

Scattering electromagnético

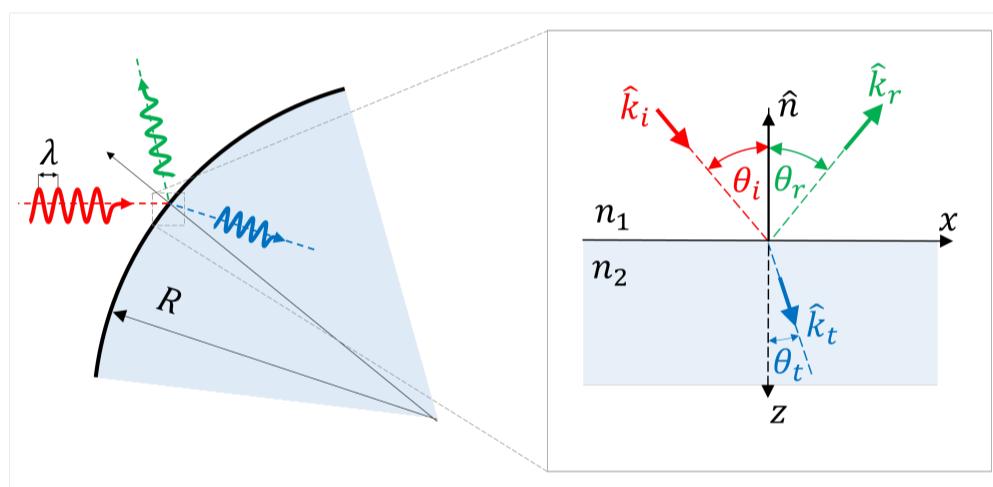
Contents

- 4.1. Interacción de luz según el tamaño de un cuerpo
- 4.2. Scattering en esferas (solución de Mie)
- 4.3. Análisis de scattering
- 4.4. Referencias

4.1. Interacción de luz según el tamaño de un cuerpo

Hasta el momento hemos analizado las ecuaciones de Maxwell y condiciones de borde en coordenadas cartesianas. Estas relaciones se aplican a interfaces rectas.

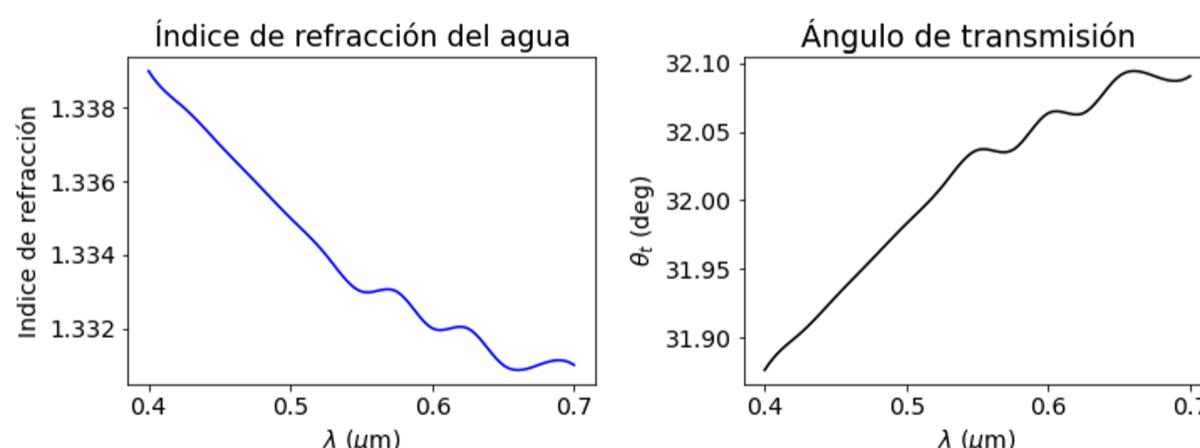
En el caso de cuerpos curvos, los coeficientes de Fresnel y otras fórmulas relacionadas aún son aplicables, siempre y cuando el radio de curvatura del cuerpo $R \gg \lambda$



4.1.1. Interacción de luz con cuerpos grandes

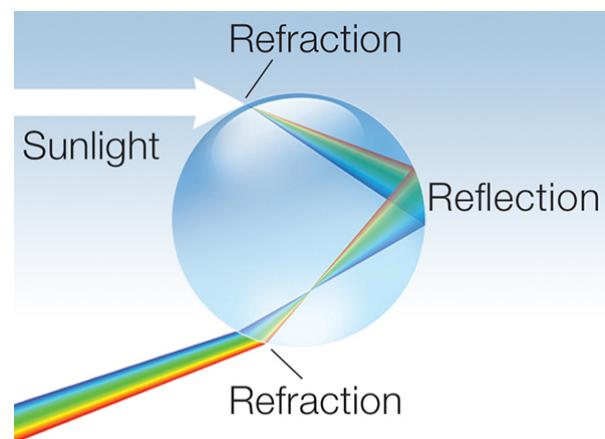
A través de este principio podemos explicar la separación de colores en un arcoíris.

