

Conservación de energía y pérdida de carga en ductos

Contents

- [4.1. Ecuación de conservación de energía](#)
- [4.2. Formulaciones prácticas](#)
- [4.3. Flujo laminar y turbulento](#)
- [4.4. Pérdida de carga](#)
- [4.5. Referencias](#)

4.1. Ecuación de conservación de energía

A partir del teorema de transporte de Reynolds, y considerando la propiedad intensiva de la energía, \tilde{e} , definida como la **energía por unidad de masa** (kJ/kg, por ejemplo), tenemos que la **ecuación de conservación de energía aplicada a un volumen de control** es:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \tilde{e} dV + \int_{VC} \rho \tilde{e} \vec{V} \cdot \hat{n} dA, \quad (\text{kW}) \quad (4.1)$$

donde:

- \dot{Q} , tasa de transferencia calor recibida por el sistema (kW)
- \dot{W} , tasa de trabajo (potencia) entregada por el sistema (kW)

4.1.1. Energía del fluido (\tilde{e})

Considera todas las formas de energía presentes en el fluido:

$$\tilde{e} = \tilde{e}_{\text{internal}} + \tilde{e}_{\text{cinética}} + \tilde{e}_{\text{potencial}} + \dots, \quad \left(\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right)$$

donde

- $\tilde{e}_{\text{internal}} = \tilde{u}$ (energía interna)
- $\tilde{e}_{\text{cinética}} = \frac{V^2}{2}$ (energía cinética)
- $\tilde{e}_{\text{potencial}} = gz$ (energía potencial)

V es la velocidad promedio del fluido, z es la altura medida desde un punto de referencia común, y g es la aceleración de gravedad.

4.1.2. Transferencia de calor (\dot{Q})

Energía asociada al calor transferido por diferencia de temperaturas.

Notar que $\dot{Q} < 0$ si el volumen de control pierde calor

4.1.3. Transferencia de trabajo (\dot{W})

Considera el trabajo entregado o recibido por el sistema.

Notar que $\dot{W} < 0$ si el sistema recibe trabajo.

Distinguimos tres formas principales de trabajo:

- **Trabajo de eje (\dot{W}_{eje})**, asociado al trabajo intercambiado con maquinarias, por ejemplo, trabajo de bombas ($\dot{W}_{\text{eje}} < 0$), turbinas ($\dot{W}_{\text{eje}} > 0$), ventiladores ($\dot{W}_{\text{eje}} < 0$), etc.
- **Trabajo por presiones ($\dot{W}_{\text{presión}}$)**, asociado al trabajo entregado por el fluido debido a los cambios de presión. Actúa solo en las fronteras del volumen de control:

$$\dot{W}_{\text{presión}} = \int_{VC} P(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

- **Trabajo por fuerzas viscosas ($\dot{W}_{\text{viscosas}}$)**, asociado a la disipación de energía por fricción como resultado de viscosidad del fluido ($\dot{W}_{\text{viscosas}} > 0$).

4.2. Formulaciones prácticas

La ecuación de la energía mostrada (4.1) no tiene mucho uso práctico en la ingeniería, debido a que los trabajos asociados a la presión y viscosidad están implícitos en la ecuación.

El primer paso es, entonces, determinar una expresión general que separe el trabajo de eje de otros. Una vez obtenida esta expresión, derivaremos otras expresiones prácticas para el análisis de problemas de ingeniería.

4.2.1. Forma general de la ecuación de conservación de energía

Aplicando las ecuaciones comentadas anteriormente, la ecuación de conservación de energía es:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\tilde{u} + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \int_{VC} \rho \left(\tilde{h} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA, \quad (\text{kW}) \quad (4.2)$$

donde $\tilde{h} = \tilde{u} + P/\rho$ es la **entalpía o energía de flujo del fluido**.

