LABORATORIUM 1

Algorytmy geometryczne

Ćwiczenie 1 – sprawozdanie

Hieronim Koc

25.10.2022

grupa nr 4, czwartek_11_np_4

Dane techniczne specyfikacji komputerowej:

- Procesor : AMD Ryzen 5 4600H with Radeon Graphics 3.00 GHz
- RAM: 8.00 GB
- Typ system: 64-bitowy system operacyjny
- Środowisko: Jupyter notebook
- System operacyjny: Ubuntu 22.04 LTS Jammy Jellyfish (2022-04-21)

Wszystkie testy i ich implementacje były wykonywane w języku programowania Python 3.9.12, z wykorzystaniem zewnętrznych bibliotek takich jak: *numpy*, *matplotlib.* Oraz wewnętrznej biblioteki jaką jest *random*.

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się i wprowadzenie w zagadnienia geometrii obliczeniowej. Implementacja podstawowych predykatów geometrycznych, przeprowadzanie testów, wizualizacja i opracowanie wyników.

Opis ćwiczenia

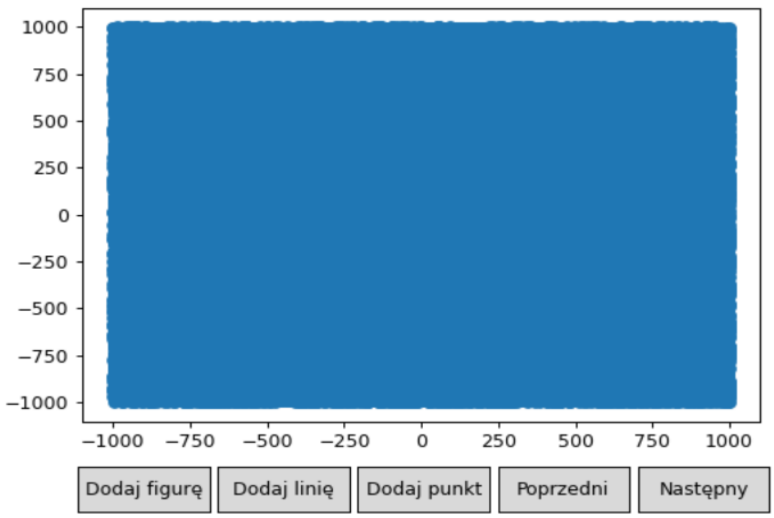
Ćwiczenie składało się z wielu zadań związanych z generowaniem punktów na płaszczyźnie i badanie ich jak się zachowują względem siebie.

Generowanie punktów na płaszczyźnie

Generowanie punktów i sprawdzenie wizualne jak rozłożą się na płaszczyźnie. Korzystając z biblioteki *random* zostały wygenerowane 4 zestawy punktów typu *float*:

1. 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000]
2. 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-10^{14}, 10^{14}]
3. 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=100
4. 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000] leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b), gdzie: a = [-1.0, 0.0], b = [1.0, 0.1]

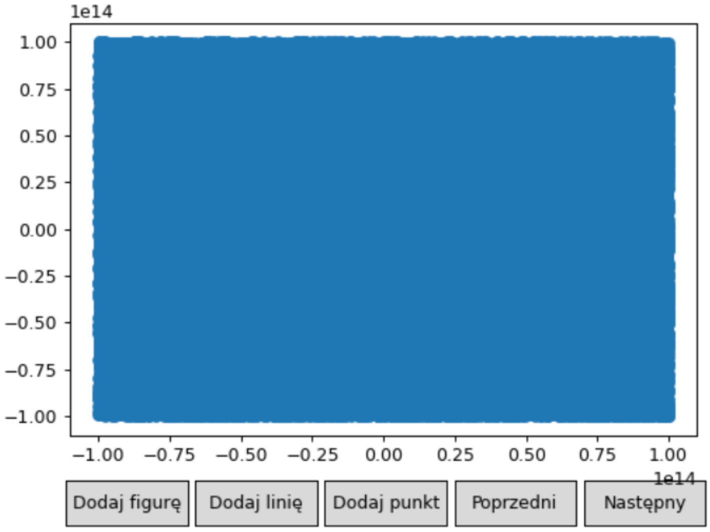
Dla wykresu 1.1 można zauważyć, że punkty rozłożyły się prawie równomiernie tworząc pełny kwadrat.



Wykres 1.1

Zbiór punktów dla 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000]

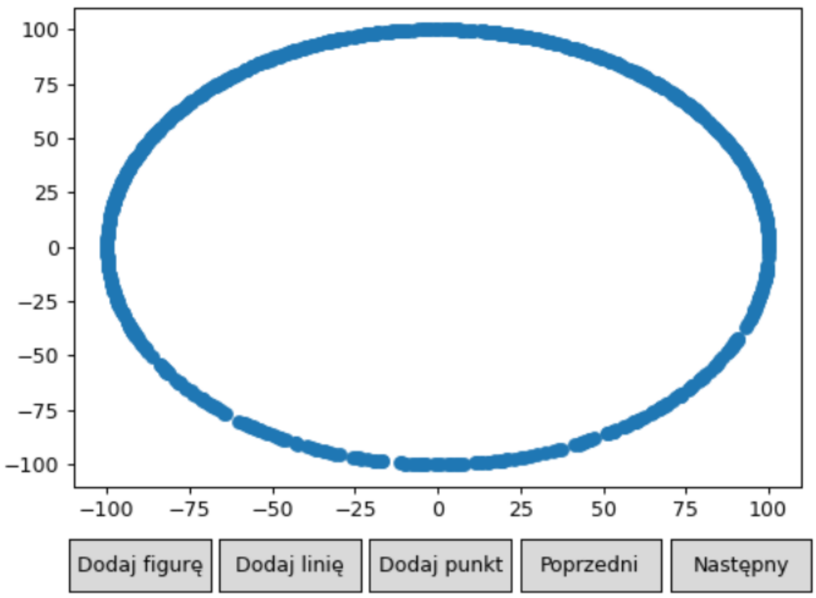
Dla wykresu 1.2 jest podobnie jak z wykresem 1.1 , tylko z zmienionym przedziałem maksymalnym.