Primero, es importante notar que el índice de refracción del agua en el espectro visible no es constante. Este índice tiene un pequeño grado de dispersión, y decrece a medida que la longitud de onda crece. Así, a partir de la ley de Snell, el ángulo de transmisión de cada onda (o color), crece proporcional a la longitud de onda.



Este fenómeno produce que las ondas se separen en el espacio en función de su longitud de onda.

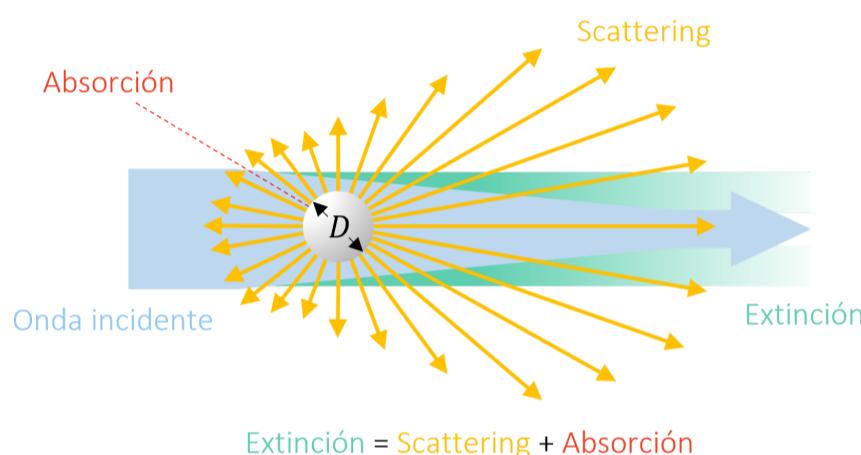
En una gota de agua, el efecto de separación de colores se magnifica a medida que la luz se refleja en el interior



4.1.2. Interacción de luz con cuerpos pequeños

Cuando las dimensiones del cuerpo, D , son comparables a la longitud de onda, el radio de curvatura se hace significativo y las soluciones de las ecuaciones de Maxwell para una interface plana no son aplicables

En este caso, se produce el fenómeno de **scattering de luz** asociado a la dispersión (o esparcimiento) de luz en múltiples direcciones. Además del scattering, tenemos el fenómeno de **absorción de luz** asociada con la porción de la energía incidente absorbida por el objeto. Por último, llamamos **extinción de luz** a la suma de la energía de scattering y absorción.



El efecto scattering se presenta cada vez que tenemos material particulado y, por lo tanto, es común en ambientes con polvo o neblina. El siguiente video explica el fenómeno de forma visual, y muestra como el scattering explica el haz de luz producido por un láser rojo cuando interactúa con partículas pequeñas dispersas en agua.

[Scattering of light & Tyndall effect](#)

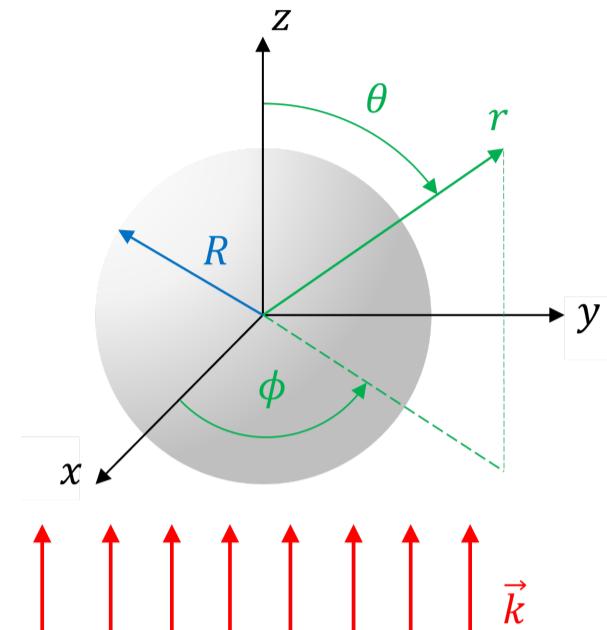


4.2. Scattering en esferas (solución de Mie)

La solución analítica para predecir el efecto de scattering y absorción en esferas, desarrollada por Gustav Mie, se ha convertido en la principal referencia para entender este fenómeno.

La fórmula es derivada a partir de la solución de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas esféricas, y permite describir con presión la **dependencia del scattering y absorción respecto a las propiedades ópticas de la partícula y el medio circundante, así como el efecto del diámetro de la partícula**.

