**LONGITUD DE UNA CURVA:** Si la función $f$ y su derivada $f'$ son continuas en un intervalo $[a,b]$, la longitud de la curva $y=f(x)$, de $x=a$ a $x=b$, está dado por:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

**EJEMPLO 1:** Calcular la longitud de curva de la función $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, desde $x=0$ hasta $x=3$.

Solución

$$y'=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+2)^{1/2}\cdot(\cancel{2}x)$$

$$y'=x\sqrt{x^2+2}$$

$$[y']^2=x^2(x^2+2)=x^4+2x^2$$

$$L=\int_0^3\sqrt{1+(x^4+2x^2)}\;dx$$

$$L=\int_0^3\sqrt{x^4+2x^2+1}\;dx$$

$$L=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\;dx$$

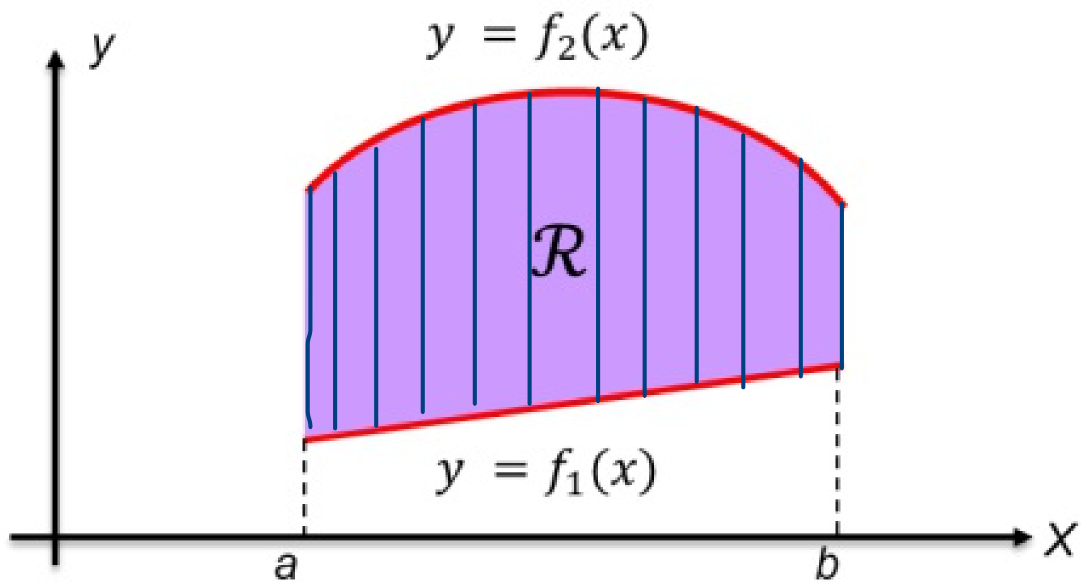
$$L=\int_0^3 x^2+1\,dx=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3$$

