1. La radiación como un fenómeno electromagnético

Contents

MEC501 - Manejo y Conversión de Energía

Solar Térmica

Profesor: Francisco Ramírez CueSvas

Fecha: 12 de Agosto 2022

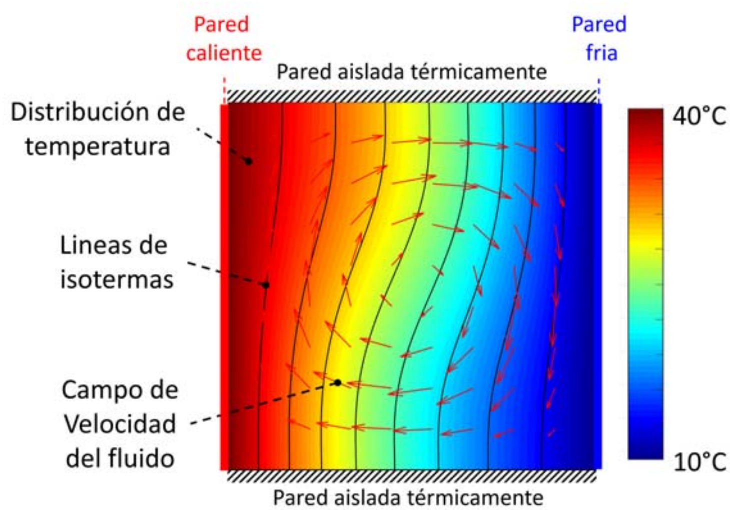
Tabla de contenidos

Repaso de cálculo vectorial

Campo escalar y vectorial

- Un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud. Por ejemplo, distribución de densidad, temperatura o presión. En coordenadas cartesianes: $f = f(x, y, z)$, donde f es un campo escalar.
- Un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Por ejemplo, distribución de velocidades, campo eléctrico o magnético. En coordenadas cartesianas: $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$, donde $\vec{f}$ es un campo escalar.

Por ejemplo, consideremos la siguiente modelación de convección natural en cavidad cuadrada:



Aquí podemos visualizar la distribución espacial de temperaturas y velocidades de un fluido sometido a las condiciones indicadas en la figura.

De esta figura podemos identificar:

- Campo escalar: Distribución de temperaturas
- Campo vectorial: Distribución de velocidades

Operadores diferenciales

Operador Del.

Definimos el operador ∇ o "del", como:

$$\nabla = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2}$$

Operador Gradiente.

Es equivalente a la derivada de una función, pero en múltiples dimenciones. Permite identificar zonas de crecimiento o decrecimiento de un campo escalar o vectorial. Se define como el operador Del multiplicado por el campo escalar.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \tag{3}$$

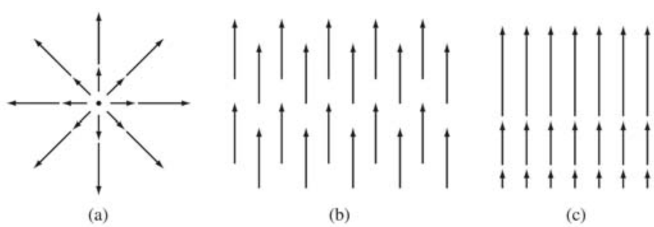
> El gradiente de un campo escalar f, es un vector

Operador Divergente.

Se aplica a campos vectoriales. Es una medida de cuanto un campo vectorial diverge o converge respecto de un punto en cuestión. Se define como el producto punto entre el operador Del y un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{4}$$

Por ejemplo:



(a) $\nabla \cdot \vec{f} > 0$

(b) $\nabla \cdot \vec{f} = 0$

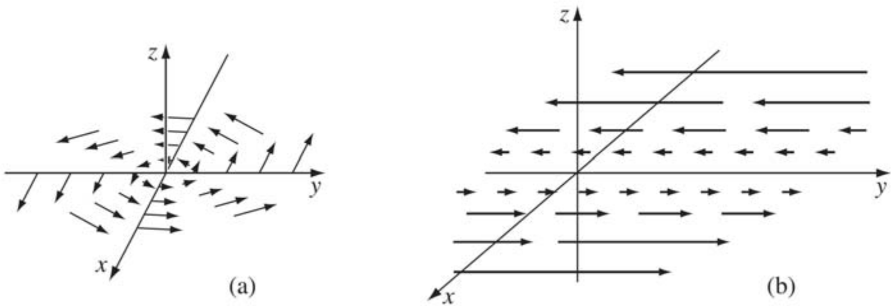
(c) $\nabla \cdot \vec{f} > 0$

Operador Rotacional.