Consideremos el modelo simple una onda electromagnética interactuando con una esfera de radio R y diámetro D tal que $D/\lambda \sim 1$



Llamaremos al índice de refracción de la esfera N_p , y al índice de refracción del exterior N_h .

En este caso asumimos que el índice de refracción del exterior no tiene componente compleja, es decir $N_h = n_h$

El espacio está definido en coordenadas esféricas, donde:

- θ : ángulo cenital
- ϕ : ángulo azimutal
- r : posición radial

La solución se basa una expansión en serie de ondas esféricas $\vec{M}_{lm}(r, \theta, \phi)$ y $\vec{N}_{lm}(r, \theta, \phi)$ (más información en las referencias).

Por ejemplo, la componente del campo eléctrico correspondiente al scattering, \vec{E}_{sca} es:

$$\vec{E}_{\text{sca}}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \text{Im} \left[E_0 \frac{2l+1}{l(l+1)} i^l \left(a_l \vec{N}_{l1}^{(3)} - b_l \vec{M}_{l1}^{(3)} \right) \right]$$

donde los coeficientes a_l y b_l están dados por las funciones de Riccati-Bessel, $\psi(x)$ y $\xi(x)$, en la forma:

$$a_l = \frac{p\psi_l(px)\psi'_l(x) - \psi_l(x)\psi'_l(px)}{p\psi_l(px)\xi'_l(x) - \xi_l(x)\psi'_l(px)}, \quad b_l = \frac{\psi_l(px)\psi'_l(x) - p\psi_l(x)\psi'_l(px)}{\psi_l(px)\xi'_l(x) - p\xi_l(x)\psi'_l(px)},$$

donde $x = n_h k_0 R$, y $p = N_p / n_h$.

El campo magnético está dado por $\vec{H}_{\text{sca}} = \frac{n_h}{Z_0} (\hat{k} \times \vec{E}_{\text{sca}})$.

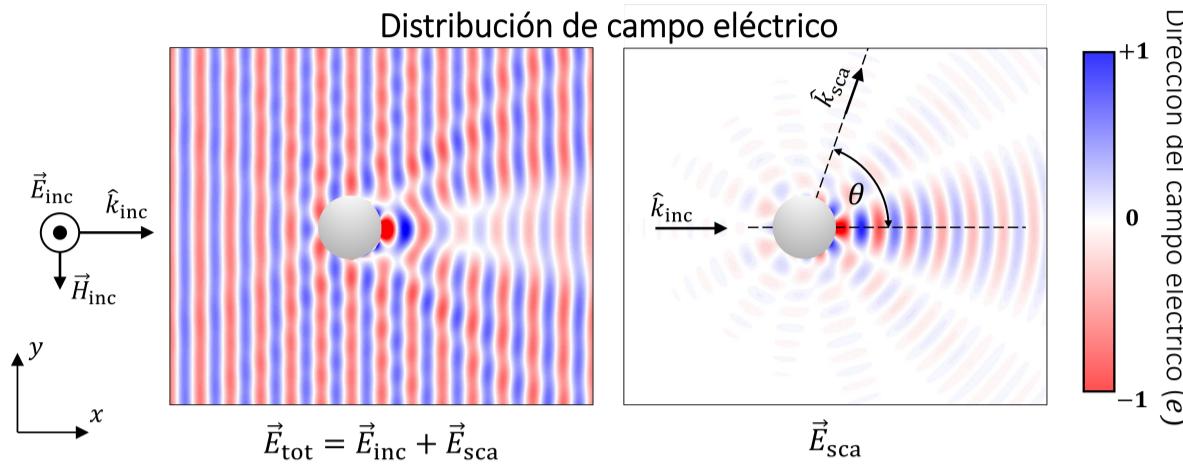
A partir de la solución de Mie, deducimos que la intensidad y distribución del scattering electromagnético depende de dos parámetros:

- $x = n_h k_0 R \approx D/\lambda_h$, que representa la proporción entre el tamaño de la partícula (D) y la longitud de onda en el medio circundante ($\lambda_h = \lambda_0/n_h$)
- $px = N_p k_0 R \approx D/\lambda_p$ que representa la proporción entre el tamaño de la partícula y la longitud de onda dentro de la partícula ($\lambda_p = \lambda_0/n_p$).

