Michela Eleuteri

DISPENSE DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Funzioni reali di una variabile reale

numeri complessi, calcolo differenziale e integrale

Indice

CAPITOLO 1

Approssimazione lineare e formula di Taylor

1.1. Formula di Taylor con resto secondo Lagrange e stima dell'errore

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.1.1. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a,b)$*. Supponiamo che la funzione* f *sia derivabile* $n+1$ *volte in* (a,b) *e sia* P_{n,x_0} *il polinomio di Taylor di ordine* n *centrato in* x_0 *relativo a* f*. Allora si ha per ogni* $x \in (a,b)$

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + \frac{f^{n+1}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

dove $z(x)$ *è un opportuno punto tra* x_0 *e* x*.*

La dimostrazione di questo risultato si basa su una generalizzazione del Teorema di Lagrange. La quantità

$$\frac{f^{n+1}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

si chiama RESTO SECONDO LAGRANGE e può servire per dare una stima dell'errore di approssimazione, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 1.1.1. *Si chiede di stimare* $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ *con un errore inferiore a* 10^{-3}.

Pensiamo innanzitutto di usare lo sviluppo di $\log(1+x)$ centrato nell'origine e di considerare poi $x = 1/2$. L'obiettivo è quello di capire a quale ordine arrestare lo sviluppo di Mac Laurin in modo tale che l'errore (resto di Lagrange) sia inferiore a 10^{-3}. A tal proposito scriviamo lo sviluppo richiesto. Si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(z)$$

con $0 < z < x = 1/2$ e

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Andiamo quindi a determinare esplicitamente questo resto. Innanzitutto si ha

$$f(x) = \log(1+x) \;\; f'(x) = (1+x)^{-1} \;\; f''(x) = -(1+x)^{-2} \;\; f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \;\; f^{iv}(x) = -6(1+x)^4$$

da cui per induzione è possibile provare che

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \, n! \, (1+x)^{-(n+1)}$$

quindi il resto di Lagrange del nostro sviluppo sarà

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Visto poi che $0 < z < 1/2$ allora $\left(\frac{1}{1+z}\right)^{n+1} < 1$ quindi basta chiedersi per quale n si abbia

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{10^3}.$$

Visto che $10^3 \approx 2^{10}$ e tenendo conto del fattore $n+1$, ci si aspetta che $n = 7$ sia il valore richiesto e infatti per $n = 6$ si ha

$$\frac{1}{2^7\,7} = \frac{1}{896} > \frac{1}{1000}$$

mentre per $n = 7$ si ha

$$\frac{1}{2^8\,8} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{1000}$$

Quindi lo sviluppo richiesto sarà

$$\log\frac{3}{2} \approx 0,405465 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \approx 0,4058036$$

1.2. Polinomio di Taylor e approssimazione: un esempio significativo

Consideriamo la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
Si vede che questa funzione è continua e si nota che è pure derivabile (per verificare la derivabilità in $x = 0$ si usa la definizione di limite del rapporto incrementale) e la sua derivata è data da
$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2}\, e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
A sua volta è facile verificare che anche questa funzione è continua e derivabile e la sua derivata è
$$f''(x) = \begin{cases} (-2x^{-3} + x^{-4})\, e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
che è di nuovo continua e derivabile. Per induzione si fa vedere che la funzione di partenza è di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi è derivabile infinite volte e tutte le sue derivate sono funzioni continue; la derivata k-esima vale
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(x^{-1})\, e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
dove P_k è un polinomio in x^{-1} di grado $2k$. D'altra parte, si vede facilmente che tutte le derivate in zero valgono zero, quindi il polinomio di Taylor è zero! Ma chiaramente la funzione è diversa da zero, quindi in questo caso *il polinomio di Taylor non rappresenta una buona approssimazione della funzione.*

1.3. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 1.3.1.** *Calcolare*
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x}$$
Il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Primo modo: usando i limiti notevoli
$$e^x - 1 \sim x \qquad \log(1-x) \sim -x \qquad \tan x \sim x \qquad x \to 0$$
si ha che
$$\frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x} \sim \frac{0}{0}$$

che non dà informazioni ulteriori. Quindi questo metodo non è applicabile (l'approssimazione al primo ordine non è sufficiente).

Secondo modo: usiamo il teorema di de l'Hospital (si veda più avanti nella dispensa **[D2]**). Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

che si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; è necessario dunque provare ad applicare di nuovo il teorema. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{2\cos x \sin x}{\cos^3 x}}$$

che purtroppo si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; è necessario dunque provare ad applicare di nuovo il teorema. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{2\cos x \sin x}{\cos^3 x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2(1-x)^{-3}}{\frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x}} = -\frac{1}{2}$$

quindi finalmente anche il limite di partenza esiste e vale $-1/2$. Riassumendo l'uso del Teorema di de l'Hospital può risultare a volte lungo e laborioso (col rischio di sbagliare qualche calcolo!)

Terzo modo: proviamo a usare gli sviluppi di Taylor. La difficoltà è tentare di arrestare gli sviluppi in modo da avere lo stesso ordine sia al numeratore che al denominatore. Proviamo a fermarci al primo ordine utile dopo il primo (dal primo metodo abbiamo visto che fermarsi al primo ordine non era sufficiente). Visto che si ha

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

proviamo ad arrestarci al terzo ordine anche al numeratore. Si ha

$$e^x - 1 + \log(1-x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

quindi dalle proprietà degli "o piccolo", ricordando che $o(1) \to 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

❒ **Esercizio 1.3.2.** *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$$

Usiamo gli sviluppi di Taylor, arrestando il numeratore al quarto ordine, visto il denominatore. Si ha

$$e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2 = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 = \frac{11}{24}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{11}{24} + o(1) = \frac{11}{24}.$$

CAPITOLO 2

Numeri complessi

L'introduzione del campo dei numeri complessi avviene principalmente per ragioni di natura algebrica. Infatti si pone l'esigenza di ampliare il campo matematico rendendo più naturale il concetto di potenza, visto che a^b ha senso se $a > 0$ mentre se $a < 0$ vale solo in certi casi (equivale a cercare la radice di numeri negativi).

2.1. Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo

Sia $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Su $\mathbb{R}^2$ è definito in modo naturale l'operazione di *somma*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e quella di *prodotto*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si verificano facilmente le proprietà *commutativa*, *associativa*, *distributiva*. Inoltre $(0, 0)$ è *l'elemento neutro* della somma, cioè si ha

$$\forall (a, b), (a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

mentre $(1, 0)$ è *l'elemento neutro per il prodotto*, ossia

$$\forall (a, b), (a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

Inoltre per ogni (a, b) è possibile definire *l'elemento opposto* di (a, b) che indicheremo con $(-a, -b)$ e si ha

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

e analogamente, per ogni $(a,b) \neq (0,0)$ è possibile definire *il reciproco di* (a,b) che indicheremo con $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ tale per cui si abbia

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Si verifica quindi che $\mathbb{R}^2$ con queste operazioni è un campo che chiameremo CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI e indicheremo con la lettera $\mathbb{C}$.
Sia ora $\mathbb{C}_0$ un sottocampo di $\mathbb{C}$ formato dall'insieme delle coppie del tipo $(a,0)$ con il secondo elemento della coppia uguale a 0. In tal caso le operazioni di somma e prodotto si riducono a

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0), \qquad (a,0) \cdot (b,0) = (ab,0).$$

Quindi su $\mathbb{C}_0$ è possibile introdurre una relazione d'ordine $<$ in modo tale che diventi un campo ordinato: infatti si ha

$$a < b \rightarrow (a,0) < (b,0).$$

È quindi possibile *mettere in corrispondenza biunivoca* $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}_0$ nel modo seguente

$$(a,0) \leftrightarrow a$$

in modo tale da poter IDENTIFICARE i due insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_0$. In questo senso il campo dei numeri complessi si può vedere come un *ampliamento* del campo dei numeri reali.

❐ **Osservazione 2.1.1.** Notiamo che

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0).$$

Quindi abbiamo trovato un numero complesso tale che il suo quadrato coincida con il numero reale $(-1,0)$ (che può essere identificato con -1). Per l'importanza (anche storica) di questo numero complesso, gli viene dato il nome di UNITÀ IMMAGINARIA e si indicherà con $(0,1) = i$.

A questo punto andiamo a semplificare le notazioni. Si ha

$$(a,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + ib$$

che viene denominata FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI. A questo punto allora

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

e

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc).$$

Se $z = a+ib$, a si dice PARTE REALE DI z e si indica con $\Re(z)$ mentre b si dice PARTE IMMAGINARIA DI z e si indica con $\Im(z)$.

❒ **Osservazione 2.1.2.** $\boxed{\text{Si noti che } a \text{ e } b \text{ sono NUMERI REALI!!!}}$

❒ **Esempio 2.1.3.** *Calcolare*

$$(2-i)+(1+3i).$$

Si ha

$$(2-i)+(1+3i)=2-i+1+3i=3+2i.$$

❒ **Esempio 2.1.4.** *Calcolare parte reale e parte immaginaria del numero complesso*

$$z=(2-i)\,(1+3i)$$

Si ha

$$z=(2-i)\,(1+3i)=2+6i-i+(-i)(3i)=2-5i+3=5+5i,$$

quindi $\Re z=5$ *e* $\Im z=5$ *(attenzione* **NON** *è* $\Im z=5i$*!!!)*

❒ **Definizione 2.1.5.** Il QUOZIENTE di numeri complessi si definisce nel modo seguente

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)\,(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

❒ **Esempio 2.1.6.** *Calcolate*

$$\frac{1}{2-3i}$$

Si ha

$$\frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{13}.$$

❒ **Definizione 2.1.7.** Si dice COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso $z=a+ib$ il numero complesso $\overline{z}=a-ib$.

Si noti che

$$z+\overline{z}=2\Re(z),\qquad z-\overline{z}=2i\Im(z).$$

❒ **Esempio 2.1.8.** *Calcolate*

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1}.$$

Si ha

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1}=\frac{2+i-3-i}{3i+1}\,\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{3i-1}{10}.$$

N.B. un errore molto comune sarebbe stato moltiplicare ambo i membri per $3i-1$ *e non per* $1-3i$*. Infatti il complesso coniugato del numero* $3i+1$ *è* $1-3i$ *e non* $3i-1$*.*

Elenchiamo ora alcune semplici proprietà dell'operazione di coniugio. Si ha

$$
\begin{aligned}
&(i)\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\\
&(ii)\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\\
&(iii)\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}\\
&(iv)\overline{\overline{z}}=z\\
&(v)z\,\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

Quest'ultima proprietà è particolarmente interessante perché ci dice che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato dà un numero reale, la cui radice quadrata prende il nome di MODULO DI z e si indica con $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Quindi $|z|^2=z\,\overline{z}$; se $z\in\mathbb{R}$ allora il suo modulo coincide con il valore assoluto.

❒ **Esempio 2.1.9.** *Calcolare $|2-3i|$. Si ha*

$$|2-3i|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

Un **errore** *molto frequente sarebbe stato quello di prendere il quadrato di $-3i$ anziché quello della sola parte immaginaria -3. In questo caso si otterrebbe $|2-3i|^2=-5$ che fa subito sospettare, ma se il risultato fosse stato positivo, poteva esserci il rischio di non accorgersi dell'errore.*

Elenchiamo alcune proprietà del modulo di un numero complesso.

$$
\begin{aligned}
&1)|z|\geq 0,\ \ |z|=0\Leftrightarrow z=0\\
&2)|z|=|\overline{z}|\\
&3)|\Re(z)|\leq\ |z|,\qquad |\Im(z)|\leq\ |z|\\
&4)|z+w|\leq\ |z|+|w|\qquad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE}\\
&5)|z|\leq\ |\Re(z)|+|\Im(z)|\\
&6)||z|-|w||\leq\ |z+w|.
\end{aligned}
$$

DIMOSTRAZIONE: Le prime due proprietà sono di immediata dimostrazione. Per la terza, indicando con $a=\Re z$ e $b=\Im z$, si ottiene la tesi dal fatto che $a^2\leq a^2+b^2$ e similmente $b^2\leq a^2+b^2$. Per la proprietà 4), basta dimostrare che

$$|z+w|^2\leq(|z|+|w|)^2,$$

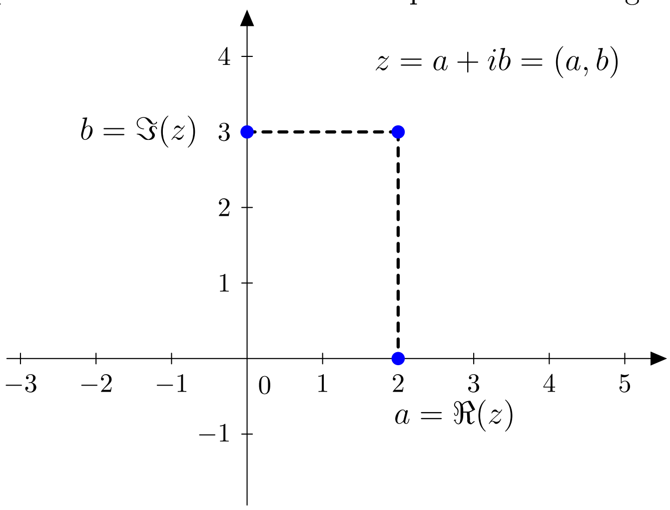
cioè esplicitando i conti

$$(z+w)(\overline{z}+\overline{w})\leq\ |z|^2+|w|^2+2|z|\,|w|$$

da cui
$$z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|.$$
A questo punto si conclude osservando che
$$z\overline{z} = |z|^2 \qquad w\overline{w} = |w|^2 \qquad z\overline{w} + w\overline{z} = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\Re(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}| \leq 2\,|z||w|.$$
dove l'ultimo passaggio si ottiene o lavorando direttamente con i conti espliciti, o usando la formula per il prodotto di numeri complessi dato al paragrafo corrispondente.
La formula 5) discende dalla precedente osservando che $z = \Re z + i\Im z$ e $i\Im z = |\Im z|$ mentre la sesta è una conseguenza della disuguaglianza triangolare.

Osserviamo anche che
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.1.1}$$
e inoltre l'unico numero di modulo zero è lo zero.

Vista l'identificazione tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, per il campo dei numeri complessi c'è un'interessante interpretazione geometrica. Infatti il numero complesso $z = a + ib$ può essere identificato con il punto di coordinate (a, b) e la rappresentazione grafica avviene nel cosiddetto *piano complesso* o piano di Gauss; l'asse x è identificato con l'asse reale, l'asse y con l'asse immaginario e per sommare due numeri complessi vale la regola del parallelogramma (come con i vettori).



In quest'ottica, anche il modulo di un numero complesso ha anche un'interessante *interpretazione geometrica*. Infatti $|z|$ rappresenta la distanza del numero complesso (o del punto nel piano di Gauss) dall'origine. In particolare $|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* di due numeri complessi. Quindi le proprietà 5) e 6) di cui sopra si interpretano geometricamente con il ben noto fatto che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Osserviamo invece che $|z - z_0| = r$ rappresenta nel piano di Gauss una circonferenza di centro il numero complesso z_0 e raggio r; quindi $|z - z_0| < r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r (privato della circonferenza che è il suo bordo) mentre $|z - z_0| \leq r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r, bordo incluso. Pertanto in quest'ottica, i numeri complessi di modulo r sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e raggio r.
Inoltre, se $a > 0$ è un numero reale, allora il numero complesso az si ottiene dal numero z con un'omotetia di ragione a e centro l'origine nel piano di Gauss.
Infine $|z - z_0| = |z - z_1|$ si interpreta come il luogo dei punti del piano *equidistanti* dai punti z_0 e z_1: si tratta pertanto dell'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1. Di conseguenza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_0 e viceversa $|z - z_0| > |z - z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_1. Se la disuguaglianza è stretta allora l'asse non è compreso, se larga l'asse è compreso.

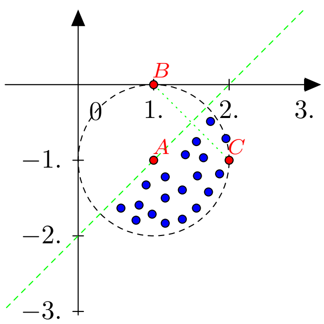
❒ **Esempio 2.1.10.** *Descrivere cosa rappresenta il luogo dei punti del piano di Gauss che soddisfano le seguenti disuguaglianze*

$$|z - 1| > |z - 2 + i| \qquad \text{e} \qquad |z - 1 + i| < 1.$$

Possiamo riscrivere

$$|z - 1| > |z - 2 + i| = |z - 1| > |z - (2 - i)|.$$

In questo modo, per quanto detto sopra, tale disuguaglianza rappresenta il semipiano generato dall'asse del segmento che congiunge $z = 1$ e $z = 2 - i$ (asse escluso) e che contiene il punto $z = 2 - i$. Tale zona del piano di Gauss deve essere intersecata con $|z - 1 + i| < 1$ che rappresenta il cerchio (privato del bordo) di centro $z = 1 - i$ e raggio 1. Osservando che l'asse del segmento che congiunge $z = 1$ e $z = 2 - i$ passa anche per il centro del cerchio, la zona interessata rappresenta un semicerchio (privato dei bordi; nel disegno è rappresentato dalla zona punteggiata di blu).



❒ **Osservazione 2.1.11.** Si noti che $\mathbb{C}$ con le operazioni introdotte prima è un campo, ma non è un campo ordinato. Infatti ricordando le proprietà introdotte nella Sezione dove si sono trattati i numeri reali, è possibile far vedere che non si può introdurre una relazione d'ordine tale che valga la proprietà **R3**. Infatti, se così fosse, si arriverebbe a una contraddizione: basta considerare il fatto che $a^2 \geq 0$ per ogni a reale, mentre nel campo complesso si ha $i^2 = -1$.

2.2. Equazioni e sistemi in $\mathbb{C}$

Osserviamo che il numero complesso 0 ha parte reale e parte immaginaria uguali a 0: questo ha come conseguenza il fatto che se due numeri complessi sono uguali, allora la loro differenza (che è zero) ha parte reale e parte immaginaria zero, ma la parte reale della differenza è la differenza delle parti reali, quindi queste devono essere uguali e lo stesso le parti immaginarie. `Dunque un'equazione complessa dà origine, prendendo separatamente le parti reali e immaginarie, a due equazioni reali.` Vedremo qui alcuni esempi, altri saranno disponibili più avanti, dopo aver introdotto il concetto di radice di un numero complesso.
Il procedimento si può complicare notevolmente nel caso della risoluzione di sistemi di equazioni in $\mathbb{C}$, spesso necessitando di tecniche che dipendono dal singolo caso in esame.

