Fisica I

Paolo Bettelini

Contents

1 Introduzione

2 Vettori spostamento

- vettore spostamento: direzione, verso, lunghezza;
- somma di vettori;
- moltiplicazione con scalare reale $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- modulo di un vettore;

Proposition Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma vettoriale

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

3 Sistemi di coordinate

Il punto di origine è il posto in cui viene posizionato l'osservatore. I sistemi di coordinate trattati sono esclusivamente cartesiani e con basi ortogonali. L'oservatore ha i versori delle direzioni.

Si possono quindi individuare le componenti di un vettore lungo le sue direzioni, ossia le proiezioni ortogonali del vettori lungo gli assi cartesiani. Di conseguenza, le coordinate di un vettore hanno senso solamente rispetto ad una base.

Definizione Prodotto scalare

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un numero reale (in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Chiaramente il prodotto scalare è commutativo.

Proposition Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Proposition Prodotto vettoriale con componenti

TODO....

Da qui possiamo notare che il prodotto scalare ha lo stesso ridultato per ogni basta ortonormata.

Definizione Prodotto vettoriale

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un vettore (in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il risultato è un vettore con modulo

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a||b| \sin\theta$$

e direzione normale al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Convenzionalmente, il verso del vettore normale è scelto secondo la regola della mano destra.

Proposition Proprietà del prodotto vettoriale

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$;
2. $(\gamma\vec{a}) \wedge \vec{b} = \gamma(\vec{a} \wedge \vec{b})$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

Consideriamo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, allora

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_y\hat{z}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_y\hat{z}$$

Sapendo che

$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$$
$$\hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$$

Possiamo eseguire il prodotto esplicitamente

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x b_y \hat{z} + a_x b_z(-\hat{y}) + a_y b_x(-\hat{z}) + a_y b_z \hat{x} + a_z b_x \hat{y} + a_z b_y(-\hat{x}) \\ &= [a_y b_z - a_z b_z]\,\hat{x} + [a_z b_x - a_x b_z]\,\hat{y} + [a_x b_y - a_y b_x]\,\hat{z} \end{aligned}$$

4 Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che descrive il moto di un punto materiale. Per descrivere il moto di un oggetto è necessario procurarsi un sistema di riferimento. Sceglieremo quindi un'origine e una base ortonormata.

Definizione Posizione

La *posizione* di un punto è rappresentata unicamente da un vettore $\vec{r}(t)$, che mostra lo spostamento fra l'origine e la sua posizione $P(t)$ in un determinato istante di tempo.

Se vogliamo considerare la posizione solo nella direzione x possiamo calcoalre

$$\hat{x}(t) = \vec{x}\vec{r}(t)$$

In generale

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\vec{r}(t) + \hat{x}\vec{y}(t) + \hat{z}\vec{r}(t)$$

La relazione fra due osservatori diversi è data da $\vec{R} + \vec{r'}(t) = \vec{r}(t)$.

La velocità è quindi relativa a due posizioni $P(t)$ e $P(t + \Delta t)$. Lo spostamento è $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{s}(t)$.

Definizione Velocità

La *velocità* di un punto rappresenta lo spostamento che il punto materiale percorre in un unità di tempo $\vec{v}(t)$. Allora la velocità è definita come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Il vettore della velocità si orienta verso la tangente della curva (cioè nella direzione in cui si sta spostando). Chiaramente la derivata può essere separata nelle componenti

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

dove possiamo anche dire che

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Definizione Accelerazione

L'*accelerazione* di un punto rappresenta il cambiamento istantaneo della velocità

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

5 Leggi orarie

Proposition Caduta da una altezza

Il tempo di caduta di un oggetto da un altezza h, soggetto a gravità costante g è cado da

$$t_{\text{caduta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con velocità

$$-\sqrt{2gh}$$

6 Moto arbitrario

Consideriamo un moto arbitrario $\vec{r}(t)$. Questo vettore punta sempre alla posizione dell'oggetto. La sua velocità $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ è un vettore sempre nella direzione della traiettoria. Definiamo allora il versore tangente

$$\hat{T}(t)v(t) = \vec{v}(t)$$

Abbiamo allora che

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v(t)\hat{T}(t)\right) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = a_t(t)\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt}$$

La prima componente, $\frac{dv(t)}{dt}\hat{T}$, è chiamamta *accelerazione tangenziale* mentre il secondo *accelerazione centripeta* (entrambi sono perpendicolari fra di loro).

