

Ondas electromagnéticas en la materia

Contents

- [2.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio](#)
- [2.2. Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas en una interface](#)
- [2.3. Reflección y transmisión en películas delgadas](#)
- [2.4. Referencias](#)

2.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio

La materia esta compuesta por cargas (electrónes, átomos, moléculas). Por lo tanto, a diferencia del vacío, la densidad de carga (ρ) y de corriente (\vec{J}) eléctricas están presentes en las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Asumiendo un medio homogéneo, y mediante la relación:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (2.1)$$

donde \vec{D} es el desplazamiento eléctrico, y $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, es la **constante dieléctrica** compleja;

podemos demostrar que las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en la forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Estas ecuaciones tiene la misma forma que las ecuaciones de Maxwell en el vacío, y por lo tanto todas las conclusiones anteriores aplican a este caso.

La gran diferencia está en la relación de dispersión. En este caso:

$$k = N \frac{\omega}{c_0} \quad (2.2)$$

donde $N = \sqrt{\epsilon} = n + i\kappa$, es el **índice de refracción complejo**. En general n se conoce como el **índice de refracción**, y κ como **extensión**. Así, el **vector de onda es un número complejo**, $k = k' + ik''$

La parte real nos da información sobre la **velocidad de fase de la onda** $v_p = \omega/k'$:

$$v_p = \frac{c_0}{n} \quad \text{Velocidad de fase en un medio con índice de refracción } N \quad (2.3)$$

Notar que para $n > 1$ la onda se mueve a una velocidad más lenta que en el vacío

Las relaciones de dispersión no son necesariamente lineales. Por ejemplo, la relación de dispersión de ondas de sonido en un metal tienen la forma $\omega \propto k^2$.

Así, las ondas agudas (alta frecuencia) se mueven más rápido que las ondas graves (baja frecuencia).

