Il teorema di Laplace e il principio dei minori orlati

Data una matrice quadrata A d'ordine n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, si consideri l'elemento a_{ij} che occupa in A il posto (i,j). Indichiamo con $\overline{A}_{ij}$ la matrice ottenuta da A sostituendo a_{ij} con 1 e ogni altro elemento della riga i–esima e della colonna j–esima con 0. Abbiamo quindi

$$\overline{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,i-1} & 0 & a_{i-1,i+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,i-1} & 0 & a_{i+1,i+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Indichiamo poi con $\widehat{A}_{ij}$ la matrice quadrata d'ordine $n-1$ ottenuta da A sopprimendo la riga i–esima e la colonna j–esima, vale a dire

$$\widehat{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

AVVERTENZA: nella notazione di Sernesi abbiamo $\widehat{A}_{ij} = A(1 \dots \widehat{i} \dots n \,|\, 1 \dots \widehat{j} \dots n))$.

TEOREMA. *Sussiste la relazione*

$$\det\left(\overline{A}_{ij}\right) = (-1)^{i+j} \det\left(\widehat{A}_{ij}\right).$$

Dimostrazione. Operiamo sulle righe di $\overline{A}_{ij}$ la permutazione

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & n & i & \dots & n-1 \end{pmatrix} = (n, n-1, n-2, \dots, i+1, i)$$

e sulle colonne di $\overline{A}_{ij}$ operiamo invece la permutazione

$$q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j-1 & n & j & \dots & n-1 \end{pmatrix} = (n, n-1, n-2, \dots, j+1, j)$$

La permutazione p è un ciclo di lunghezza $n-i+1$, pertanto essa può essere scritta come prodotto di $n-i$ trasposizioni, dunque $\epsilon(p) = (-1)^{n-i}$. Similmente, la permutazione q è un ciclo di lunghezza $n-j+1$, pertanto essa può essere scritta come prodotto di $n-j$ trasposizioni, dunque $\epsilon(q) = (-1)^{n-j}$. La matrice U_{ij} ottenuta da $\overline{A}_{ij}$ dopo aver effettuato le permuatazioni p e q ha determinante

$$\det(U_{ij}) = (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \det\left(\overline{A}_{ij}\right) = (-1)^{-i-j} \det\left(\overline{A}_{ij}\right).$$

Otteniamo dunque

$$\det\left(\overline{A}_{ij}\right) = (-1)^{i+j} \det(U_{ij}).$$

La matrice U_{ij} ha la forma

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto $U_{ij} = \big(b_{hk}\big)$ si ha
$$\det(U_{ij}) = \sum_{f \in S_n} \epsilon(f) b_{1f_1} \cdot b_{2f_2} \cdot \ldots \cdot b_{n-1,f_{n-1}} \cdot b_{n,f_n}$$
Nella sommatoria l'elemento b_{n,f_n} vale 0 se $f_n \neq n$, mentre vale 1 se $f_n = n$. Dunque la sommatoria si può estendere soltanto a quelle permutazioni $f \in S_n$ aventi n come punto fisso; ogni siffatta permutazione si può identificare con una permutazione g che agisce soltanto sugli elementi $1, 2, \ldots, n-1$ esattamente come la f, cioè una permutazione $g \in S_{n-1}$ la quale chiaramente ha lo stesso segno di f. Dunque
$$\det(U_{ij}) = \sum_{g \in S_{n-1}} \epsilon(g) \cdot b_{1g_1} \cdot b_{2g_2} \cdot \ldots \cdot b_{n-1,g_{n-1}} \cdot 1$$
Ma la matrice $\big(b_{hk}\big)$ con $h, k = 1, 2, \ldots, n-1$ coincide proprio con la matrice $\widehat{A}_{ij}$, da cui
$$\det(U_{ij}) = \det(\widehat{A}_{ij})$$
e quindi l'asserto. □

DEFINIZIONE. Poniamo
$$A_{ij} = \det\big(\overline{A}_{ij}\big) = (-1)^{i+j} \det\left(\widehat{A}_{ij}\right)$$
L'elemento A_{ij} prende il nome di *complemento algebrico* o *cofattore* dell'elemento a_{ij}. Il complemento algebrico di un elemento della matrice quadrata A è dunque uno scalare in $\mathbb{K}$. La matrice
$$\operatorname{cof}(A) = (A_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$
avente come coefficienti i complementi algebrici degli elementi della matrice A prende il nome di *matrice dei complementi algebrici* o *matrice dei cofattori* della matrice A.

OSSERVAZIONE. Il valore del complemento algebrico A_{ij} dell'elemento a_{ij} dipende SOLO dai valori dei coefficienti della matrice A che si trovano AL DI FUORI della riga i-esima e della colonna j-esima di A. In altre parole, possiamo sostituire arbitrariamente i coefficienti della riga i-esima e della colonna j-esima di A e ottenere per il complemento algebrico A_{ij} il medesimo valore.

Il teorema di Laplace.
Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata d'ordine n sul campo $\mathbb{K}$.

1) *La somma degli elementi di una riga di A per i rispettivi complementi algebrici è uguale al determinante di A. Similmente, la somma degli elementi di una colonna di A per i rispettivi complementi algebrici è uguale al determinante di A.*

2) *La somma dei prodotti degli elementi di una riga di A per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga di A è uguale a zero. Similmente, la somma dei prodotti degli elementi di una colonna di A per i complementi algebrici degli elementi di un'altra colonna di A è uguale a zero.*

Possiamo riassumere le proprietà 1) e 2) nelle formule
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{hj} = \delta_{ih} \det(A), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{jh} = \delta_{hi} \det(A).$$
dove δ_{rs} indica il simbolo di Kronecker definito ponendo $\delta_{rs} = 1$ se $r = s$ ovvero $\delta_{rs} = 0$ se $r \neq s$.