4.2.2. Otras formulaciones prácticas

A partir de la ecuación (4.2) podemos derivar otras relaciones prácticas

Caso 1: Conservación de energía mecánica (isotérmico y adiabático)

En este caso, $\dot{Q} = 0$ y la energía interna es constante. La ecuación de conservación de energía se simplifica a:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \int_{VC} \rho \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \vec{V} \cdot \hat{n} dA, \quad (\text{kW}) \quad (4.3)$$

Caso 2: Valores promedio a la entrada y salida + caso 1

$$-\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \sum_{\text{sale}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m} - \sum_{\text{entra}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}, \quad (\text{kW}) \quad (4.4)$$

Caso 3: Propiedades constantes dentro del V.C + caso 1 + caso 2

$$-\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} = \frac{d}{dt} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) \right] + \sum_{\text{sale}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m} - \sum_{\text{entra}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}, \quad (\text{kW}) \quad (4.5)$$

Caso 4: Problema estacionario + caso 1 + caso 2 + caso 3

$$-\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} = \sum_{\text{sale}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m} - \sum_{\text{entra}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}, \quad (\text{kW}) \quad (4.6)$$

Notar que estas fórmulas consideran algunos casos particulares. Otros casos basados en combinaciones de los casos expuestos, pueden ser fácilmente derivadas a partir de esta discusión.

4.2.3. Ecuación de conservación de energía para una línea de flujo

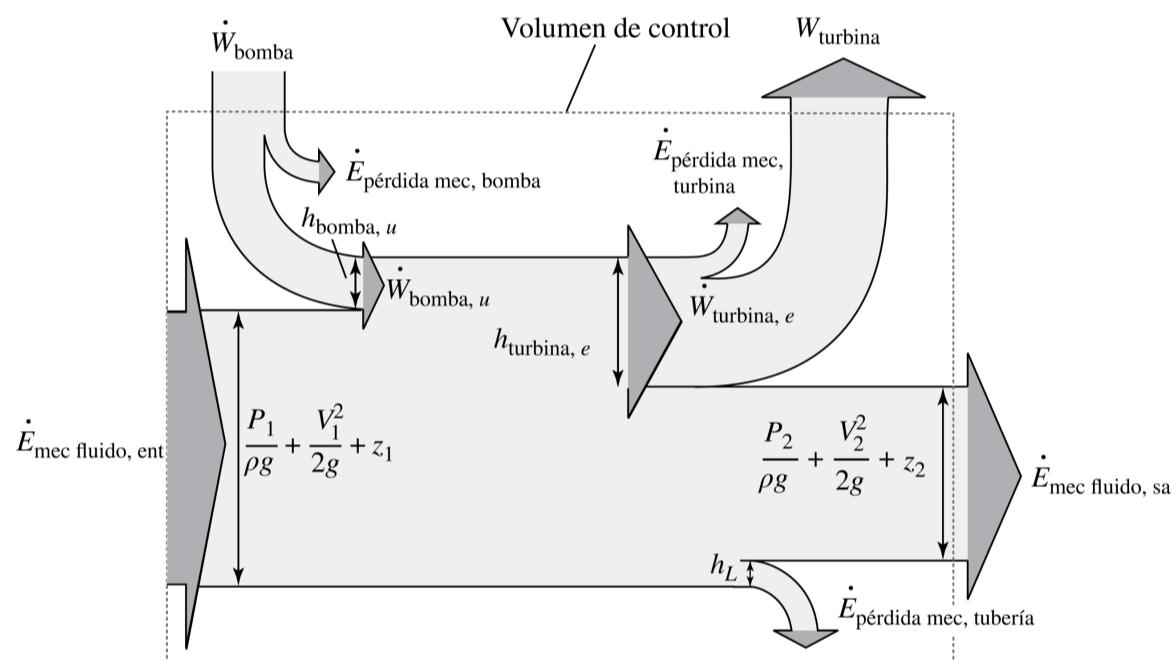
En base a los casos anteriores, y considerando **(1) flujo incompresible y (2) volumen de control con una única entrada y salida**, tenemos:

$$\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\text{sale}} + h_{\text{bomba}} = \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\text{entra}} + h_{\text{turbina}} + h_L, \quad (\text{m}) \quad (4.7)$$

donde $h_i = \frac{\dot{W}_i}{\rho V A}$, ($i = \text{bomba, turbina y } L$) es la **altura de presión equivalente** asociada a la energía transferida por una bomba, turbina o viscosidad, respectivamente.

