

1. La radiación como un fenómeno electromagnético

Contents

- [Repaso de cálculo vectorial](#)
- [Ecuaciones de Maxwell](#)
- [Ondas electromagnéticas](#)
- [Referencias](#)

MEC501 - Manejo y Conversión de Energía Solar Térmica

Profesor: Francisco Ramírez CueSvas

Fecha: 12 de Agosto 2022

Tabla de contenidos

- [Repaso de cálculo vectorial](#)
 - [Campo escalar y vectorial](#)
 - [Operadores diferenciales](#)
 - [Ejemplos de uso de operadores diferenciales](#)
- [Ecuaciones de Maxwell](#)
 - [Ley de Gauss](#)
 - [Ley de continuidad del campo magnético](#)
 - [Ley de Faraday](#)
 - [Ley de Ampere](#)
 - [Corrección de la ley de Ampere](#)
- [Ondas electromagnéticas](#)
 - [Ondas electromagnéticas en el vacío](#)
 - [Vector de Poynting](#)
- [Referencias](#)

Repaso de cálculo vectorial

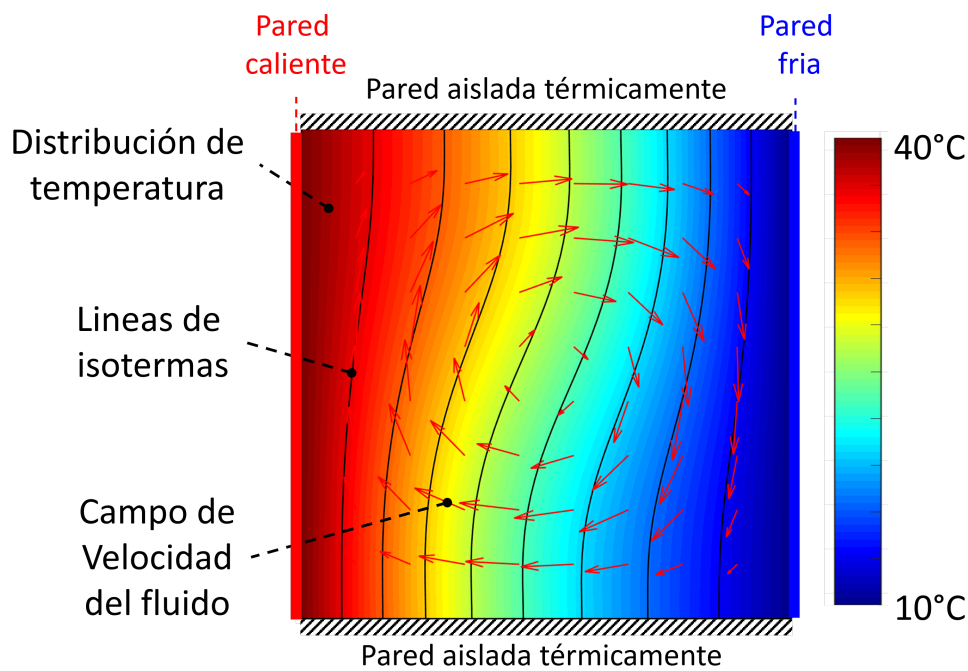
Campo escalar y vectorial

- Un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud. Por ejemplo, distribución de densidad, temperatura o presión. En coordenadas cartesianas:

$f = f(x, y, z)$, donde f es un campo escalar.

- Un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Por ejemplo, distribución de velocidades, campo eléctrico o magnético. En coordenadas cartesianas: $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$, donde \vec{f} es un campo escalar.

Por ejemplo, consideremos la siguiente modelación de convección natural en cavidad cuadrada:



Aquí podemos visualizar la distribución espacial de temperaturas y velocidades de un fluido sometido a las condiciones indicadas en la figura.

De esta figura podemos identificar:

- Campo escalar: Distribución de temperaturas
- Campo vectorial: Distribución de velocidades

Operadores diferenciales

Operador Del.

Definimos el operador ∇ o “del”, como:

$$\nabla = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{2}$$

Operador Gradiente.