Se aplica a campos vectoriales. Es una medida de cuanto un campo vectorial rota respecto de un punto en cuestión. Se define como el producto cruz entre el operador Del y un campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{5}$$

Por ejemplo:



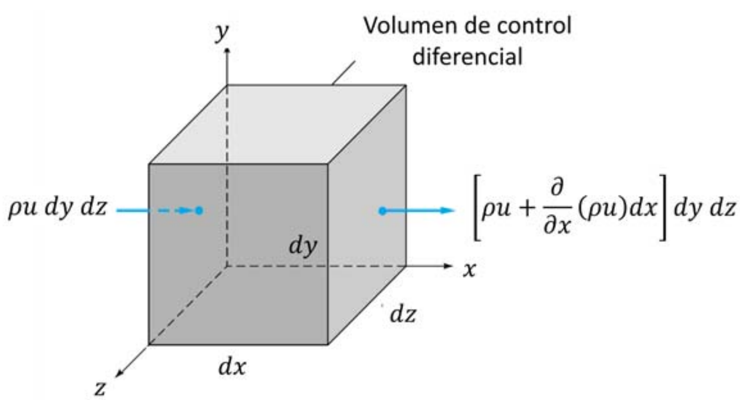
(a) $\nabla \times \vec{f} > 0$

(b) $\nabla \times \vec{f} > 0$

> En la figura anterior (divergente), $\nabla \times \vec{f} = 0$ en todos los casos.

Ejemplos de uso de operadores diferenciales

Los operadores diferenciales permiten una descripción más compacta en de las formuals basadas en ecuaciones diferenciales parciales.



Un ejemplo conocido es el caso de la ecuación de conservación de masa en su forma diferencial.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Usando el operador Del,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0,$$

o bien:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \left(\nabla \cdot \vec{V}\right) = 0.$$

Ecuaciones de Maxwell

Ley de Gauss

El flujo de campo electrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica, ρ, contenida dentro de esta superficie.

En su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} \right) = \rho \tag{6}$$

Donde:

- $\vec{E}$, es el **campo eléctrico** (se mide en unidades de $\mathrm{V/m}$).
- $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$, es la **permitividad** en el vacío.

> Un campo eléctrico diveregente(convergente) es el resultado de una carga eléctrica positiva(negativa) que actúa como fuente(sumidero)

Ley de continuidad del campo magnético

No existen cargas magnéticas que den lugar a un campo magnético

En su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \vec{H} \right) = 0 \tag{7}$$

Donde:

- $\vec{H}$, es la **intensidad de campo magnetico** (se mide en unidades de $\mathrm{A/m}$).
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$, es la **permeabilidad** magnética en el vacío.

> A diferencia del campo eléctrico, el campo magnético es continuo. Es decir no tiene fuentes ni sumideros

Es común en los textos de física ver las ecuaciones de campo magnético respresentadas en base al **vector campo magnético** $\vec{B}$ y no a $\vec{H}$ Esto, porque $\vec{B}$ representa la componente "experimentalmente medible" del campo magnético y la que efectivamente afecta a las cargas en movimiento. Ambas variables se relaciona mediante $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

De igual manera, el análogo del campo eléctrico se denomina **desplazamiento eléctrico**, y se relaciona con el campo eléctrico mediante $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. En este caso, la componente "experimentalmente medible" es $\vec{E}$ y, por ende, es formalmente utilizada en los textos de física.

Ley de Faraday

Un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico rotacional

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{8}$$

- Notar que el campo magnético debe ser variable en el tiempo para poder inducir una corriente.