❒ **Esempio 2.2.1.** *Risolvere l'equazione per $z \in \mathbb{C}$*

$$(2z - \overline{z} + 3i)\Im z = 1 + 6i.$$

Ponendo $z = a + ib$ si ha

$$(2(a + ib) - (a - ib) + 3i)b = 1 + 6i$$

che equivale a

$$(a + 3ib + 3i)b = 1 + 6i.$$

A questo punto, separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le due equazioni (attenzione: $a, b \in \mathbb{R}$!!!)

$$\begin{cases} ab = 1 \\ 3b^2 + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ b^2 + b - 2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si legge $b = 1$ o $b = -2$ che inserite nella prima danno rispettivamente $a = 1$ e $a = -1/2$. Quindi l'equazione data ha due soluzioni in campo complesso che sono

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - 2i.$$

❒ **Esempio 2.2.2.** *Trovare le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema*

$$\begin{cases} z\overline{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$

Prima di tutto osserviamo che $z \neq 0$, altrimenti si avrebbe l'assurdo $0 = i$. Quindi passando ai coniugati nella seconda riga del sistema e ricordando le proprietà del coniugio, si ottiene

$$\overline{|z|^2 w + z} = \overline{|z|^2}\,\overline{w} + \overline{z} = |z|^2\,\overline{w} + \overline{z} = 1$$

visto che $|z|^2$ è un numero reale. Sostituendo dalla prima equazione (ok, visto che abbiamo visto che $z \neq 0$)

$$|z|^2\,\frac{i}{z} + \overline{z} = 1.$$

A questo punto, so che $|z|^2 = z\,\overline{z}$ quindi

$$\frac{z\overline{z}i}{z} + \overline{z} = 1$$

da cui

$$\overline{z}i + \overline{z} = 1.$$

A questo punto poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$ e quindi l'equazione da risolvere diventa

$$(a - ib)(i + 1) = 1$$

da cui

$$ai + a + b - ib = 1.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Quindi $a = b = \frac{1}{2}$ da cui

$$z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{i+1}{2}, \qquad \overline{w} = \frac{i}{z} = \frac{2i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i+2}{2} = i + 1, \qquad w = 1 - i.$$

Per curiosità, facciamo la prova per verificare che effettivamente la soluzione trovata soddisfa il sistema di partenza. Si ha

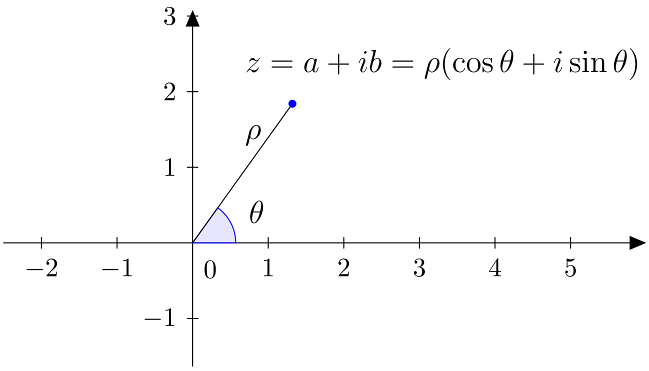
$$z\,\overline{w} = \frac{1+i}{2}(i+1) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1) + 2i) = i$$

e inoltre

$$|z|^2 w + z = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)(1 - i) + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1 - i + 1 + i) = 1.$$

2.3. Forma trigonometrica dei numeri complessi

Com'è noto dalla geometria analitica, per individuare un punto nel piano cartesiano si possono usare sia le coordinate cartesiane che le coordinate polari. In tal caso un punto nel piano viene individuato dalla coppia (ρ, θ) dove ρ è il raggio e θ è l'angolo polare, cioè l'angolo che la semiretta che coingiunge il punto $z \neq 0$ con l'origine forma con la direzione positiva dell'asse delle x, individuato a meno di multipli di 2π e misurato in radianti, con le solite convenzioni di verso.
Nel caso dei numeri complessi, il raggio polare coincide con il MODULO di z mentre si indica con $\arg(z)$ L'ARGOMENTO di z uno degli angoli θ, definito a meno di multipli di 2π. Tra tutti i valori possibili di $\arg z$, uno solo è compreso nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e viene di solito indicato con $\operatorname{argmin} z$. Quando chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $\arg z$ al posto di $\operatorname{argmin} z$.



Dalle classiche relazioni di trigonometria si ha

$$\Re z = |z| \cos(\arg z)$$
$$\Im z = |z| \sin(\arg z)$$

o anche, se $z \neq 0$

$$\cos(\arg z) = \frac{\Re z}{|z|} \qquad \sin(\arg z) = \frac{\Im z}{|z|}.$$

In particolare, se $z \neq 0$ non è immaginario (non ha parte reale uguale a zero)

$$\tan\theta = \frac{\Im z}{\Re z},$$

da cui si deduce

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right)(+2k\pi) & \Re z > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right)(+2k\pi) & \Re z < 0 \\ \frac{\pi}{2}(+2k\pi) & \Re z = 0 \ \ \Im z > 0 \\ \frac{3}{2}\pi(+2k\pi) & \Re z = 0 \ \ \Im z < 0 \end{cases}$$

❐ **Definizione 2.3.1.** Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in FORMA TRIGONOMETRICA se sono evidenziati i valori di $\rho \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

❐ **Esempio 2.3.2.** *Se* $z = 1 + i$ *allora* $|z| = \sqrt{2}$ *e* $\text{arg}z = \dfrac{\pi}{4}$ *pertanto la forma trigonometrica di* z *è*

$$z = \sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}].$$

Se $z = -1$ *allora* $\text{arg}z = \pi$ *e la forma trigonometrica di* z *risulta*

$$z = 1\cos(\pi + i\sin\pi).$$

L'argomento di $\overline{z}$ è l'opposto dell'argomento di z, quindi se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $\overline{z} = \rho\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$.

2.4. Potenze di numeri complessi

❐ **Proposizione 2.4.1.** *Siano* $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ *e* $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *due numeri complessi di dati moduli* ρ, r *e argomenti* θ, ϕ*. Allora si ha*

$$z\,w = (\rho\,r)\,[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)]$$

e se $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}\left(\cos(\theta - \phi) + i\sin(\theta - \phi)\right).$$

La dimostrazione si basa sulle regole di base di trigonometria su seno e coseno di somme o differenze, dopo aver scritto esplicitamente il prodotto

$$zw = \rho\,r[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)].$$

Per il quoziente basta ricordare la formula (2.1.1) e applicare la formula del prodotto.

Quindi il prodotto (o il quoziente) di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto (o il quoziente) dei moduli e per argomento la somma (o la differenza) degli argomenti. La formula si può per induzione generalizzare a un numero qualsiasi di fattori, per esempio

$$z_1\,z_2\,\ldots, z_n = \rho_1\,\rho_2\,\ldots\,\rho_n\,\left(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\right).$$

❐ **Corollario 2.4.2.** (FORMULA DI DE MOIVRE) *Se* $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ *allora* $\forall n \in \mathbb{Z}$ *si ha*

$$z^n = \rho^n\,\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

❐ **Esempio 2.4.3.** *Calcolare* $(1+i)^{16}$.
Ponendo $z = (1+i)$ *si ha che* $|z| = \sqrt{2}$ *e* $\arg(z) = \pi/4$. *Da cui*

$$|(1+i)^{16}| = (\sqrt{2})^{16} = 2^8 = 256; \qquad \arg(1+i)^{16} = 16\,\frac{\pi}{4} = 4\pi.$$

Quindi si ha

$$(1+i)^{16} = 256(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) = 256.$$

❐ **Esempio 2.4.4.** *Calcolare* i^{2015}.
Si ha

$$2015 = 503 \cdot 4 + 3$$

da cui

$$i^{2015} = (i^4)^{503}\, i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

tenendo conto che $i^4 = 1$ *e* $i^3 = i \cdot i \cdot i = -i$.

❐ **Osservazione 2.4.5.** La moltiplicazione per z equivale nel piano di Gauss a una rotazione di $\arg z$ seguita da un'omotetia di ragione $|z|$.

2.5. Radici n-esime di numeri complessi

❐ **Definizione 2.5.1.** Dato un numero complesso w, diremo che z è una RADICE N-ESIMA COMPLESSA di w se risulta $z^n = w$.

❐ **Teorema 2.5.1.** *Sia* $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ *e* $n \geq 1$ *intero. Allora esistono* esattamente n *radici ennesime complesse* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ *di* w, *cioè tali che* $z_k^n = w$ *per* $k = 0, \ldots, n-1$. *Inoltre posto* $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, *si ha che* $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ *dove*

$$\begin{cases} \rho_k = r^{1/n} \\ \theta_k = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

❐ DIMOSTRAZIONE: Se z è una radice ennesima di w, allora per definizione $z^n = w$ pertanto anche $|z^n| = |w|$. Dalla formula delle potenze ennesime, sappiamo che $|z^n| = |z|^n$ pertanto $|z|^n = |w|$. Dato che quest'ultima è un'uguaglianza tra numeri reali, ne deduciamo che

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}.$$

In particolare, se $w = 0$, l'unica radice ennesima di w è zero (come detto l'unico numero di modulo 0). Se invece $w \neq 0$, scriviamo z e w in forma trigonometrica come

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

così che dalla formula di De Moivre ricaviamo

$$\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

che equivale alle due equazioni reali

$$\cos(n\theta) = \cos\phi \qquad \sin(n\theta) = \sin\phi.$$

Dunque gli angoli $n\theta$ e ϕ hanno lo stesso seno e lo stesso coseno, pertanto differiscono per un multiplo intero di 2π

$$n\theta = \phi + 2m\pi$$

da cui ricaviamo

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}.$$

Quindi possiamo porre

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\phi}{n} \\ \theta_1 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \\ \theta_2 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{4\pi}{n} \\ \vdots \\ \theta_{n-1} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

e per ogni $k = 0, \dots n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k).$$

Questi n numeri hanno argomenti diversi e compresi tra 0 e 2π, quindi sono numeri tutti distinti e abbiamo dimostrato che sono le uniche possibili radici di w. Poiché si verifica facilmente che la loro potenza $n-$esima è effettivamente w, il teorema è dimostrato.

In conclusione, se $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$, allora le sue n radici ennesime sono date dalla formula
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, \dots, n-1.$$
Dunque il simbolo $\sqrt[n]{z}$ non indica un numero complesso ma un insieme di numeri complessi, quindi la radice ennesima non è una **funzione** da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ (semmai una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{C})$). C'è pertanto una differenza significativa tra trovare le radici ennesime in campo reale e in campo complesso: per esempio in $\mathbb{R}$ si ha $\sqrt{4} = 2$ mentre in $\mathbb{C}$ si ha $\sqrt{4} = \pm 2$.

❒ **Osservazione 2.5.2.** Le radici ennesime di un numero complesso hanno un'interessante interpretazione geometrica nel piano di Gauss: infatti sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

❒ **Esempio 2.5.3.** *Scrivere le radici cubiche di $i - 1$.*

Sia $w = i - 1 = -1 + i$ di cui dobbiamo individuare le radici cubiche (quindi si tratta di 3 radici). Prima di tutto occorre scrivere w in forma trigonometrica per cui si ottiene facilmente che
$$r = |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$
inoltre
$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
da cui $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Quindi la forma trigonometrica del numero complesso w è
$$w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

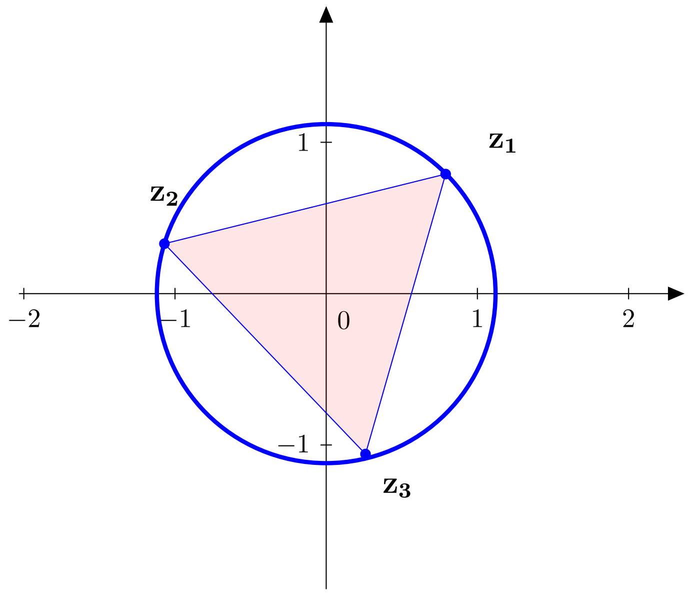
A questo punto, se z è una radice cubica allora $|z| = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$, mentre se indichiamo con θ l'argomento di z si ottiene
$$\theta = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Allora gli argomenti delle tre radici cubiche sono esattamente
$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\pi}{4}\\ \theta_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi\\ \theta_3 &= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi.\end{aligned}$$

Quindi le tre radici cubiche sono

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$
$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

Le tre radici cubiche stanno ai vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$, come mostrato in figura.



❒ **Osservazione 2.5.4.** Andiamo a risolvere la generica equazione di secondo grado a coefficienti reali: $ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$. Sappiamo che $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e questo (a seconda del segno del discriminante) può dare origine a due soluzioni oppure una sola (con molteplicità 2) oppure nessuna soluzione. Se consideriamo invece le equazioni di secondo grado in campo complesso, cioè andiamo a risolvere l'equazione $az^2+bz+c=0$ con $a,b,c,\in\mathbb{C}$ e $a\neq 0$ allora formalmente si ha sempre $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ con la consueta formula, ma il significato qui è profondamente diverso: qui la radice esiste sempre perché siamo in campo complesso, quindi in $\mathbb{C}$ un'equazione di secondo grado ha sempre due soluzioni, anche se il discriminante viene negativo.

❒ **Esempio 2.5.5.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2-2z+2=0$.*
Si ha

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

quindi l'equazione data ha due soluzioni $z_1=1+i$ e $z_2=1-i$.

2.6. Teorema fondamentale dell'algebra. Forma esponenziale dei numeri complessi

Gli esempi precedenti non sono casi isolati: vale infatti il seguente importantissimo teorema.

❒ **Teorema 2.6.1.** TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0, \qquad a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi ha esattamente n *radici in* $\mathbb{C}$*, ognuna contata con la sua molteplicità.*

La somma delle molteplicità delle radici di un polinomio complesso è pari al grado del polinomio. Questo non vale in $\mathbb{R}$: ad esempio $x^2 + 1$ ha grado 2 ma non ha soluzioni reali.

Concludiamo il capitolo con un'ulteriore notazione riguardanti i numeri complessi. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Abbiamo dunque definito una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che risulta periodica di periodo 2π. In particolare dal fatto che $e^{ir} = e^{is}$ non segue che $r = s$ ma $r = s + 2k\pi$. Allora il numero complesso di modulo ρ e argomento θ può essere scritto in forma abbreviata come

$$\rho e^{i\theta}.$$

Questa notazione prende il nome di NOTAZIONE ESPONENZIALE e ha ragione di essere nel fatto che la formula del prodotto e quella delle potenze danno rispettivamente

$$\rho e^{i\theta}\, r e^{i\phi} = \rho\, r\, e^{i(\theta+\phi)} \qquad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

proprio come si avrebbe usando formalmente le proprietà dell'esponenziale. Attenzione però con le radici: da $\rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi}$ non segue $\theta = \dfrac{\phi}{n}$ ma solo $\theta = \dfrac{(\phi + 2k\pi)}{n}$.

❒ **Esempio 2.6.2.** *Si ha*

$$e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2i\pi} = 1 \qquad 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}.$$

2.7. Esempi riepilogativi

❒ **Esercizio 2.7.1.** *Calcolate parte reale, parte immaginaria e il coniugato del numero* $i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)}$

➻ **R.** Si ha

$$i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)} = -2-3i+(i-1)(3-4i) = -2-3i+3i+4-3+4i = -1+4i$$

da cui

$$\Re(z) = -1, \qquad \Im(z) = 4, \qquad \overline{z} = -1-4i.$$

N.B. $\Im(z) = 4 \neq 4i$!!!

❒ **Esercizio 2.7.2.** *Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi e scrivere z nella forma trigonometrica*

$$1) z = -1+i$$
$$2) z = \sqrt{3}i+1$$
$$3) z = \sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

➻ **R.** 1) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$ da cui

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

2) $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ da cui

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

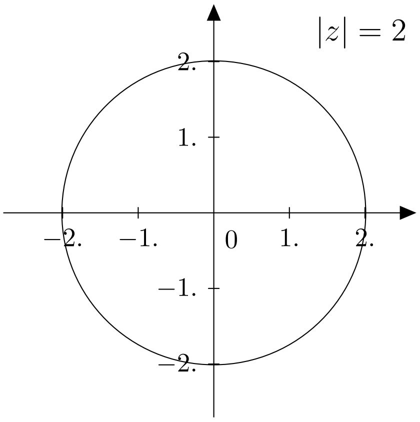
3) $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$ da cui

$$z = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

❒ **Esercizio 2.7.3.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| = 2$$

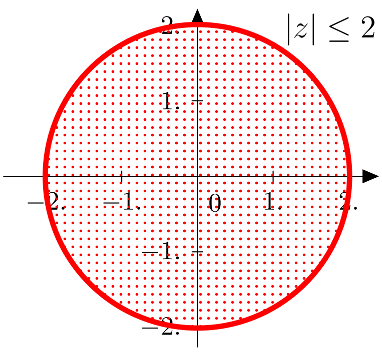
➻ **R.** Si tratta di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2



❐ **Esercizio 2.7.4.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti* z *tali che*

$$|z| \leq 2.$$

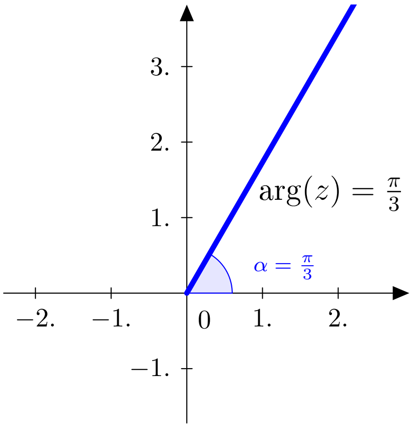
➼ **R.** Si tratta di un cerchio di centro l'origine e raggio 2.



❐ **Esercizio 2.7.5.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti* z *tali che*

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3}.$$

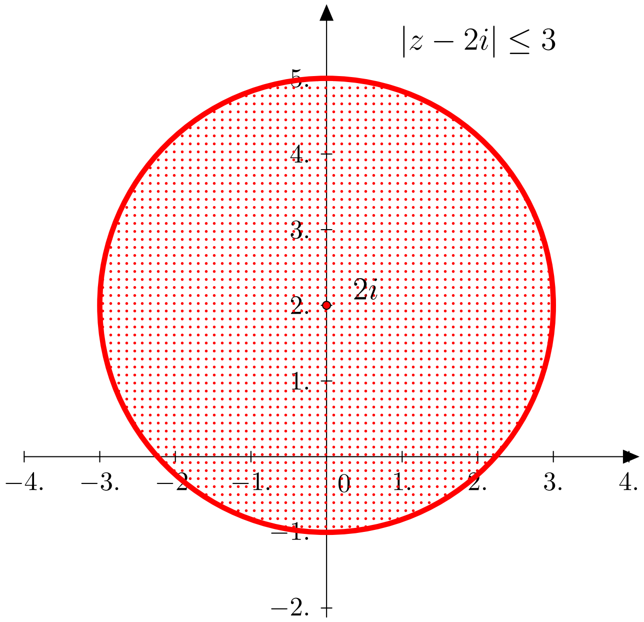
➼ **R.** Si tratta di una semiretta uscente dall'origine che forma con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo di $\pi/3$.



❐ **Esercizio 2.7.6.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z - 2i| \leq 3.$$

R. Si tratta di un cerchio centrato in $2i$ e di raggio 3.



❐ **Esercizio 2.7.7.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| < 1 \text{ e } |z - 1 - i| < 1$$

R. Intersezione tra cerchio di centro l'origine e raggio 1 e cerchio di centro $z_1 = 1 + i$ e raggio 1 (bordi esclusi).

❐ **Esercizio 2.7.8.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z-i| = |z-1| \ \text{ e } \ |z-1-i| \leq 1$$

➼ **R.** Intersezione tra l'asse del segmento che congiunge i punti $z = i$ e $z = 1$ e il cerchio di centro $z_1 = 1+i$ e raggio 1. Si tratta del segmento (bordi inclusi) che si ottiene intersecando il cerchio pieno $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ con la retta $y = x$.

❐ **Esercizio 2.7.9.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| = 1 \ \text{ e } \ \Re z < \Im z$$

➼ **R.** Intersezione della circonferenza di centro -1 e raggio 1 e il semipiano delimitato dalla retta $y = x$ contenente il secondo quadrante. Si tratta di $3/4$ di una circonferenza.

❐ **Esercizio 2.7.10.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| = |z+i|$$

➼ **R.** Asse del segmento che congiunge i punti $z = -1$ e $z = -i$.

❐ **Esercizio 2.7.11.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$z^2 + z\,\overline{z} - 4 + 4i = 0$$

➼ **R.** Se $z = a + ib$ allora

$$(a+ib)^2 + a^2 + b^2 - 4 + 4i = 0$$

da cui

$$a^2 = 2 \qquad ab = -2$$

che dà come soluzioni $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ e $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

❒ **Esercizio 2.7.12.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z + \frac{1+i}{z} = 2 + i$$

➼ **R.** $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$.

