Michela Eleuteri

DISPENSE DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Prerequisiti

Indice

CAPITOLO 1

Insiemi e logica

1.1. Elementi di teoria degli insiemi

Il primo obiettivo del nostro corso sarà quello di introdurre gli oggetti più elementari del discorso matematico: i NUMERI; sul concetto di numero si basa quello di funzione.
Tuttavia prima è necessaro introdurre e puntualizzare alcuni concetti base che hanno a che fare con il linguaggio matematico. Cominceremo con concetti di base sugli INSIEMI (Zermelo nel 1908 ha introdotto la teoria assiomatica degli insiemi; Cantor nel 1880 ne parla in modo più informale; noi introdurremo concetti in maniera informale o "ingenuo" come si usa dire di solito).
Abbiamo a che fare con tre parole chiave: INSIEME, ELEMENTO E APPARTENENZA. Cercheremo di andare a spiegare (non definire!) il significato di questi termini.
Il concetto di INSIEME è una nozione primitiva; un insieme è determinato dai suoi elementi; più in generale un insieme è definito quando c'è un criterio per stabilire se un oggetto sta o no in quell'insieme. Per indicare gli insiemi, di solito si usano le lettere maiuscole $A, B, X, Y, \ldots$
L'APPARTENENZA si indica con il simbolo $\in$ e scriviamo $x \in A$ per indicare che x è un elemento dell'insieme A; scriveremo $x \notin A$ per indicare che x non appartiene ad A. Un insieme può essere definito per *tabulazione* cioè elencando i singoli elementi che vi appartengono, per esempio $A = \{1, 2, 3\}$ oppure per *caratteristica* elencando la caratteristica che devono possedere gli elementi dell'insieme, per esempio $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$. In ogni caso è bene notare che l'ordine non conta e nemmeno la molteplicità, ad esempio $\{x \in \mathbb{R} : x-2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 = 0\}$.
L'UGUAGLIANZA tra insiemi A e B si indica con $A = B$ e si esprime con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad \text{e} \qquad \forall x, (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

In parole si può dire che ogni elemento di A deve stare in B e viceversa. Il simbolo $\forall$ indica il QUANTIFICATORE UNIVERSALE e si legge "per ogni" mentre il simbolo $\Rightarrow$ indica

l'IMPLICAZIONE LOGICA e si legge "se...allora" oppure "implica".
L'INCLUSIONE tra due insiemi A e B si indica con $A \subseteq B$ e si esprime con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ricordiamo che con questa scrittura si lascia la possibilità ad A di essere uguale a B. Se vogliamo indicare invece un'inclusione stretta (cioè che ci sia almeno un elemento di B che non appartiene ad A), si usa di solito il simbolo $A \subset B$ oppure $A \subsetneq B$ e si esprime questo concetto con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad \text{e} \qquad \exists x \in B : x \notin A.$$

Il simbolo $\exists$ indica il QUANTIFICATORE ESISTENZIALE e si legge "esiste almeno"; nel caso l'elemento che esiste sia unico si indica con $\exists!$.

❒ **Osservazione 1.1.1.** Occorre fare attenzione alla differenza tra il simbolo di appartenenza e quello di inclusione. Infatti per esempio le seguenti scritture hanno senso

$$x \in A; \qquad 2 \in \{1,2,3\}; \qquad \{2\} \subseteq \{1,2,3\}; \qquad \{1,2,3\} \neq \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

notando che ovviamente $2 \neq \{2\}$. Invece le seguenti scritture non hanno senso

$$2 \subseteq \{1,2,3\}; \qquad \{2\} \in \{1,2,3\}.$$

L'INSIEME VUOTO è l'insieme che non contiene elementi; si indica con il simbolo $\emptyset$. Naturalmente

$$\emptyset \neq 0 \neq \{\emptyset\}.$$

Inoltre è banale dimostrare che

$$\emptyset \subseteq A, \ \forall A.$$

L'INSIEME DELLE PARTI di un insieme X è l'insieme che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di X. Si indica con il simbolo $\mathcal{P}(X)$.

❒ **Esempio 1.1.2.** *Se* $X = \{a,b,c\}$ *allora*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

L'insieme delle parti contiene sempre i due sottoinsiemi banali $\emptyset$ e X.

❒ **Definizione 1.1.3.** Sia A un insieme finito; chiamiamo CARDINALITÀ DI A il numero degli elementi di A. Essa si denota anche con $\mathrm{card}(A)$.

È facile dimostrare che se X ha cardinalità n (cioè ha n elementi), l'insieme $\mathcal{P}(X)$ ha cardinalità 2^n (cioè ha 2^n elementi).

1.1.1. Insiemi numerici: cenni

Concludiamo il paragrafo accennando ai vari insiemi numerici, che verranno ripresi e studiati nel corso di questo capitolo. Abbiamo i seguenti insiemi:
• $\mathbb{N}$ insieme dei numeri NATURALI (0 incluso): $0, 1, 2, \ldots$
• $\mathbb{Z}$ insieme dei numeri INTERI RELATIVI: $0, -1, 1, \ldots$
• $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri RAZIONALI: $\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$. I numeri razionali si possono anche scrivere in forma decimale (decimali finiti o decimali periodici).
• $\mathbb{R}$ insieme dei numeri REALI: si tratta dei decimali non periodici, es.: $0,1011011101111\ldots$ (irrazionale)
• $\mathbb{C}$ insieme dei numeri COMPLESSI es: $\sqrt{-1} = i$.
Vale la seguente catena di inclusioni strette:

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}.$$

1.1.2. Operazioni tra insiemi

In questa sezione ci occupiamo di alcune tra le più comuni operazioni tra gli insiemi. Sia X l'insieme universo comune (può essere ad esempio $X = \mathbb{N}$ oppure $X = \mathbb{R}$).

❒ **Definizione 1.1.4.** Dati due insiemi A e B, si dice INTERSEZIONE DI A E B, e si indica con $A \cap B$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Allora l'intersezione tra due insiemi A e B è l'insieme

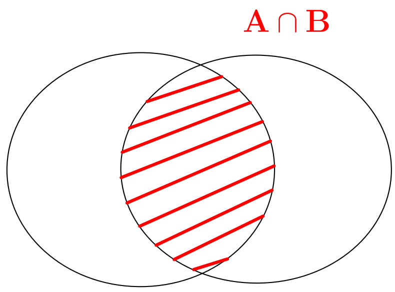
$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$$

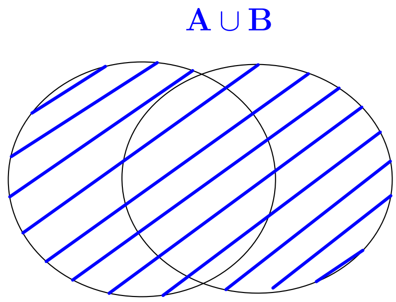
Se A e B non hanno elementi comuni, allora la loro intersezione è l'insieme vuoto; in tal caso diremo che A e B sono *disgiunti*.
Si verifica facilmente che

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cap A = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

❒ **Definizione 1.1.5.** Dati due insiemi A e B, si dice UNIONE DI A E B, e si indica con $A \cup B$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A o B.





L'unione tra due insiemi A e B è dunque l'insieme

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

Anche in questo caso si verifica facilmente che

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cup A = A, \qquad A \cup \emptyset = A$$

e anche

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

❒ **Definizione 1.1.6.** Dati due insiemi A e B, si dice DIFFERENZA DI A E B, e si indica con $A \setminus B$, l'insieme costituito da tutti gli elementi di A che non appartengono a B.

L'insieme differenza è dunque l'insieme

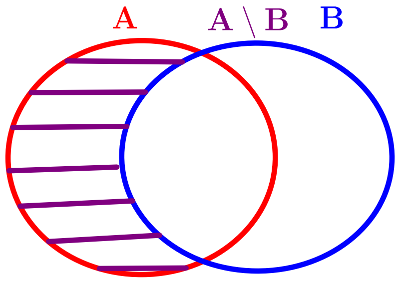
$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\}$$

Osserviamo che se $A \cap B = \emptyset$ allora si ha $A \setminus B = A$; d'altra parte se $A \subseteq B$ allora $A \setminus B = \emptyset$. Si possono poi facilmente dimostrare le seguenti *proprietà distributive:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e le seguenti *Leggi di De Morgan*

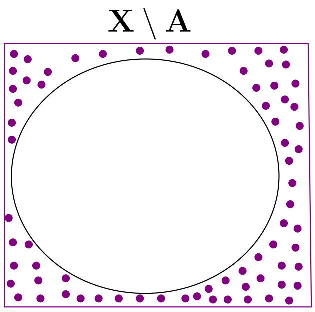
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$



❐ **Definizione 1.1.7.** Dati due insiemi A e X, con $A \subseteq X$, si dice COMPLEMENTARE DI A RISPETTO A X, e si indica con A^c o $C_X A$ (talvolta anche con $\overline{A}$) l'insieme $X \setminus A$.

Dunque l'insieme complementare di A è fatto rispetto ad un insieme universo X ed è l'insieme

$$C_X A := \{x \in X : x \notin A\}$$



❐ **Esempio 1.1.8.** *Sia* $\mathbb{R}$ *l'insieme universo e sia* $A = (0,1)$*. Allora*

$$A^c = C_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x \geq 1\}.$$

Siano A e B sottoinsiemi di X; allora le leggi di De Morgan si possono riscrivere nel modo seguente

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Un'altra operazione importante è il PRODOTTO CARTESIANO tra due insiemi A e B non necessariamente distinti, che è l'insieme

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

In generale si ha che $A \times B \neq B \times A$. Inoltre ad esempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si può identificare con $\mathbb{R}^2$ (e scriveremo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$) e allo stesso modo si indicherà con $\mathbb{R}^n$ le n-uple di numeri reali.

1.2. Elementi di logica

❐ **Definizione 1.2.1.** Diciamo PROPOSIZIONE una frase per la quale ha senso chidersi se è vera o falsa.

❐ **Esempio 1.2.2.** *3 è un numero primo (proposizione vera); 6 è un numero primo (proposizione falsa).*

❐ **Definizione 1.2.3.** Un PREDICATO $\mathcal{P}(x)$ definito su un insieme A è una frase che ad ogni elemento $a \in A$ associa una proposizione $\mathcal{P}(a)$. Detto altrimenti è una frase in cui la verità o la falsità dipende dalla variabile o dalle variabili che in esso compaiono.

❐ **Esempio 1.2.4.** *n è un numero primo.*

Più proposizioni si possono combinare tra loro per formarne di nuove e più complesse. Ciò avviene attraverso l'uso di connettivi logici:
✎ NEGAZIONE: data una proposizione $\mathcal{P}$ la sua negazione si indica con il segno $\neg\mathcal{P}$ (o talvolta anche $\overline{\mathcal{P}}$) e corrisponde al cambiamento del valore di verità.
✎ CONGIUNZIONE: si indica con $\wedge$; la proposizione $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è vera se e solo se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere.
✎ DISGIUNZIONE: si indica con $\vee$; la proposizione $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è vera se e solo se almeno una tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera.
✎ IMPLICAZIONE: si indica con $\Rightarrow$; la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è falsa se e solo se $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa; in tutti gli altri casi risulta vera.
✎ DOPPIA IMPLICAZIONE: si indica con $\Leftrightarrow$; la proposizione $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera se e solo se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.
✎ DISGIUNZIONE ESCLUSIVA: si indica con $\vee^*$; la proposizione $\mathcal{P} \vee^* \mathcal{Q}$ è vera se e solo se una solamente tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera e l'altra è falsa.
Un modo per rendere proposizione un predicato è quello di saturare la variabile mediante l'uso di un QUANTIFICATORE. Come già accennato nel primo paragrafo, i due quantificatori più comunemente usati sono il QUANTIFICATORE UNIVERSALE $\forall$ e il QUANTIFICATORE ESISTENZIALE $\exists$. Dunque la proposizione

$$\forall\, x \in A : \mathcal{P}(x)$$

si legge "per ogni x appartenente ad A vale $\mathcal{P}(x)$" e significa che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è verificata per tutti gli x che appartengono all'insieme A; invece la proposizione

$$\exists\, x \in A : \mathcal{P}(x)$$

si legge "esiste x appartenente ad A tale che vale $\mathcal{P}(x)$" e significa che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è verificata per almeno un elemento x che appartiene all'insieme A.

