

A G H

Laboratorium 2

sprawozdanie

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Hieronim Koc

Rok akademicki: 2022/23

Semestr IV, Kierunek: Informatyka

Sprawozdanie z laboratorium 2

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Biblioteki

Biblioteki, które zostały zainportowane w celu rozwiązywania problemów w zadaniach:

- numpy 1.23.4
- networkx 3.0
- matplotlib 3.6.1
- random
- itertools
- copy
- time

Wszystkie funkcje zostały uruchomione w języku Python 3.10.6

Zadanie 1

Zadanie 1 polegało na zaimplementowaniu metody Gaussa-Jordana z częściowym poszukiwaniem elementu wiodącego. Testy zostały przeprowadzone dla dziesięciu różnych rozmiarów macierzy współczynników większych niż 500×500 z porównywaniem czasu działania zaimplementowanej samodzielnie funkcji z funkcją biblioteczną. Wyniki można zobaczyć w jupiter notebooku.

Zadanie 2

Zadanie 2 polegało na faktoryzacji macierzy. Sprawdzanie poprawności polega na wymnożeniu współczynników mnożenia umożliwiające wyzerowanie odpowiedniego współczynnika macierzy A w trakcie procesu eliminacji oraz macierzy górnej trójkątnej powstała w wyniku działania metody Gaussa-Jordana.

Zadanie 3

Głównym obiektem zainteresowań jest zadanie 3, czyli analiza obwodu elektrycznego - nadokreślony układ równań. Obliczanie obwodu elektrycznego zostało zrealizowane przy pomocy I i II prawa Kirchhoffa.

Wczytywanie grafu z pliku

Ładowanie grafu z pliku - *loadGraph*: jest to funkcja, która wczytuje wiersze z pliku odpowiednio:

- 1 wiersz - ilość wierzchołków
- następne wiersze - wierzchołek_1 wierzchołek_2 oporność

Wierzchołki wyrażamy jako liczby naturalne.

Zapisuje ona wierzchołki jako listę sąsiedztwa oraz jako słownik w celu optymalizacji działania i łatwości w wyszukiwaniu wierzchołków w późniejszej fazie programu.

Dodawanie siły elektromotorycznej do obwodu

Funkcja *loadSEM* odpowiada za załadowanie do wierzchołka **s** oraz **t** siły elektromotorycznej o wartości **E**.

W dalszej części są opisane generatory odpowiednich grafów, ale warto już tutaj wspomnieć, że funkcja *loadSEM* zmienia tylko wartość krawędzi na wartość **E**, jeżeli taka krawędź pojawiła się już w generatorze, zapobiega to tworzeniu dwóch krawędzi dla tych samych węzłów .

Wyświetlanie grafu

Za wyświetlanie grafu skierowanego odpowiada funkcja *graphToNx*, która korzystając z biblioteki *networkx*, która w połączeniu z biblioteką *matplotlib* dość łatwo rysowanie grafów. Uwagę zwraca również colorbar dla krawędzi, który określa jak duże natężenie prądu płynie przez dany graf. Ciemny kolor jest to wartość jedna z najwyższych, a kolor żółtawy odpowiada za brak przepływu (prąd zdolał się tam dostać w tak małej części, że nie jest on brany pod uwagę w obliczaniu natężenia w obwodzie). Są to krawędzie, które kończą się nie cyklem (obwodem), lecz pojedyńczym węzłem lub prąd przedostał się tylko przez jedną krawędź (i przez to już nie może się wydostać - zobaczymy to na przykładzie dwóch grafów połączonych mostkiem z źródłem w jednym z dwóch grafów).

Strzałki wskazują, w którą stronę prąd się przemieszcza.

Rozwiązywanie przepływu prądu

Rozwiązywanie przepływu prądu jest oparte na prawach Kirchhoffa, tj. I i II prawo. Przy ich pomocy jest tworzony układ równań i obliczany. Z I prawa jest wyliczane n równań, a z II prawa o równań, gdzie o odpowiada za ilość podstawowych oczek w układzie.

Powstaje przez to nadokreślony układ równań, który można rozwiązać na kilka sposobów (oczywiście w tym programie jest on rozwiązywany przez funkcje z biblioteki numpy *numpy.linalg.ltsq*): jednym z rozwiązań jest aproksymacja średniokwadratowa, w której mnożymy obie strony układu równań przez macierz transponowaną współczynników i przez to jest już możliwe dość łatwe rozwiązywanie danego układu równań.

Wyznaczanie cykli prostych

Realizuje to funkcja *paton* wykonując algorytm Patona do wyznaczania owych cykli. Jest on dokładnie wyjaśniony w jego pracy naukowej. Głównym pomysłem jest stworzenie drzewa rozpinającego i znajdywanie fundamentalnego cyklu gdy natrafi się już na wierzchołek znajdujący się w drzewie. (Szczegółowe wyjaśnienie znajduje się w publikacji Patona - źródło podane na końcu sprawozdania).

Dzielenie prądu w obwodzie zgodnie z I prawem Kirchhoffa

Wykonuje to funkcja *powerDivide*, która wykorzystuje BFS i DFS do przechodzenia przez graf. BFS jest stosowany gdy w danym węźle jest podział na więcej prądów, a DFS gdy węzeł nie dzieli się na więcej niż 2 węzły.

Uzupełnianie macierzy równaniami z I i II prawa Kirchhoffa

Uzupełniając macierz jest sprawdzany kierunek prądu, który został przydzielony danej krawędzi w kroku dzielenia prądu i na tej podstawie jest uzupełniana komórka w macierzy z odpowiednim znakiem i wartością oporności.

Kierunek prądu

Kierunek prądu jest wyznaczany już po wyznaczeniu prądu dla każdej krawędzi. Gdy pojawia się ze znakiem minus to oznacza, że trzeba odwrócić płynięcie prądu, gdy znak jest dodatni - krawędź zostawiamy taka jak była.

Weryfikacja poprawności rozwiązania

Poprawność rozwiązania jest sprawdzana poprzez sumowanie prądów wychodzących z źródła i porównaniu z sumą prądów przy ujściu (ujście i źródło jest połączone ze sobą podanym na początku napięciem)

Generatory grafów

W końcowej części zadania znajdują się generatory grafów do pliku, podanych jako wymagane w konspekcie. Niektóre grafy, takie jak graf typu small world, korzysta z biblioteki *networkx*, a niektóre są własnoręcznie zaimplementowane.

Wizualizacja przykładowych grafów

Grafy zostały załadowane z plików dla 15, 30, 50, 100 oraz 200 wierzchołków.

Siła elektromotoryczna (SEM) została przyłożona do węzła 0 i 2 o wartości 60V w prawie każdym przypadku - pomijając przypadek, gdzie grafy zostały połączone mostkiem a SEM przyłożony do różnych grafów.

Przykładowe wywołanie funkcji generującej podane na wejściu odpowiednie grafy można zobaczyć pod wnioskami.

Wnioski

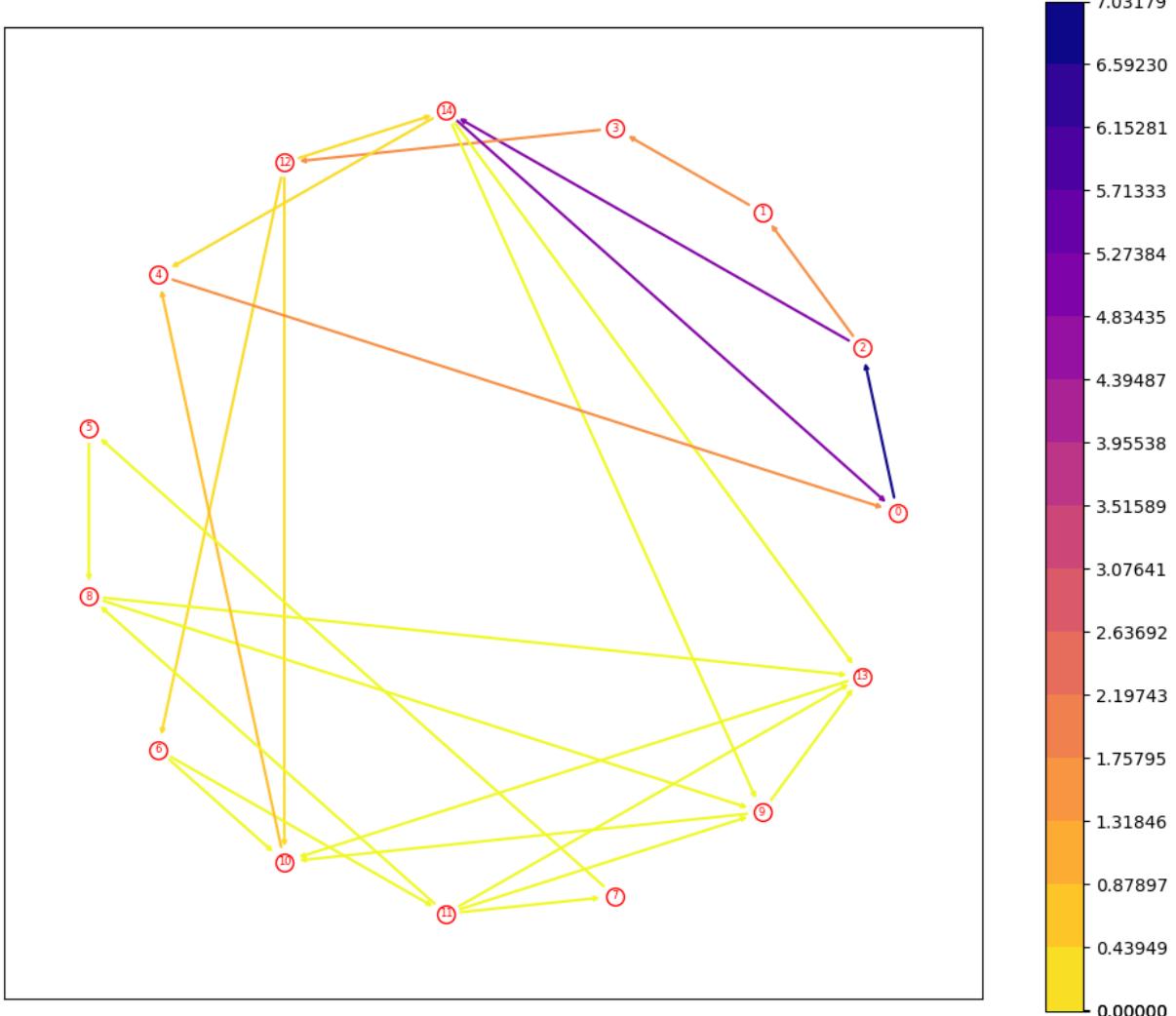
Dla niektórych z wygenerowanych grafów, ilość wypływającego prądu nie jest równa ilości wpływającego prądu (np. dwa grafy połączone mostkiem). Jest to spowodowane, że prąd (choć mały) nie może się wydostać z labiryntu obwodów, do którego jest tylko wejście a wyjścia brak.

Dla losowych grafów, prawdopodobieństwo wystąpienia krawędzi zostało zminimalizowane, ze względu na czytelność wygenerowanych obrazów. Przy większej ilości krawędzi było widoczne tylko słabe natężenie.

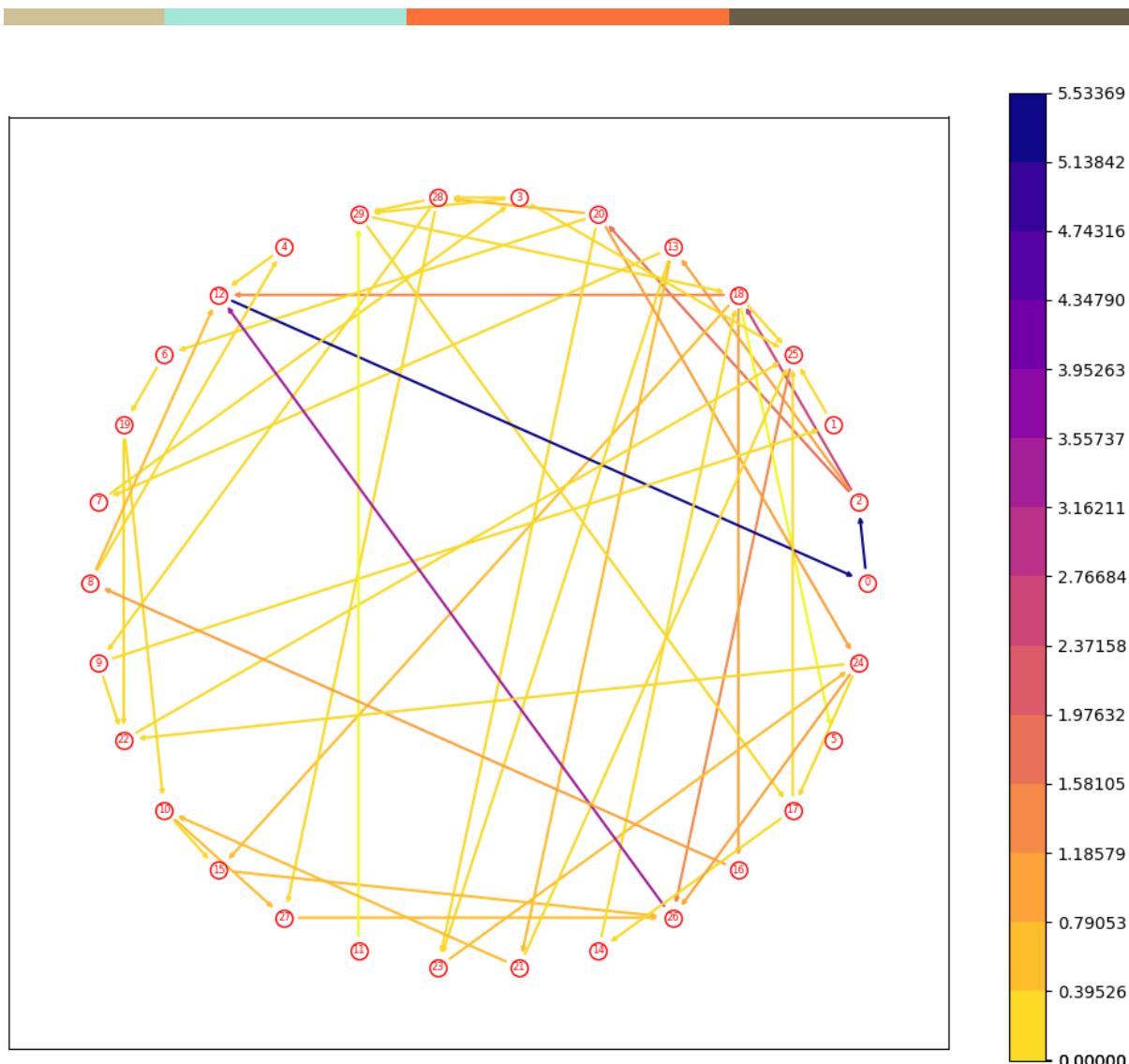
W grafie typu small world jest mniej wierzchołków niż krawędzi co prowadzi do przepływu dużego prądu przez kilka krawędzi.

