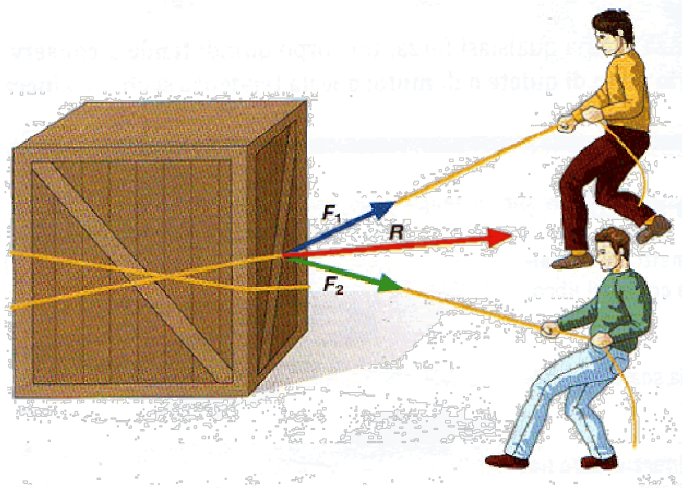
UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

MECCANICA

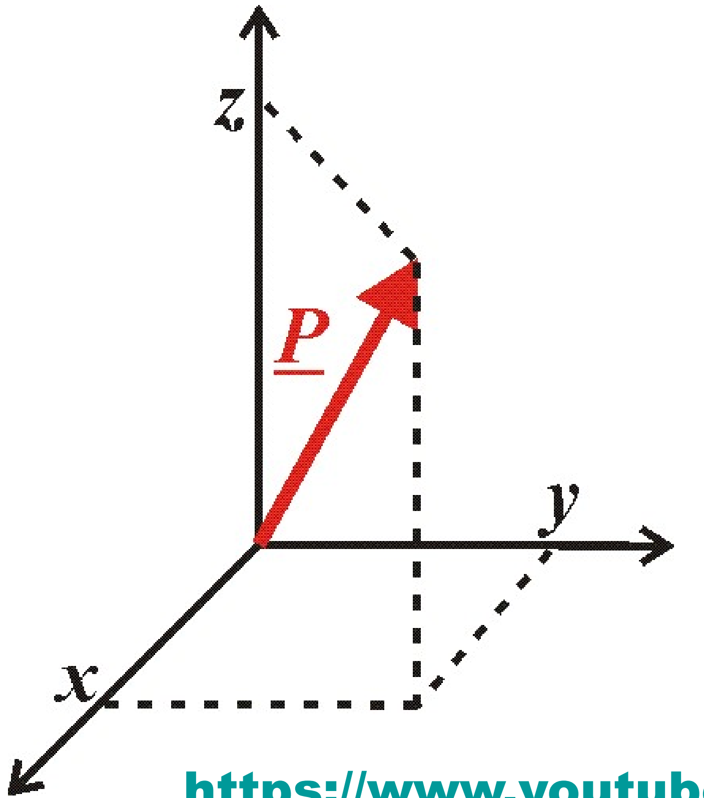
Accelerazione e seconda legge di Newton



Sommario

- Posizione e spostamento di un corpo puntiforme
- Velocità
- Accelerazione
- Valori medi ed istantanei
- Seconda legge di Newton
- Composizione delle velocità galileiana
- Impulso e quantità di moto

Il sistema di riferimento della meccanica classica



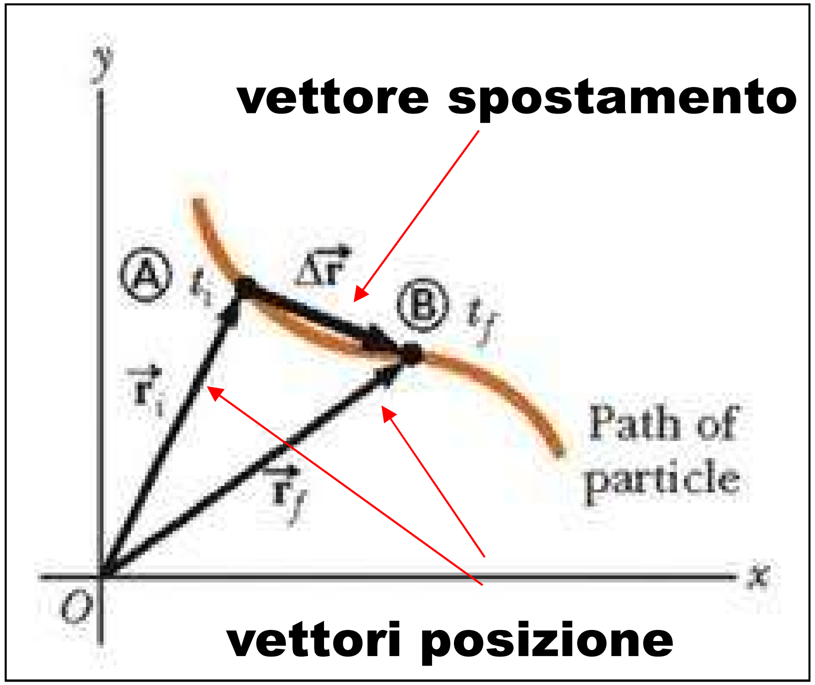
(min.0,44-9,45)

https://www.youtube.com/watch?v=7QbYE3o5qPE

Posizione & Spostamento

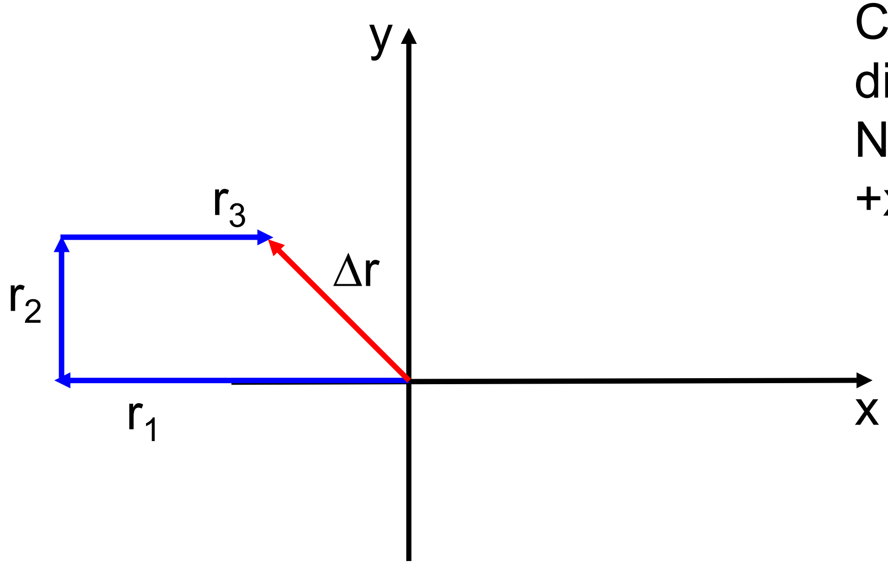
La **posizione r** di un oggetto puntiforme descrive la sua collocazione rispetto ad un punto di riferimento (origine).

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$



Lo **spostamento** rappresenta la variazione della posizione di un oggetto puntiforme. Dipende soltanto dalle posizioni iniziale e finale.

Una persona cammina verso un negozio secondo il seguente cammino: 0,500 miglia ovest, 0,200 miglia nord, 0,300 miglia est. Qual è lo spostamento totale (modulo, direzione e verso)?