Wykres 1.2

10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału
[-10^{14}, 10^{14}]

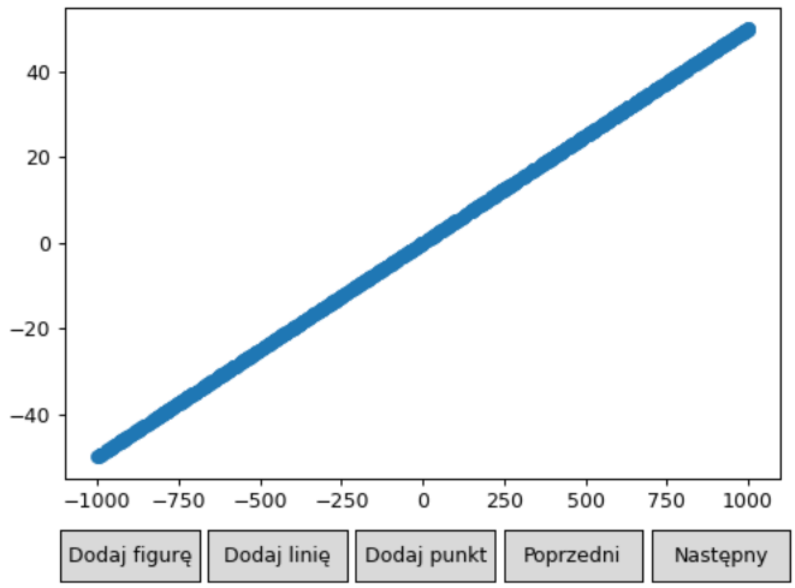
Dla wykresu 1.3 można zauważyć że przy dolnym półkole występują małe przerwy w ciągu okręgu niż dla górnego półkola, świadczy to o losowości wybranych punktów.



Wykres 1.3

1000 losowych punktów leżących na
okręgu o środku (0,0) i promieniu R=100

Dla wykresu 1.4 punkty utworzyły prostą względem wektora (a, b) rozkładając punkty wizualnie równomiernie.



Wykres 1.4

1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000] leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b), gdzie: a = [-1.0, 0.0], b = [1.0, 0.1]

Dla wszystkich wykresów punkty zostały wygenerowane przy pomocy funkcji random.uniform() z biblioteki random. Dla wykresu 1.3 użyto sinusa, cosinusa i liczbę *pi* z biblioteki *numpy*.

Metody obliczania wyznaczników oraz zakres epsilon

Kolejnym elementem ćwiczenia było zaimplementowanie własnych wyznaczników oraz zaimportowanie wyznaczników z biblioteki *numpy* dla macierzy 2x2 i 3x3.

Epsilon (tolerancja dla zera) został wybrany dla pięciu przypadków:

- $\varepsilon = 1e\text{-}5$
- $\varepsilon = 1e\text{-}8$
- $\varepsilon = 1e\text{-}10$
- $\varepsilon = 1e\text{-}12$
- $\varepsilon = 1e\text{-}18$

Jest to spowodowane tym że liczby zmiennoprzecinkowe mają ograniczoną dokładność, przez co trzeba było rozpatrywać różne przypadki rozkładania się punktów na płaszczyźnie w zależności od wybranej tolerancji dla zera.

Wyznaczniki i ich definicje:

Dany wyznacznik	Definicja danego wyznacznika
2x2 własnej implementacji	$\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$
2x2 z biblioteki *numpy*	np.linalg.det()
3x3 własnej implementacji	$\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$
3x3 z biblioteki *numpy*	np.linalg.det()

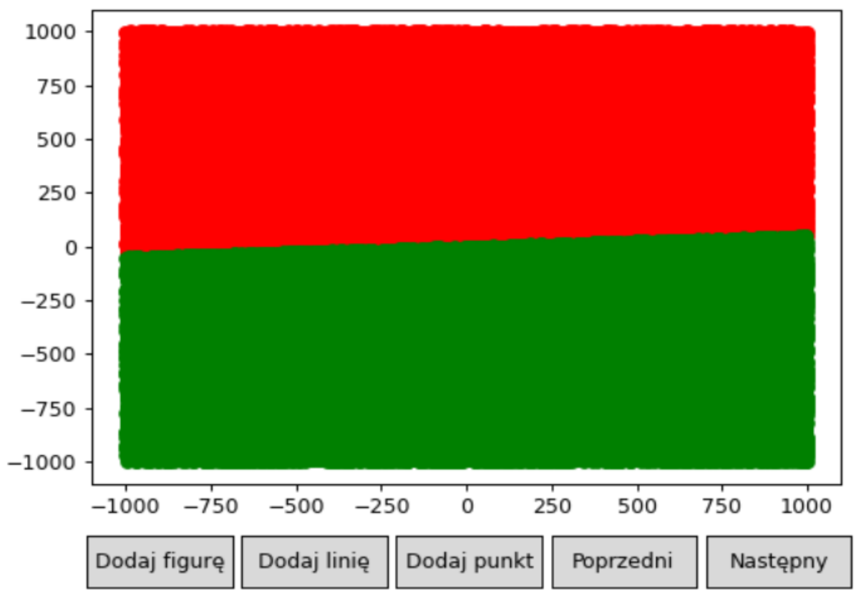
Podział punktów

W celu podzielenia punktów względem ich orientacji w stosunku do odcinka **ab** (**a =** [-1.0, 0.0], **b =** [1.0, 0.1]) została utworzona tabela z licznikiem ich orientacji (czy leżą po lewej, prawej, czy na środku względem danego odcinka), a sam wykres przedstawia punkty czerwone – leżące po lewej stronie, zielone – leżące po prawej stronie i niebieskie – leżące na środku. Tolerancja została wybrana jako $\varepsilon = 1\text{e-}18$, gdyż zapewnia to, że liczby zmiennoprzecinkowe wykorzystają swój maksymalny zakres do liczenia ułożenia punktów. Dla każdego zestawu punktów zostały wykorzystane wszystkie wyznaczniki, w celu porównania ich dokładności w obliczaniu rozmieszczenia punktów.