$$L=(9+3)-(0)=12$$

# Áreas de Regiones Planas

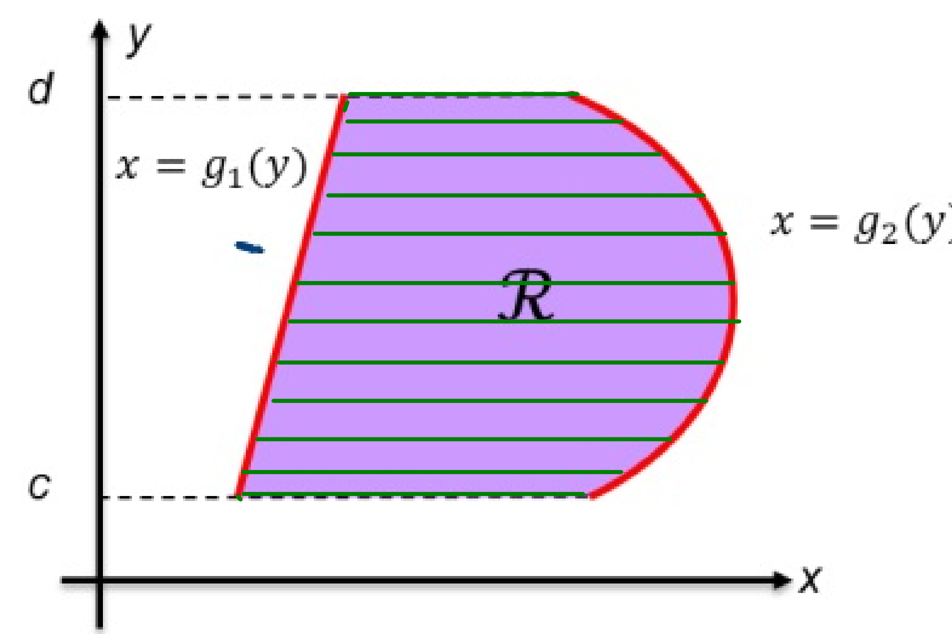
## Tipos de Regiones

### Regiones de Tipo I




$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

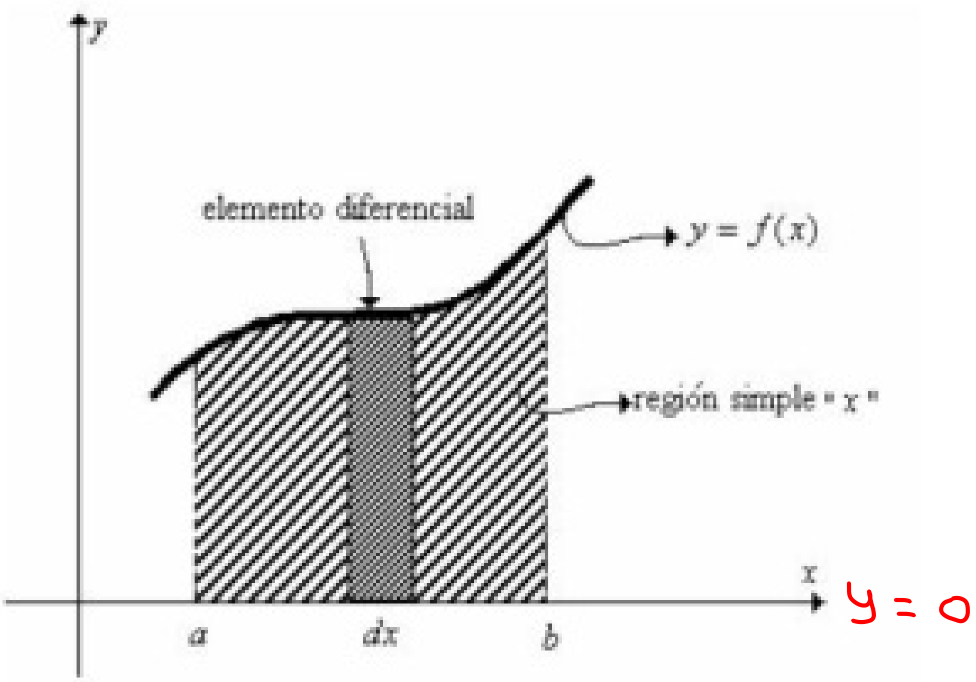