❒ **Definizione 1.2.5.** Un'IMPLICAZIONE UNIVERSALE è un'implicazione che è vera per tutti i valori della variabile appartenenti a un dato insieme; in formule

$$\forall x \in A, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)).$$

❒ **Esempio 1.2.6.** Un esempio di implicazione universale è il seguente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; n \text{ è pari} \Rightarrow n+1 \text{ è dispari}$$

La maggior parte dei teoremi è costituita da implicazioni universali. In questo caso $\mathcal{P}(x)$ è l'IPOTESI e $\mathcal{Q}(x)$ è la TESI. È chiaro che se vogliamo dimostrare un'implicazione universale, non possiamo mostrare che questa vale elencando tutti i possibili casi; ad esempio, nell'esempio precedente, non possiamo prendere $n = 2$ e verificare che siccome 2 è pari allora 3 è dispari e via di seguito per tutti gli n, perché sono infiniti.
Quindi una prima possibilità consiste nel considerare il generico n (o il generico x in generale) che soddisfa l'ipotesi e mostrare che esso soddisfa anche la tesi. Questo è il caso di una DIMOSTRAZIONE DIRETTA.
Esistono anche metodi di dimostrazioni INDIRETTE, che si basano cioè sulla negazione dell'implicazione universale. Innanzitutto vale

$$\forall x \in A, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A, (\neg\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$$

che si chiama LEGGE DELLE CONTROINVERSE.

❒ **Esempio 1.2.7.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ pari} \Rightarrow n \text{ divisibile per } 2) \;\Leftrightarrow\; \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ non divisibile per } 2 \Rightarrow n \text{ non pari}).$$

Quindi per dimostrare un'implicazione universale, possiamo usare la legge delle controinverse e provare che se non vale la tesi allora non vale l'ipotesi.
Alternativamente possiamo utilizzare la DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: assumiamo vera l'ipotesi e supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora si cerca di arrivare a una contraddizione mostrando che anche l'ipotesi è falsa, da cui l'assurdo.
Ci sono alcune semplici regole per la negazione:

$$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = \neg(\mathcal{P}) \vee \neg(\mathcal{Q}); \quad \neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \neg(\mathcal{P}) \wedge \neg(\mathcal{Q}); \quad \neg(\neg\mathcal{P}) = \mathcal{P};$$

inoltre

$$\neg(\forall x : \mathcal{P}) = \exists x : \neg\mathcal{P}; \qquad \neg(\exists x : \mathcal{P}) = \forall x : \neg\mathcal{P};$$

e soprattutto (la negazione dell'implicazione universale)

$$\neg[\forall x, (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] = \exists x : (\mathcal{P}) \wedge \neg(\mathcal{Q}).$$

Questo ci permette di lavorare nel caso in cui dobbiamo dimostrare che un'implicazione universale sia falsa. In tal caso, basandoci sulla relazione precedente, basta esibire un CONTROESEMPIO, cioè un esempio che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi (per la presenza nella negazione dell'implicazione universale del quantificatore esistenziale). Ad esempio, si consideri l'implicazione universale (falsa) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ dispari $\Rightarrow n$ primo. In tal caso, un controesempio è dato da $n = 15$: infatti 15 è dispari ma non primo.

1.3. Valore assoluto

❒ **Definizione 1.3.1.** Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora il VALORE ASSOLUTO di a si indica con $|a|$ ed è definito come segue:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

❒ **Osservazione 1.3.2.** Osserviamo che

$$\forall a \geq 0,\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

❒ **Proposizione 1.3.3.** *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha*

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \tag{1.3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'osservazione precedente si ha che

$$-|x| \leq x \leq |x| \qquad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sommando le due quantità membro a membro si ottiene

$$-|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

da cui la tesi. □

❒ **Proposizione 1.3.4.** *Dalla* (1.3.1) *si deducono le seguenti disuguaglianze (anch'esse vanno sotto il nome di* DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI

$$\forall a, b, c \quad |a-b| \leq |a-c| + |b-c| \qquad ||a| - |b|| \leq |a-b|$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (1.3.1) si ottiene la prima disuguaglianza ponendo $x = a-c$ e $y = b-c$. Per quanto riguarda invece la seconda disuguaglianza, prima si usa la (1.3.1) con la scelta $x = a - b$ e $y = b$ da cui

$$|a| \leq |a-b| + |b| \qquad \Rightarrow \qquad |a| - |b| \leq |a-b|;$$

analogamente scambiando i ruoli tra a e b si ottiene

$$|b| \leq |a-b| + |a| \qquad \Rightarrow \qquad |b| - |a| \leq |a-b|;$$

da cui la tesi. $\square$
La quantità $|a-b|$ geometricamente rappresenta la distanza tra due punti a e b nel senso della geometria elementare. Abbiamo inoltre che

$$|ab| = |a|\,|b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |a| = |-a|.$$

1.4. Sommatorie

Per indicare in modo compatto una somma finita, si usa il simbolo di sommatoria.

❒ **Definizione 1.4.1.** La SOMMATORIA per i che va da 1 a n di a_i si indica con

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;$$

i si chiama INDICE DELLA SOMMATORIA.

❒ **Esempio 1.4.2.**

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{5269}{3600}$$

È bene notare che l'indice è muto, cioè

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 = \sum_{j=3}^{n} j^2$$

mentre vale

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 \neq \sum_{i=3}^{m} i^2, \qquad n \neq m.$$

Le proprietà fondamentali della sommatoria sono:
1) PRODOTTO PER UNA COSTANTE (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

$$\sum_{k=1}^{n} (c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

2) SOMMATORIA CON TERMINE COSTANTE

$$\sum_{k=1}^{n} c = c\,n$$

3) somma di sommatorie
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
4) scomposizione
$$\sum_{k=1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$$
5) traslazione di indici
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$
6) riflessione di indici
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$
Le proprietà della sommatoria possono essere usate per calcolare la somma di una progressione geometrica.

❒ **Definizione 1.4.3.** Si dice che n termini sono in progressione geometrica se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) è costante. Tale costante si dice ragione della progressione

❒ **Esempio 1.4.4.** *La progressione geometrica di primo termine a e ragione q è data da*
$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$
Vale la seguente proposizione.

❒ **Proposizione 1.4.5.** *Per la somma dei primi termini della progressione geometrica vale la formula (vera per $a = 1$ e ragione $q \neq 1$)*
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Se $q = 1$, la sommatoria vale semplicemente $n + 1$.

dimostrazione: dimostriamo la seguente formula equivalente alla tesi
$$(1 - q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$
Si ha
$$\begin{aligned}(1 - q)\sum_{k=0}^{n} q^k &\overset{1)}{=} \sum_{k=0}^{n}(1 - q)\, q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \overset{3)}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &\overset{4)}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Dal paragrafo precedente, possiamo dedurre, iterando n volte la disuguaglianza triangolare

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

CAPITOLO 2

Disequazioni algebriche

2.1. Disequazioni di primo grado

Per la risoluzione di disequazioni di primo grado è necessario (e sufficiente) ricordare i seguenti 3 principi:
• **[P1]** aggiungendo o togliendo da ambedue i membri di una disuguaglianza uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso. In simboli si ha:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad \begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \\ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \end{array}$$

• **[P2]** moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso. Indicando con $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ si ha:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall c \in \mathbb{R}^+ \qquad \begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow a\,c > b\,c \\ a < b \Leftrightarrow a\,c < b\,c \end{array}$$

• **[P3]** moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo, si ottiene una disuguaglianza di senso contrario. Indicando con $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ si ha:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall c \in \mathbb{R}^- \qquad \begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow a\,c < b\,c \\ a < b \Leftrightarrow a\,c > b\,c \end{array}$$

❒ **Esempio 2.1.1.** *Si risolva*

$$\frac{2}{3}(1 - x) + \frac{1}{2} < \frac{x}{2} - \frac{1}{3}(2 + 3x)$$

Eliminiamo i denominatori, moltiplicando ambo i membri per il m.c.m. (principio **[P2]***). Si ha*

$$4(1 - x) + 3 < 3x - 2(2 + 3x).$$

Applicando il principio **[P1]** *e trasportando i termini con l'incognita* x *nel primo membro e i termini noti nel secondo, si ottiene*

$$-4x - 3x + 6x < -4 - 4 - 3$$

da cui

$$-x < -11.$$

Applicando il terzo principio **[P3]** *(moltiplicando ambo i membri per* -1*) si ottiene* $x > 11$.

❒ **Esempio 2.1.2.** *Si risolva*

$$\frac{2}{5}(x-1) \geq 1 + 2x - \frac{x+1}{3}.$$

Osserviamo che il predicato $A(x) \geq B(x)$ *equivale a* $A(x) > B(x) \vee A(x) = B(x)$. *(Analogamente per il caso* $\leq$*). Quindi in questo caso si tratta di dover risolvere contemporaneamente la disequazione*

$$\frac{2}{5}(x-1) > 1 + 2x - \frac{x+1}{3}$$

e l'equazione

$$\frac{2}{5}(x-1) = 1 + 2x - \frac{x+1}{3}.$$

Procedendo in maniera analoga a prima, applicando i principi **[P1], [P2], [P3]** *si ottiene*

$$x \leq -\frac{16}{19}$$

.

❒ **Esempio 2.1.3.** *Risolvere la seguente equazione*

$$|2x - 3| = x + 4.$$

Ricordiamo innanzitutto che

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

quindi nel nostro caso

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & x \geq 3/2 \\ -2x + 3 & x < 3/2 \end{cases}$$

Si dovranno perciò considerare due situazioni alternative:

$$2x - 3 = x + 4 \qquad \text{con} \qquad x \geq \frac{3}{2}$$

e

$$-2x + 3 = x + 4 \qquad \text{con} \qquad x < \frac{3}{2}.$$

Dalla prima si deduce $x = 7$ con $x \geq 3/2$ quindi la soluzione è accettabile. La seconda invece fornisce $x = -1/3$ ma deve essere $x < 3/2$ quindi anche questa risulta accettabile. Pertanto l'equazione data ammette due soluzioni

$$x = 7 \qquad \vee \qquad x = -\frac{1}{3}.$$

❒ **Esempio 2.1.4.** *Si risolva*

$$|4 + x| = |5 - 2x| + 7x.$$

L'equazione data è equivalente a tre equazioni diverse a seconda degli intervalli in cui può variare l'incognita x. Si hanno dunque i seguenti tre sistemi, l'unione delle cui soluzioni rappresenta le soluzioni dell'equazione data:

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ -4 - x = 5 - 2x + 7x \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ 4 + x = 5 - 2x + 7x \end{cases} \vee \begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ 4 + x = -5 + 2x + 7x \end{cases}$$

i quali a loro volta si riconducono ai seguenti sistemi

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -4 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ x = \dfrac{9}{8} \end{cases}$$

La prima e la terza soluzione non sono accettabili, quindi l'unica soluzione del sistema risulta $x = -\dfrac{1}{4}$.