Es equivalente a la derivada de una función, pero en múltiples dimensiones. Permite identificar zonas de crecimiento o decrecimiento de un campo escalar o vectorial. Se define como el operador Del multiplicado por el campo escalar.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \tag{3}$$

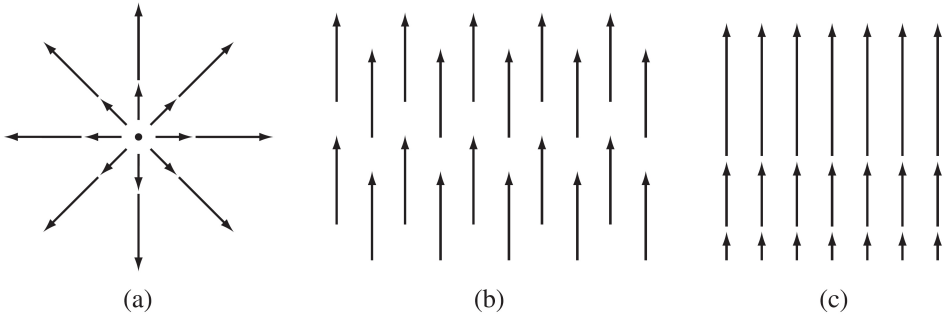
El gradiente de un campo escalar f , es un vector

Operador Divergente.

Se aplica a campos vectoriales. Es una medida de cuanto un campo vectorial diverge o converge respecto de un punto en cuestión. Se define como el producto punto entre el operador Del y un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{4}$$

Por ejemplo:



(a) $\nabla \cdot \vec{f} > 0$

(b) $\nabla \cdot \vec{f} = 0$

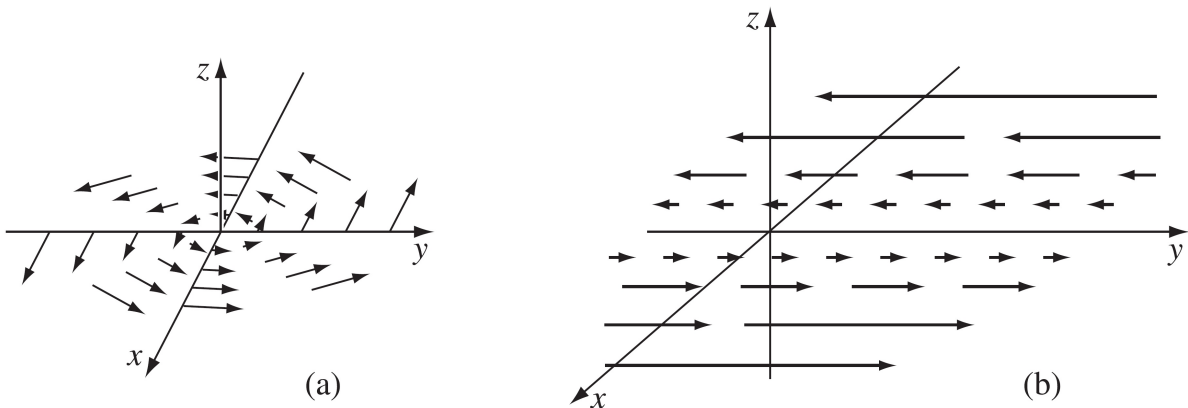
(c) $\nabla \cdot \vec{f} > 0$

Operador Rotacional.

Se aplica a campos vectoriales. Es una medida de cuanto un campo vectorial rota respecto de un punto en cuestión. Se define como el producto cruz entre el operador Del y un campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \hat{z} \tag{5}$$

Por ejemplo:



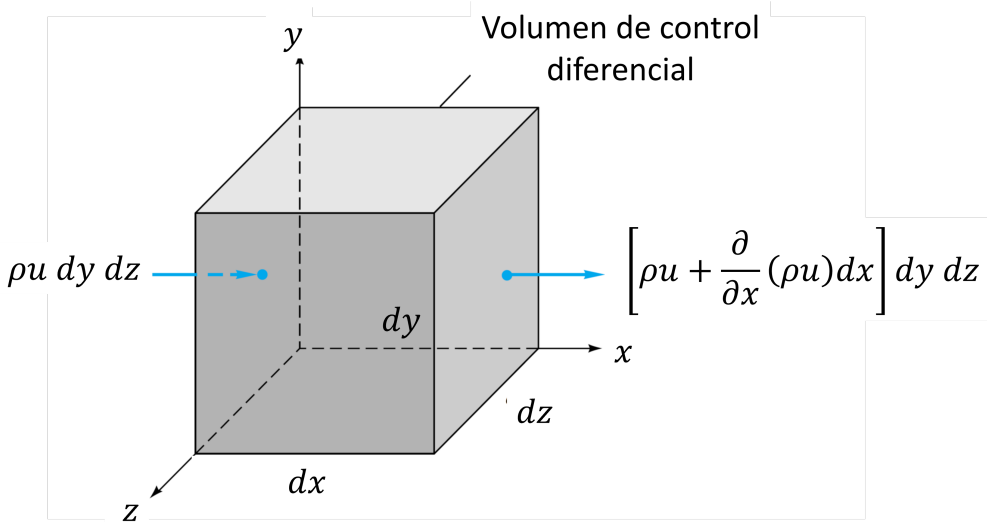
(a) $\nabla \times \vec{f} > 0$

(b) $\nabla \times \vec{f} > 0$

En la figura anterior (divergente), $\nabla \times \vec{f} = 0$ en todos los casos.

Ejemplos de uso de operadores diferenciales

Los operadores diferenciales permiten una descripción más compacta en de las formuals basadas en ecuaciones diferenciales parciales.



Un ejemplo conocido es el caso de la ecuación de conservación de masa en su forma diferencial.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Usando el operador Del,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0,$$

o bien:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \left(\nabla \cdot \vec{V} \right) = 0.$$

Ecuaciones de Maxwell

Ley de Gauss

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica, ρ , contenida dentro de esta superficie.

En su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \vec{E} \right) = \rho \tag{6}$$

Donde:

- \vec{E} , es el **campo eléctrico** (se mide en unidades de V/m).
- $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, es la **permitividad** en el vacío.

Un campo eléctrico divergente(convergente) es el resultado de una carga eléctrica positiva(negativa) que actúa como fuente(sumidero)

Ley de continuidad del campo magnético

No existen cargas magnéticas que den lugar a un campo magnético

En su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \vec{H} \right) = 0 \tag{7}$$

Donde:

- \vec{H} , es la **intensidad de campo magnético** (se mide en unidades de A/m).
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A², es la **permeabilidad** magnética en el vacío.

A diferencia del campo eléctrico, el campo magnético es continuo. Es decir no tiene fuentes ni sumideros

Es común en los textos de física ver las ecuaciones de campo magnético respresentadas en base al **vector campo magnético** \vec{B} y no a \vec{H} Esto, porque \vec{B} representa la componente “experimentalmente medible” del campo magnético y la que efectivamente afecta a las cargas en movimiento. Ambas variables se relaciona mediante $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

De igual manera, el análogo del campo eléctrico se denomina **desplazamiento eléctrico**, y se relaciona con el campo eléctrico mediante $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. En este caso, la componente “experimentalmente medible” es \vec{E} y, por ende, es formalmente utilizada en los textos de física.

Ley de Faraday

Un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico rotacional

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{8}$$

- Notar que el campo magnético debe ser variable en el tiempo para poder inducir una corriente.