### Regiones de Tipo II

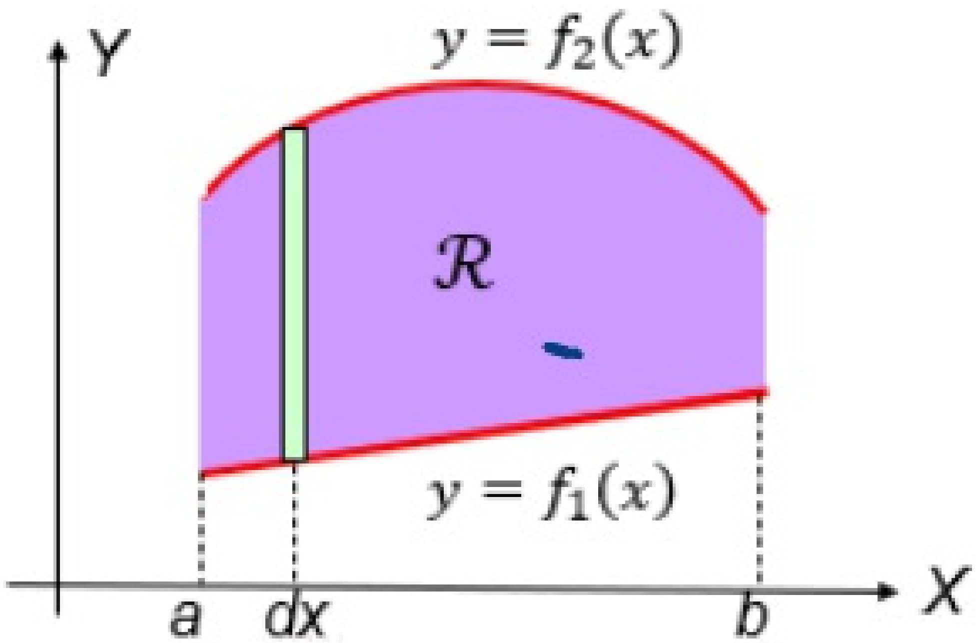



$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$

# Planteo de la Integral para Regiones Tipo I
## (se despeja la variable $y$)

**Si la región es