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('dumzvAN12-4', width=600, height=400, playsinline=0, start=354, end =
532)
```

PHYS 201 | Dispersion 7 - DEMO: Dispersion in Sound Waves



Igualmente, la relación entre H_0 y E_0 también cambia a la forma

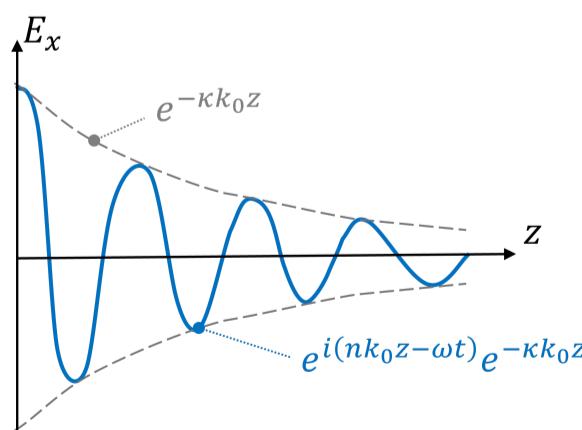
$$H_0 = \frac{E_0}{Z_0 Z_r},$$

donde $Z_r = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$ es la **impedancia relativa**.

¿Qué significa que el vector de onda sea complejo?

Analicemos la solución general de la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e} \\ &= E_0 e^{i(Nk_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e} \\ &= E_0 e^{i(nk_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-\kappa k_0 (\hat{k} \cdot \vec{r})} \hat{e} \end{aligned}$$



Lo que notamos es, mientras que el índice de refracción n representa el **cambio en la oscilación espacial de la onda**, la extensión κ indica un **decaimiento en la amplitud**.

Este decaimiento de la amplitud representa la absorción de energía en el material.

Para cuantificar esta pérdida de energía debemos analizar el **vector de Poynting**, $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$.

En este caso:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{nE_0^2}{2Z_0} e^{-\alpha(\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

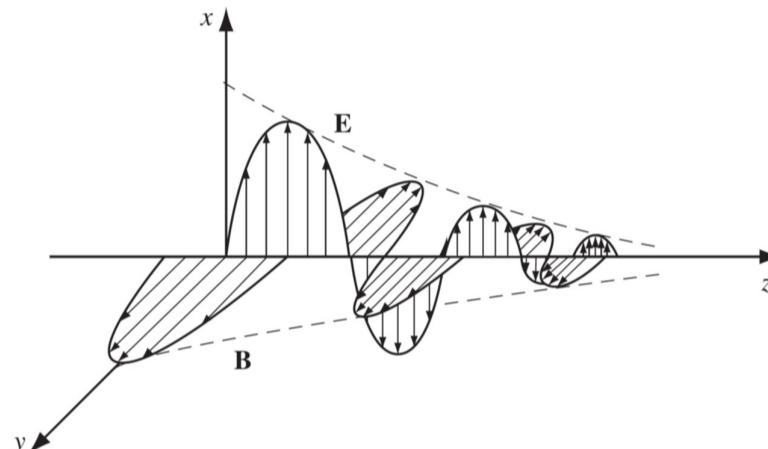
donde $\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$ es el **coeficiente de absorción**.

Así la energía radiativa en el material de espesor t decae exponencialmente en la forma,

$$\propto \exp\left(-4\pi\kappa \frac{t}{\lambda}\right)$$

En resumen, en materiales paramagnéticos:

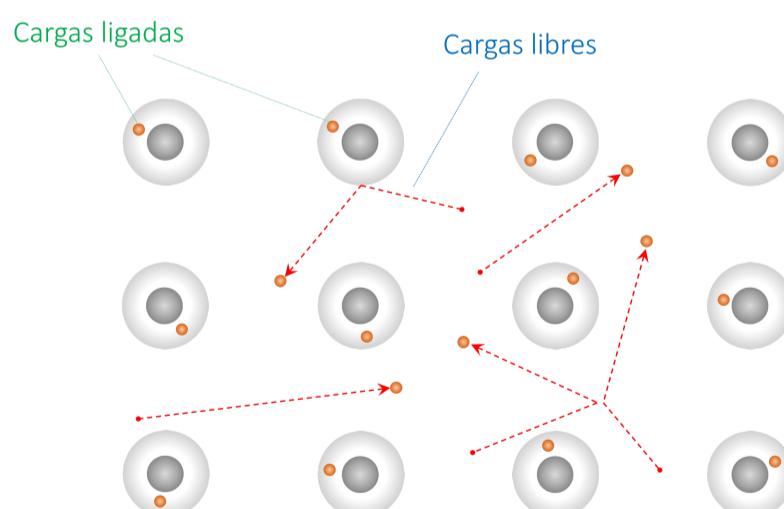
1. \vec{E} y \vec{H} se comportan como ondas transversales de la forma $\propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.
2. La relación de dispersión es $k = N \frac{\omega}{c_0}$, donde $N = n + i\kappa$ es el índice de refracción complejo.
3. $N = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon' + i\epsilon''}$, donde ϵ es la constante dieléctrica
4. \vec{E} y \vec{H} se propagan a una velocidad constante $c = c_0/n$
5. κ representa la extensión de la onda en el espacio.
6. \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} son mutuamente perpendiculares.
7. Las amplitudes de \vec{E} y \vec{H} están asociadas por la relación $H_0 = \frac{E_0}{Z_0 Z_r}$, donde $Z_r = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.



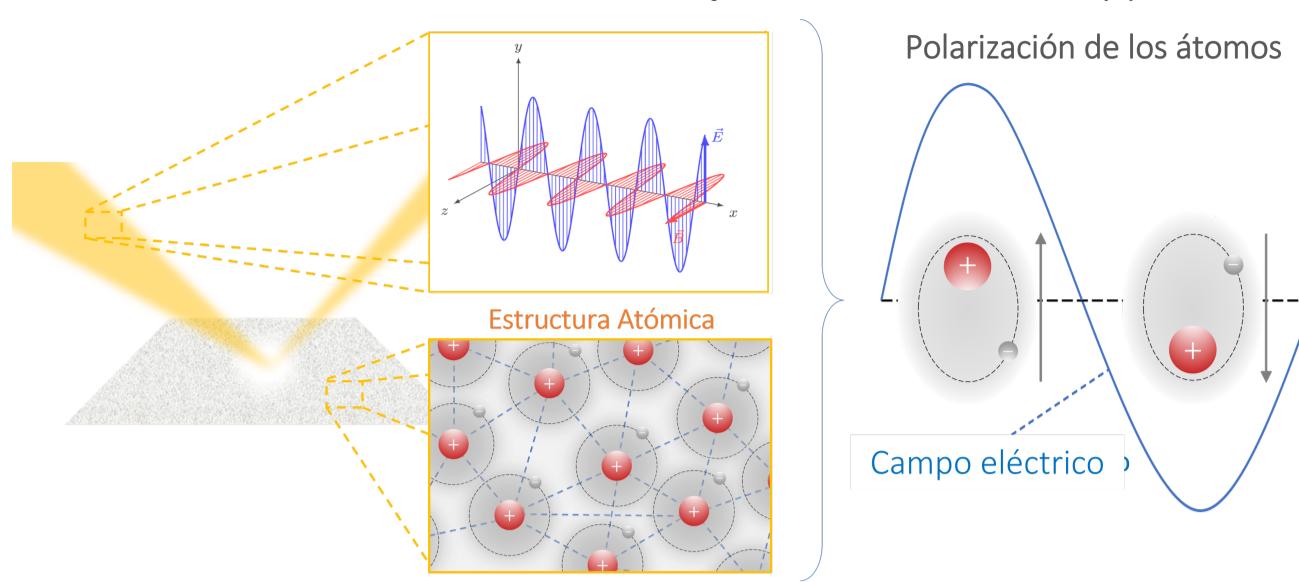
Esquema de una onda electromagnética en un material

¿Qué representa la constante dielectrica compleja?

Los materiales están compuestos de átomos, con un núcleo positivo y electrones negativos. Estos electrones interactúan con los átomos de distintas formas; algunos orbitan alrededor del núcleo mientras que otros se mueven libremente por el material. Así, podemos separar las cargas eléctricas en dos tipos: **cargas ligadas**, y **cargas libres**.



La interacción de las onda electromagnéticas con las cargas ligadas induce **polarización**. Esta respuesta está representada por la parte real de la constante dielectrica (ϵ').



Las ondas electromagnéticas aceleran las cargas libres, generando **corrientes eléctricas inducidas**. Algunas cargas libres móviles colisionan con otros electrones o núcleos, disipando energía. Esta respuesta está representada por la parte imaginaria de la constante dieléctrica (ϵ'').

2.1.1. Condiciones de borde

Hasta ahora hemos revisado las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo, y como estas dan lugar a la solución en forma de ondas electromagnéticas.

Recordemos que para un medio con índice de refracción N , la solución general es:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(Nk_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}$$

$$\vec{H} = \frac{NE_0}{Z_0} e^{i(Nk_0 \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{k} \times \hat{e}$$

¿Qué sucede cuando una onda electromagnética encuentra la frontera entre dos medios distintos?