Ley de Ampere

Una corriente eléctrica induce un campo magnético rotacional alrededor de ella

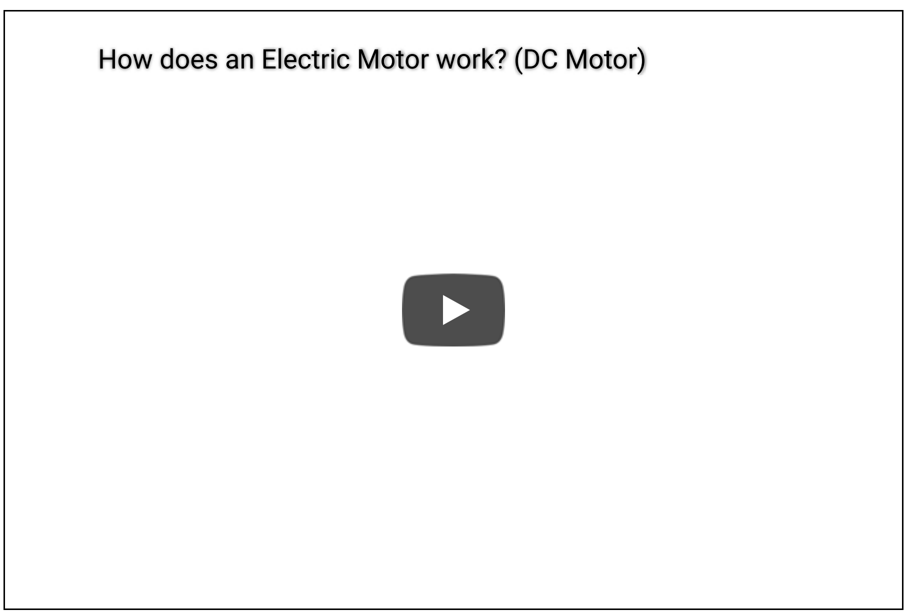
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{9}$$

Donde:

- $\vec{J}$, es la **densidad de corriente** eléctrica (se mide en unidades de $\mathrm{A/m^2}$).

La ley de Ampere y de Faraday son la base del funcionamiento de motores de inducción, motores DC, transformadores, etc.