del tipo I entonces:**



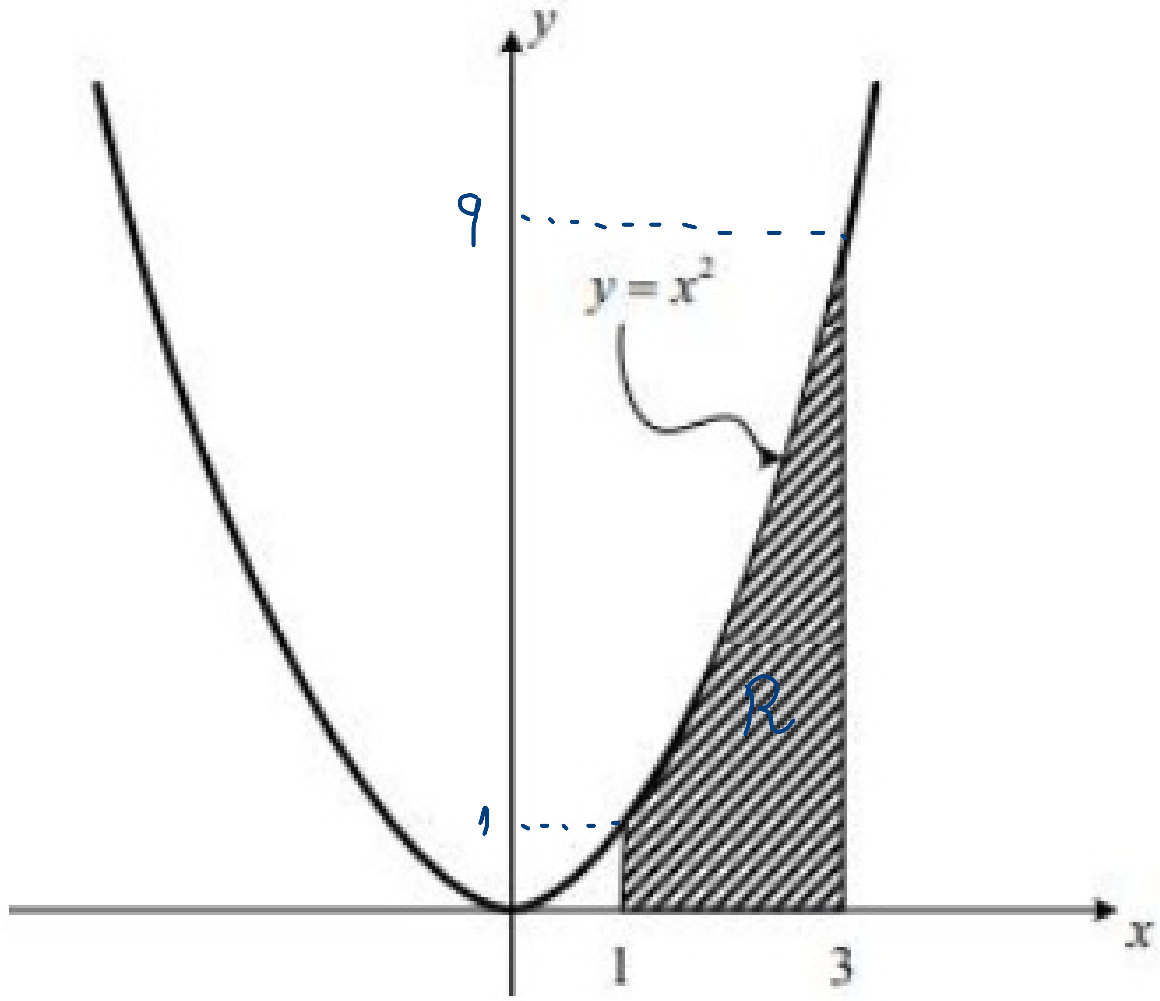




$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

## Ejemplo

Halle el área de la región bajo la curva $y = x^2$ , el eje x en el intervalo $[1,3]$