El término h_L se conoce como la **pérdida de carga**, asociada al pérdida irreversible de energía mecánica por fricción y viscosidad.

La ecuación (4.7) representa forma más utilizada de la ecuación de conservación energía mecánica. Se expresa en forma de **alturas hidrostáticas**, ya que permite fácilmente identificar los cambios de presión en el ducto.

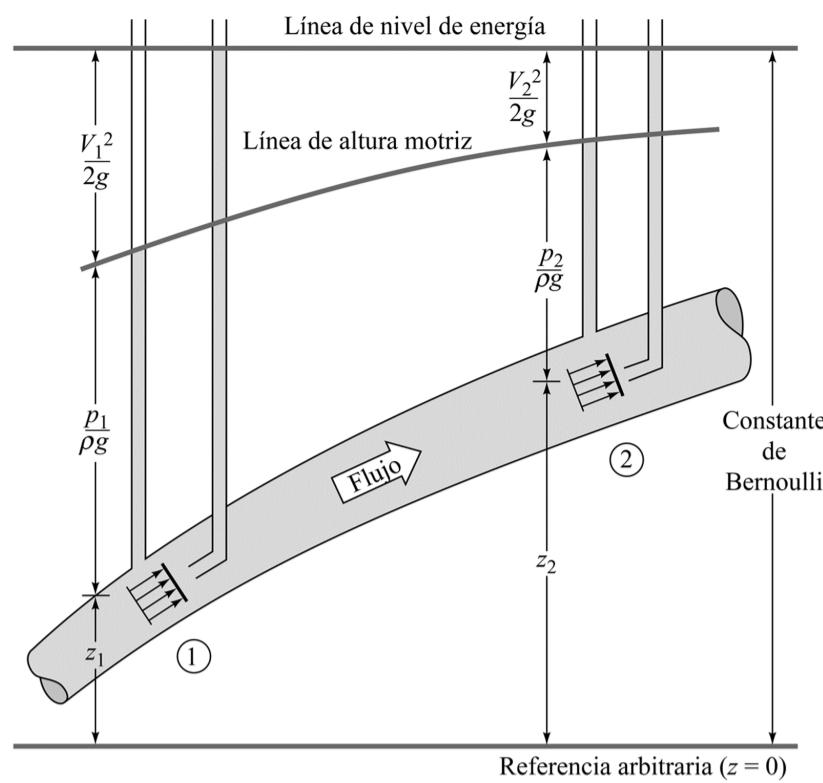


4.2.4. Ecuación de Bernoulli

Si aplicamos la ecuación anterior en un tramo de un ducto, donde $h_{\text{bomba}} = h_{\text{turbina}} = 0$, y asumimos **fluído ideal, es decir, sin fricciones por viscosidad** ($h_L = 0$), tenemos la **ecuación de Bernoulli**.

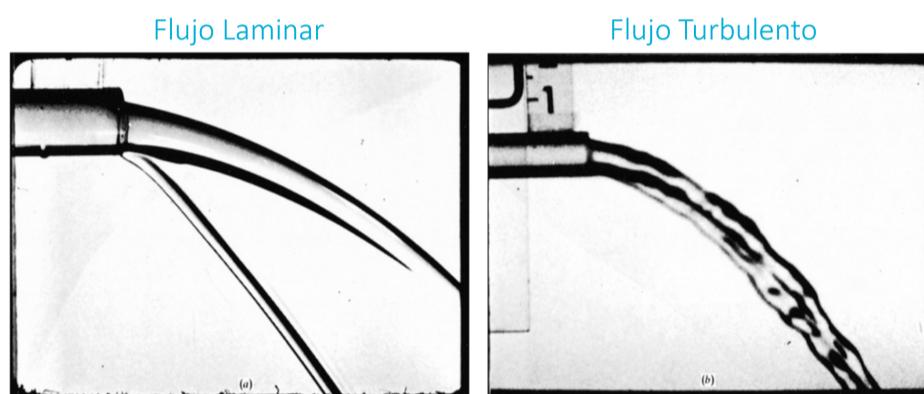
$$\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\text{sale}} = \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\text{entra}} \quad (4.8)$$

Esta ecuación, aunque tiene poco uso práctico, permite comprender en términos simples la conservación de energía en un fluido producto de los cambios de presión, velocidad y elevación.



