Algebra I

Paolo Bettelini

Contents

1 Richiami di teoria degli insiemi

Data una famiglia finita o infinite di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$, la loro intersection

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

è l'insieme degli elementi che stanno in tutti gli insiemi A_i, mentre la loro unione

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

è l'insieme degli elementi che stanno in almeno uno degli insiemi A_i.

2 Classi di equivalenza

Esempio insieme quoziente $\sim$ su $\mathbb{Z}$ dove $a \sim b \iff |a| = |b|$ è dato da

$$\{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \cdots\}$$

L'unica relazione di equivalenza che è un ordine è l'uguaglianza.

3 Esempi di maggiorante etc.

In $\mathbb{R}$ consideriamo l'usuale ordinamento. Consideriamo i sottoinsiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$$

e

$$C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 2\}$$

Il sottoinsieme A non ha maggioranti. Ogni numero non-positivo è minorante di A. A non ha nè massimo nè minimo.

Il sottoinsieme B non ha maggioranti. Ogni numero non-positivo è minorante di B. B ha 0 come minimo.

Il sottoinsieme C ha minoranti e maggioranti ma non minimo e ho 2 come massimo.

Consideriamo ora la relazione di divisibilità in $\mathbb{N}$. L'unico maggiorante è 0 in quanto tutti dividono zero, ed è un massimo. Il numero 1 è minorante, ed è un minimo.

Se ora prendiamo l'insieme $\{2, 3, 4, 5\}$, i maggioranti sono mulitpli del minimo comune multiplo (60), i minoranti sono i divisori comuni. Non ci sono massimo e minimo.

Proposition Il massimo è unico

Il massimo, se esiste, è unico.

Proof Il massimo è unico

Diciamo che a, b sono due massimi di A, cioè maggioranti di A che appartiene ad A. Abbiamo allora $a \geq b$ (in quanto a è un maggiorante) e $b \geq a$ (in quando b è un maggiorante). Abbiamo quindi che $a = b$.

Definizione Massimale

Un elemento $a \in A$ con A insieme partzialmente ordinato è detto massimale in A se non esiste alcun $b \in A$ tale che $a \leq b$ dove $a \neq b$.

Definizione Minimale

Un elemento $a \in A$ con A insieme partzialmente ordinato è detto minimale in A se non esiste alcun $b \in A$ tale che $a \geq b$ dove $a \neq b$.

Ogni massimo è massimale, ogni minimo è minimale.

Esempio in cui i massimali non sono massimi: in $\mathbb{N}$, rispetto alla divisibilità, consideriamo l'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Il numero 2 è minimale ma non massimale.
- Il numero 3 è minimale ma non massimale.
- Il numero 4 è massimale perché non divide nient'altro, ma non minimale.
- Il numero 5 è sia massimale che minimale.
- Il numero 6 è massimale ma non minimale.

In una relazione d'ordine totale un eventuale elemento massimale è massimo. Infatti, se a è massimale per A, preso un qualsiasi elemento $b \in A$, sappiamo che vale almeno una tra $a \leq b$ e $b \leq a$. Se vale la prima, per la definizione di massimalità di a, non può essere $a \neq b$. Nel secondo caso, $b \leq a$ e quindi a è un massimo. Analogamente per i minimali.

3.1 Relazioni irriflessiva

Data una relazione d'ordine $\leq$, possiamo ottenere la relazione d'ordine stretta $<$ dicendo che $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.