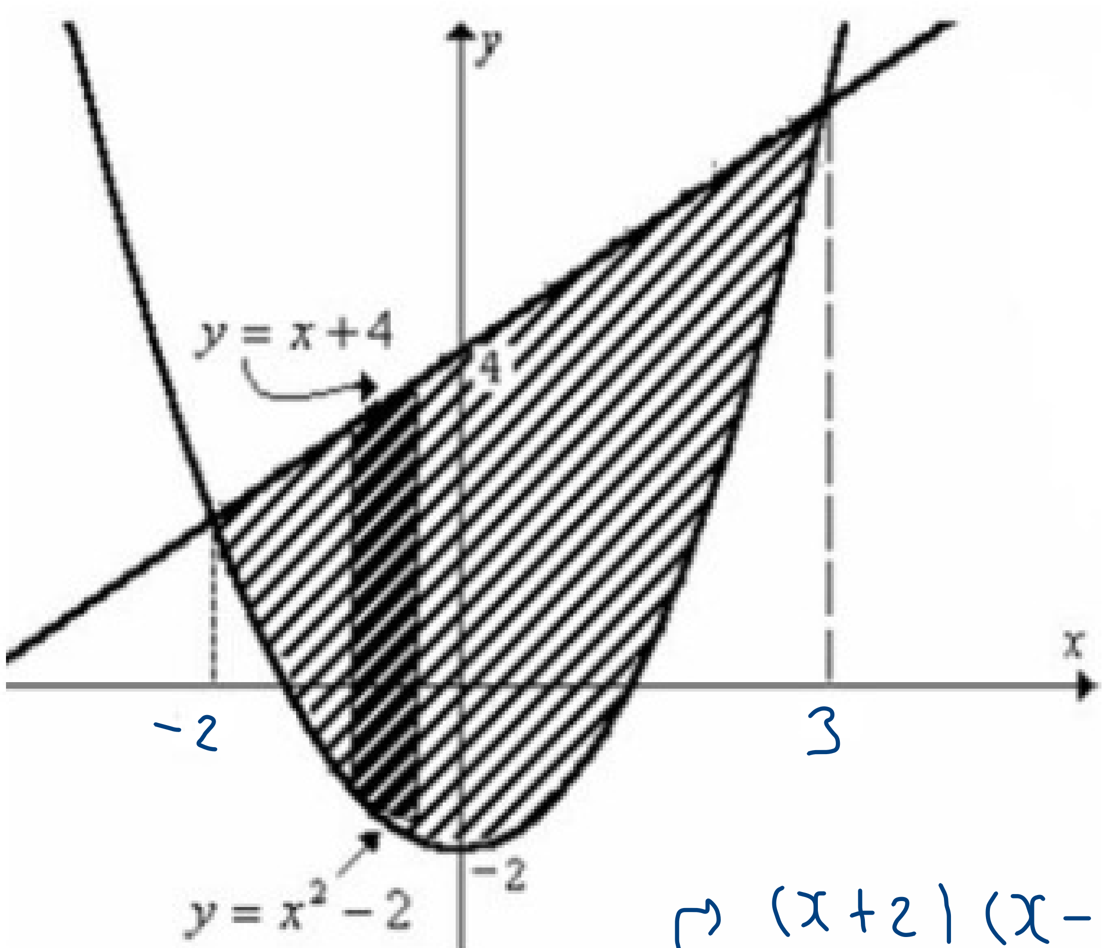

$$A(R) = \int_1^3 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

$$= 9 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{3}\ u^2$$

**Ejemplo** Halle el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2$ , $y = x + 4$




$x^2 - 2 = x + 4$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x \quad 2$

$x \quad -3$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = -2 \lor x = 3$

$$A = \int_{-2}^{3} (x+4) - (x^2 - 2)\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} -x^2 + x + 6\, dx$$

$$A = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \Big|_{-2}^{3}$$

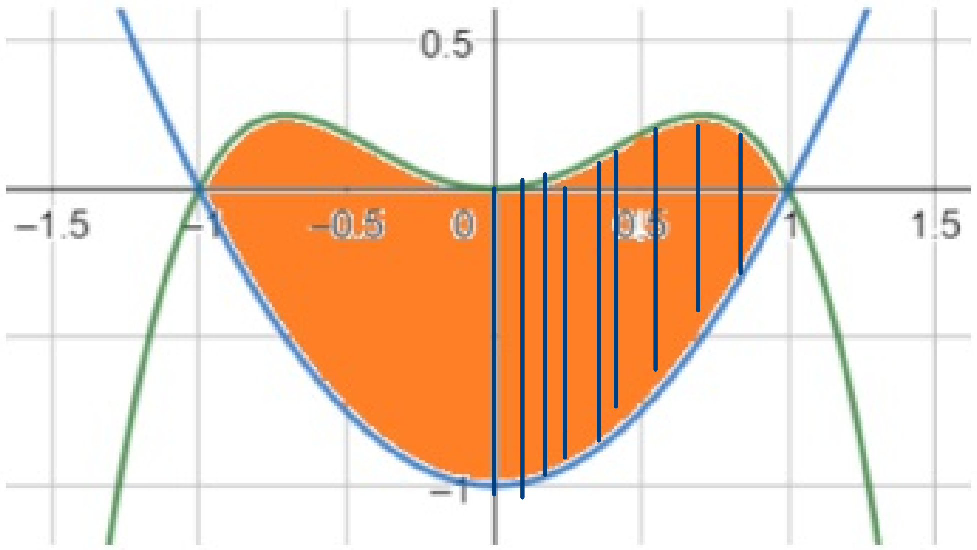
$$A = -9 + \frac{9}{2} + 18 - \left( \frac{8}{3} + 2 - 12 \right)$$

