  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$ , то любой  $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ , полученный из исходного перестановкой членов, является абсолютно сходящимся и  $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = S$ .

**Доказательство:**

$$\circledast \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{u}_k$$

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сх. абс.} \right] \Leftrightarrow \left[ \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$N_0 = \max\{N_1; N_2\}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\tilde{S}_n : \forall n \geq N : \tilde{S}_n$  содержит все  $N_0$  первых членов исходного ряда

$$|\tilde{S}_n - S| = |(\tilde{S}_n - S_{N_0}) + (S_{N_0} - S)| \leq \underbrace{|\tilde{S}_n - S_{N_0}|}_{n-N_0 \text{ членов}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Число  $p \in \mathbb{N}$  выбираем таким образом, чтобы  $N_0 + p$  был больше номеров членов ряда, содержащихся в  $\tilde{S}_n - S_{N_0} \Rightarrow |\tilde{S}_n - S_{N_0}| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ , тогда

$$|\tilde{S}_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для доказательства абсолютной сходимости повторяем  $\circledast$  для рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k|$ .

## 9.6. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \\ \begin{cases} \tilde{S}_{3m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3m} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_n, \quad n = 3m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \tilde{S}_{3m-2} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

**Теорема [Римана]:**

Если числовой ряд сходится условно, то каково бы ни было число  $S$ , члены ряда можно переставить так, что полученный ряд сходится к  $S$ .

## 9.7. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Теорема [О сумме сходящихся рядов]: Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathcal{U} \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathcal{V} \in \mathbb{R}, \text{ то}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \mathcal{U} \pm \mathcal{V}$$

**Доказательство:**

$$\mathcal{U}_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad \mathcal{V}_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = \mathcal{U}_n \pm \mathcal{V}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{U} \pm \mathcal{V}$$

Теорема [О произведении абсолютно сходящихся рядов]:

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathcal{U} - \text{абс. сход.}, \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \mathcal{V} - \text{абс. сход.} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \text{ сход. абс. и } \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \right]$$

**Доказательство:**

$$\bar{S}_n = \sum_{j=1}^n |w_j|$$

Пусть  $m$  – наибольший индекс из индексов  $k$  и  $l$ , входящих в  $\bar{S}_n \Rightarrow \bar{S}_n \leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \dots + |v_m|)$

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$  сход. абс.  $\Rightarrow \{\bar{\mathcal{U}}_m\}, \{\bar{\mathcal{V}}_m\}$  ограничены  $\Rightarrow \{\bar{S}_n\}$  ограничена  $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |w_j| < \infty$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} w_j$  сход. абс.

$$\mathcal{W}_n = (u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$$

## 10. Билет 10

### 10.1. Понятия функциональных последовательностей и рядов.

**Определение:** [функциональная последовательность]:

Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  — произвольное множество.

$$\forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow y = f_n(x), x \in X$$

Множество занумерованных функций  $f_1, f_2 \dots f_n \dots$  называют функциональной последовательностью, где

$f_n$  — член последовательности  
 $X$  — область определения

**Определение:** [функциональный ряд]:

сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

членов функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$  называется функциональным рядом.

**Замечание:** изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей:

1. Каждому функциональному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

соответствует функциональная последовательность его частичных сумм

$$\{S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

2. Каждой функциональной последовательности  $\{S_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$  соответствует функциональный ряд с членами  $f_1(x) = S_1(x)$ ,  $f_2(x) = S_2(x) - S_1(x) \dots$ ,  $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ ,  $\dots$

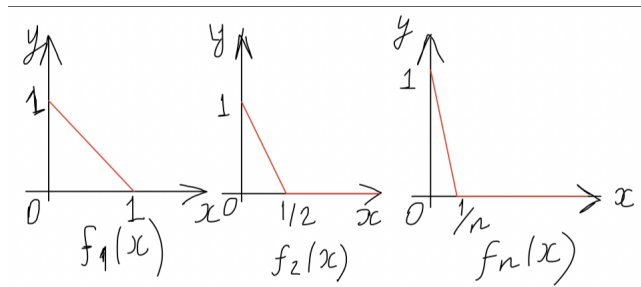
**Примеры:**

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$2. 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$
$$S_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$S_{n+1}(x)$  отличается от  $e^x$  по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа на  $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ ,  $0 < \theta < 1$



## 10.2. Сходимость функциональных рядов и последовательностей в точке и на множестве.

**Определение:** [сходимость в точке]:

Зафиксируем точку  $x_0 \in X$  и рассмотрим числовую последовательность  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ . Если указанная последовательность сходится, то функциональную последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  называют сходящейся в точке  $x_0$ .

**Замечание:** аналогичное верно и для функциональных рядов: Если числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  сходится, то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  называют сходящимся в точке  $x_0$ .

**Определение:** [область сходимости]:

Множество точек в которых сходится функциональная последовательность (или функциональный ряд) называют областью сходимости функциональной последовательности (функционального ряда).

**Замечание:** область сходимости функциональной последовательности(ряда) может совпадать с его областью определения  $X$ , составлять его части или быть  $\emptyset$ .