4.3. Flujo laminar y turbulento

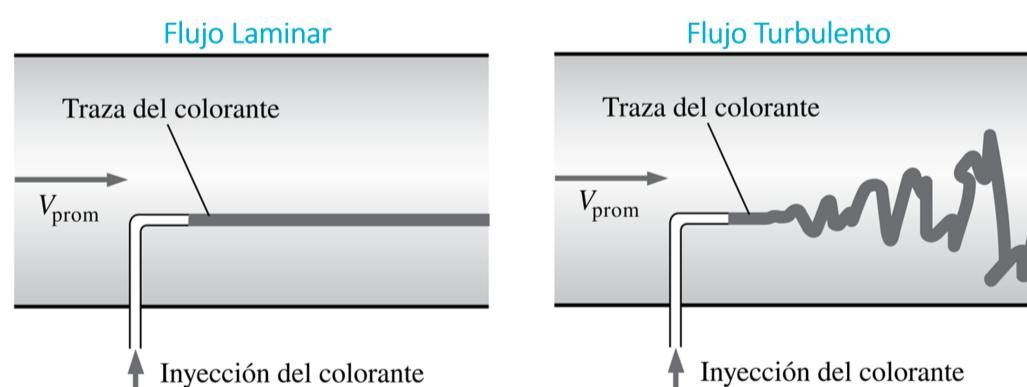
En la unidad introductoria mencionamos brevemente las características que diferencian un flujo laminar de uno turbulento



La principal diferencia entre ambos está dada por las fluctuaciones en las propiedades del flujo.

- **Flujo laminar:** flujo ordenado caracterizado por líneas suaves
- **Flujo turbulento:** flujo desordenado, caracterizado por fluctuaciones en torno a valores promedio

La mejor forma de visualizar esto es mediante el experimento diseñado por Osborne Reynolds. En este experimento, un tubo con colorante es introducido en el centro de un ducto transparente por donde fluye agua.



Las fluctuaciones inducidas por la turbulencia se manifiestan mediante la mezcla del colorante con el agua.

En el siguiente podemos ver el famoso experimento.