❒ **Esercizio 2.7.13.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(2z + \overline{z} - 3)\Re z = 6 - i$$

➼ **R.** $z_1 = 2 - \frac{1}{2}i$ e $z_2 = -1 + i$

❒ **Esercizio 2.7.14.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$|z + 2|\, z = -i$$

➼ **R.** $z = \sqrt{\sqrt{5} - 2}i$

❒ **Esercizio 2.7.15.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

➼ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right\}^3 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) = -\frac{i}{8} \end{aligned}$$

A questo punto le tre soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

❒ **Esercizio 2.7.16.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^4$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = w$.

➻ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^4 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right\}^4 = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

A questo punto le quattro soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = -z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$z_4 = -z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

❒ **Esercizio 2.7.17.** *Disegnare nel piano di Gauss i seguenti insiemi:*

(a) $\{z + i : z \in E\}$
(b) $\{z - 2i : z \in E\}$
(c) $\{-iz : z \in E\}$
(d) $\{iz : z \in E\}$
(e) $\{-z : z \in E\}$
(f) $\{-z + i : z \in E\}$
(g) $\{z^2 : z \in E\}$
(h) $\{z^3 : z \in E\}$
(i) $\{\sqrt{z} : z \in E\}$

dove E *di volta in volta è l'insieme*
1) $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le |z| \le 1,\ \ 0 \le \arg(z) \le \pi\}$
2) $E = \{z \in \mathbb{C} : 2 \le |z| \le 3,\ \ \frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \frac{3}{2}\pi\}$
3) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \ 0 \le \arg(z) \le \pi\}$
4) $E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \pi\}$

R.

CAPITOLO 3

Proprietà globali delle funzioni continue su un intervallo

3.1. Teorema di esistenza degli zeri

In questa sezione presentiamo alcuni tra i risultati più significativi relativi alle funzioni continue. Fino a questo momento abbiamo valutato la continuità di una funzione in un punto. In questo capitolo ci occupiamo del problema di studiare la continuità di una funzione reale di variabile reale in un intervallo, cercando di studiare le conseguenze che questa ipotesi porta. La continuità su un intervallo formalizza il concetto geometrico di "tracciare il grafico senza staccare la penna dal foglio". Naturalmente tutte le proprietà che andremo ad enunciare si basano sull'assioma di continuità dei numeri reali, per cui sono fondamentalmente legate al fatto di studiare la funzione su un intervallo di $\mathbb{R}$ e perderebbero la loro validità se venisse considerato un intervallo di $\mathbb{Q}$ (vedi Esempio 3.1.4).

Indichieremo con I un generico intervallo, limitato o illimitato, aperto o chiuso. Per indicare un intervallo chiuso e limitato useremo il simbolo $[a, b]$. Infine indicheremo con il simbolo $\mathcal{C}^0([a, b])$ le funzioni continue definite sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.

❒ **Teorema 3.1.1.** (TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI) *Se $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ e $f(a)$ ha segno diverso da $f(b)$ allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

❒ DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che dall'ipotesi sul segno di $f(a)$ e $f(b)$ segue che

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Procediamo seguendo il cosiddetto METODO DI BISEZIONE. Poniamo

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Dato che $[f(m_0)]^2 \geq 0$, allora anche $[f(a_0)f(m_0)]\,[f(m_0)f(b_0)] \leq 0$. Allora i due prodotti tra parentesi quadre non possono essere entrambi positivi: se il primo è minore o uguale a zero poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$, mentre se il primo è positivo poniamo $a_1 = m_0$ e $b_1 = b_0$. In ogni caso abbiamo

$$\begin{cases} a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2} \\ f(a_0)f(b_0) \leq 0 \qquad f(a_1)f(b_1) \leq 0. \end{cases}$$

Poniamo

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Procedendo per induzione in maniera del tutto simile alla dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass si trova che esistono due successioni monotone $\{a_n\}_n$ debolmente crescente e $\{b_n\}_n$ debolmente decrescente, che tendono allo stesso limite ξ e tali che, $\forall n$

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0. \tag{3.1.1}$$

Dato che $a \leq a_n \leq b$, passando al limite abbiamo anche che $\xi \in [a, b]$, dunque f è continua nel punto ξ. Poiché $a_n \to \xi$ e $b_n \to \xi$, passando al limite in (3.1.1) si ottiene, per la continuità di f

$$[f(\xi)]^2 \leq 0,$$

cioè $f(\xi) = 0$.

Osservazione 3.1.1. Se una delle ipotesi del teorema viene a mancare, allora la tesi non sussiste più, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 3.1.2. *La funzione $f(x) = 1/x$ è ben definita e continua nell'insieme $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e $f(-1)$ ha segno opposto a $f(1)$, però f non si annulla mai. Per altro l'insieme $[-1, 1] \setminus \{0\}$ non è un intervallo (e non è nemmeno chiuso).*

Esempio 3.1.3. *Sull'intervallo $[-1, 1]$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

assume valori di segno opposto agli estremi ma non si annulla mai. Peraltro la funzione non è continua in 0.

❒ **Esempio 3.1.4.** *Sull'intervallo di numeri razionali* $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ *la funzione continua* $f(x) = x - \sqrt{2}$ *assume valori di segno opposto agli estremi, ma non si annulla mai. Questo dimostra che il teorema precedente si basa sulle proprietà di* $\mathbb{R}$.

❒ **Osservazione 3.1.5.** Il teorema precedente assicura l'esistenza di almeno un punto dove f si annulla ma non è necessariamente unico: ad esempio la funzione $\cos x$ verifica sull'intervallo $[0, 3\pi]$ tutte le ipotesi del teorema e si annulla 3 volte. Per avere l'unicità dobbiamo aggiungere l'ipotesi che f sia strettamente monotona.

❒ **Osservazione 3.1.6.** Arrestando il procedimento dopo n passi si può assumere che a_n o b_n come valore approssimato dello zero di ℓ. L'errore non è superiore a

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Quindi la dimostrazione del precedente teorema fornisce anche un metodo per appprossimare le soluzioni di un'equazione come mostra il prossimo esempio.

❒ **Esempio 3.1.7.** *Determinare una soluzione dell'equazione* $\sin x = 3x - 3$ *con una precisione superiore a* $1/2$. *Questo significa trovare un numero che dista meno di* $1/2$ *da una soluzione dell'equazione, ma le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione continua* $f(x) = \sin x - 3x + 3$. *Osserviamo che* $f(1) = \sin 1 > 0$ *e* $f(2) = \sin 2 - 3 < 0$ *dunque* f *si annulla in un punto* $\xi \in (1,2)$: *questo punto* ξ *dista meno di* $1/2$ *da* $x = 3/2$, *quindi* $x = 3/2$ *è una soluzione approssimata dell'equazione con un errore inferiore a* $1/2$.

3.2. Conseguenze del teorema di esistenza degli zeri

❒ **Osservazione 3.2.1.** Come conseguenza del precedente teorema, non è difficile dimostrare che se $f \in \mathcal{C}^0(I)$ assume valori di segno diverso, si annulla almeno una volta in I.

Applicando il Teorema 3.1.1 alla funzione $f(x) - k$, si ottiene la seguente proposizione.

❒ **Proposizione 3.2.2.** *Se* $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *e* $f(a) \le k \le f(b)$, *allora esiste un punto* $\xi \in [a,b]$ *tale che* $f(\xi) = k$.

Questa proposizione permette di dimostrare il prossimo fondamentale risultato che si può riassumere dicendo che l'immagine di un intervallo è un intervallo o anche che una funzione continua su un intervallo non può avere una finestra sull'immagine.

❐ **Teorema 3.2.1.** (teorema dei valori intermedi) *Se $f \in \mathcal{C}^0(I)$ allora la sua immagine $f(I)$ è un intervallo che ha per estremi* $\inf f$ *e* $\sup f$.

Osserviamo che nessuno ci dice che I è un intervallo aperto o chiuso, così pure l'immagine, quindi quello che siamo stati in grado di provare è che $(\inf f, \sup f) \subseteq f(I) \subseteq [\inf f, \sup f]$, cioè gli estremi dell'intervallo $\inf f, \sup f$ possono essere compresi o esclusi in $f(I)$. Ad esempio l'immagine della funzione e^x è $(0, +\infty)$, l'immagine della funzione $\sqrt{x}$ è $[0, \infty)$.

❐ **Esempio 3.2.3.** *La funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$ non soddisfa la tesi del teorema dei valori intermedi. Infatti ad esempio $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ ma non è vero che tutti i valori tra 1 e 4 sono raggiunti; ad esempio non c'è nessuna controimmagine dei valori 2 o 3 (ci sarebbe $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ rispettivamente ma non stanno in $\mathbb{Q}$). Quindi il teorema dei valori intermedi è vero per le funzioni continue definite su $\mathbb{R}$ grazie all'assioma di continuità verificata dall'insieme dei numeri reali*

3.3. Continuità e invertibilità

Sappiamo già che una funzione definita su un intervallo e strettamente monotona è invertibile (con inversa monotona). Sappiamo anche che il viceversa in generale non è vero (cioè esistono funzioni invertibili su un intervallo che non sono motonone), basta prendere ad esempio $f(x) = x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 1/x + 1$ per $x \in [1, 2]$.

Tuttavia se si aggiunge l'ipotesi della continuità, il teorema si inverte. Più precisamente.

❐ **Teorema 3.3.1.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, una funzione continua su I. Allora f è invertibile in I se e soltanto se è strettamente monotona.*

❐ dimostrazione. In generale sappiamo che per invertire una funzione occorre che sia iniettiva e surgettiva. Noi studiamo il caso in cui una funzione è continua e definita su un intervallo I: in tal caso sappiamo che la sua immagine è un intervallo $J = f(I)$. Se riusciamo a dimostrare che f è iniettiva se e soltanto se è strettamente monotona allora in tal caso esiste la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ che è surgettiva e monotona dello stesso tipo di f. Quindi quello che ci proponiamo di provare è che f è iniettiva se e soltanto se è strettamente monotona.

Sappiamo già che se f è strettamente monotona allora è iniettiva, non importa se sia continua né dove sia definita. Dimostriamo per assurdo l'altra implicazione.
Negare che f sia strettamente monotona significa assumere che non sia strettamente crescente e che non sia strettamente decrescente, cioè

$$\exists x_0, y_0 \in I : \ [x_0 < y_0 \quad \wedge \quad f(x_0) \geq f(y_0)]$$
$$\exists x_1, y_1 \in I : \ [x_1 < y_1 \quad \wedge \quad f(x_1) \leq f(y_1)].$$

Dunque la differenza tra il valore di f all'estremo destro e quella all'estremo sinistro dell'intervallo $[x_0, y_0]$ è minore o uguale a zero, quella relativa all'intervallo $[x_1, y_1]$ è maggiore o uguale a zero.
Definiamo due funzioni sull'intervallo $[0, 1]$ ponendo

$$x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \qquad y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0).$$

Si tratta chiaramente di funzioni continue. L'immagine della prima è l'intervallo di estremi $[x_0, x_1]$ quindi tutta contenuta in I e analogamente l'immagine della seconda è l'intervallo di estremi $[y_0, y_1]$ quindi di nuovo tutta contenuta in I. Osserviamo poi che per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $x(t) < y(t)$, in quanto

$$y(t) - x(t) = (1 - t)(y_0 - x_0) + t(y_1 - x_1) > 0 \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Dunque $x(t)$ e $y(t)$ sono l'estremo sinistro e l'estremo destro di un intervallo $[x(t), y(t)]$ sempre contenuto in I e mai ridotto a un punto (perché $y(t) > x(t)$ con disuguaglianza stretta). Per quanto detto allora la funzione

$$F(t) = f(y(t)) - f(x(t))$$

è definita su $[0, 1]$ ed è continua perché composizione di funzioni continue. Inoltre per l'ipotesi fatta

$$F(0) = f(y_0) - f(x_0) \leq 0 \qquad F(1) = f(y_1) - f(x_1) \geq 0.$$

Possiamo applicare ad F il teorema di esistenza degli zeri e dedurre l'esistenza di un punto $\bar{t}$ in cui $F(\bar{t}) = 0$. Ma allora

$$0 = F(\bar{t}) = f(y(\bar{t})) - f(x(\bar{t})) \Rightarrow f(y(\bar{t})) = f(x(\bar{t}))$$

e allora f non risulta iniettiva perché avevamo detto che $x(t) < y(t)$ quindi anche $x(\bar{t}) \neq y(\bar{t})$.

Concludiamo con il seguente importantissimo risultato.

Teorema 3.3.2. *Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha inversa continua.*

Questo fatto completa la dimostrazione del teorema di continuità delle funzioni elementari, per cui visto che le funzioni esponenziali sono continue allora lo sono anche le funzioni logaritmiche; visto che le funzioni trigonometriche $\sin x, \cos x, \tan x$ sono continue, lo sono anche le loro inverse $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$.

3.4. Teorema di Weierstrass

Il prossimo risultato invece è di fondamentale importanza in particolar modo per i problemi di ottimizzazione.

Teorema 3.4.1. (Teorema di Weierstrass) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (quindi le ipotesi del teorema sono: funzione continua su un intervallo chiuso e limitato). Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$ ossia esistono x_m e x_M appartenenti ad $[a, b]$ tali che*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione. Dimostriamo che f ha massimo, poi basterà applicare il teorema a $-f$ e ricordare che $\sup A = -\inf(-A)$ e $\inf A = -\sup(-A)$. Sia dunque $M = \sup f$ quindi $M > -\infty$. Ricordiamo che l'estremo superiore per definizione è il minimo dei maggioranti, mentre il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme. Quindi per dimostrare che $M = \max f$ occorre trovare un elemento $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = M$ (l'estremo superiore viene raggiunto da qualche elemento appartenente all'insieme delle immagini di f, perché stiamo facendo il sup di f, cioè stiamo prendendo l'estremo superiore delle immagini di f).
Se $M \in \mathbb{R}$ allora poniamo $y_n = M - \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mentre se $M = +\infty$ poniamo $y_n = n$. In ogni caso $\{y_n\}_n$ è una successione che cresce a M. Dato che $y_n < M = \sup f$, per definizione di estremo superiore esiste qualche valore di f (ovvero qualche punto dell'immagine di f) maggiore di y_n: indichiamo tale valore con $f(x_n)$. Abbiamo dunque per ogni n

$$y_n < f(x_n) \leq M \qquad a < x_n \leq b.$$

Per il Teorema dei Carabinieri essendo $M = \lim_{n\to\infty} y_n$ si ha $f(x_n) \to M$. Applicando alla successione $\{x_n\}_n$ il Teorema di Bolzano-Weierstrass, (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{[a, b] \text{ è limitato}}$), ne possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $x_{k_n} \to x_0$. Dato che $a \leq x_{k_n} \leq b$ per ogni n, anche $x_0 \in [a, b]$ (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{[a, b] \text{ è chiuso}}$). Allora dal fatto che $x_{k_n} \to x_0$ otteniamo che $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{f \text{ è continua}}$). Ma $\{f(x_{k_n}\}_n$ è un'estratta di $\{f(x_n)\}_n$, quindi $f(x_{k_n}) \to M$ e per l'unicità del limite abbiamo trovato un punto x_0 in cui $f(x_0) = M = \sup f$, cioè l'estremo superiore è anche il massimo (dell'insieme delle immagini di f su $[a, b]$).

Corollario 3.4.1. (teorema di limitatezza) *Se $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ allora f è limitata.*

Osservazione 3.4.2. *Ovviamente il viceversa non vale, controesempio*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.4.3. Osserviamo che le ipotesi del teorema sono tutte necessarie, nel senso che se si rimuove anche una sola delle ipotesi il teorema fallisce e si possono trovare opportuni controesempi. Infatti la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo aperto $(0, 1)$ non ha massimo né minimo (sarebbero 0 e 1 che sono rispettivamente estremo inferiore e superiore ma non sono raggiunti, non essendo f definita in quei punti). Per altro la funzione è continua su $(0, 1)$ però $(0, 1)$ è limitato ma non chiuso.
D'altra parte, la funzione $f(x) = x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ non ha ovviamente né massimo né minimo; per altro essa è continua ma l'insieme di definizione non è limitato.
Infine la funzione $f(x) = x$ per $x \in (0, 1)$ e $f(x) = 1/2$ per $x = 0$ e $x = 1$ è la funzione del primo esempio definita anche negli estremi dell'intervallo; per cui ora è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato ma non è continua. Infatti non ha massimo e minimo (di nuovo 0 è estremo inferiore e 1 estremo superiore ma non sono raggiunti).

CAPITOLO 4

Applicazioni del calcolo differenziale: problemi di ottimizzazione

4.1. Massimi e minimi. Teorema di Fermat

Uno degli usi più proficui del calcolo differenziale è la ricerca di massimi e minimi per funzioni reali di una variabile reale. Questo prende il nome di OTTIMIZZAZIONE.

Richiamiamo la definizione di massimo e minimo locale e globale.

Definizione 4.1.1. Si dice che M è MASSIMO di f in $[a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ è PUNTO DI MASSIMO per f in $[a,b]$ se $f(x_M) = M \geq f(x)$, per ogni $x \in [a,b]$.

Analogamente si dice che m è MINIMO di f in $[a,b]$ e $x_m \in [a,b]$ è PUNTO DI MINIMO per f in $[a,b]$ se $f(x_m) = m \leq f(x)$, per ogni $x \in [a,b]$.

Si dice che M è MASSIMO LOCALE per f e che $x_M \in [a,b]$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_M - \delta, x_M + \delta)$ tale che $M = f(x_M) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a,b]$.

Analogamente si dice che m è MINIMO LOCALE per f e che $x_m \in [a,b]$ è PUNTO DI MINIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_m - \delta, x_m + \delta)$ tale che $m = f(x_m) \leq f(x)$ per ogni $x \in (x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a,b]$.

Si dice infine che M è MASSIMO LOCALE STRETTO per f e che $x_M \in [a,b]$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE STRETTO per f se esiste un intervallo $(x_M - \delta, x_M + \delta)$ tale che $M = f(x_M) > f(x)$ per ogni $x \in ((x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a,b]) \setminus \{x_M\}$.

Analogamente si dice che m è MINIMO LOCALE STRETTO per f e che $x_m \in [a,b]$ è PUNTO DI MINIMO LOCALE STRETTO per f se esiste un intervallo $(x_m - \delta, x_m + \delta)$ tale che $m = f(x_m) < f(x)$ per ogni $x \in ((x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a,b]) \setminus \{x_m\}$.

❒ **Definizione 4.1.2.** *I punti di massimo e/o minimo (locale, stretto e/o globale) si dicono* PUNTI DI ESTREMO.

Premettiamo alcuni esempi fondamentali a cui faranno seguito alcune osservazioni.

❒ **Esempio 4.1.3.** *Sia $f(x) = x^2$. Essa ha un minimo (globale perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) in $x = 0$; per altro $f'(x) = 2x$ che si annulla per $x = 0$. Questa funzione non ha massimo globale, però la sua restrizione a $[-1, 2]$ ha un massimo locale in $x = -1$ e un massimo globale in $x = 2$.*

❒ **Esempio 4.1.4.** *Sia $f(x) = |x|$. Essa ha un minimo (globale perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) in $x = 0$; per altro $x = 0$ è un punto di non derivabilità per f.*

❒ **Esempio 4.1.5.** *Sia $f(x) = x^3$. La sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla per $x = 0$ ma esso non è un punto di massimo né di minimo (né locale né globale).*

❒ **Esempio 4.1.6.** *Sia $f(x) = \sin x$. Essa è limitata e ammette massimo e minimo. Il massimo è 1 ed è raggiunto dai punti $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ che sono tutti punti di massimo globale. Il minimo è -1 ed è raggiunto dai punti $x = 3/2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che sono tutti punti di minimo globale.*

❒ **Esempio 4.1.7.** *Sia $f(x) = \arctan x$. Anche questa funzione è limitata, ma non ammette massimo e minimo (infatti $\pi/2$ è l'estremo superiore e $-\pi/2$ è l'estremo inferiore, ma non vengono raggiunti da alcun punto nel dominio).*

❒ **Osservazione 4.1.8.** Si possono fare le seguenti osservazioni:
1) il massimo o il minimo se esistono sono unici; i punti di massimo o minimo NON sono necessariamente unici. I massimi o minimi locali possono anche essere più di uno.
2) Ogni estremo globale è anche locale.
3) **Nei punti di estremo locale o globale la funzione può <u>non</u> essere <u>derivabile</u> e può persino essere <u>discontinua</u>. I punti di estremo possono anche trovarsi nei <u>bordi</u> dell'intervallo.**
4) Una funzione limitata non è detto che ammetta massimo o minimo (globale).