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('CWulQ1ZSE3c', width=600, height=400,  playsinline=0,
start=42)
```



Corrección de la ley de Ampere

Es posible demostrar que, para un campo vectorial $\vec{f}$, se cumple la siguiente identidad

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{f} = 0,$$

Analicemos el divergente en la ley de Faraday

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = -\nabla \cdot \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mu_0 \vec{H}\right) = 0$$

La relación se cumple por la ley de continuidad del campo magnético

Por otro lado, el divergente en la ley de Ampere:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot \vec{J} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Sin embargo, por la ley de conservación de masa:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Claramente, la ecuación de Ampere no está completa. La corrección, fue propuesta por James Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{10}$$

El último término es conocido como la *corriente de desplazamiento de Maxwell*.

> A través de esta contribución James C. Maxwell logra unificar las teorías de electricidad, magnetismo y la luz en un solo fenómeno, **las ondas electromagnéticas**.

Ondas electromagnéticas

Ondas electromagnéticas en el vacío

En el vacío, no existen cargas eléctricas ($\rho = 0$) ni corrientes eléctricas ($\vec{J} = 0$), y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Analicemos el rotacional sobre la ley de faraday

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

Mediante la identidad,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla \cdot \nabla \vec{E},$$

y la ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, podemos demostrar:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

Finalmente, mediante la ley de Ampere modificada, determinamos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Esta es la ecuación de onda en su forma tridimensional, la cual acepta soluciones del tipo:

$$E_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \hat{e},$$

donde:

- $\vec{k}$ es el vector de onda
- $\vec{r}$ es un vector de posición
- ω es la frecuencia angular (rad/s)
- E_0 es la amplitud
- $\hat{e}$ es la dirección de oscilación de la onda.

Reemplazando esta solución en la ecuación de onda, determinamos la **relación de dispersión** entre la **magnitud del vector de onda en el vacío**, $k_0 = |\vec{k}|$, y la frecuencia angular:

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \tag{11}$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s},$$

es la velocidad de la luz.

En general, estamos más familizarizados con los conceptos de **longitud de onda** λ y **frecuencia** ν, para caracterizar ondas electromagnéticas. Estas variables se relacionan con el vector de onda y la frecuencia mediante:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \;\; \omega = 2\pi\nu \tag{12}$$

De igual forma, mediante la relación de dispersión, podemos establecer la siguiente relación entre la longitud de onda y la frecuencia:

$$\lambda\nu = c_0 \tag{13}$$

> Esto quiere decir, que un punto $\vec{r}$ arbitrario de la onda, viaja en el vacío a una velocidad constante c_0, **independendiente de su frecuencia**.

El vector de onda representa la dirección de propagación de la onda. A partir de la ley de Gauss, podemos demostrar:

$$\vec{k}\cdot\hat{e} = 0 \tag{14}$$

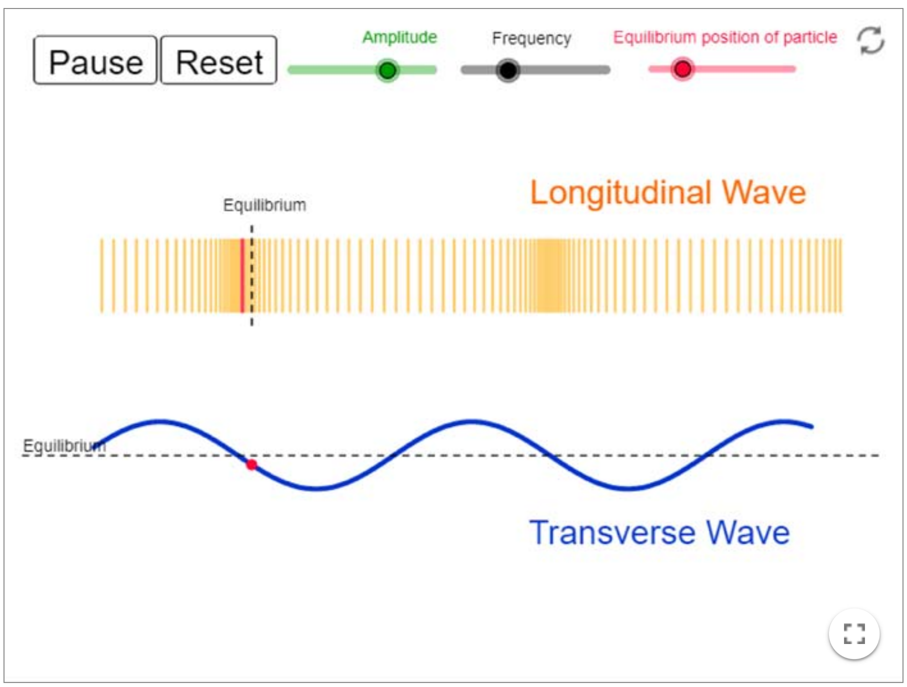
Es decir, el campo eléctrico oscila en dirección perpendicular a la dirección de propagación.

> En otras palabras, el campo electrico representa una **onda transversal.**

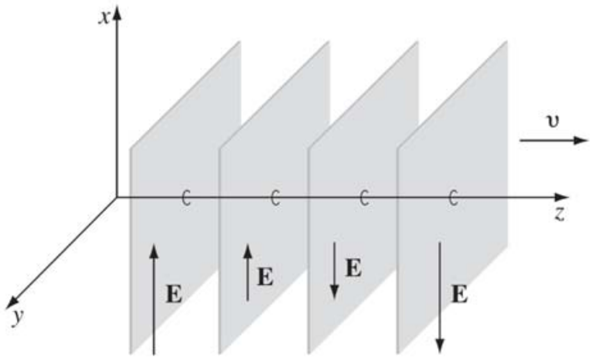
Esquema de una onda transversal

En general, tenemos dos tipos de ondas, transversales, y longitudinales