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('n175BGg9qdA', width=700, height=400)
```

Laminar Flow then Turbulent Flow



4.3.1. Número de Reynolds

Físicamente, las características de un flujo que definen si es laminar o turbulento son:

- Viscosidad dinámica
- Densidad
- Velocidad del flujo

La relación entre estos tres parámetros está dado por el **número de Reynolds**

$$\text{Re} = \frac{VL_c}{\nu} \quad (4.9)$$

donde $\nu = \mu/\rho$, (m^2/s) es la viscosidad cinemática y L_c es una longitud característica relativa al problema estudiado.

En el caso de flujo en ductos circulares de diámetro D , la longitud característica $L_c = D$.

La clasificación está dada por el siguiente criterio

$$\begin{aligned} \text{Re}_D &\lesssim 2300, & \text{Flujo laminar} \\ 2300 &\lesssim \text{Re}_D \lesssim 4000, & \text{Flujo en transición} \\ 4000 &\gtrsim \text{Re}_D & \text{Flujo turbulento} \end{aligned}$$

En el caso de ductos no circulares, utilizamos el **diámetro hidráulico**:

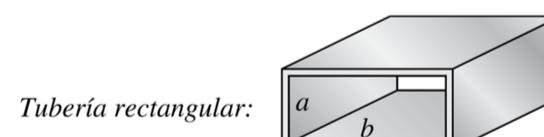
$$D_h = \frac{4A}{P_h} \quad (4.10)$$

donde **A es el área de la sección transversal del ducto** y **P_h es el perímetro mojado** (perímetro del ducto en contacto con el fluido).



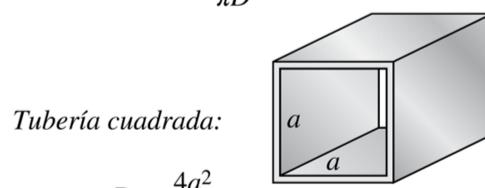
Tubería circular:

$$D_h = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$



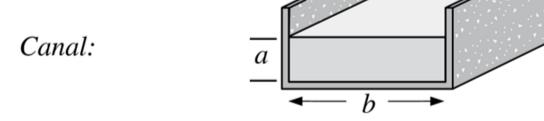
Tubería rectangular:

$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$



Tubería cuadrada:

$$D_h = \frac{4a^2}{4a} = a$$



Canal:

$$D_h = \frac{4ab}{2a+b}$$

4.4. Pérdida de carga

Podemos diferenciar dos grandes grupos para la pérdida de carga en sistemas de tuberías:

$$h_L = h_{L,\text{mayor}} + h_{L,\text{menor}} \quad (4.11)$$

Donde:

- $h_{L,\text{mayor}}$: **pérdidas mayores**, asociadas a pérdidas por fricción en la longitud del ducto
- $h_{L,\text{menor}}$: **pérdidas menores**, asociadas a pérdidas por fricción en singularidades, como: válvulas, codos, cambios de sección, etc.