4.2.1. Distribución del campo eléctrico

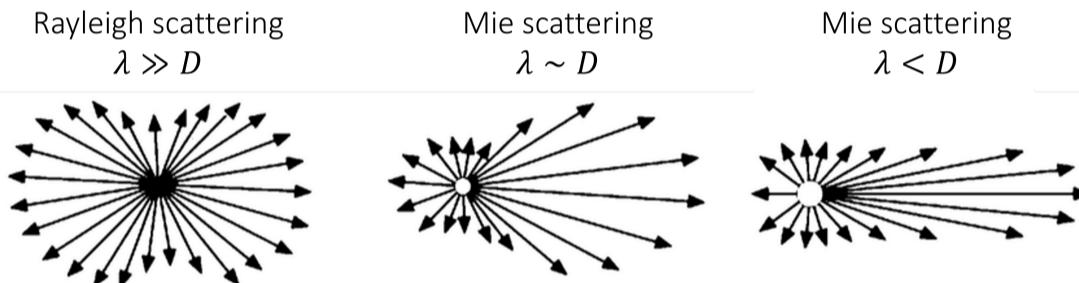
A partir de esta solución, podemos visualizar la distribución del campo eléctrico durante el fenómeno de scattering.

La siguiente figura representa el scattering electromagnético a partir de la solución de Mie. La dirección de la onda incidente es $\hat{k}_{\text{inc}} = \hat{x}$, con el campo eléctrico polarizado en dirección $\hat{e} = \hat{z}$. En la figura de la izquierda mostramos la distribución del campo eléctrico total, es decir el campo eléctrico incidente (\vec{E}_{inc}) y de scattering (\vec{E}_{sca}). En la figura de la derecha, hemos removido \vec{E}_{inc} para poder visualizar \vec{E}_{sca} .



Utilizando la dirección de la onda incidente como referencia, podemos ver que la intensidad del scattering es mayor hacia adelante ($\theta = 0^\circ$) y decrece a medida de θ aumenta. Debido a la simetría axial, el scattering no varía en ϕ .

En general, la distribución del scattering depende del tamaño de la partícula en relación la longitud de onda.

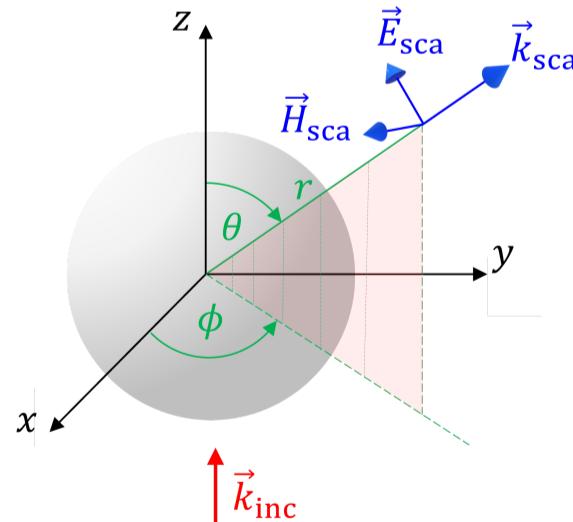


Particularmente, cuando $D/\lambda \ll 1$, se denomina Rayleigh scattering. En este caso el campo scattering está distribuido uniformemente alrededor de la partícula

4.2.2. Flujo de energía

Al igual que con el estudio de reflexión y transmisión, la solución \vec{E}_{sca} nos permite determinar el vector de Poynting asociado a scattering, $\langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E}_{\text{sca}} \times \vec{H}_{\text{sca}}^*) [\text{W/m}^2]$.

Notar que, en general, $\langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle$ varía según θ , ϕ y r .



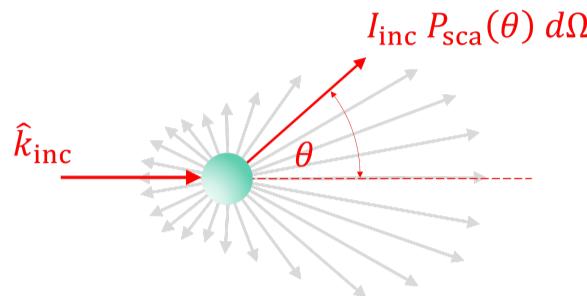
La potencia neta por scattering, W_{sca} se obtiene integrando $\langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle$ sobre la superficie de la esfera:

$$\begin{aligned} W_{\text{sca}} &= \oint_S \langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle \cdot \hat{r} dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle \cdot \hat{r}] R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \Phi_{\text{inc}} 2\pi \int_0^\pi P_{\text{sca}}(\theta) \sin \theta d\theta \quad [\text{W}] \end{aligned}$$

donde $\Phi_{\text{inc}} = \frac{n_h E_0}{2Z_0}$ [W/m²] es el flujo de energía o intensidad de la onda incidente, y $P_{\text{sca}}(\theta) = \frac{R^2}{\Phi_{\text{inc}}} \left[\langle \vec{S}_{\text{sca}} \rangle \cdot \hat{r} \right]$, es la **función de distribución de scattering o función de fase**.