$$A = 9 + \frac{9}{2} - \left( \frac{8}{3} - 10 \right)$$

$$A = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3}$$

$$A = \quad A = \frac{125}{6}\, u^2 \approx 20.83\, u^2$$

**Ejemplo** Halle el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - x^4$ , $y = x^2 - 1$




$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - x^4$

$x^4 = 1$

$x = \pm 1$

$A = 2\int_0^1 (x^2 - x^4) - (x^2 - 1)\, dx$

$A = 2\int_0^1 -x^4 + 1\, dx$

$A = 2\left(-\frac{x^5}{5} + x\right)\Big|_0^1$

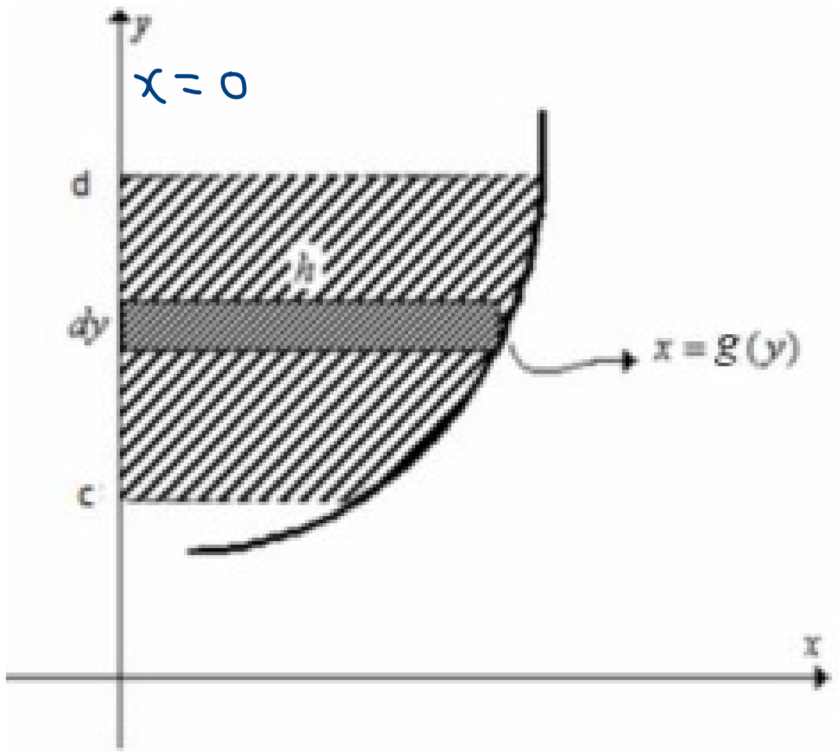
$A = 2\left(-\frac{1}{5} + 1\right)$

$A = 2\left(\frac{4}{5}\right)$

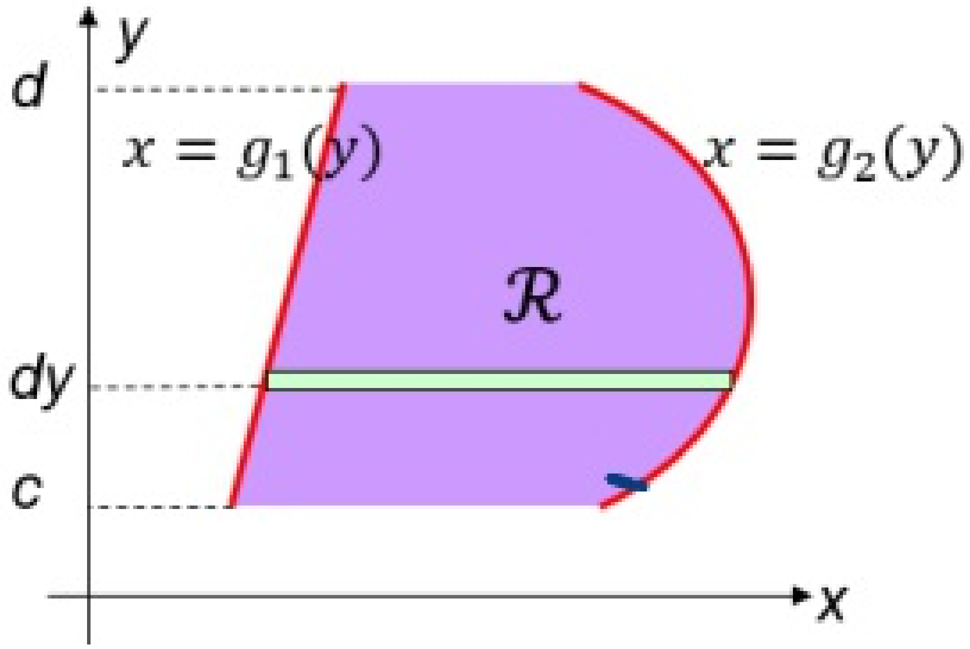