**Определение:** [предельная функция]:

Пусть  $\tilde{X} \subset X$  — область сходимости функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , совокупность пределов, взятых в точке  $x \in \tilde{X}$  определяет на  $\tilde{X}$  функцию  $y = f(x)$ . Эта функция называется предельной функцией  $y = f(x)$  функциональной последовательности.

**Определение:** [сумма ряда]:

Пусть  $\tilde{X} \subset X$  — область сходимости функционального ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ , совокупность пределов, взятых в точке  $x \in \tilde{X}$  определяет на  $\tilde{X}$  функцию  $y = S(x)$ . Эта функция называется суммой ряда  $y = S(x)$  функциональной последовательности.

## 10.3. Понятие равномерной сходимости на множестве.

**Определение:** [равномерная сходимость функциональной последовательности]:

Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно к функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$  если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(-):  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists x_n \in X : |f_{n_0}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$

**Обозначение:**  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$

**Примеры:**

1.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x \leq 1 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} \forall n \exists N = n \ \& \ \exists x_n = \frac{1}{2n} : |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$   
 $f_n(x)$  сходится неравномерно к  $f(x) = 0$  на  $[0, 1]$ .

2.  $X = [\delta, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Для заданного  $\delta > 0 \exists N \forall n \geq N \mapsto$

$$f_n(x) \equiv 0 \text{ на } [\delta, 1]$$

$$f(x) \equiv 0 \text{ на } [\delta, 1]$$

Тогда  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [\delta, 1]} 0$ .

**Замечания:**

1.  $N$  в определении не зависит от  $x$ , а только от  $\varepsilon$ . Один номер для всех  $x \in X$  одновременно.
2. Из сходимости функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  в каждой точке  $x \in X$  НЕ следует равномерная сходимость на  $X$ .

**Замечание:** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$ , то  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X'} f(x)$ , где  $X' \subset X$ .

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , \delta \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

**Определение:** [равномерная сходимость функционального ряда]:

Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

равномерно сходится к  $S(x)$  на множестве  $X$ , если  $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} S(x)$

## 10.4. Критерий Коши равномерной сходимости.

**Теорема [Критерий Коши для функциональной последовательности]:** Функциональная последовательность  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$  сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \mapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon]$$

**Доказательство:**

1. *Необходимость*  $\Rightarrow$ :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Тогда и

$$\forall p \in \mathbb{N} \ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Воспользуемся правилом треугольника:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. *Достаточность*  $\Leftarrow$ :

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon]$$

Зафиксируем  $x \in X$ , тогда  $\exists f(x)$  — предельное значение последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ .

$$\text{Тогда } f_{n+p}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$$

В неравенстве перейдем к предельному при  $p \rightarrow \infty$ :

$$\forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Тогда получим, что  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$  по определению.

**Теорема [Критерий Коши для функционального ряда]:**

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \xrightarrow{x \in X} S(x)$  тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши:

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \ \& \ \forall x \in X \mapsto \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon]$$

**Замечание:** критерий Коши для функциональных рядов следует из критерия Коши для функциональных последовательностей, так как:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

### Отрицание условия Коши:

Для функциональной последовательности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \& \ \exists x_n \in X : |f_{n_0+p_0}(x_n) - f_{n_0}(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Для функционального ряда:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n \exists n_0 \geq n \ \& \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \& \ \exists x_n \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p_0} f_k(x_n) \right| \geq \varepsilon_0$$

## 10.5. Критерии равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

### Теорема 1 [sup-критерий для функциональной последовательности]:

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x) \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

#### Доказательство:

$$\text{Обозначим } M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Тогда запишем наше равенство в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto 0 \leq M_n < \varepsilon$$

1. *Необходимость*  $\Rightarrow$ :

$$[f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\text{Отсюда, } M_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. *Достаточность*  $\Leftarrow$ :

$$\forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$$

То есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in X \mapsto |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

### Теорема 2 [sup-критерий для функционального ряда]:

Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  равномерно сходится к  $S(x)$  на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0$$

#### Доказательство:

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\text{То есть } r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$



Но  $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} S(x)$  тогда и только тогда, когда  $r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0$ .

**Примеры:**

1.  $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ ,  $x \in [2, +\infty) = X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{e^{nx}} = 0 \Rightarrow y = f(x) \equiv 0$$

$$f'_n(x) = nx(2 - nx)e^{-nx} = 0$$

$x_n = \frac{2}{n}$  – точка максимума, при  $x > \frac{2}{n}$ ,  $n > 1 \Rightarrow f'_n(x) < 0 \Rightarrow f_n$  убывает на  $X$ ;

$$\sup_X f_n(x) \leq f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{ne^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Отсюда,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0$ .

2.  $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ ,  $X = (0, 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2x^2}{e^{nx}} = 0$$

$$\Rightarrow y = f(x) \equiv 0$$

$$f'_n(x) = n^2x(2 - nx)e^{-nx} = 0$$

$x_n = \frac{2}{n}$ ,  $n > 1$  – точка максимума.  $\Rightarrow$

$$\sup_X f_n(x) = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3.