La función de fase se define como la **energía de scattering por unidad de ángulo sólido** $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ **relativo al flujo de energía de la onda incidente**, Φ_{inc} .

En otras palabras, para una onda incidente con intensidad Φ_{inc} , la energía de scattering en dirección θ es $\Phi_{\text{inc}} P_{\text{sca}}(\theta) d\Omega$



Mediante un proceso similar, podemos determinar la potencia extinguida, W_{ext} , a partir del campo total $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{inc}} + \vec{E}_{\text{sca}}$

Al igual que con los coeficientes de Fresnel, es común definir la energía relativa a I_{inc} :

$$C_{\text{sca}} = \frac{W_{\text{sca}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2) \quad [\text{m}^2]$$

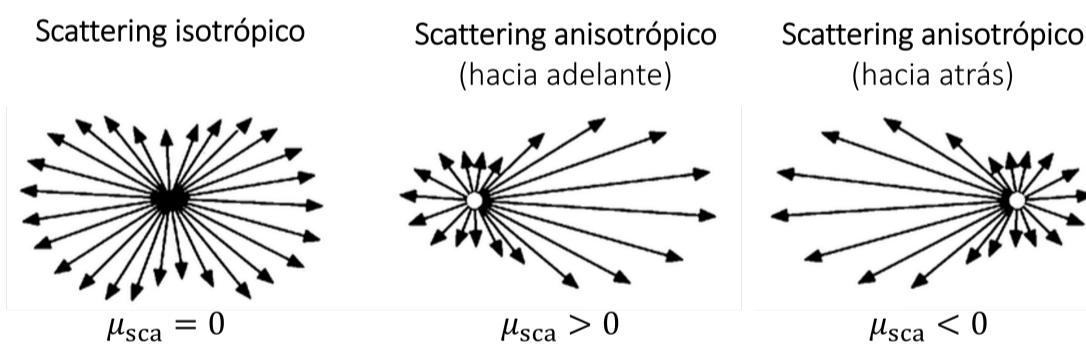
$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \operatorname{Re}(a_l + b_l) \quad [\text{m}^2]$$

debido a que C_{sca} y C_{ext} están definidos en unidades de área, se denominan **sección transversal de scattering y extinción, respectivamente**.

Por conservación de energía, la sección transversal de absorción, $C_{\text{abs}} = C_{\text{ext}} - C_{\text{sca}}$.

4.2.3. Parámetro de asimetría

El parámetro de asimetría, $\mu_{\text{sca}} \in [-1, 1]$, nos permite cuantificar la anisotropía en la distribución del scattering.



En el caso de esferas, se define por:

$$\mu_{\text{sca}} = \frac{4\pi}{k^2 C_{\text{sca}}} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(l+2)}{l+1} \operatorname{Re}(a_l a_{l+1}^* + b_l b_{l+1}^*) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \operatorname{Re}(a_l b_l^*) \right]$$

4.3. Análisis de scattering

Los parámetros C_{sca} , C_{abs} y C_{ext} permiten cuantificar la energía de scattering, absorción y extinción relativa a la intensidad de la fuente I_{inc} , así como también su distribución en el espectro.

4.3.1. Partículas con índice de refracción real (dieléctricos)

Por ejemplo, analicemos el scattering de una esfera de agua ($N_p \approx 1.33$) en el aire ($n_h = 1.0$).