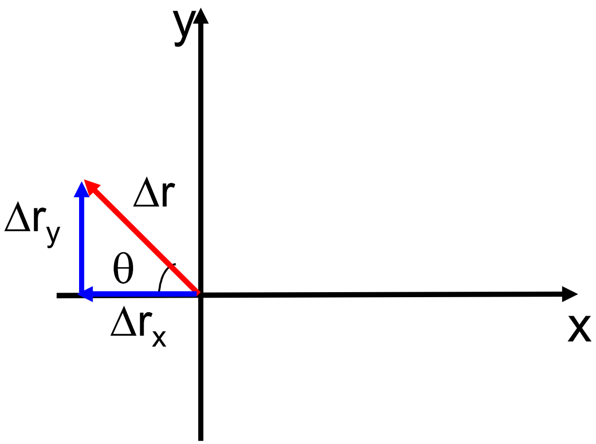


Consideriamo la direzione +y come NORD e la direzione +x come EST.

continua:

Lo spostamento è $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$. La posizione iniziale è l'origine; qual è $\mathbf{r}_f$?

La posizione finale sarà $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Le componenti sono $r_{fx} = -r_1 + r_3 = -0.2$ miglia e $r_{fy} = +r_2 = +0.2$ miglia.



Dalla figura, il modulo e la direzione dello spostamento sono:

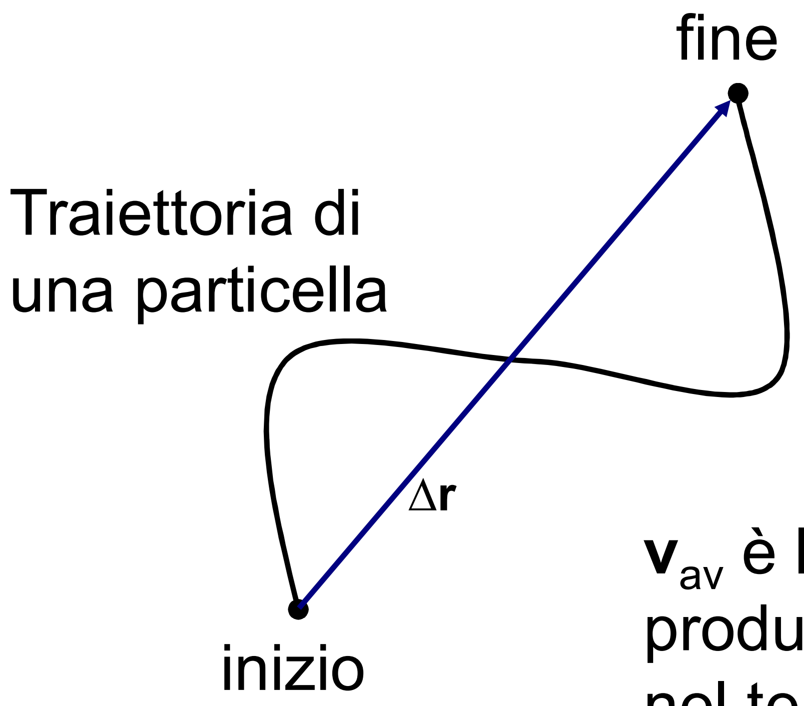
$$|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2} = 0.283\ \text{miles}$$

$$\tan\theta = \frac{|\Delta r_y|}{|\Delta r_x|} = 1 \ \text{ and } \ \theta = 45° \quad \text{N of W.}$$

Velocità

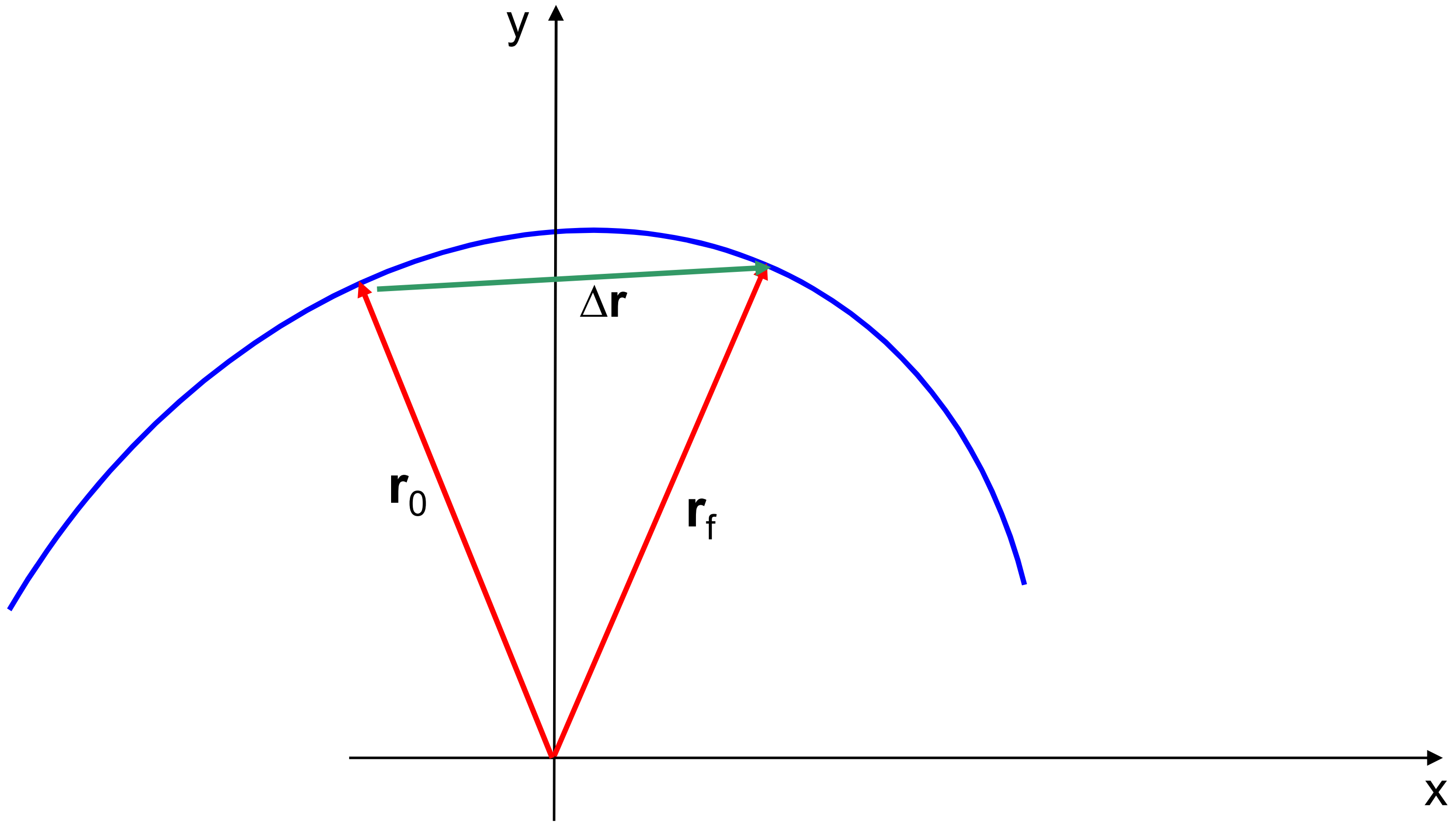
La **velocità** è un vettore che misura quanto rapidamente e in quale direzione orientata un oggetto puntiforme si muove.

$$\text{Average velocity} = \mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad \left(\text{The x-component would be: } v_{av,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$



$\mathbf{v}_{av}$ è la velocità costante che produce lo spostamento $\Delta \mathbf{r}$ nel tempo Δt .