Wizualizacja danych

Dla wykresów 2.1.1 – 2.1.4 punkty z zestawu I zachowywały się tak samo dla różnych wyznaczników i tej samej tolerancji. Wykres 2.1 zawiera w sobie wszystkie wykresy od 2.1.1 – 2.1.4 .

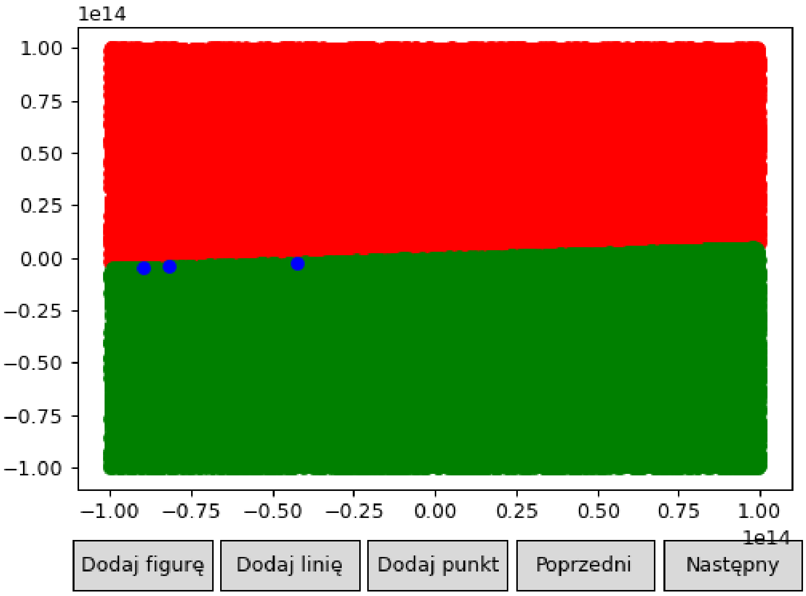
```
Counter of points: Left: 50147 Right: 49853 Collinear: 0
```



Wykres 2.1

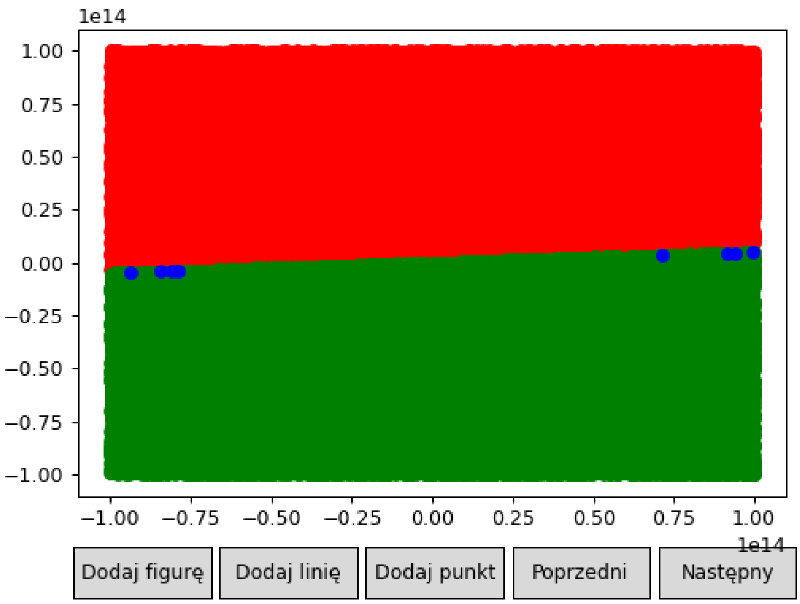
Dla punktów z zestawu II różnice pojawiły się gdy punkty zostały skategoryzowane wyznacznikiem 2x2 własnej implementacji i wyznacznikiem 2x2 z *numpy* . Jednym z punktów, który został zakwalifikowany do punktów leżących na linii jest np. (-42616555218373.46, -2129628953174.2344). Jest to związane z tym, że zakres maksymalny jest dość wysoki przez to jest większe prawdopodobieństwo, że punkt trafi w dany zakres.

Wykres 2.2.1 - wyznacznik NP_DET2X2



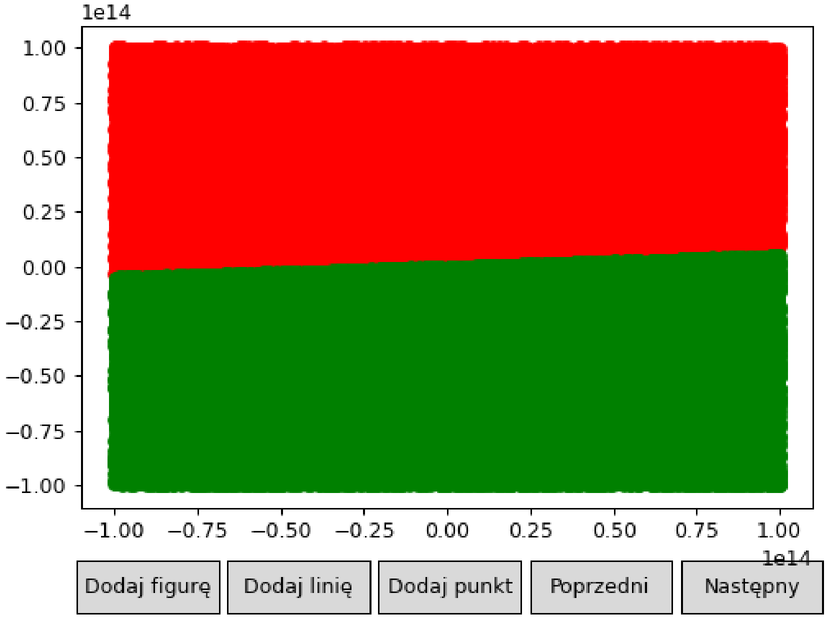
Counter of points: Left: 50022 Right: 49975 Collinear: 3