$A = \frac{8}{5}$ //

# Planteo de la Integral para Regiones Tipo II
## (se despeja la variable $x$)

**Si la región es del tipo II entonces:**

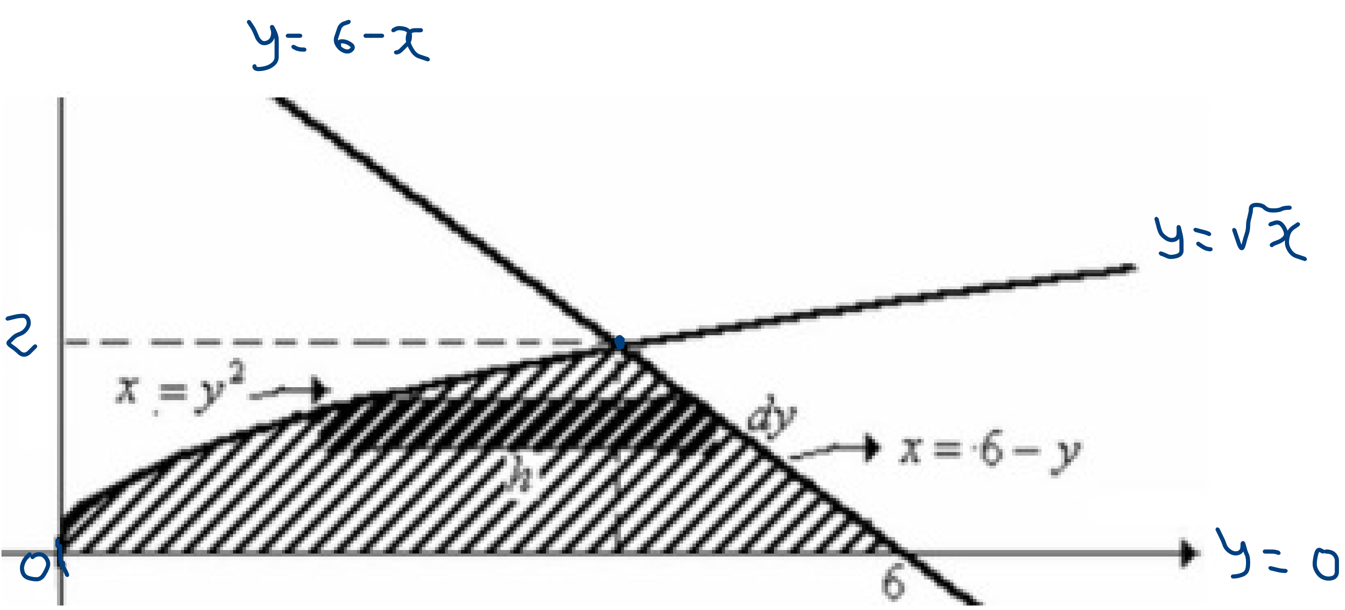



$$A=\int_{c}^{d} g(y)dy$$




$$A(\mathcal{R})=\int_{c}^{d}[g_2(y)-g_1(y)]dy$$

**Ejemplo** Calcule el área de la región encerrada por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ y $y = 0$




| | |
|---|---|
| $y = 6-x$ | $x = 6-y$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $x = y^2$ |

$$y^2 = 6 - y$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$\begin{array}{ll} y & -2 \\ y & 3 \end{array}$$