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}, X = (0, 1)$$

$$\forall n \exists n_0 = n \ \& \ \exists p_0 = n \ \& \ \exists x_n = \frac{1}{n}$$

$$|f_{2n}(x_n) - f_n(x_n)| = \left| \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \frac{\ln 1}{\sqrt{1}} \right| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} > \varepsilon_0 = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$$

Отсюда, равномерной сходимости нет.

## 10.6. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

**Теорема 1:** если члены функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

непрерывны на  $[a, b]$  и ряд сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $y = S(x)$ , то сумма ряда  $y = S(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

**Доказательство:**

$$[S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} S(x)] \stackrel{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}]$$

Возьмем  $n_0 \geq N \Rightarrow |S_{n_0}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

При  $x_0 \in [a, b]$  выполняется:

$$|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

В силу непрерывности  $f_k$  на  $[a, b]$ ,  $S_{n_0}$  непрерывна на  $[a, b]$ , в частности в точке  $x_0 \in [a, b]$ , то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta \mapsto |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta \mapsto$$

$$|S(x) - S(x_0)| = |[S(x) - S_{n_0}(x)] + [S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)] + [S_{n_0}(x_0) - S(x_0)]| \leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$

В силу произвольности выбора точки  $x_0 \in [a, b]$  функция  $y = S(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

**Теорема 1’:** если члены функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  в каждой точке  $x \in X$  непрерывны на  $[a, b]$  и последовательность сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $f(x)$ , то  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

**Замечание:** пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 и  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ .

$$\forall x_0 \in [a, b] \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

Отсюда,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

При выполнении условий теоремы 1 возможен почленный переход к пределу под знаком суммы для равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого есть непрерывные функции.

**Теорема 2:** если члены функционального ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  непрерывны на  $[a, b]$  и ряд сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $y = S(x)$ , то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt$  также сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $y = \int_a^x S(t) dt$ .

**Доказательство:**  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к  $y = S(x)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме 1  $S$  непрерывна на  $[a, b]$ , следовательно  $S$  и  $f_k$  — интегрируемые функции ( $\forall k$ ) на  $[a, b]$ . Обозначим:

$$I(x) = \int_a^x S(t) dt$$

и

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x f_k(t) dt = \int_a^x [\sum_{k=1}^n f_k(t)] dt = \int_a^x S_n(t) dt$$

$$|I(x) - I_n(x)| = \left| \int_a^x [S(t) - S_n(t)] dt \right| \leq \int_a^x |S_n(t) - S(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) < \varepsilon$$

Итак:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \ \& \ \forall x \in [a, b] \mapsto |I(x) - I_n(x)| < \varepsilon$ , то есть функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt$$

сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x \left[ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] dt$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt = \int_a^x \left[ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] dt$$

**Теорема 2’:** если члены функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывны на  $[a, b]$ . и  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f(x)$ , то  $\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} \int_a^x f(t) dt$ .

**Замечания:**

1. В теоремах 2, 2’ отрезок  $[a, x]$  можно заменить отрезком  $[x_0, x] \subset [a, b]$ .
2. Теоремы 2 и 2’ остаются справедливыми, если функции  $y = f_k(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ .

**Теорема 3:** если члены функционального ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  непрерывно-дифференцируемы на  $[a, b]$  и функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , а числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  ( $x_0 \in [a, b]$ ) сходится, то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $y = S(x)$  и  $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

**Доказательство:**

Обозначим:

$$\tilde{S}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Из условия теорем 3 и 1  $y = \tilde{S}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$  можно почленно интегрировать (по теореме 2), то есть:

$$\int_{x_0}^x \tilde{S}(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{x_0}^x f'_k(t) dt \right]$$

Согласно теореме 2 ряд сходится равномерно на  $[a, b]$ .

Но  $\int_{x_0}^x f'_k(t)dt = f_k(x) - f_k(x_0)$ , следовательно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{x_0}^x f'_k(t)dt \right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$$

Ряды слева и справа равномерно-сходящиеся, а значит,  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ .

$$\int_{x_0}^x \tilde{S}(t)dt = S(x) - S(x_0)$$

Левая часть – интеграл с переменным верхним пределом и его производная равна  $\tilde{S}(x) \Rightarrow$  правая часть – дифференцируемая функция и  $S'(x) = \tilde{S}(x)$ , то есть

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

**Замечания:**

1. По условию теоремы 3:  $\tilde{S}(x) = S'(x)$  – непрерывная функция  $\Rightarrow S$  – непрерывно-дифференцируемая на  $[a, b]$ .
2. Теорема 3 остается справедливой, если функции  $y = f_k(x)$  являются дифференцируемыми функциями.

**Теорема 3':** если члены функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями на  $[a, b]$ , числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, где  $x_0 \in [a, b]$ ; а функциональная последовательность  $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , то  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $y = f(x)$  и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), x \in [a, b]$$

**Замечание:** можно сделать важный вывод: равномерная сходимость не выводит из класса непрерывных функций, а в случае равномерной сходимости производных – из класса непрерывно дифференцируемых функций.