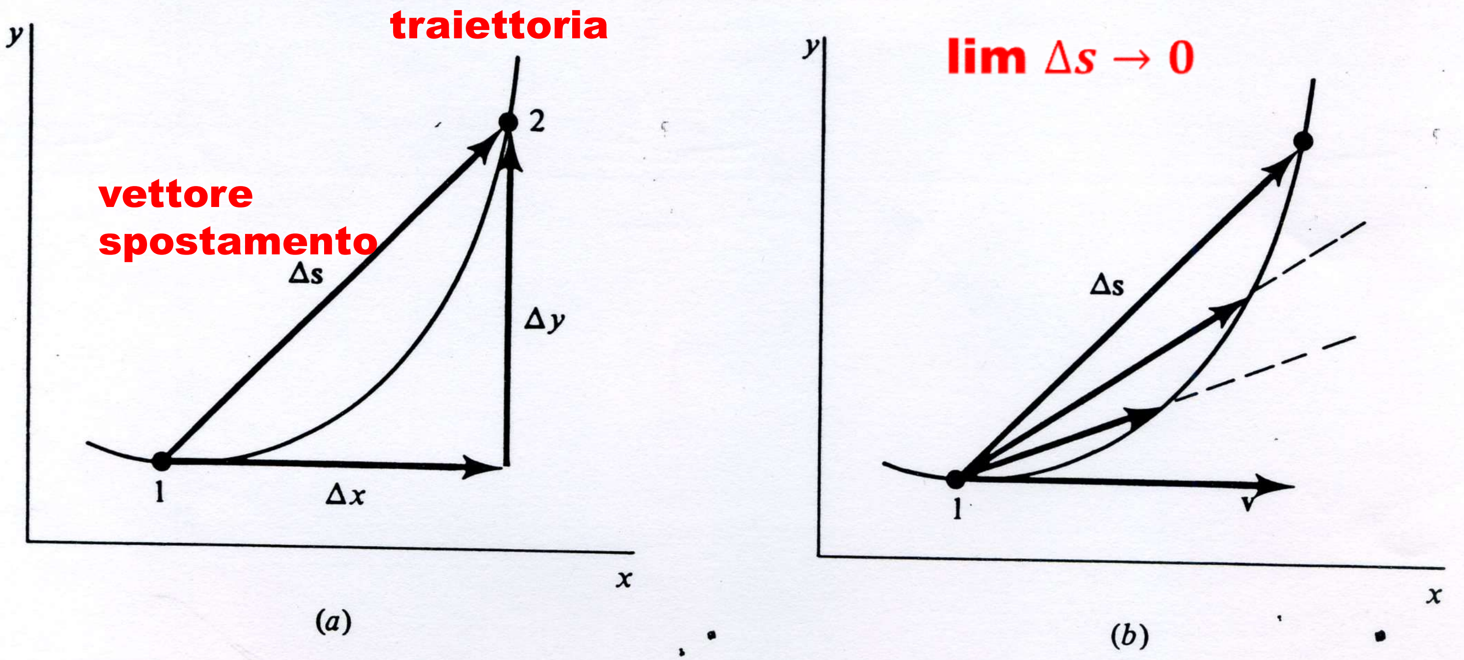
Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.



$$\mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

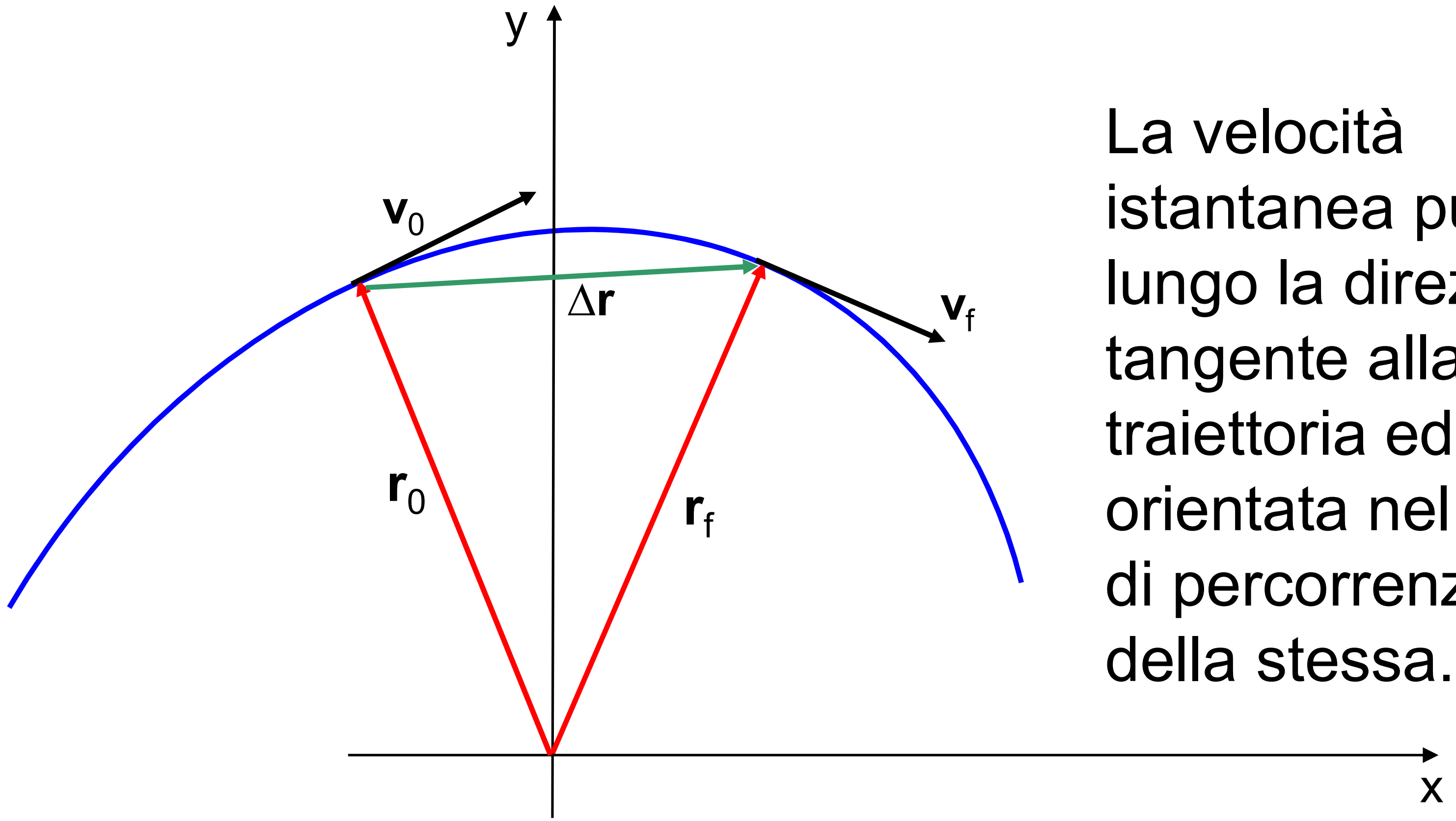
Punta nella direzione orientata di $\Delta \mathbf{r}$

Velocità in due dimensioni



(*a*) Un oggetto si muove lungo una traiettoria su un piano. Al tempo t_1 esso si trova nel punto 1 e al tempo t_2 si trova nel punto 2. La velocità media risulta parallela a Δs. (*b*) Mano a mano che l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ diventa più piccolo, anche lo spostamento Δs diminuisce. La velocità media $\bar{\mathbf{v}} = \Delta s/\Delta t$ si approssima alla velocità istantanea **v** al tempo t_1, che è un vettore tangente alla traiettoria nel punto 1.

Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.



La velocità istantanea punta lungo la direzione tangente alla traiettoria ed è orientata nel verso di percorrenza della stessa.

La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

E’ la più antica notazione di derivata tutt’ora in uso sia in matematica che in fisica.

Fu introdotta da Leibniz nel 1635 e utilizza il concetto di «infinitesimo», oggi chiamato «differenziale» (da cui il nome «calcolo infinitesimale» per l’analisi matematica.

Sia y=f(x) una funzione reale dell’incognita reale x. Chiamiamo derivata prima della f(x) la funzione:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nella notazione di Leibniz la derivata si denota così:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

Per le derivate di ordine successivo:

$$f'' = f^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$$

$$\vdots$$

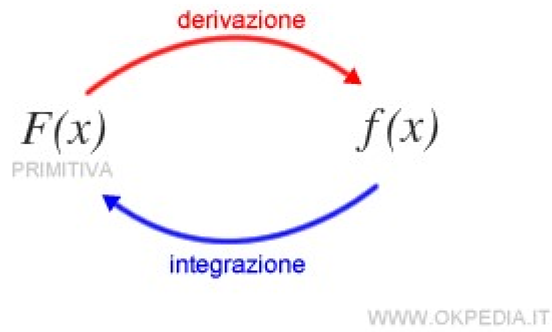
$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

Il concetto di differenziale e la notazione di Leibniz vengono ripresi nella definizione matematica di integrale. Se y=f(x) è una funzione reale definita nell'intervallo (a,b) della variabile indipendente x e suddiviso questo intervallo in n suddivisioni di ampiezza δ:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= F(b) - F(a) \quad con \quad dF/dx = f(x)$$



$$\int \frac{df(x)}{dx} dx = \int df(x) = f(x) + costante$$

Velocità istantanea = derivata temporale dello spostamento

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\vec{S} = \int \vec{v}\, dt$$

Velocità istantanea in coordinate cartesiane

La velocità istantanea è definita partendo dalla velocità media e considerandone il limite per $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

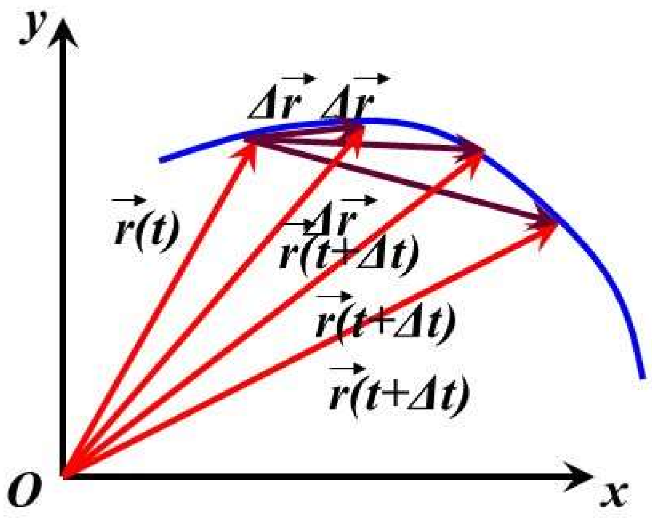
Le componenti del vettore velocità sono dunque:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

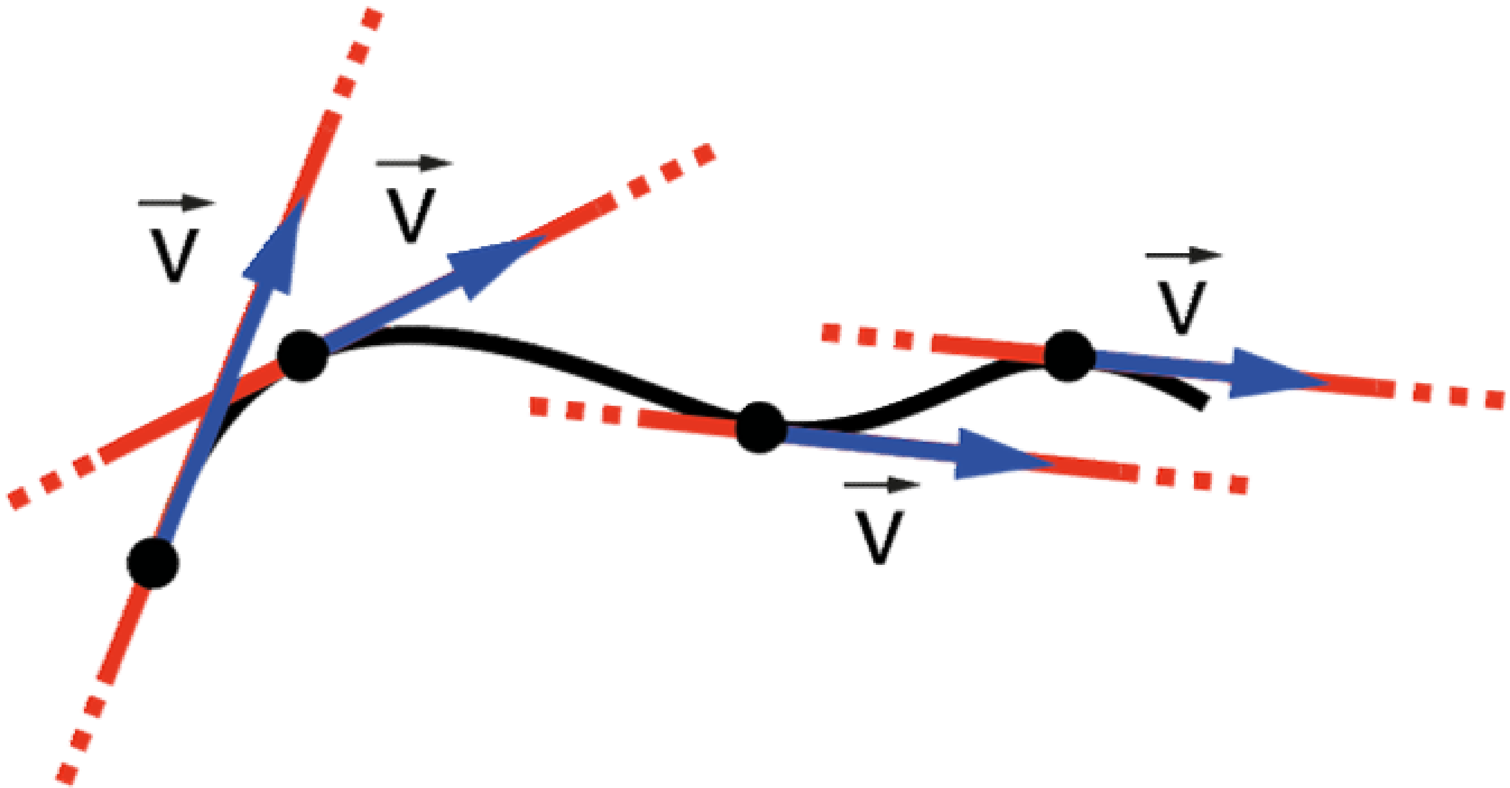
Per $\Delta t \to 0$ la direzione dello spostamento tende ad essere tangente alla traiettoria