L'obiettivo di questo capitolo è quello di trovare delle condizioni che ci garantiscano l'esistenza di estremi locali o globali.
La prima cosa che si osserva è che come detto i punti di estremo possono anche trovarsi in punti in cui la funzione non è derivabile (o non è nemmeno continua), ma se una funzione f è derivabile in un certo punto x_0 e ammette in x_0 un punto di massimo o minimo locale (x_0 diverso dagli estremi dell'intervallo) allora la derivata in quel punto si annulla e la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale. Si ha dunque il seguente teorema.

❐ **Teorema 4.1.1.** (Fermat) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se x è punto di estremo locale allora $f'(x_0) = 0$.*

❐ dimostrazione. Sostituendo eventualmente f con $-f$ possiamo supporre che x_0 sia di minimo locale. Allora esiste un opportuno intorno U di x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in U.$$

Quindi se $x < x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ mentre $x > x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ da cui si ottiene $f'_-(x_0) \leq 0$ e $f'_+(x_0) \geq 0$. Dal fatto che f è derivabile in x_0 segue che $f'(x_0) = 0$.

❐ **Definizione 4.1.9.** I punti in cui f' si annulla si dicono punti stazionari per f.

❐ **Osservazione 4.1.10.** 1) Il Teorema di Fermat non si può invertire, cioè se $f'(x_0) = 0$ non è detto che x_0 sia punto di estremo locale. Controesempio $f(x) = x^3$.
2) Il Teorema di Fermat ci dice che se f è derivabile in x_0 e x_0 è punto di estremo locale appartenente all'intervallo aperto (a, b) allora è stazionario. Tuttavia può anche accadere che x_0 sia punto di estremo locale senza che f sia derivabile, ad esempio come già osservato $f(x) = |x|$ ha un punto di minimo globale in $x_0 = 0$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$
3) Un'altra ipotesi che va sottolineata è il fatto di aver supposto x_0 interno al dominio di f. Il risultato sarebbe infatti falso altrimenti. Controesempio: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. In questo caso $x_0 = 1$ è punto di massimo globale ma $f'(x_0) = 1$.

Il fatto osservato al punto 3) precedente è un fatto generale: vale infatti la seguente proposizione (dimostrabile in maniera analoga alla precedente):

❐ **Proposizione 4.1.11.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 < b$ un punto di minimo $[\![$ massimo $]\!]$ locale per f in cui f risulti derivabile a destra. Allora $f'_+(x_0) \geq 0$ $[\![\leq 0]\!]$. Analogamente se $x_0 > a$ è un punto di minimo $[\![$ massimo $]\!]$ locale per f in cui f risulti derivabile a sinistra, allora $f'_-(x_0) \leq 0$ $[\![\geq 0]\!]$.*

4.2. Teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy

Andiamo ora a presentare una serie di risultati molto importanti che danno informazioni sull'esistenza di punti stazionari (e alcune interessanti conseguenze). Iniziamo col Teorema di Rolle (vissuto tra la seconda metà del 1600 e gli inizi del 1700) che ci fornisce proprio le condizioni minimali per ottenere punti stazionari, cioè punti che annullano la derivata prima.

Teorema 4.2.1. (Teorema di Rolle) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che*

1) f è continua in $[a, b]$;
2) f è derivabile in (a, b);
3) $f(a) = f(b)$.
Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

dimostrazione. Essendo $[a, b]$ chiuso e limitato e f continua, dall'$\boxed{\text{ipotesi 1)}}$ si può applicare il Teorema di Weierstrass, per cui esistono x_m e x_M punti di minimo e massimo rispettivamente per f, cioè tali che

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M \qquad \forall x \in [a, b].$$

Se $x_m = a$ e $x_M = b$ (o viceversa) allora si avrebbe $f(x_m) = m = M = f(x_M)$ (dall'$\boxed{\text{ipotesi 3)}}$) quindi la funzione f sarebbe costante e pertanto la sua derivata nulla, cioè $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$.
Supponiamo dunque che almeno uno tra x_m e x_M sia interno all'intervallo (a, b), per esempio x_m. Essendo f una funzione derivabile (per l'$\boxed{\text{ipotesi 2)}}$) e x_m un punto di estremo locale interno all'intervallo, per il Teorema di Fermat $f'(x_m) = 0$ che è quello che volevamo dimostrare.

Osservazione 4.2.1. Le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte necessarie, nel senso che se ne rimuoviamo una, il teorema cessa di essere valido, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 4.2.2. *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Allora f è derivabile in $(0, 1)$ (quindi vale l'ipotesi 2)), inoltre $f(0) = f(1)$ (quindi vale l'ipotesi 3)) ma non vale l'ipotesi 1), perché la funzione f non è continua. Si vede peraltro che non esistono punti stazionari, cioè punti in cui la derivata di f si annulla.

Esempio 4.2.3. *Consideriamo la funzione $f(x) = x$ su $[0, 1]$. Allora f è continua in $[0, 1]$ (quindi vale l'ipotesi 1)), f risulta derivabile in $(0, 1)$ (quindi vale l'ipotesi 2)) ma naturalmente $f(0) \neq f(1)$ (cioè non vale l'ipotesi 3)), per altro anche in questo caso non esistono punti stazionari (in cui la derivata si annulla e la retta tangente nel punto è orizzontale).*

Esempio 4.2.4. *Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$. Allora f è continua su $[-1, 1]$ (quindi vale l'ipotesi 1)), inoltre $f(-1) = f(1)$ (quindi l'ipotesi 3) vale) ma non vale* *l'ipotesi 2), perché la funzione f non è derivabile. Si vede peraltro che non esistono punti stazionari, cioè punti in cui la derivata di f si annulla.*

Il Teorema di Rolle si può generalizzare al seguente risultato.

Teorema 4.2.2. (Teorema di Cauchy) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che:*

1) f, g sono continue in $[a, b]$;
2) f, g sono derivabili in (a, b).
Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Quando $g(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$ allora la tesi del teorema si riscrive come

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$w(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Allora w è continua in $[a, b]$ (visto che, per l'$\boxed{\text{ipotesi 1)}}$, f, g sono continue in $[a, b]$); w è anche derivabile in (a, b) (visto che, per l'$\boxed{\text{ipotesi 2)}}$, f, g sono derivabili in (a, b)). Inoltre

$$\begin{aligned} w(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ w(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b), \end{aligned}$$

quindi $w(a) = w(b)$. Applicando quindi il Teorema di Rolle alla funzione $w(x)$ si ottiene che esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$ cioè quello che volevamo dimostrare.

Scegliendo una funzione w in maniera opportuna abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4.2.3. (Teorema del valor medio o di Lagrange) *Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

❐ DIMOSTRAZIONE. Si dimostra banalmente dal Teorema di Cauchy prendendo $g(x) = x$. Alternativamente si può considerare la funzione

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Si tratta di una retta (quindi una funzione continua e derivabile in ogni punto) che congiunge i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ appartenenti al grafico di f. La funzione $h(x) = r(x) - f(x)$ è tale che $h(a) = h(b) = 0$. La funzione h è continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) perché lo sono sia r (perché è una retta) che f (per ipotesi). Quindi possiamo applicare direttamente il Teorema di Rolle e ottenere l'esistenza di un punto $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$.

❐ **Osservazione 4.2.5.** Il punto c della tesi del Teorema di Lagrange non è necessariamente unico. Esempio $f(x) = \sin x$ con $x \in [0, 3\pi]$, possibili punti c in cui $f'(z) = \frac{f(3\pi)-f(0)}{3\pi} = 0$ sono $c = \frac{\pi}{2}$, $c = \frac{3}{2}\pi$ e $c = \frac{5}{2}\pi$.

Vediamo l'*interpretazione geometrica* di questo teorema. La quantità $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ rappresenta il rapporto incrementale della funzione e geometricamente la pendenza della retta che congiunge i due punti che hanno per ascisse gli estremi dell'intervallo. $f'(c)$ rappresenta per definizione il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(c, f(c))$. Quindi il teorema del valor medio o di Lagrange esprime il fatto che nel punto $(c, f(c))$ la tangente al grafico di f è PARALLELA alla retta che congiunge i punti di ascisse gli estremi dell'intervallo considerato.

4.3. Conseguenze del Teorema di Lagrange

Una conseguenza del Teorema di Lagrange è il seguente test di monotonia.

❐ **Teorema 4.3.1.** (TEST DI MONOTONIA) *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile. Allora* $\forall x \in (a, b)$*:*

f *crescente* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
f *decrescente* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

❐ Per semplicità dimostriamo solo la prima implicazione, potendo dedurre la seconda dalla prima considerando $-f$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Sia f debolmente crescente. Dimostriamo che $f'(x) \geq 0$. Per la monotonia di f si ha

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Inoltre essendo f derivabile, $f'(x_0) = f'_+(x_0)$ (a meno che x_0 non sia l'estremo destro del dominio di f, nel qual caso si lavora con la derivata sinistra). Dunque

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia ora $f'(x) \geq 0$. Utilizzando il Teorema di Lagrange mostriamo che f è debolmente crescente. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste $z \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(z)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

cioè f monotona debolmente crescente.

Con la stessa dimostrazione si arriva al seguente risultato.

❒ **Teorema 4.3.2.** (caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla) *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Allora*

$$f' = 0 \text{ in } (a,b) \Leftrightarrow \quad f \text{ è costante in } (a,b).$$

Il precedente risultato non vale più se si considerano insiemi più generali di intervalli, come mostrano i seguenti controesempi.

❒ **Esempio 4.3.1.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Questa funzione è definita su un'unione di intervalli $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ed è derivabile con derivata nulla in ogni punto del suo dominio, ma non è una funzione costante.

❒ **Esempio 4.3.2.** *Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$. Di nuovo si noti che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo ma è l'unione di due intervalli. Si ha*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad \forall x \neq 0.$$

Quindi applicando il precedente teorema si ha che f è costante in ciascuno dei due intervalli $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ ma f non è globalmente costante. Per vedere quanto vale basta calcolare la f in due punti "comodi", per esempio in 1 e -1. Si ha

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

mentre

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

quindi riassumendo

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Se la disuguaglianza è stretta, il test di monotonia vale solo in un senso. Infatti:

❒ **Proposizione 4.3.3.** *Sia f continua su (a,b) e tale che $f'(x) > 0$ (rispettivamente $f'(x) < 0$) per ogni x interno ad (a,b). Allora f risulta strettamente crescente (rispettivamente strettamente decrescente) su (a,b).*

Questa proposizione ci fornisce **il più importante criterio di iniettività** disponibile. Questo vale purché f sia continua e definita su un intervallo.

❒ **Osservazione 4.3.4.** Il viceversa non vale: infatti $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (e quindi su ogni intervallo in esso contenuto) ma la sua derivata non è strettamente positiva (si annulla in $x = 0$).

❒ **Osservazione 4.3.5.** Il test di monotonia è falso di nuovo se (a,b) non è un intervallo. Infatti ad esempio $f(x) = 1/x$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la sua derivata è $-1/x^2 < 0$; tuttavia f non è strettamente decrescente.

❒ **Esempio 4.3.6.** *Mostriamo che $e^x > \sin x + \cos x$ per ogni $x \in (0,\pi/2) =: I$, usando ripetutamente il precedente test di monotonia. Allora posto $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$ si ha*

$$f'(x) = e^x - \cos x + \sin x \qquad f''(x) = e^x + \sin x + \cos x$$

dunque

$$f''(x) > 0 \ \forall x \in I \ \Rightarrow f' \text{ strettamente crescente su } I$$

da cui, visto che $f'(0) = 0$ si ha che anche $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, quindi per il test di monotonia anche f è strettamente crescente, ma visto che $f(0) = 0$ allora $f(x) > 0$ per ogni $x \in I$, che è quanto volevamo dimostrare.

❒ **Corollario 4.3.7.** *Se f è derivabile su I intervallo e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ allora:*
1) se $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale stretto per f.
2) se $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) < 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di massimo locale stretto per f.
3) se f' non cambia segno in un intorno di x_0 allora x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo per f.

❒ **Corollario 4.3.8.** *Se f è derivabile in I e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$ allora:*
1) se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale stretto per f;
2) se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale stretto per f.

Questo secondo corollario è più debole del corollario precedente come mostra l'esempio $f(x) = x^4$ alla quale (nel punto $x_0 = 0$) non possiamo applicare il secondo corollario ma solo il primo. Tuttavia questo secondo corollario può tornare utile in situazioni in cui il segno di f' sia molto complicato da studiare mentre invece si sappia calcolare agevolmente la derivata seconda.

❒ **Osservazione 4.3.9.** Non vale il viceversa del Corollario 4.3.7, nel senso che se x_0 è punto di massimo locale stretto per f non è detto che f risulti monotona in alcun intorno di x_0, destro o sinistro. Controesempio:

$$f(x) = -|x| + \frac{|x|}{2} \sin \frac{1}{x}.$$

4.4. Teorema di Lagrange e ottimizzazione: esercizi

❒ **Esercizio 4.4.1.** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{\pi}{2}x + \pi + b & x \geq \dfrac{\pi}{2} \\ a \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) & x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) *Per quali valori di a e b la funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, \pi]$?*
2) *Per tali valori di a e b trovare almeno un punto che soddisfi la tesi del Teorema di Lagrange.*

1) Per soddisfare le ipotesi del Teorema di Lagrange in $[0, \pi]$ occorre dimostrare che f è continua su $[0, \pi]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(0, \pi)$. Sicuramente la funzione è continua per

$x < \pi/2$ e per $x > \pi/2$ (composizione di funzioni continue), quindi bisogna solo dimostrare la continuità in $x = \pi/2$. Si deve avere

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

quindi si deve avere

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \pi + b = a\sin(\pi) = \pi + b$$

da cui si ricava $b = -\pi$.
Per quanto riguarda la derivabilità, occorre dimostrare (si veda Proposizione 4.5.7) che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x)$$

da cui

$$a\cos\pi = \frac{\pi}{2}$$

da cui si ricava $a = -\frac{\pi}{2}$.
Concludendo i valori di a e b per cui f è continua e derivabile sono $a = -\pi/2$ e $b = -\pi$. Inserendo tali valori nell'espressione di f si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{\pi}{2}x & x \geq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) & x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

2) Occorre trovare almeno un punto c che soddisfi la tesi del Teorema di Lagrange. Questo significa trovare $c \in [0, \pi]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}(\pi + 1).$$

Notiamo che basta trovarne uno solo. A questo punto, se $c < \pi/2$ allora si deve trovare c tale che

$$f'(c) = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos c - \sin\frac{\pi}{2}\sin c\right) = -\frac{\pi}{2}\sin c$$

da cui risulterebbe

$$-\frac{\pi}{2}\sin c = \frac{\pi + 1}{2}$$

e dunque

$$\sin c = -1 - \frac{1}{\pi}$$

assurdo.
Invece se $c > \pi/2$ si cerca z tale che

$$f'(c) = 2c - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(\pi + 1)$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$$

che è accettabile. Dunque questo è il punto cercato che soddisfa la tesi del Teorema di Lagrange.

❒ **Esercizio 4.4.2.** *Determinate quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x + 5 = k$ al variare di k parametro reale.*

Sia $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Andiamo a studiare qualitativamente la funzione f. Si ha $f(0) = 5$; poi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 2$ che si annulla in $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ dunque

$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ punto di massimo locale} \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ punto di minimo locale.}$$

Infine

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =: r_1 > f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =: r_2 > 0$$

quindi riassumendo:
per $k > r_1$ abbiamo 1 soluzione;
per $k = r_1$ abbiamo 2 soluzioni;
per $r_2 < k < r_1$ abbiamo 3 soluzioni;
per $k = r_2$ abbiamo 2 soluzioni;
per $k < r_2$ abbiamo 1 soluzione.

❒ **Esercizio 4.4.3.** *Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'equazione*

$$e^x = x^2 - 2x + k$$

ha almeno una soluzione. È possibile dimostrare che essa ha esattamente una soluzione per ogni k?

Ponendo

$$f(x) = e^x - x^2 + 2x$$

si osserva che f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$;

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

quindi la funzione ammettendo limiti infiniti (con segno opposto) ai due estremi dell'intervallo, ed essendo continua, significa che ha sempre almeno uno zero; per vederlo, basta osservare che dai limiti proposti, f è definitivamente negativa per $x \to -\infty$ e definitivamente positiva per $x \to +\infty$; quindi esiste un intervallo (che per semplicità possiamo considerare simmetrico) del tipo $[-M, M]$ tale che $f(-M) < 0$ e $f(M) > 0$, quindi applicando il teorema degli zeri si dimostra che l'equazione proposta ha almeno una soluzione.

Per vedere se tale soluzione è unica, al variare del parametro k, bisognerebbe dimostrare che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Infatti in tal caso i valori del codominio sono raggiunti tutti una e una sola volta.

Allora si ha

$$f'(x) = e^x - 2x + 2 \qquad f''(x) = e^x - 2 \qquad f'''(x) = e^x > 0$$

dal test di monotonia si ha che f'' è una funzione strettamente crescente. Visto che $f''(x) = 0$ per $x = \log 2$ e si annulla solo in quel punto, significa che (essendo strettamente crescente) prima è negativa e poi è positiva. Quindi la funzione f' prima è decrescente, poi è crescente e ammette un minimo (locale e globale!) corrispondente a $x = \log 2$. A questo punto, due sono le possibilità: il valore minimo di f' è sempre maggiore di zero, allora tutta f' è strettamente positiva, oppure il minimo di f' è negativo. Ma

$$f'(\log 2) = 4 - 2\log 2 > 0$$

quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque di nuovo dal test di monotonia anche la funzione f è strettamente crescente (che è quanto volevamo dimostrare).

❒ **Esercizio 4.4.4.** *Sia $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(1) = 0$ e $f(3) = \gamma$. Determinare per quali valori del parametro reale γ è necessariamente vero che esiste $x_0 \in (1, 3)$ tale che $1 < f'(x_0) < 4$.*

Applicando il Teorema di Lagrange si ottiene

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\gamma}{2}.$$

Ora imponiamo la condizione sulla derivata prima

$$1 < \frac{\gamma}{2} = f'(x_0) < 4 \qquad \Rightarrow \qquad 2 < \gamma < 8.$$

❒ **Esercizio 4.4.5.** *Data*
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{x^2}},$$
determinare $\inf f$ *e* $\sup f$ *sul suo dominio di definizione e dire se si tratta di minimo e massimo rispettivamente.*

La funzione è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel suo dominio è continua e derivabile. Calcoliamo
$$f'(x) = -\frac{2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}$$
quindi la funzione è crescente in $x < 0$ (perché la derivata prima è positiva) e decrescente in $x > 0$ (perché la derivata prima è negativa) pertanto il sup di f che coincide col massimo è raggiunto per $x = 0$ e vale $f(0) = 1$. Invece siccome $\lim_{\pm\infty} f(x) = 0$ si ha che l'inf della funzione data è zero e ovviamente f non ha pertanto minimo.

❒ **Esercizio 4.4.6.** *Data*
$$f(x) = \frac{1}{|1-e^{x^2}|},$$
determinare $\inf f$ *e* $\sup f$ *sul suo dominio di definizione e dire se si tratta di minimo e massimo rispettivamente. Ripetere l'operazione con f definita sull'intervallo* $[1, 2)$.

