Introducción a la dinámica de fluidos

Contents

3.1. Sistema y volúmen de control

3.1.1. Sistema

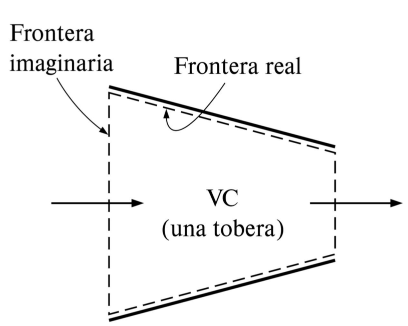
Definimos como **sistema** a una *cantidad de materia de masa fija elegida para el estudio*

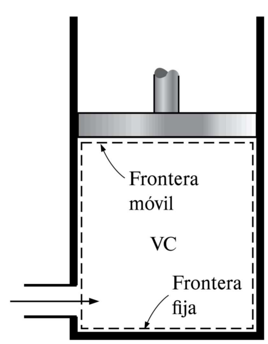
En general, para el estudio de **sólidos**, la definición de sistema es sencilla, ya que este considera la interacción del cuerpo con las fuerzas externas.

Sin embargo, en el caso de **fluidos**, la definición no es tan sensilla ya que el sistema ocupa un espacio infinito.

3.1.2. Volumen de control

Para estudiar dinámica de fluidos utilizamos el **volúmen de control**, *una región imagniaria en el espacio para analizar la dinámica de fluidos.*

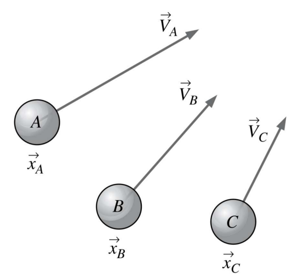




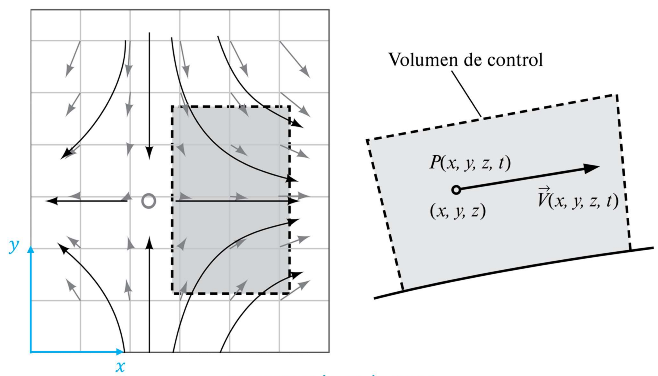
> **Nota.** Las frontera de un volumen de control pueden ser permeables o impermeables, móbiles o fijas.

3.2. Descripción lagrangiana y euleriana

- **Descripción lagrangiana** consiste en hacer un seguimiento de las partículas materiales. Este enfoque es comúnmente utilizado en dinámica de sólidos.
- **Descripción euleriana** consiste en medir lo que pasa en puntos fijos del espacio. Este enfoque es comúnmente utilizado en dinámica de sólidos.



Descripción Lagrangiana



Descripción Euleriana

En el análisis lagrangiano se rastrea la *trayectoria y la velocidad de cada sistema,* las cuales dependen del tiempo (t), únicamente. Por ejemplo, considerando un sistema con múltiples objetos $A, B, C, \cdots$

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_A(t), \vec{x}_B(t), \vec{x}_C(t), \cdots & \text{Trayectoria} \\ \vec{V}_A(t), \vec{V}_B(t), \vec{V}_C(t), \cdots & \text{Velocidad} \end{array}$$

En el análisis euleriano se definen *variables de campo*, es decir, variables en funcion del tiempo y del espacio dentro del volumen de control (x, y, z). Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} P(x, y, z, t) & \text{Campo de presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Campo de densidad} \\ \vec{V}(x, y, z, t) & \text{Campo de velocidad} \end{array}$$

Notar que P y ρ son un **campo escalar *(valor escalar que cambia en el espacio)***, mientras que $\vec{V}$ es un **campo vectorial *(vector cuya magnitud y dirección cambia en el espacio)***

Así, $\vec{V}$ se puede desarrollar, por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\ \hat{x} + v(x, y, z, t)\ \hat{y} + w(x, y, z, t)\ \hat{z} \tag{3.1}$$

donde u, v y w son las componentes de la velocidad e direcciones x, y y z, respectivamente.

