Aspectos generales de programación y algoritmos

Contents

MEC301 - Métodos Numéricos

Profesor: Francisco Ramírez Cuevas

Fecha: 1 de Agosto 2022

1.1. Complejidad de algoritmos

1.1.1. ¿Qué es un algoritmo?

Un algoritmo es una serie ordenada de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas.

Por ejemplo:

```
def f(n):
    out = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            out += i*j
    return out
```

La complejidad de un algoritmo es la **relación entre el tamaño del input** N **y la cantidad de operaciones para completarlo**. Una forma de determinar la complejidad del algoritmo es **contabilizar las operaciones básicas**:

- sumas
- restas
- multiplicaciones
- divisiones
- asignación de variables
- llamados a otras funciones

Por ejemplo, en el siguiente algoritmo:

```python
def f(n):
    out = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            out += i*j
    return out
```

El número de operaciones son:

- sumas: N^2
- restas: 0
- multiplicaciones: N^2
- divisiones: 0
- asignación de variables: $2N^2 + N + 1$
- llamados a otras funciones: 0

Así, el **total de operaciónes** para completar el algoritmo es $4N^2 + N + 1$.

1.1.2. Notación *Big-O*

A medida que el tamaño de N aumenta, las operaciones de mayor orden se hacen dominantes. Así, podemos decir que la complejidad del algoritmo anterior es del orden $O(N^2)$. Esta notación, denominada ***Big-O***, es comúnmente utiilzada para **determinar la complejidad del algoritmo cuando** N **es de gran tamaño**.

> **Nota** Un algoritmo tiene complejidad **polynomial** cuando es del tipo $O(N^c)$, donde c es una constante.

Analicemos la complejidad del siguiente algortimo:

```
def my_divide_by_two(n):

    out = 0
    while n > 1:
        n /= 2
        out += 1

    return out
```

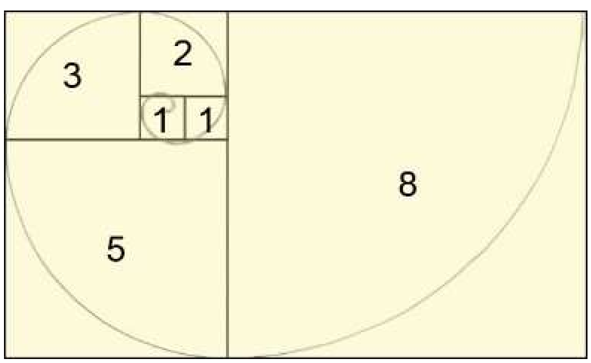
A medida que N crece podemos ver que la parte dominante de este algoritmo esta dentro de la operación `while`.

Si analizamos el número de iteraciones I para un determinado N, notaremos que estos están en la relacción $N/2^I = 1$, es decir $I \approx \log N$. Así, la complejidad de este algoritmo es $O(\log N)$.

> **Nota** Un algoritmo tiene complejidad **logaritmica** cuando es del tipo $O(\log N)$.

1.1.3. Serie de Fibonacci y complejidad exponencial

Una operación matemática puede ser ejecutada mediante algoritmos con diferente complejidad. Por ejemplo, consideremos la serie de Fibonacci.



Esta operación puede ejecutarse de dos maneras: (1) de forma iterativa, (2) de forma recursiva

(1) Forma iterativa. complejidad $O(N)$

```
def my_fib_iter(n):

    out = [1, 1]

    for i in range(2, n+1):
        out.append(out[i - 1] + out[i - 2])

    return out[-1]
```

```
my_fib_iter(6)
```

```
13
```

(2) Forma recursiva. complejidad $O\left(2^N\right)$

```
def my_fib_rec(n):

    if n < 2:
        out = 1
    else:
        out = my_fib_rec(n-1) + my_fib_rec(n-2)

    return out
```

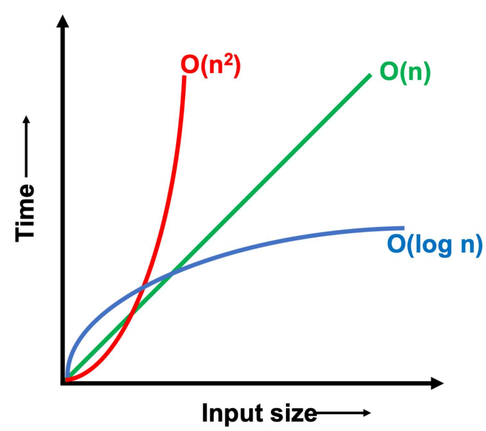
```
my_fib_rec(5)
```

```
8
```

> **Nota** Un algoritmo tiene complejidad **exponencial** cuando es del tipo $O(c^N)$, donde c es una constante.