Como toda ecuación diferencial, la solución particular de las ecuaciones de Maxwell está definida por las condiciones de borde. Estas condiciones de borde surgen al aplicar las ecuaciones de Maxwell en una frontera (cuya derivación no revisaremos aquí). En general son 4 condiciones de borde. Sin embargo, para los problemas que veremos en este curso solo se necesitan dos:

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0$$

$$H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = 0 \quad (2.4)$$

donde 1 y 2 son dos medios distintos, y el símbolo \parallel representa la componente paralela a la interface entre los medios 1 y 2

En la interface entre dos medios 1 y 2 las componentes de \vec{E} y \vec{H} paralelas a la interface, se conservan.

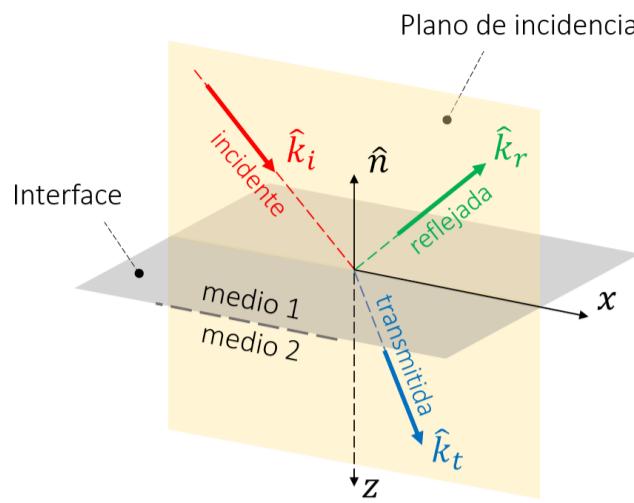
2.2. Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas en una interface

2.2.1. Coeficientes de Fresnel

Consideremos el fenómeno de reflección y transmisión de una onda electromagnética en dirección \hat{k}_i que incide sobre la interface entre dos medios 1 y 2, con índices de refracción reales n_1 y n_2 , respectivamente

Definimos como \hat{n} al vector normal al plano de interface entre los dos medios, y como **plano de incidencia**, al plano formado por los vectores \hat{k}_i y \hat{n} .

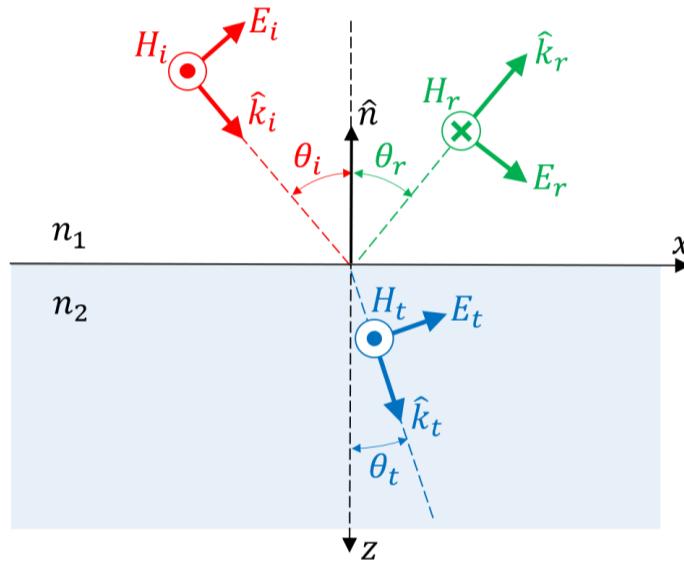
La dirección de la onda reflejada y transmitida está definida por los vectores \hat{k}_r y \hat{k}_t , respectivamente.



A partir de la dirección de \vec{E} y \vec{H} respecto al plano de incidencia, podemos distinguir dos polarizaciones:

- Si \vec{H} oscila en dirección perpendicular al **plano de incidencia**, hablamos de una **polarización transversal magnética o TM**.
- Si \vec{E} oscila en dirección perpendicular al **plano de incidencia**, hablamos de una **polarización transversal eléctrica o TE**.

Como ejemplo, consideremos una **onda transversal magnética (TM)**



La figura muestra la reflexión y transmisión de la onda visto desde el plano de incidencia

A través de las ecuaciones de Maxwell, podemos establecer la solución general para cada onda electromagnética:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_i e^{i(k_0 n_1 \hat{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}_i && \text{onda incidente} \\ \vec{E}_r &= E_r e^{i(k_0 n_1 \hat{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}_r && \text{onda reflejada} \\ \vec{E}_t &= E_t e^{i(k_0 n_2 \hat{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}_t && \text{onda transmitida} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{k}_i &= \hat{x} \sin \theta_i + \hat{z} \cos \theta_i & \text{y} & \hat{e}_i = \hat{x} \cos \theta_i - \hat{z} \sin \theta_i \\ \hat{k}_r &= \hat{x} \sin \theta_r - \hat{z} \cos \theta_r & \text{y} & \hat{e}_r = \hat{x} \cos \theta_r + \hat{z} \sin \theta_r \\ \hat{k}_t &= \hat{x} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t & \text{y} & \hat{e}_t = \hat{x} \cos \theta_t - \hat{z} \sin \theta_t \end{aligned}$$

Reemplazando en las soluciones generales,

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_i e^{i k_0 n_1 (z \cos \theta_i + x \sin \theta_i)} e^{-i \omega t} (\hat{x} \cos \theta_i - \hat{z} \sin \theta_i) && \text{onda incidente} \\ \vec{E}_r &= E_r e^{i k_0 n_1 (-z \cos \theta_r + x \sin \theta_r)} e^{-i \omega t} (\hat{x} \cos \theta_r + \hat{z} \sin \theta_r) && \text{onda reflejada} \\ \vec{E}_t &= E_t e^{i k_0 n_2 (z \cos \theta_t + x \sin \theta_t)} e^{-i \omega t} (\hat{x} \cos \theta_t - \hat{z} \sin \theta_t) && \text{onda transmitida} \end{aligned}$$

De igual forma, a partir de la relación $\vec{H} = \frac{E}{Z_0 Z_r} (\hat{k} \times \hat{e})$,

$$\vec{H}_i = \frac{n_1 E_i}{Z_0} e^{ik_0 n_1 (z \cos \theta_i + x \sin \theta_i)} e^{-i\omega t} (\hat{y}) \quad \text{onda incidente}$$

$$\vec{H}_r = \frac{n_1 E_r}{Z_0} e^{ik_0 n_1 (-z \cos \theta_r + x \sin \theta_r)} e^{-i\omega t} (-\hat{y}) \quad \text{onda reflejada}$$

