Introducción a la dinámica de fluidos: Conservación de masa

Contents

3.1. Sistema y volúmen de control

3.1.1. Sistema

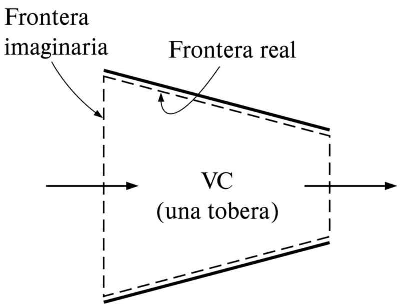
Definimos como **sistema** a una *cantidad de materia de masa fija elegida para el estudio*

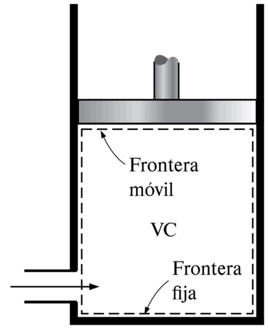
En general, para el estudio de **sólidos**, la definición de sistema es sencilla, ya que este considera la interacción del cuerpo con las fuerzas externas.

Sin embargo, en el caso de **fluidos**, la definición no es tan sensilla ya que el sistema ocupa un espacio infinito.

3.1.2. Volumen de control

Para estudiar dinámica de fluidos utilizamos el **volúmen de control**, *una región imagniaria en el espacio para analizar la dinámica de fluidos.*

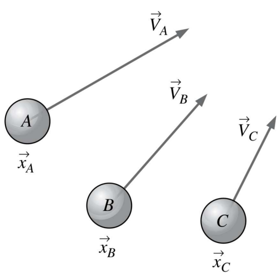




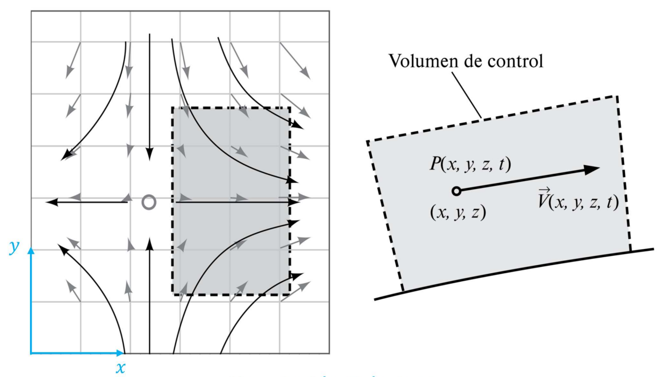
> **Nota.** Las frontera de un volumen de control pueden ser permeables o impermeables, móbiles o fijas.

3.2. Descripción lagrangiana y euleriana

- **Descripción lagrangiana** consiste en hacer un seguimiento de las partículas materiales. Este enfoque es comúnmente utilizado en dinámica de sólidos.
- **Descripción euleriana** consiste en medir lo que pasa en puntos fijos del espacio. Este enfoque es comúnmente utilizado en dinámica de sólidos.



Descripción Lagrangiana



Descripción Euleriana

En el análisis lagrangiano se rastrea la *trayectoria y la velocidad de cada sistema,* las cuales dependen del tiempo (t), únicamente. Por ejemplo, considerando un sistema con múltiples objetos $A, B, C, \cdots$

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_A(t), \vec{x}_B(t), \vec{x}_C(t), \cdots & \text{Trayectoria} \\ \vec{V}_A(t), \vec{V}_B(t), \vec{V}_C(t), \cdots & \text{Velocidad} \end{array}$$

En el análisis euleriano se definen *variables de campo*, es decir, variables en funcion del tiempo y del espacio dentro del volumen de control (x, y, z). Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} P(x, y, z, t) & \text{Campo de presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Campo de densidad} \\ \vec{V}(x, y, z, t) & \text{Campo de velocidad} \end{array}$$