La funzione è ben definita su $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$$
quindi $\sup_D f(x) = +\infty$ (e non si tratta ovviamente di un massimo). D'altra parte visto che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
e dato che la funzione data è sempre positiva, allora $\inf f(x) = 0$ e il minimo non esiste.
Studiamo ora la funzione ristretta all'intervallo $[1, 2)$. Osserviamo che
$$|1-e^{x^2}| = \begin{cases} 1-e^{x^2} & 1-e^{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 (\notin D) \\ e^{x^2}-1 & 1-e^{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases}$$
quindi nell'intervallo considerato
$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1}$$

che è continua e derivabile, con derivata

$$f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$$

quindi nell'intervallo considerato f è decrescente. Allora

$$\sup_{[1,2)} f = \max f_{[1,2)} = f(1) = \frac{1}{e-1} \qquad \inf_{[1,2)} f = f(2) = \frac{1}{e^4-1}$$

e il minimo non esiste perché l'intervallo è aperto (l'estremo destro non è incluso).

4.5. Il Teorema di de l'Hospital

Una notevole applicazione del calcolo differenziale è costituita dal Teorema di de l'Hospital, che permette di dare una risposta a molti casi di limiti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Teorema 4.5.1. (teorema di de l'Hospital) *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Se*

$$(i)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \ \text{ oppure } \ \pm\infty$$
$$(ii)\ \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

❐ La dimostrazione dovrebbe distinguere vari casi. Diamo solo un'idea di come si procede lavorando solo nel caso di forma di indecisione $[\frac{0}{0}]$ e solo nel caso L finito. Gli altri casi si ottengono operando le opportune modifiche.
Dall'ipotesi (ii), fissato $\varepsilon > 0$, esiste t_0 tale che se $t \in (a, t_0)$ allora

$$L - \varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} < L + \varepsilon. \tag{4.5.1}$$

Sia ora $a < y < x < t_0$. Nell'intervallo $[y, x]$ f e g verificano le ipotesi del Teorema di Cauchy e quindi esiste $c \in (y, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Quindi siccome $c \in (a, t_0)$, dalla (4.5.1) si ha

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < L + \varepsilon.$$

Passiamo ora al limite per $y \to a^+$. Allora dalla (i) si ricava che, per ogni $x \in (a, t_0)$

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

e la tesi viene applicando la definizione di limite.

❐ **Osservazione 4.5.1.** Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure $x \to b^-$ e $b \leq +\infty$. Abbiamo chiesto solo $g'(x) \neq 0$ in (a, b) perché da questa ipotesi discende che g è strettamente monotona e quindi diversa da zero in un intorno destro di a (o sinistro di b naturalmente) quindi il quoziente f/g è ben definito.

❐ **Esempio 4.5.2.** *Un tipico esempio di applicazione del Teorema di de l'Hospital è per la dimostrazione della gerarchia degli infiniti. Dimostriamo che*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Prima di tutto facciamo vedere che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\gamma x}} = 0 \qquad \gamma > 0.$$

Usando il Teorema di de l'Hospital con le scelte $f(x) = x$, $g(x) = e^{\gamma x}$ si ha che l'ipotesi (i) è verificata, e inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\gamma e^{\gamma x}} = 0,$$

quindi anche il precedente limite fa zero. A questo punto allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\beta/\alpha}x}\right)^\alpha=0$$

dal punto precedente.

❒ **Esercizio 4.5.3.** *Calcolare, se esiste*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

Il limite proposto si pone nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si vede chiaramente che usare il fatto che $\sin x\sim x$ per $x\to0$ non è sufficiente per superare la forma di indecisione. Applicando il Teorema di de l'Hospital (si verifica che le ipotesi sono soddisfatte) si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

e dunque anche il limite proposto esiste e vale $-1/6$.

❒ **Osservazione 4.5.4.** Il Teorema di de l'Hospital, anche se usato correttamente, a volte può complicare le situazioni anziché semplificarle. Per esempio il seguente caso (che si presenta in una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

mentre con un semplice cambio di variabile, ponendo $t=1/x^2$ si riconduce il limite al caso della gerarchia degli infiniti

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}=0.$$

Altro esempio il cui il Teorema di de l'Hospital complica le cose invece che semplificarle: calcolare

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x\tan x}.$$

Esso si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Se decidessimo di usare il Teorema di de l'Hospital ci troveremmo, dopo derivazione di numeratore e denominatore, a dover calcolare il limite

$$\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{\cos x\tan x+\sin x(1+\tan^2 x)}$$

che risulta ancora una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$ ma senza subbio più complicata. Se invece si scrivesse il limite iniziale nella seguente forma equivalente, si avrebbe, usando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x\tan x}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{3}{2}$$

❒ **Osservazione 4.5.5.** 1) Il Teorema di de l'Hospital si usa per quozienti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, non per prodotti (a meno che non si presentino nella forma di indecisione $[0 \cdot \infty]$).
2) Il Teorema di de l'Hospital si usa per quozienti che siano *reali forme di indecisione.* Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sin x}{x} = +\infty$$

e non si tratta di una forma di indecisione. Usando *erroneamente* il Teorema di de l'Hospital avremmo trovato che il limite del rapporto delle derivate tenderebbe a 1
3) Il Teorema prescrive di calcolare il *quoziente delle derivate* NON *la derivata del quoziente!*
4) Se il limite del quoziente delle derivate non esiste il Teorema di de l'Hospital NON si applica e NULLA si può dire riguardo al limite di partenza, che pertanto può tranquillamente esistere. Quindi in particolare NON è lecito concludere che anche il limite di partenza non esiste, come mostra il seguente esempio.

❒ **Esempio 4.5.6.** *Il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$$

si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *ma si vede immediatamente che*

$$\frac{x-\sin x}{x+\sin x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

invece volendo utilizzare il Teorema di de l'Hospital si avrebbe che il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

non esiste.

Come applicazione del Teorema di de l'Hospital si può dimostrare l'esistenza della formula di Taylor con resto di Peano (vedi Dispensa **[D1]**, Cap 8, Par. 8.4).

Come ulteriore applicazione del Teorema di de l'Hospital abbiamo il seguente risultato, utilissimo per verificare la derivabilità di funzioni definite a tratti, come mostrano i prossimi esempi.

❒ **Proposizione 4.5.7.** (LIMITE DESTRO (SINISTRO) DELLA DERIVATA E DERIVATA DESTRA (SINISTRA)) *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e ivi continua, e inoltre derivabile per $x \neq x_0$. Supponiamo che esista (finito o infinito)*

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \alpha_- \qquad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$$

Allora esistono

$$f'_-(x_0) = \alpha_- \qquad f'_+(x_0) = \alpha_+.$$

In particolare f risulta derivabile in x_0 se e solo se $\alpha_- = \alpha_+$.

❒ Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di de l'Hospital al limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ (perché f è continua quindi $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$. Allora si ottiene

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} f'(x) = \alpha_-$$

e analogamente da destra. L'ultima affermazione segue dal fatto che la derivata, se esiste, è il limite sia da sinistra che da destra del rapporto incrementale.

❒ **Osservazione 4.5.8.** È fondamentale osservare che una funzione può essere derivabile in un punto senza che esista il limite (da destra o da sinistra) della derivata. Si veda a tal proposito il caso, già esaminato, della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

mostrando che f è derivabile in $x = 0$ (con la definizione) con $f'(0) = 0$ ma $\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste.

❒ **Esempio 4.5.9.** *Determinare per quali valori di h e k la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 4 \arctan x & x < 1 \\ 2hx + k & x \geq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile

Innanzitutto la funzione data è continua per $x < 1$ perché la funzione arcotangente è continua; inoltre f è continua per $x > 1$ perché è un polinomio di primo grado. Quindi l'unico punto dove occorre verificare la continuità è $x = 1$. Si deve avere che il limite destro coincide con il limite sinistro ed entrambi devono essere uguali al valore della funzione nel punto $x = 1$. Questo darà una prima condizione sui coefficienti h e k. Si deve avere dunque

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè

$$4 \arctan 1 = \pi = 2h + k.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, si nuovo la funzione è derivabile per $x > 1$ e per $x < 1$; per verificare per quali valori dei parametri è derivabile in $x = 1$ si può usare la Proposizione **??***. Questo significa che per verificare che una funzione definita a tratti è derivabile in un punto, è sufficiente calcolare il limite da* destra *della funzione derivata prima e il limite da* sinistra *della funzione derivata prima. Il tal caso se essi esistono sono uguali rispettivamente ai valori della derivata* destra *e* sinistra *della funzione. Se poi coincidono, allora la funzione è anche derivabile nel punto. Nel nostro caso si ha che*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4}{1+x^2} = 2 = \lim_{x \to 1^+} 2h.$$

Quindi mettendo insieme le due condizioni ottenute, si ottiene che per $h = 1$ e $k = \pi - 2$ la funzione data è continua e derivabile.

4.6. Derivate seconde e funzioni convesse

Abbiamo visto che il significato geometrico della derivata prima è quello di coefficiente angolare della retta tangente nel punto in cui viene calcolata e quindi la derivata prima dà informazioni sulla "pendenza" del grafico.
Vedremo ora che la derivata seconda che rappresenta la *velocità di variazione di tale pendenza* misura il grado di scostamento dall'andamento rettilineo, quindi dà una misura della CONCAVITÀ O CONVESSITÀ di una funzione.
Premettiamo alcune definizioni.

Definizione 4.6.1. Una figura F si dice CONVESSA se per ogni $P_1, P_2 \in F$, tutto il segmento congiungente i due punti è tutto contenuto in F.

Definizione 4.6.2. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Si chiama EPIGRAFICO di f l'insieme

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}.$$

Si dice che f è CONVESSA se il suo epigrafico è un insieme convesso. Si dice che f è CONCAVA se $-f$ è convessa.

Si dimostra che la definizione precedente è equivalente alla seguente.

Definizione 4.6.3. Se $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora si dice che f è CONVESSA (rispettivamente CONCAVA) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (rispettivamente sopra) il grafico di f.

Alternativamente questa ultima condizione si scrive

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad t \in [0,1]$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che f è STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA).

❒ **Osservazione 4.6.4.** 1) f convessa non implica f continua. Controesempio: $f(x) = x^2$ per $x \in (-1,1)$ e $f(x) = 2$ per $x = \pm 1$.
2) f continua non implica f convessa. Controesempio: $f(x) = -|x|$
3) f convessa non implica f derivabile. Controesempio: $f(x) = |x|$.

Tuttavia vale il seguente teorema.

❒ **Teorema 4.6.5.** *Una funzione convessa (o concava) su un intervallo I è continua in I salvo al più negli estremi dell'intervallo. Inoltre possiede derivata destra e sinistra in ogni punto interno dell'intervallo.*

Dunque i *punti angolosi* e i *punti di discontinuità agli estremi* sono i soli comportamenti irregolari permessi ad una funzione concava o convessa. D'altra parte, se f è derivabile allora la convessità risulta avere relazioni interessanti con le derivate prime e seconde.

❒ **Teorema 4.6.6.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.*

(i) *Se f è derivabile in (a,b) allora f convessa (concava) in (a,b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a,b)*
(ii) *Se f è derivabile due volte in (a,b), allora f convessa (concava) in (a,b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) per ogni $x \in (a,b)$*

Conseguenza: lo studio della derivata seconda ci permette di decidere riguardo la convessità o la concavità di una funzione. Per esempio: $f(x) = e^x$ è convessa su tutto l'asse reale.

❒ **Osservazione 4.6.7.** Osserviamo che di nuovo al punto (ii) se passiamo alle disuguaglianze strette, si ha solo un'implicazione, precisamente

$$f'' > 0 \Rightarrow f \text{ strettamente convessa}$$

Il viceversa non vale, controesempio $f(x) = x^4$. Infatti f è strettamente convessa ma $f''(x) = 12x^2$ che si annulla in $x = 0$.

Un'altra caratterizzazione geometrica della convessità coinvolge le rette tangenti.

❒ **Teorema 4.6.8.** *Una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) è convessa (concava) in (a,b) se e solo se per ogni $x_0 \in (a,b)$ il grafico di f si mantiene in (a,b) tutto* SOPRA *(*SOTTO*) il grafico della sua retta tangente in x_0, cioè*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Ovviamente il verso della concavità può cambiare.

❒ **Definizione 4.6.9.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a,b)$ un punto di derivabilità o un punto per cui $f'(x_0) = \pm\infty$. Allora x_0 si dice PUNTO DI FLESSO per f se esiste un intorno destro di x_0, per esempio del tipo $(x_0, x_0 + h)$ con $h > 0$ in cui f è convessa e un intorno sinistro di x_0, per esempio del tipo $(x_0 - h, x_0)$, $h > 0$ in cui f è concava; e/o viceversa.

Significato geometrico del flesso: attraversa la propria retta tangente.

❒ **Teorema 4.6.10.** *Sia x_0 un punto di flesso per f; se esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.*

Ad esempio $f(x) = x^3$; la sua derivata si annulla in $x = 0$ che è un punto di flesso.
D'altra parte, si può avere un punto di flesso senza necessariamente avere l'esistenza della derivata seconda in quel punto, come mostra il seguente controesempio.

❒ **Esempio 4.6.11.** *Sia $f(x) = x|x|$. Si ha*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Allora per $x > 0$ $f(x) = x^2$ e quindi è una funzione convessa, per $x < 0$ $f(x) = -x^2$ e quindi è una funzione concava; perciò $x = 0$ è un punto di flesso perché attraverso $x = 0$ la funzione cambia la propria concavità. D'altra parte si vede facilmente che

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

dove l'ultimo punto è stato verificato dalla definizione di limite di rapporto incrementale. A questo punto

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

e quindi sempre usando la definizione di limite del rapporto incrementale si vede immediatamente che $f''(0)$ *non esiste.*

CAPITOLO 5

Studio del grafico di funzioni reali di una variabile reale

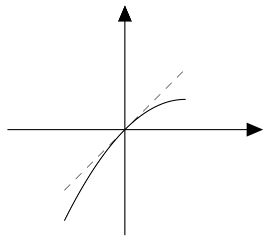
5.1. Studio del grafico di una funzione

Riassumiamo dunque i punti fondamentali da verificare quando ci si trova di fronte al problema di studiare il grafico di una funzione e poi facciamo alcuni esempi.
1) Per prima cosa è essenziale determinare il **dominio di** f, cioè il più grande insieme naturale in cui la funzione risulta definito. Talvolta risulta particolarmente utile barrare con un segno grafico le parti del piano dove di sicuro si sa non ci sarà grafico della funzione.
2) In seguito è importante vedere se la funzione presenta **simmetrie**, per esempio se f è pari o dispari. Nel caso ad esempio f sia pari, si può restringere lo studio del grafico alla regione $x \geq 0$ e disegnare la parte restante del grafico per simmetria.
3) Se la funzione è **periodica** allora si può restringere lo studio del suo grafico a un periodo fissato.
4) Quando possibile e/o non particolarmente complicato può essere utile avere informazioni sugli **zeri** della funzione e sul suo **segno**.
5) A questo punto, dopo questa prima analisi, diventa essenziale studiare i **limiti** della f agli estremi del dominio, ricercando eventuali asintoti orizzontali oppure verticali. Importante può essere individuare eventuali punti di **discontinuità** della funzione.
6) Se $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ (o equivalentemente per $x \to \mp\infty$) allora è possibile cercare (se esiste) l'**asintoto obliquo**.
7) A questo punto si calcola la **derivata** della f nei punti in cui $f'(x)$ esiste. È importante studiare accuratamente i punti in cui f risulta continua ma non derivabile, per stabilirne la natura (punti angolosi, punti di flesso a tangente verticale, cuspidi...). Nei punti angolosi o agli estremi del dominio può essere utile calcolare le **derivate destre e sinistre** di f (per valutare

l'eventuale pendenza del grafico).
8) Successivamente si studia il **segno di** $f'(x)$ che dà informazioni sulla monotonia di f e sugli eventuali punti di massimo o minimo.
9) Per concludere, nei casi in cui i calcoli non sono troppo complicati, è utile studiare la **derivata seconda** e il suo segno. Questo dà informazioni sulla concavità o sulla convessità della f.

❒ **Esempio 5.1.1.** *Sia* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *una funzione tale che* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $f''(0) = -3$. *Determinare il grafico qualitativo di* f *vicino all'origine*

Essendo $f(0) = 0$, la funzione data passa per l'origine. Inoltre si ha che $f'(0) = 1 > 0$ quindi localmente vicino all'origine la funzione è crescente; il coefficiente angolare della retta tangente è 1. Inoltre $f''(0) = -3 < 0$ quindi localmente vicino all'origine f ha concavità verso il basso, cioè è concava. Il grafico qualitativo è il seguente (con la linea tratteggiata indichiamo la retta tangente al grafico di f in $x = 0$, il cui coefficiente angolare corrisponde a $f'(0) = 1$)

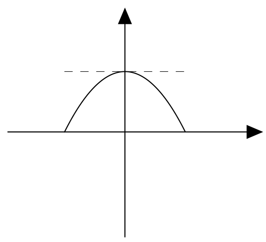


❒ **Esempio 5.1.2.** *Sia* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *una funzione tale che* $f(0) = f'(0) = 0$ *e* $f''(0) > 0$. *Determinare il grafico qualitativo di* $g(x) = e^{-f(x)}$ *vicino all'origine.*

Si ha $f(0) = 0$ quindi $g(0) = e^{-f(0)} = 1$. Inoltre $f'(0) = 0$ quindi $g'(x) = e^{-f(x)}(-f'(x))$ da cui $g'(0) = 0$ quindi localmente vicino all'origine la funzione ha tangente orizzontale. Infine $f''(0) > 0$ quindi si ha

$$g''(x) = e^{-f(x)}(-f'(x))^2 + e^{-f(x)}(-f''(x)) \quad \text{da cui} \quad g''(0) = -f''(0) < 0$$

quindi localmente vicino all'origine g ha concavità verso il basso, cioè è concava. Il grafico qualitativo allora è il seguente (con la linea tratteggiata indichiamo la retta tangente al grafico di f in $x = 1$, il cui coefficiente angolare corrisponde a $g'(0) = 0$)



❒ **Esercizio 5.1.3.** *Studiare il grafico qualitativo della funzione*

$$f(x) = 2\arctan x - x$$

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Si osserva che f è dispari perché differenza di funzioni dispari e che $f(0) = 0$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

Quindi è possibile tentare di ricercare l'asintoto obliquo. Sia $x \to \pm\infty$. Se esiste l'asintoto obliquo ha la forma $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{\arctan x}{x} - 1 = -1$$

e

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} 2\arctan x = \pm\pi.$$

Quindi esiste l'asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ e valgono rispettivamente $y = -x + \pi$ e $y = -x - \pi$.
D'altra parte

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

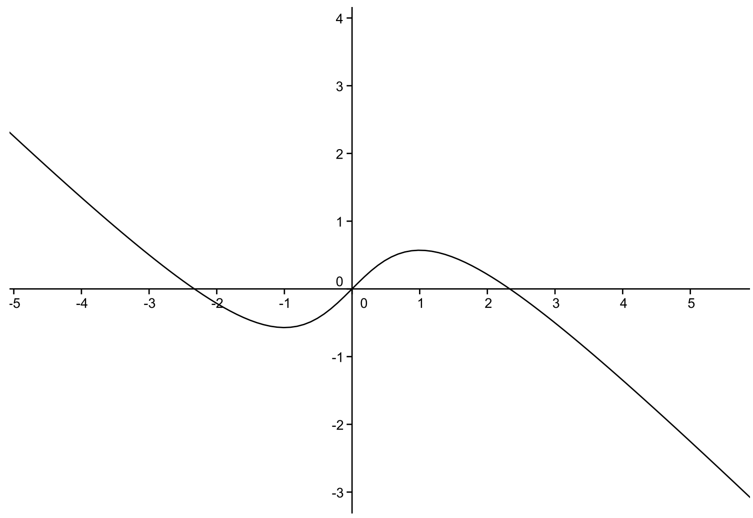
quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; inoltre si ha

		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

quindi si vede immediatamente che $x = 1$ è punto di massimo locale per f e $x = -1$ è punto di minimo locale per f. Calcoliamo per completezza i valori del massimo e del minimo: si ha $f(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2} \mp 1$.
Infine calcoliamo la funzione derivata seconda

$$f''(x) = 2\left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]$$

quindi è immediato verificare che $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e viceversa. La funzione data è dunque concava per $x > 0$ e convessa per $x > 0$. Il grafico qualitativo è illustrato in figura.