Wykres 2.2.2 - wyznacznik DET2X2



Counter of points: Left: 50056 Right: 49936 Collinear: 8

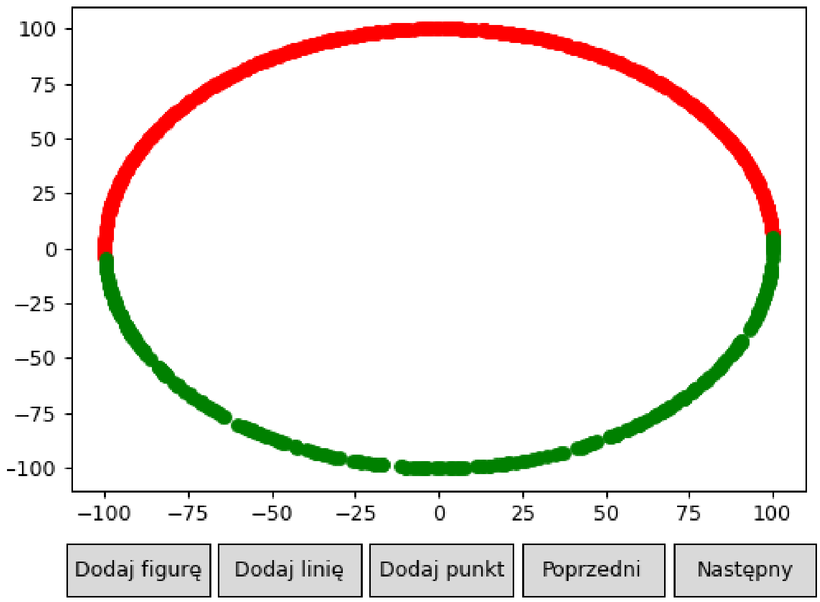
Wykres 2.2.3 i 2.2.4 - wyznacznik NP_DET3X3 i DET_3X3



Counter of points: Left: 50060 Right: 49940 Collinear: 0

Punkty z zestawu III punktów rozłożone na okręgu względem prostej zostały rozłożone tak, że około 2/3 punktów znajdowało się ponad prostą i żaden punkt nie znajdował się na niej. Dla wszystkich wyznaczników punkty rozłożyły się tak samo.

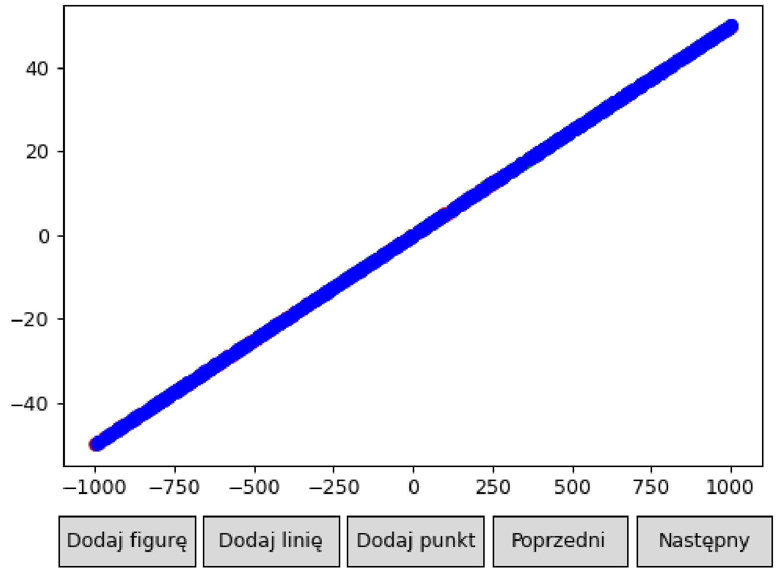
Wykres 2.3 – takie same wyniki i wykresy dla różnych wyznaczników



Counter of points: Left: 648 Right: 352 Collinear: 0

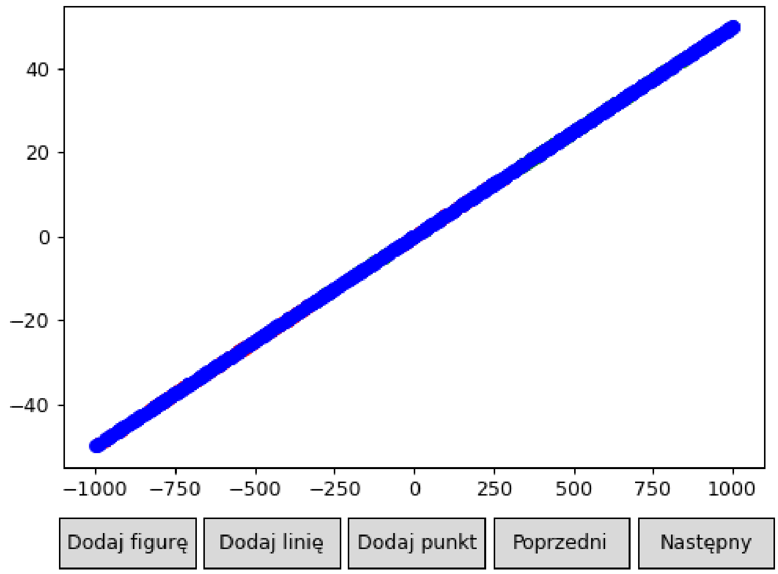
W zestawie IV punktów jest największy rozrzut punktów względem prostej. Dla każdego wyznacznika zostały policzone różne położenia punktów. Stało się tak gdyż jest to związane ze skończoną precyzją liczb zmiennoprzecinkowych. W dalszej części ćwiczenia jest przeprowadzone badanie dla różnych precyzji. W tej części jest zademonstrowany wykres dla zaproponowanej tolerancji zera.