$$\vec{H}_t = \frac{n_2 E_t}{Z_0} e^{ik_0 n_2 (z \cos \theta_t + x \sin \theta_t)} e^{-i\omega t} (\hat{y}) \quad \text{onda transmitida}$$

A partir de la condición de borde en la interface $z = 0$:

$$E_1^{\parallel}|_{z=0} - E_2^{\parallel}|_{z=0} = 0$$

Tenemos:

$$E_i \cos \theta_i e^{ik_0 n_1 x \sin \theta_i} + E_r \cos \theta_r e^{ik_0 n_1 x \sin \theta_r} - E_t \cos \theta_t e^{ik_0 n_1 x \sin \theta_t} = 0$$

Dado que esta ecuación se debe satisfacer para cualquier punto x , los exponentes debe ser iguales:

$$n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t$$

Esto nos lleva a las leyes de Snell, para reflexión y transmisión:

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{y} \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Finalmente, la condición de borde del campo eléctrico queda:

$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r - E_t \cos \theta_t = 0 \quad (2.5)$$

De igual forma, de la condición de borde $H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = 0$, deducimos:

$$n_1 E_i - n_1 E_r - n_2 E_t = 0 \quad (2.6)$$

A partir de estas dos ecuaciones, determinamos los coeficientes de Fresnel de reflexión (r_{TM}) y transmisión (t_{TM}) para una onda TM:

$$r_{\text{TM}} = \frac{E_r^{\text{TM}}}{E_i^{\text{TM}}} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (2.7)$$

$$t_{\text{TM}} = \frac{E_t^{\text{TM}}}{E_i^{\text{TM}}} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

Similarmente, para una onda transversal eléctrica (TE), los coeficientes de Fresnel son:

$$r_{\text{TE}} = \frac{E_r^{\text{TE}}}{E_i^{\text{TE}}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (2.8)$$

$$t_{\text{TE}} = \frac{E_t^{\text{TE}}}{E_i^{\text{TE}}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

Las relaciones para los coeficientes de Fresnel se mantienen para índices de refracción complejos. En este caso, solo debemos reemplazar n_1 por N_1 , y n_2 por N_2

2.2.2. Reflectividad y transmisividad

Los coeficientes de Fresnel permiten determinar la magnitud del campo eléctrico (y magnético) reflejado y transmitido por una interface. Para determinar el flujo de energía a través de la interface, utilizamos el vector de Poynting. En el caso de la onda TM, y considerando indices de refracción complejos en los medios 1 y 2:

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{S}_i^{\text{TM}} \right\rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*] = \operatorname{Re} [N_1^* \hat{k}_i] \frac{(E_i^{\text{TM}})^2}{2Z_0} \\ \left\langle \vec{S}_r^{\text{TM}} \right\rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_r \times \vec{H}_r^*] = \operatorname{Re} [N_1^* \hat{k}_r] \frac{(E_r^{\text{TM}})^2}{2Z_0} \\ \left\langle \vec{S}_t^{\text{TM}} \right\rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*] = \operatorname{Re} [N_2^* \hat{k}_t] \frac{(E_t^{\text{TM}})^2}{2Z_0}\end{aligned}$$

La **reflectividad (R)** y **transmissividad (T)** se definen, respectivamente, como **el flujo de energía reflejada y transmitida relativa al flujo de energía incidente, y en dirección normal a la interface.**

Así, considerando la componente del vector de Poynting normal a \hat{n} (notar que $\hat{n} = -\hat{z}$ en nuestro ejemplo), tenemos:

$$\begin{aligned}R_{\text{TM}} &= \frac{S_{r,z}^{\text{TM}}}{S_{i,z}^{\text{TM}}} = |r_{\text{TM}}|^2 \\ T_{\text{TM}} &= \frac{S_{t,z}^{\text{TM}}}{S_{i,z}^{\text{TM}}} = \frac{\operatorname{Re}(N_2^* \cos \theta_t)}{\operatorname{Re}(N_1^* \cos \theta_i)} |t_{\text{TM}}|^2\end{aligned}\tag{2.9}$$

De igual forma, para una onda TE, tenemos

$$\begin{aligned}R_{\text{TE}} &= |r_{\text{TE}}|^2 \\ T_{\text{TE}} &= \frac{\operatorname{Re}(N_2 \cos \theta_t)}{\operatorname{Re}(N_1 \cos \theta_i)} |t_{\text{TE}}|^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

Notar que por conservación de energía:

$$R + T = 1\tag{2.11}$$

2.2.3. Casos particulares

Asumiendo dos medios 1 y 2, con índice de refracción real, analicemos la reflectancia en función del ángulo de incidencia:

- caso 1, $n_1 < n_2$
- caso 2, $n_1 > n_2$