El término "mayor" y "menor" no está directamente relacionado con la magnitud de cada pérdida. Es decir, es posible encontrar casos donde las pérdidas menores sean superiores a las mayores, y viceversa.

4.4.1. Pérdida de carga en la longitud (mayores)

Es posible demostrar que, para ductos circulares de diámetro D , la pérdida de carga entre dos puntos separados por una longitud L está dada por la **ecuación de Darcy-Weisbach**:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (\text{m}) \quad (4.12)$$

donde f es el **factor de fricción de Darcy**, y V es la velocidad promedio del flujo en el ducto

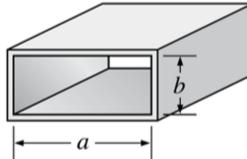
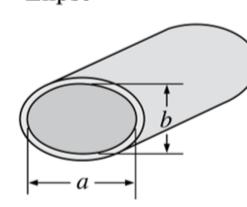
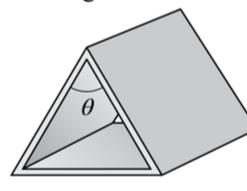
La fórmula para el factor de fricción depende de si el flujo es laminar o turbulento.

4.4.1.1. Factor de fricción para flujo laminar

En el caso de flujo laminar, el factor de fricción está dado por:

$$f = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad (4.13)$$

Para ductos no circulares, usamos las siguientes relaciones en función del diámetro hidráulico (D_h)

Geometría del tubo	a/b o θ°	Factor de fricción f
Rectángulo	a/b	
	1	56.92/Re
	2	62.20/Re
	3	68.36/Re
	4	72.92/Re
	6	78.80/Re
	8	82.32/Re
	∞	96.00/Re
Elipse	a/b	
	1	64.00/Re
	2	67.28/Re
	4	72.96/Re
	8	76.60/Re
	16	78.16/Re
Triángulo isósceles	θ	
	10°	50.80/Re
	30°	52.28/Re
	60°	53.32/Re
	90°	52.60/Re
	120°	50.96/Re

4.4.1.2. Factor de fricción para flujo turbulento

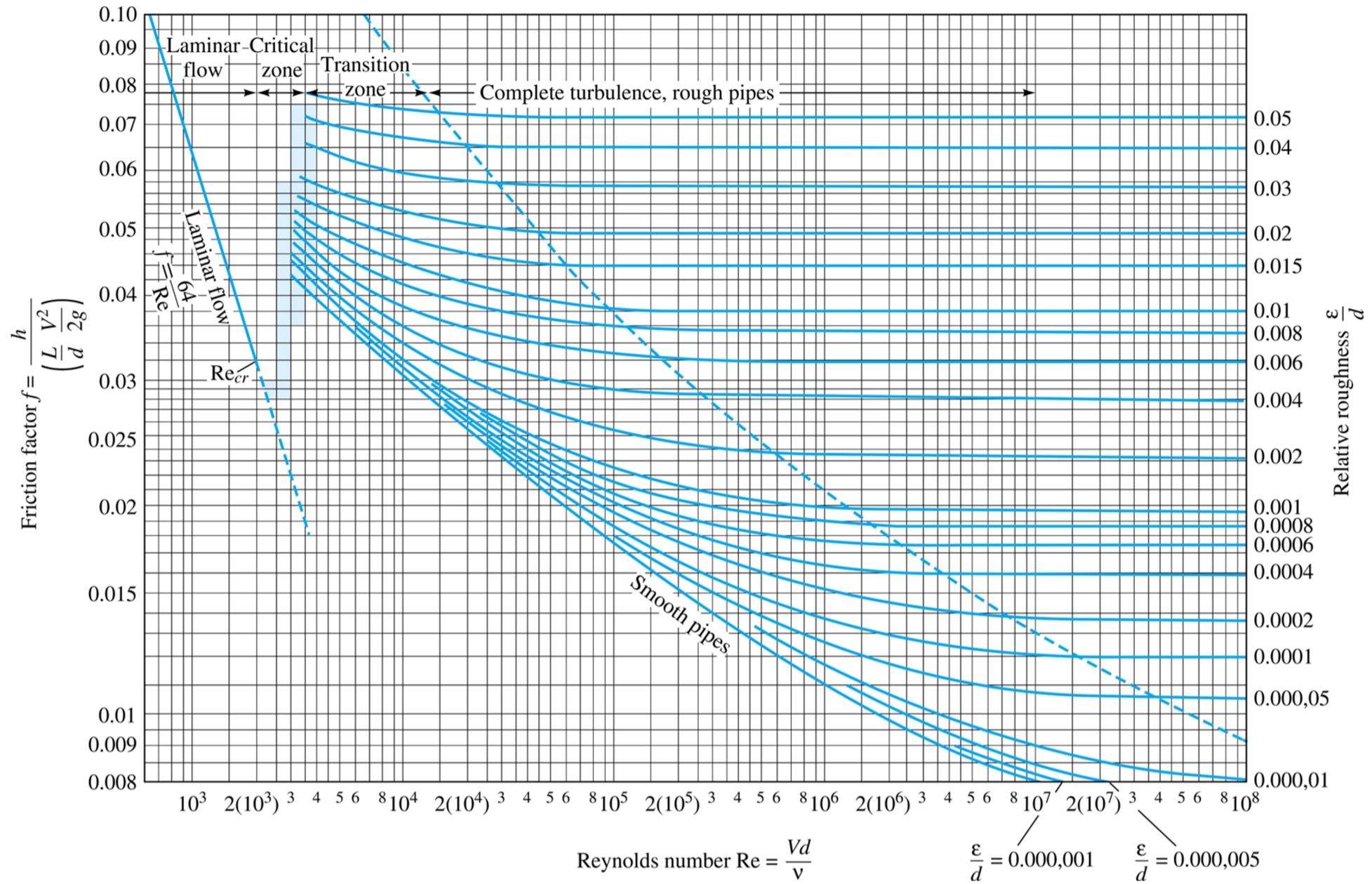
Para flujo en transición y turbulento, el factor de fricción depende de la rugosidad del ducto, ϵ . Esto porque *la inestabilidad del flujo será mayor cuando la rugosidad aumenta*.

El factor de fricción, así, depende de Re_D y la rugosidad relativa $\epsilon_R = \epsilon/D$, y se define por la **ecuación de Colebrook**:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon_R}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_D \sqrt{f}} \right)$$

Esta ecuación es no lineal y su solución, por lo tanto, requiere de métodos numéricos.