Dla siatki 2D największy prąd można zaobserwować dla najbliższych punktów źródła. Wraz z oddalaniem się od niego maleje prąd przepływający przez obwód.

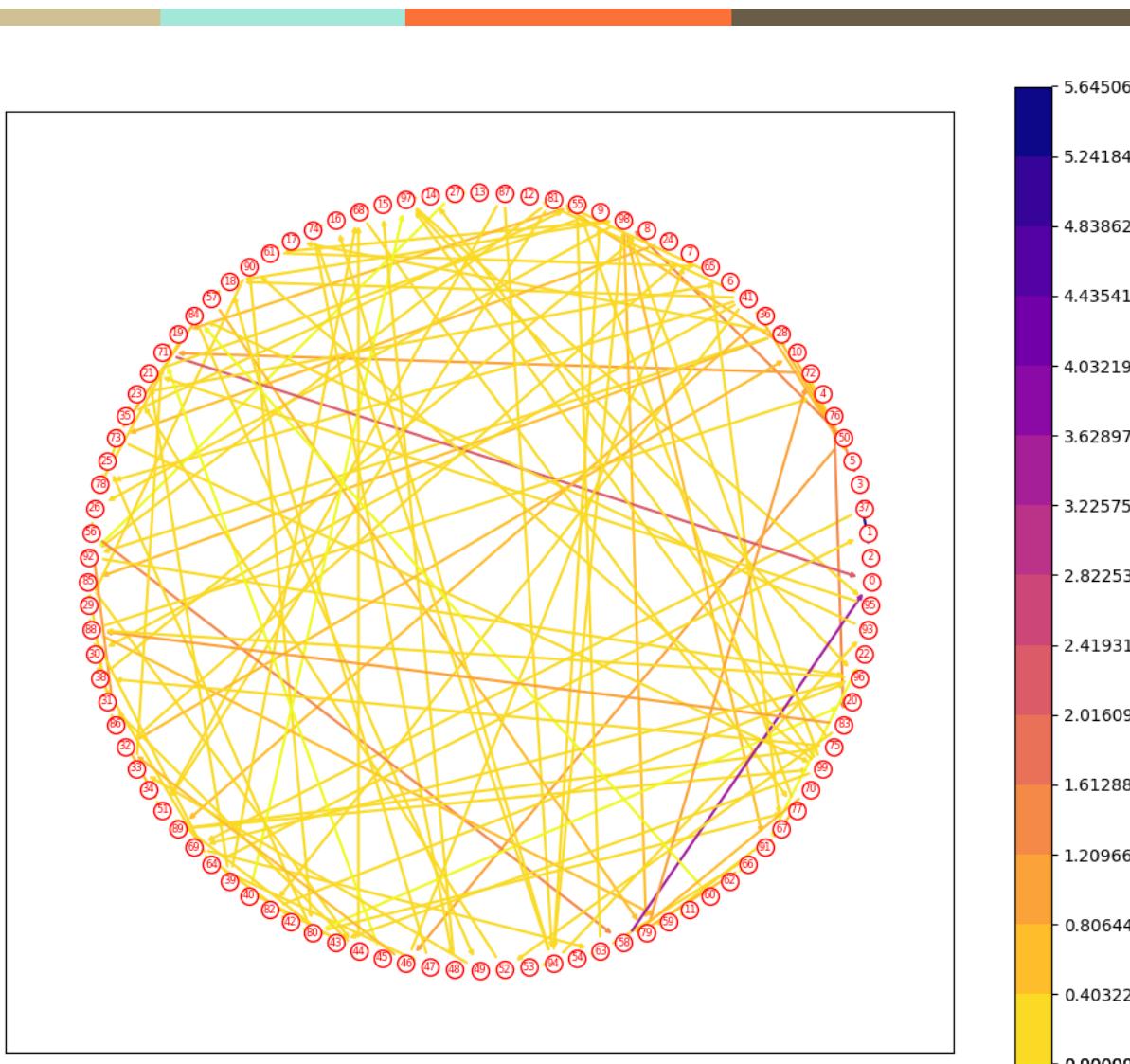
Grafy losowe



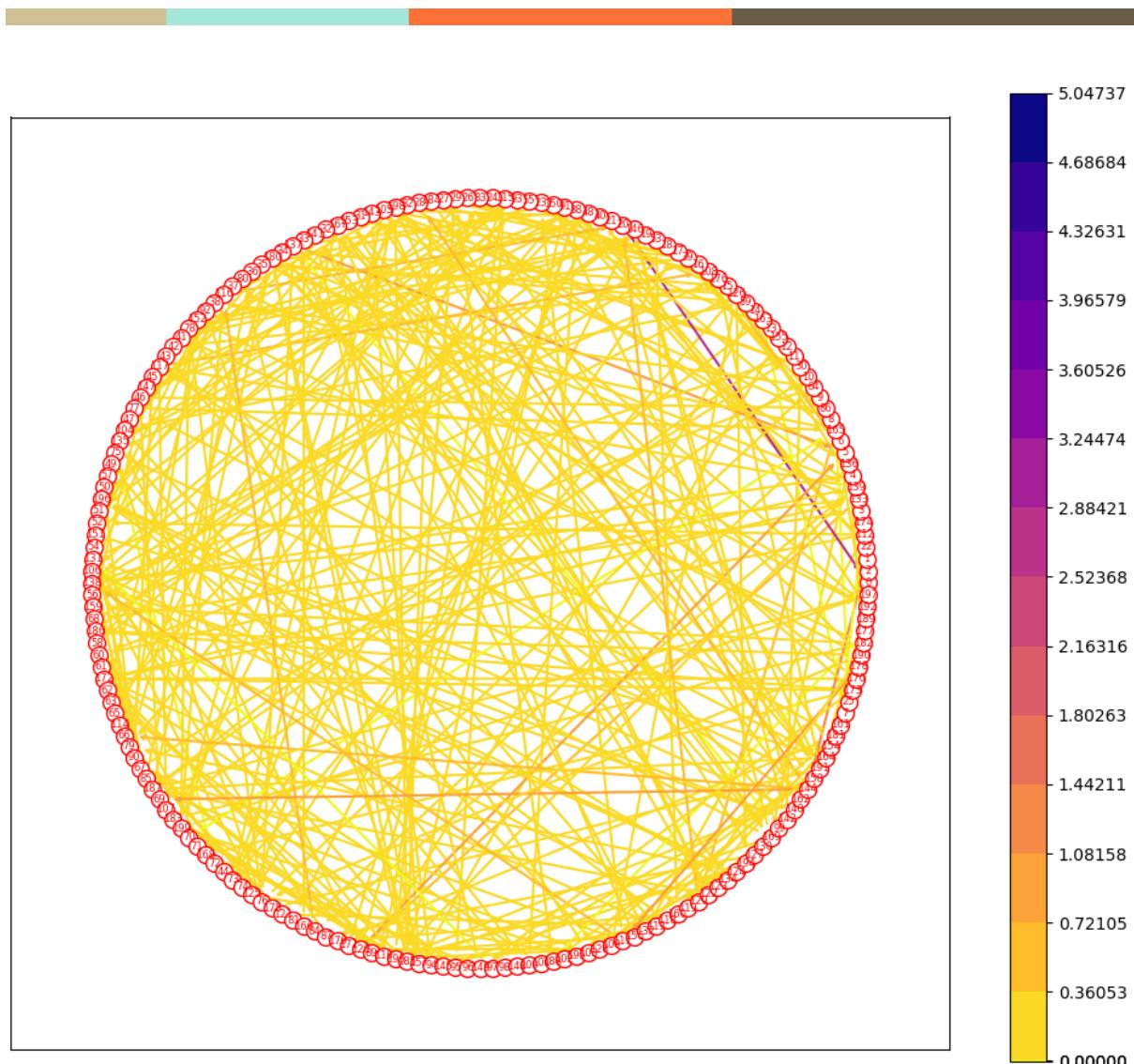
Wykres 1.1 - 15 węzłów, 27 krawędzi