```
import numpy as np
from numpy import radians as rad # convertimos grados a radianes
import matplotlib.pyplot as plt
from empylib.waveoptics import interface

theta = np.linspace(0,90,100) # Ángulo de incidencia

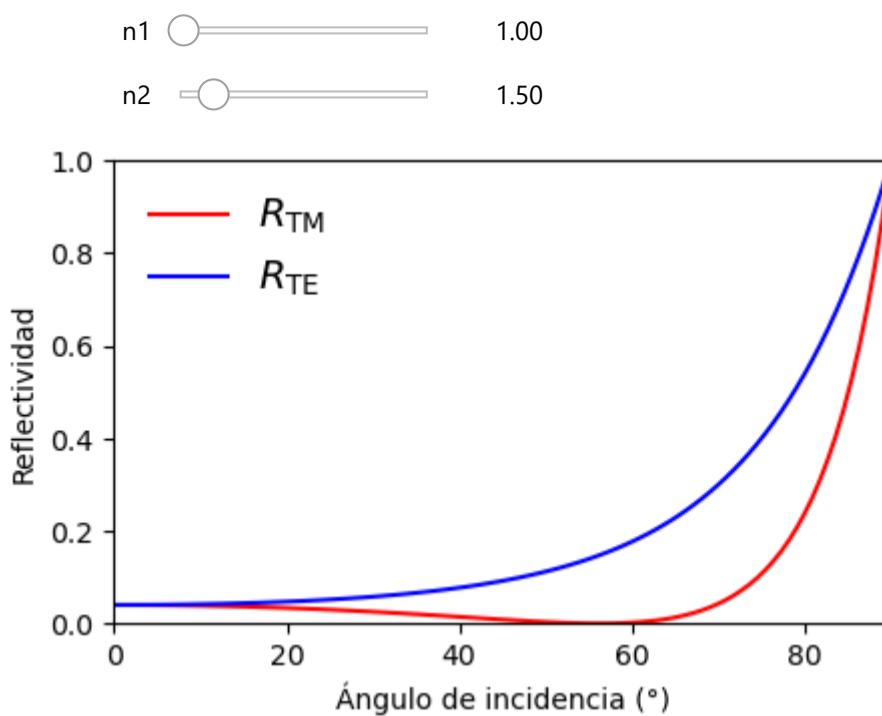
# preparamos el ploteo
def plot_R_interface(n1,n2):

    # Reflectividad en una interface
    Rp = interface(rad(theta),n1,n2,pol='TM')[0] # TM
    Rs = interface(rad(theta),n1,n2,pol='TE')[0] # TE

    fig, ax = plt.subplots()
    fig.set_size_inches(5,3)
    plt.rcParams['font.size'] = '14'
    ax.plot(theta,Rp, label='$R_{\text{TM}}$', color='red')
    ax.plot(theta,Rs, label='$R_{\text{TE}}$', color='blue')
    ax.set_xlim([0,90])
    ax.set_ylim([0,1.0])
    ax.set_xlabel('Ángulo de incidencia ($^\circ$)')
    ax.set_ylabel('Reflectividad')
    ax.legend(frameon=False)
```

