



# Tecnológico de Monterrey

## ACTIVIDAD 2: ANÁLISIS DE TRANSFORMACIONES

Fundamentación de robótica

Alfredo García Suárez

Paola Rojas Domínguez A01737136

21 de febrero del 2025

## Introducción

El propósito de esta tarea es contrastar y analizar las matrices de cambio locales y mundiales de dos clases de robots: un robot antropomórfico y un robot planar. Mediante estas matrices, se determina el impacto de cada articulación en la ubicación y dirección del sistema final en relación a un marco de referencia mundial.

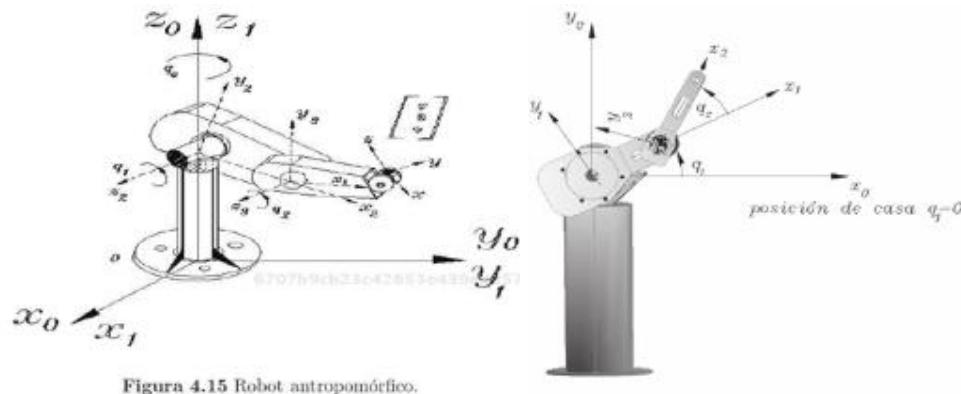


Figura 4.15 Robot antropomórfico.

ROBOT ANTROPOMÓRFICO (3GDL) ROBOT PLANAR (3GDL)

Figura 1. Robot antropomórfico y planar

## Matrices locales

Las matrices de transformación local  $A_i$  describen la relación entre sistemas de coordenadas consecutivos en cada eslabón del robot.

### Matriz de transformación local A1

Robot Antropomórfico: A1	Robot Planar: A1
ans =	ans =
$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & 0 & \sin(\theta_1(t)) & 0 \\ \sin(\theta_1(t)) & 0 & -\cos(\theta_1(t)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t)) & 0 & l_1 \cos(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t)) & 0 & l_1 \sin(\theta_1(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 2. Comparación matrices de transformación local A1

El robot antropomórfico y el robot planar presentan diferencias debido a la naturaleza 3D y 2D de sus respectivos movimientos. En el caso del robot antropomórfico, la primera articulación genera una rotación alrededor del eje  $z$ , pero además introduce un cambio en la orientación del sistema de referencia que inclina el eje  $x$ . Por otro lado, en el robot planar sigue una estructura más simple, ya que la primera articulación solo rota en el plano  $xy$  sin alterar el eje  $z$ . Esta diferencia implica que, en el robot antropomórfico, además de la rotación, existe un

desplazamiento en la dirección  $z$ , mientras que en el robot planar todos los desplazamientos y rotaciones permanecen en el plano  $xy$ .

### Matriz de transformación local A2

<p>Robot Antropomorfico: A2</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2(t)) & -\sin(\theta_2(t)) & 0 & l_2 \cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) & \cos(\theta_2(t)) & 0 & l_2 \sin(\theta_2(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Robot Planar: A2</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2(t)) & -\sin(\theta_2(t)) & 0 & l_2 \cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) & \cos(\theta_2(t)) & 0 & l_2 \sin(\theta_2(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

**Figura 3.** Comparación matrices de transformación local A2

Se observa que en ambas configuraciones la segunda articulación es puramente rotacional y opera en el mismo plano  $xy$ , lo que resulta en matrices iguales. En el robot antropomórfico, aunque el sistema de referencia inicial tiene una orientación distinta debido a la articulación previa, la rotación en esta segunda articulación ocurre únicamente en el plano  $xy$ , sin afectar la posición en el eje  $z$ . De manera similar, en el robot planar, la segunda articulación también genera una rotación en el mismo plano  $xy$ , manteniendo su transformación dentro de un espacio estrictamente bidimensional.