Wykres 2.4.1 – wyznacznik NP_DET2X2



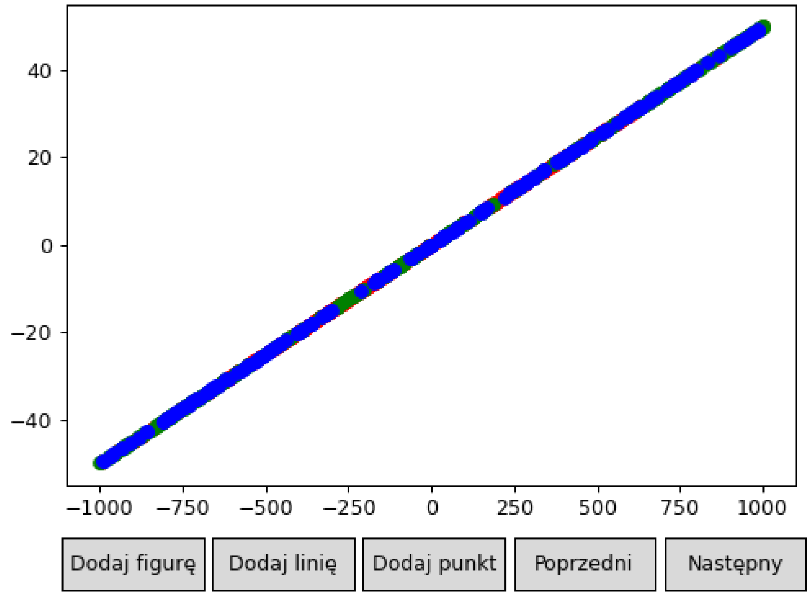
Counter of points: Left: 149 Right: 162 Collinear: 689

Wykres 2.4.2 – wyznacznik DET2X2



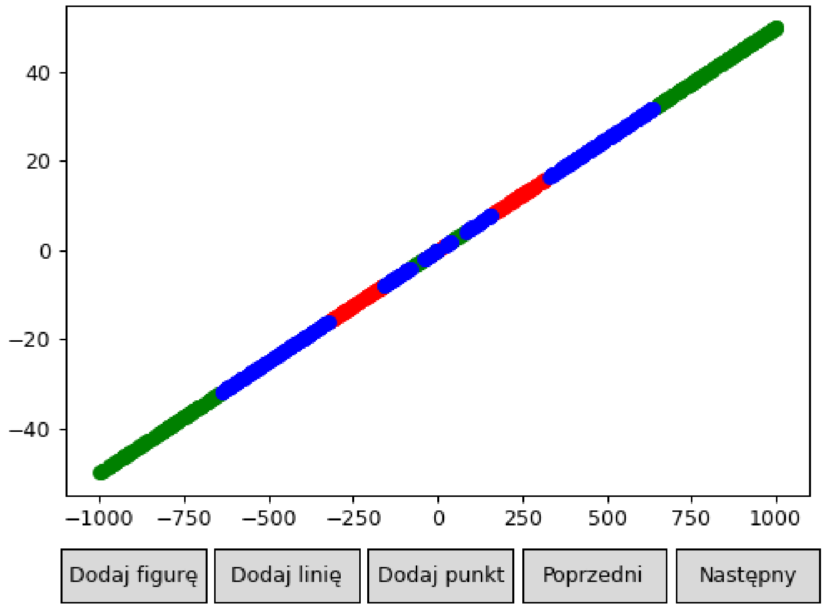
Counter of points: Left: 144 Right: 160 Collinear: 696

Wykres 2.4.3 – wyznacznik NP._DET3X3



Counter of points: Left: 399 Right: 421 Collinear: 180

Wykres 2.4.4 – wyznacznik DET3X3



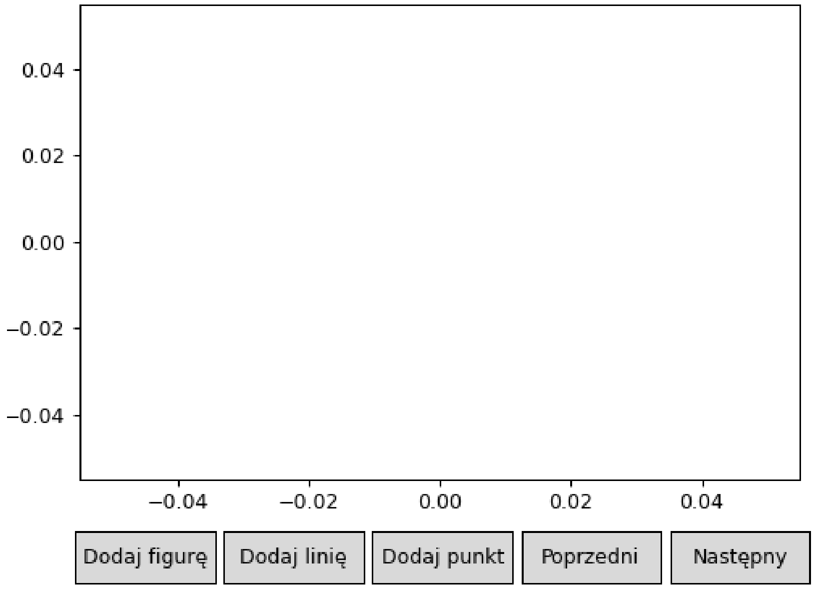
Counter of points: Left: 168 Right: 406 Collinear: 426

Porównywanie punktów

W następnej części ćwiczenia zostały porównane wyniki zbiorów danych uzyskanych przy pomocy wyznaczników wyliczonych własną implementacją i biblioteczną. Zastosowane funkcję do narysowania punktów różnych i została wypisana różnica w punktach danych wyznaczników.