Notar que $N_p \approx 1.33$ implica $C_{\text{abs}} = 0$

```

%%capture show_plot
import empylib.miescattering as mie
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

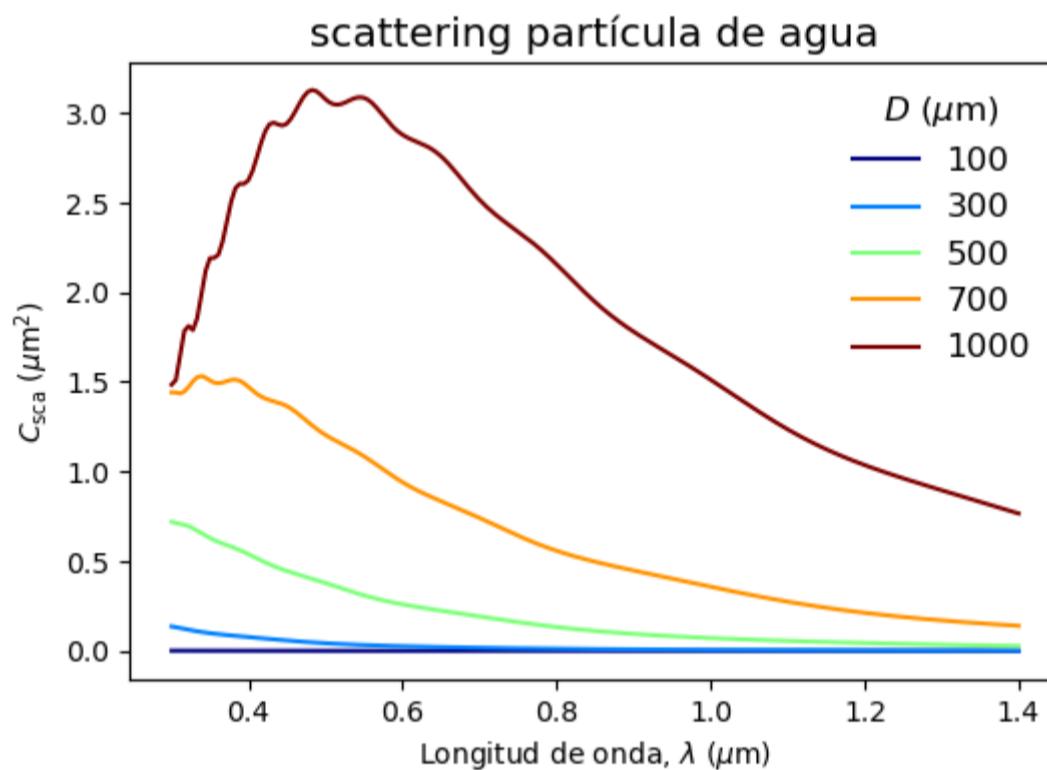
lam = np.linspace(0.3,1.4,200) # espectro de Longitudes de onda
nh = 1.0                      # índice de refracción del material circundante
Np = 1.33                     # índice de refracción de la partícula
D = [0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0] # distribución de diámetros

fig, ax = plt.subplots()          # creamos ejes para graficar
colors = plt.cm.jet(np.linspace(0,1,len(D))) # set de colores para las curvas
for i in range(len(D)):
    Ac = np.pi*D[i]**2/4           # área transversal de la partícula
    Qsca = mie.scatter_efficiency(lam,nh,Np,D[i])[1] # determinamos Csca/Ac
    ax.plot(lam,Qsca*Ac,'-', color=colors[i], label=(f'{D[i]*1E3}')) # grafico
Csca

# etiquetas de ejes y formateo de la figura
fig.set_size_inches(6, 4)          # tamaño de figura
plt.rcParams['font.size'] = 12      # tamaño de fuente
ax.set_xlabel(r'Longitud de onda, $\lambda$ ($\mu m$)') 
ax.set_title('scattering partícula de agua')
ax.set_ylabel(r'$C_{sca}$ ($\mu m^2$)')
ax.legend(frameon=False, title=r'$D$ ($\mu m$)')
plt.show()

```

```
show_plot()
```



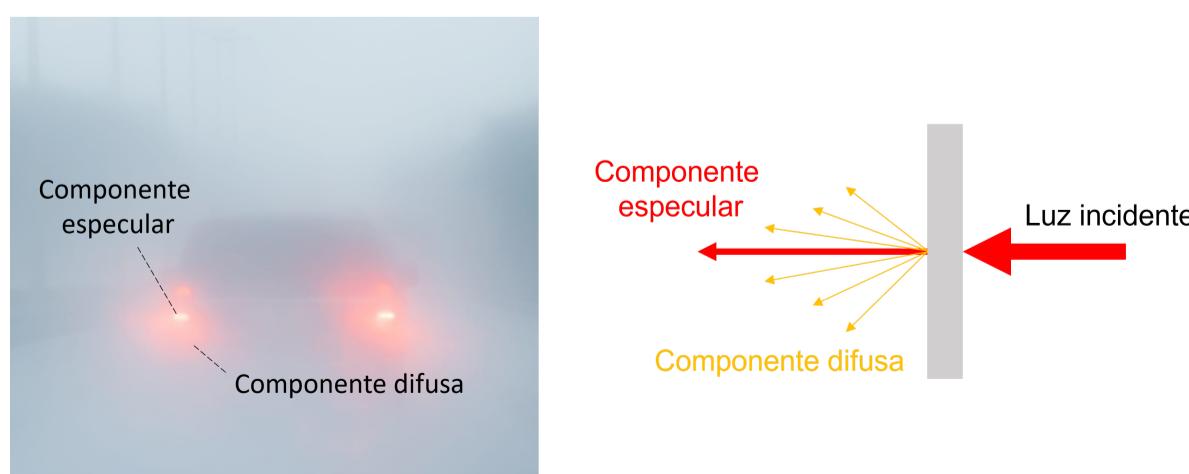
A partir de este gráfico podemos identificar algunos patrones comunes en scattering:

- La energía de scattering aumenta con el tamaño de la partícula
- A medida que el tamaño aumenta, la longitud de onda para scattering máximo crece (*red-shifting*)

Esta es una característica general del scattering de partículas dieléctricas.