2.2. Sistemi di disequazioni di primo grado

Più disequazioni con una sola incognita costituiscono un SISTEMA quando devono essere verificate *contemporaneamente*, cioè per gli stessi valori dell'incognita. L'insieme delle soluzioni, costituita dai valori dell'incognita che soddisfano il sistema, è l'insieme **intersezione** degli insiemi che costituiscono le soluzioni delle singole disequazioni.

❒ **Esempio 2.2.1.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 2x + 3 < 0. \end{cases}$$

Questo sistema equivale a

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x < -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema dovrebbero essere i valori di x che verificano contemporaneamente le due disequazioni, ma non esistono numeri che siano maggiori di $1/3$ e contemporaneamente anche minori di $-3/2$, quindi il sistema risulta impossibile. In termini insiemistici, detti S_1 e S_2 gli insiemi soluzione delle due disequazioni componenti il sistema e S l'insieme soluzione del sistema iniziale, si ha che $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

❒ **Esempio 2.2.2.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{1}{2} < 2x \\ 2 - \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{2}{5}(1+3x). \end{cases}$$

Operando su entrambe le disequazioni come negli esempi precedenti, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} 6x - 12x < 5 \\ 20 - 5x + 5 < 4 + 12x \end{cases}$$

che risulta equivalente a

$$\begin{cases} x > -\dfrac{5}{6} \\ x > \dfrac{21}{17}. \end{cases}$$

A questo punto basta che sia verificata la seconda equazione perché anche la prima sia verificata, quindi la soluzione è $x > \dfrac{21}{17}$. In termini insiemistici, con le notazioni precedenti si ha $S = S_1 \cap S_2$ essendo $S_2 \subset S_1$.

❒ **Esempio 2.2.3.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{3} + \dfrac{2+3x}{2} > 0 \\ \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{7}(2-x) > \dfrac{2x+5}{3}. \end{cases}$$

Risolvendo separatamente le due disequazioni si ha che la prima è verificata per $x > -\dfrac{8}{7}$ e la seconda per $x < \dfrac{3}{5}$ quindi il sistema è soddisfatto per

$$x > -\frac{8}{7} \qquad \wedge \qquad x < \frac{3}{5}$$

che si può anche scrivere

$$-\frac{8}{7} < x < \frac{3}{5}.$$

Si possono anche considerare sistemi di più di due disequazioni.

❒ **Esempio 2.2.4.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{2}{5} < \dfrac{x}{5} \\ 3 - (2 - x) \leq 1 + 3(1 + x) \\ 10 - 3(x + 4) \leq (x + 5)2. \end{cases}$$

Trasformando opportunamente le tre disequazioni, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x < \dfrac{1}{7} \\ x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x \geq -\dfrac{12}{5}. \end{cases}$$

Anche eventualmente aiutandoci con una rappresentazione grafica, si vede che solo nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{7}\right)$ *sono verificate tutte e tre le disequazioni, quindi la soluzione del sistema risulta*

$$-\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{7}.$$

❒ **Esempio 2.2.5.** *Risolvere la disequazione*

$$(x - 5)(3x + 4) > 0.$$

Il prodotto di due fattori è positivo se e soltanto se i due fattori sono concordi (hanno lo stesso segno). Quindi la disequazione data è verificata quando è verificato il sistema

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 3x + 4 > 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x - 5 < 0 \\ 3x + 4 < 0 \end{cases}$$

che risulta equivalente a

$$\begin{cases} x > 5 \\ x > -\dfrac{4}{3} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < 5 \\ x < -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Pertanto la disequazione data risulta verificata per

$$x < -\frac{4}{3} \vee x > 5.$$

2.3. Disequazioni frazionarie

Sono disequazioni in cui l'incognita compare al denominatore.

❒ **Esempio 2.3.1.** *Si risolva*

$$\frac{5+x}{7-x} < 0.$$

Anche per il segno del quoziente valgono le stesse considerazioni fatte per il segno del prodotto, perciò la disequazione data è verificata per i valori di x *per cui*

$$\begin{cases} 5+x>0 \\ 7-x<0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 5+x<0 \\ 7-x>0. \end{cases}$$

Quindi la soluzione della disequazione risulta $x < -5 \vee x > 7$.

❒ **Esempio 2.3.2.** *Si risolva la disequazione*

$$1 \geq \frac{3x-2}{1+2x}.$$

L'idea, in casi come questo, è quella di cercare di ricondursi a una disequazione come quella del caso precedente, della forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$. *Quindi*

$$1 - \frac{3x-2}{1+2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x-3x+2}{1+2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{1+2x} \geq 0. \tag{2.3.1}$$

A questo punto si lavora come nel caso precedente, oppure si segue il seguente metodo che consiste nello studiare il segno del numeratore (che indicheremo con N*) e del denominatore (che indicheremo con* D*). Affinché l'ultima disequazione in* (2.3.1) *sia verificata, occorre che* N *e* D *siano concordi. Si ha dunque:*

$$\begin{aligned} N \geq 0 \quad &\Rightarrow 3-x \geq 0 \quad &&\Rightarrow x \leq 3 \\ D > 0 \quad &\Rightarrow 1+2x > 0 \quad &&\Rightarrow x > -1/2. \end{aligned}$$

Si osservi che ponendo $D > 0$ *e non* $D \geq 0$ *si escludono i valori che annullano il denominatore. A questo punto (anche aiutandosi con una rappresentazione grafica) per cui* N *e* D *sono concordi risultano*

$$-\frac{1}{2} < x \leq 3,$$

che è anche la soluzione della disequazione proposta.

N.B. *sarebbe stato un* $\boxed{\textbf{errore}}$ *dire che*

$$1 \geq \frac{3x-2}{1+2x} \Rightarrow 1+2x \geq 3x-2$$

perché a priori non si conosce il segno del termine $1+2x$ *(si vedano i principi* **[P2]** *e* **[P3]***).*

❒ **Esempio 2.3.3.** *Risolvere*

$$\frac{-2}{x-1} < 0.$$

Siccome il numeratore è sempre negativo, basta che sia $x-1>0$ *quindi* $x>1$.

2.4. Segno di un trinomio di secondo grado

Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vogliamo studiare il segno di $f(x)$ al variare di x. Indichiamo con $\triangle := b^2 - 4ac$ il discriminante della corrispondente equazione $f(x) = 0$. Distinguiamo tre casi:
$*$ PRIMO CASO: $\triangle > 0$. In tal caso le radici del polinomio x_1 e x_2 sono reali e distinte (supponiamo $x_1 < x_2$). Allora si sa che

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Quindi in tal caso, tenendo conto che

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x > x_2,$$

il trinomio $f(x)$ per tutti i valori di x esterni all'intervallo delle radici, assume valori concordi con il suo primo coefficiente (e per tutti i valori di x interni all'intervallo delle radici, è discorde con il suo primo coefficiente).

❐ **Esempio 2.4.1.** *Studiare il segno del trinomio*

$$f(x) = 5x^2 - 6x - 8.$$

Le radici sono $x_1 = -\frac{4}{5}$ *e* $x_2 = 2$, *quindi*

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\qquad \text{per } x < -\frac{4}{5} \vee x > 2 \\ f(x) < 0 &\qquad \text{per } -\frac{4}{5} < x < 2 \\ f(x) = 0 &\qquad \text{per } x = -\frac{4}{5} \vee x = 2 \end{aligned}$$

$*$ SECONDO CASO: $\triangle = 0$. In tal caso le radici sono reali e coincidenti $x_1 = x_2$. Quindi

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

e pertanto in questo caso il trinomio $f(x)$ ha il segno del suo primo coefficiente, qualunque sia il valore attribuito a x, purché $x \neq x_1$.

❐ **Esempio 2.4.2.** *Studiare il segno di*

$$f(x) = 9x^2 - 6x + 1.$$

In tal caso $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$ *quindi*

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\qquad \text{per } x \neq \frac{1}{3} \\ f(x) = 0 &\qquad \text{per } x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

∗ terzo caso: $\triangle < 0$. Le radici non sono reali. In tal caso si può dimostrare che il trinomio $f(x)$ è sempre concorde con il suo primo coefficiente e non si annulla mai.

❒ **Esempio 2.4.3.** *Studiare il segno del trinomio*

$$f(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Essendo $\triangle < 0$, *si ha che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

2.5. Disequazioni di secondo grado

A questo punto le considerazioni fatte al paragrafo precedente tornano utili per studiare disequazioni del tipo $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$, come mostrano i seguenti esempi.

❒ **Esempio 2.5.1.** *Risolvere*

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Ponendo $f(x) = x^2 - 5x + 6$ *si ha che l'equazione* $f(x) = 0$ *ha due soluzioni* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = 3$. *Siamo nel primo caso* $\triangle > 0$ *e inoltre il coefficiente* $a = 1$, *pertanto, dovendo studiare il caso* $f(x) > 0$ *questo si ottiene per valori esterni all'intervallo delle radici. La soluzione richiesta è* $x < 2 \vee x > 3$.

❒ **Esempio 2.5.2.** *Risolvere*

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0.$$

Ponendo $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ *si ha che l'equazione* $f(x) = 0$ *ha due soluzioni* $x_1 = 1/2$ *e* $x_2 = 2$. *Siamo nel primo caso* $\triangle > 0$ *e inoltre il coefficiente* $a = 2$, *pertanto, dovendo studiare il caso* $f(x) \leq 0$ *questo si ottiene per valori interni all'intervallo delle radici. La soluzione richiesta è pertanto* $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

❒ **Esempio 2.5.3.** *Risolvere*

$$9x^2 + 6x + 1 > 0.$$

Ponendo $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ *si ha che l'equazione* $f(x) = 0$ *ha una sola soluzione* $x_1 = -1/3$. *Siamo nel secondo caso* $\triangle = 0$ *e inoltre il coefficiente* $a = 9$, *pertanto, dovendo studiare il caso* $f(x) > 0$ *ed essendo la disuguaglianza stretta, si ha che la soluzione richiesta è* $x \neq -\frac{1}{3}$.

❒ **Esempio 2.5.4.** *Risolvere*

$$-x^2 + 10x - 29 > 0.$$

Ponendo $f(x) = -x^2 + 10x - 29$ *si ha che l'equazione* $f(x) = 0$ *non ha soluzioni reali. Siamo nel terzo caso* $\triangle < 0$ *e inoltre il coefficiente* $a = -1 < 0$, *pertanto si sa che* $f(x) < 0$ *e non si annulla mai. Pertanto l'equazione data non ha soluzioni reali.*

Si rimanda agli esercizi di ricapitolazione per altre applicazioni significative di questa parte teorica.

2.6. Disequazioni di grado superiore al secondo

Per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo, si cercherà di decomporre il polinomio che figura al primo membro quando il secondo è zero, in fattori di primo e secondo grado, e si esamineranno poi i segni di ciascun fattore. Il prodotto sarà positivo se i fattori negativi saranno in numero pari, negativo se in numero dispari.

❒ **Esempio 2.6.1.** *Risolvere*

$$x^5 - 81x < 0.$$

Si ha

$$x^5 - 81x = x(x^2 + 9)(x^2 - 9) < 0$$

da cui

$$x < -3 \vee 0 < x < 3.$$

2.7. Disequazioni con i valori assoluti

Consideriamo ora il caso di disequazioni in cui figurano i valori assoluti di espressioni contenenti l'incognita. In particolare si riesce a dimostrare che:

▷ primo caso:

$$|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

▷ secondo caso:

$$|f(x)| > k \Leftrightarrow f(x) < -k \vee f(x) > k \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

❒ **Esempio 2.7.1.** *Risolvere*

$$|3 + 2x| < 4.$$

Si ha

$$|3 + 2x| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3 + 2x < 4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

❒ **Esempio 2.7.2.** *Risolvere*

$$|x^2 - 4| < 5.$$

Si ha

$$|x^2 - 4| < 5 \Leftrightarrow -5 < x^2 - 4 < 5 \qquad -1 < x^2 < 9.$$

Essendo poi $x^2 > -1 \forall x \in \mathbb{R}$*; si ha semplicemente che la disequazione data è equivalente a* $-3 < x < 3$.