Ley de Ampere

Una corriente eléctrica induce un campo magnético rotacional alrededor de ella

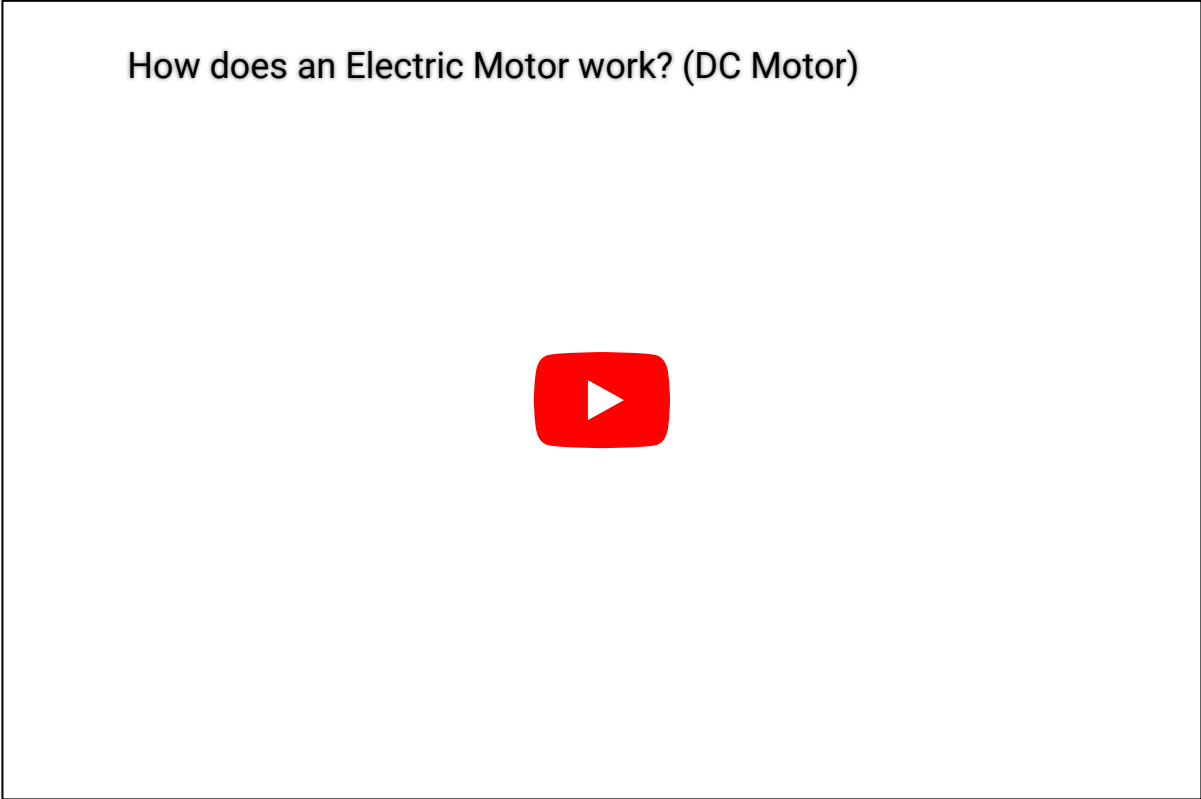
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{9}$$

Donde:

- \vec{J} , es la **densidad de corriente** eléctrica (se mide en unidades de A/m²).

La ley de Ampere y de Faraday son la base del funcionamiento de motores de inducción, motores DC, transformadores, etc.