## 10.7. Достаточные признаки сходимости функциональных рядов.

**Теорема 1 [Признак Вейерштрасса]:**

Если для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

можно указать такой числовой ряд с неотрицательными членами  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ , что  $\forall k \geq k_0$  и  $\forall x \in X$  выполняется:  $0 \leq |f_k(x)| \leq a_k$ , то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на  $X$ .

**Доказательство:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1 \text{ \& \& } \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\exists N = \max\{N_1, k_0\} \Rightarrow \forall n \geq N \text{ \& } \forall x \in X \text{ \& } \forall p \in \mathbb{N} \mapsto$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

**Следствие:** если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где  $a_k = \sup_{x \in X} |f_k(x)|$ , то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится абсолютно и равномерно на  $X$ .

**Теорема 2 [Признак Дирихле]:** Если:

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

имеет равномерно ограниченную на  $X$  последовательность частичных сумм  $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\exists M > 0: \forall x \in X \text{ \& } \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |S_n(x)| \leq M$$

2.  $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  монотонна на  $X$  и равномерно стремится к 0:  $v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \forall x \in X \text{ \& } \forall k$   
 $[v_k(x) \geq v_{k+1}(x)]$  и  $v_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{x \in X} 0$ :

$$\text{то } \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \text{ сходится равномерно на } X.$$

**Теорема 2 [Признак Абеля]:** Если:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  равномерно сходится на  $X$ .

2.  $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно ограничена и монотонна на  $X$ .

$$\text{то } \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \text{ сходится равномерно на } X.$$

## 11. Билет 11

### 11.1. Степенные ряды с комплексными числами

**Определение:**  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - a)^k$ ;  $c_k, a \in \mathbb{C}$  — фиксированные числа,  $\zeta \in \mathbb{C}$  — переменная.

Такой функциональный ряд называется *степенным*.

$c_k$  — коэф. степенного ряда. Этот ряд сходится в точке  $a$ .

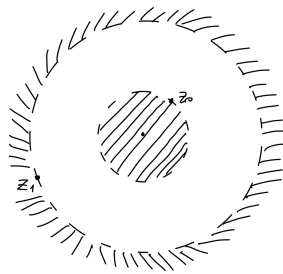
$\zeta - a = z \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  — будем рассматривать такой степенной ряд, который сходится в т.  $z = 0$

### 11.2. Теорема 1. [Первая теорема Абеля]

1. Если степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится в т.  $z_0 \neq 0$ , то он сходится абсолютно в круге:

$$K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$$

2. Если степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  расходится в т.  $z_1$ , то он расходится в любой т.  $z : |z| > |z_1|$



**Доказательство:**

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty \Rightarrow c_k z_0^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{Ограничена: } \exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leq M$$

$$\forall z : |z| < |z_0|$$

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k| \left( \frac{z}{z_0} \right)^k \leq M \cdot [q(z)]^k, |q(z)| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k(z) < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ сходится абсолютно в точке } z \in K_0$$

В силу произвольности точки  $z \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится абсолютно в  $K_0$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty \Rightarrow \forall z : |z| > |z_1| - \text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ расходится, если бы в точке } z_2 :$$

$$|z_2| > |z_1| \text{ ряд } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_2^k < \infty \stackrel{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty - \text{противоречие.}$$

**Следствие 1.** Если  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty, z_0 \neq 0$ , то  $\forall \rho : 0 < \rho < |z_0|$  в круге  $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} :$

$|z| \leq \rho\}$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится равномерно.

**Доказательство:**

$$\exists M > 0 : \forall k \Rightarrow |c_k z_0^k| \leq M$$

$$\forall z \in K_\rho$$

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k}| \leq M \left( \frac{\rho}{|z_0|} \right)^k = M \cdot q^k$$

$$|q| = \frac{\rho}{|z_0|} < 1 \left( \frac{\rho}{|z_0|} \text{ не зависит от } z \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty \xRightarrow{\text{По пр. Вей.}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ сходится равномерно в круге } K_\rho$$

**Следствие 2** Если в т.  $z_0 \neq 0$  выполнено  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k < \infty$ , то

- 1)  $\sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{k-m}$  сходится абсолютно в круге  $K_0$  и равномерно в круге  $K_\rho$
- 2)  $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$  сходится абсолютно в круге  $K_0$  и равномерно в круге  $K_\rho$

**Доказательство:**

$$1) \forall z \in K_0 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| = |c_k z_0^k \left( \frac{z}{z_0} \right)^{k-m} \cdot \frac{1}{z_0^m}| \leq$$

$$\frac{M}{|z_0|^m} \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^{k-m} = \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q^{k-m}(z), \quad q(z) = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^{k-m} < \infty - \text{сходится абсолютно в } K_0$$

$$\forall z \in K_1 \Rightarrow |c_k z^{k-m}| \leq \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q_1^{k-m}, \quad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|} < 1.$$

$0 < q_1 < 1$  - не зависит от  $z \Rightarrow$  по признаку Вейр. в  $K_1$  ряд сходится равномерно

$$2) \forall z \in K_0$$

$$|k c_k z^{k-1}| = \left| \frac{c_k z_0^k}{z_0} \cdot k \left( \frac{z}{z_0} \right)^{k-1} \right| \leq \frac{M}{|z_0|} \cdot k q^{k-1}(z), \quad q(z) = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k(z) < \infty \text{ по признаку Даламбера}$$

### 11.3. Теорема 2. [О радиусе сходимости степенного ряда].

Для любого степенного ряда существует  $R$  ( $R \geq 0$  или  $R = +\infty$ )

такое, что

$$1) 0 < R < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \text{ в круге } K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \text{ и расходится в } \mathbb{C} \setminus \overline{K}$$

$$2) R = 0, \text{ то } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \text{ только в } z = 0$$

$$3) R = +\infty, \text{ то } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$R$  - называется радиусом сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

$K$  - круг сходимости.