Una alternativa a la ecuación de Colebrook es el diagrama de Moody.



Otra alternativa es utilizar relaciones empíricas que expresan f de forma explícita, pero aproximada. Por ejemplo:

$$f = 0.25 \left[\log \left(\frac{\epsilon_R}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}_D^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad \text{Miller} \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\epsilon_R}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_D} \right] \quad \text{Haaland}$$

4.4.2. Pérdidas de carga por singularidades (menores)

Estas pérdidas están dadas por singularidades, tales como: cambios de sección en el flujo, cambios de dirección en codos, válvulas, etc.

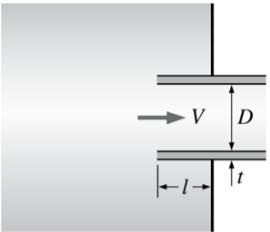
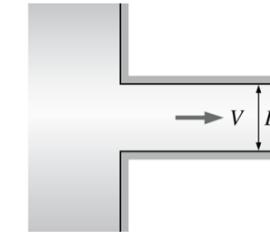
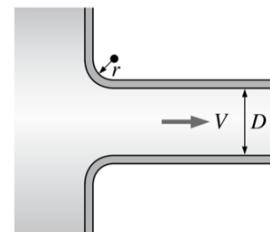
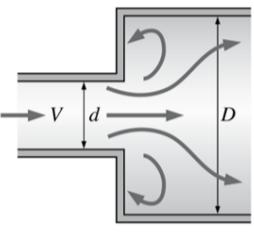
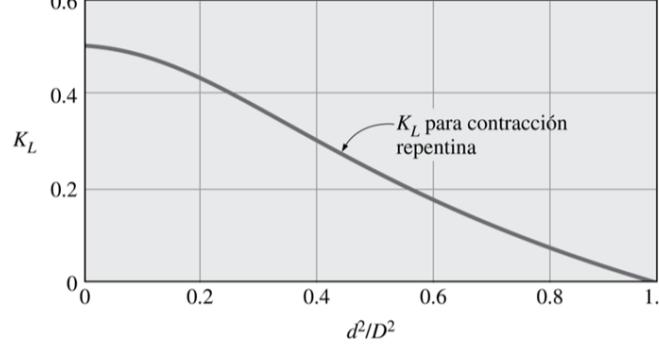
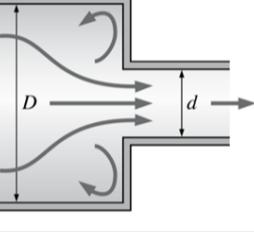
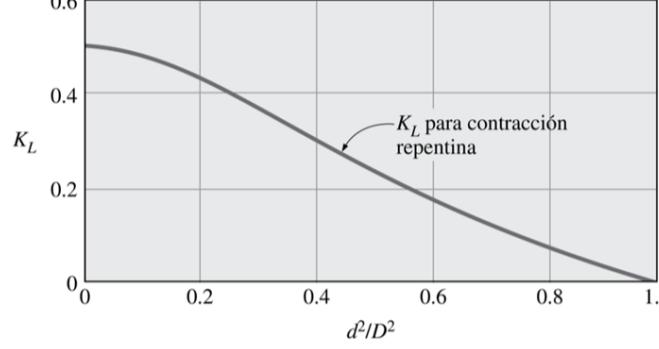
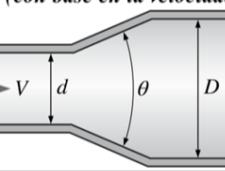
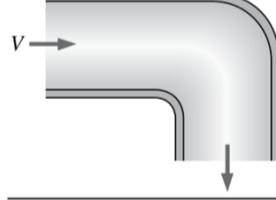
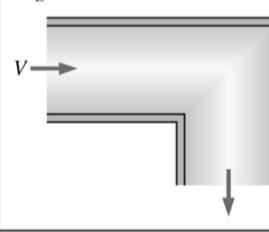
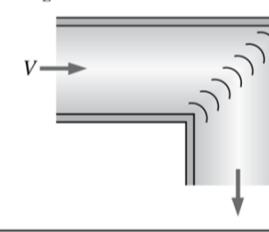
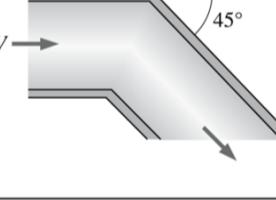
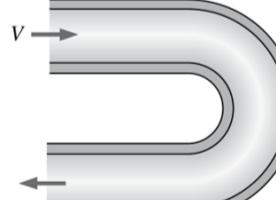
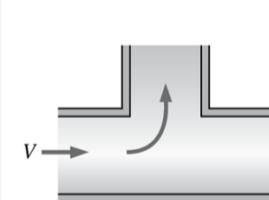
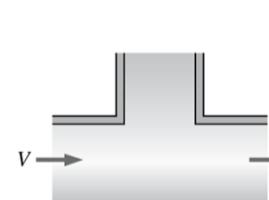
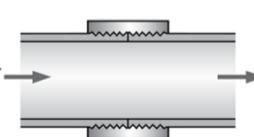
La relación universal es:

$$h_{L,\text{menores}} = \sum_i K_i \frac{V_i^2}{2g} \quad (4.15)$$

donde K_i y V_i son el coeficiente de pérdida y la velocidad en la singularidad i .

Notar que el valor de V_i depende del tipo de singularidad.

A continuación mostramos algunos ejemplos

Entrada de la tubería Reentrant: $K_L = 0.80$ ($t \ll D$ e $I \approx 0.1D$)	De borde agudo: $K_L = 0.50$	Redondeada ($r/D > 0.2$): $K_L = 0.03$ Ligeramente redondeada ($r/D = 0.1$): $K_L = 0.12$ (véase figura 8-40)
		
Nota: el factor de corrección de energía cinética es $\alpha = 2$ para flujo laminar totalmente desarrollado, y $\alpha \approx 1.05$ para flujo turbulento totalmente desarrollado.		