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('CWulQ1ZSE3c', width=600, height=400, playsinline=0, start=42)
```



Corrección de la ley de Ampere

Es posible demostrar que, para un campo vectorial \vec{f} , se cumple la siguiente identidad

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{f} = 0,$$

Analicemos el divergente en la ley de Faraday

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = -\nabla \cdot \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} \right) = 0$$

La relación se cumple por la ley de continuidad del campo magnético

Por otro lado, el divergente en la ley de Ampere:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot \vec{J} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Sin embargo, por la ley de conservación de masa:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Claramente, la ecuación de Ampere no está completa. La corrección, fue propuesta por James Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{10}$$

El último término es conocido como la *corriente de desplazamiento de Maxwell*.

A través de esta contribución James C. Maxwell logra unificar las teorías de electricidad, magnetismo y la luz en un solo fenómeno, **las ondas electromagnéticas**.

Ondas electromagnéticas

Ondas electromagnéticas en el vacío

En el vacío, no existen cargas eléctricas ($\rho = 0$) ni corrientes eléctricas ($\vec{J} = 0$), y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Analicemos el rotacional sobre la ley de Faraday

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

Mediante la identidad,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot \nabla \vec{E},$$

y la ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, podemos demostrar:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

Finalmente, mediante la ley de Ampere modificada, determinamos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Esta es la ecuación de onda en su forma tridimensional, la cual acepta soluciones del tipo:

$$E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e},$$

donde:

- \vec{k} es el vector de onda
- \vec{r} es un vector de posición
- ω es la frecuencia angular (rad/s)
- E_0 es la amplitud
- \hat{e} es la dirección de oscilación de la onda.

Reemplazando esta solución en la ecuación de onda, determinamos la **relación de dispersión** entre la **magnitud del vector de onda en el vacío**, $k_0 = |\vec{k}|$, y la frecuencia angular:

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \tag{11}$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s},$$

es la velocidad de la luz.

En general, estamos más familiarizados con los conceptos de **longitud de onda** λ y **frecuencia** ν , para caracterizar ondas electromagnéticas. Estas variables se relacionan con el vector de onda y la frecuencia mediante:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

(12)

De igual forma, mediante la relación de dispersión, podemos establecer la siguiente relación entre la longitud de onda y la frecuencia:

$$\lambda\nu = c_0$$

(13)

Esto quiere decir, que un punto \vec{r} arbitrario de la onda, viaja en el vacío a una velocidad constante c_0 , **independiente de su frecuencia**.

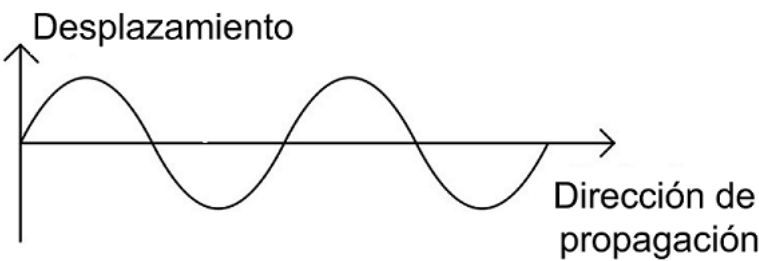
El vector de onda representa la dirección de propagación de la onda. A partir de la ley de Gauss, podemos demostrar:

$$\vec{k} \cdot \hat{e} = 0$$

(14)

Es decir, el campo eléctrico oscila en dirección perpendicular a la dirección de propagación.

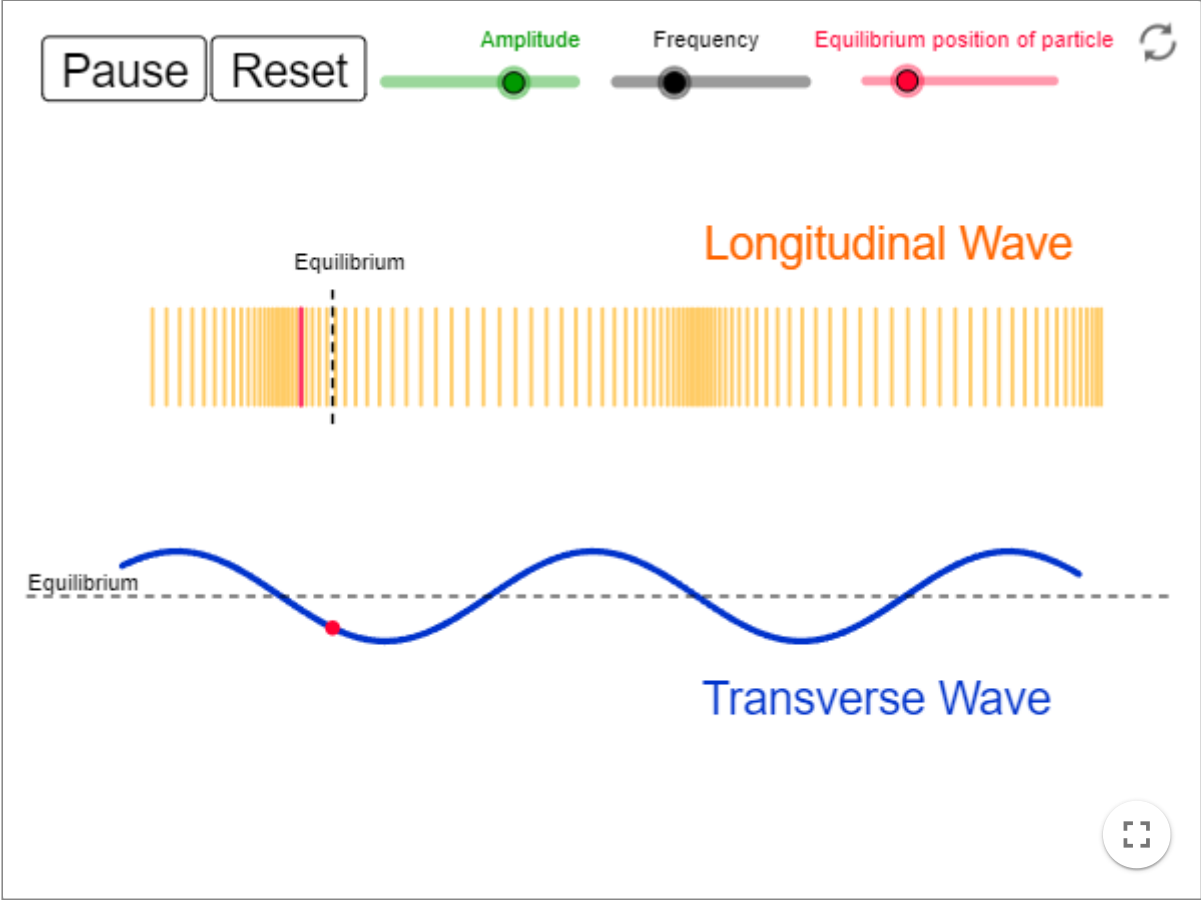
En otras palabras, el campo electrico representa una **onda transversal**.



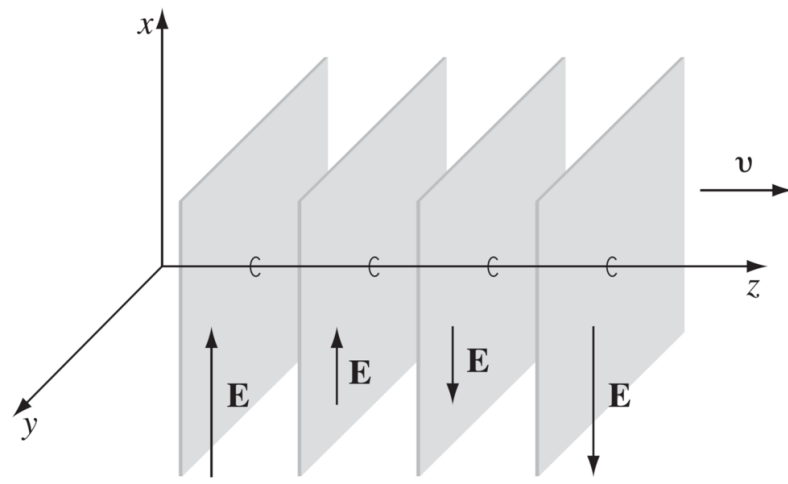
Esquema de una onda transversal

En general, tenemos dos tipos de ondas, transversales, y longitudinales