1.1.4. Notación *Big-O* y tiempo de computación

La complejidad en la notación *Big-O* nos entrega una referencia del tiempo computacional dedicado para un determinado algoritmo.



Así, por ejemplo, si consideramos un procesador Intel i7-12700K - 5GHz *(≈ 5 billones de operaciones por segundo)*:

- `my_fib_iter(100)`
  tomaría $\approx$ 0.2 nanosegundos
- `my_fib_recur(100)`
  tomaría $\approx$ 8 trillones de años

Podemos evaluar el tiempo de ejecución con la sentencia `%time`

```
%time a = my_fib_iter(30)
```

```
CPU times: user 0 ns, sys: 0 ns, total: 0 ns
Wall time: 8.34 µs
```

```
%time a = my_fib_rec(30) #Nota. No probar N>30
```

```
CPU times: user 141 ms, sys: 0 ns, total: 141 ms
Wall time: 129 ms
```

> **nota** En general, se deben evitar los algoritmos de complejidad exponencial

1.2. Representación binaria y errores de reondeo

En un computador, la información es almacenada en formato binario. Un **bit** puede tener dos valores: 0 o 1. El computador es capaz de interpretar número utilizando códigos binarios.

Por ejemplo, el código de 8 bits 001000101 es equivalente a:

$$0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 37$$

Cada variable tiene una cantidad de bits asociada.

Tipo	Nombre	Número de bits	Rango de valores
bool	Boolean	1	`True` o `Flase`
int32	Single precision integer	32	-2147483648 a 2147483647
float64	Double presition float	64	$(-1)^s 2^{e-1024}(1+f)$ s: 1 bit; e: 11 bits; f: 52 bits

En python el tipo de variable se asigna dinámicamente. El número de bits depende de la versión de Python y el formato de la máquina en número de bits. Por ejemplo, para una máquina de 64 bits:

```
type(34) #int64
```

```
int
```

```
type(0.4e8) #float64
```

```
float
```

Usando “Numpy”, podemos controlar el número de bits asignados a una determinada variable

```
import numpy as np
np.zeros(1, dtype='int16')
```

```
array([0], dtype=int16)
```

1.2.1. Redondeo en variables tipo `float`

En variables tipo `float`, para un determinado número de bits, existe un máximo y mínimo valor que puede ser representado. En Python, valores mayores o menores a estos son representados como `inf` o `0`, respectivamente.

Podemos deterinar estos límites mediante la librería `sys`

```
import sys
sys.float_info
```

```
sys.float_info(max=1.7976931348623157e+308, max_exp=1024,
max_10_exp=308, min=2.2250738585072014e-308, min_exp=-1021,
min_10_exp=-307, dig=15, mant_dig=53, epsilon=2.220446049250313e-
16, radix=2, rounds=1)
```

```
2e+308 #mayor al maximo 1.7976931348623157e+308
```

```
inf
```

```
1e-324 # menor al mínimo no normalizado 5e-324
```

```
0.0
```

```
# Mínimo no normalizado
sys.float_info.min * sys.float_info.epsilon
```

```
5e-324
```

1.2.2. Errores de redondeo en variables tipo `float`

Las **variables del tipo `int`** no son divisibles y, por lo tanto, **no sufren errores de redondeo**:

```python
5 - 2 == 3
```

```
True
```

Sin embargo, una **variable del tipo `float`** es divisible. Esto significa que existe una cantidad de dígitos significativos reservados para un número, lo que **puede inducir errores de redondeo**:

```python
0.1 + 0.2 + 0.3 == 0.6
```

```
False
```

Para este tipo de operaciones es recomendable utilizar la función `round`

```python
round(0.1 + 0.2 + 0.3) == round(0.6)
```

```
True
```

1.2.3. Acumulacion de errores de reondeo

Cuando un código ejecuta una secuencia de operaciones, los errores de redonde suelen amplficarse.

```python
# Si ejecutamos esta operación una vez
1 + 1/3 - 1/3
```

```
1.0
```

```python
def add_and_subtract(iterations):
    result = 1

    for i in range(iterations):
        result += 1/3

    for i in range(iterations):
        result -= 1/3
    return result
```

```
add_and_subtract(100) # Si ejecutamos esta operación 100 veces
```

```
1.0000000000000002
```

```
add_and_subtract(1000) # Si ejecutamos esta operación 1000 veces
```

```
1.0000000000000064
```

```
add_and_subtract(10000) # Si ejecutamos esta operación 10000 veces
```

```
1.0000000000001166
```

1.3. Identificación de errores y debugging

Cuando los códigos de programación son grandes, a veces es necesario utlizar herramientas de ***debugging***. Estas herramientas nos permiten revisar las distintas etapas dentro de un algoritmo.