❒ **Esempio 2.7.3.** *Risolvere*

$$|5 + 12x| > 9.$$

Si ha

$$|5 + 12x| > 9 \Leftrightarrow 5 + 12x < -9 \vee 5 + 12x > 9 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{6} \vee x > \frac{1}{3}.$$

❒ **Esempio 2.7.4.** *Risolvere*

$$|1 - x^2| > 8.$$

Si ha

$$|1 - x^2| > 8 \Leftrightarrow x^2 < -7 \vee x^2 > 9.$$

Siccome la prima relazione è impossibile, questo equivale a $x < -3 \vee x > 3$.

❒ **Esempio 2.7.5.** *Risolvere*

$$\left|\frac{1 - x}{2 + x}\right| < 1.$$

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1 - x}{2 + x} > -1 \\ \dfrac{1 - x}{2 + x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2 + x} > 0 \\ \dfrac{2x + 1}{2 + x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

❒ **Esempio 2.7.6.**

$$|x^2 - 1| < 2 - |3 - 2x|$$

Questa disequazione risulta equivalente ai seguenti tre sistemi

$$\begin{cases} x \le -1 \vee 1 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 1 < 2 - (3 - 2x) \end{cases} \cup \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 - x^2 < 2 - (3 - 2x) \end{cases} \cup \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 1 < 2 - (-3 + 2x) \end{cases}$$

che risolti danno $\sqrt{3} - 1 < x < \sqrt{7} - 1$.

2.8. Disequazioni irrazionali

Si chiamano disequazioni irrazionali quelle disequazioni nelle quali l'incognit figura anche (o solo) sotto il segno di radice. Qui noi consideriamo per semplicità quelle in cui compare solo un radicale.

▷ PRIMO CASO: $f(x) > \sqrt[n]{g(x)}$.

➜ *n dispari*: basta elevare all'ennesima potenza e si ottiene

$$f(x) > \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow [f(x)]^n > g(x).$$

➜ *n pari*: si ha

$$f(x) > \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ [f(x)]^n > g(x). \end{cases}$$

▷ SECONDO CASO: $f(x) < \sqrt[n]{g(x)}$.

➜ *n dispari*: basta elevare all'ennesima potenza e si ottiene

$$f(x) < \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow [f(x)]^n < g(x).$$

➜ *n pari*: si distinguono i due casi:

$$f(x) < \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ [f(x)]^n < g(x) \end{cases}$$

❒ **Esempio 2.8.1.** *Risolvere*

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} > 0.$$

Basta imporre

$$\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 2.$$

❒ **Esempio 2.8.2.** *Risolvere*

$$3 - 2x > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Siamo nel primo caso. Essendo $n = 2$ pari, la disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ (3 - 2x)^2 > x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

che risolto fornisce $x \leq 1$.

❒ **Esempio 2.8.3.** *Risolvere*

$$2 + \sqrt{4 - x} > x$$

La disequazione data risulta equivalente a

$$\sqrt{4 - x} > x - 2.$$

Siamo nel secondo caso. Quindi essendo di nuovo $n = 2$ pari, possiamo dire che, nel caso $x < 2$ deve semplicemente essere $4 - x \geq 0$ cioè $x \leq 4$, mentre nel caso $x \geq 2$, si deve avere (elevando a quadrato) $x^2 - 3x < 0$ quindi $0 < x < 3$. Unendo i due risultati si ottiene $x < 3$.

CAPITOLO 3

Funzioni e grafici elementari

Dati due insiemi A e B qualsiasi, una FUNZIONE di DOMINIO A a valori in B (B è anche detto CODOMINIO) è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B. L'uscita corrispondente a un valore in ingresso si dice IMMAGINE di quel valore. L'insieme delle possibili uscite si dice IMMAGINE del dominio tramite f.
Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f : x \mapsto f(x)$.
Il GRAFICO di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'insieme

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}.$$

3.1. Funzioni potenza

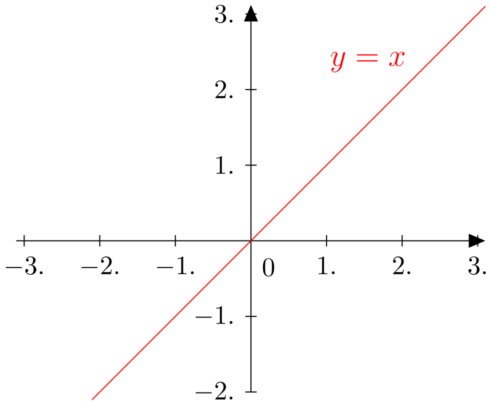
Sono le funzioni della forma $\boxed{f(x) = k\, x^\alpha,\ \alpha \neq 0,\ k, \alpha \in \mathbb{R}.}$ Prima di andare a studiarne le caratteristiche, facciamo una premessa riguardante le radici n-esime aritmetiche e le potenze a esponente reale. Premettiamo il seguente risultato.

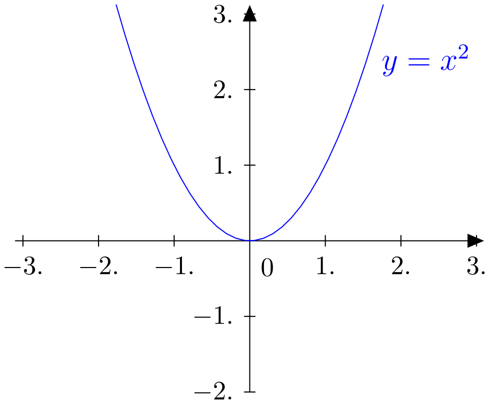
❒ **Teorema 3.1.1.** *Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e n intero $n \geq 1$. Allora esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^n = y$.*

Tale numero si chiama RADICE ENNESIMA ARITMETICA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$ o $y^{1/n}$.

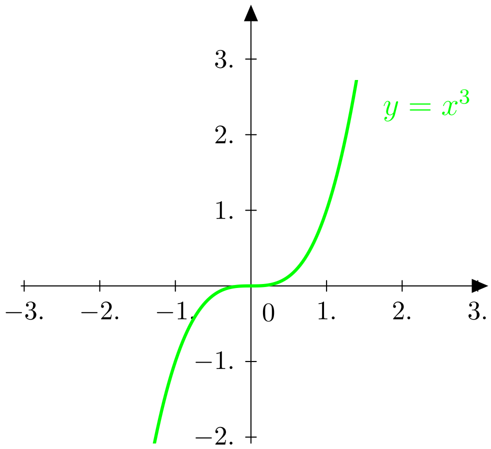
❒ **Osservazione 3.1.2.** Per quanto detto sopra si osserva che la radice ennesima aritmetica è sempre *non negativa*, esempi: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{x^2} = |x|$; questo accade perché stiamo lavorando in campo reale. In campo complesso naturalmente il comportamento sarà differente (si veda la sezione successiva per maggiori dettagli).

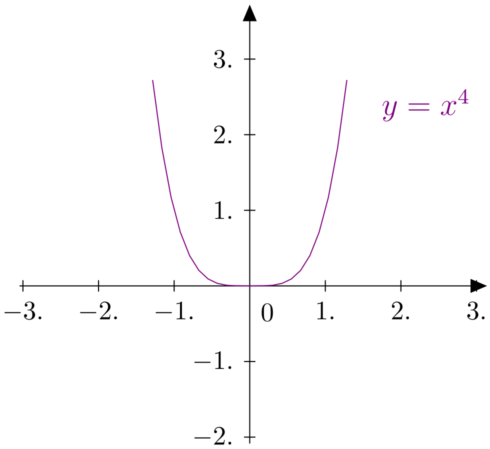
Siamo ora pronti a studiare l'andamento qualitativo di alcune funzioni potenza.
Esempi di funzioni potenza sono: $y = x$, $y = x^2$.



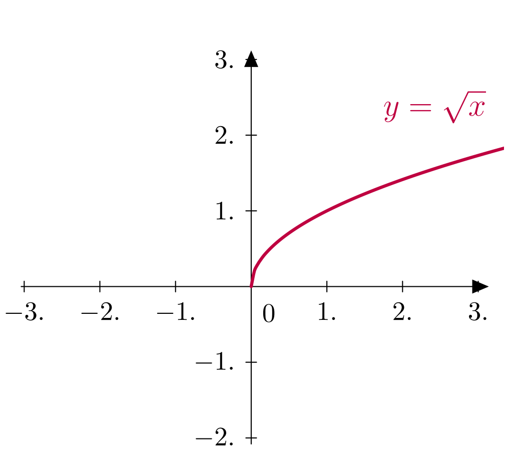


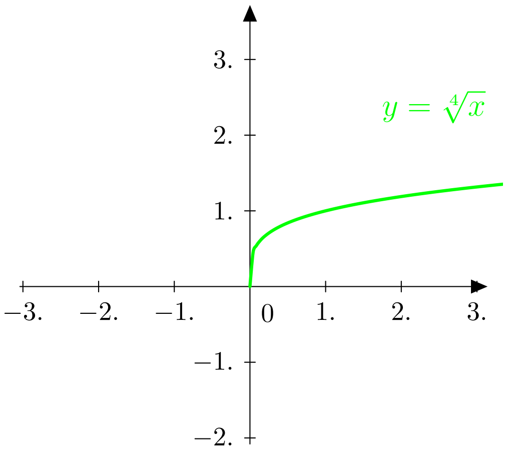
Se $\alpha \in \mathbb{N}$ le funzioni potenze sono definite su tutto $\mathbb{R}$, ad esempio $y = x^3$, $y = x^4$



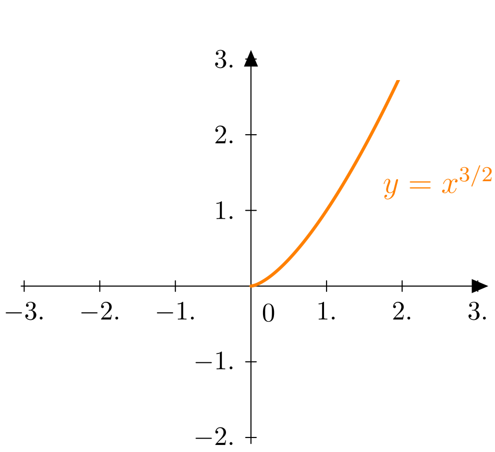


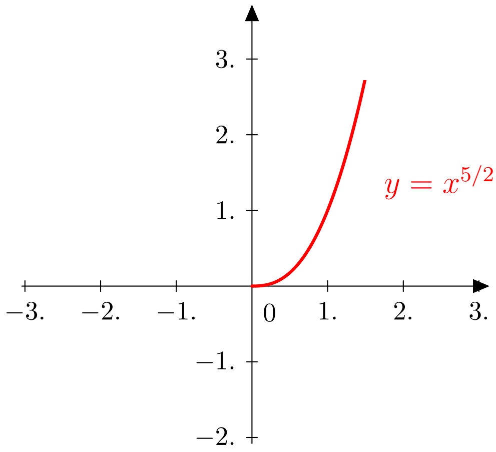
Altrimenti in generale le funzioni potenze sono definite per $x > 0$; ad esempio $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$



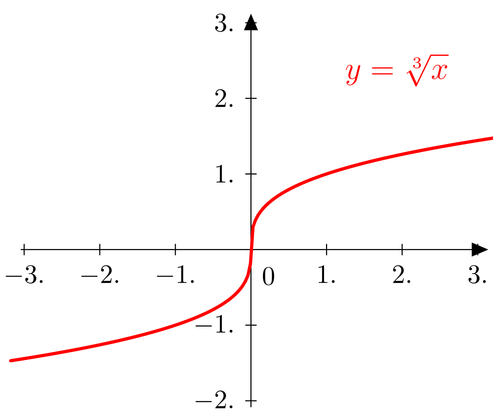


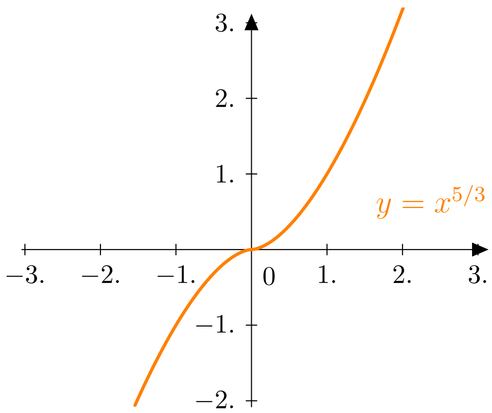
oppure anche $y = x^{3/2}$, $y = x^{5/2}$.