```python
from IPython.display import IFrame, display
display(IFrame('https://www.geogebra.org/material/iframe/id/auyft2pd/width/640/height/480/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/true/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/false','700px', '450px'))
```



Debido a que el campo eléctrico toma la forma $\vec{E} = E_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\hat{e}$,$ decimos que se comporta como una **onda plana**, debido a que el campo es constante sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación



De igual forma, podemos demostrar que la intensidad de campo magnético en el vacío también satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Utilizando un tratamiento similar al de $\vec{E}$, concluiremos que $\vec{H}$:

- Se comporta como una onda de la forma $H_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\hat{h}$
- Se mueve en el vacio a una velocidad constante $c_0 \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- Es una onda transversal ($\vec{k}\cdot\hat{h} = 0$ por la ley de continuidad).

Finalmente, mediante la ley de Faraday (o Ampere), deducimos:

$$\hat{h}H_0 = \frac{E_0}{k_0 Z_0}\left(\hat{k}\times\hat{e}\right),$$

donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, es la **impedancia del vacío** (se mide en Ω).

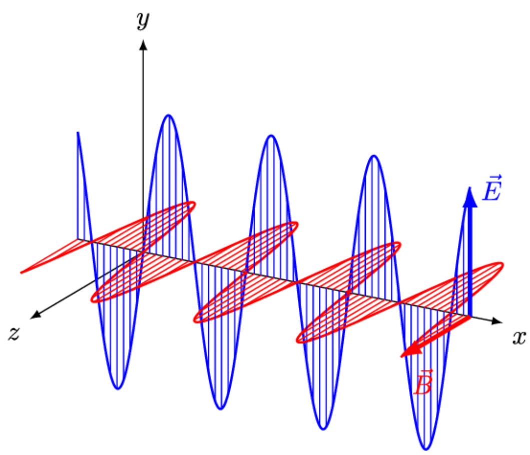
De esta relación concluímos:

1. El campo eléctrico magnético y el vector de onda son mutuamente perpendiculares ($H \perp E \perp k$)
2. La amplitud de la intensidad de campo magnético y del campo eléctrico, estan relacionadas por: $H_0 = \frac{E_0}{k_0 Z_0}$

En resumen:

1. En el vacío, $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se comportan como ondas trasversales de la forma $\propto e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$.
2. El vector de onda $\vec{k}$ representa la dirección de propagación de $\vec{E}$ y $\vec{H}$.
3. $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se propagan a una velocidad constante $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3.00 \times 10^8$ m/s.

4. La magnitud del vector de onda en el vacío, k_0, y la frecuencia angular, ω, están relacionadas por $k_0 = \omega/c_0$
5. $\vec{E}$, $\vec{H}$ y $\vec{k}$ son mutuamente perpendiculares.
6. Las amplitudes de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están asociadas por la relación $H_0 = \frac{E_0}{k_0 Z_0}$, donde $Z_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.



Esquema de una onda electromagnética

Ondas electromagnéticas en la materia

La materia esta compuesta por cargas (electrónes, átomos, moléculas). Por lo tanto, a diferencia del vacío, la densidad de carga (ρ) y de corriente ($\vec{J}$) eléctricas están presentes en las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

> En general, existe un tercer término asociado con la polarización magnética del material. Sin embargo, en este curso veremos solo materiales paramagnéticos y, por lo tanto, este término será ignorado.

Asumiendo un medio homogéneo, y mediante la relación:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \tag{15}$$