```
from ipywidgets import interact

@interact( n1=(1.5, 0.1), n2=(1.5, 0.1))
def g(n1=1.0, n2=1.5):
    return plot_R_interface(n1,n2)
```



Cuando $n_1 < n_2$ vemos que $R_{TM} = 0$ en un cierto ángulo. Este ángulo se denomina **ángulo de Brewster**. En este ángulo solo la componente TE es reflejada.

Los lentes polarizados toman ventaja del ángulo de Brewster. Estos lentes están diseñados para bloquear las ondas TE, y de esta forma reducir el brillo enceguecedor generado por la reflexión de la luz solar



Así, si giramos los lentes en posición vertical (asumiendo lentes con alto nivel de polarización), el efecto se invierte. Es decir, las ondas TE se transmiten y las TM no.

En el siguiente video, podemos ver el efecto de la polarización. Aquí, la luz no puede pasar a través de dos polarizadores cuando son orientados en direcciones perpendiculares.

Three polarizing filters: a simple demo of a creepy quantum effe...



¿Cómo se explica el efecto del tercer polarizador?

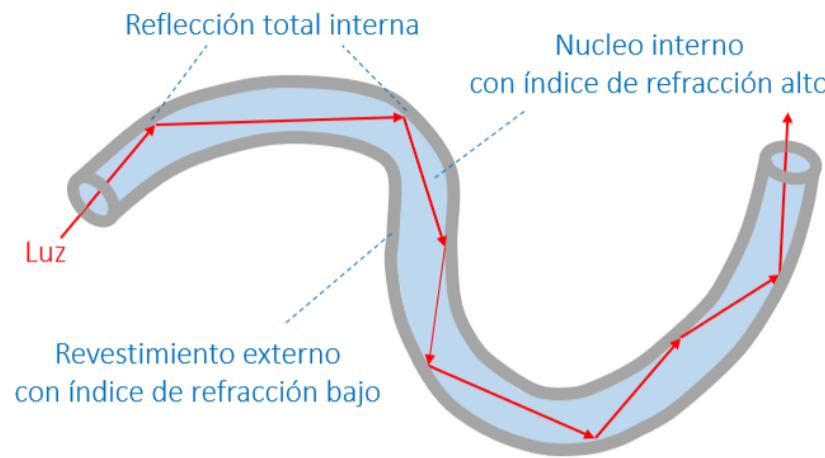
Por otro lado, cuando $n_1 > n_2$, vemos que $R_{TM} = R_{TE} = 0$ sobre cierto ángulo. Este ángulo se denomina **ángulo crítico (θ_c)**. Para determinar el ángulo crítico usamos la ley de Snell.

El ángulo máximo para la onda transmitida es $\theta_t = 90^\circ$, la ley de Snell nos indica que existe un ángulo crítico. Sobre este valor, no existe solución real.

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ \Rightarrow \theta_c = \arcsin(n_2/n_1) \quad (2.12)$$

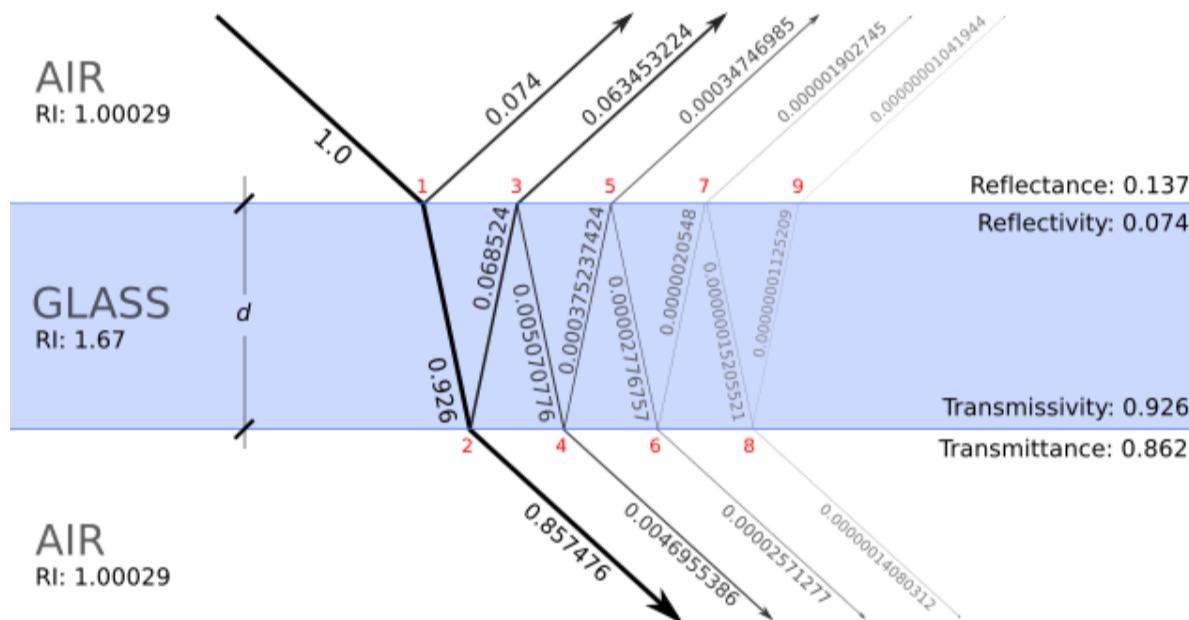
Para $\theta_i > \theta_c$, $R_{TE} = R_{TM} = 1$.

Este mecanismo se llama **reflección interna total** y es la base para el funcionamiento de fibras ópticas y lasers



2.3. Reflección y transmisión en películas delgadas

En el caso materiales de película delgada, las ondas electromagnéticas se reflejan y transmiten múltiples veces.



Considerando los medios 1, 2 y 3 ordenados consecutivamente en dirección de la onda incidente, con el medio 2 condicionado por un espesor d , se puede demostrar que en este caso los coeficientes de Fresnel, para índices de refracción reales son:

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{2i\varphi_2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2i\varphi_2}} \quad (2.13)$$

$$t = \frac{t_{12}t_{23}e^{i\varphi_2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2i\varphi_2}}$$

donde $\varphi_2 = N_2 k_0 d \cos \theta_2$ (θ_2 es el ángulo de transmisión en el medio 2); r_{12} , r_{23} y t_{12} , t_{23} son, respectivamente, los coeficientes de Fresnel desde el medio 1 al medio 2, y desde el medio 2 al medio 3. Estas fórmulas son válidas tanto para ondas TE como para ondas TM.

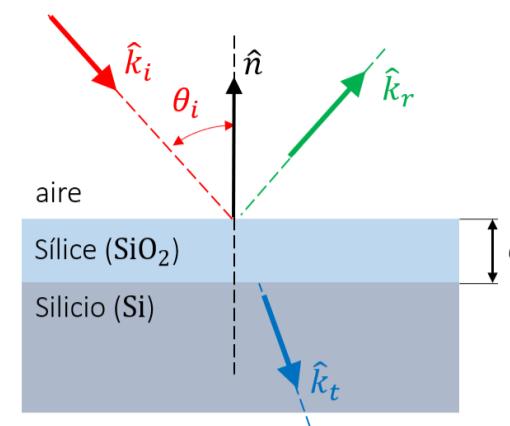
Basado en estas expresiones, podemos calcular la reflectividad y transmisiividad de la película:

$$R = |r|^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos 2\varphi_2}{1 + 2r_{12}r_{23} \cos 2\varphi_2 + r_{12}^2 r_{23}^2} \quad (2.14)$$

$$T = \frac{n_3 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t|^2 = \frac{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}{1 + 2r_{12}r_{23} \cos 2\varphi_2 + r_{12}^2 r_{23}^2}$$

Analicemos como se comportan estas ecuaciones en un caso real.

Como ejemplo, consideremos la reflectividad de una película delgada de sílice (SiO_2) sobre un sustrato de silicio. Esta capa se genera naturalmente debido a la oxidación del silicio



Para simplificar, consideremos:

- índice de refracción del aire: 1.0
- índice de refracción de sílice: 1.5
- índice de refracción del silicio: 4.3
- espectro de longitudes de onda: 300 - 800 nm (visible)
- espesor del sílice, d : variable
- ángulo de incidencia θ_i : variable