⇓

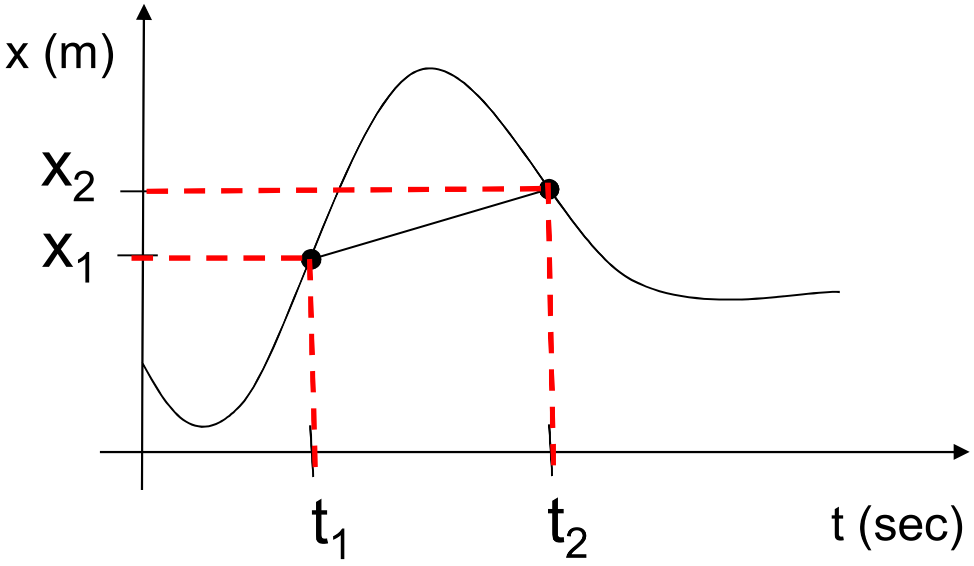
Il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria



Interpretazione geometrica del vettore velocità

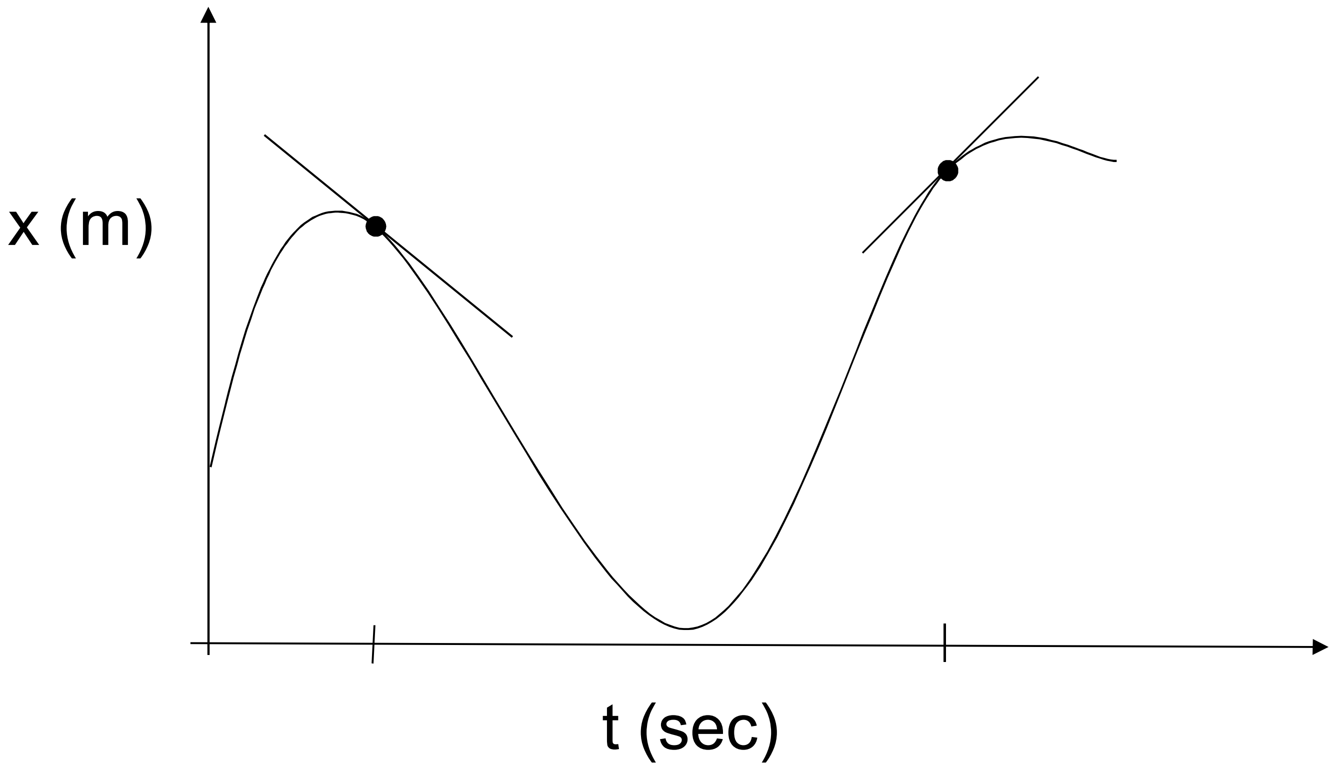


In un grafico di posizione vs tempo la velocità media è rappresentata dalla pendenza della corda:



$$\text{Average velocity} = v_{av,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

In un grafico di posizione vs tempo la velocità istantanea è rappresentata dalla pendenza della tangente alla curva che rappresenta la traiettoria nella posizione occupata dal corpo all'istante considerato .



Accelerazione media e istantanea

Se la velocità cambia nel tempo nasce una accelerazione diversa da zero che cambia lo stato di moto del corpo che si muove.

Accelerazione media $= \vec{\mathbf{a}}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$

(interpretazione simile a $\mathbf{v}_{av}$ e $\mathbf{v}$).

Accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$$

Accelerazione in coordinate cartesiane

Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità del punto materiale agli istanti di tempo t_1 e $t_2 = t_1 + \Delta t$

Accelerazione media: $$\vec{a}_M = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