3.3. Teorema de transporte de Reynolds (TTR)

3.3.1. Leyes de conservación aplicadas a un sistema

Consideremos algunas **leyes de conservación fundamentales** aplicadas a un sistema:

- Masa (m_{sys}),

$$\frac{d}{dt}m_{\mathrm{sys}} = 0$$

- Momento lineal $(m\vec{V})_{\mathrm{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V})_{\mathrm{sys}} = \vec{F}_{\mathrm{neta}}$$

- Momento angular $(\vec{r} \times m\vec{V})_{\mathrm{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V})_{\mathrm{sys}} = \vec{M}_{\mathrm{neto}}$$

- Energía $E_{\mathrm{sys}} = (m\tilde{e})_{\mathrm{sys}}$,

$$\frac{d}{dt}(m\tilde{e})_{\mathrm{sys}} = \dot{Q} - \dot{W}$$

donde $\vec{F}_{\mathrm{neta}}$ y $\vec{M}_{\mathrm{neto}}$ son, respectivamente, *la fuerza y torque aplicado sobre el sistema*, $\tilde{e}$ es la *energía específica (energía por unidad de masa)*, $\dot{Q}$ es la *tasa de transferencia de calor*, y $\dot{W}$ es *potencia*.

En cada ley de conservación notamos que hay una ***propiedad extensiva (por ejemplo,* E_{sys}*)***, y una ***propiedad intensiva (por ejemplo,* $\tilde{e}_{\mathrm{sys}} = E_{\mathrm{sys}}/m_{\mathrm{sys}}$*)***

3.3.2. Formulación general

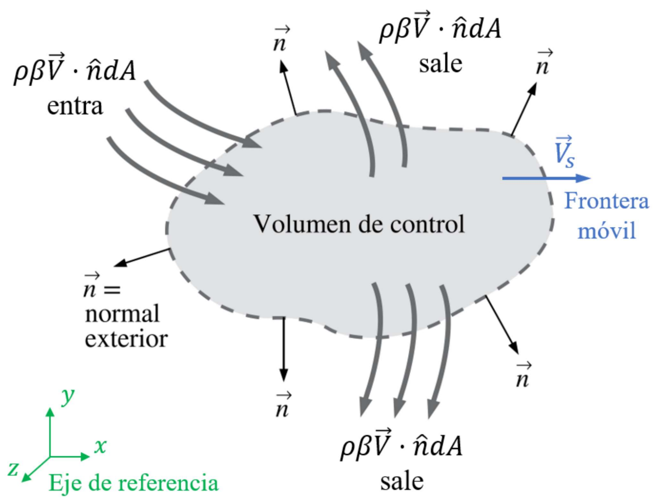
El **teorema de transporte de Reynolds** establece una relación entre la **variación temporal de una propiedad extensiva del sistema (**B_{sys}**)** y su respectiva **propiedad intensiva dentro del volumen de control (**β**)**

En su forma más general, para un **volumen de control móvil y deformable**:

$$\frac{d}{dt}B_{\mathrm{sys}} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{VC}} \rho\beta d\forall + \int_{\mathrm{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA \tag{3.2}$$

- El término a la izquierda representa la **tasa de cambio de** B_{sys} **en el sistema.**

- El primer término a la derecha representa la **tasa de cambio de β en el volúmen de control VC.**
- El segundo término a la derecha representa el **flujo de β a través de las fronteras del volúmen de control (VC)**
- **$\vec{V}$ es la *velocidad relativa* del flujo que cruza la frontera del volúmen de control,** respecto de la velocidad de la frontera$\vec{V}_s$.



Notar que el rol de la normal a la superficie del volumen de control ($\hat{n}$) en la ecuación, que define un **valor positivo para flujos que salen del volúmen de control**, y un **valor negativo para los flujos que entran**.

Matemáticamente, el flujo neto de la propiedad B en el volúmen de control:

$$\dot{B}_{\text{neto}} = \dot{B}_{\text{sale}} - \dot{B}_{\text{entra}} = \int_{\mathrm{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA$$

3.3.3. Formulación simplificada

En muchas aplicaciones prácticas de ingeniería solo se conocen valores promedios del flujo, obtenidos a través de mediciones. En estos casos, las siguientes aproximaciones son útiles:

- **Propiedades approximadamente uniformes dentro del volúmen de control**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{VC}} \rho\beta d\forall \approx \frac{d}{dt}(\rho\beta\forall) \tag{3.3}$$