```
import numpy as np
from numpy import radians # convertimos grados a radianes
import matplotlib.pyplot as plt
from empylib.waveoptics import multilayer

# Reflectividad en capa delgada
lam = np.linspace(0.3,0.8,100) # Longitud de onda (en um)
n_layers = (1.0,1.5,4.3) # índices de refracción n1, n2, n3

# preparamos el ploteo
def plot_R_multi(theta,d):

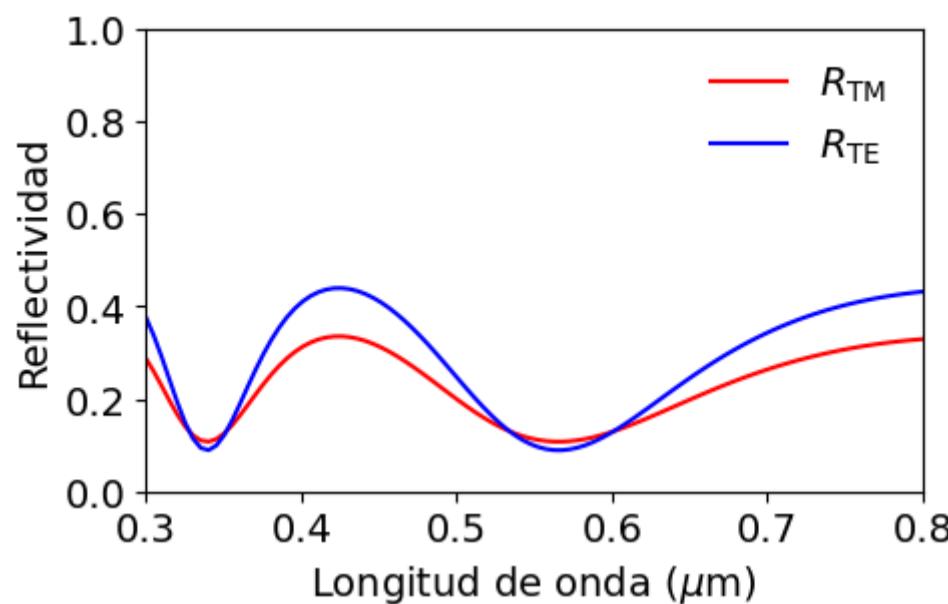
    Rp = multilayer(lam, rad(theta),n_layers, (d,), 'TM')[0]
    Rs = multilayer(lam, rad(theta),n_layers, (d,), 'TE')[0]

    fig, ax = plt.subplots()
    fig.set_size_inches(5, 3)
    plt.rcParams['font.size'] = '14'
    ax.plot(lam,Rp, label='$R_{\mathcal{M}}$', color='red')
    ax.plot(lam, Rs, label='$R_{\mathcal{T}}$',color='blue')
    ax.set_xlim([min(lam),max(lam)])
    ax.set_ylim([0,1.0])
    ax.set_xlabel('Longitud de onda ($\mu\text{m}$)')
    ax.set_ylabel('Reflectividad')
    ax.legend(frameon=False)
```

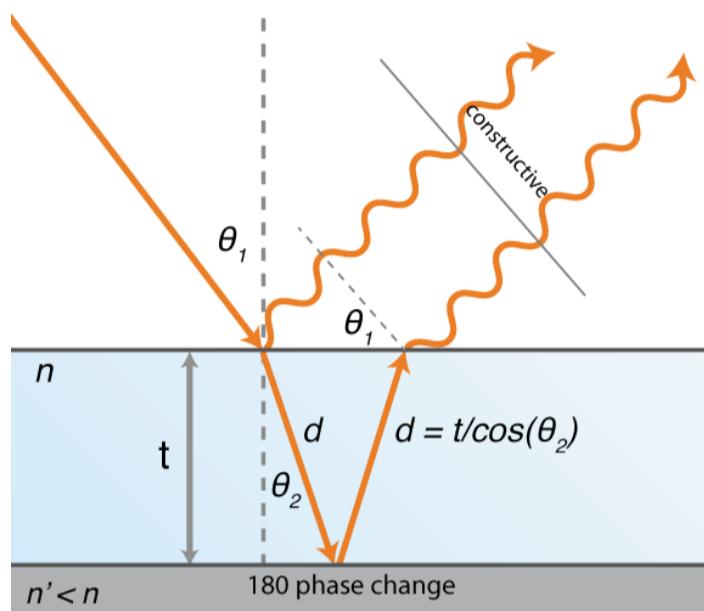
```
from ipywidgets import interact