Dimostrazione. 1) Consideriamo le n–uple costituenti la base canonica di $\mathbb{K}^n$, cioè
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$
Allora se $A^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ è la i–esima riga di A si ha
$$A^{(i)} = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n$$
e quindi per una proprietà dei determinanti
$$\det(A) = a_{i1} \det(B_1) + a_{i2} \det(B_2) + \ldots + a_{in} \det(B_n)$$

essendo B_j la matrice ottenuta da A sostituendo la riga i–esima con $\mathbf{e}_j$, vale a dire

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Sottraendo nella matrice B_j alla 1^a, 2^a, ..., $(i-1)^a$, $(i+1)^a$,..., n^a riga la riga i^a moltiplicata rispettivamente per a_{1j}, a_{2j}, ..., $a_{i-1,j}$, $a_{i+1,j}$, ..., a_{nj} si ottiene proprio la matrice $\overline{A}_{ij}$ e tale matrice ha lo stesso determinante di B_j, da cui l'asserto.

2) Consideriamo la matrice B ottenuta dalla matrice A sostituendo la riga h–esima con la riga i–esima, cioè $B = b_{rs}$ con $b_{rs} = a_{rs}$ se $r \neq h$ e $b_{hs} = a_{is}$. Allora $\det(B) = 0$ poiché B ha due righe uguali. Ma per la parte 1) appena dimostrata si ha

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{hj} B_{hj}$$

D'altro canto, per come è definita la matrice B, abbiamo anche

$$b_{hj} = a_{ij}, \quad B_{hj} = A_{hj} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n.$$

La proprietà è dunque dimostrata. □

OSSERVAZIONE. Il terorema di Laplace può dunque essere riscritto nella forma seguente

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(\widehat{A}_{ij})$$

Nel primo caso si parla dello *sviluppo di Laplace* del determinante di A rispetto alla i–esima riga, mentre nel secondo caso e si parla dello *sviluppo di Laplace* del determinante di A rispetto alla j–esima colonna. Il teorema di Laplace permette di fatto di ridurre il calcolo di un determinante d'ordine n al calcolo di determinanti d'ordine $n-1$, innescando dunque una procedura *ricorsiva*.

NOTA STORICA. Pierre-Simon Laplace, nato il 23 marzo 1749 a Beaumont-en-Auge in Normandia (Francia) e morto a Parigi il 5 marzo 1827, fu uno dei matematici più famosi della sua epoca, noto soprattutto per i suoi contributi in Meccanica Celeste. Si registra tra l'altro che nel 1784 fu nominato selezionatore dei Cadetti dell'Artiglieria Reale di Francia: in questa veste nel 1785 esaminò con esito positivo il sedicenne Napoleone Bonaparte.

Il principio dei minori "orlati".
Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è uguale a k se e solo se esiste in A un minore d'ordine k non nullo, per il quale risultino nulli tutti i minori orlati (eventualmente esistenti).

Dimostrazione. Avendo già verificato che il rango di una matrice è uguale al massimo ordine dei suoi minori non nulli, possiamo affermare che se il rango di A è uguale a k allora ogni minore d'ordine $k+1$ risulta uguale a zero, e quindi risultano in particolare uguali a zero i minori orlati di un qualunque minore d'ordine k.

Viceversa supponiamo che la matrice A abbia un minore d'ordine k non nullo, per il quale siano nulli tutti i minori orlati. Il minore non nullo d'ordine k sia stato ottenuto considerando le righe i cui indici sono i_1, i_2, ..., i_k e le colonne i cui indici sono j_1, j_2, ..., j_k, cioè il minore in questione sia $\det\big(A(i_1 i_2 \dots i_k \mid j_1 j_2 \dots j_k)\big)$. Allora il rango di A è almeno k. Se il rango di A fosse maggiore di k esisterebbe una riga, diciamo $A^{(p)}$, che non è combinazione lineare delle righe $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, ..., $A^{(i_k)}$. La sottomatrice B di A costituita dalle righe $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, ..., $A^{(i_k)}$ e da questa nuova riga ha rango $k+1$. La sottomatrice di B costituita dalle colonne di indici j_1, j_2, ..., j_k ha rango k (in quanto ammette un minore d'ordine k non nullo), pertanto esiste in B una colonna, diciamo quella d'indice q, che non è combinazione lineare delle colonne d'indice j_1, j_2, ..., j_k. La sottomatrice quadrata di B costituita dalle colonne d'indice j_1, j_2, ..., j_k e da questa nuova colonna ha rango $k+1$, pertanto ha determinante diverso da zero; ma questa sottomatrice si può ottenere da $A(i_1 i_2 \dots i_k \mid j_1 j_2 \dots j_k)$ aggiungendovi la riga d'indice p e e la colonna d'indice q. Pertanto abbiamo trovato un minore orlato di $\det\big(A(i_1 i_2 \dots i_k \mid j_1 j_2 \dots j_k)\big)$ diverso da zero, contro l'ipotesi. □

NOTA STORICA. Il principio di minori orlati viene generalmente attribuito all'algebrista tedesco Leopold Kronecker, nato il 7 dicembre 1823 in Liegnitz, Prussia (oggi Polonia) e morto il 29 dicembre 1891 a Berlino. Era un grande sostenitore del costruttivismo in Matematica e a lui viene attribuita la famosa frase: *Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo.*