❒ **Esercizio 5.1.4.** *Studiare il grafico qualitativo della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

Il dominio della funzione è

$$\frac{x^3}{x-1} \geq 0$$

che è equivalente a $x \leq 0 \ \vee \ x > 1$. Si nota che quando esiste la funzione è sempre non negativa. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha (dalla gerarchia degli infiniti unito al fatto che la funzione radice quadrata è continua quindi preserva il limite)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

A questo punto calcoliamo la funzione derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}.$$

Si noti che visto che la funzione radice quadrata è crescente, il segno della derivata prima coincide con il segno della derivata dell'argomento della radice. Si ha inoltre

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{3}{2}.$$

Inoltre si ha

f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$
	$-\frac{3}{2}$	

quindi $x = 0$ è punto di minimo locale e anche $x = 3/2$ è punto di minimo locale. Si ha $f(0) = 0$ (quindi $x = 0$ è anche punto di minimo globale) mentre $f(3/2) = 3\sqrt{3}/2$.

Tralasciamo per semplicità lo studio della derivata seconda. Invece andiamo a cercare, se esistono, gli asistoti obliqui per la funzione. Prima di tutto sia $x \to +\infty$. Allora l'asintoto obliquo se esiste deve essere della forma $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$$

mentre

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \, \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} + x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

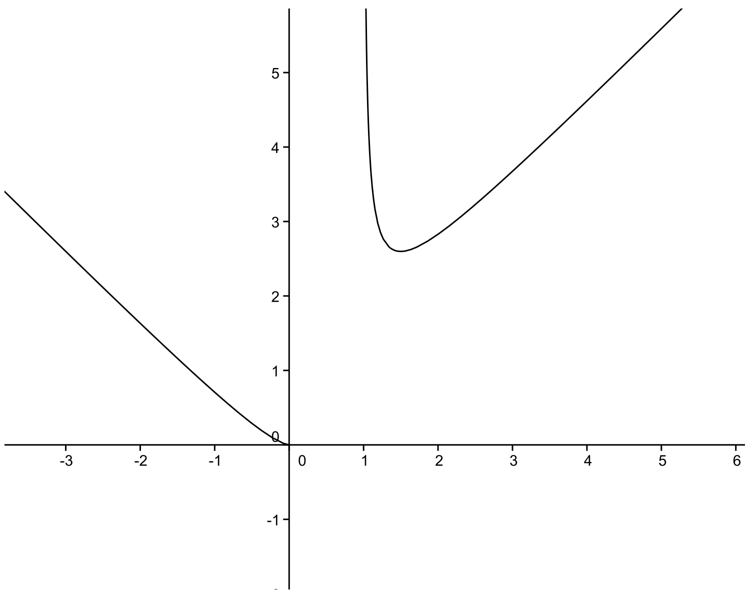
Quindi per $x \to +\infty$ esiste l'asintoto obliquo e vale $y = x + \frac{1}{2}$. Allo stesso modo si dimostra che per $x \to -\infty$ esiste l'asintoto obliquo della forma $y = \bar{m}x + \bar{q}$ con

$$\bar{m} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1$$

e

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\,\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x-1}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}\,\frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Il grafico qualitativo è illustrato in figura.



❒ **Esercizio 5.1.5.** *Studiare il grafico qualitativo della funzione*

$$f(x) = \log|4-x| + \frac{2}{|x-4|}$$

Innanzitutto osserviamo che essendo $|x| = |-x|$ la funzione data si può riscrivere come

$$f(x) = \log|x-4| + \frac{2}{|x-4|}$$

che è ben definita per $x \neq 4$. A questo punto, facendo un cambio di variabile $t = x - 4$ lo studio del grafico della funzione proposta è equivalente allo studio del grafico qualitativo della seguente funzione

$$g(t) = \log|t| + \frac{2}{|t|}$$

che è una funzione pari, quindi è sufficiente studiarla per $t > 0$. Si ha

$$\lim_{t\to 0^+} \log t + \frac{2}{t} = \lim_{t\to 0^+} \log t \left[1 + \frac{2}{t\log t}\right] = +\infty$$

visto che $\lim_{t\to 0^-} t\log t = 0^-$ e quindi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t\log t} = -\infty.$$

D'altra parte si vede facilmente che

$$\lim_{t\to +\infty} g(t) = +\infty.$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} = \frac{t-2}{t^2}$$

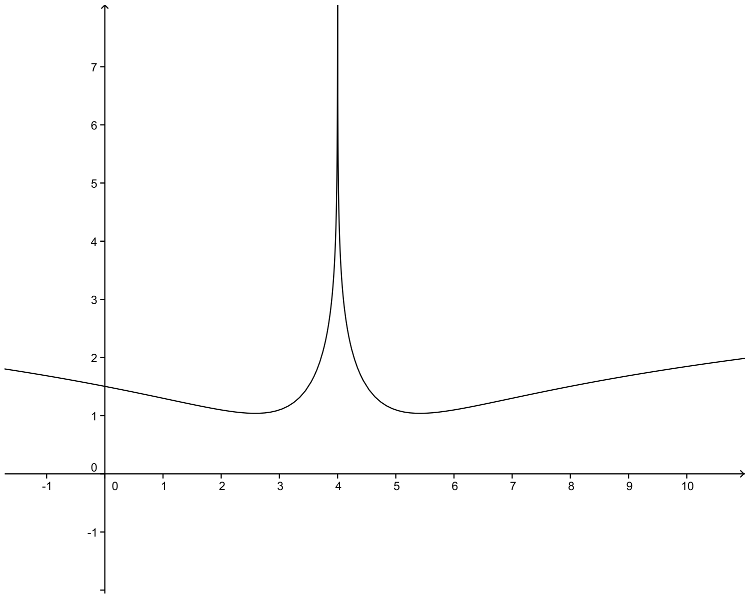
quindi visto che si ha

g'	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\nearrow$
	2	

allora $x = 2$ è punto di minimo locale (e conseguentemente visto che la funzione è pari anche $x = -2$ lo sarà). Infine dallo studio della derivata seconda si ottiene

$$g''(t) = \frac{t^2 - 2t(t-2)}{t^4} = \frac{4-t}{t^3}$$

quindi in $t = 4$ c'è un cambio di concavità. Il grafico qualitativo della funzione originaria si ottiene attraverso una opportuna traslazione degli assi, come mostrato in figura.


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

CAPITOLO 6

Calcolo integrale

Il calcolo integrale storicamente nasce per risolvere due problemi fondamentali. Il primo è il problema di misurare l'area di una figura piana e il secondo è quella di misurare la lunghezza di una curva. Per quanto riguarda il primo problema, l'idea è quella di riportare una figura di riferimento (unità di misura) e vedere quante volte è contenuta nella figura piana da misurare; questo può essere agevole se la figura da misurare ha contorni rettilinei ma ad esempio come si può misurare correttamente l'area del cerchio? La stessa cosa accade con il secondo problema: l'idea è riportare sulla curva una lunghezza unitaria (un segmento unitario) e vedere quante volte è contenuto nella curva di cui si vuole conoscere la lunghezza ma il problema di nuovo si pone quando si intende misurare la lunghezza di una curva generica.
Già nel 300 a.C. con Euclide, era chiaro il ragionamento che per risolvere questi problemi fosse necessario far ricorso all'idea di approssimazioni successive, sempre più accurate. A quel tempo ad esempio il problema di calcolare l'area del cerchio veniva risolto attraverso il calcolo dell'area di poligoni regolari inscritti e circoscritti, con un numero di lati sempre crscente; era già quindi intrinseca l'idea di un procedimento infinito e di un passaggio al limite.
Tuttavia è solo molto più recentemente, intorno alla fine del 1600/inizi del 1700 che si lega il concetto di area a quello di integrale visto come *limite di somme*. Questa è anche la definizione che usiamo al giorno d'oggi. La teoria che andiamo a presentare si chiama TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN per distinguerla dalla TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE a cui faremo solo qualche cenno ogni tanto ma una cui accurata presentazione esula dagli scopi di questo corso.

6.1. Definizione di integrale e prime proprietà

Consideriamo un intervallo limitato $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ ed una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata; notiamo esplicitamente che f potrebbe anche non essere continua, però per ora assumiamo che sia almeno definita in ogni punto di $[a,b]$ (e ivi limitata).

❒ **Definizione 6.1.1.** Chiameremo SUDDIVISIONE o PARTIZIONE di $[a,b]$ ogni insieme finito

$$\mathscr{A} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Presenteremo due definizioni equivalenti della nozione di integrabilità.

• PRIMO MODO: SOMME DI CAUCHY-RIEMANN

Per semplicità (comunque senza perdita di generalità) in questa prima parte considereremo solo suddivisioni equispaziate, cioè tali che

$$x_j = a + j\,h \qquad h = \frac{b-a}{n} \qquad j = 0, \dots, n.$$

In ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$ scegliamo un punto arbitrario ξ_j (per $j = 1, 2, \dots n$). Consideriamo la seguente somma (detta SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN)

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j).$$

L'idea è quella di passare al limite per $n \to \infty$.
Si arriva così alla seguente definizione.

❒ **Definizione 6.1.2.** Diciamo che la funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è INTEGRABILE se detta S_n una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann, al variare di $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e tale limite non dipende da come abbiamo scelto i punti ξ_j. In tal caso si pone

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Il simbolo di integrale ricorda l'idea di "somma"; il "dx" ricorda la lunghezza di un piccolo intervallo della suddivisione lungo x.

❒ **Osservazione 6.1.3.** Si noti che all'interno dell'integrale le variabili sono mute, ad esempio si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$$

❒ **Osservazione 6.1.4.** (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA) Questa definizione ha un'importante interpretazione geometrica; consideriamo una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che sia anche non negativa, e definiamo il SOTTOGRAFICO DI f come l'insieme

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

cioè la parte del piano cartesiano compresa tra la retta verticale $x = a$, la retta verticale $x = b$, la retta orizzontale $x = 0$ ed il grafico della funzione f. Per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$ si nota che la somma di Cauchy-Riemann definita prima coincide con *l'area del plurirettangolo* relativo a f e ad $\mathscr{A}$, la quale è esprimibile come somma di tanti rettangoli di base $\frac{b-a}{n}$ (che è la lunghezza del segmento compreso tra due punti della suddivisione, che per ipotesi abbiamo preso equispaziata) e di altezza $f(\xi_j)$. Abbiamo potuto parlare di area perché un plurirettangolo è scomponibile appunto in un numero finito di rettangoli, che a loro volta sono figure per le quali sappiamo cosa significa la parola AREA: base per altezza. Invece non è chiaro cosa possa essere in generale l'area per una figura piana qualsiasi, ad esempio per il sottografico $\Gamma(f)$; certamente se quest'area ha qualche significato, è chiaro che all'infittirsi della suddivisione (cioè se $n \to \infty$) l'area del plurirettangolo sarà un'approssimazione sempre migliore dell'area del sottografico, pertanto se f è integrabile sarà naturale definire l'area del suo sottografico $\Gamma(f)$ come l'integrale di f su $[a,b]$:

$$\text{Area}\,(\Gamma(f)) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se invece f non è integrabile, non sarà possibile definire l'area $\Gamma(f)$.
Da quanto appena detto si ha che l'area di un dominio piano che è sottografico di una funzione integrabile non negativa può essere calcolata mediante l'integrale della funzione stessa. Analogamente, se un dominio può essere decomposto in una unione o differenza di un numero finito di sottografici, la sua area sarà la somma o la differenza dei rispettivi integrali. Ad esempio, in tal modo si potrà ottenere che il cerchio $C = \{(x,y) : (x-3/2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$, differenza dei due sottografici di $f_1(x) = 2 + \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$ e di $f_2(x) = 2 - \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$, ha area π.
Tutto questo è possibile con l'ipotesi che f sia non negativa; se f è negativa, l'integrale di f coincide con l'area del sottografico ma con il segno cambiato. In questo senso si parla dell'integrale come di AREA CON SEGNO. Vedremo più avanti alcuni esercizi che illustreranno meglio questi concetti.

• SECONDO MODO: SOMME SUPERIORI E SOMME INFERIORI

❒ **Definizione 6.1.5.** Per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$, le quantità

$$
\begin{aligned}
s(f,\mathscr{A}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \\
S(f,\mathscr{A}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)
\end{aligned}
$$

verranno rispettivamente chiamate SOMMA INFERIORE E SOMMA SUPERIORE di f rispetto alla suddivisione $\mathscr{A}$. Infine, le quantità

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

$$S(f) = \inf\{S(f,\mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

verranno rispettivamente chiamate *integrale inferiore e integrale superiore (secondo Riemann)* di f su $[a,b]$.
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: se f è una funzione positiva, integrabile su $[a,b]$, allora $s(f,\mathscr{A})$ rappresenta l'area del plurirettangolo inscritto nel sottografico di f mentre $S(f,\mathscr{A})$ rappresenta l'area del plurirettangolo circoscritto al sottografico di f

❒ **Definizione 6.1.6.** Una funzione limitata f si dice *integrabile (secondo Riemann)* su $[a,b]$ se si ha

$$s(f) = S(f),$$

ed in tal caso il comune valore di $s(f)$ ed $S(f)$ viene detto INTEGRALE DI f SU $[a,b]$ e viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

❒ **Proposizione 6.1.7.** *La Definizione 6.1.2 e la Definizione 6.1.6 sono equivalenti.*

6.2. Classi di funzioni integrabili

Come abbiamo visto, se una funzione è integrabile è possibile definire l'area del sottografico che coincide con l'integrale della funzione stessa. Obiettivo principale è dunque quello di individuare classi di funzioni integrabili.
Prima di tutto abbiamo la seguente proposizione.

❒ **Proposizione 6.2.1.** *Per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ha $s(f) \leq S(f)$.*

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

❒ **Teorema 6.2.2.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora le seguenti 3 condizioni sono equivalenti:*

(1) f integrabile secondo Riemann su $[a, b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathscr{A}, \mathscr{B}$ suddivisioni di $[a, b]$ tali che

$$S(f, \mathscr{B}) - s(f, \mathscr{A}) \leq \varepsilon$$

(3) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathscr{A}$ suddivisione di $[a, b]$ tale che

$$S(f, \mathscr{A}) - s(f, \mathscr{A}) \leq \varepsilon$$

Usiamo la precedente caratterizzazione per provare questo primo importante risultato.

❒ **Teorema 6.2.1.** *Ogni funzione monotona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (limitata) è integrabile.*

❒ DIMOSTRAZIONE Supponiamo per semplicità f debolmente crescente (l'altro caso si tratta in maniera analoga). Fissato $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{A}_n$ la suddivisione in n intervalli di uguale ampiezza

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$

Allora per l'ipotesi di monotonia di f si ha

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) \qquad \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i).$$

Allora

$$s(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \left(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$S(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \left(f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Dunque

$$\triangle S(f, \mathscr{A}_n) = S(f, \mathscr{A}) - s(f, \mathscr{A}) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

e l'integrabilità segue dal teorema precedente.

Vale anche il seguente importante teorema.

❐ Teorema 6.2.2.

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.
Se $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ sono integrabili, allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a, b) \\ f_2(x) & x \in (b, c] \\ k & x = b \end{cases}$$

(dove k è un qualunque numero reale) è integrabile in $[a, c]$.

L'ultima parte del teorema può essere estesa a un numero qualunque finito di funzioni (e a casi più generali che esulano dagli scopi di questo corso). Si noti che l'integrale non cambia qualunque sia la scelta della definizione della f sul punto di raccordo tra i due intervallo $x = b$; questo perché un punto in $[a, b]$ è un *insieme di misura nulla* cioè in qualche modo "trascurabile" rispetto al resto (gli insiemi di misura nulla costituiscono un punto molto importante nella teoria della misura ma ulteriori approfondimenti esulano dagli scopi del corso).

❐ Osservazione 6.2.3. Non tutte le funzioni limitate sono integrabili, come mostra il seguente esempio.

❐ Esempio 6.2.4. *Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la* funzione di Dirichlet *definita come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa funzione è discontinua in ogni punto di $[0, 1]$.
Dato che sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, cioè comunque preso un intervallo esso contiene sia infiniti punti razionali che infiniti punti che sono reali ma non razionali, se nella somma di Cauchy-Riemann si prendono tutti gli $\xi_j \in \mathbb{Q}$ si ottiene

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = 1$$

mentre se si prendono tutti gli $\xi_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *allora* $S_n = 0$.
Quindi il limite delle somme di Cauchy-Riemann dipende dalla scelta dei punti ξ_j, *pertanto la funzione di Dirichlet non è integrabile (secondo Riemann) su* $[0, 1]$. *In particolare, per quanto visto, non si può definire l'area del sottografico di* f.
Alternativamente si poteva procedere osservando che, per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$ *esistono nell'intervallo* $[\alpha, \beta]$ *sia infiniti numeri razionali che infiniti numeri irrazionali, pertanto si ha sempre*

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f = \min_{[\alpha,\beta]} f = 0 \qquad \sup_{[\alpha,\beta]} f = \max_{[\alpha,\beta]} f = 0.$$

Quindi per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ *di* $[a, b]$, *si ha* $s(f, \mathscr{A}) = s(f) = 0$ *e* $S(f, \mathscr{A}) = S(f) = b - a$ *pertanto di nuovo si conclude che la funzione data non è integrabile.*

❒ **Osservazione 6.2.5.** Le osservazioni precedenti mostrano che se f e g sono integrabili, ed $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ salvo al più un numero finito di punti, allora gli integrali di f e di g su $[a, b]$ sono uguali. In particolare, se $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, salvo al più un numero finito di punti, l'integrale di f su $[a, b]$ è uguale all'integrale della funzione costante zero, il quale vale zero: allora una funzione f può avere integrale zero su qualsiasi intervallo senza essere la funzione costantemente nulla. Questo non accade se aggiungiamo qualche ipotesi su f, come mostra il prossimo risultato.

❒ **Proposizione 6.2.6.** *Se* f *è una funzione continua e non negativa su un intervallo* $[a, b]$ *non ridotto a un punto, allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in [a, b].$$

❒ DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \kappa > 0$. Per il teorema di permanenza del segno, esiste $[a', b'] \subset [a, b]$ anch'esso non ridotto a un punto che contiene x_0 e tale che $f(x) \geq \frac{\kappa}{2}$ per ogni $x \in [a', b']$.
Consideriamo la suddivisione che contiene solo i punti a, a', b', b. Dato che f è integrabile, si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx = s(f) \geq s(f, \mathscr{A}) = (a' - a) \inf_{[a,a']} f + (b' - a') \inf_{[a',b']} f + (b - b') \inf_{[b,b']} f \geq (b' - a')\frac{\kappa}{2} > 0,$$

perché f è non negativa e $f(x) \geq \frac{\kappa}{2}$ se $x \in [a', b']$. Da cui l'assurdo.

❒ **Esempio 6.2.7.** *Dalla definizione di integrale si ottiene subito che ogni funzione costante è integrabile su ogni intervallo* $[a, b]$, *e che*

$$f(x) \equiv c \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = c\,(b - a).$$

❐ **Osservazione 6.2.8.** Vi è un'ampia arbitrarietà nella costruzione delle somme di Cauchy. Quando si sappia già che la funzione in questione è integrabile si può usare questa arbitrarietà per compiere il calcolo dell'integrale nel modo più semplice possibile. In generale comunque si può far vedere che anche il calcolo di semplici integrali può diventare piuttosto complicato se ci si basa unicamente sulla definizione. Cercheremo allora nei prossimi paragrafi di trovare una strada che ci permetta di calcolare integrali anche piuttosto complicati in maniera più agevole.