**Доказательство:** Пусть  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  - множество сходимости степенного ряда;  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ , т.к.  $0 \in \mathcal{D}$

$$1) \mathcal{D} - \text{огран.}, \exists z_0 \in \mathcal{D}, z_0 \neq 0$$

$R = \sup_{z \in \mathcal{D}} |z|$  - сущ. т.к.  $\mathcal{D}$  огранич. мн-во.

Докажем:  $\forall z \in K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$

По определению  $\sup \forall z' \in K \exists z_1 \in \mathcal{D} : |z'| < |z_1| \leq R$ , т.к.

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k < \infty \Rightarrow$  1-я теорема Абеля  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty$  и сходится абсолютно  $\Rightarrow$  В силу

произв.  $z' \in K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится абс. в круге  $K$

Пусть  $z' \notin K \Rightarrow |z'| > R \Rightarrow$  по опред.  $\sup z' \notin \mathcal{D} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k = \infty \Rightarrow$  расходится вне круга  $K$

2)  $\mathcal{D}$  - огран.; если  $\mathcal{D} = \{0\}$ , то ряд сход в т.  $z = 0$  и расх в  $z \neq 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad z = 0 \quad \Rightarrow R = 0$

3)  $\mathcal{D}$  - неогранич.  $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists z' \in \mathcal{D} :$

$|z| < |z'|, \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z')^k < \infty \xrightarrow{1\text{-я т. Аб.}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty.$

#### 11.4. Теорема 3. [Вторая теорема Абеля].

Если  $0 < R < +\infty$ ,  $R$  - радиус сходимости  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$ , то на  $[0, R]$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сх. равномерно и его сумма  $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  непрерывна  $\forall x \in [0, R]$

**Доказательство:**  $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k R^k}_{U_k} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^k}_{V_k}$

1)  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k < \infty$

2)  $V_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad 0 \leq V_k \leq 1 \quad \forall x \in [0; R]$

$V_{k+1} = \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} < \left(\frac{x}{R}\right)^k = V_k \quad \forall k$

$\Downarrow$  признак Абеля

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k < \infty$  сходится равномерно на  $[0, R]$

$f_k(x) = c_k x^k$  - непрерывна на  $[0; R]$

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  непрерывна на  $[0; R]$

#### 11.5. Теорема 4.

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geq 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

2) Если  $|c_k| > 0 \quad \forall k$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \rho \quad (\rho \geq 0, \rho = +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}.$

**Доказательство:**



$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\}$$

$$z_0 \in K : \sqrt[k]{|c_k z_0^k|} = |z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z_0| \cdot \rho < \frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1$$

⇓ По признаку Коши

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z_0^k| < \infty$$

$$z_1 : |z_1| > \frac{1}{\rho}$$

$$\sqrt[k]{|c_k z_1^k|} = |z_1| \sqrt[k]{|c_k|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z_1| \cdot \rho > \frac{1}{\rho} \cdot \rho \Rightarrow \text{По признаку Коши } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \infty.$$

**Пример (показывает, для чего нужна формула Коши-Адамара):**

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2} = z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + \dots + z^{k^2} + \dots$$

$$\{c_k\} = \{c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0, c_9 = 1, \dots\}$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k^2]{|c_{k^2}|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

## 11.6. Теорема 5. [Формула Коши-Адамара].

Если  $R$  - радиус сходимости  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , тогда  $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ .

**Доказательство:** 1)  $\{\sqrt[k]{|c_k|}\}$  - неогр.

$$2) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L > 0; \quad L \in \mathbb{R}$$

$$3) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{\sqrt[k]{|c_k|}\} \text{ сходитя к } 0$$

1) Для бескон. числа номеров  $k \in \mathbb{N}$

$$|c_k z^k| > 1 \quad \forall z \neq 0, z \in \mathbb{C}$$

⇓

Не выполняется необходимое условие сходимости ряда

⇓

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \infty$$

⇓

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \text{только для } z = 0$$

2) Докажем, что

$$a) \forall z : |z| < \frac{1}{L} \text{ ряд сходится}$$

$$б) \forall z : |z| > \frac{1}{L} \text{ ряд расходится}$$

$$a) z : |z| < \frac{1}{L} \text{ Тогда } \exists \varepsilon > 0 : |z| < \frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{L}$$

$$\varepsilon > 0 \exists k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}$$

⇓ По признаку Коши

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \text{в круге } K = \{z : |z| < \frac{1}{L}\}$$

$$б) \forall z : |z| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |z| > \frac{1}{L-\varepsilon} > \frac{1}{L}$$

$$[\exists \{c_{k_n}\} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} = L] \stackrel{\text{def}}{=} [\varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto L - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} < L + \varepsilon]$$

$$\sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} z^{k_n} = |z| \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > \frac{1}{L-\varepsilon} \cdot (L - \varepsilon) = 1 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |c_{k_n} z^{k_n}| > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Не выполняются необходимых условий сходимости

$\Downarrow$

Ряд расходится  $\forall z : |z| > \frac{1}{L}$

3)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \Rightarrow \{ \sqrt[k]{|c_k|} \}$  сходится к 0.