$$(y-2)(y+3) = 0$$

$$y = 2 \quad \vee \quad y = -3$$

$$A = \int_0^2 (6-y) - y^2 \, dy$$

$$A = \int_0^2 -y^2 - y + 6 \, dy$$

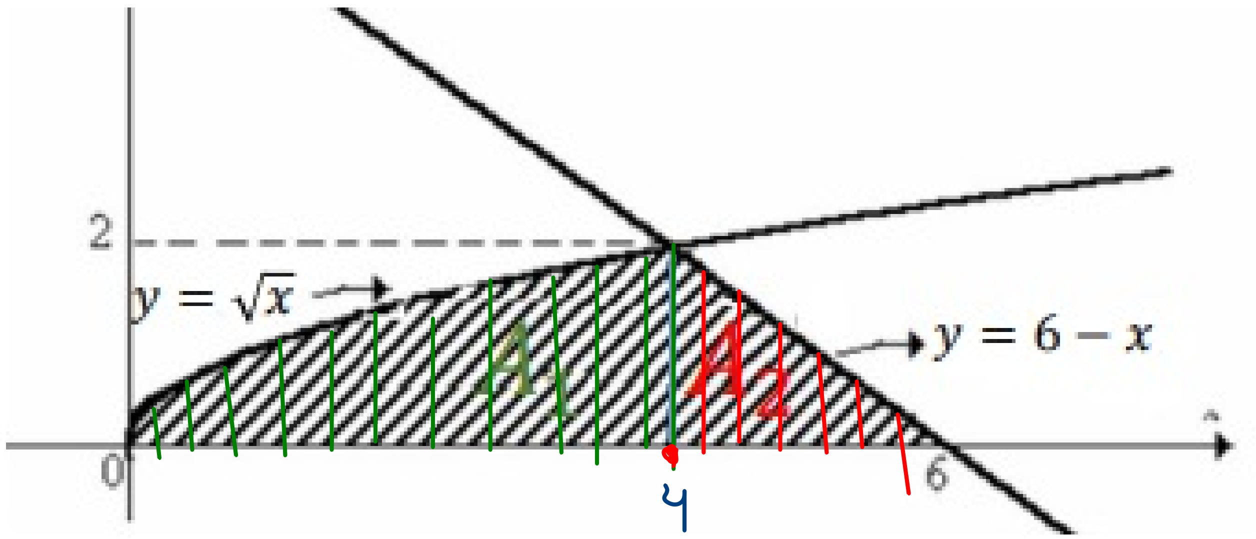
$$A = -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 6y \Big|_0^2$$

$$A = -\frac{8}{3} - 2 + 12 - 0$$

$$A = 10 - \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{22}{3} \quad u^2$$

## **Ejemplo** Calcule el área de la región encerrada por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ y $y = 0$ como región de tipo I




Región del tipo I

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^6 (6 - x)dx$$

$$A = \frac{16}{3} + 2$$

$$A = \frac{22}{3}\, u^2$$

Intersecciones

$y_{parábola} = y_{recta}$

$\sqrt{x} = 6 - x$

$x = 36 - 12x + x^2$

$0 = x^2 - 13x + 36$

$0 = (x - 9)(x - 4)$

$x = 9 \quad \vee \quad x = 4$

$$A = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 + \left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^6$$

$$A = \frac{16}{3} + (36 - 18) - (24 - 8)$$

$$A = \frac{16}{3} + 2$$

$$A\ \frac{22}{3}\ u^2$$

# PASOS PARA HALLAR EL ÁREA DE UNA REGION PLANA

1. Dibuje las curvas dadas, hallando las intersecciones entre ellas
2. Identifique la región plana
3. Defina el rectángulo representativo , el cuál determinará si nuestra región es del Tipo I o Tipo II
4. Calcule los límites de integración
5. Defina la integral o las integrales para el área
6. Evalúe la integral

**Ejercicio** Calcule el área de la región R limitada por las curvas

$$y=\frac{x^2+1}{2} \qquad y=\frac{x}{2}+\frac{7}{2} \qquad y=\frac{7x}{2}+\frac{1}{2}$$

(1) (2) (3)

$x = -\sqrt{2y-1}$