6.3. Proprietà dell'integrale

Premettiamo prima alcune proprietà degli integrali. Si ha il seguente importante teorema

❐ **Teorema 6.3.1.** *Siano f e g funzioni integrabili definite su $[a,b]$. Allora valgono le seguenti proprietà dell'integrale:*

- <u>Linearità dell'integrale</u>

Siano α, β costanti. Allora la funzione $\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- <u>Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione</u>

Sia $a \leq r \leq b$ allora f è integrabile su $[a,r]$ e su $[r,b]$ e vale

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^r f(x)\, dx + \int_r^b f(x)\, dx.$$

Se $a < b$ si pone

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

- <u>positività e monotonia dell'integrale</u>

Se $f \geq 0$ in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Se $f \geq g$ in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

Inoltre le funzioni f^+, f^- e $|f|$ risultano integrabili, e si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Osservazione 6.3.2. L'ultima parte del teorema appena enunciato non si può invertire, nel senso che se $|f|$ è integrabile, non è detto che anche f lo sia. Come controesempio consideriamo la funzione $f = 1_{\mathbb{Q}} - 1/2$, dove $1_{\mathbb{Q}}$ è la funzione di Dirichlet, che sappiano non essere integrabile. Allora f non è integrabile, perche' altrimenti anche la funzione di Dirichlet lo sarebbe, visto che le constanti lo sono. Tuttavia il valore assoluto di f è la costante $1/2$ che è integrabile.

Osservazione 6.3.3. Da quanto visto finora, si ha che, fissato l'intervallo $[a, b]$, l'applicazione

$$f \mapsto \mathscr{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

che ad ogni funzione integrabile f associa il suo integrale, è un'applicazione lineare non decrescente, cioè verifica le ipotesi:
a) $\mathscr{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathscr{I}(f) + \beta\mathscr{I}(g)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed ogni f, g
b) $\mathscr{I}(f) \leq \mathscr{I}(g)$ per ogni $f \leq g$.

Definizione 6.3.4. Data una funzione integrabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, chiameremo *media di f su $[a, b]$* la quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema 6.3.1. (TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora si ha*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Nel caso in cui la funzione f sia continua, esiste $z \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z). \tag{6.3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo per ogni $x \in [a, b]$

$$\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f,$$

dalle proprietà dell'integrale appena enunciate si ottiene la prima parte.
Per quanto riguarda la seconda parte, essendo f continua per il Teorema di Weierstrass ha

massimo M e minimo m rispettivamente. Dalle proprietà di monotonia si ottiene

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M$$

quindi il valore $\int_a^b f(x)\,dx$ sta tra m e M. Per la proprietà dei valori intermedi esiste z tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z)$$

per qualche $z \in [a,b]$

❒ **Osservazione 6.3.5.** Il Teorema della Media Integrale ha un'interessante significato geometrico: se riscriviamo la formula (6.3.1) nel seguente modo

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(z)$$

possiamo dire che l'area del sottografico di f nell'intervallo $[a,b]$ è pari all'area del rettangolo di base $[a,b]$ e di altezza $f(z)$.

6.4. Primitive. Integrali indefiniti

Mostreremo ora come il problema del calcolo di integrali si riduce a quello di un calcolo per variazione di una primitiva, cioè una funzione derivabile la cui derivata coincide con la funzione integranda. Quindi il problema essenziale diventerà la ricerca di primitive di opportune classi di funzioni. Cominciamo con la seguente definizione.

❒ **Definizione 6.4.1.** Se f è una funzione definita su un intervallo $[a,b]$, si dice che $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se G è derivabile su $[a,b]$ e si ha $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

❒ **Proposizione 6.4.2.** *Due primitive di una stessa funzione sullo stesso intervallo differiscono per una costante.*

❒ Dimostrazione. Siano G_1 e G_2 due primitive di una funzione f in $[a,b]$. Allora si ha per definizione che $G_1' - G_2' = 0$ in $[a,b]$ cioè $(G_1 - G_2)' = 0$ dunque $G_1 - G_2 = C$ con C costante reale (che era quello che volevamo dimostrare).

❒ **Osservazione 6.4.3.** Si noti che la dimostrazione precedente si basa in maniera essenziale sul fatto che siamo su un intervallo. Infatti dal fatto che $G_1' = G_2'$ non segue necessariamente che

$G_1 - G_2$ è costante, se si elimina la condizione che $[a, b]$ sia un intervallo. Ad esempio le funzioni

$$G_1(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad G_2(x) = \begin{cases} 1 + \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

hanno entrambe derivata $1/x$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma la loro differenza non è una costante.

❒ **Osservazione 6.4.4.** Esistono funzioni che non hanno primitive. Ad esempio la funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è una di queste. Infatti, se per assurdo F fosse una primitiva di f su tutto $\mathbb{R}$ si avrebbe

$$F'(x) = 0 \ \ \forall x < 0, \qquad F'(x) = 0 \ \ \forall x > 0,$$

per cui esisterebbero due costanti c_1 e c_2 tali che

$$F(x) = c_1 \ \ \forall x < 0, \qquad F(x) = c_2 \ \ \forall x > 0.$$

Ma dovendo essere F derivabile (e quindi continua) su tutto $\mathbb{R}$, deve essere $c_1 = c_2 = F(0)$ e quindi $F(x) = c_1$ for all $x \in \mathbb{R}$. In particolare $F' \equiv 0$ ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere $F'(0) = f(0) = 1$.

❒ **Definizione 6.4.5.** Si dice INTEGRALE INDEFINITO DI f, e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\, dx,$$

l'insieme di tutte le primitive di una funzione f rispetto alal variabile x, cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Come vedremo grazie al Teorema 6.5.1 (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE), il problema del calcolo degli integrali si riconduce prima di tutto a quello di saper determinare le primitive di opportune classi di funzioni.

❒ **Osservazione 6.4.6.** Occorre ricordare che non tutte le primitive riescono ad essere espresse in termini di funzioni elementari; ad esempio $\int e^{-x^2}\, dx$ oppure $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Si indichi con G la generica primitiva di f (a meno di costanti arbitrarie). Si ha la seguente tabella di primitive elementari.

	f	G
1.	c	$c\,x$
2.	x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$
3.	$\dfrac{1}{x}$	$\log\|x\|$
4.	$\sin x$	$-\cos x$
5.	$\cos x$	$\sin x$
6.	e^x	e^x
7.	a^x	$\dfrac{a^x}{\log a}$
8.	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

❒ **Esempio 6.4.7.** *Data la funzione*

$$f(x) = \cos x\sqrt{\sin x}$$

trovare la primitiva che si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$

Sia

$$F_C(x) = \int \cos\sqrt{\sin x}\,dx = \frac{(\sin x)^{3/2}}{3/2} + C$$

la generica primitiva di f al variare di C costante arbitraria. Allora dobbiamo trovare C tale che

$$F_C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

questo porta immediatamente a

$$C = -\frac{2}{3}$$

quindi la primitiva richiesta è

$$F_{-2/3}(x) = \frac{2}{3}\left[(\sin x)^{3/2} - 1\right]$$

❒ **Esempio 6.4.8.** *Trovare l'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e*

$$f'(x) = -\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}$$

Si ha

$$-\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}\,dx = -\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = -\log(1+\sin^2 x) + C$$

quindi

$$f(x) = -\log(1+\sin^2 x) + C$$

Impongo che $f(0)=0$ e questo porta immediatamente a $C=0$ dunque la funzione richiesta è esattamente

$$f(x) = -\log(1+\sin^2 x)$$

6.5. Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il fatto di avere un'espressione esplicita della primitiva per alcune funzioni risulta di grande importanza, come viene confermato da questo fondamentale risultato.

Teorema 6.5.1. (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Sia f una funzione integrabile su un intervallo (a,b), e sia G una sua primitiva su (a,b) tale che esistano finiti*

$$G(a^+) := \lim_{x\to a^+} G(x) \qquad G(b^-) := \lim_{x\to b^-} G(x).$$

Allora prolunghiamo per continuità la G ponendo $G(a) := G(a^+)$ e $G(b) := G(b^-)$; l'estensione (che chiameremo ancora G) risulta ora continua su $[a,b]$. Si ha dunque

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b.$$

Dimostrazione. Si consideri una partizione di $[a,b]$ e sia $a=x_0$ e $b=x_n$. Allora si ha

$$\begin{aligned} G(b)-G(a) &= G(x_n)-G(x_0) = [G(x_n)-G(x_{n-1})]+[G(x_{n-1})-G(x_{n-2})] \\ &\quad + \cdots + [G(x_2)-G(x_1)]+[G(x_1)-G(x_0)] = \sum_{j=1}^{n}[G(x_j)-G(x_{j-1})] \end{aligned}$$

Applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1},x_j]$; allora esiste $\xi_j \in (x_{j-1},x_j)$ tale che

$$G(x_j)-G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1})\,G'(\xi_j) = (x_j-x_{j-1})\,f(\xi_j)$$

perché per ipotesi G è una primitiva di f e dunque $G'(\xi_j) = f(\xi_j)$. Allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\ f(\xi_j) = S_n$$

dove S_n è una somma $n-$esima di Cauchy-Riemann per f. Questo vale per ogni n, quindi passando al limite si ottiene

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Siccome f è integrabile perché continua, allora questo procedimento va bene per ogni S_n.

❐ **Definizione 6.5.1.** La quantità $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ viene detta INTEGRALE DEFINITO di f da a a b.

Risulta quindi fondamentale il fatto di riuscire a ricavare un'espressione esplicita della primitiva delle funzioni oggetto del nostro studio. Vediamo quindi ora alcuni metodi di calcolo delle primitive.

6.6. Metodi di integrazione

6.6.1. Integrazione per scomposizione

Sfruttando la linearità dell'integrale si ha che

$$\boxed{\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx}$$

❐ **Esempio 6.6.1.**

$$\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x} \right)\, dx = \frac{1}{\pi} \log |x| + \frac{1}{\pi \log a}\, a^{\pi x} + C \qquad a > 0$$

6.6.2. Integrazione per sostituzione

Sfruttando la formula di derivazione di una funzione composta si ha

$$\frac{d}{dx} G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x))\, \varphi'(x) = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$$

se si indica con G una primitiva di f, tale per cui si abbia dunque $G' = f$. Dunque passando alle primitive e ricordando il significato di primitiva si arriva alle seguenti formule

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt}$$

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt}$$

❐ **Esempio 6.6.2.** *Sia da risolvere*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

Operiamo la sostituzione $e^x = t$ *da cui* $x = \log t$ *e* $dx = \frac{1}{t}\,dt$*; d'altra parte per quanto riguarda gli estremi di integrazione, se* $x = 0$ *allora* $t = 1$ *mentre se* $x = 1$ *si ha* $t = e$*. Alla fine si ottiene*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{1+t^2} = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

❐ **Esempio 6.6.3.** *Sia da risolvere*

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$$

Operiamo la sostituzione $\cos x = t$ *da cui* $dt = -\sin x\,dx$*. Si ha*

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$$

Proviamo adesso con la sostituzione $\sin x = t$ *da cui* $dt = \cos x\,dx$*. Si ha stavolta*

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{t}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt = -\frac{1}{2}\log(1-t^2) + C = -\log|\cos x| + C.$$

6.6.3. Integrali immediati

Come alternativa alla sostituzione si possono sfruttare le seguenti formule

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C}$$

$$\int [f(x)]^\alpha \, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

❒ **Esempio 6.6.4.**

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

❒ **Esempio 6.6.5.**

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

❒ **Esempio 6.6.6.**

$$\int \frac{\sin(3\log x)}{x}\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3\log x) + C$$

❒ **Esempio 6.6.7.**

$$\int 2x^2 \sqrt[3]{x^3+3}\, dx = \frac{2}{3}\int 3x^2\,(x^3+3)^{1/3}\, dx = \frac{2}{3}\frac{(x^3+3)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{2}(x^3+3)^{4/3} + C$$

6.6.4. Integrazione di funzioni razionali

Si tratta di calcolare

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Il punto chiave è che il grado del numeratore deve essere *inferiore* al grado del denominatore. In caso contrario prima di tutto si opera una divisione di polinomi fino ad avere (per linearità dell'integrale) la somma di due integrali di cui uno è un polinomio e l'altro è una funzione razionale in cui appunto il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore. Quindi possiamo assumere questa ipotesi senza perdita di generalità.
Si distinguono diversi casi.

• **Primo caso: denominatore di primo grado**

In tal caso si ha

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

❒ **Esempio 6.6.8.**

$$\int \frac{4}{3x+2}\, dx = \frac{4}{3}\log|3x+2| + C$$

• **Secondo caso: denominatore di secondo grado (radici distinte)**
In tal caso si cerca di scrivere l'integrale come somma di due integrali aventi denominatore di primo grado, attraverso la cosiddetta "riduzione per fratti semplici" illustrata dal seguente esempio.

❐ **Esempio 6.6.9.** *Sia da calcolare*

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx$$

Il denominatore è di secondo grado e l'equazione corrispondente ammette due radici distinte (reali) per cui $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. *A questo punto l'idea è di riscrivere l'integrale proposto come*

$$\int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx$$

cercando opportune costanti reali A *e* B *che realizzino l'uguaglianza desiderata. Si ha dunque, facendo il minimo comun denominatore con l'idea di uguagliare membro a membro*

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx = \int \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=4 \end{cases}$$

e dunque $A=3$ *e* $B=-2$. *Riassumendo, sfruttando le formule relative al primo caso, si ha*

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{3}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x+2}\,dx = 3\log|x+1| - 2\log|x+2| + C$$

Se il denominatore è decomposto in polinomi alcuni dei quali hanno grado maggiore di 1 (per esempio se ci sono cosiddetti falsi quadrati), si deve cercare una decomposizione in fratti semplici che tenga conto di questo grado differente; l'idea è quella di cercare di decomporlo in frazioni con numeratore di grado sempre uno meno del denominatore, come illustra il seguente esempio.

❐ **Esempio 6.6.10.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx.$$

Si ha

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx.$$

A questo punto cerchiamo A, B, C, D costanti reali tali che

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx.$$

Come si vede, nelle frazioni al secondo membro il grado del numeratore è inferiore di 1 rispetto al grado dei rispettivi denominatori. La scelta

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{\tilde{A}}{x^2}\,dx + \int \frac{\tilde{B}}{x^2+1}\,dx.$$

NON avrebbe portato risultati. Si ha dunque

$$\int \frac{Ax+B}{x^2}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx = \int \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

quindi si ha

$$A+C=1 \qquad B+D=0 \qquad A=1 \qquad B=1$$

da cui

$$A=1 \qquad B=1 \qquad C=0 \qquad D=-1.$$

Allora

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \log|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

❒ **Esempio 6.6.11.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\,dx$$

Innanzitutto si osserva che il numeratore ha grado inferiore al denominatore, quindi si può procedere con le tecniche appena illustrate. Si ha che $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$ *quindi con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene*

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-4 \end{cases}$$

e dunque $A=4$ *e* $B=-1$. *Riassumendo si ottiene*

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\,dx = \int \frac{4}{x-4}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx = 4\log|x-4| - \log|x-2| + C$$

- **Terzo caso: denominatore di secondo grado (quadrato perfetto)**

In questo caso si opera una sostituzione ponendo la radice del denominatore uguale a t, con l'idea di semplificare la formula dell'integrale, come mostra il seguente esempio.

❐ **Esempio 6.6.12.**

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(2x+1)^2} &= \int \frac{\frac{t-1}{2}+2}{t^2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int \frac{t+3}{t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t| - \frac{3}{4}\frac{1}{t} + C = \frac{1}{4}\log|2x+1| - \frac{3}{4}\frac{1}{2x+1} + C\end{aligned}$$

• **Quarto caso: denominatore di secondo grado (denominatore non si annulla mai)**
In tal caso si ha

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$$

oppure nel caso più generale

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{x+d}{(x+b)^2+a^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2b}{x^2+2bx+b^2+a^2}\,dx + \int \frac{d-b}{(x+b)^2+a^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2bx+b^2+a^2) + \frac{d-b}{a}\arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) + C\end{aligned}}$$

❐ **Esempio 6.6.13.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx$$

Innanzitutto si osserva che il numeratore ha grado inferiore al denominatore, quindi si può procedere con le tecniche illustrate in precedenza. Si ha che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ *e il termine di secondo grado è un cosiddetto "falso quadrato", quindi non è ulteriormente decomponibile. Allora con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene*

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=3 \\ A-C=0 \end{cases}$$

e dunque $A=1$, $B=-1$ *e* $C=1$. *Riassumendo si ottiene*

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

Mentre il primo termine è piuttosto facile da trattare, il secondo integrale richiede un po' di lavoro aggiuntivo. Occupiamoci dunque dell'integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\end{aligned}$$

L'ultimo integrale va trattato attraverso il metodo del completamento del quadrato al fine di potersi ricondurre al caso della primitiva dell'arcotangente di una opportuna funzione. Si ha

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

Quindi

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \sqrt{3}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Allora riassumendo si ha

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

6.6.5. Integrazione per parti

Ricordando la formula della derivata di un prodotto di funzioni

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

si hanno le seguenti formule

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

❒ **Esempio 6.6.14.**

$$\int x\,\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

❒ **Esempio 6.6.15.**

$$\int \log x \, dx = x \, \log x - \int x \, \frac{1}{x} \, dx = x \, \log x - x + C$$

❒ **Esempio 6.6.16.**

$$\int \arctan x \, dx = x \, \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \, \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

❒ **Esempio 6.6.17.**

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \, \sin x = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

da cui si ricava

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

Analogamente si può ricavare

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C.$$

6.6.6. Integrazione delle funzioni trigonometriche

- Nel caso di integrali di questo tipo

$$\int f(\sin x) \, \cos x \, dx$$

l'idea è quella di operare la seguente sostituzione $\sin x = t$ in modo che $dt = \cos x \, dx$. Analogamente per integrali di questo tipo

$$\int f(\cos x) \, \sin x \, dx$$

l'idea è quella di operare la seguente sostituzione $\cos x = t$ in modo che $dt = -\sin x \, dx$.
Invece ricordando le formule trigonometriche

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad (\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

si ottiene immediatamente

$$\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C \qquad \int (\cos x)^2 \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$$

(si ottiene lo stesso risultato integrando per parti una volta e poi usando il fatto che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

• Invece un integrale di una funzione razionale che contiene $\sin x$ e $\cos x$ deve essere trattata in maniera ancora differente. L'idea è quella di ricondurla all'integrale di una funzione razionale attraverso la sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

in questo modo si ottiene

$$x = 2\arctan t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

da cui

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

che vanno sostituiti nell'integrale corrispondente.

❒ **Esempio 6.6.18.**

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

Con la sostituzione indicata si ottiene

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

che semplificando si ha

$$\int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt = \int \frac{2}{(1+t^2)}\,dt - \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt = 2\arctan t + \frac{2}{1+t} + C = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

• Altri tipi di integrali possono essere ricavati con sostituzioni opportune.

❒ **Esempio 6.6.19.** *Si calcoli*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Con la sostituzione $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *si ottiene*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int 1 = t + C = \arcsin x + C$$

❒ **Esempio 6.6.20.** *Si calcoli*

$$\int \sqrt{4-t^2}\,dt.$$

Con la sostituzione $x = 2\sin t$ *si ottiene*

$$4\int \cos^2 t\,dt = 2t + 2\sin t\cos t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$$

CAPITOLO 7

Integrali generalizzati

Finora abbiamo definito l'integrale $\int_a^b f\,dx$ solo per funzioni f *limitate* e definite su un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato; ci occuperemo ora del caso in cui una o entrambe queste ipotesi vengono a mancare.

7.1. Integrali di funzioni non limitate

Cominciamo con il caso di una funzione $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$; supponiamo per semplicità che f sia continua (dunque integrabile e in particolare limitata) su ogni intervallo del tipo $[a,\beta]$ con $\beta < b$.
L'idea per definire l'integrale di f in $[a,b]$ è quello di integrare tra a e $b-\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$ e poi passare al limite per $\varepsilon \to 0^+$.

❐ **Definizione 7.1.1.** Se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{7.1.1}$$

diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO O IMPROPRIO) su $[a,b)$ ed il limite (7.1.1) verrà indicato con la scrittura

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{7.1.2}$$

e diremo che l'integrale (7.1.2) è CONVERGENTE. Se invece il limite (7.1.1) esiste ed è uguale a $+\infty$ $[\![-\infty\,]\!]$diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE $[\![$NEGATIVAMENTE $]\!]$e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \qquad [\![-\infty\,]\!].$$

Infine se il limite (7.1.1) non esiste, diremo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ NON HA SENSO (O NON ESISTE).