- **Valores promedio en la entrada y salida**

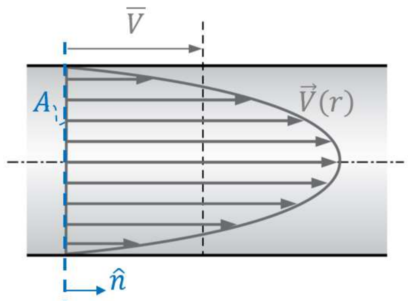
$$\int_{\mathrm{VC}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}dA \approx \sum_{\text{sale}} \overline{\rho}\overline{\beta}\,\overline{V}A - \sum_{\text{entra}} \overline{\rho}\overline{\beta}\,\overline{V}A \tag{3.4}$$

donde $\bar{\beta}$ y $\bar{\rho}$ representan, respectivamente, el **valor promedio por área de la propiedad intensiva β y de la densidad ρ**

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{1}{A}\int_A \beta dA \\ \bar{\rho} &= \frac{1}{A}\int_A \rho dA, \end{aligned} \tag{3.5}$$

y $\overline{V}$ es la **velocidad promedio respecto al área A**

$$\overline{V} = \frac{1}{A}\int_A \vec{V}\cdot\hat{n} dA. \tag{3.6}$$



A partir de estas aproximaciones deducimos la formulación simplificada del teorema de transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \frac{d}{dt}(\rho\beta\forall) + \sum_{\text{sale}} \overline{\rho}\overline{\beta}\,\overline{V}A - \sum_{\text{entra}} \overline{\rho}\overline{\beta}\,\overline{V}A \tag{3.7}$$

3.4. Ecuación de conservación de masa

3.4.1. Formulación general

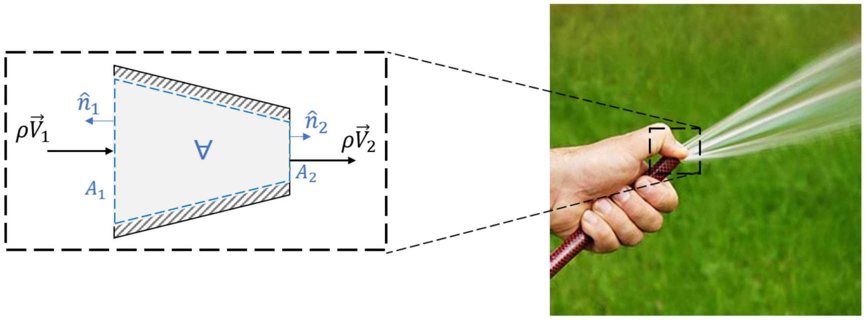
En el caso de la conservación de masa del sistema

$$\frac{d}{dt}m_{\text{sys}} = 0$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynold con $B_{\text{sys}} = m_{\text{sys}}$ y $\beta = 1$, deducimos la ecuación de **conservación de masa para un volúmen de control**:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho d\forall + \int_{\text{VC}} \rho\vec{V}\cdot\hat{n} dA \tag{3.8}$$

Lidiamos con la ecuación de conservación de masa a menúdo en nuestra vida cotidiana



Aplicando la ecuación de conservación de masa al ejemplo, tenemos:

$$0 = 0 + \rho V_2 A_2 - \rho V_1 A_1 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Debido a que $A_1 > A_2$, entonces:

$$V_2 > V_1$$

3.4.2. Variables relevantes

Aprovechamos esta ecuación para definir algunas variables relevantes:

Caudal (Q), se define como la tasa de cambio del volúmen de fluido que cruza un área, matemáticamente:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{fórmula general}) \\ Q &= \overline{V} A \quad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{valores promedio}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Flujo másico ($\dot{m}$), se define como la tasa de cambio de la mása que cruza un área, matemáticamente:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{fórmula general}) \\ \dot{m} &= \overline{\rho} \overline{V} A = \rho Q \quad \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right) \quad (\text{valores promedio}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si aplicamos esto considerando valores promedio y que la densidad dentro del volúmen de controle es uniforme, tenemos la siguiente expresión para la ecuación de conservación de masa:

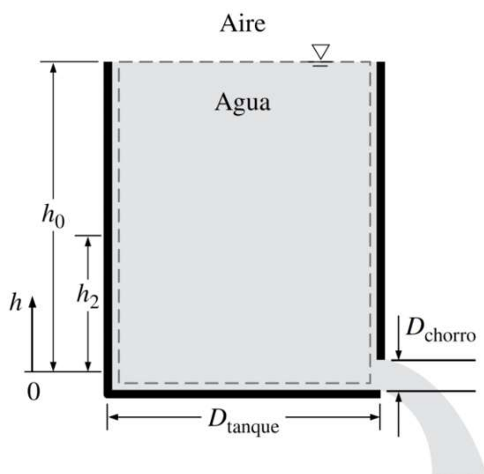
$$0 = \frac{d}{dt} \rho \forall + \sum_{\text{sale}} \dot{m} - \sum_{\text{entra}} \dot{m} \tag{3.11}$$