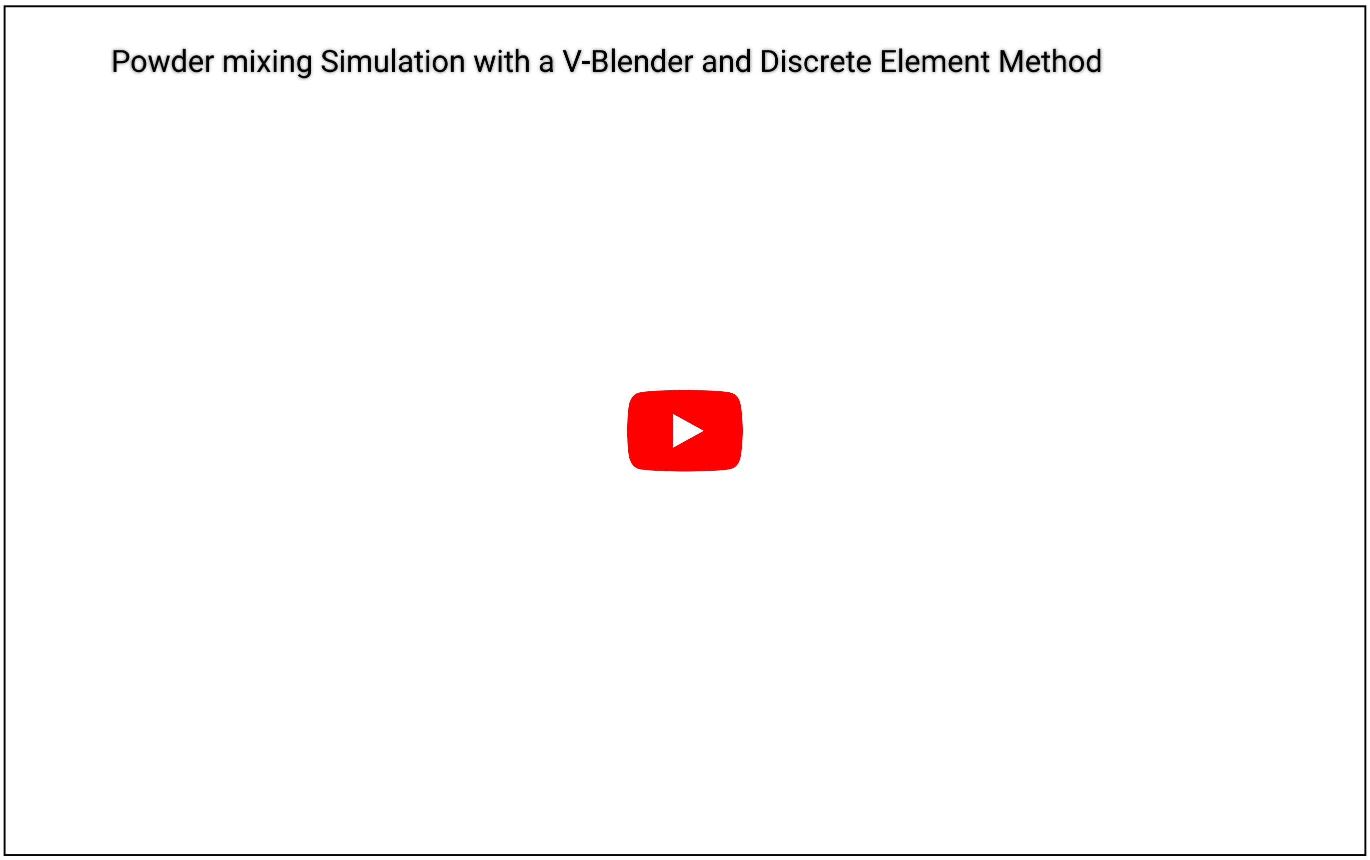
Notar que P y ρ son un **campo escalar** ***(valor escalar que cambia en el espacio)***, mientras que $\vec{V}$ es un **campo vectorial** ***(vector cuya magnitud y dirección cambia en el espacio)***

Así, $\vec{V}$ se puede desarrollar, por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\ \hat{x} + v(x,y,z,t)\ \hat{y} + w(x,y,z,t)\ \hat{z} \tag{3.1}$$

donde u, v y w son las componentes de la velocidad e direcciones x, y y z, respectivamente.

Ambos enfoques son equivalentes. Así, existen ocaciones donde el enfoque lagrangiano se aplica a problemas de fluidos, y viceversa.



En el video vemos el proceso de mezcla de material partículado (no un fluido). Similarmente, esta herramienta se puede utilizar para modelar un fluído considerando las fuerzas de interacción entre partículas.

Analicemos, por ejemplo, la aceleración ($\vec{a}$) de una partícula de fluido considerando ambos enfoques.