$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : \frac{1}{2|z|} = \varepsilon : \exists k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{2|z|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[k]{|c_k| \cdot |z^k|} = |z| \sqrt[k]{|c_k|} < |z| \cdot \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2} < 1$

$\Downarrow$  По признаку Коши

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

## 11.7. Теорема 6.

Для рядов

$$\begin{array}{lll} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{k+1}}{k+1}, & \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \\ 1) & 2) & 3) \end{array}$$

радиус сходимости один и тот же.

1)  $R_1, K_1$

2)  $R_2, K_2$

3)  $R_3, K_3$

Надо доказать:  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .

**Доказательство:**  $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 1 \leq k$

$$\left| \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} \right| \leq |z| \cdot |c_k z^k| \leq |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|$$

$$\underbrace{|z| \cdot |c_k z^k| \leq |z|^2 \cdot |k c_k z^{k-1}|}_{1)} \quad \underbrace{\left| \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} \right| \leq |z| \cdot |c_k z^k|}_{2)}$$

$$1) \forall z \neq 0 \in K_3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k < \infty \Rightarrow R_1 \geq R_3$$

$$2) \forall z \neq 0 \in K_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} < \infty \Rightarrow R_1 \leq R_2$$

В результате:  $R_3 \leq R_1 \leq R_2$

Надо доказать, что  $R_2 \leq R_3$

$$z \in K_2 \quad \exists \rho < R_2 : z \in K_\rho \quad |k c_k z^{k-1}| = |k c_k z^{k-1} \cdot \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{z^2}{z^2}| = \left| \frac{c_k}{k+1} \cdot z^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2} \right| =$$

$$\left| \frac{c_k}{k+1} \cdot \rho^{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{z^2} \cdot \left( \frac{z}{\rho} \right)^{k+1} \right| \stackrel{\exists M > 0}{\leq}$$

$$\leq \frac{M}{|z|^2} k(k+1) q_1^{k+1}, \quad \text{где } |q_1| < 1 \quad q_1 = \frac{z}{\rho}$$

$$\Downarrow \forall z \in K_2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} < \infty \Rightarrow R_3 \geq R_2$$

Тогда в сумме  $R_1 = R_2 = R_3 = R$

## 12. Билет 12

### 12.1. Степенные ряды с действительными членами.

**Теорема:** Если  $R$  – радиус сходимости степенного ряда и выполнено следующее:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = f(x), \quad x \in (a-R, a+R), \quad x, a_k, a \in \mathbb{R}$$

то

1.  $f$  бесконечно дифференцируемая функция на  $(a-R, a+R)$  и выполняется:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-(m-1))a_k(x-a)^{k-m}$$

2.  $\forall x \in (a-R, a+R) \mapsto \int_a^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$

**Доказательство:**  $\forall \rho : 0 < \rho < R$  на  $[a-\rho; a+\rho]$  равномерная сходимость  $\Rightarrow$  всё можно делать.

**Следствие.**  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

### 12.2. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.

Покажем, что сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости.

**Теорема:** Сумма степенного ряда  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$  дифференцируема в интервале сходимости и производная равна

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1},$$

причём ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$  имеют одинаковый радиус сходимости.

**Доказательство.** Члены ряда  $c_n (x-x_0)^n$  являются непрерывно дифференцируемыми на всей числовой прямой функциями. Пусть  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$  радиус сходимости ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$  и точка  $x$  принадлежит интервалу сходимости  $(x_0-R, x_0+R)$ . Тогда существует отрезок  $[a, b] \subset (x_0-R, x_0+R)$ , включающий точку  $x$ .

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}$ , полученный почленным дифференцированием ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ . Вычислим его радиус сходимости  $R'$

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|n c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} \cdot \sqrt[n-1]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (|c_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}} = R$$

Таким образом, ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  имеют одинаковый интервал сходимости, и, следовательно, на отрезке  $[a, b]$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$  сходится равномерно. По теореме о дифференцируемости суммы функционального ряда сумма степенного ряда  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$  и верна формула

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

что полностью доказывает теорему.  $\square$

Теперь в силу доказанной теоремы при дифференцировании суммы степенного ряда вновь получаем степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Это позволяет нам сформулировать следующую теорему:

**Теорема:** Сумма степенного ряда  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  дифференцируема любое количество раз и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k}$$

причём радиусы сходимости всех получающихся рядов одинаковы.