In modo analogo si definisce l'integrabilità generalizzata per le funzioni $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continue (che quindi sono integrabili sugli intervalli del tipo $[\alpha, b]$ per ogni $\alpha > a$), e tali per cui si abbia $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, ponendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \tag{7.1.3}$$

❐ **Definizione 7.1.2.** Se f è definita su (a,b) ed è integrabile su $[\alpha,\beta]$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$, scelto un punto $c \in (a,b)$, diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO) su (a,b) se essa è integrabile su $(a,c]$ e su $[c,b)$ nel senso delle (7.1.1) e (7.1.3), ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se uno solo degli integrali $\int_a^c f(x)\,dx$ o $\int_c^b f(x)\,dx$ è divergente positivamente ⟦negativamente ⟧, o se sono entrambi divergenti positivamente ⟦entrambi divergenti negativamente ⟧, diremo che $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge positivamente ⟦negativamente ⟧. In tutti gli altri casi, diremo che $\int_a^b f(x)\,dx$ non ha senso (o non esiste).

❐ **Osservazione 7.1.3.** Non è difficile vedere che la definizione precedente è ben posta, nel senso che non dipende dal punto c scelto per spezzare l'integrale.

Nel seguito ci limiteremo in generale a trattare l'integrabilità di funzioni f definite su intervalli (o su unioni finite di intervalli) che siano illimitate solo intorno ad un numero finito di punti; in tal caso si divide il dominio di f in tanti sottointervalli in modo che in ciascuno di essi la funzione f risulti illimitata solo intorno ad uno degli estremi, e si richiede che f sia integrabile in senso generalizzato in ognuno di tali sottointervalli, secondo le definizioni precedenti. Se invece l'integrale di f su uno di tali intervalli, o su vari di essi, diverge, ma sempre o positivamente o negativamente, diremo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

❐ **Osservazione 7.1.4.** Per gli integrali generalizzati valgono le proprietà di somma, confronto, spezzamento analoghe a quelle viste nelle sezioni precedenti.

❐ **Osservazione 7.1.5.** Avremmo potuto pensare di definire l'integrale di una funzione definita su un intervallo limitato (a,b) senza spezzare l'intervallo, semplicemente considerando il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Tuttavia il risultato di tale operazione è diverso dall'integrale generalizzato, in quanto con questa scelta risulterebbero "integrabili" anche funzioni che non rientrano nella nostra definizione, e non varrebbe più la formula di spezzamento! Ad esempio, è facile verificare che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x \, dx$$

non ha senso, mentre

$$\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \tan x \, dx = 0$$

per ogni ε, e lo spezzamento in

$$\int_{-\pi/2}^{0} \tan x \, dx + \int_{0}^{\pi/2} \tan x \, dx$$

è la scrittura $(-\infty) + (+\infty)$.

❒ **Proposizione 7.1.6.** *Se una funzione f è non negativa sull'intervallo $[a, b)$, ed è integrabile su $[a, \beta]$ per ogni $\beta < b$, l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ esiste; inoltre tale integrale può solo essere o finito oppure divergente positivamente. Lo stesso vale anche per funzioni non positive, oppure per intervalli $(a, b]$, e di conseguenza per intervalli (a, b).*

❒ **Esempio 7.1.7.** *Consideriamo la funzione $\dfrac{1}{x^\alpha}$ definita in $(0, 1]$: dato che è positiva, l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ ha sempre senso. Se $\alpha \leq 0$ la funzione risulta integrabile nel senso di Riemann (non serve quello generalizzato); se invece $\alpha > 0$ si ha, per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} -\log \varepsilon & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

per cui passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ottiene che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

e che se $\alpha < 1$ l'integrale (generalizzato se $\alpha > 0$) vale $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

❒ **Esempio 7.1.8.** *Dimostriamo che l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

è convergente.

Dalla definizione si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{1/2}\right]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon})$$

quindi passando al limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

7.2. Criteri di integrabilità al finito

Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue con

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$$

I seguenti criteri permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

❐ **Teorema 7.2.1.** CRITERIO DEL CONFRONTO *Se* $0 \le f(x) \le g(x)$ *in* $[a, b)$ *allora*

g *integrabile* $\Rightarrow$ f *integrabile*
f *non integrabile* $\Rightarrow$ g *non integrabile*

Infatti per le proprietà di monotonia dell'integrale si ha

$$0 \le \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \le \int_a^{b-\varepsilon} g(x)\, dx$$

e passando al limite si prova la tesi.

❐ **Teorema 7.2.2.** CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO *Se* $f > 0$ *e* $g > 0$ *e* $f \sim g$ *per* $x \to b^-$ *allora*

f *integrabile* $\Leftrightarrow$ g *integrabile*

Tale criterio può essere esteso al caso in cui $f, g \to +\infty$ per $x \to a^+$ o $f, g \to -\infty$ (in quest'ultimo caso le disuguaglianze valgono con i moduli).

❐ **Esempio 7.2.1.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x}\, dx$$

Si ha che per $x \to 0$

$$\frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} \sim \frac{1}{x^{3/4}}$$

Quindi l'integrale dato si comporta, dal criterio del confronto asintotico, come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}\, dx$$

che come abbiamo visto in un esempio precedente converge perché $3/4 < 1$

❐ **Teorema 7.2.3.** CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x) < +\infty$$

❐ **Esempio 7.2.2.** *Si calcoli*

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Dal teorema precedente proviamo a studiare l'integrabilità di

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx$$

siccome la funzione integranda è positiva adesso, possiamo usare ad esempio il criterio del confronto e maggiorare l'integrale precedente con

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

che converge, quindi anche l'integrale di partenza converge.

7.3. Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

❐ **Definizione 7.3.1.** Se il limite precedente esiste finito, allora f si dice INTEGRABILE IN $[a, +\infty)$ oppure si dice che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ È CONVERGENTE. Se il precedente limite è uguale a $+\infty$ $[\![-\infty$ $]\!]$diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE $[\![$NEGATIVAMENTE $]\!]$. Infine in tutti gli altri casi diremo che L'INTEGRALE GENERALIZZATO NON ESISTE.

Analogamente se $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^b f(x)\,dx$$

ed infine se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

Esempio 7.3.2. *La funzione* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$*, definita in* $[1, +\infty)$*, ha evidentemente integrale divergente positivamente se* $\alpha \leq 0$ *(infatti avremmo* $f(x) \geq 1$ *per ogni* x*); se invece è* $\alpha > 0$*, si ha per ogni* $y > 1$

$$\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log y & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{y^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \to +\infty$*, si ottiene che*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1,$$

e che se $\alpha > 1$*, l'integrale generalizzato vale* $\dfrac{1}{\alpha - 1}$*.*

Osservazione 7.3.3. Da quanto detto finora si deduce che per ogni numero reale α si ha $\int_0^{+\infty} x^\alpha\,dx = +\infty$; inoltre, operando la sostituzione $x - x_0 = t$ si ricava che la funzione $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ è integrabile in un intorno di x_0 se e solo se $\alpha > -1$ mentre è integrabile in un intorno di $-\infty$ o di $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$. Va osservato inoltre che l'integrale $\int_{-1}^{1} (1/x)\,dx$ non esiste in quanto, come visto nell'esempio precedente, si ha

$$\int_{-1}^{0} x^{-1}\,dx = -\infty \qquad \int_0^1 x^{-1}\,dx = +\infty.$$

Bisogna stare attenti a non farsi indurre in errore dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha (essendo la funzione x^{-1} dispari)

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-1}\,dx + \int_\varepsilon^1 x^{-1}\,dx = 0,$$

oppure a non applicare con troppa disinvoltura il teorema fondamentale del calcolo integrale, concludendo che

$$\int_{-1}^{1} x^{-1}\,dx = [\log|x|]_{-1}^{1} = 0.$$

Esempio 7.3.4. *Vediamo se esiste*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx.$$

La funzione $1/\sqrt{|x|}$ *è illimitata per* $x \to 0$*. Suddividiamo allora l'intervallo* $(-1, +1)$ *nei due intervalli* $(-1, 0)$ *e* $(0, 1)$*. Si ha*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} (-2\sqrt{\delta} + 2) = 2$$

e

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \int_\sigma^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\sigma \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\sigma}) = 2.$$

Quindi l'integrale $\int_{-1}^{1}(1/\sqrt{|x|}\,dx$ *esiste e vale 4.*
Si osservi che si sarebbe ottenuto lo stesso risultato calcolando

$$\lim_{\delta\to 0^+\ \sigma\to 0^+} \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\sigma}^{1}.$$

In generale, se ad esempio, una funzione f *è definita e continua nell'intervallo* $[-1,+1]$ *privato del solo punto 0, la definizione data sopra equivale alla richiesta dell'esistenza del limite*

$$\lim_{\delta\to 0^+\ \sigma\to 0^+} \left\{ \int_{-1}^{-\delta} f(x)\,dx + \int_{\sigma}^{1} f(x)\,dx \right\},$$

limite inteso nel senso della teoria delle funzioni di due variabili. Non è la stessa cosa far tendere δ *e* σ *a zero ponendo fra loro un legame (ad esempio ponendo* $\delta = \sigma$*).*

7.4. Criteri di integrabilità all'infinito

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue. Anche in questo caso valgono analoghi criteri che permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

❐ **Teorema 7.4.1.** (CRITERIO DEL CONFRONTO) *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *in* $[a, +\infty)$ *allora*

g *integrabile* $\Rightarrow$ f *integrabile*
f *non integrabile* $\Rightarrow$ g *non integrabile*

❐ **Teorema 7.4.2.** (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO) *Se* $f > 0$ *e* $g > 0$ *e* $f \sim g$ *per* $x \to +\infty$ *allora*

f *integrabile* $\Leftrightarrow$ g *integrabile*

❐ **Teorema 7.4.3.** (CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty \ \Rightarrow\ \int_a^{+\infty} f(x) < +\infty$$

❐ **Esempio 7.4.1.** Se consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x \log^\beta x)$, definita in $[e, +\infty)$ (con $\beta > 0$), si ha che f è positiva, e per ogni $y > e$

$$\int_e^y f(x)\,dx = \begin{cases} \log\log y & \text{se } \beta = 1 \\ \dfrac{(\log y)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{se } \beta \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \to +\infty$, si ottiene che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1,$$

e che se $\beta > 1$ l'integrale generalizzato vale $1/(\beta - 1)$.

❐ **Osservazione 7.4.2.** Non è difficile mostrare che se una funzione f è integrabile (in senso generalizzato) secondo Riemann, anche $|f|$ lo è. Invece una funzione f può avere integrale generalizzato senza che lo abbia la funzione $|f|$, come mostra il seguente esempio. Si parla allora, in analogia con le serie, di funzioni integrabili, ma non assolutamente integrabili. Le funzioni che sono assolutamente integrabili in senso generalizzato hanno particolari proprietà (così come nell'ambito delle serie le serie assolutamente convergenti). Ciò risulterà chiaro quando si constaterà che solo le funzioni assolutamente integrabili sono integrabili secondo Lebesgue (o sommabili).

❐ **Esempio 7.4.3.** *Mostriamo che esiste l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

mentre non esiste l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx.$$

La prima affermazione equivale a dimostrare l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_{\pi/2}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{\pi/2}^{c} - \int_{\pi/2}^{c} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{\cos c}{c} - \int_{\pi/2}^{c} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Ora l'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

esiste, essendo

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Si ricava allora:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Quanto alla seconda affermazione, si ha per n intero positivo:

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\,\pi}^{k\,\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx > \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_{(k-1)\,\pi}^{k\,\pi} |\sin x|\, dx}{k\,\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Poiché la serie armonica diverge, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty.$$

❒ **Esempio 7.4.4.** *Dato x un numero reale, sia $[x]$ la sua parte intera, cioè il massimo intero minore o uguale a x. Fissato un numero $\alpha > 0$, la somma parziale della serie armonica generalizzata di esponente α si può rappresentare come:*

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{1}{[x]^\alpha}\, dx,$$

e si verifica facilmente che la convergenza della serie equivale all'esistenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} (1/[x]^\alpha)\, dx$. Poiché la funzione $1/[x]^\alpha$, generalmente continua in ogni intervallo limitato, ha ordine di infinitesimo α, è evidente che l'integrale esiste per $\alpha > 1$ e non esiste per $\alpha \leq 1$. Analogamente si procede per la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^\alpha}$.

CAPITOLO 8

Funzioni integrali

8.1. Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia f una funzione integrabile (anche in senso generalizzato). Consideriamo l'integrale di f su un intervallo che varia; quindi un estremo lo terremo fissato, per esempio x_0 e l'altro lo lasciamo variabile. La primitiva di f diventa una funzione di x. Si ha la seguente definizione.

❒ **Definizione 8.1.1.** La funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ si chiama FUNZIONE INTEGRALE DI f

Vale il seguente importantissimo teorema.

❒ **Teorema 8.1.1.** SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato). Sia $x_0 \in [a, b]$ e*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Allora si ha che:

1) la funzione F è continua in $[a, b]$
2) Se inoltre f è continua in $[a, b]$ allora F è derivabile in $[a, b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

❒ DIMOSTRAZIONE. 1) Dimostriamo prima di tutto che F è continua. Supponiamo che f sia integrabile in senso proprio (nell'altro caso il risultato viene automaticamente dalla definizione di integrale generalizzato). Siano $x_0, x, y \in [a, b]$. Allora

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{y} f(t)\, dt \right| = \left| \int_{y}^{x} f(t)\, dt \right|.$$

Poniamo ora $L := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Allora

$$\left| \int_{y}^{x} f(t)\, dt \right| \leq \left| \int_{y}^{x} |f(t)|\, dt \right| \leq \left| \int_{y}^{x} L\, dt \right| = L|x-y|.$$

Ora per ogni $\varepsilon > 0$, fissando $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ si ha che se $|x-y| < \delta$ allora

$$|F(x) - F(y)| \leq \left| \int_{y}^{x} |f(t)|\, dt \right| \leq L|x-y| \leq \varepsilon,$$

da cui la continuità di F (in realtà questo dimostra che F è Lipschitziana).
2) Dimostriamo ora che F è derivabile. Sia $x_0 \in [a,b]$. Allora dalla definizione di funzione integrale si ha (non è restrittivo, come osservato sotto, considerare a come primo estremo dell'integrale)

$$F(x_0 + h) = \int_{a}^{x_0+h} f(t)\, dt \qquad F(x_0) = \int_{a}^{x_0} f(t)\, dt$$

quindi

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{a}^{x_0+h} f(t)\, dt - \int_{a}^{x_0} f(t)\, dt \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt.$$

Inoltre banalmente si ha

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\, dx$$

da cui

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt.$$

Dall'ipotesi, f è continua, dunque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |t - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Prendendo quindi $0 < |h| < \delta$ si ha che $t \in [x_0, x_0 + h]$ (oppure $t \in [x_0 + h, x_0]$) quindi in ogni caso $|t - x_0| < \delta$ pertanto

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon.$$

Siamo quindi riusciti a dimostrare che F è derivabile e

$$F'(x_0) = f(x_0) \qquad \forall x_0 \in [a,b].$$

❒ **Osservazione 8.1.2.** Si osserva che F ha sempre un grado di regolarità maggiore rispetto a f. Inoltre il teorema ci dice che ogni funzione continua ammette primitiva (che è la sua funzione integrale). Il punto x_0 è arbitrario, cioè la definizione di funzione integrale non cambia se x_0 è sostituito da un altro $y_0 \in [a, b]$ (questo è legato al fatto che due primitive della stessa funzione differiscono per una costante).

❒ **Osservazione 8.1.3.** Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che se f è una funzione continua sull'intervallo I, allora

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Se, invece di essere costanti, gli estremi di integrazione sono due funzioni $a(x)$ e $b(x)$ derivabili su I, usando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che, fissato un punto a

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_a^{b(x)} f(t)\,dt - \int_a^{a(x)} f(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(F(b(x)) - F(a(x))\right) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

❒ **Esempio 8.1.4.** *Indicata con f la funzione definita da*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)}$$

Prima di tutto si ha $f(0) = 0$ quindi il limite richiesto si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Pertanto proviamo ad utilizzare il teorema di de l'Hospital. Calcoliamo a parte, utilizzando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \frac{d}{dx}[f(2x)] = 2\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2x}{x}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x) - 2\,f'(2x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$$

che si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Riapplicando di nuovo il teorema di de l'Hospital si ottiene stavolta

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{1 - \cos x} = 2$$

perché

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos(2x)}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)+2-2\cos(2x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}-2+2\frac{1-\cos(2x)}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}-2+2\frac{1-\cos 2x}{4x^2}\frac{4x^2}{1-\cos x}=2\end{aligned}$$

quindi anche il limite di partenza esiste e vale 2.

❒ **Esempio 8.1.5.** *Calcolare la derivata di*

$$G(x)=\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

Poniamo

$$F(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

Allora, dalla formula di spezzamento, si vede chiaramente che

$$G(x)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt-\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt=F(2x)-F(x)$$

quindi dalla formula di derivazione delle funzioni composte e dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$G'(x)=2\,F'(2x)-F'(x)=2\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 2x-\sin x}{x}=\sin x\frac{2\cos x-1}{x}$$

❒ **Esempio 8.1.6.** *Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin fino all'ordine 2 di*

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

Lo sviluppo richiesto è

$$F(x)=F(0)+F'(0)\,x+\frac{F''(0)}{2}\,x^2+o(x^2)$$

quindi si tratta di determinare i coefficienti dello sviluppo. Si ha chiaramente $F(0)=0$. Inoltre dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dall'esercizio precedente si ha

$$F'(x)=\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}=2-1=1$$

Infine dalla formula di derivazione di un quoziente

$$F''(x)=\frac{[2\cos(2x)-\cos x]x-(\sin 2x-\sin x)}{x^2}$$

a questo punto occorre calcolare

$$\lim_{x\to 0} F''(x)$$

che siccome si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, si prova a trattarlo con il teorema di de l'Hospital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} F''(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 4x\sin 2x - \cos x + x\sin x - 2\cos 2x + \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 4\sin 2x}{2}$$

che quindi vale 0. Concludendo, lo sviluppo richiesto è

$$F(x) = x + o(x^2).$$

❒ **Esempio 8.1.7.** *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t)\, dt}{x(x^2 - \sin^2 x)}$$

Il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Proviamo ad utilizzare il teorema di de l'Hospital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t)\, dt}{x(x^2 - \sin^2 x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x^2} - \sin^2 x}{3x^2 - \sin^2 x - x\sin 2x}$$

A questo punto proviamo ad utilizzare i limiti notevoli. Ricordando che si ha, per $z \to 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2) \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)$$

allora (se pensiamo di fermarci per esempio all'ordine 4)

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \sin^2 x = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Inoltre

$$x\,\sin 2x = x\left[2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right] = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

quindi riassumendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t)\, dt}{x(x^2 - \sin^2 x)} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x^2} - \sin^2 x}{3x^2 - \sin^2 x - x\sin 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{3x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{5}{3} + o(1)} \\
&= -\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

8.2. Only the brave...

❒ **Esempio 8.2.1.** *Si studi la funzione*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Come abbiamo accennato, questo integrale non è esprimibile in termini di funzioni elementari, quindi $F(x)$ non può essere ulteriormente esplicitabile. Studiamola come studieremmo un normale studio di funzione. Si ha $F(0) = 0$ banalmente e inoltre $F'(x) = e^{-x^2}$ dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.
Inoltre, attraverso un cambio di variabile

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\, dt = -\int_0^x e^{-s^2}\, ds = -F(x)$$

quindi F è dispari. Si nota che $F' > 0$ quindi F è crescente su $\mathbb{R}$. Pertanto ammette limite agli estremi del dominio, quindi esiste il limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Chiamiamo λ il limite a $+\infty$, cioè sia

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lambda.$$

Dall'ultimo paragrafo del capitolo si riesce anche a determinare esplicitamente $\lambda = \sqrt{\pi}/2$. Inoltre $F''(x) = -2xe^{-x^2}$ quindi la funzione è concava per $x > 0$ e convessa per $x > 0$. La funzione data ha dunque un andamento simile all'arcotangente (con diversi valori degli asintoti orizzontali).