Dla punktów z zestawu I i zestawu III nie było żadnych różnic dla różnych wyznaczników

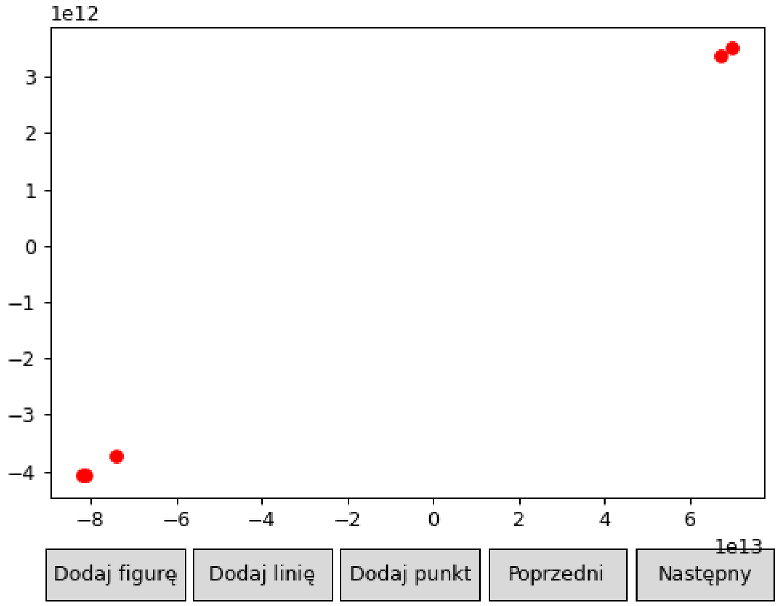
Wykres 3.1 i 3.3 – porównanie punktów wyznaczonych parami różnych wyznaczników



Amount of different points: 0

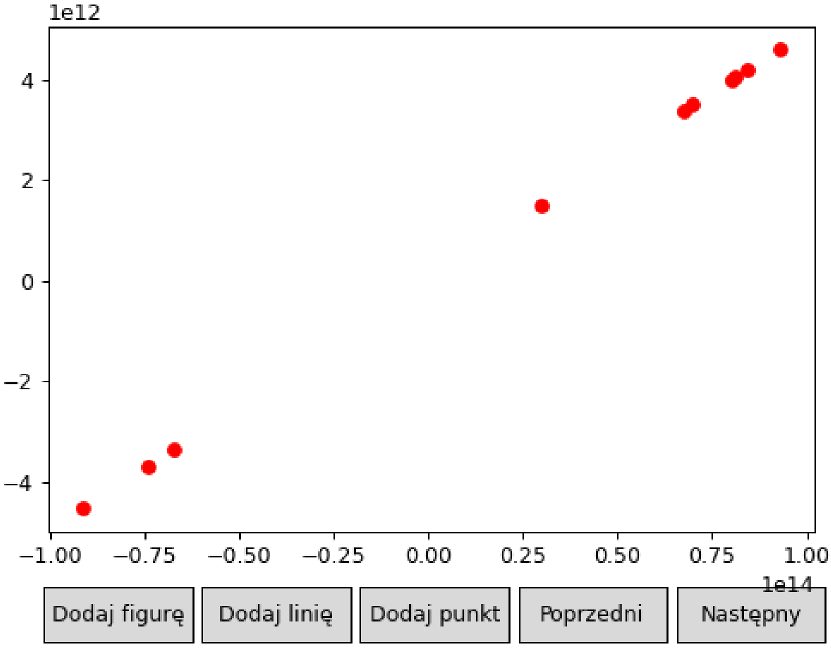
Dla punktów z zestawu II różnice nie wystąpiła tylko dla porównanych wyznaczników **NP_DET3X3 i DET3X3**.