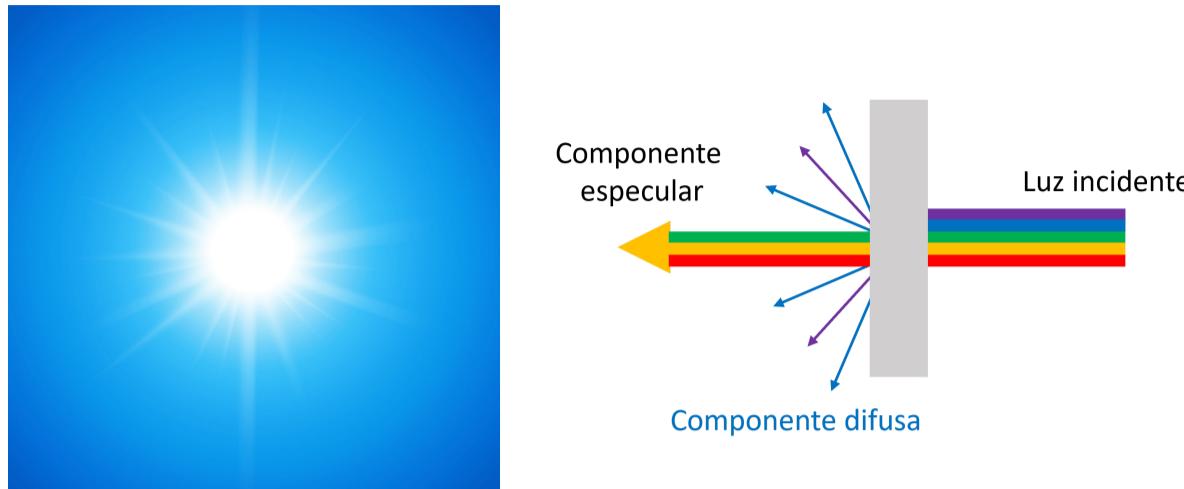
A partir de este gráfico podemos entender muchas situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo, en la niebla las partículas de agua tienen un tamaño microscópico ($D \sim 1 \mu m$) y, por lo tanto, dispersan la mayor parte de la luz visible.



Para un haz de luz incidente en un medio con partículas, llamamos **componente difusa** a la porción de la luz dispersada por scattering, y como **componente especular** a la porción no dispersada.

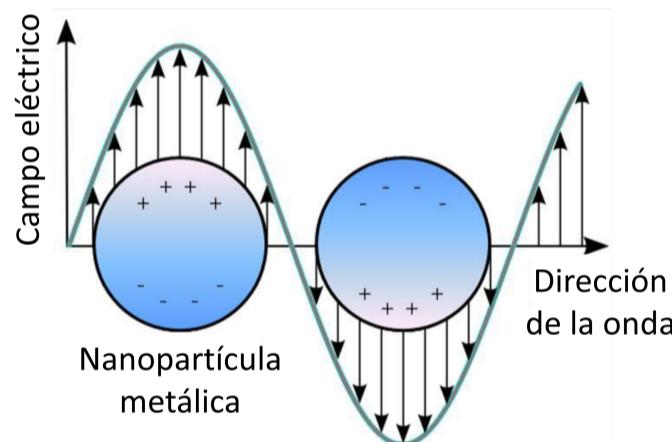
En el cielo, en cambio, las moléculas del aire son mucho más pequeñas, y el scattering es más intenso para ondas en el espectro del color azul y violeta ($\lambda < 450$ nm)



La componente difusa, así, corresponde a los colores azul y violeta. La componente especular, corresponde al resto de los colores del espectro visible. El fenómeno explica el color azul del cielo durante el día.

4.3.2. Parículas metálicas

El naturaleza del scattering es diferente para los metales. En este caso, el movimiento libre de los electrones genera acumulación de carga en la superficie de la partícula. Como resultado, la partícula se polariza generando fenómenos de resonancia en determinadas longitudes de onda.