- Según el **enfoque lagrangiano**, la aceleración de una partícula con velocidad $\vec{V}$, es: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

- Según el **enfoque euleriano**, la aceleración de una partícual en un volumen de control:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$, es el **operador nabla**

Hemos definido un nuevo operador, denominado **derivada material (o sustancial), $\frac{D}{Dt}$ o** $\frac{d}{dt}$ que describe la *variación temporal de una partícula de fluido a medida que se mueve por el campo de flujo:*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla \tag{3.3}$$

- El término $\frac{\partial}{\partial t}$ se denomina **variación temporal local y** ***es cero para flujos estacionarios.***
- El término $(\vec{V}\cdot\nabla)$, se denomina **término convectivo,** ***este término puede ser diferente de cero inclusive para flujos estacionarios***

La derivada material se puede aplicar a otras propiedades de fluidos, como por ejemplo, la densidad:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\rho$$

3.3. Teorema de transporte de Reynolds (TTR)

3.3.1. Leyes de conservación aplicadas a un sistema

Consideremos algunas **leyes de conservación fundamentales** aplicadas a un sistema:

- Masa (m_{sys}),

$$\frac{d}{dt}m_{\text{sys}} = 0$$

- Momento lineal $(m\vec{V})_{\text{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V})_{\text{sys}} = \vec{F}_{\text{neta}}$$

- Momento angular $(\vec{r} \times m\vec{V})_{\text{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V})_{\text{sys}} = \vec{M}_{\text{neto}}$$

- Energía $E_{\text{sys}} = (m\tilde{e})_{\text{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(m\tilde{e})_{\text{sys}} = \dot{Q} - \dot{W}$$

donde $\vec{F}_{\text{neta}}$ y $\vec{M}_{\text{neto}}$ son, respectivamente, *la fuerza y torque aplicado sobre el sistema*, $\tilde{e}$ es la *energía específica (energía por unidad de masa)*, $\dot{Q}$ es la *tasa de transferencia de calor*, y $\dot{W}$ es *potencia*.

En cada ley de conservación notamos que hay una ***propiedad extensiva (por ejemplo, E_{sys})***, y una ***propiedad intensiva (por ejemplo, $\tilde{e}_{\text{sys}} = E_{\text{sys}}/m_{\text{sys}}$)***

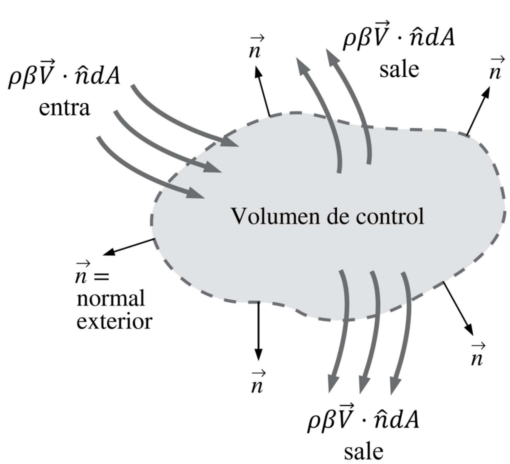
3.3.2. Formulación general

El **teorema de transporte de Reynolds** establece una relación entre la **variación temporal de una propiedad extensiva del sistema (B_{sys})** y su respectiva **propiedad intensiva dentro del volumen de control (β)**

En su forma más general, para un **volumen de control móvil y deformable**:

$$\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho\beta d\forall + \int_{\text{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA \tag{3.4}$$

- El término a la izquierda representa la **tasa de cambio de B_{sys} en el sistema.**
- El primer término a la derecha representa la **tasa de cambio de β en el volúmen de control VC.**
- El segundo término a la derecha representa el **flujo de β a través de las fronteras del volúmen de control (VC)**



Notar que el rol de la normal a la superficie del volumen de control ($\hat{n}$) en la ecuación, que define un **valor positivo para flujos que salen del volúmen de control**, y un **valor negativo para los flujos que entran**.

Matemáticamente, el flujo neto de B en el volúmen de control:

$$\dot{B}_{\text{neto}} = \dot{B}_{\text{sale}} - \dot{B}_{\text{entra}} = \int_{\text{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA$$

3.3.3. Simplificaciones

Caso 1: Volumen de control fijo

$$\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\beta)d\forall + \int_{\text{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA \tag{3.5}$$

Caso 2: Flujo estacionario

$$\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \int_{\text{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA \tag{3.6}$$

Caso 3: Valores promedio en la entrada y salida

$$\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\beta)d\forall + \sum_{\text{sale}} \overline{\rho}\overline{\beta V}A - \sum_{\text{entra}} \overline{\rho}\overline{\beta V}A \tag{3.7}$$

En la última fórmula, el símbolo $\bar{b}$ representa el **valor promedio por área de una variable b:**

$$\bar{b} = \frac{1}{A}\int_{A} bdA \tag{3.8}$$

La aproximación es útil en muchas aplicaciones prácticas de ingeniería, donde solo se conocen valores promedios del flujo en base a mediciones.