Wykres 1.2 - 30 węzłów, 53 krawędzi

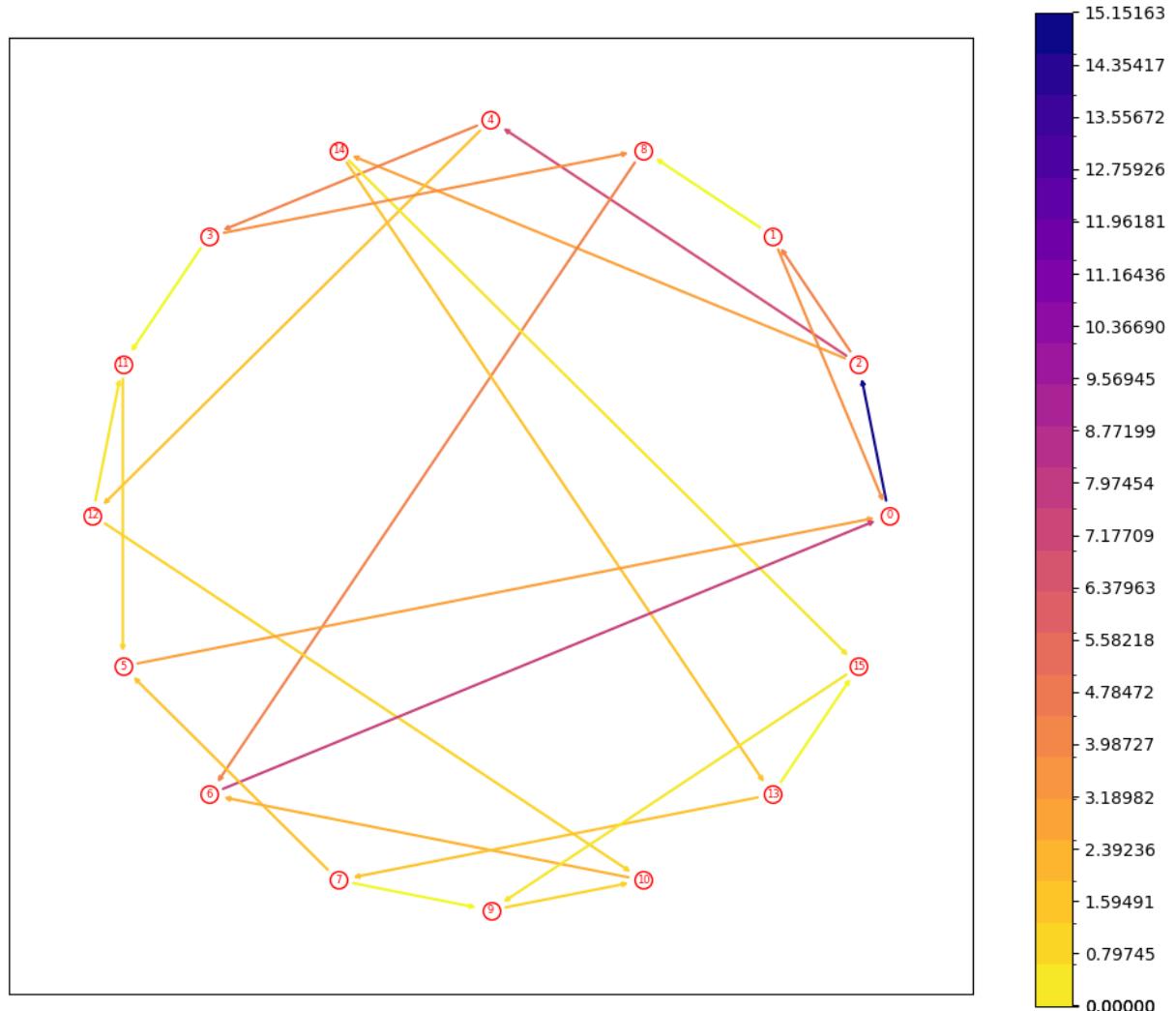


Wykres 1.4 - 100 węzłów, 155 krawędzi

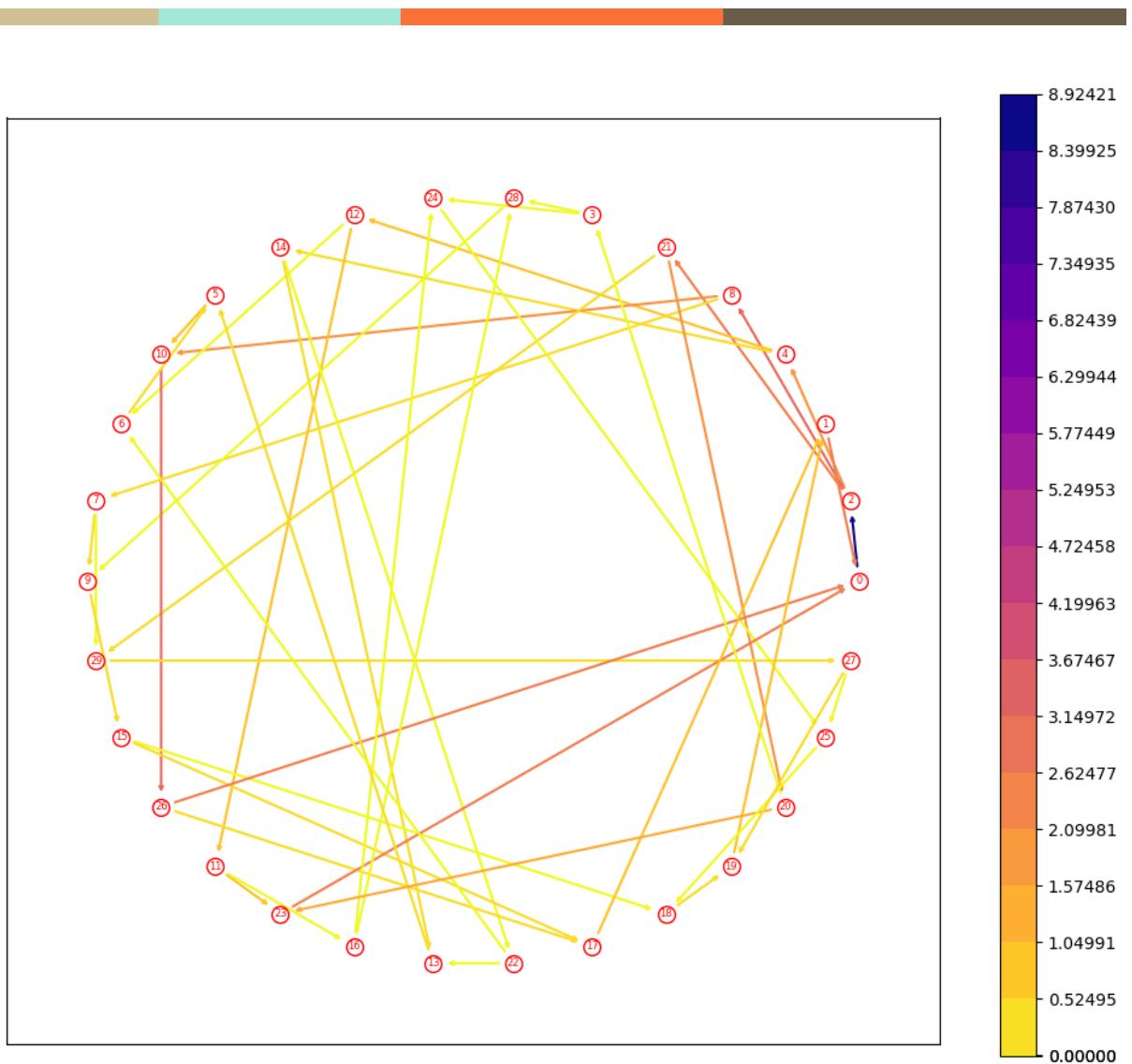


Wykres 1.5 - 200 węzłów, 403 krawędzi

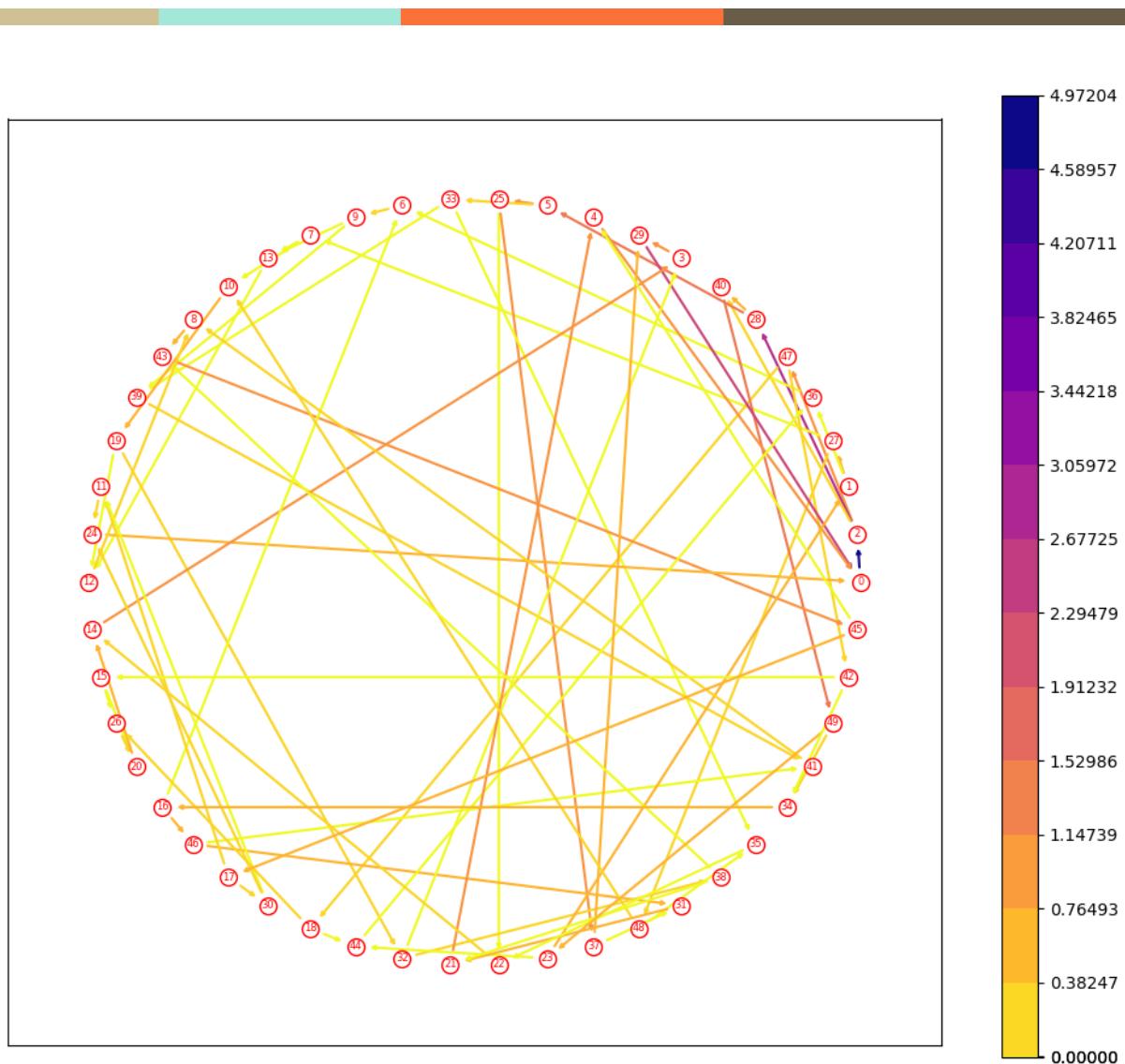
Grafy 3-regularne (kubiczne)