**Доказательство.** По предыдущей теореме функция  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  дифференцируема и  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$ , причём радиусы сходимости обоих рядов совпадают. Далее, пусть существует

$$f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2) (x - x_0)^{n-k+1}$$

Применяя к функции  $f^{(k-1)}(x)$  предыдущую теорему, получаем, что  $f^{(k-1)}(x)$  дифференцируема и верна формула

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))' = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1) (x - x_0)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости рядов для  $f^{(k-1)}(x)$  и  $f^{(k)}(x)$  совпадают. Тем самым, следуя методу математической индукции, полностью доказывает эту теорему.  $\square$

### 12.3. Единственность представления функции степенным рядом.

**Определение:** Регулярная функция.

Пусть в каждой точке  $z \in \mathbb{E}$ , где  $\mathbb{E}$  – множество точек комплексной плоскости, поставлено в соответствие комплексное число  $\omega$ . На множестве  $\mathbb{E}$  определена функция комплексного переменного,  $\omega = f(z)$ .

Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma = \sigma_\varepsilon > 0 : \forall z : |z - a| < \sigma_\varepsilon \mapsto |f(z) - f(a)| < \varepsilon$ , то функцию  $f(z)$  называют непрерывной в точке  $a$ .

И, наконец, Функция комплексного переменного  $f(z)$  называется регулярной в точке  $a$ , если она определена в некоторой окрестности точки  $a$  и представима в некотором круге  $|z - a| < \rho, \rho > 0$ , сходящимся к  $f(z)$  степенным рядом  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  (\*).

**Теорема [Единственность представления функции степенным рядом]:**

Функция  $f(z)$ , регулярная в точке  $a$ , единственным образом представляется рядом (\*).

**Доказательство.** Пусть функция  $f(z)$  имеет два представления в виде степенного ряда в круге  $K = \{z : |z - a| < \rho\}$ , где  $\rho > 0$ , т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n \quad (**)$$

Теперь покажем, что  $c_n = \tilde{c}_n$ , для  $n = 0, 1, 2, \dots$

По условию ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n$  сходятся в круге  $K$ , и поэтому эти ряды сходятся равномерно в круге  $K_1 = \{z : |z-a| \leq \rho_1 < \rho\}$ , а их общая сумма – непрерывная в круге  $K_1$  функция. В частности, функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $a$ . Подходя к пределу при  $z \rightarrow a$  в равенстве (\*\*), получаем  $c_0 = \tilde{c}_0$ . Отбрасывая одинаковые слагаемые  $c_0$  и  $\tilde{c}_0$  в равенстве (\*\*), получаем после деления на  $(z-a)$  равенство:

$$c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \dots = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(z-a) + \tilde{c}_3(z-a)^2 + \dots,$$

которое справедливо в круге  $K$  с выколотой точкой  $a$ . Ряды в левой и правой части сходятся равномерно в круге  $K_1$ . Переходя в равенстве к пределу при  $z \rightarrow a$ , получаем  $c_1 = \tilde{c}_1$ . Справедливость равенства  $c_n = \tilde{c}_n$  при любой  $n \in (N)$  устанавливается при помощи индукции.

## 12.4. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

**Теорема [Достаточные условия сходимости ряда Тейлора к функции]:**

Если  $f$  бесконечно дифференцируемая функция на  $(a-\delta, a+\delta)$ ,  $\delta > 0$  и  $\exists M > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \mapsto |f^{(k)}(x)| \leq M$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то ряд Тейлора сходится к функции  $f(x)$  в каждой точке  $x$  нашего интервала:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

**Доказательство.** Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{где } \xi \text{ между } x \text{ и } a$$

$$|r_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

т.к.  $|x-a| \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^k}{k!} = 0$ , тогда справедливо следующее:

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |r_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square.$$

## 12.5. Ряд Тейлора

Пусть функция  $f$  – бесконечно дифференцируема в точке  $a$  (т.е в этой точке у функции  $f$  существует производная любого порядка), тогда

**Определение.** Рядом Тейлора функции  $f$  в точке  $a$  называется следующее выражение:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Замечание.** Если функция регулярна в точке  $a$ , то она раскладывается в степенной ряд и этот степенной ряд и есть ряд Тейлора, однако не все функции раскладываются в степенной ряд, поэтому справедливо следующее выражение:

$$f(x) \neq f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Пример.** Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывная в нуле. Найдем ее производные:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f''(x) = \left[ \left( \frac{2}{x^3} \right)^2 - \frac{6}{x^4} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f'''(x) = \left[ \left( \frac{2}{x^3} \right)^3 - \frac{12}{x^7} - \frac{2^4}{x^4} + \frac{24}{x^5} \right] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Таким образом  $f^{(m)}(x) = Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ , где  $Q_{3m}(\frac{1}{x})$  – многочлен степени  $3m$  от  $\frac{1}{x}$ . Тогда понятно, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(x) = \begin{cases} Q_{3m}(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда  $\forall x \neq a$  ряд Тейлора будет представлять собой нулевой ряд, хотя сама функция не нулевая  $\Rightarrow f(x) \neq f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .  $\square$

## 12.6. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Функция  $f$  – бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $a$ , тогда этой функции соответствует некоторый ряд:

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Обозначение.**  $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  –  $n$ -ая частичная сумма ряда Тейлора (многочлен Тейлора).