Podemos llamar al debugger agregando mediante la librería *python debugger* `pdb`.

Por ejemplo, consideremos la siguiente función

```
def square_number(x):
    sq = x**2
    sq += x

    return sq
```

```
square_number('10')
```

```
---------------------------------------------------------------------------
TypeError                                 Traceback (most recent call last)
Input In [26], in <cell line: 1>()
----> 1 square_number('10')

Input In [25], in square_number(x)
      1 def square_number(x):
----> 2     sq = x**2
      3     sq += x
      5     return sq

TypeError: unsupported operand type(s) for ** or pow(): 'str' and 'int'
```

Agregando la sentencia `%pdb on` antes de llamar la función podemos analizar el codigo y detectar posibles fuentes de error.

```
# Llamamos al debugger de python
%pdb on
square_number('10')
```

```
Automatic pdb calling has been turned ON
```

```
---------------------------------------------------------------------------
TypeError                                 Traceback (most recent call last)
Input In [27], in <cell line: 3>()
      1 # Llamamos al debugger de python
      2 get_ipython().run_line_magic('pdb', 'on')
----> 3 square_number('10')

Input In [25], in square_number(x)
      1 def square_number(x):
----> 2     sq = x**2
      3     sq += x
      5     return sq

TypeError: unsupported operand type(s) for ** or pow(): 'str' and 'int'
```

```
>
c:\users\francisco.ramirez.c\appdata\local\temp\ipykernel_13000\280
2720476.py(2)square_number()

ipdb> help

Documented commands (type help <topic>):
========================================
EOF    commands   enable    ll        pp       s
until
a      condition  exit      longlist  psource  skip_hidden      up
alias  cont       h         n         q        skip_predicates  w
args   context    help      next      quit     source
whatis
b      continue   ignore    p         r        step
where
break  d          interact  pdef      restart  tbreak
bt     debug      j         pdoc      return   u
c      disable    jump      pfile     retval   unalias
cl     display    l         pinfo     run      undisplay
clear  down       list      pinfo2    rv       unt

Miscellaneous help topics:
==========================
exec  pdb

ipdb> h a
a(rgs)
        Print the argument list of the current function.
ipdb> a
x = '10'
ipdb> h p
p expression
        Print the value of the expression.
ipdb> p x**2
*** TypeError: unsupported operand type(s) for ** or pow(): 'str'
and 'int'
ipdb> p locals()
{'x': '10'}
ipdb> quit
```

```
# detenemos el debugger
%pdb off
```

```
Automatic pdb calling has been turned OFF
```

También podemos agregar *breakpoints* en distintas líneas de código para detener el *debugger*.

```
import pdb
def square_number(x):

    pdb.set_trace() # agregamos un 1er breakpoint
    sq = x**2

    pdb.set_trace() # agregamos un 2do breakpoint

    sq += x

    return sq
```

```
square_number(3)
```

```
>
c:\users\francisco.ramirez.c\appdata\local\temp\ipykernel_13000\150
2937933.py(5)square_number()

ipdb> a
x = 3
ipdb> p locals()
{'x': 3}
ipdb> sq
*** NameError: name 'sq' is not defined
ipdb> continue
>
c:\users\francisco.ramirez.c\appdata\local\temp\ipykernel_13000\150
2937933.py(9)square_number()

ipdb> p locals()
{'x': 3, 'sq': 9}
ipdb> sq
9
ipdb> p sq - x
6
ipdb> quit
```

Algunos comandos útiles de `pdb`:

- `help`: lista de todos los comandos del debugger
- `h` *#comando*: detalle del funcionamiento de un comando en específico
- `a` o `args`: muestra el valor del argumento de la función
- `p`: imprime el valor de una expresión específica. Usar `locals()` para mostrar valor de variables locales
- `pdb.trace()`: agrega un *breakpoint* (pausa en el código)
- `continue`: continua con el código despues de un *breakpoint*
- `quit`: finaliza el debugger.

1.4. Referencias

Kong Q., Siauw T., Bayen A. M. "Python Programming and Numerical Methods – A Guide for Engineers and Scientists", 1st Ed., Academic Press, 2021

- Capitulo 8 (Complejidad de algoritmos)
- Capítulo 9 (Representación binaria y errores de redondeo)
- Calítulo 10 (Identificación de errores y debugging)