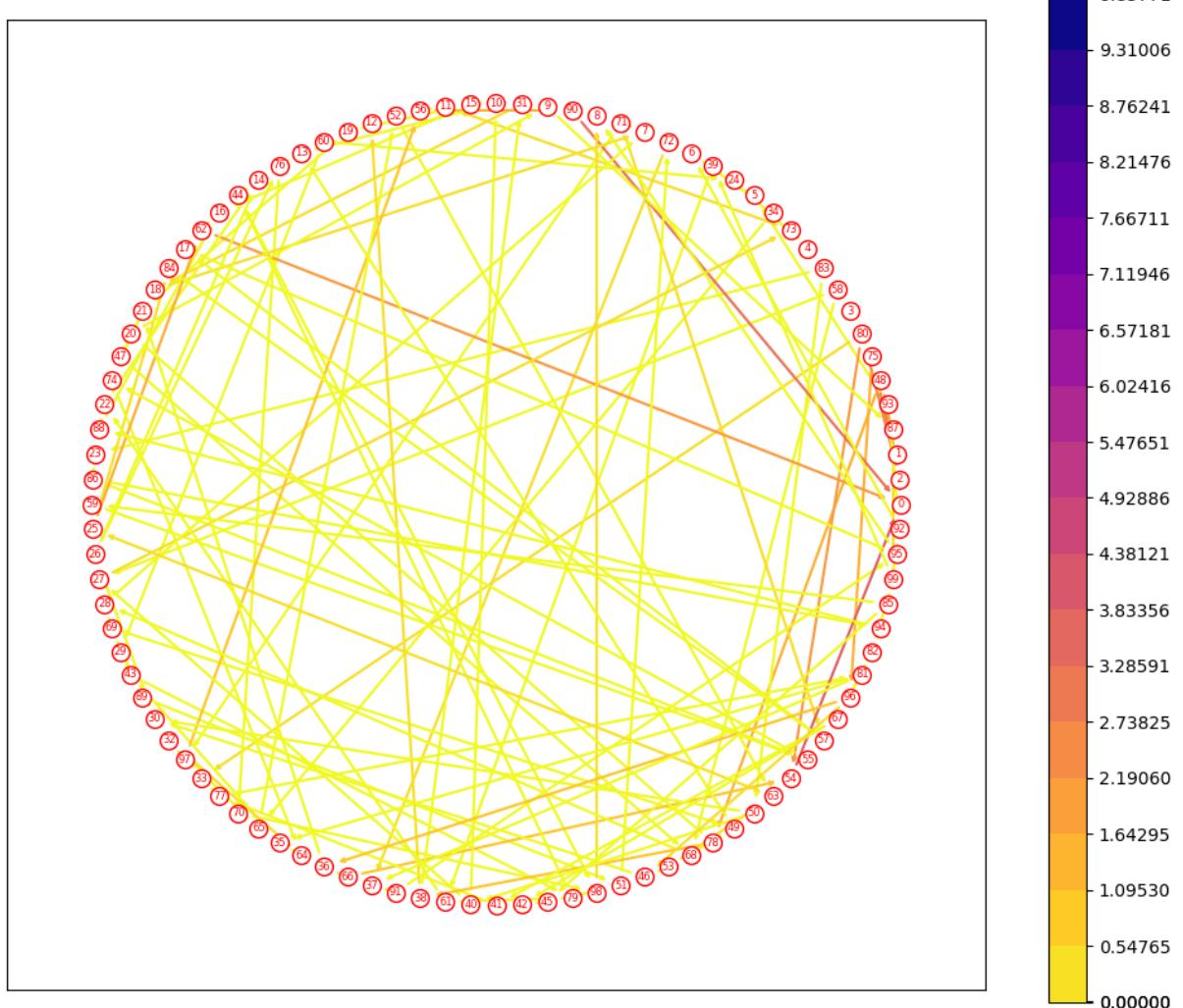
Wykres 2.1 - 16 węzłów, 30 krawędzi



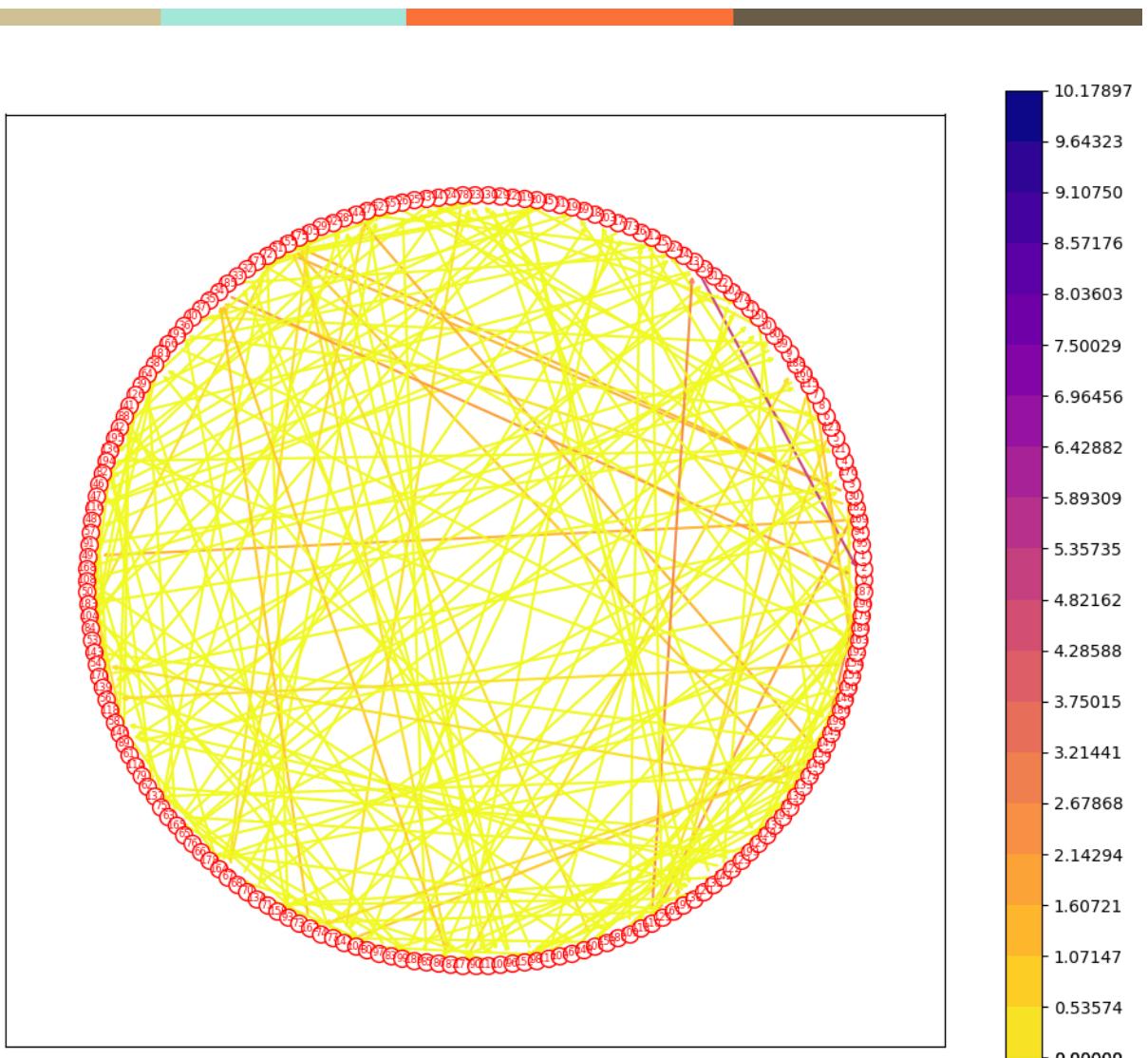
Wykres 2.2 - 30 węzłów, 46 krawędzi



Wykres 2.3 - 50 węzłów, 76 krawędzi

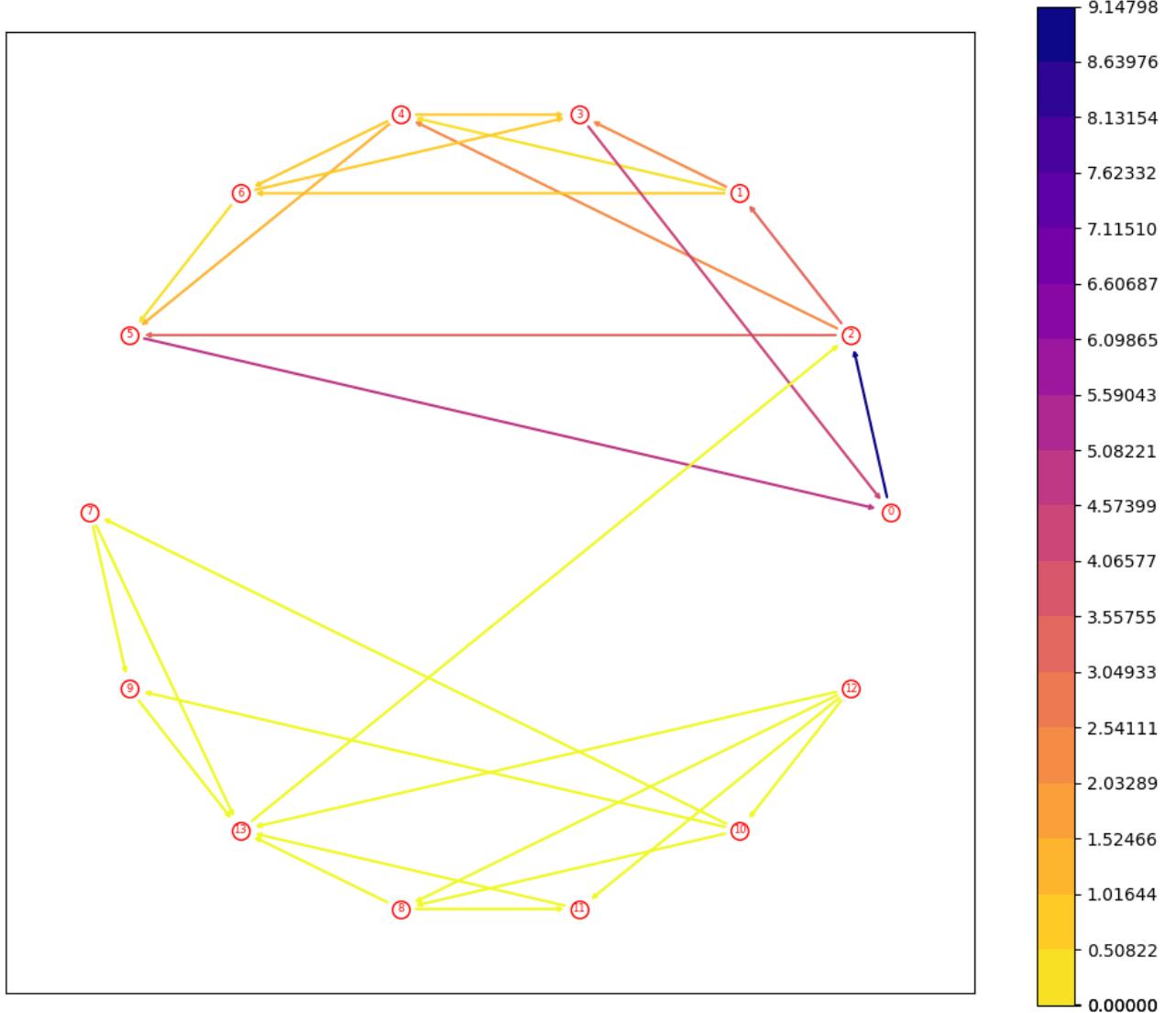


Wykres 2.4 - 100 węzłów, 151 krawędzi

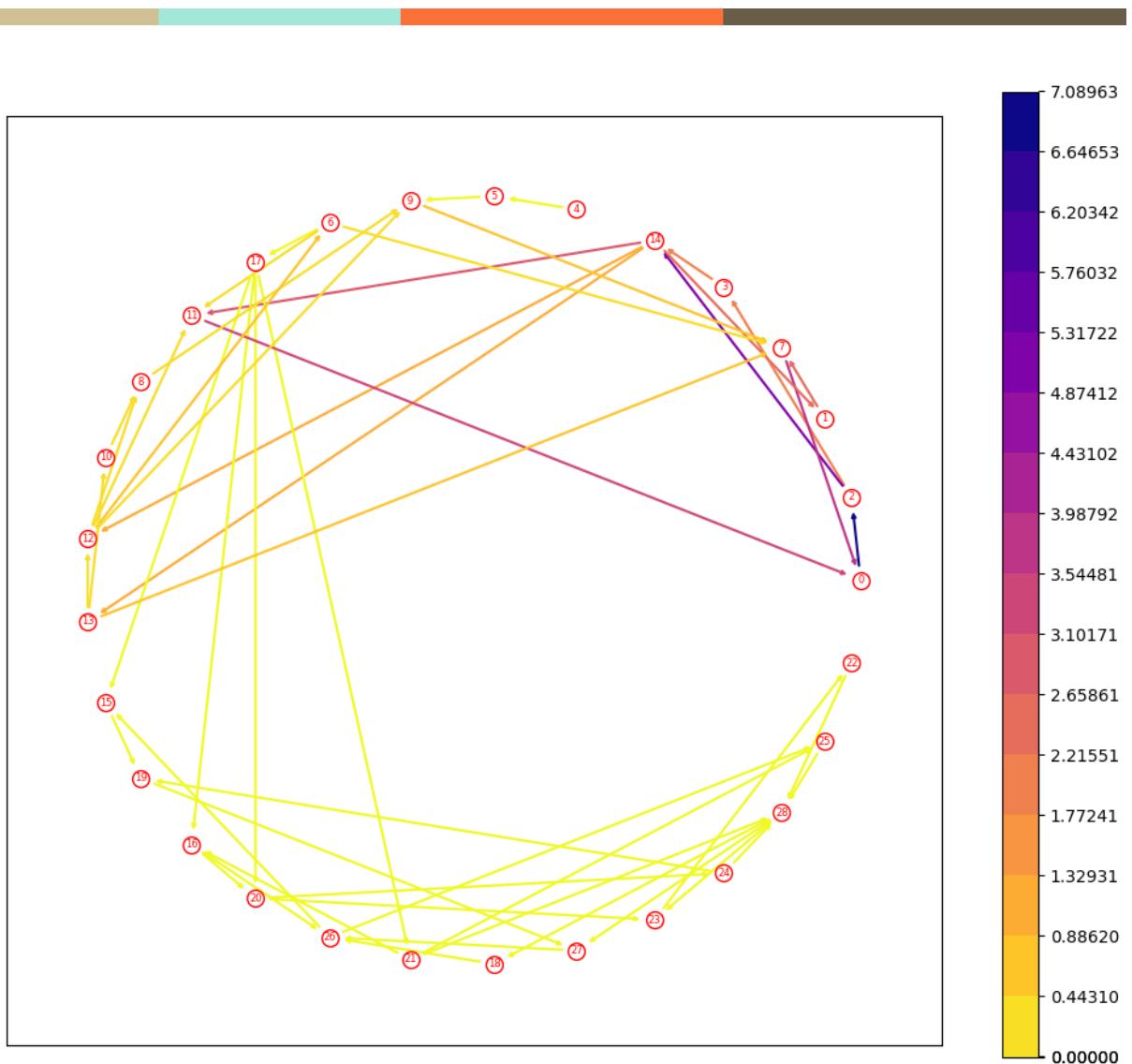


Wykres 2.5 - 200 węzłów, 301 krawędzi

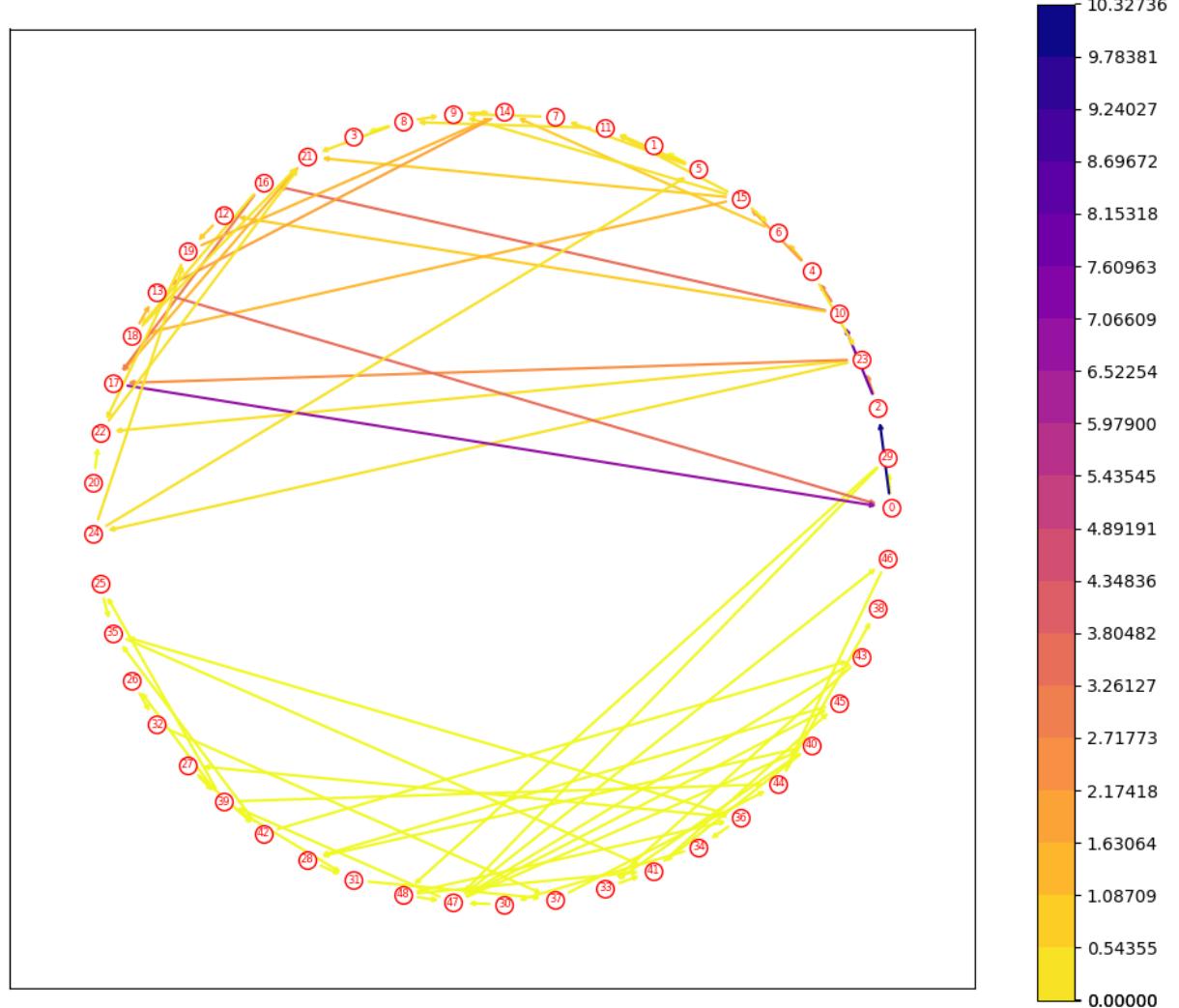
Dwa grafy połączone mostkiem, gdzie źródło i ujście jest przyczepione do jednego z grafów