Wykres 3.2.1 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET2X2 i DET2X2



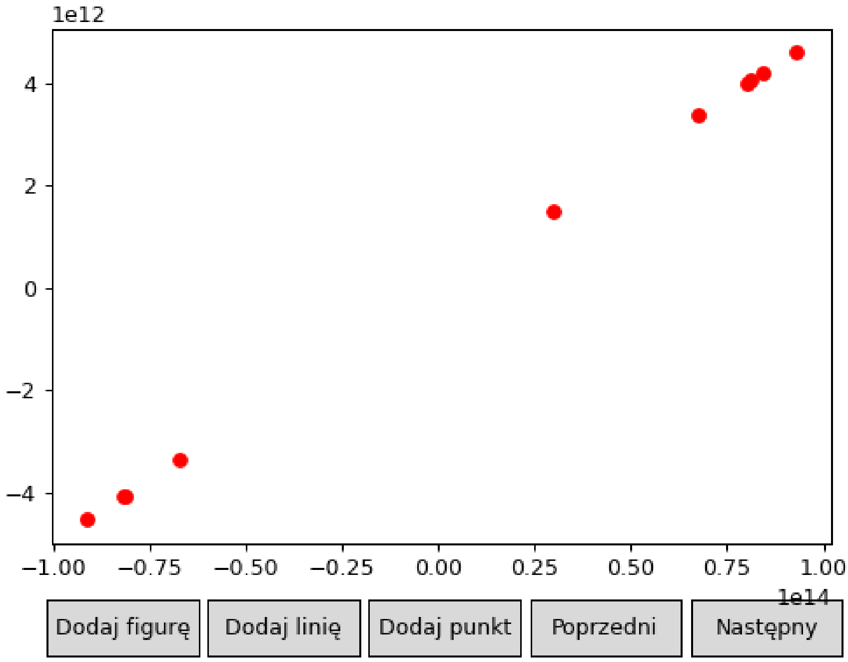
Amount of different points: 5

Wykres 3.2.2 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET2X2 i DET3X3



Amount of different points: 10

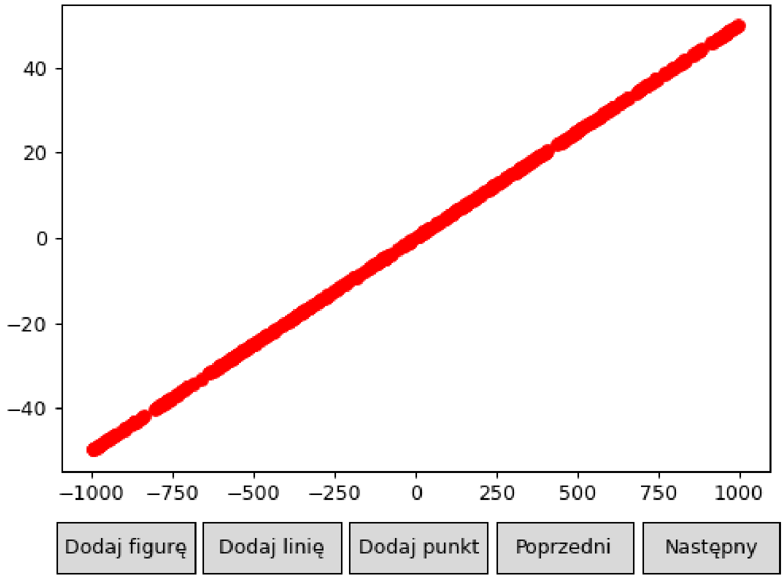
Wykres 3.2.3 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET3X3 i DET2X2



Amount of different points: 10

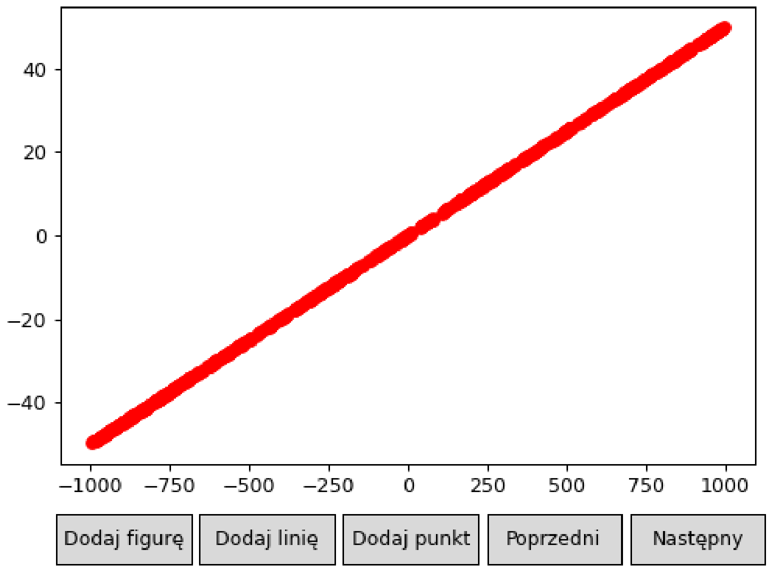
Dla zestawu IV różnica punktów była znacznie większa niż w pozostałych zestawach. Wyniki te są spowodowane tym, że błędy w obliczeniach będące nawet bardzo mało powodują zmianę położenia punktu, ponieważ wartości wyznaczników znajdujących się na danej prostej są bardzo bliskie zera.