Expansión y contracción repentina (con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)		
Expansión repentina: $K_L = \alpha \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$		 K_L para contracción repentina
Contracción repentina: ver gráfica.		 K_L para expansión repentina
Expansión y contracción gradual (con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)		
Expansión: (para $\theta = 20^\circ$): $K_L = 0.30$ para $d/D = 0.2$ $K_L = 0.25$ para $d/D = 0.4$ $K_L = 0.15$ para $d/D = 0.6$ $K_L = 0.10$ para $d/D = 0.8$		Contracción $K_L = 0.02$ para $\theta = 30^\circ$ $K_L = 0.04$ para $\theta = 45^\circ$ $K_L = 0.07$ para $\theta = 60^\circ$
Codos y ramificaciones		
Codo suave de 90°: Embridado: $K_L = 0.3$ Roscado: $K_L = 0.9$	Codo esquinado de 90° (sin álabes directores): $K_L = 1.1$	Codo esquinado de 90° (con álabes directores): $K_L = 0.2$
		
Codo rosulado de 45°: $K_L = 0.4$		
		
Codo de retorno de 180°: Embridado: $K_L = 0.2$ Roscado: $K_L = 1.5$	Conexión en T (flujo deriv.): Embridado: $K_L = 1.0$ Roscado: $K_L = 2.0$	Conexión en T (flujo en línea): Embridado: $K_L = 0.2$ Roscado: $K_L = 0.9$
		
Válvulas Válvula de globo, totalmente abierta: $K_L = 10$ Válvula de ángulo, totalmente abierta: $K_L = 5$ Válvula de bola, totalmente abierta: $K_L = 0.05$ Válvula de charnela: $K_L = 2$		Válvula de compuerta, totalmente abierta: $K_L = 0.2$ $\frac{1}{4}$ cerrada: $K_L = 0.3$ $\frac{1}{2}$ cerrada: $K_L = 2.1$ $\frac{3}{4}$ cerrada: $K_L = 17$
		

4.5. Referencias

Çengel Y. A. y Cimbala M. J. *Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones*, 4ta Ed., McGraw Hill, 2018

- Capítulo 5: Ecuaciones de Bernoulli y de la energía
- Capítulo 8: Flujo en tuberías

White F. M. *Mecánica de Fluidos*, 5ta Ed., McGraw Hill, 2004

- Capítulo 3.6: Ecuación de la energía
- Capítulo 3.7: Flujo sin fricción: La ecuación de Bernoulli
- Capítulo 6: Flujo viscoso en conductos

By Francisco V. Ramirez-Cuevas

© Copyright 2022.