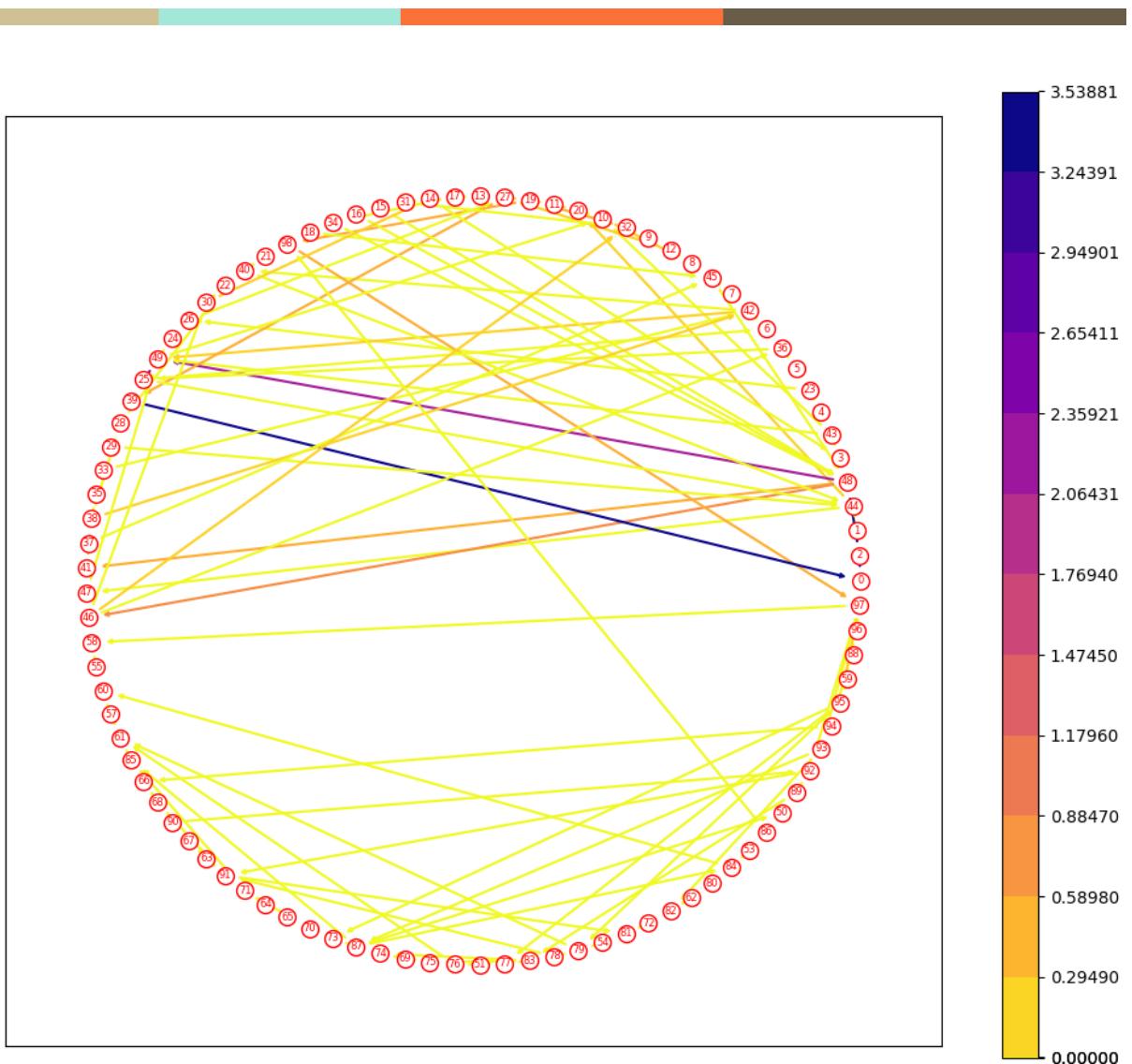
Wykres 3.1 - 15 węzłów, 28 krawędzi



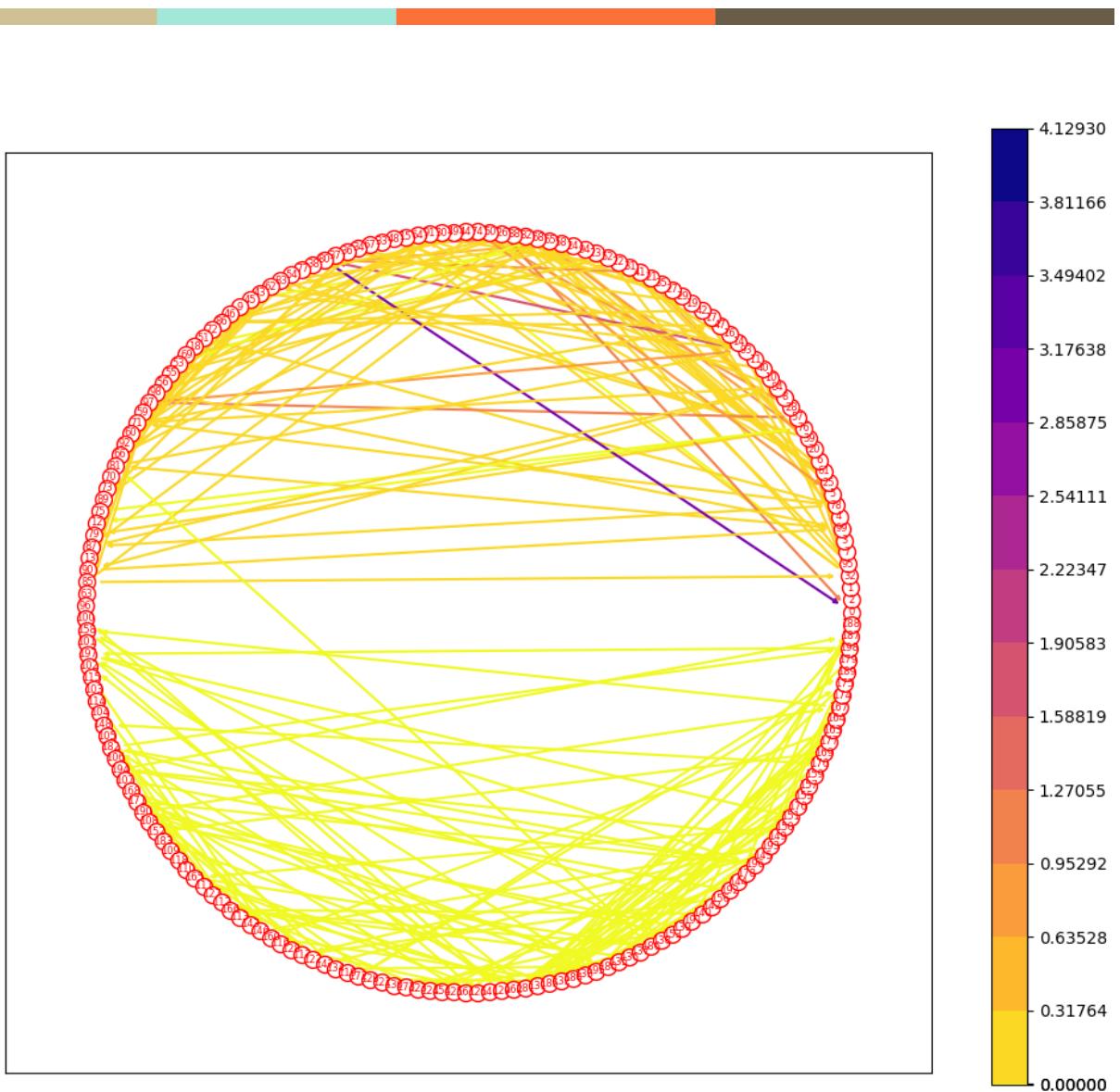
Wykres 3.2 - 30 węzłów, 51 krawędzi



Wykres 3.3 - 50 węzłów, 82 krawędzi

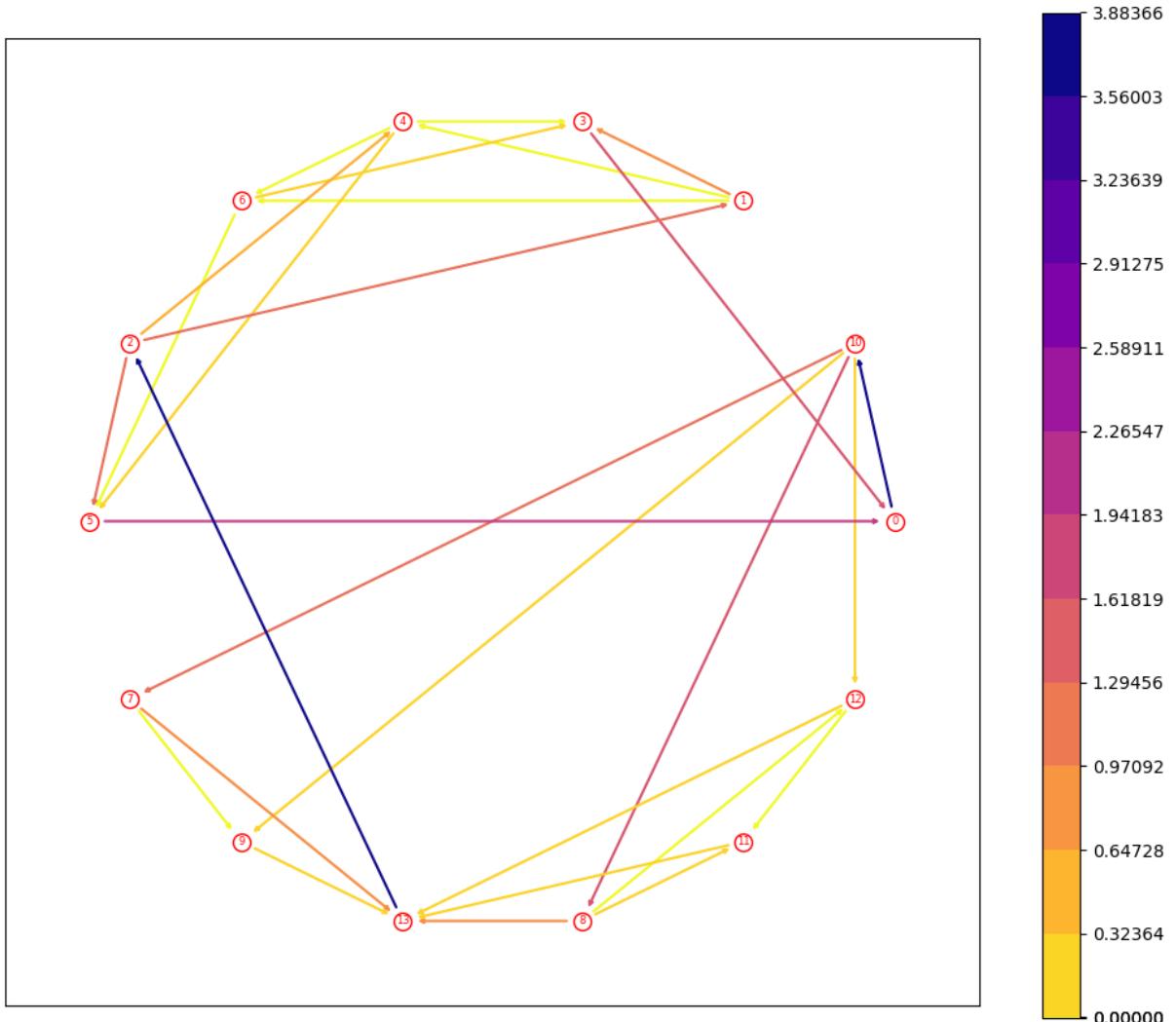


Wykres 3.4 - 100 węzłów, 118 krawędzi

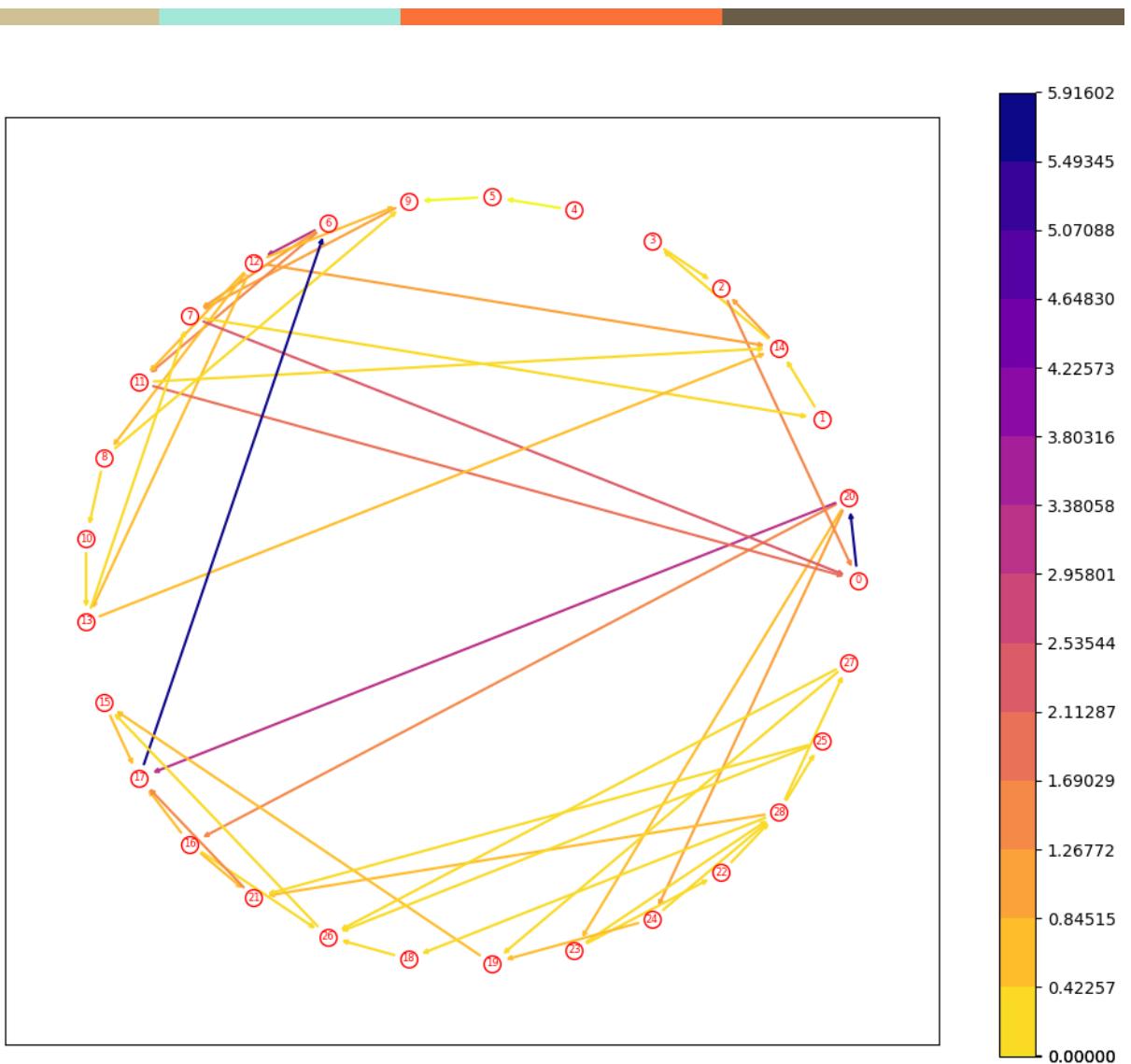


Wykres 3.5 - 200 węzłów, 317 krawędzi

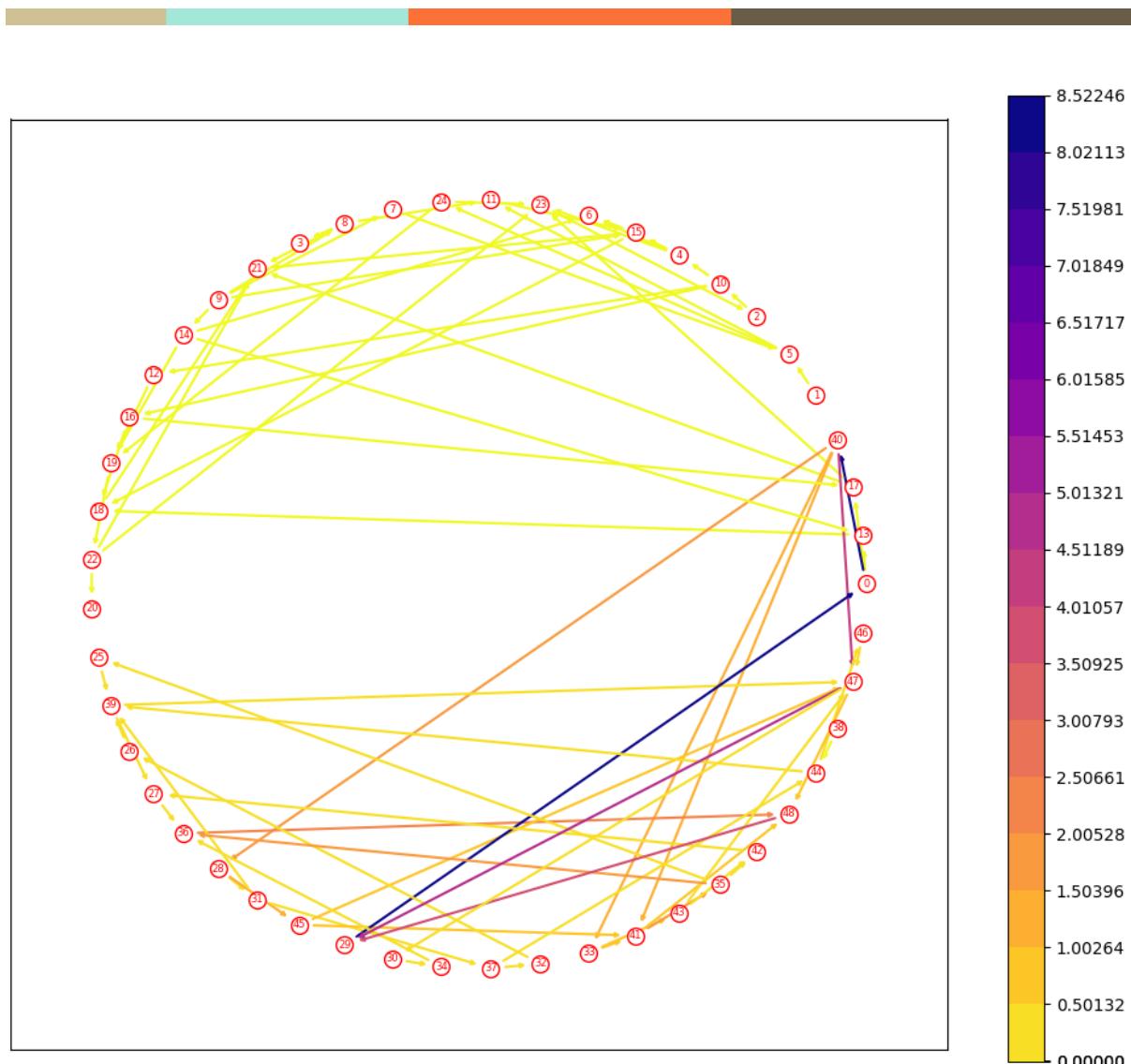
Dwa grafy połączone mostkiem, gdzie źródło jest przyczepione do jednego z grafów, a ujście do grafu gdzie nie znajduje się źródło