### Matriz de transformación local A3

<p>Robot Antropomorfico: A3</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_3(t)) & -\sin(\theta_3(t)) & 0 & l_3 \cos(\theta_3(t)) \\ \sin(\theta_3(t)) & \cos(\theta_3(t)) & 0 & l_3 \sin(\theta_3(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Robot Planar: A3</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_3(t)) & -\sin(\theta_3(t)) & 0 & l_3 \cos(\theta_3(t)) \\ \sin(\theta_3(t)) & \cos(\theta_3(t)) & 0 & l_3 \sin(\theta_3(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

**Figura 4.** Comparación matrices de transformación local A3

De la misma forma que el caso anterior, la tercera articulación en ambos robots produce matrices idénticas. Dado que en ambos casos la matriz de rotación se define únicamente por el ángulo de la articulación y la traslación solo depende de la longitud del eslabón en la dirección del nuevo eje  $x$ , las expresiones resultantes son equivalentes.

## Matrices globales

Las matrices  $T_i$  simbolizan la transformación de cada articulación en relación con el sistema de referencia global.

<p>Robot Antropomorfico: T1</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & 0 & \sin(\theta_1(t)) & 0 \\ \sin(\theta_1(t)) & 0 & -\cos(\theta_1(t)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Robot Planar: T1</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t)) & 0 & l_1 \cos(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t)) & 0 & l_1 \sin(\theta_1(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

**Figura 5.** Comparación matrices de transformación global T1

<p>Robot Antropomorfico: T2</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) & -\cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t)) & \sin(\theta_1(t)) & l_2 \cos(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) \\ \cos(\theta_2(t)) \sin(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t)) & -\cos(\theta_1(t)) & l_2 \cos(\theta_2(t)) \sin(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) & \cos(\theta_2(t)) & 0 & \sin(\theta_2(t)) l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Robot Planar: T2</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & \sigma_2 l_2 + \cos(\theta_1(t)) l_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & \sigma_1 l_2 + \sin(\theta_1(t)) l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

**Figura 6.** Comparación matrices de transformación global T2

### Matriz de transformación global T3

<p>Robot Antropomorfico: T3</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) \cos(\sigma_2) & -\cos(\theta_1(t)) \sin(\sigma_2) & \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t)) \sigma_1 \\ \sin(\theta_1(t)) \cos(\sigma_2) & -\sin(\theta_1(t)) \sin(\sigma_2) & -\cos(\theta_1(t)) & \sin(\theta_1(t)) \sigma_1 \\ \sin(\sigma_2) & \cos(\sigma_2) & 0 & \sin(\sigma_2) l_3 + \sin(\theta_2(t)) l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Robot Planar: T3</p> <p>ans =</p> $\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & \sigma_2 l_3 + \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) l_2 + \cos(\theta_1(t)) l_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & \sigma_1 l_3 + \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) l_2 + \sin(\theta_1(t)) l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
---	--

where

$$\sigma_1 = \cos(\sigma_2) l_3 + \cos(\theta_2(t)) l_2$$

$$\sigma_2 = \theta_2(t) + \theta_3(t)$$

where

$$\sigma_1 = \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t))$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t))$$

**Figura 7.** Comparación matrices de transformación global finales (T3)

La matriz global final  $T_3$  del robot antropomórfico presenta una estructura tridimensional con rotaciones en los ejes  $x$  y  $z$ , lo que permite movimientos en el espacio, mientras que en el robot planar solo involucra rotaciones en el eje  $z$ , restringiendo su movimiento al plano  $xy$ . Además, la matriz de rotación del antropomórfico es más compleja al combinar varios ejes de rotación, en cambio el planar, al ser un sistema bidimensional, tiene una estructura de  $T_3$  más sencilla y únicamente rota en  $z$ .