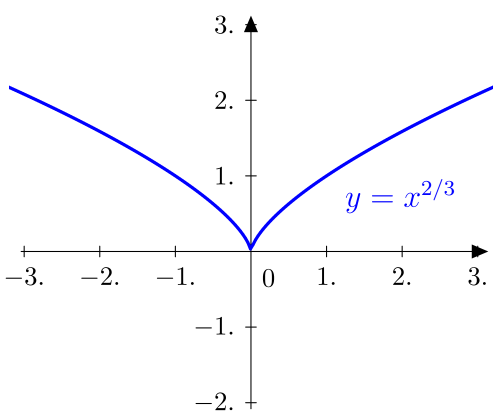


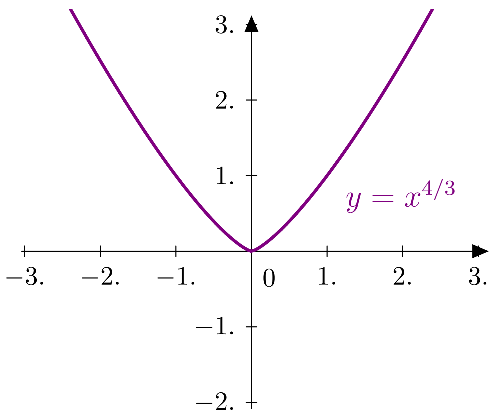
Se $\alpha = \frac{m}{n}$ con n intero dispari, allora $x^\alpha = \sqrt[m]{x^n}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, ad esempio $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^{5/3}$.



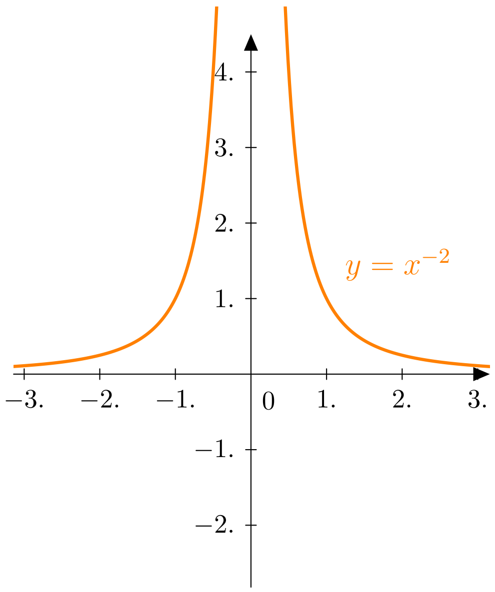


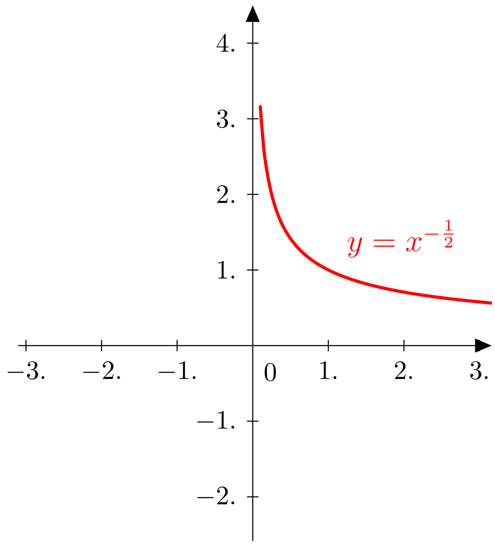
Si noti il diverso comportamento (riguardante la concavità delle funzioni x^α) per $\alpha > 1$ e per $\alpha < 1$. Torneremo su questo punto più avanti, quando parleremo di derivate seconde.

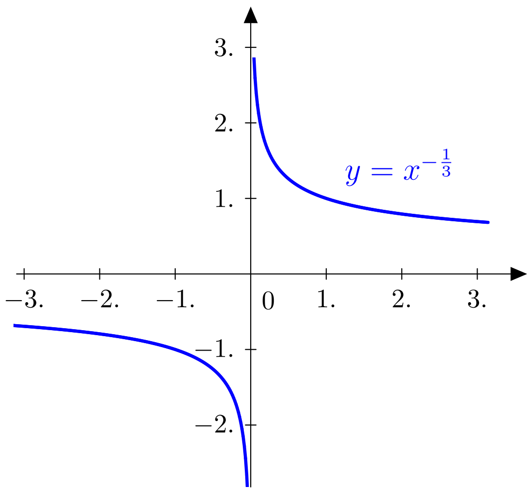


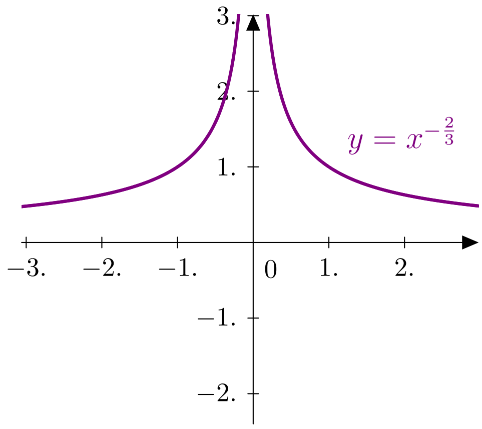


Infine se $\alpha < 0$ le funzioni potenza non sono definite per $x = 0$.

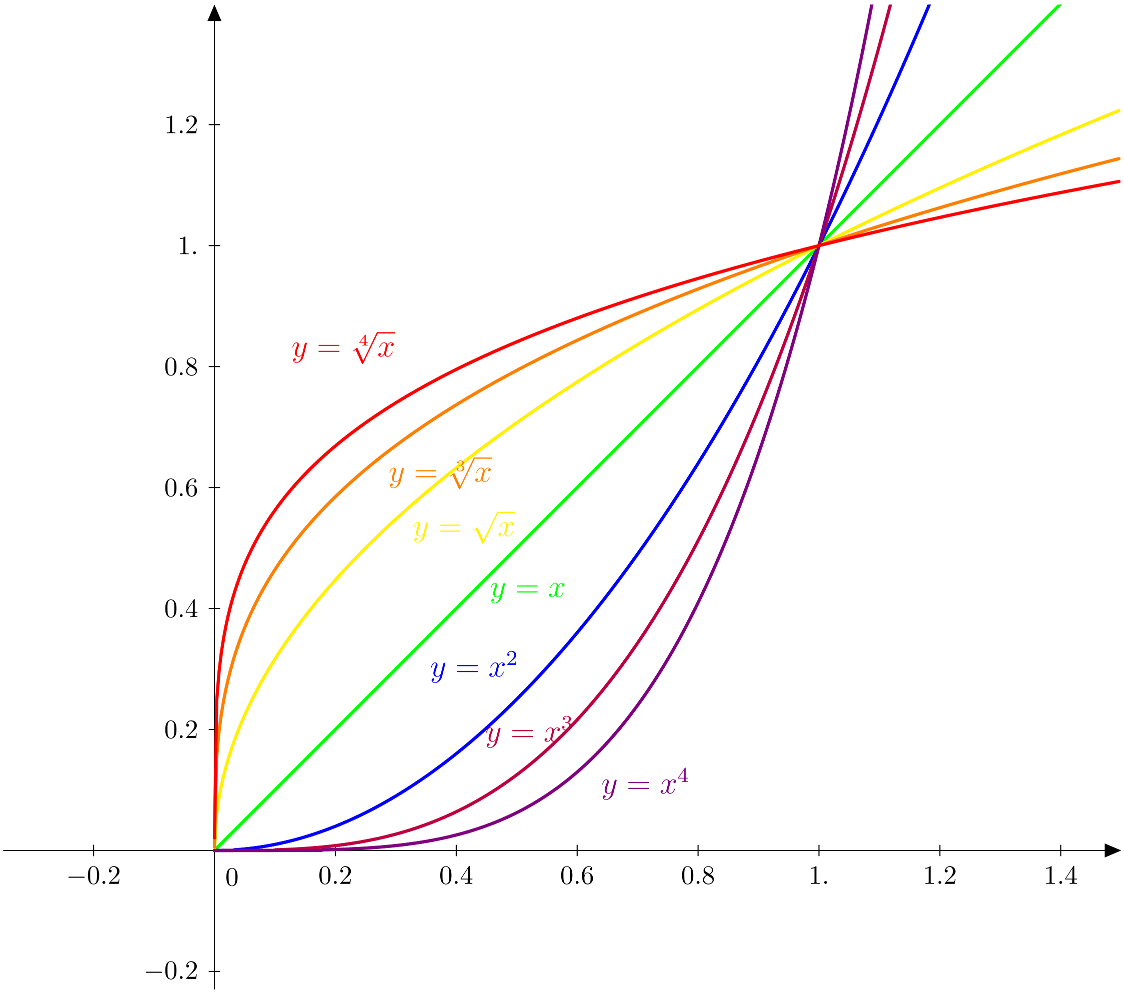








Da ultimo focalizziamo la nostra attenzione al caso $x > 0$. In questo caso, se $0 < x < 1$ allora $x^\alpha < x^\beta$ se $\beta < \alpha$. Questo si esprime dicendo che "*vicino a zero contano le potenze piccole*". Al contrario, se $x > 1$ allora $x^\alpha < x^\beta$ se $\alpha < \beta$. Questo si esprime dicendo che "*all'infinito contano le potenze grandi*". Questo tornerà utile quando ci occuperemo dei limiti, in particolare della gerarchia degli infinitesimi e degli infiniti.



3.2. Funzioni esponenziali e logaritmiche

Le funzioni esponenziali/logaritmiche modellizzano fenomeni di crescita o decadimento (es: decadimento radioattivo, processi di raffreddamento, diffondersi di un'infezione...) Le funzioni trigonometriche, che vedremo nel paragrafo successivo, modellizzano invece il moto dei pianeti, la propagazione delle onde, il moto di un pendolo ecc...