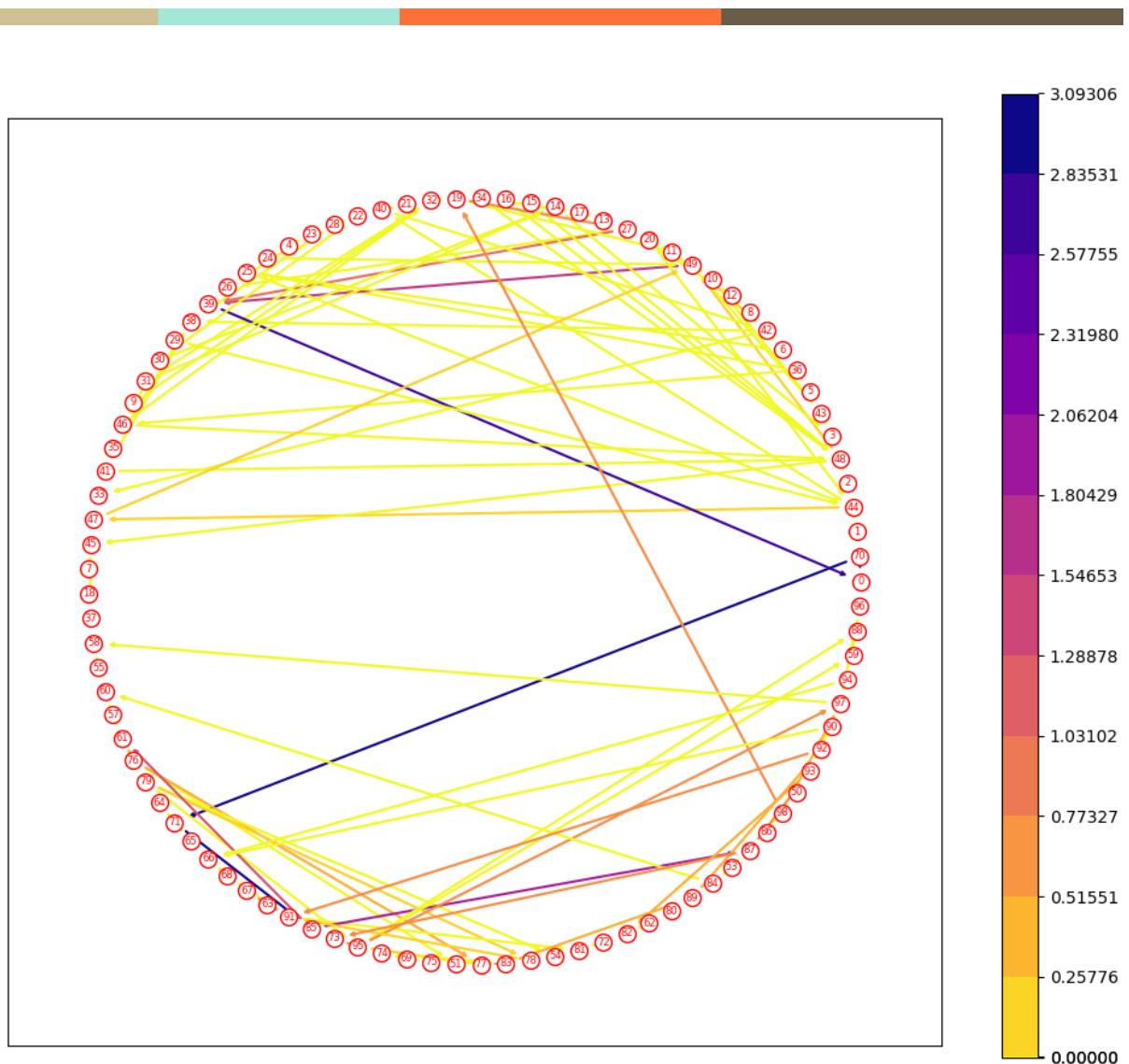
Wykres 4.1 - 15 węzłów, 28 krawędzi



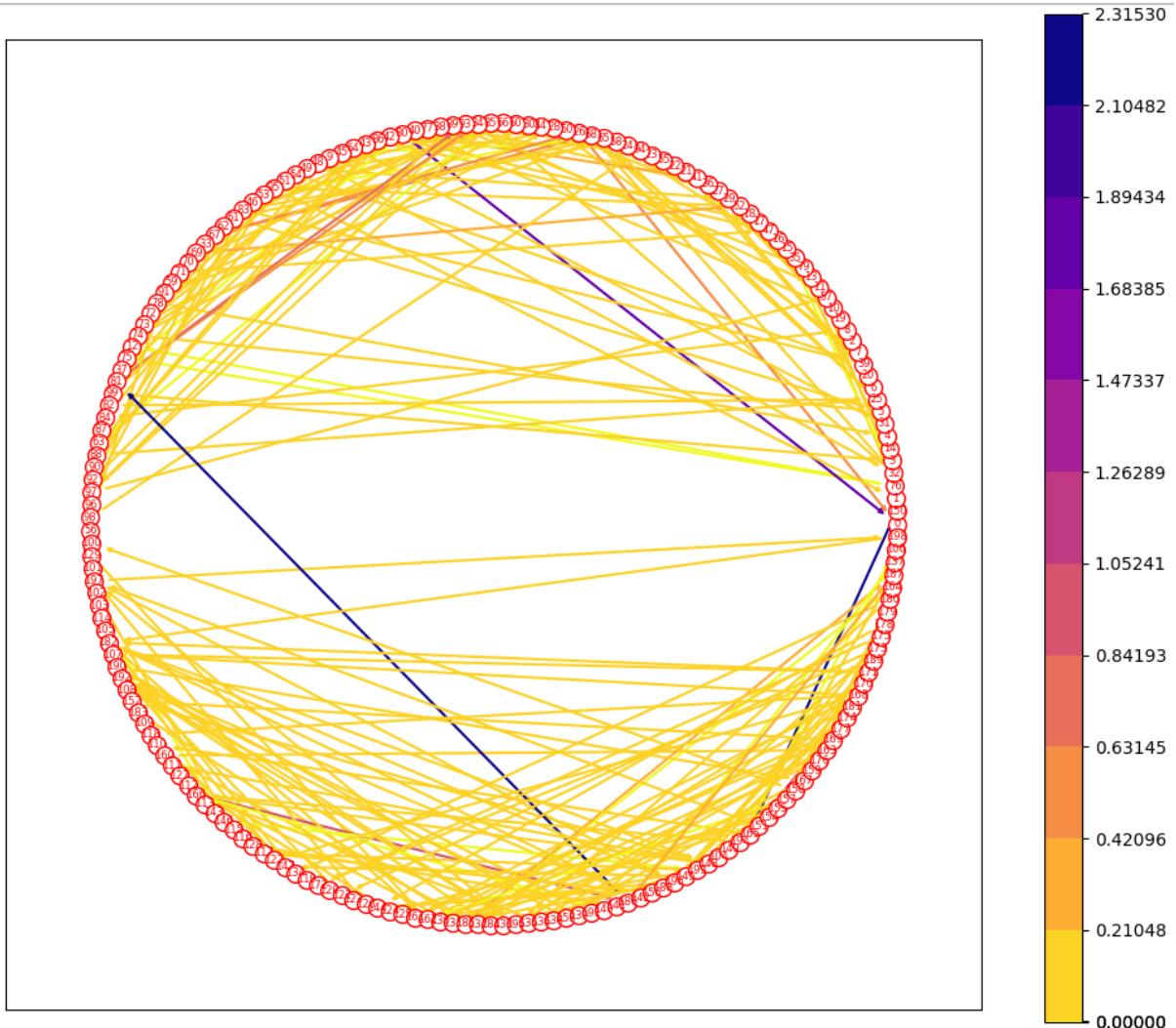
Wykres 4.2 - 30 węzłów, 52 krawędzi



Wykres 4.3 - 50 węzłów, 82 krawędzi

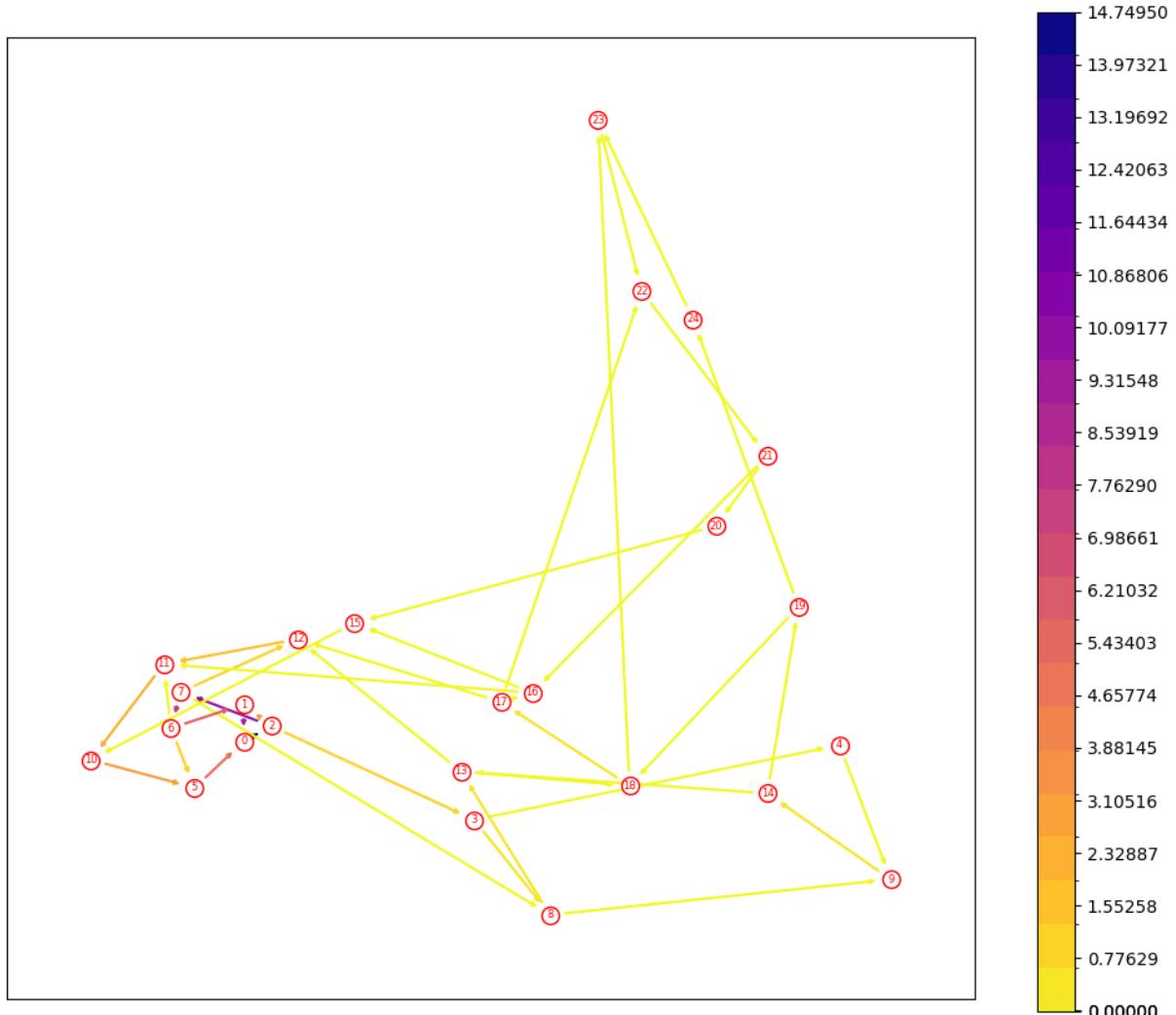


Wykres 4.4 - 100 węzłów, 118 krawędzi

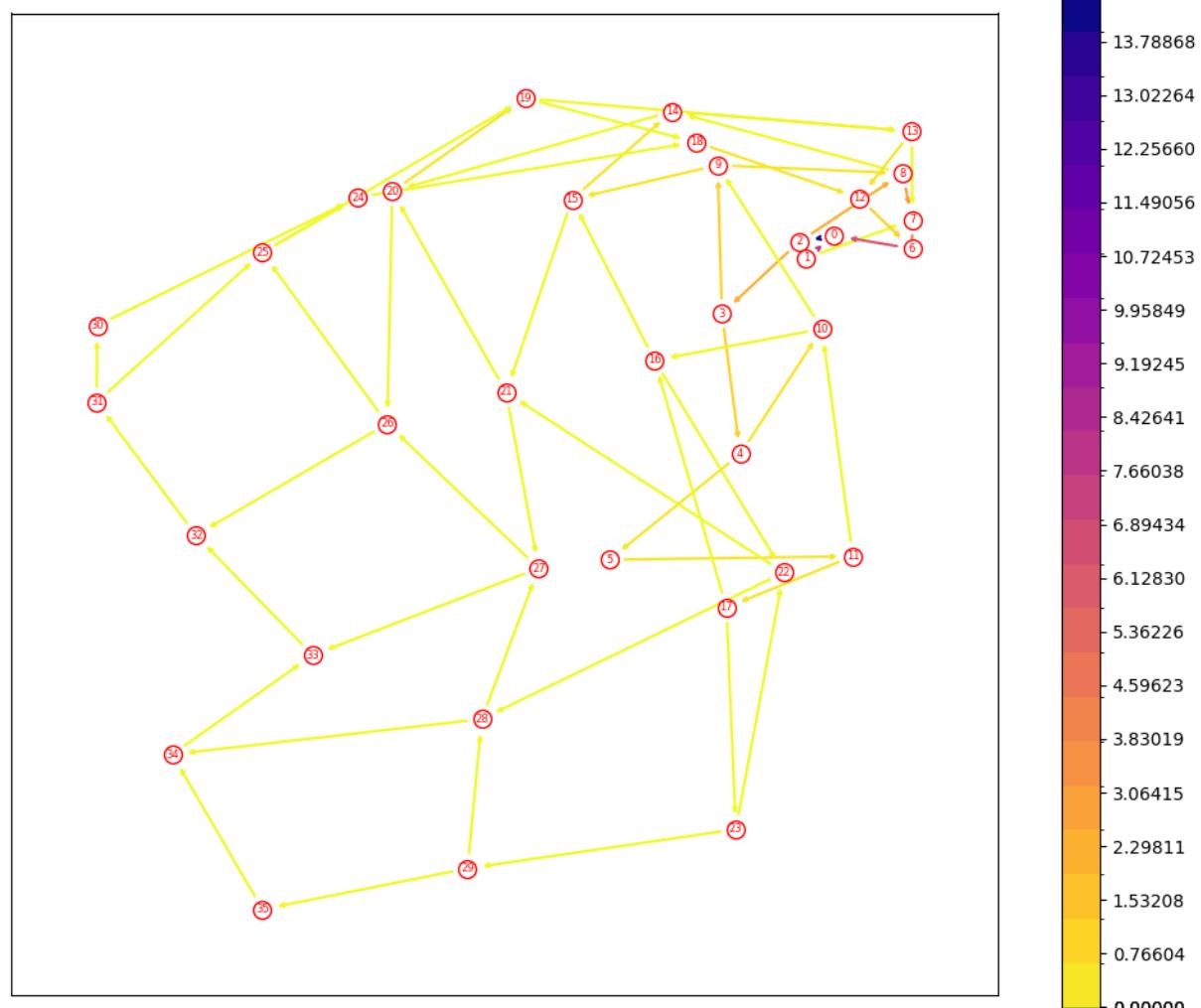


Wykres 4.5 - 200 węzłów, 317 krawędzi