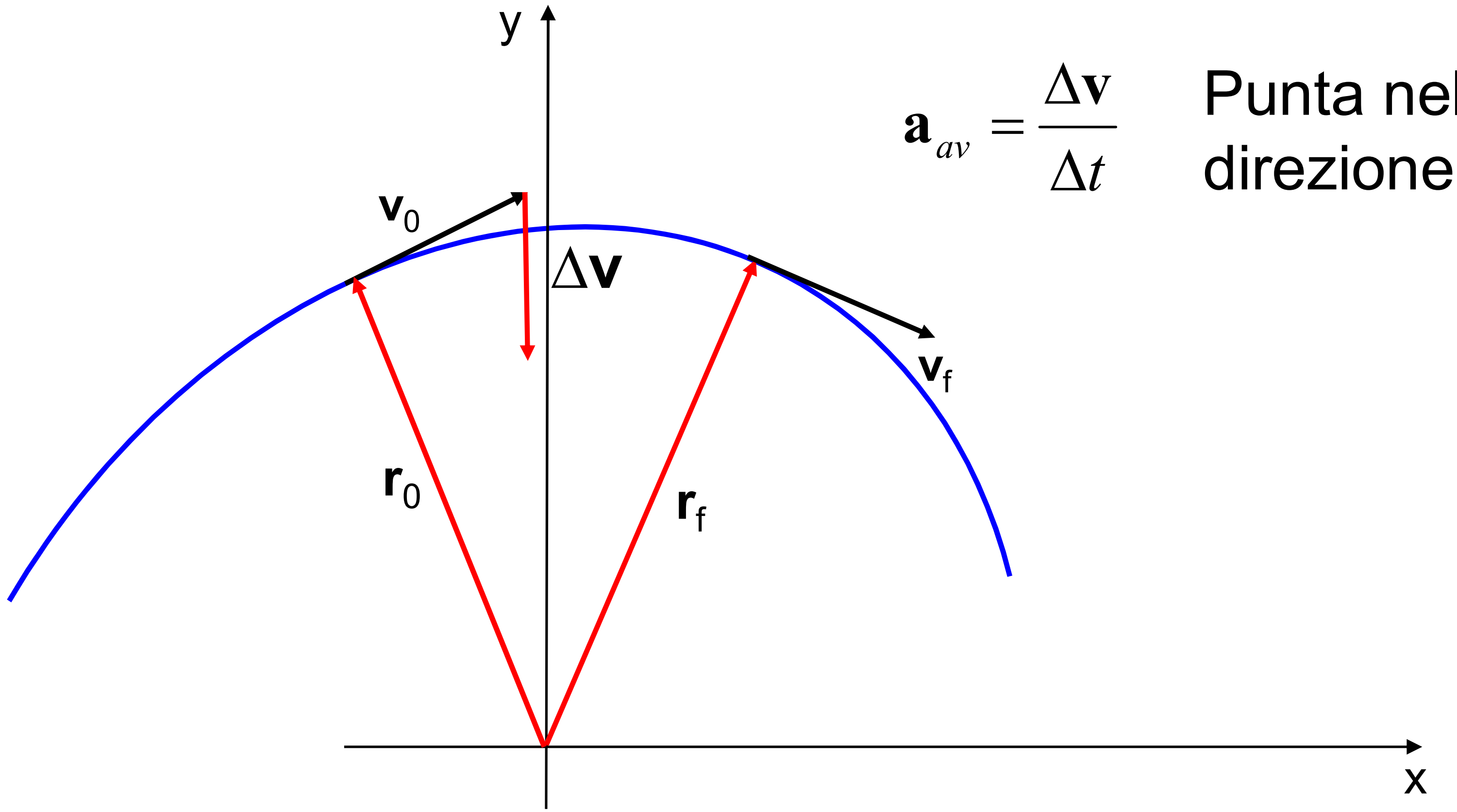
Accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

In generale il vettore $\vec{a}$ avrà una componente parallela alla traiettoria (accelerazione tangenziale) ed una componente perpendicolare alla traiettoria (accelerazione normale)

Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.



$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Punta nella direzione di $\Delta\mathbf{v}$.

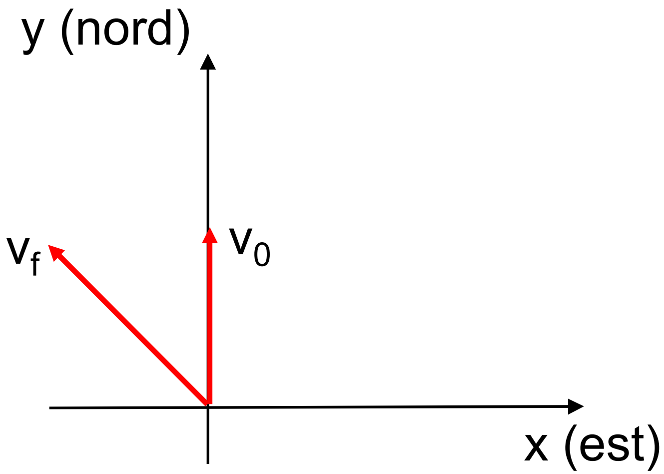
Un’auto che viaggia a 28 m/s viene decelerata fino ad un completo arresto in 4 s. Trovare la decelerazione media durante la frenata.

Dati $v_i = +28$ m/s, $v_f = 0$ m/s, e $\Delta t = 4.0$ s.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 28\,\mathrm{m/s}}{4.0\,\mathrm{s}} = -7.0\,\mathrm{m/s^2}$$

All'inizio di un viaggio di 3 ore stai viaggiando verso nord a 192 km/h. Alla fine viaggi a 240 km/h a 45°a ovest della direzione nord. (a) Disegnare i vettori velocità iniziale e finale. (b) Trovare il vettore Δv. (c) Qual è l'accelerazione media durante il viaggio?

(a) Disegna I vettori velocità iniziale e finale.



continua:

(b) Trova $\Delta\mathbf{v}$.

Le componenti sono

$$\Delta v_x = v_{fx} - v_{ox} = -v_f \sin 45° - 0 = -170\ \mathrm{km/hr}$$

$$\Delta v_y = v_{fy} - v_{oy} = +v_f \cos 45° - v_0 = -22.3\ \mathrm{km/hr}$$

$$|\Delta\mathbf{v}| = \sqrt{\Delta v_x^{\ 2} + \Delta v_y^{\ 2}} = 171\ \mathrm{km/hr}$$

$$\tan\varphi = \frac{|\Delta v_y|}{|\Delta v_x|} = 0.1312 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.1312) = 7.5°$$

Sud-ovest

continua:

(c) Qual è $\mathbf{a}_{av}$ durante il viaggio ?

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$a_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-170\ \mathrm{km/hr}}{3\ \mathrm{hr}} = -56.7\ \mathrm{km/hr}^2$$

$$a_{y,\mathrm{av}} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{-22.3\ \mathrm{km/hr}}{3\ \mathrm{hr}} = -7.43\ \mathrm{km/hr}^2$$

Il modulo e la direzione sono:

$$|\mathbf{a}_{\mathrm{av}}| = \sqrt{a_{x,\mathrm{av}}^2 + a_{y,\mathrm{av}}^2} = 57.2\ \mathrm{km/hr}^2$$

$$\tan\phi = \frac{|a_{y,\mathrm{av}}|}{|a_{x,\mathrm{av}}|} = 0.1310 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.1310) = 7.5^\circ$$ Sud ovest

Seconda legge di Newton

Si chiama forza risultante la somma vettoriale $\Sigma\mathbf{F}$ di tutte le forze applicate ad un corpo.

La forza risultante agente su un corpo è direttamente proporzionale all' accelerazione del corpo. La costante di proporzionalità è chiamata **massa** (inerziale) del corpo.

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Force units: 1 N = 1 kg m/s^2.

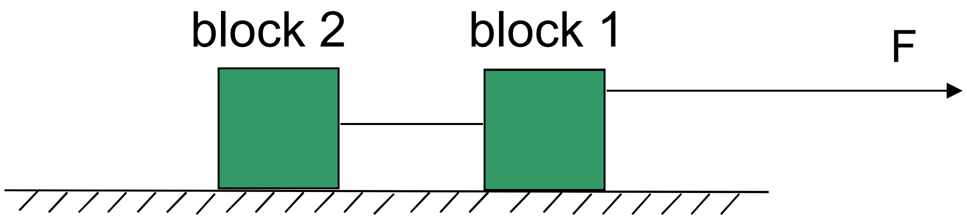
Se **a** = 0, allora Σ**F** = 0. In questo caso un corpo puntiforme può avere:

$v = 0$ (equilibrio statico), **o**

$v \neq 0$ constante, (equilibrio dinamico).

La massa di un corpo è una misura della sua inerzia, cioè della sua resistenza a cambiare il proprio stato di moto sotto l'azione di una forza.

Trovare la tensione che agisce sulla corda che collega i due blocchi in figura quando una forza di 10 N viene applicata al blocco di destra. Supporre trascurabile l'attrito. Le masse dei due blocchi sono m_1 = 3.00 kg e m_2 = 1.00 kg.



Assumi che la corda rimanga tesa cosicchè entrambi I blocchi abbiano la stessa accelerazione.