donde $\vec{D}$ es el desplazamiento eléctrico, y $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, es la **constante dieléctrica** compleja;

podemos demostrar que las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en la forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Estas ecuaciones tiene la misma forma que las ecuaciones de Maxwell en el vacío, y por lo tanto todas las conclusiones anteriores aplican a este caso.

La gran diferencia está en la relación de dispersión. En este caso:

$$|k| = N\frac{\omega}{c_0} \tag{16}$$

donde $N = \sqrt{\varepsilon} = n + i\kappa$, es el **índice de refracción complejo**. En general n se conoce como el **índice de refracción**, y κ como **extinsión**.

> Notar que la velocidad de la onda también cambia a $c = c_0/n$

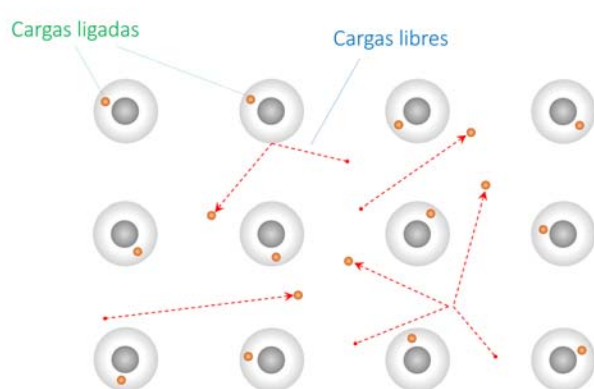
Igualmente la relación entre H_0 y E_0, es de la forma

$$H_0 = \frac{E_0}{k_0 Z_0 Z_r},$$

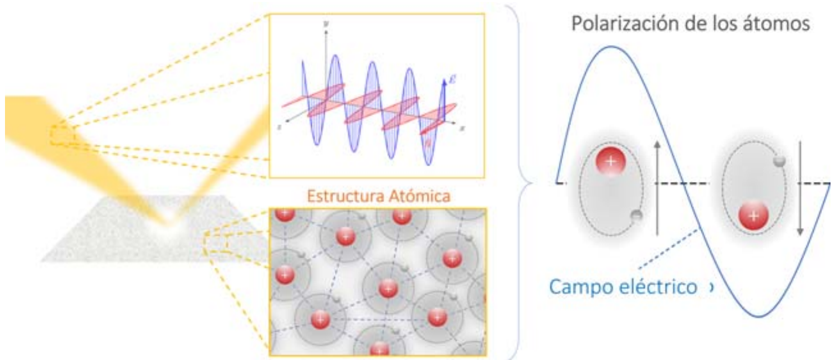
donde $Z_r = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ es la **impedancia relativa**.

¿Qué representa la constante dielectrica compleja?

Los materiales están compuestos de átomos, con un núcleo positivo y electrones negativos. Estos electrones interactúan con los átomos de distintas formas; algunos orbitan alrededor del núcleo mientras que otros se mueven libremente por el material. Así, podemos separar las cargas eléctricas en dos tipos: **cargas ligadas**, y **cargas libres**.



La interacción de las onda electromagnéticas con las cargas ligadas induce **polarización**, es decir, el nucleo y el electrón se polarizan, oscilando en sincronía con el campo externo. Esta respuesta está representada por la parte real de la constante dielectrica (ε').



Las ondas electromagnéticas aceleran las cargas libres, generando **corrientes eléctricas inducidas**. Algunas cargas libres móbiles colicionan con otros electrónes o núcleos, disipando energía. Esta respuesta está representada por la parte imaginaria de la constante dieléctrica (ε'').

Esta discipación de energía está representada por la resistencia eléctrica, y es la reponsable de la generación de calor en metaeles.

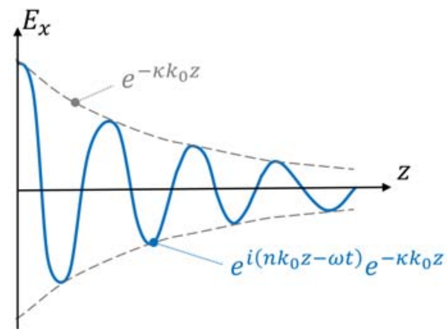
De hecho, la conductividad eléctrica σ en la ley de Ohm, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, está relacionada con la parte imaginaria de la constante dielectrica por:

$$\sigma = \varepsilon_0 \omega \varepsilon'' \tag{17}$$

¿Que significa que el vector de onda sea complejo?

Analicemos la solución general de la ecuación de onda:

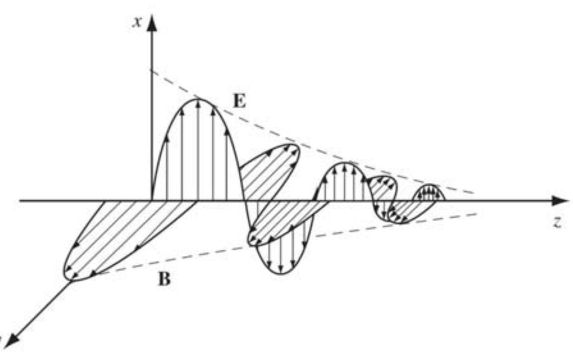
$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= E_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\hat{e} \\
&= E_0 e^{i\left(Nk_0\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\hat{e} \\
&= E_0 e^{i\left(nk_0\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} e^{-\kappa k_0\left(\hat{k}\cdot\vec{r}\right)}\hat{e}
\end{aligned}
$$



Lo que notamos es, mientas que el índice de refracción n representa el **cambio en la oscilación espacial de la onda**, la extinsión κ indica un **decaimiento en la amplitud**.

En resumen, en materiales paramagnéticos:

1. $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se comportan como ondas trasversales de la forma $\propto e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$.
2. La relación de dispersión esta dada por $k = N\frac{\omega}{c_0}$, donde $N = n + i\kappa$ es el índice de refracción complejo.
3. $N = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''}$, donde ε es la constante dieléctrica
4. $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se propagan a una velocidad constante $c = c_0/n$
5. κ representa la extinsión de la onda en el espacio.
6. $\vec{E}$, $\vec{H}$ y $\vec{k}$ son mutuamente perpendiculares.
7. Las amplitudes de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están asociadas por la relación $H_0 = \frac{E_0}{k_0 Z_0 Z_r}$, donde $Z_r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.



Esquema de una onda electromagnética en un material

Vector de Poynting

El vector de Poynting, $\vec{S}$, representa el flujo de energía electromagnética por unidad de área. Está dado por la relación:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right), \tag{18}$$

donde $\langle\cdots\rangle$ reprensenta el promedio en un periodo, y * reprenta el complejo conjugado.

Consideremos, por ejemplo, el vector de Poynting para una onda plana que se propaga en un material con índice de refracción $N = n + i\kappa$:

$$\begin{aligned}
\langle\vec{S}\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} H_0^* e^{-i\left(\vec{k}^*\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right]\left(\hat{e}\times\hat{h}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{E_0^2}{k_0 Z_0 Z_r^*} e^{i\left(k_0 N\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} e^{-i\left(k_0 N^*\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right]\hat{k} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{E_0^2}{k_0 Z_0 Z_r^*}\right) e^{-2k_0\kappa\left(\hat{k}\cdot\vec{r}\right)}\hat{k} \\
&= \frac{1}{2}\frac{nE_0^2}{k_0 Z_0} e^{-\alpha\left(\hat{k}\cdot\vec{r}\right)}\hat{k}
\end{aligned}$$

El término $\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$ es el **coeficiente de absorpción**. El inverso, $\delta = 1/\alpha$, se denomina **profundidad superficial** y representa la profundidad de penetración de la onda electromagnética en un material.

Como referencia, $\delta \sim 1000$ m en fibras ópticas a $\lambda = 1.55$ μm, que es la onda utilizada en comunicaciónes óptica. Por otro lado, en metales como la plata, oro o aluminio, $\delta \sim 10$ nm para $\lambda \sim 500$ nm (espectro de luz visible)

Ahora con los conceptos de ondas electromagnéticas y vector de Poynting, pasemos a revisar este video explicativo de como fluye la energía en las redes eléctricas

```
from IPython.display import YouTubeVideo
YouTubeVideo('bHIhgxav9LY', width=600, height=400,  playsinline=0,
start=42)
```

Referencias

Griffths D., *Introduction to Electrodynamics*, 4th Ed, Pearson, 2013

- 1.2 Diferential Calculus
- 7.2 Electromagnetic Induction
- 7.3 Maxwell’s Equations (excepto 7.36)
- 8.1 Charge and Energy
- 9 Electromagnetic Waves (hasta 9.4)

By Francisco V. Ramirez-Cuevas