En la siguiente figura, graficamos C_{sca} y C_{abs} para partículas de distinto diámetro. Ambas variables son normalizadas por al área transversal de la esfera πR^2 , para mejor comparación entre esferas de distintas dimensiones.

```

%%capture show_plot
import empylib.miescattering as mie
import empylib.nklib as nk
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

lam = np.linspace(0.2,0.8,200)      # espectro de longitudes de onda
nh = 1.0                            # índice de refracción del material circundante
Np = nk.silver(lam)                 # índice de refracción de la partícula
D = [0.01, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1]   # distribución de diámetros

fig, ax = plt.subplots(1,2)          # creamos ejes para graficar
colors = plt.cm.jet(np.linspace(0,1,len(D))) # set de colores para las curvas
for i in range(len(D)):
    Qext, Qsca = mie.scatter_efficiency(lam,nh,Np,D[i])[0:2] # determinamos Cext/Ac y
    Csca/Ac
    Qabs = Qext - Qsca
    ax[0].plot(lam,Qsca,'-', color=colors[i], label=( '%i' % (D[i]*1E3))) # grafico
    Csca/Ac
    ax[1].plot(lam,Qabs,'-', color=colors[i], label=( '%i' % (D[i]*1E3))) # grafico
    Cabs/Ac

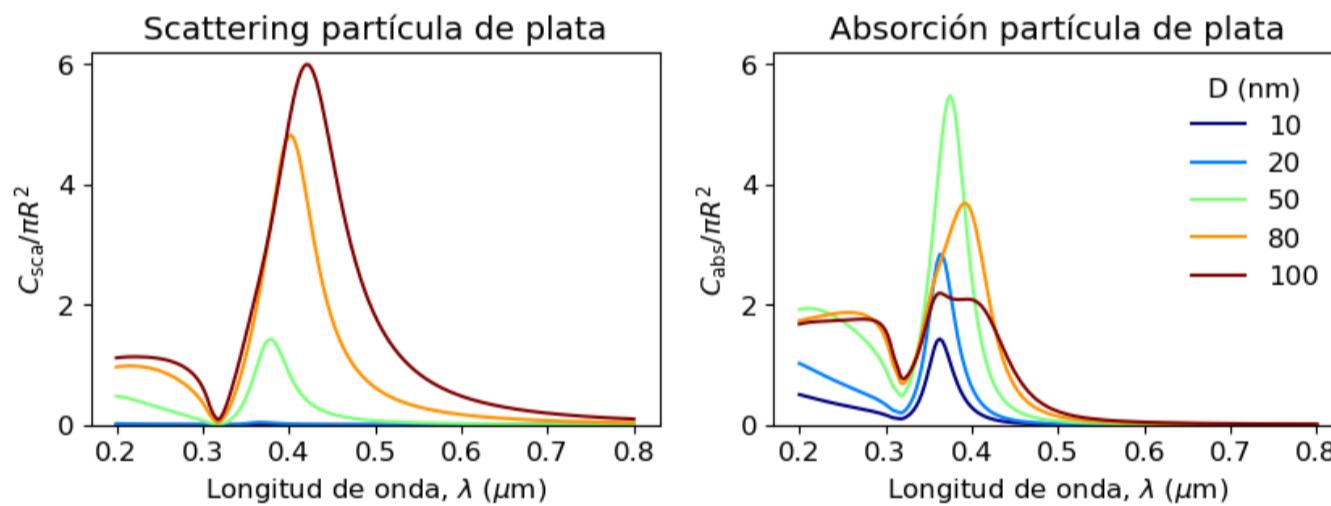
# etiquetas de ejes y formateo de la figura
fig.set_size_inches(10, 3)          # tamaño de figura
plt.rcParams['font.size'] = '12'     # tamaño de fuente

for i in range(2):
    ax[i].set_xlabel(r'Longitud de onda, $\lambda$ ($\mu m$) ')
    ax[i].set_ylim(0,6.2)

ax[0].set_title('Scattering partícula de plata')
ax[1].set_title('Absorción partícula de plata')
ax[0].set_ylabel(r'$C_{sca}/\pi R^2$')
ax[1].set_ylabel(r'$C_{abs}/\pi R^2$')
ax[1].legend(frameon=False, title=r'D (nm)')
plt.show()

```

```
show_plot()
```



- Para $D < 20$ nm, C_{sca} es despreciable en comparación con C_{abs} . El peak en C_{abs} es el resultado de la resonancia del sistema, similar al modelo de Lorentz.
- Para $D > 50$ nm, C_{sca} crece significativamente, superando C_{abs} para $D > 80$ nm.

Este fenómeno se repite en otros metales, aunque con distintas magnitudes y frecuencias de resonancia.

El efecto de scattering en nanopartículas metálicas permite explicar el cambio en los colores en la copa de Lycurgus.



Esta copa del periodo romano, esta compuesta de vidrio con nanopartícula de oro y plata en forma de coloides.

4.4. Referencias

- Hetch E., **Capítulo 4.2 - Esparcimiento de Rayleigh** en *Óptica*, 5ta Ed, Pearson, 2017
- Bohren C. and Huffman D. **Chapter 4 - Absorption and Scattering by a Sphere** in *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, 1st Ed, John Wiley & Sons, 1983
- Jackson. J. D., **Chapter 10 - Scattering and Diffraction** in *Classical Electrodynamics*, 3th Ed, John Wiley & Sons, 1999

By Francisco V. Ramirez-Cuevas

© Copyright 2022.