3.2.1. Potenze a esponente reale e funzioni esponenziali

L'estrazione di radice ennesima è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza intera. Vogliamo ora estendere questa operazione ad *ogni esponente razionale*; questo lo possiamo fare se la base è positiva. Sia dunque

$$r := \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n > 0, \qquad a > 0.$$

Allora è ben definita

$$a^r := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

La definizione si estende allo stesso modo anche se l'esponente è un numero reale (per densità) *sempre se la base è positiva*. Infatti, supponiamo che $a < 0$; allora a^b è definita **solo in certi casi particolari**, più precisamente se $b \in \mathbb{Z}$ oppure se $b \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{m}{n}$ a patto che **non** sia m dispari e n pari. Infatti essendo $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, allora se n è dispari e $c < 0$ allora si può scrivere $\sqrt[n]{c} = -\sqrt[n]{-c}$ ma questo non è ovviamente possibile (in campo reale) se n è pari. Per esempio:

$$(-2)^{3/5} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}; \qquad (-2)^{3/4} = \sqrt[4]{-8} \text{ non esiste in campo reale.}$$

Quindi nel caso in cui la base di una potenza sia negativa, non è possibile definire la potenza per tutti i numeri reali. È per questo che si considerano `potenze a esponente reale solo con base positiva.`

Per le potenze a esponente reale valgono le seguenti proprietà:

E0 $a^0 = 1 \ \forall a \neq 0; \quad 1^c = 1 \ \forall c$

E1 $a^c > 0 \ \forall c; \quad a^c \gtrless 1$ se $a \gtrless 1$ e $c > 0$

E2 $a^{c+d} = a^c\, a^d$

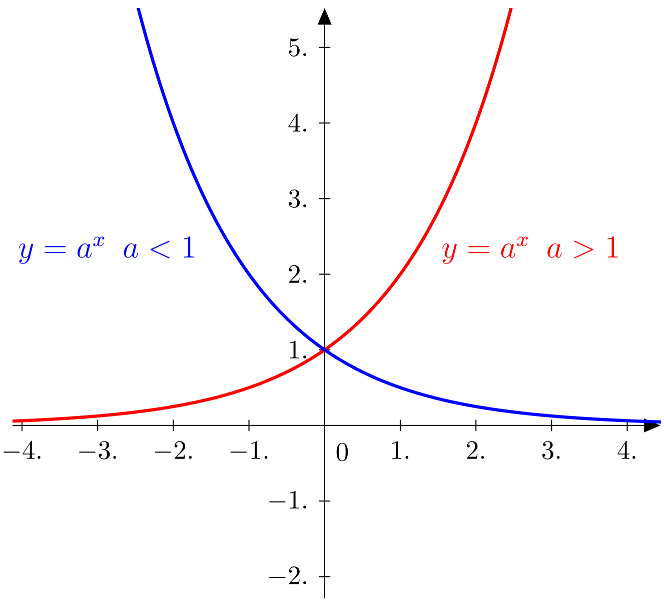
E3 $(ab)^c = a^c\, b^c$

E4 $(a^b)^c = a^{bc}$

E5 $c < d \Rightarrow a^c \gtrless a^d$ se $a \lessgtr 1$

E6 $0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c \ \forall c > 0$

❒ **Definizione 3.2.1.** Sia $a > 0$ con $a \neq 1$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione $f(x) = a^x$ si dice FUNZIONE ESPONENZIALE DI BASE a.



3.2.2. Logaritmi e funzioni logaritmiche

Consideriamo l'equazione $a^x = y$ per $a > 0$, y assegnato e x incognito. Se $a = 1$ allora l'equazione precedente ha soluzione se $y = 1$; in tal caso ogni x è soluzione. Se $a \neq 1$ e $y \leq 0$, l'equazione non ha soluzioni. Si ha allora il seguente teorema:

❒ **Teorema 3.2.2.** *Siano $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$. Allora esiste un unico numero reale x tale che $a^x = y$.*

Tale numero prende il nome di LOGARITMO IN BASE a DI y e si indica con $\log_a y$; per definizione si ha dunque

$$\boxed{a^{\log_a y} = y}$$

Il logaritmo ha le seguenti proprietà dedotte dalle corrispondenti per le potenze a esponente reale:

L1 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_b y$

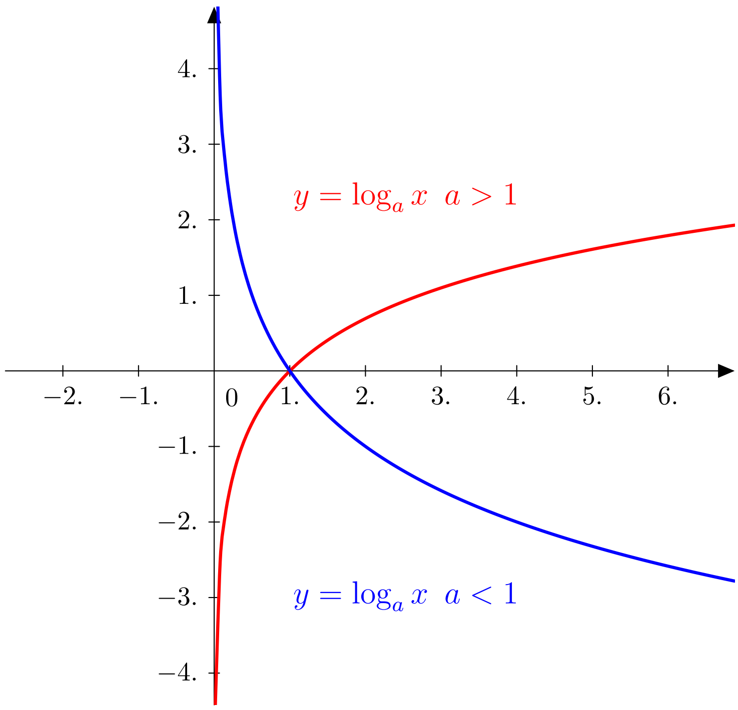
L2 $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

L3 $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

L4 $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x, \quad \forall x \neq 1$

L5 $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \forall b > 0, b \neq 1$

❒ **Definizione 3.2.3.** Sia $a > 0$ con $a \neq 1$ e sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. La funzione $g(x) = \log_a x$ si dice FUNZIONE LOGARITMO IN BASE a.



La relazione fondamentale che vale è la seguente che deriva direttamente dalla definizione di logaritmo
$$x = a^{\log_a x}, \qquad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$
e dunque
$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

❒ **Osservazione 3.2.4.** Da notare la differenza tra le seguenti funzioni (potenza ed esponenziale) il cui comportamento è chiaramente diverso

$$x \mapsto x^a \quad \neq \quad x \mapsto a^x.$$

La base naturale di funzioni esponenziali e logaritmi è il numero di Nepero $e \sim 2,7$. Tale numero verrà introdotto nel capitolo riguardante le successioni come limite di una opportuna successione.

3.3. Funzioni trigonometriche

Le principali funzioni trigonometriche sono: seno, coseno, tangente. Si indicano

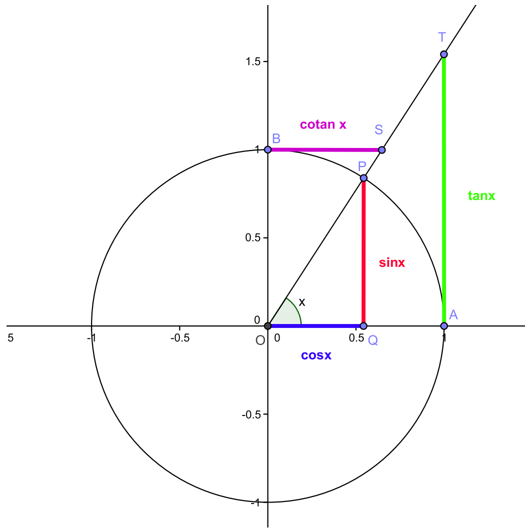
$$\begin{aligned} x &\mapsto \sin x \\ x &\mapsto \cos x \\ x &\mapsto \tan x \end{aligned}$$

dove x ha il significato di misura in radianti di un angolo, secondo la seguente definizione.

❒ **Definizione 3.3.1.** *Si definisce* radiante *il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza tracciato dall'angolo e la lunghezza del raggio. Essendo il rapporto tra due grandezze omogenee, si tratta di un numero puro.*

Sulla base della precedente definizione, prendendo una circonferenza di raggio unitario, si ottiene che l'angolo giro corrisponde a 2π radianti e da questo (attraverso un'opportuna proporzione) si ricava il valore in radianti di un qualunque angolo espresso in gradi.
Adesso andiamo a studiare le funzioni trigonometriche guardando il valore che esse assumono in certi angoli notevoli.
Consideriamo una circonferenza goniometrica, cioè una circonferenza di raggio unitario.

In figura sono illustrati come sono definiti seno, coseno, tangente e cotangente sulla circonferenza goniometrica. In particolare x rappresenta l'angolo (in radianti); il valore di $\sin x$ per



`definizione` corrisponde alla lunghezza del cateto PQ del triangolo rettangolo OPQ mentre il valore di $\cos x$ `per definizione` corrisponde alla lunghezza del cateto OQ del triangolo rettangolo OPQ; l'ipotenusa di tale triangolo vale 1 perché raggio della circonferenza. È chiaro che poi facendo variare x, il comportamento di questi segmenti varierà di conseguenza. Vediamo alcuni casi particolari.

$\triangleright$ $\boxed{x = 0°}$

In tal caso l'angolo misura 0° che equivale a 0 radianti; inoltre $P \equiv Q$ quindi $PQ = 0$ mentre $OP = 1$ perché coincide col raggio della circonferenza. Allora

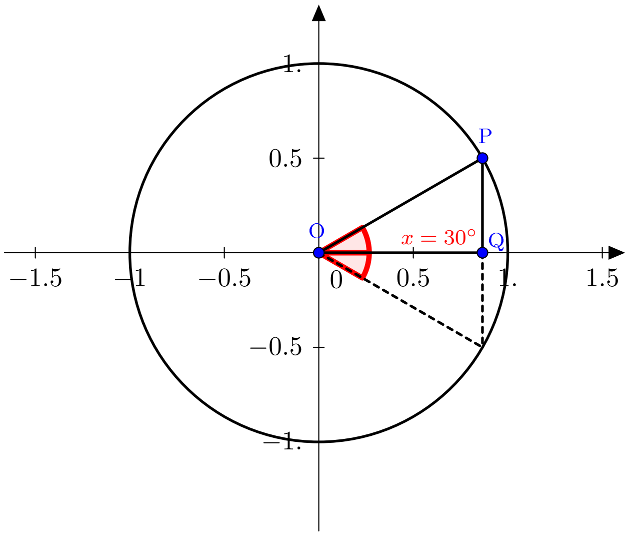
$$\boxed{\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1}$$

$\triangleright$ $\boxed{x = 30°}$

Essendo l'angolo $x = 30°$, allora impostando la proporzione si ha

$$360° : 2\pi = 30° : x,$$

da cui $x = \dfrac{\pi}{6}$ radianti. In questo caso il triangolo allora OPQ risulta essere la metà di un triangolo equilatero di lato 1 (raggio della circonferenza) come si vede in figura.



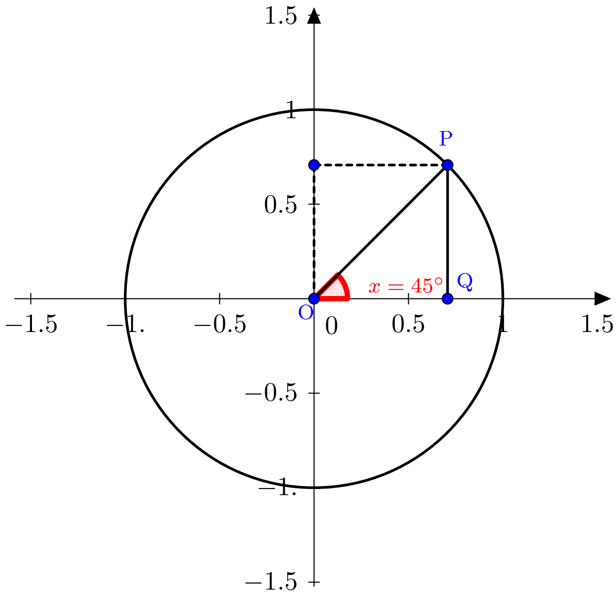
Dai teoremi corrispondenti allora $PQ = \frac{1}{2}$ e $OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

▷ $\boxed{x = 45°}$
In questo caso, essendo l'angolo $x = 45°$, allora impostando la proporzione si ha

$$360° : 2\pi = 45° : x,$$

da cui $x = \frac{\pi}{4}$ radianti. In questo caso il triangolo allora OPQ risulta essere la metà di un quadrato la cui diagonale (raggio della circonferenza) misura 1, come si vede in figura.