# Velocidades

## Velocidad lineal

Robot Antropomórfico: Velocidad lineal

$V(t) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_1(t) \sin(th_1(t)) \sigma_3 - \sigma_2 \cos(th_1(t)) \sigma_4 - l_3 \sigma_1 \cos(th_1(t)) \sigma_6} \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_1(t) \cos(th_1(t)) \sigma_3 - \sigma_2 \sin(th_1(t)) \sigma_4 - l_3 \sigma_1 \sin(th_1(t)) \sigma_6} \\ \sigma_2 \sigma_3 + l_3 \sigma_1 \sigma_5 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_3(t)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_2(t)}$$

$$\sigma_3 = \sigma_5 l_3 + \cos(th_2(t)) l_2$$

$$\sigma_4 = \sigma_6 l_3 + \sin(th_2(t)) l_2$$

$$\sigma_5 = \cos(th_2(t) + th_3(t))$$

$$\sigma_6 = \sin(th_2(t) + th_3(t))$$

Robot Planar: Velocidad lineal

$V(t) =$

$$\begin{pmatrix} -\sigma_4 (\sin(\sigma_1) l_3 + \sin(\sigma_2) l_2) - \sigma_5 (\sin(\sigma_1) l_3 + \sin(\sigma_2) l_2 + \sin(th_1(t)) l_1) - l_3 \sigma_3 \sin(\sigma_1) \\ \sigma_4 (\cos(\sigma_1) l_3 + \cos(\sigma_2) l_2) + \sigma_5 (\cos(\sigma_1) l_3 + \cos(\sigma_2) l_2 + \cos(th_1(t)) l_1) + l_3 \sigma_3 \cos(\sigma_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = th_1(t) + th_2(t) + th_3(t)$$

$$\sigma_2 = th_1(t) + th_2(t)$$

$$\sigma_3 = \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_3(t)}$$

$$\sigma_4 = \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_2(t)}$$

$$\sigma_5 = \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_1(t)}$$

**Figura 8.** Comparación velocidad lineal

La velocidad lineal está determinada por el Jacobiano lineal de cada robot. En el robot antropomórfico, dado que sus articulaciones pueden moverse en distintas direcciones, la velocidad final del robot tiene componentes en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , permitiéndole una mayor capacidad de movimiento. Por otro lado, el robot planar solo puede desplazarse en dos dimensiones, por lo que no tiene influencia en la dirección  $z$  ( $z = 0$ ), lo que limita su velocidad final a un plano.

## Velocidad angular

Robot Antropomórfico: Velocidad angular

$W(t) =$

$$\begin{pmatrix} \sin(th_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_2(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_3(t)} \right) \\ -\cos(th_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_2(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_3(t)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_1(t)} \end{pmatrix}$$

Robot Planar: Velocidad angular

$W(t) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_1(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_2(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{th_3(t)} \end{pmatrix}$$

**Figura 8.** Comparación velocidad angular

La velocidad angular esta determinada por el Jacobiano Angular. Del robot antropomórfico, su velocidad angular está determinada por la orientación de sus ejes de rotación, por lo tanto, incluye contribuciones de todas las articulaciones rotacionales, lo que significa que cada una de ellas puede afectar la orientación final del extremo. En cambio, el robot planar solo tiene rotaciones alrededor del eje  $z$ , lo que simplifica su Jacobiano angular y restringe su capacidad de orientación a un solo plano ( $x = 0, y = 0$ ).

## Conclusión

El estudio de las matrices transformacionales posibilita modelar con exactitud la disposición espacial de un robot, lo que simplifica su manejo y programación. En esta investigación, se notó que las matrices de transformación locales y globales están sujetas a la estructura y clase de articulaciones del robot, lo que evidencia las diferencias fundamentales entre los modelos antropomórficos y planar.