@interact(theta=(0,89,10), d=(0,1.0,0.01))
def g(theta=30, d=0.3):
    return plot_R_multi(theta,d)
```

theta 30
d 0.30



Estas oscilaciones en la reflectancia al variar θ_i y d son el resultado de la **interferencia** entre las ondas reflejadas en la parte inferior y superior de la película de silicio.



En palabras simples, este fenómeno ocurre porque la onda reflejada en la parte inferior de la película debe recorrer un camino más largo. Esto produce un desfase con las ondas reflejadas en la parte superior que deriva en interferencia constructiva (alta reflectividad) y destructiva (baja reflectividad).

Este fenómeno se manifiesta en forma de color ya que nuestros ojos son sensibles a los cambios de radiación en este espectro.

Analicemos como se manifiesta este fenómeno en forma de color:

```

import numpy as np
from numpy import radians as rad # convertimos grados a radianes
import matplotlib.pyplot as plt
from emplib.waveoptics import multilayer
from emplib.ref_spectra import AM15
from emplib.ref_spectra import color_system as cs
cs = cs.hdtv

# Reflectividad en capa delgada
lam = np.linspace(0.3,0.8,100) # Longitud de onda (en um)
n_layers = (1.0,1.5,4.3)      # índices de refracción n1, n2, n3

cs.interp_internals(lam)
def color_R_film(d):
    Rp = lambda tt,d : multilayer(lam, rad(tt),n_layers, (d,), 'TM')[0]
    Rs = lambda tt,d : multilayer(lam, rad(tt),n_layers, (d,), 'TE')[0]

    # formateamos la figura
    fig, ax = plt.subplots()
    fig.set_size_inches(6, 4)
    plt.rcParams['font.size'] = '14'

    theta = np.linspace(0,90,100) # angulo de incidencia
    for tt in theta:
        R = 0.5*Rp(tt,d) + 0.5*Rs(tt,d)
        Irad = R*AM15(lam)
        html_rgb = cs.spec_to_rgb(Irad, out_fmt='html')
        ax.axvline(tt, color=html_rgb, linewidth=6)
    ax.set_xlim([min(theta),max(theta)])
    ax.set_ylim([0,1.0])
    ax.axes.yaxis.set_visible(False)
    ax.set_xlabel('Ángulo de incidencia (deg)')

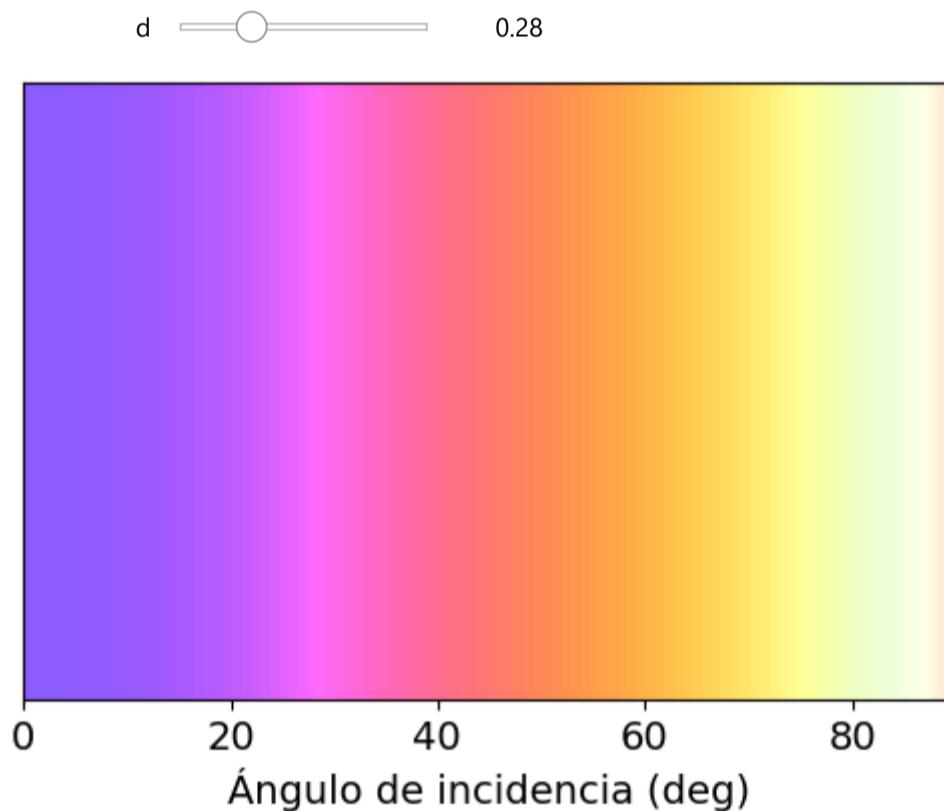
```

```

from ipywidgets import interact

@interact(d=(0,1.0,0.001))
def g(d=0.28):
    return color_R_film(d)

```



2.4. Referencias

Griffths D., *Introduction to Electrodynamics*, 4th Ed, Pearson, 2013

- 7.3 Maxwell's Equations (7.36)
- 9 Electromagnetic Waves (9.3 y 9.4)