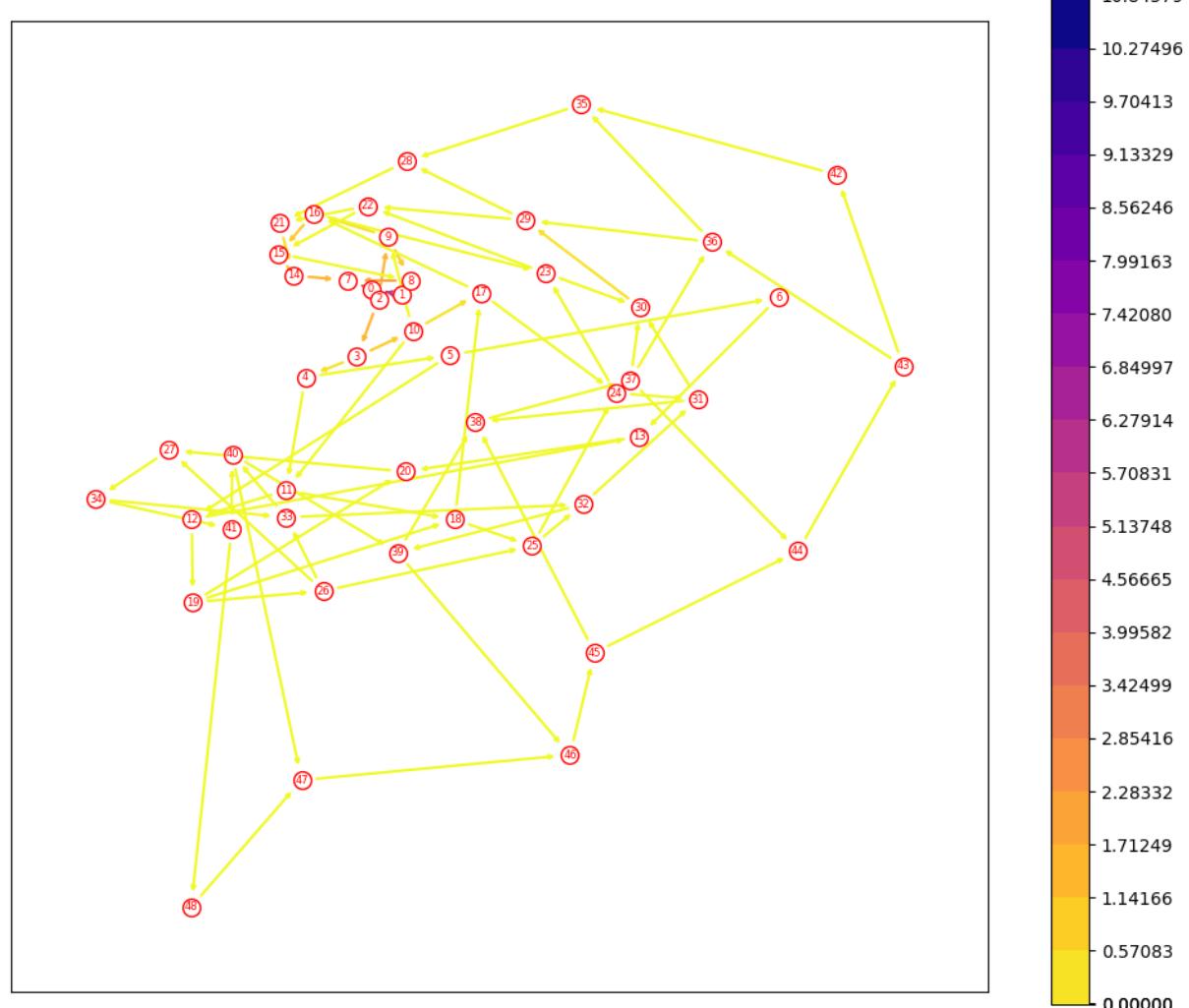
Grafy jako siatka 2D



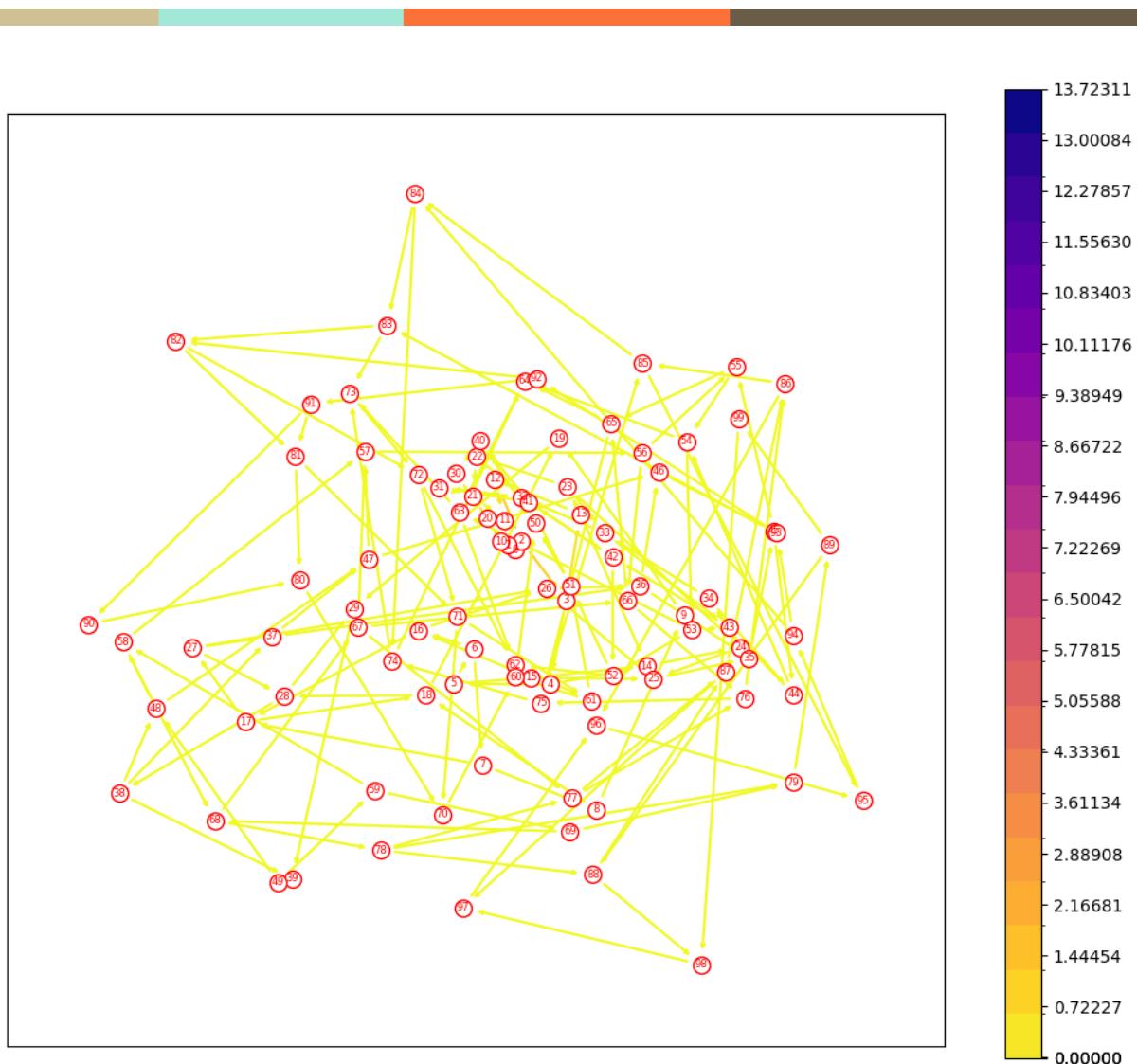
Wykres 5.1 - 25 węzłów, 41 krawędzi



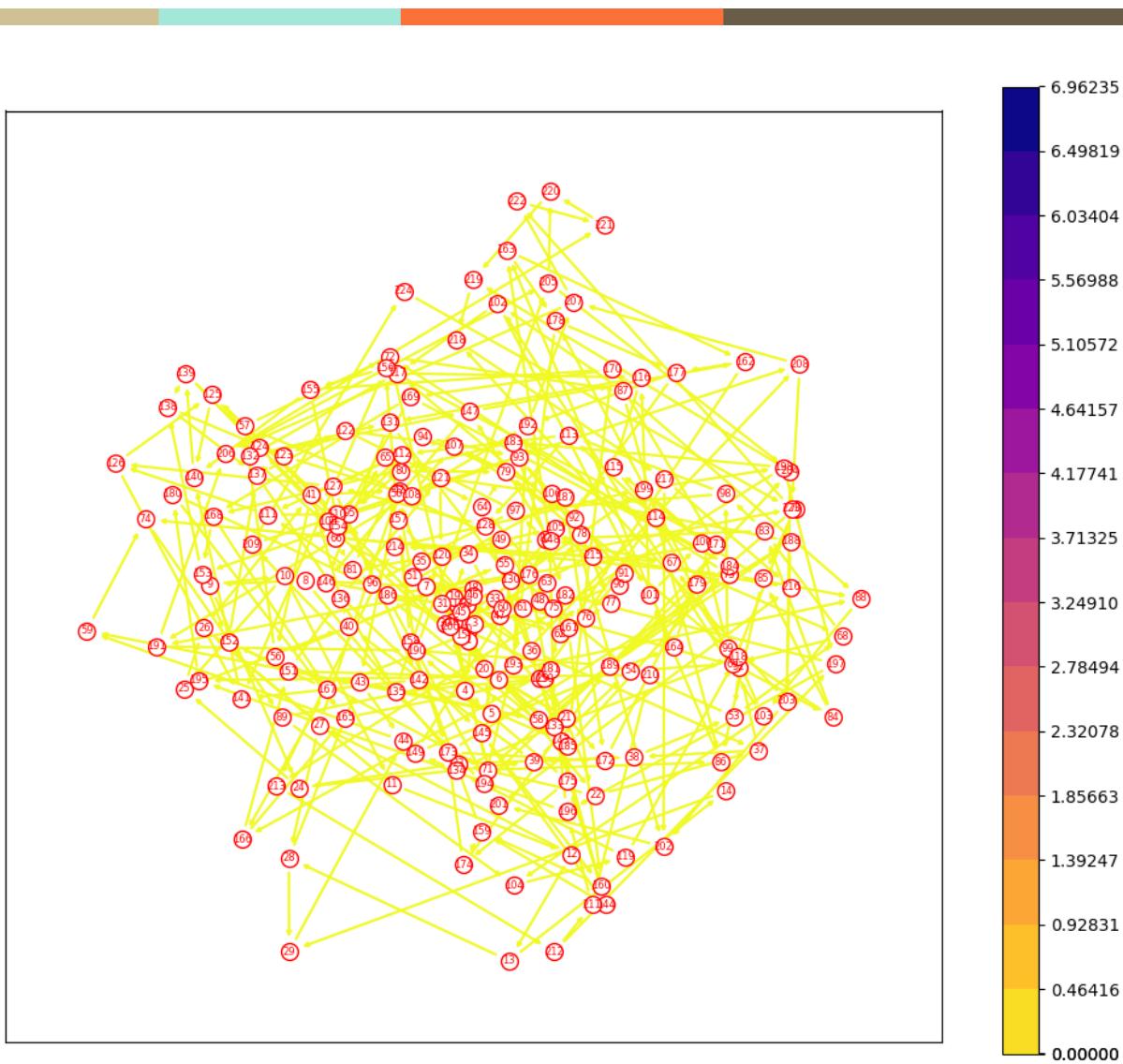
Wykres 5.2 - 36 węzłów, 61 krawędzi



Wykres 5.3 - 49 węzłów, 85 krawędzi

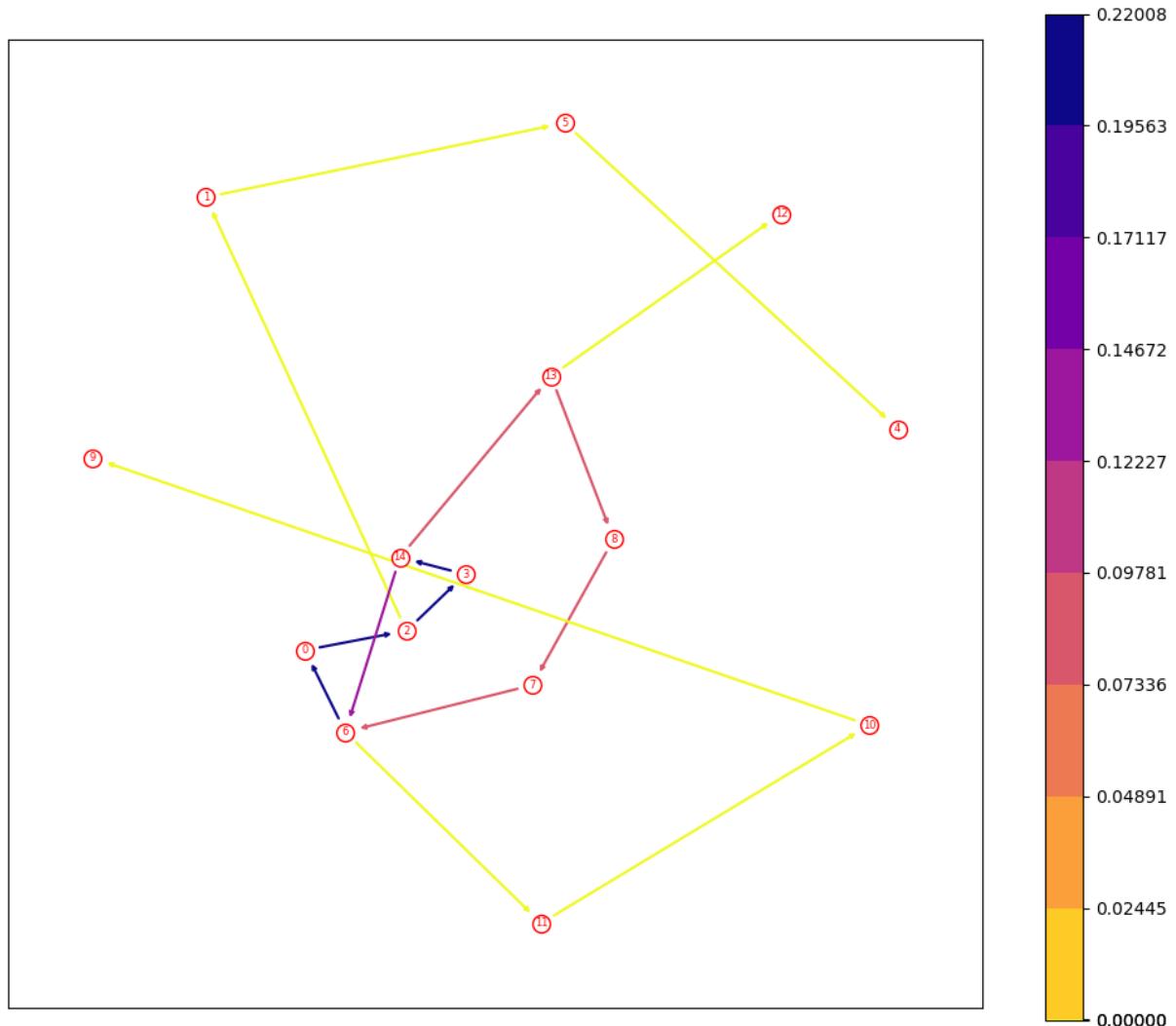


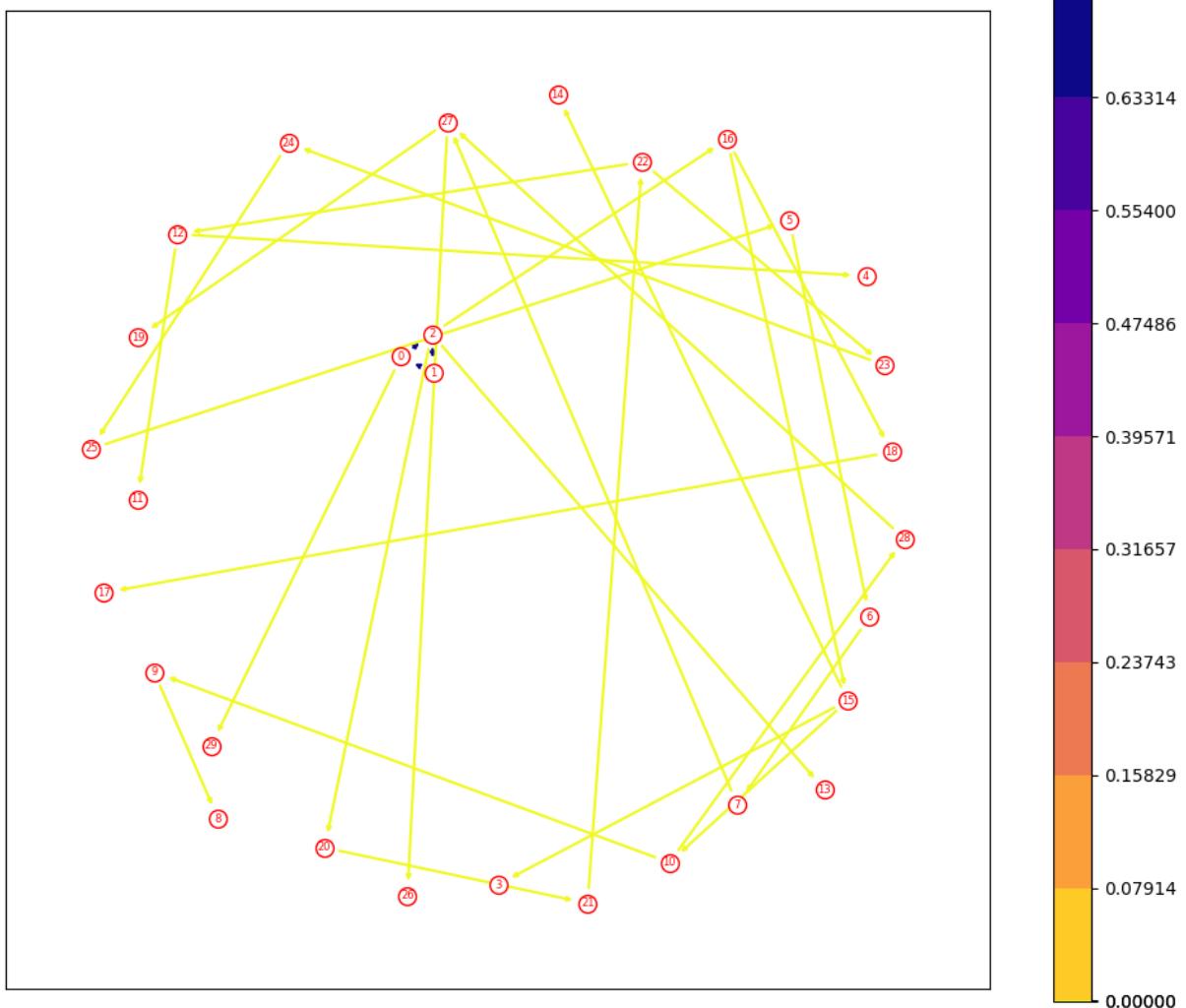
