Equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ generato dai vettori

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, -1, 0) \qquad \mathbf{w}_2 = (1, 1, 1, 1) \qquad \mathbf{w}_3 = (3, 1, -1, 1)$$

Determinare le equazioni cartesiane di $\mathbf{W}$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{V}$.

Primo svolgimento. Innanzitutto troviamo una base di $\mathbf{W}$. Scrivo i vettori $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, e $\mathbf{w}_3$ come colonne di una matrice M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

quindi, per il principio dei minori orlati il rango della matrice M è 2 e le prime due colonne di M sono linearmente indipendenti, dunque $\dim(\mathbf{W}) = 2$ e $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ formano una base di $\mathbf{W}$. Il generico vettore di $\mathbf{V}$ di componenti X_1, X_2, X_3, X_4 rispetto alla base canonica appartiene al sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ se e soltanto se risulta combinazione lineare di $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$. Ciò equivale a imporre che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ -1 & 1 & X_3 \\ 0 & 1 & X_4 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2. Questa condizione si verifica se e soltanto se gli orlati del minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sono uguali a zero. Questi orlati sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ -1 & 1 & X_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ 0 & 1 & X_4 \end{vmatrix}$$

Uguagliando a zero lo sviluppo di Laplace di ciascun determinante rispetto alla terza colonna otteniamo le equazioni

$$X_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - X_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + X_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad X_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - X_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + X_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vale a dire, il sistema omogeneo di equazioni lineari

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \\ -X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

Secondo svolgimento. Dopo aver verificato come nel precedente svolgimento che i vettori $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ formano una base di $\mathbf{W}$, completiamo $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ a una base di tutto $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Lo possiamo fare aggiungendovi due vettori opportunamente scelti da una base di $\mathbf{V}$, per esempio la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è uguale a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

pertanto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base di $\mathbf{V}$. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definito ponendo $F(\mathbf{w}_1) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{w}_2) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $F(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4$.

Abbiamo $Im(F) = \langle F(\mathbf{w}_1), F(\mathbf{w}_2), F(\mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_4)\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\rangle = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\rangle$, quindi $\dim(Im(F)) = 2$. Dalla formula dimensionale per le funzioni lineari segue $\dim(N(F)) = 2$, da cui, essendo $\mathbf{W} \subseteq N(F)$, otteniamo $\mathbf{W} = N(F)$. Se A è la matrice associata all'operatore lineare F rispetto alla base canonica possiamo concludere che il nucleo di F (cioè $\mathbf{W}$) è proprio l'insieme dei vettori le cui componenti X_1, X_2, X_3, X_4 rispetto alla base canonica formano le soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari $A\,X = \mathbf{0}$.

Si tratta quindi di calcolare A. Abbiamo $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$. Calcoliamo

$F(\mathbf{e}_1) = F(\mathbf{w}_1) + F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} + \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$,

$F(\mathbf{e}_2) = -F(\mathbf{w}_1) + F(\mathbf{w}_2) - 2F(\mathbf{e}_3) - F(\mathbf{e}_4) = -2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$,

$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$,

$F(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4$.

Otteniamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e un sistema di equazioni cartesiane per $\mathbf{W}$ risulta essere il seguente

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \\ -X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

che è proprio uguale a quello trovato con il primo metodo (in generale i due metodi daranno luogo a sistemi equivalenti).