Diagramma di forze di corpo libero per il blocco 2

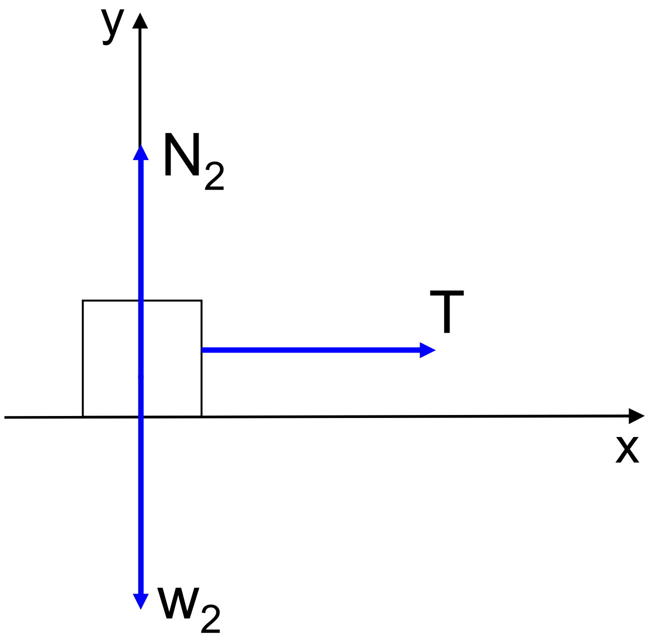
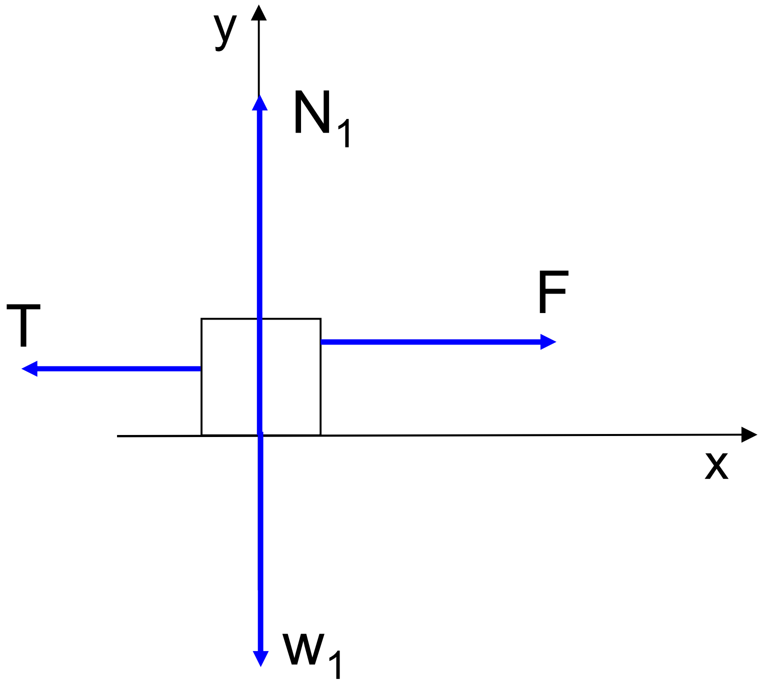


Diagramma di forze di corpo libero per il blocco 1



Applica la seconda legge di Newton a ciascun blocco:

$$\sum F_x = T = m_2 a \qquad \sum F_x = F - T = m_1 a$$

$$\sum F_y = N_2 - w_2 = 0 \qquad \sum F_y = N_1 - w_1 = 0$$

$$F - T = m_1 a \quad (1)$$

$$T = m_2 a \quad (2)$$

Queste 2 equazioni contengono le incognite: *a* and *T*.

Per risolvere per T, a deve essere eliminata. Risolvi per a in (2) e sostituisci in (1).

$$F - T = m_1 a = m_1 \left(\frac{T}{m_2} \right)$$

$$F = m_1 \left(\frac{T}{m_2} \right) + T = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) T$$

$$\therefore T = \frac{F}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)} = \frac{10\ \mathrm{N}}{\left(1 + \frac{3\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{kg}} \right)} = 2.5\ \mathrm{N}$$

Una scatola scivola su una superficie rugosa. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico è 0,3 calcolare l'accelerazione della scatola.

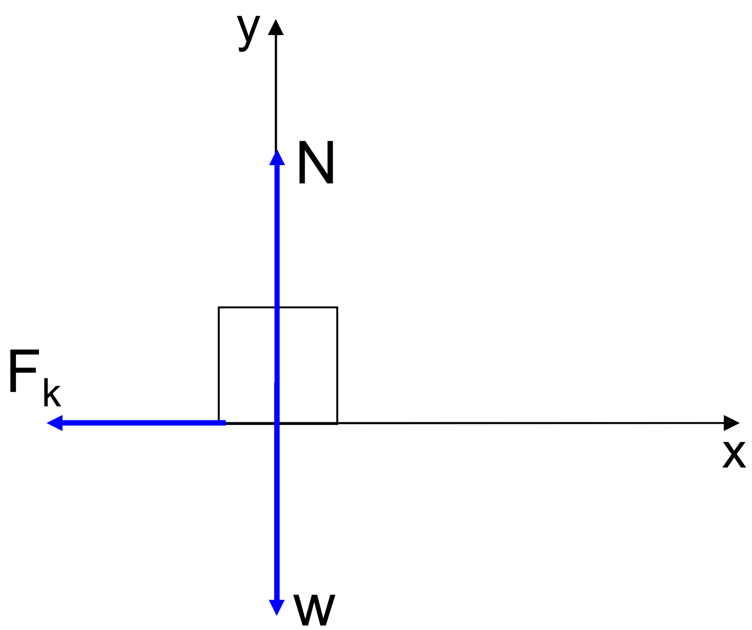


Diagramma di forze di corpo libero per la scatola

Applica la seconda legge di Newton:

$$\sum F_x = -F_k = ma$$

$$\sum F_y = N - w = 0$$

(1) $-F_k = ma$

(2) $N - w = 0 \quad \therefore N = w = mg$

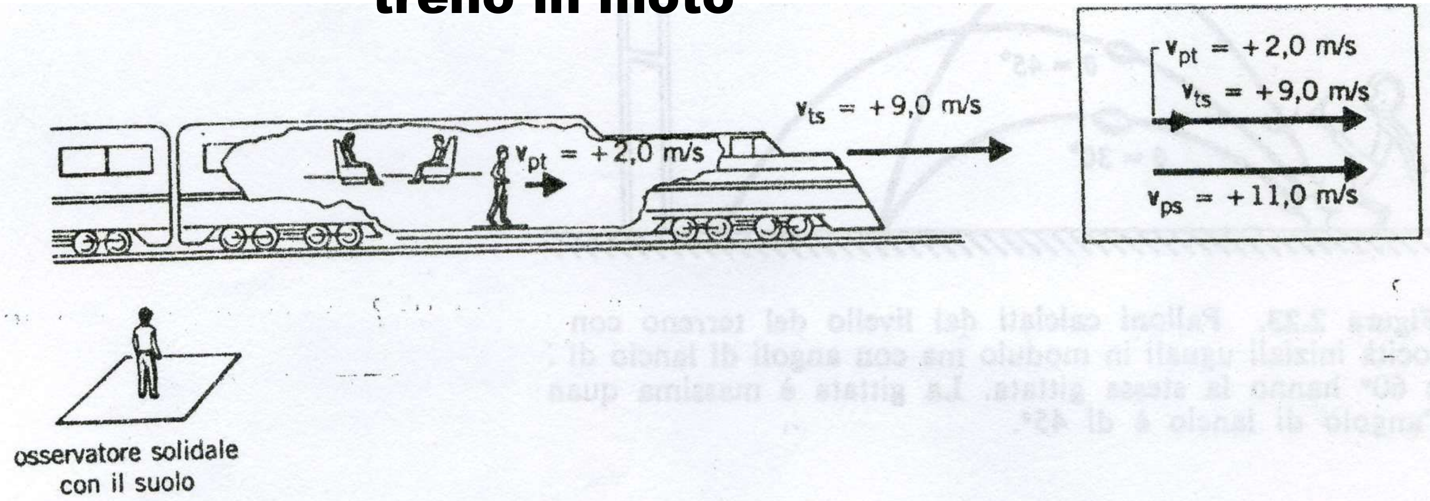
Da (1): $$-F_k = -\mu_k N = -\mu_k mg = ma$$