Wykres 5.4 - 100 węzłów, 181 krawędzi

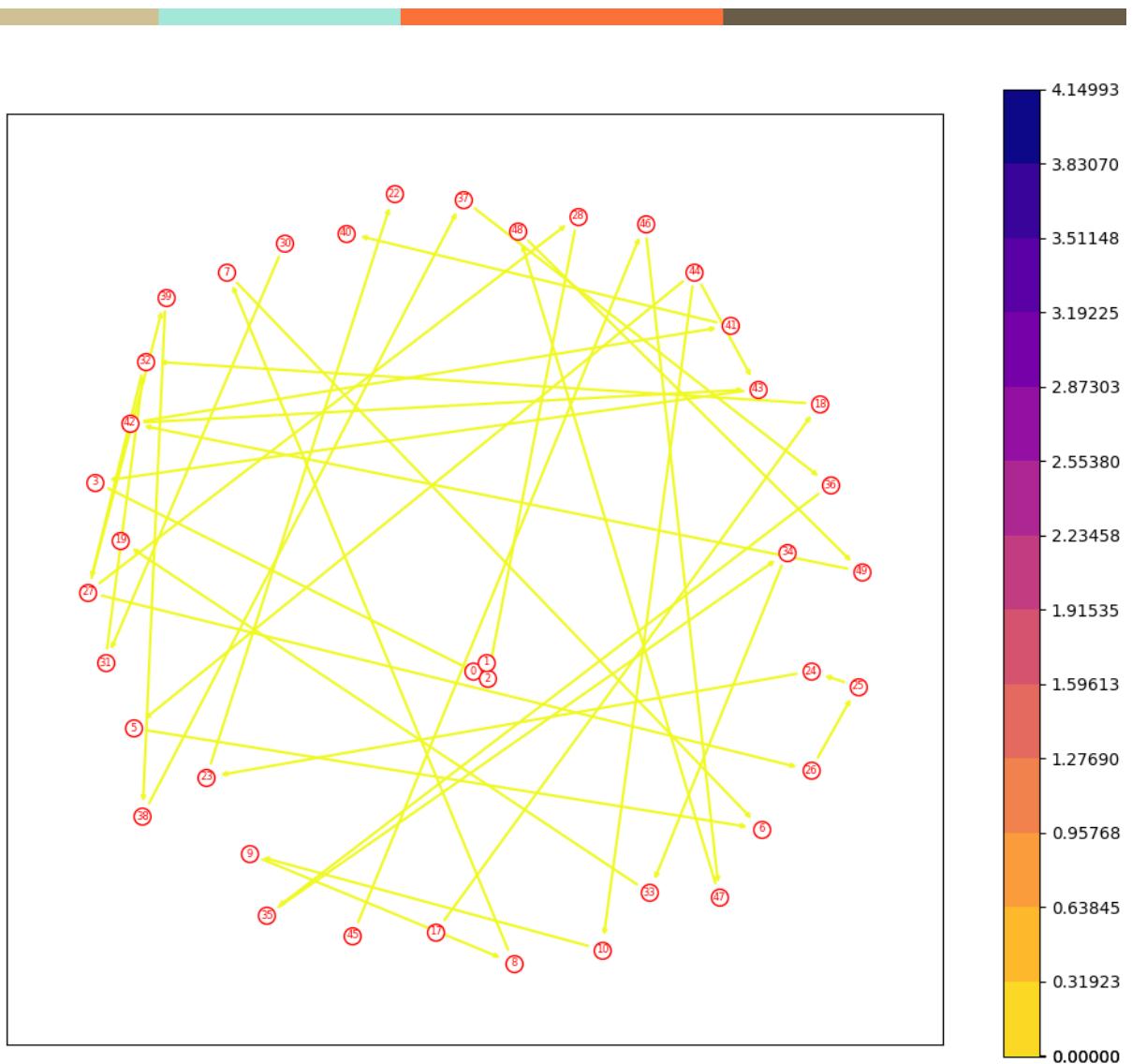


Wykres 5.5 - 225 węzłów, 421 krawędzi

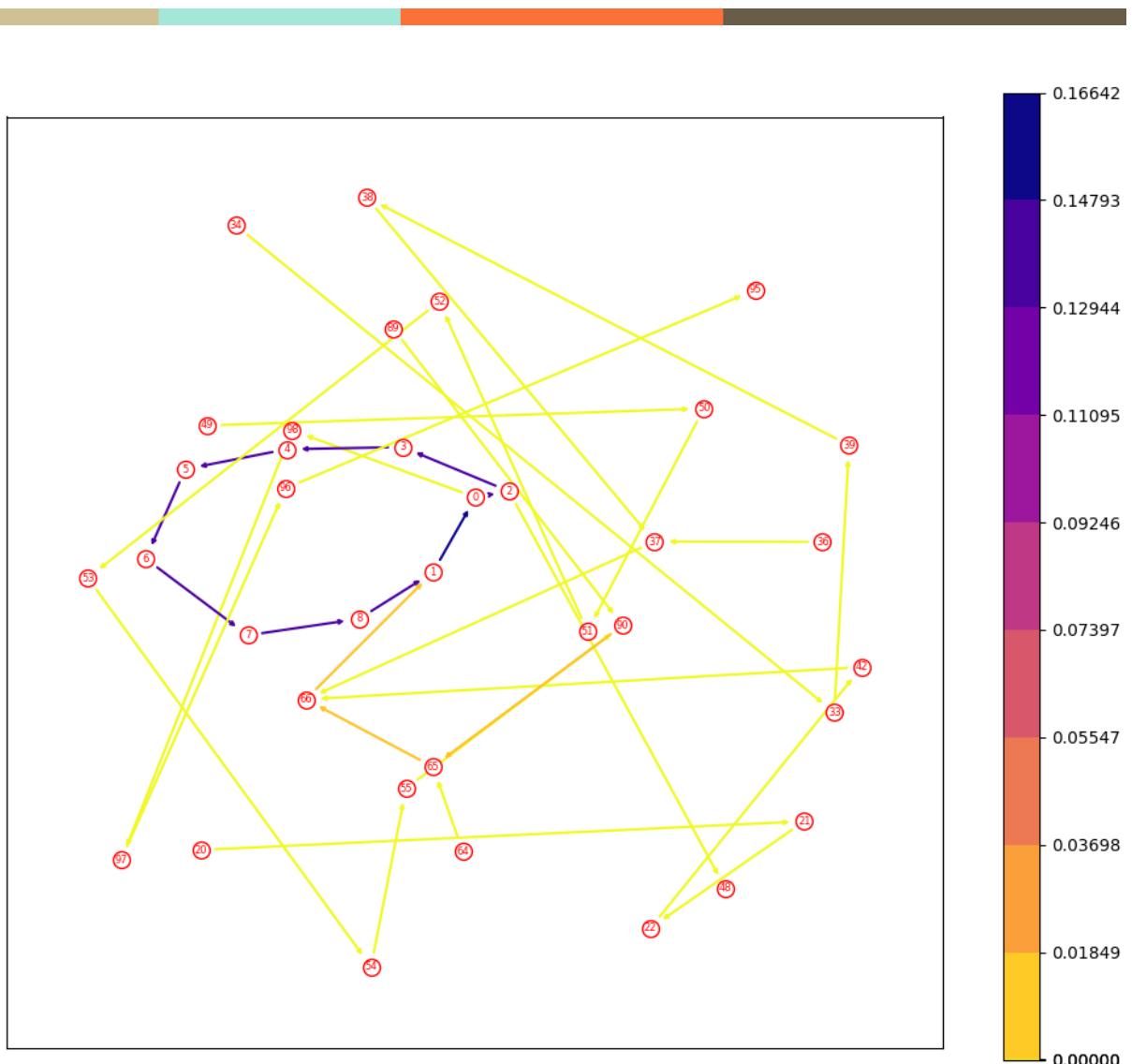
Grafy jako small world



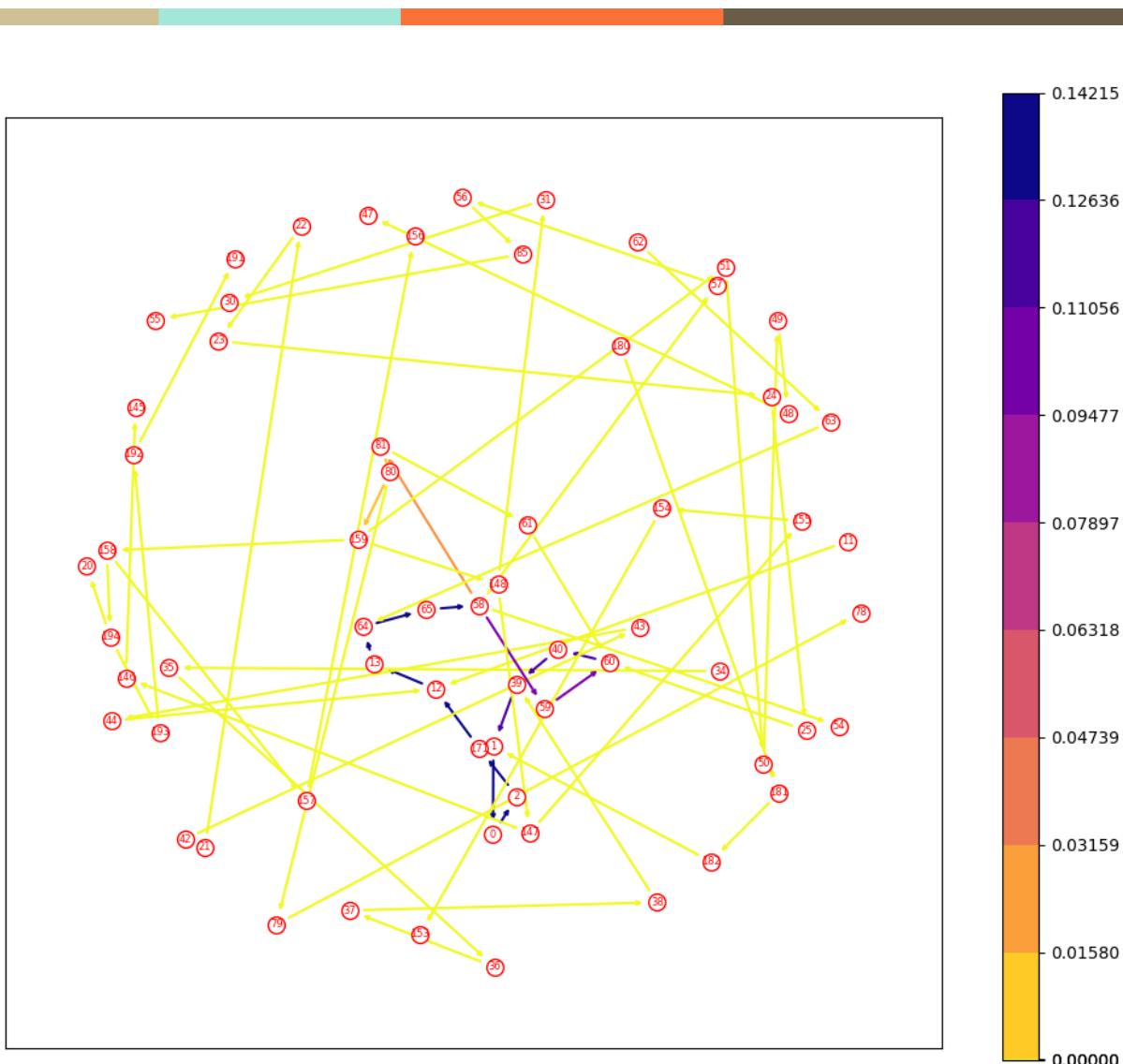




Wykres 6.3 - 50 węzłów, 41 krawędzi



Wykres 6.4 - 100 węzłów, 41 krawędzi



Wykres 6.5 - 200 węzłów, 66 krawędzi