```
from IPython.display import IFrame, display
display(IFrame('https://www.geogebra.org/material/iframe/id/auyft2pd/width/640/height/480/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/true/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/false', '700px', '450px'))
```



Debido a que el campo eléctrico toma la forma $\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}$, decimos que se comporta como una **onda plana**, debido a que el campo es constante sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación



De igual forma, podemos demostrar que la intensidad de campo magnético en el vacío también satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Utilizando un tratamiento similar al de \vec{E} , concluiremos que \vec{H} :

- Se comporta como una onda de la forma $H_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{h}$
- Se mueve en el vacío a una velocidad constante $c_0 \approx 3.00 \times 10^8$ m/s.
- Es una onda transversal ($\vec{k} \cdot \hat{h} = 0$, por la ley de continuidad de \vec{H}).

Finalmente, mediante la ley de Faraday (o Ampere), deducimos:

$$\hat{h} H_0 = \frac{E_0}{Z_0} (\hat{k} \times \hat{e}),$$

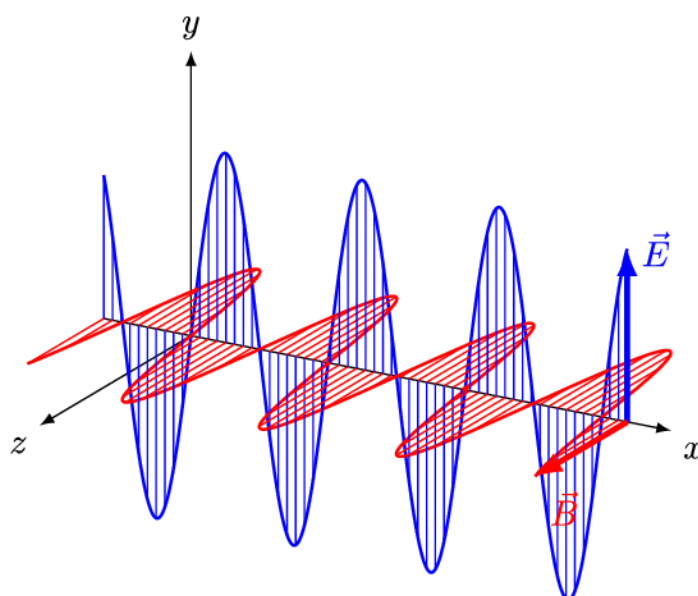
donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, es la **impedancia del vacío** (se mide en Ω).

De esta relación concluimos:

1. El campo eléctrico magnético y el vector de onda son mutuamente perpendiculares ($\vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{k}$)
2. La amplitud de la intensidad de campo magnético y del campo eléctrico, están relacionadas por: $H_0 = \frac{E_0}{Z_0}$

En resumen:

1. En el vacío, \vec{E} y \vec{H} se comportan como ondas trasversales de la forma $\propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.
2. El vector de onda \vec{k} representa la dirección de propagación de \vec{E} y \vec{H} .
3. \vec{E} y \vec{H} se propagan a una velocidad constante $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3.00 \times 10^8$ m/s.
4. La magnitud del vector de onda en el vacío, k_0 , y la frecuencia angular, ω , están relacionadas por $k_0 = \omega / c_0$
5. \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} son mutuamente perpendiculares.
6. Las amplitudes de \vec{E} y \vec{H} están asociadas por la relación $H_0 = \frac{E_0}{Z_0}$, donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$.



Esquema de una onda electromagnética

Vector de Poynting

El vector de Poynting, \vec{S} , representa el flujo de energía electromagnética por unidad de área. Está dado por la relación:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right), \tag{15}$$

donde $\langle \cdots \rangle$ representa el promedio temporal, y el símbolo “*” reprenta el complejo conjugado.

Consideremos, por ejemplo, el vector de Poynting para una onda plana que se propaga en en el vacío:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{E_0^2}{Z_0} e^{i(k_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(k_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] (\hat{e} \times \hat{h}) \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \hat{k} \end{aligned}$$

Así, el flujo de energía que transporta onda electromagnética en el vacío es $\frac{E_0^2}{2Z_0}$

Ahora con los conceptos de ondas electromagnéticas y vector de Poynting, pasemos a revisar este video explicativo de como fluye la energía en las redes eléctricas

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('bHIhgxav9LY', width=600, height=400, playsinline=0, start=42)
```

The Big Misconception About Electricity



Referencias

Griffths D., *Introduction to Electrodynamics*, 4th Ed, Pearson, 2013

- 1.2 Differential Calculus
- 7.2 Electromagnetic Induction
- 7.3 Maxwell’s Equations (hasta 7.3.3)
- 8 Concervation laws (solo 8.1)
- 9 Electromagnetic Waves (hasta 9.2)