3.4. Ecuación de conservación de masa

3.4.1. Formulación general

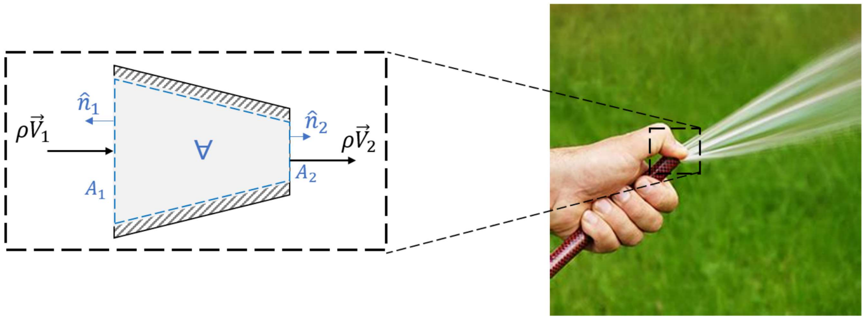
En el caso de la conservación de masa del sistema

$$\frac{d}{dt}m_{\text{sys}} = 0$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynold con $B_{\text{sys}} = m_{\text{sys}}$ y $\beta = 1$, deducimos la ecuación de **conservación de masa para un volúmen de control**:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{VC}} \rho d\forall + \int_{\mathrm{VC}} \rho \vec{V}\cdot\hat{n} dA \tag{3.9}$$

Lidiamos con la ecuación de conservación de masa a menúdo en nuestra vida cotidiana



Aplicando la ecuación de conservación de masa al ejemplo, tenemos:

$$0 = 0 + \rho V_2 A_2 - \rho V_1 A_1 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Debido a que $A_1 > A_2$, entonces:

$$V_2 > V_1$$

3.4.2. Variables relevantes

Aprovechamos esta ecuación para definir algunas variables relevantes:

Flujo másico ($\dot{m}$), se define como la tasa de cambio de la mása que cruza un área, matemáticamente:

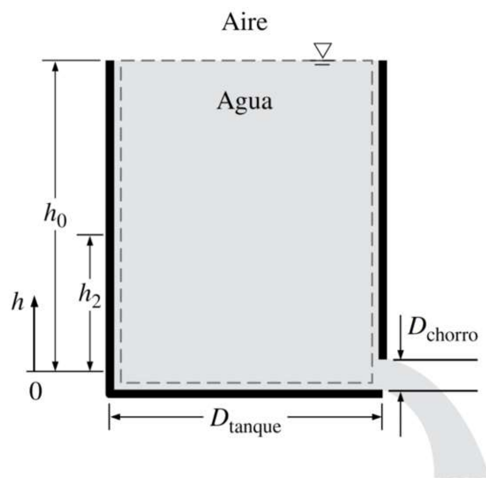
$$\begin{aligned} \dot{m} &= \int_A \rho\vec{V}\cdot\hat{n} dA \quad \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{fórmula general}) \\ \dot{m} &= \overline{\rho}\overline{V}A \quad \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{valores promedio}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Caudal (Q), se define como la tasa de cambio del volúmen de fluido que cruza un área, matemáticamente:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A \vec{V}\cdot\hat{n} dA \quad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{fórmula general}) \\ Q &= \overline{V}A \quad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{valores promedio}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

> El caudal se usa comúnmente en líquidos, debido a que son incompresibles (ρ no cambia).

3.4.3. Ejemplo



Un tanque cilíndrico abierto a la atmósfera está lleno con agua. Al quitar el tapón de descarga, la velocidad promedio a la salida es $V = \sqrt{2gh}$, donde h es el nivel instantáneo de agua en el tanque medida desde el centro del agujero, y g es la aceleración de gravedad. **Determíne el tiempo para que el nivel del agua descienda de h_0 hasta h_2.**

3.5. Referencias

Çengel Y. A. y Cimbala M. J. *Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones*, 4ta Ed., McGraw Hill, 2018

- Capitulo 4.1: Descripciones lagrangiana y euleriana
- Capítulo 4.6: Teorema de transporte de Reynolds
- Capítulo 5.2: Conservación de la masa

White F. M. *Mecánica de Fluidos*, 5ta Ed., McGraw Hill, 2004

- Capítulo 3.1: Leyes básicas de la mecánica de fluidos
- Capítulo 3.2: Teorema de transporte de Reynolds
- Capítulo 3.3: Conservación de masa