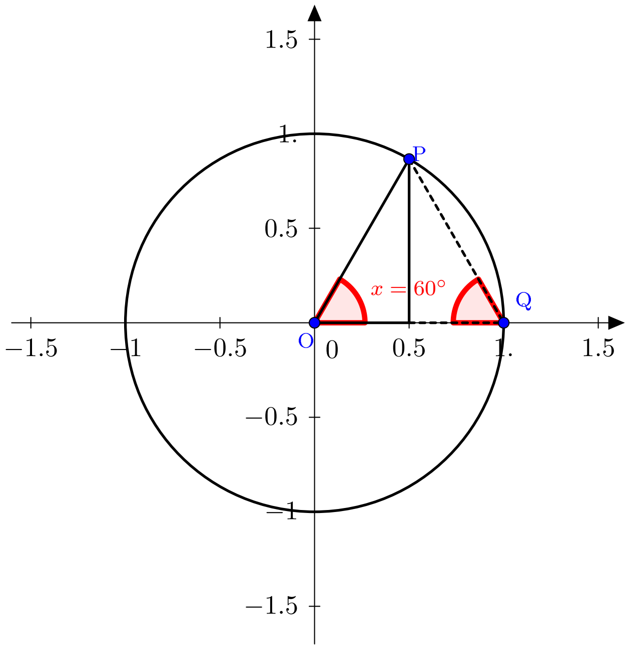
Dai teoremi corrispondenti allora $PQ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $OQ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

▷ $\boxed{x = 60°}$
In questo caso, essendo l'angolo $x = 60°$, allora impostando la proporzione si ha

$$360° : 2\pi = 60° : x,$$

da cui $x = \frac{\pi}{3}$ radianti. In questo caso il triangolo allora OPQ risulta di nuovo essere la metà di un triangolo equilatero con lato di misura 1, come si vede in figura.



Dai teoremi corrispondenti allora $PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $OQ = \frac{1}{2}$, quindi

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

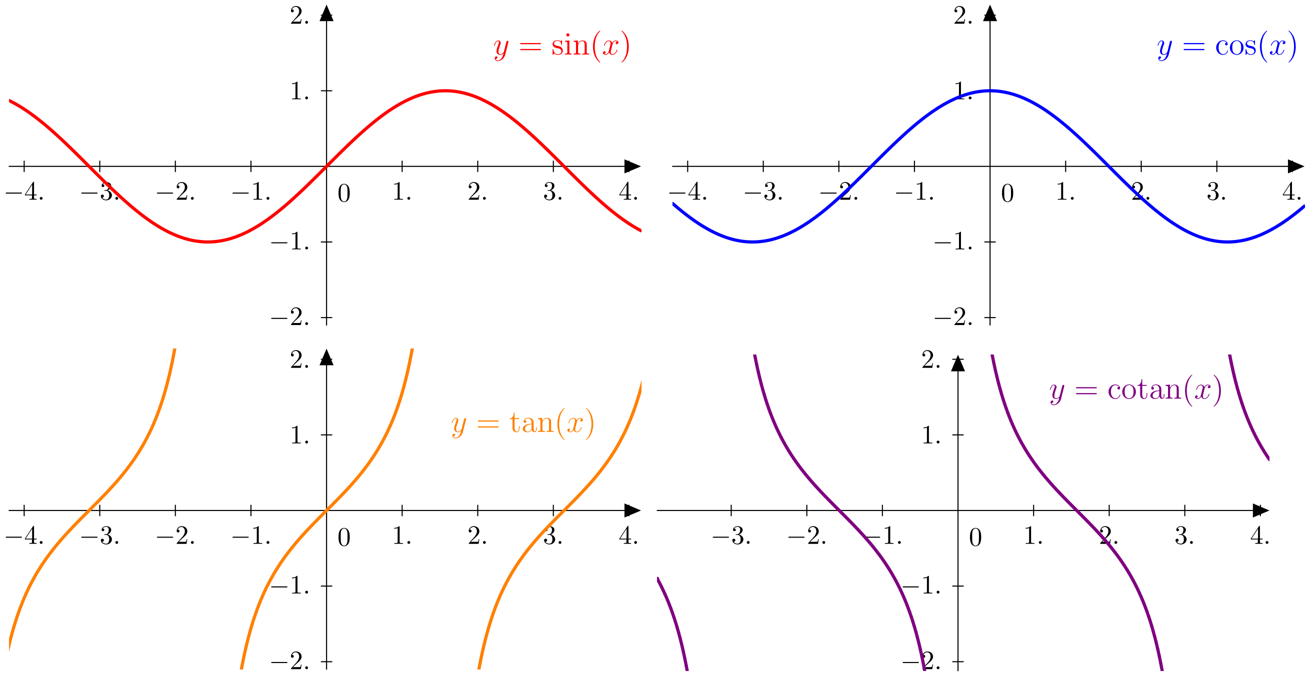
▷ $\boxed{x = 90°}$
In questo caso, essendo l'angolo $x = 90°$, allora impostando la proporzione si ha

$$360° : 2\pi = 90° : x,$$

da cui $x = \frac{\pi}{2}$ radianti. inoltre $O \equiv Q$ quindi $OQ = 0$ mentre $PQ = 1$ perché coincide col raggio della circonferenza. Allora

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0}$$

I valori di seno e coseno corrispondenti a valori di angoli superiori a 90° si ottengono per simmetria, tenendo conto del fatto che le ascisse di punti del secondo quadrante assumono valori negativi, mentre le ordinate valori positivi; pertanto se un angolo x è compreso tra 90° e 180°, allora $\sin x > 0$ mentre $\cos x < 0$. Analogamente si procede negli altri casi.
I grafici sono dedotti proprio dalla costruzione geometrica.



È chiaro che in un generico triangolo rettangolo di ipotenusa ℓ si avrebbe, per similitudine, $x = \ell \cos\theta$ e $y = \ell \sin\theta$, dove x è il cateto adiacente all'angolo considerato θ e y è il cateto opposto al medesimo angolo.
Le relazioni fondamentali sono tre:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

che deriva dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo OQP notando che siamo sulla circonferenza goniometrica, e quindi di raggio 1;

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

che deriva da una similitudine tra i triangoli OPQ e OTA;

$$\text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

che deriva da una similitudine tra i triangoli OPQ e OBS.
Andiamo ora a studiare le principali caratteristiche delle funzioni trigonometriche. Sia

$$x \mapsto \sin x$$
$$x \mapsto \cos x$$

Si ha: dominio $\mathbb{R}$; immagine $[-1, 1]$. Sono funzioni periodiche di periodo 2π. Il seno è una funzione dispari mentre il coseno è una funzione pari, infati si ha

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

Infine si ha la relazione

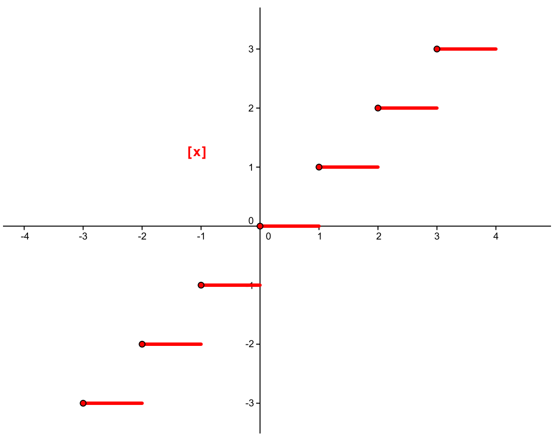
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

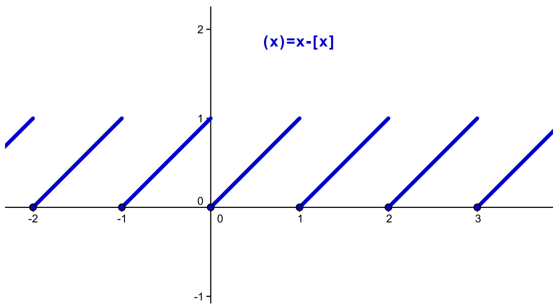
quindi la funzione seno si ottiene dalla funzione coseno tramite uno sfasamento di x pari a $\pi/2$ (traslazione del grafico verso destra).
Per quanto riguarda la funzione

$$x \mapsto \tan x$$

si ha: dominio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; immagine $\mathbb{R}$. È una funzione periodica di periodo π ed è una funzione dispari, infatti si ha $\tan(-x) = -\tan(x)$.

3.4. Funzione parte intera





La PARTE INTERA di un numero reale x, denotata con $[x]$ è quell'intero n tale che $n \leq x < n+1$, quindi il più grande intero più piccolo (o uguale) a x. Esempi: $[2,5] = 2; [3,1] = 3; [4] =$

$4; [-5, 2] = 6$. Il grafico è mostrato alla fine del capitolo.
La differenza tra un numero reale e la sua parte intera prende il nome di MANTISSA si indica con $(x) = x - [x]$ ed è un numero reale compreso tra 0 e 1. Anche questo grafico è mostrato in fondo al capitolo. La funzione mantissa è una funzione periodica.

3.5. Funzioni iperboliche

Si tratta di funzioni definite tramite esponenziali. Abbiamo le funzioni SENO IPERBOLICO, COSENO IPERBOLICO E TANGENTE IPERBOLICA. Il seno iperbolico è definito come segue

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Il coseno iperbolico è definito come segue

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

mentre la tangente iperbolica è definita come segue

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Il dominio di queste funzioni è $\mathbb{R}$. Seno iperbolico e tangente iperbolica sono funzioni dispari mentre coseno iperbolico è una funzione pari, cioè si ha

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad \cosh(-x) = \cosh(x) \qquad \tanh(-x) = -\tanh(x).$$

Inoltre

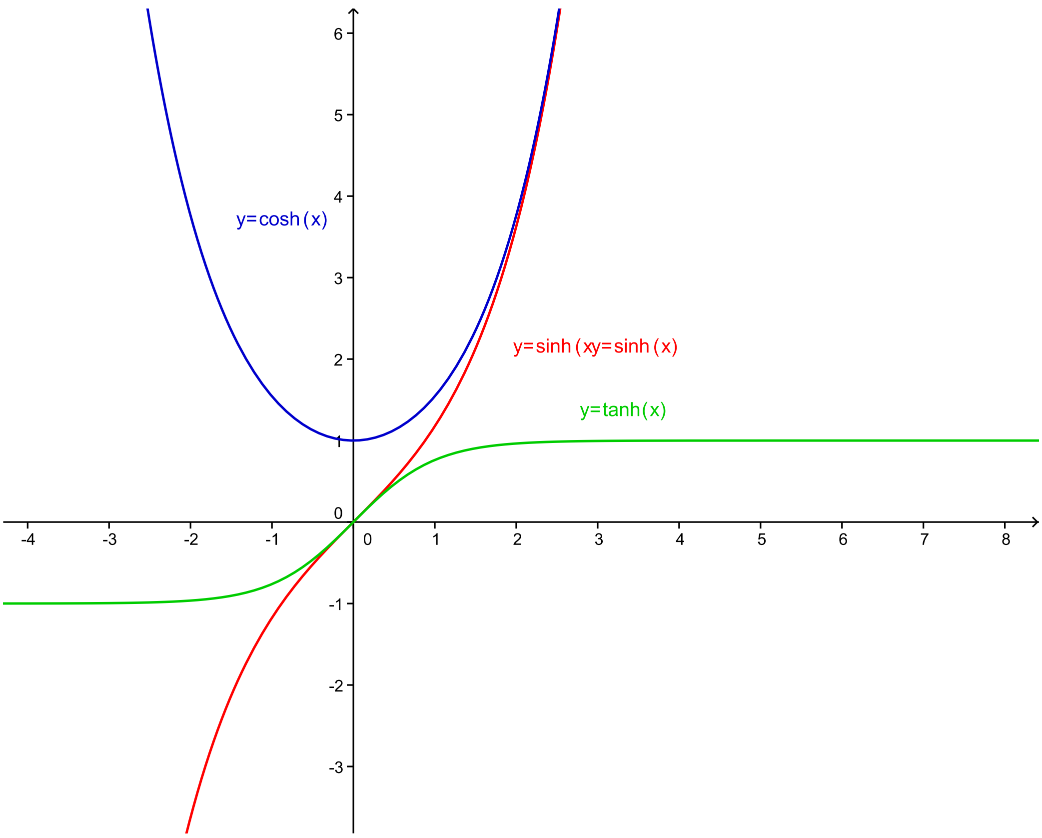
$$\sinh(0) = 0 \quad \cosh(0) = 1 \quad \tanh(0) = 0 \quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