En el caso de un fluido incompresible:

$$0 = \frac{d}{dt}\forall + \sum_{\text{sale}} Q - \sum_{\text{entra}} Q \tag{3.12}$$

3.4.3. Ejemplo

Un tanque cilíndrico abierto a la atmósfera está lleno con agua. Al quitar el tapón de descarga, la velocidad promedio a la salida es $V = \sqrt{2gh}$, donde h es el nivel instantáneo de agua en el tanque medida desde el centro del agujero, y g es la aceleración de gravedad. **Determíne el tiempo para que el nivel del agua descienda de h_0 hasta h_2.**



3.5. Ecuación de conservación de momentum lineal

3.5.1. Formulación general

Según la ley de Newton, la **ecuación de conservación de momento lineal,** es:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V})_{\text{sys}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

donde $\vec{F}_{\text{ext}}$ representa la fuerza externa neta sobre el sistema.

Aplicamos el teorema de transporte de Reynolds considerando:

- Propiedad intensiva del momento lineal, $\beta = \vec{V}$
- Conservación de momento lineal aplicado al sistema $\frac{d}{dt}B_{\text{sys}} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_{\text{sys}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$.

La **ecuación de conservación de momento lineal para un V.C.** es:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho \vec{V} d\forall + \int_{\text{VC}} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})dA \tag{3.13}$$

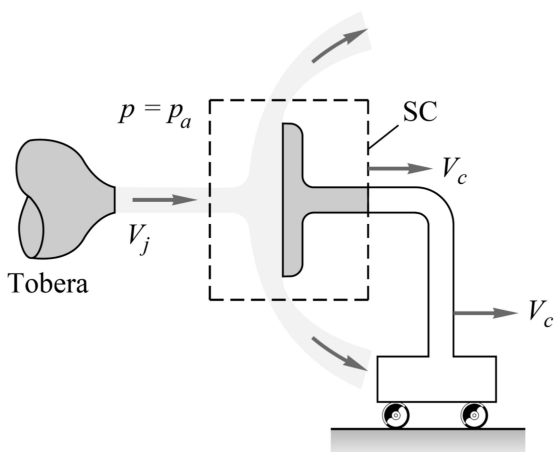
la suma de fuerzas externas aplicadas en un V.C. es igual a la tasa de cambio de momento lineal dentro del V.C. y al balance de momento lineal en la entrada y salida del V.C.

Si aplicamos esto considerando valores promedio y que la densidad dentro del volúmen de controle es uniforme, tenemos la siguiente expresión para la ecuación de conservación de masa:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\rho\vec{V}\forall + \sum_{\text{sale}} \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{entra}} \dot{m}\vec{V} \tag{3.14}$$

3.5.2. Ejemplo

Un chorro de agua de velocidad V_j incide perpendicularmente a una placa plana que se mueve hacia la derecha a velocidad V_c. **Calcule la fuerza necesaria para mantener la placa en movimiento a velocidad constante si la densidad del chorro es $1000\,\mathrm{kg/m^3}$, la sección del chorro es $3\,\mathrm{cm}^2$ y V_j y V_c son 20 y $15\,\mathrm{m/s}$, respectivamente.** *Desprecie el peso del chorro y de la placa y suponga que el chorro se divide en dos chorros iguales, uno hacia arriba y otro hacia abajo.*



3.6. Referencias

Çengel Y. A. y Cimbala M. J. *Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones*, 4ta Ed., McGraw Hill, 2018

- Capitulo 4.1: Descripciones lagrangiana y euleriana
- Capítulo 4.6: Teorema de transporte de Reynolds
- Capítulo 5.2: Conservación de la masa
- Capítulo 6.1: Leyes de Newton

- Capítulo 6.4: La ecuación de conservación de la canrtidad de movimiento lineal

White F. M. *Mecánica de Fluidos*, 5ta Ed., McGraw Hill, 2004

- Capítulo 3.1: Leyes básicas de la mecánica de fluidos
- Capítulo 3.2: Teorema de transporte de Reynolds
- Capítulo 3.3: Conservación de masa
- Capítulo 3.4: Conservación de cantidad de movimiento

By Francisco V. Ramirez-Cuevas