Wykres 3.4.1 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET2X2 i DET2X2



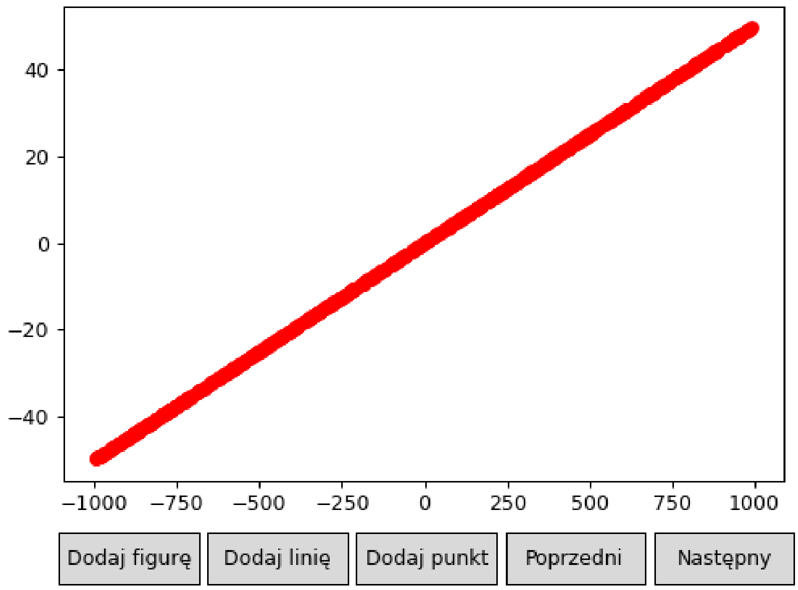
Amount of different points: 420

Wykres 3.4.2 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET2X2 i DET3X3



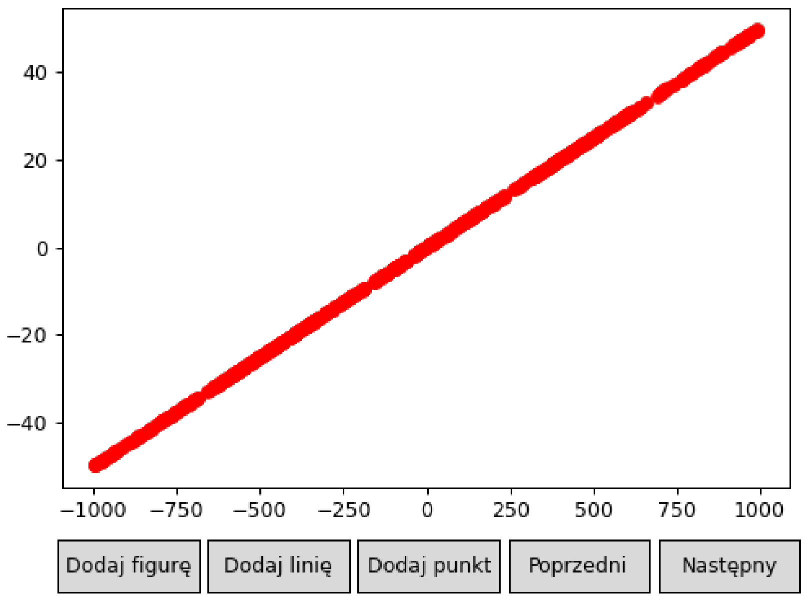
Amount of different points: 652

Wykres 3.4.3 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET3X3 i DET2X2



Amount of different points: 715

Wykres 3.4.4 – porównanie wyników wyznaczników NP_DET3X3 i DET3X3



Amount of different points: 567

Analiza wszystkich otrzymanych wyników

Zakończeniem ćwiczenia jest zebranie wszystkich otrzymanych wyników dla różnych wyznaczników oraz różnych tolerancji dla zera i umieszczenie ich w tabelach.

Tabela 1 - ilość różnych punktów dla zestawu I w zależności od użytego epsilon i wyznacznika

Wyznacznik	Epsilon	Lewa strona	Prawa strona	Środek
Wszystkie badane	**Wszystkie badane**	49783	50217	0

Tabela 2 - ilość różnych punktów dla zestawu II w zależności od użytego epsilon i wyznacznika

Wyznacznik	Epsilon	Lewa strona	Prawa strona	Środek
2x2 własnej implementacji	10^{-5}	50070	49921	9
	10^{-8}	50070	49921	9
	10^{-10}	50070	49921	9
	10^{-12}	50070	49921	9
	10^{-18}	50070	49921	9
2x2 z numpy	10^{-5}	50070	49920	10
	10^{-8}	50070	49920	10
	10^{-10}	50070	49920	10
	10^{-12}	50070	49920	10
	10^{-18}	50070	49920	10
3x3 własnej implementacji	10^{-5}	50076	49924	0
	10^{-8}	50076	49924	0
	10^{-10}	50076	49924	0
	10^{-12}	50076	49924	0
	10^{-18}	50076	49924	0
3x3 z numpy	10^{-5}	50076	49924	0
	10^{-8}	50076	49924	0
	10^{-10}	50076	49924	0
	10^{-12}	50076	49924	0
	10^{-18}	50076	49924	0

Tabela 3 - ilość różnych punktów dla zestawu III w zależności od użytego epsilon i wyznacznika

Wyznacznik	Epsilon	Lewa strona	Prawa strona	Środek
Wszystkie badane	**Wszystkie badane**	642	358	0

Tabela 3 - ilość różnych punktów dla zestawu IV w zależności od użytego epsilon i wyznacznika

Wyznacznik	Epsilon	Lewa strona	Prawa strona	Środek
2x2 własnej implementacji	10^{-5}	0	0	1000
	10^{-8}	0	0	1000
	10^{-10}	0	0	1000
	10^{-12}	119	100	781
	10^{-18}	161	149	690
2x2 z numpy	10^{-5}	0	0	1000
	10^{-8}	0	0	1000
	10^{-10}	0	0	1000
	10^{-12}	82	64	854
	10^{-18}	159	133	708
3x3 własnej implementacji	10^{-5}	0	0	1000
	10^{-8}	0	0	1000
	10^{-10}	0	0	1000
	10^{-12}	0	0	1000
	10^{-18}	397	401	202
3x3 z numpy	10^{-5}	0	0	1000
	10^{-8}	0	0	1000
	10^{-10}	0	0	1000
	10^{-12}	0	0	1000
	10^{-18}	174	379	447

Wnioski

Patrząc na wyniki, które wyszły można dojść do wniosku, że dla zestawu I, II i III punkty rozkładają się zgodnie z przewidywaniem. Ciekawszy jest zestaw IV , dla którego wyniki odchylają się od przewidywanych (zakładając że większość będzie na środku linii). Jest to spowodowane małą precyzją liczb zmiennoprzecinkowych, które nie gwarantują dokładnych obliczeń przy bardzo małych liczbach.

Wyznaczniki, które były użyte w ćwiczeniu pokazują, że wybór danego wyznacznika też jest ważny dla obliczeń, gdyż na podstawie badań zawartych w ćwiczeniu, wyniki wychodziły czasami bardzo odchylone od siebie.

Wybór tolerancji dla zera w przypadku tego ćwiczenia okazał się bardzo ważny, gdyż jesteśmy wstanie dokładnie (w miarę możliwości liczb zmiennoprzecinkowych) obliczyć położenie punktu.