Risolvendo per a:

$$a = -\mu_k g = -(0.3)\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right) = -2.94\,\mathrm{m/s^2}$$

Composizione delle velocità

Esempio1: viaggiatore in movimento su treno in moto

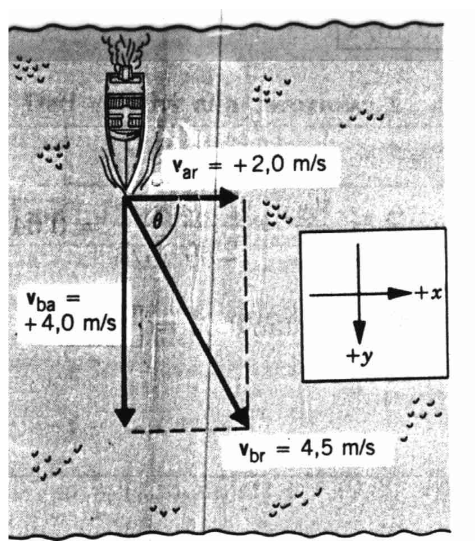


La velocità $\mathbf{v}_{ps}$ del passeggero rispetto all'osservatore solidale con il suolo è la somma vettoriale della velocità $\mathbf{v}_{pt}$ del passeggero rispetto al treno e della velocità $\mathbf{v}_{ts}$ del treno rispetto al suolo: $\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{pt} + \mathbf{v}_{ts}$.

(min.9,45)

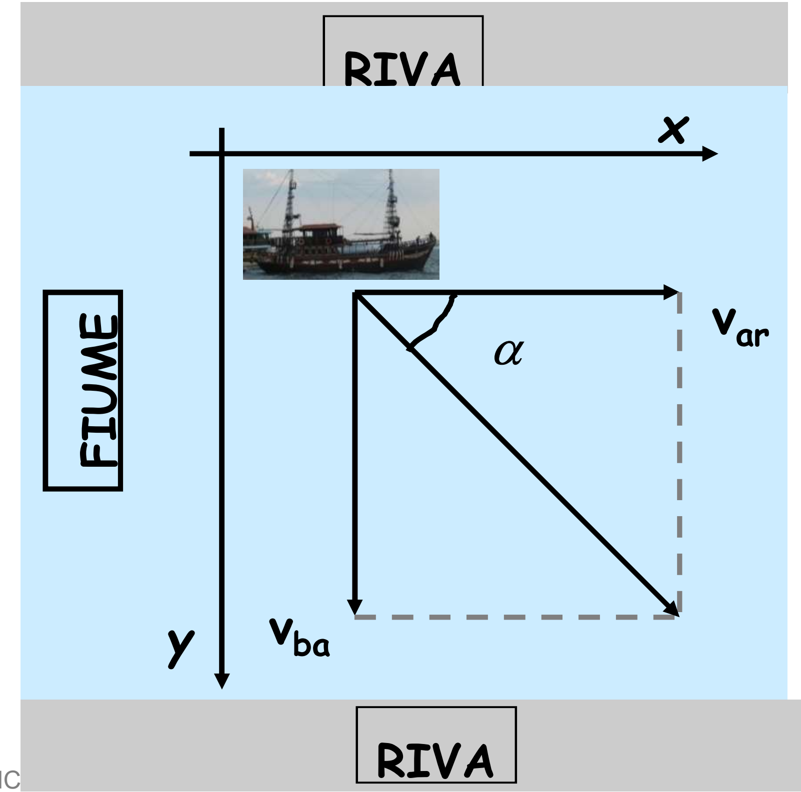
https://www.youtube.com/watch?v=7QbYE3o5qPE

Il motore di una barca la fa muovere rispetto all'acqua di una velocità v_{ba}=4.0*m/s,* secondo la direzione perpendicolare alla corrente. Se la velocità dell'acqua rispetto alla riva è v_{ar} =2.0 *m/s*, quanto vale la velocità v_{br} della barca rispetto alla riva? Se il fiume è largo 1800*m*, quanto tempo impiega la barca per attraversarlo?



RISOLUZIONE/1

Rispetto alla riva, la velocità della barca (vettore) ha due componenti: una lungo x e un'altra lungo y. Quella lungo *x* è v_{ar} mentre lungo *y* è v_{ba}.



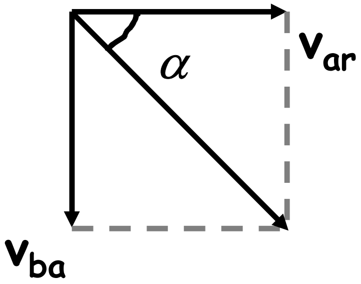
RISOLUZIONE/2

Il modulo della velocità totale v_{TOT} della barca sarà dato

$$v_{TOT} = \sqrt{v_{ar}^2 + v_{ba}^2} = \left(\sqrt{4^2 + 2^2}\right) m/s = 4.5 m/s$$

La direzione della velocità è individuato dall' angolo α formato dal vettore velocità totale v_{TOT} con l'asse x.

Dalla trigonometria so che la tangente dell'angolo α è pari al rapporto tra i cateti:



$$\tan\alpha = \frac{v_{ba}}{v_{ar}} = 2$$

da cui $\alpha = \arctan 2 = 63°$

RISOLUZIONE/3

La seconda parte del problema chiede: ‘se il fiume è largo 1800*m*, quanto tempo impiega la barca per attraversarlo?’.

Dalla velocità della barca si risale al tempo necessario per percorrere 1800 m, infatti:

Sapendo che $V_{ba} = \dfrac{y}{t} \Longrightarrow t = \dfrac{y}{v_{ba}} = \dfrac{1800m}{4m/s} = 450s$

Quantità di moto

La quantità vettoriale $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è chiamata quantità di moto o “momento lineare”.

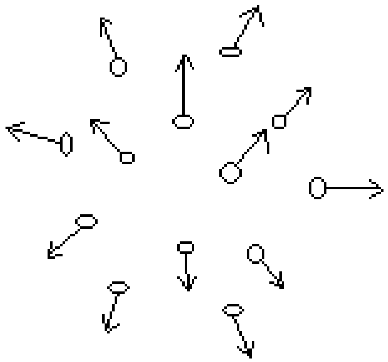
La sua unità di misura è kg m/s.

La seconda legge della dinamica per una particella di massa m costante si può scrivere in termini della quantità di moto:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\, d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{p}/dt$$

Teorema dell' impulso

Se la risultante delle forze applicate al corpo è nulla la quantità di moto si conserva.



Per un sistema di particelle in cui le forze sono solo interne (cioè esercitate da particelle del sistema su altre particelle del sistema) la risultante delle forze applicate al corpo è nulla per la terza legge della dinamica e la quantità di moto TOTALE si conserva.