Тогда, если  $\mathbf{r}_n(x) = f(x) - P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то это означает, что ряд Тейлора сходится к функции  $f$  в точке  $x$ :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Теорема:.** Если  $f^{(n+1)}$  непрерывна на  $(a-\delta, a+\delta)$ ,  $\delta > 0$ , то:

1.  $\mathbf{r}_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ , т.е. её остаточный член на этом интервале представим в интегральной форме.

2.  $\mathbf{r}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

**Доказательство.**

1. Доказательство будем проводить при помощи мат. индукции:

(а) Мы знаем, что  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ . Тогда:

$$\begin{cases} u = f'(t) , dv = dt \\ du = f''(t) dt , v = -(x-t), \text{ x - это константа} \end{cases}$$

получаем, что  $f(x) - f(a) = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt =$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t)f''(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t)f''(t) dt.$$

Получили при  $n = 1$  остаточный член в интегральной форме (получена база индукции).

(б) Предположим, что при  $n-1$  верно, тогда найдем для  $n$  :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

Тогда:

$$\begin{cases} u = f^n(t) , dv = (x-t)^{n-1} dt \\ du = f^{n+1}(t) dt , v = -\frac{(x-t)^n}{n} \end{cases}$$

получаем, что  $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - \frac{(x-t)^n f^n(t)}{n!} \Big|_a^x + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t) dt$ . Тогда получаем, что:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \square$$

2. Это просто остаточный член в форме Лагранжа (доказывалось в прошлом семестре).

## 13. Билет 13

### 13.1. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ , $\ln(1+x)$ , $(1+x)^\alpha$ .

#### 1. Показательная и гиперболические функции.

$$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \in (-\rho, \rho), \quad \rho > 0$$

Поскольку  $(e^x)^{(k)} = e^x$ , то  $0 < f(x) < e^\rho$  и  $0 < f(x)^{(k)} < e^\rho$ . Ряд Тейлора функции  $y = e^x$  сходится к ней на  $(-\rho, \rho)$  по теореме о достаточном условии представимости функции её рядом Тейлора.

$$\forall \rho > 0 \Rightarrow R = +\infty$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y = \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad R = +\infty$$

#### 2. Тригонометрические функции.

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad R = +\infty$$

#### 3. Степенная функция.

$$y = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1)  $\alpha = 0, \quad y = 1$

2)  $\alpha = n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$  - бином Ньютона

3)  $\alpha$  - произвольное,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$$



$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt$$

Пусть  $t = x\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , тогда  $dt = x d\tau$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\right)^n (1+x\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

Пусть  $|x| < 1$ , тогда  $|1 + \tau x| \geq 1 - \tau$

$$(1+x\tau)^{\alpha-1} \leq \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1 \\ (1-|x|), & \alpha < 1 \end{cases}$$

$|\alpha| \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall n > m$

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \right| \leq \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{n!} \leq \frac{(m+n)!}{n!} = \\ = (n+1)(n+2)\dots(n+m) \leq (2n)^m$$

В итоге

$$|r_n(x)| \leq 2^m \beta(x) |x| \frac{n^m}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Так как

$$a = \frac{1}{|x|} > 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0$$

Следовательно

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad |x| < 1, \quad R = 1$$

В частности:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1$$

#### 4. Логарифмические функции.

$$y = \ln(1-x), \quad y' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$y = \ln(1+x), \quad y' = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Раскладываем в интервалах сходимости каждую функцию в ряд Тейлора, а потом почленно интегрируем, и помним, что при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется.

$$y = \ln(1 - x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

$$y = \ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

## 5. Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции можно разложить в ряд Тейлора, сначала продифференцировав и воспользовавшись известными результатами.

### 13.2. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции $e^z$ .

Докажем, что

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad R = +\infty$$

**Доказательство:**

Так как  $z = x + iy$  и по формуле Эйлера:  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ , то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} e^{iy} = \cos y + i \sin y &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = e^{iy} \end{aligned}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}$$

Докажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{j! \cdot (k-j)!} z_1^j z_2^{k-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} + \left( \frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^1}{1!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} \right) + \\
&\quad + \left( \frac{z_1^0}{0!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1^1}{1!} \cdot \frac{z_2^1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^0}{0!} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Это можно проиллюстрировать следующим образом:

	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\dots$
$v_0$	$u_0 \cdot v_0$	$u_1 \cdot v_0$	$u_2 \cdot v_0$	$\dots$	
$v_1$	$u_0 \cdot v_1$	$u_1 \cdot v_1$	$\dots$		
$v_2$	$u_0 \cdot v_2$	$\dots$			
$v_3$	$\dots$				
$\dots$					

Мы обходим таблицу по диагоналям, так что сумма индексов элементов была константа для каждой группы слагаемых. Тогда действительно:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$$

Тогда по доказанной выше лемме:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x + iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Теперь

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Что и требовалось доказать.