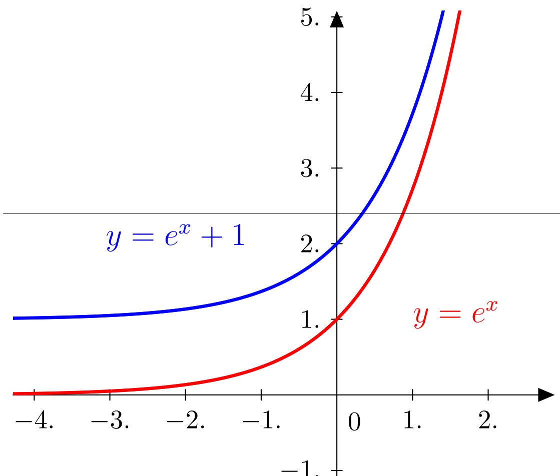
3.6. Operazioni sui grafici

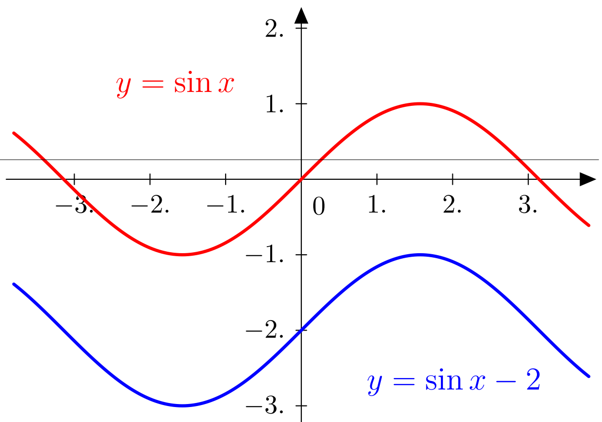
Sia $y = f(x)$ una funzione reale di una variabile reale. In questa sezione descriviamo e diamo un significato alle seguenti operazioni e soprattutto vediamo che effetto producono sul grafico di f.

$\boxed{\bullet \quad y = f(x) + a \qquad a \in \mathbb{R}}$

Si tratta di una traslazione verso l'alto ($a > 0$) o verso il basso ($a < 0$). La quantità a infatti viene aggiunta o tolta al valore di $y = f(x)$ e non alla variabile indipendente x.

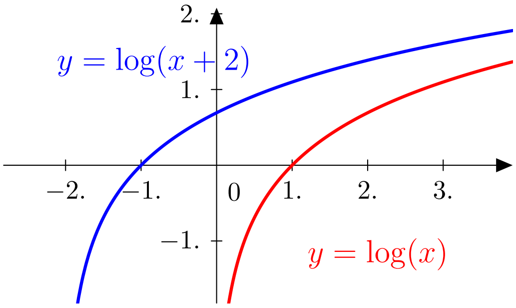

y=cosh(x)
y=sinh(xy=sinh(x)
y=tanh(x)

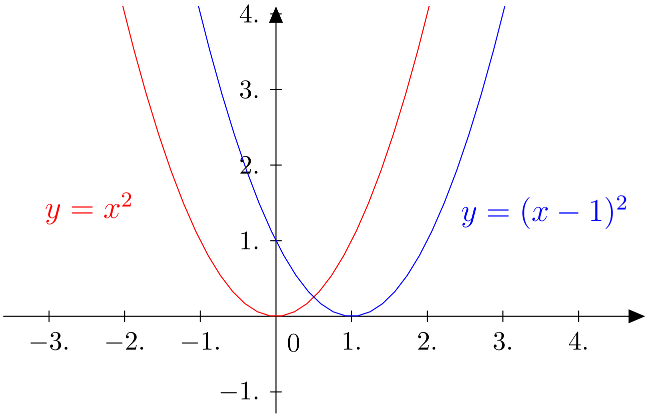

$y = e^x + 1$
$y = e^x$


$y = \sin x$
$y = \sin x - 2$

$\boxed{\bullet \quad y = f(x+a) \qquad a \in \mathbb{R}}$

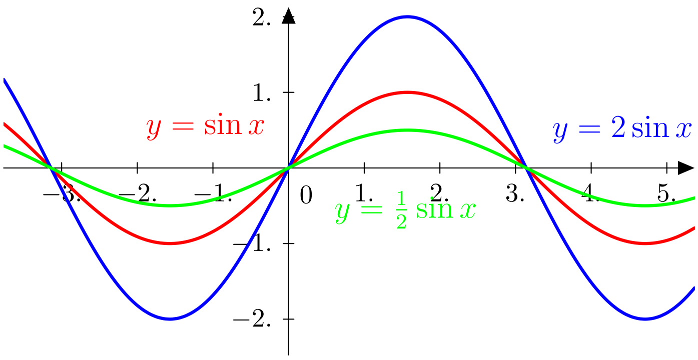
Si tratta di una traslazione verso sinistra ($a > 0$) o verso destra ($a < 0$). Infatti la quantità a viene aggiunta o tolta alla variabile x.



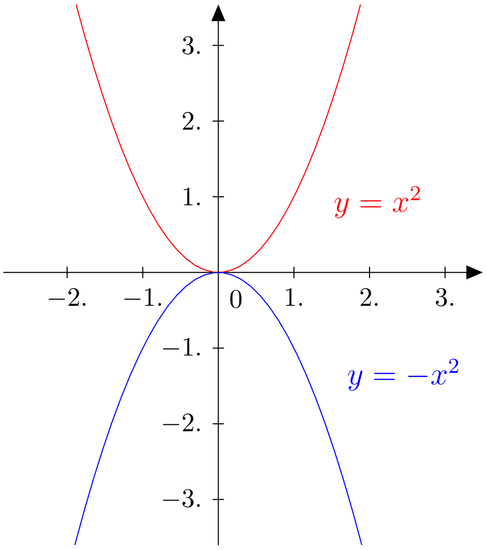


$\boxed{\bullet \quad y = kf(x) \qquad k \in \mathbb{R}}$

Si tratta di una dilatazione verso l'alto o verso il basso. Infatti per $k > 1$ il grafico si "stira" nella direzione verticale, dilatando verso l'alto le ordinate positive e verso il basso le ordinate negative. Se $0 < k < 1$ il grafico si "contrae"; infine se $k < 0$ abbiamo la sovrapposizione di due effetti: una dilatazione con fattore $-k > 0$ e una simmetria rispetto all'asse delle x.

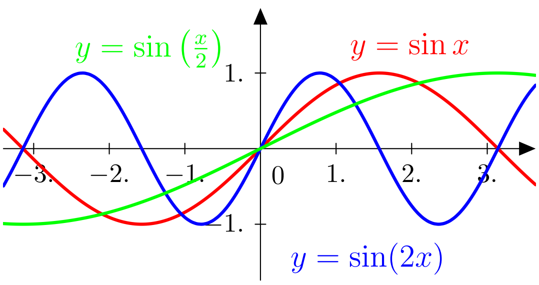


• caso particolare: $\boxed{k = -1}$ Si tratta di una simmetria rispetto all'asse delle x (i valori delle ordinate vengono cambiate di segno).

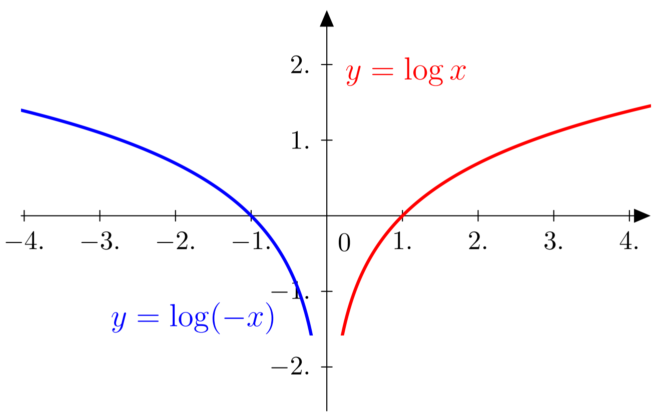


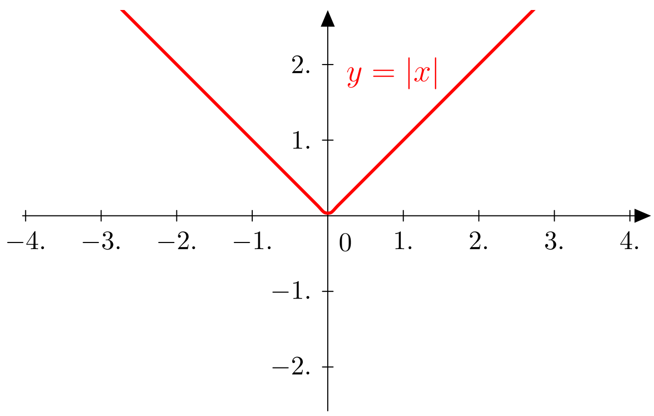
$\boxed{\bullet \quad y = f(kx) \qquad k \in \mathbb{R}}$

Si tratta di una dilatazione o compressione in direzione orizzontale. Se $k > 1$ il grafico risulta più compresso, mentre se $0 < k < 1$ il grafico risulta più dilatato. Di nuovo, se $k < 0$ si ha la sovrapposizione di due effetti.



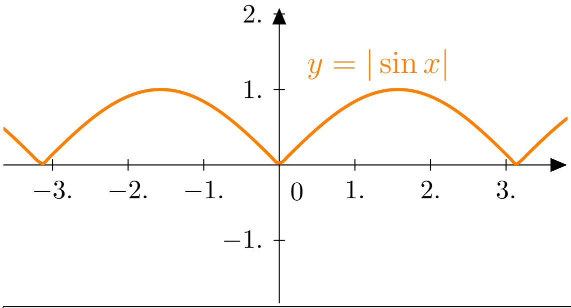
• caso particolare: $\boxed{k = -1}$ Si tratta di una simmetria rispetto all'asse delle y. In questo caso, se la funzione è pari, il grafico rimane inalterato.





$$\bullet\, y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

Il grafico che si trova sopra l'asse delle x rimane inalterato; il restante grafico si ottiene da quello di origine attraverso una simmetria rispetto all'asse delle x.



$$\bullet\, y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Il grafico tracciato rimane inalterato nel semipiano destro mentre il restante grafico si ottiene da quello di origine ribaltandolo simmetricamente rispetto all'asse delle y. Naturalmente $y = f(|x|)$ è sempre una funzione pari.