Per studiare il significato di tale termine, cominciamo partendo dall'identità $\hat{T}(t)\cdot\hat{T}(t) = 1$. Allora,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\hat{T}(t)\cdot\hat{T}(t)\right) &= 0\\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt}\cdot\hat{T}(t) + \hat{T}(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0\\ \hat{T}(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Dall'analisi differenziale troviamo che

$$\left|\frac{\hat{T}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{dl}{\Delta t}$$

e l'arco di circonferenza

$$s = Rd\theta$$

dove R è la lunghezza della retta fino al punto di rotazione (raggio di curvatura, ossia il raggio del cerchio osculatore). Mettendo assieme queste due informazioni troviamo che

$$\left|\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{S}{\Delta t}\frac{1}{R}\right] = \frac{v}{R}$$

Adesso possiamo scrivere

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

e quindi $\frac{dv}{dt}$ è la componente tangenziale e $\frac{v^2}{R}$ quella centripeta. Notiamo che l'accelerazione centripeta è più piccola più il cerchio è grande, quindi nulla quando andiamo dritti.

Nel caso specifico del moto circolare,

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

con $\omega = \frac{v}{R}$.

7 Relatività

Esercizio Moto di precessione

Consider $\vec{a}(t)$ and $\vec{w}$ fixed with the condition that

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{a}$$

We first note that $|\vec{a}(t)|$ is constant. We have that

$$\frac{d}{dt}|\vec{a}(t)|^2 = \frac{d}{dt}\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{a} = 2\vec{a}\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{a}) = 0$$

We define out cartesian system with the condition that $\hat{z}$ has the direction direction and length as $\vec{w}$, thus $\vec{w} = w\hat{z}$. As a second fact we have that a_z is independent of time. Indeed,

$$\frac{da_z}{dt} = \frac{d\vec{a}\hat{z}}{dt} = \hat{z}\frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{z} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{a}) = 0$$

so it is constant. Geometrically, $\vec{a}$ creates a cone. Now, $\vec{a}_\perp^2 = a^2 - a_z^2$ which is independent of t, and $a_x = a_T \cos\phi$ where ϕ is the angle between $\hat{x}$ and the projection $a_\perp$ (on the xy plane).

$$\begin{cases} a_x(t) = a_\perp \cos\phi(t) \\ a_y(t) = a_\perp \sin\phi(t) \\ a_t \end{cases}$$

We now have

$$\begin{aligned} \frac{da_x}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_x = -\omega a_y \\ \frac{da_x}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_y = \omega a_x \\ \frac{da_z}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_z = 0 \end{aligned}$$

We can substitute the parametrization

$$\begin{aligned} \frac{da_x}{dt} &= -\omega a_y \implies a_\perp(-\sin(\phi(t))) \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\omega a_\perp \sin\phi(t) \\ \frac{da_y}{dt} &= -\omega a_x \implies a_\perp \cos(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt} = \omega a_\perp \cos\phi(t) \\ \frac{da_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

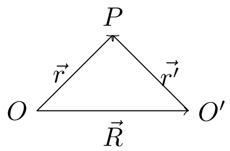
We note that simplifying these equations yields the same equation

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

for $a_\perp \neq 0$, which is obvious given the relation that we had established. Thus, the final solution is $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$. In conclusion,

$$\begin{cases} a_x = a_\perp \cos(\omega t + \phi_0) \\ a_y = a_\perp \sin(\omega t + \phi_0) \\ a_z = a_z \end{cases}$$

Vogliamo mettere in relazione la descrizione del moto di un punto materiale con le osservazioni fatte da due osservatori O e O'. Definiamo $\vec{r}(t)$ come l'osservazione di O e $\vec{r}'(t)$ come quella di O'. Definiamo anche $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$.



Definiamo gli assi $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ per l'osservatore O e $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ e $\hat{u}_3$ per O'. Chiaramente, questi versori sono dipendenti dal tempo per l'osservatore che non le usa (a meno che i due osservatori non coincidano). Dato questo sistema, abbiamo allora

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\hat{u}_i(t)$$

Abbiamo allora che

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'(t)}{dt}\hat{u}_i(t) + \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}x_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'(t)}{dt}\hat{u}_i(t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}x_i'(t)\end{aligned}$$

The first term

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'(t)}{dt} = \vec{r}'(t)$$

is what O' perceives as the velocity, $\vec{v}'(t)$. Il termine dice di quanto cambiano le coordinate nel sistema di riferimento di O', ossia la sua velocità. Il secondo termine

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}x_i'(t)$$

compensa il primo. Abbimo quindi che

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'(t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}x_i'(t)$$

Teorema

Esiste un vettore $\vec{\omega}(t)$ tale che

$$\frac{d\vec{u_i}}{dt} = \vec{w}(t) \wedge \vec{u_i}$$

Ciò vorrebbe dire che la terna di assi sta precedendo attorno alla direzione di $\vec{\omega}$. Tutte e 3 i versori stanno ruoando attorno allo stesso asse (infatti, non vi è l'indice i nel termine $\vec{\omega}$). Tuttavia, il vettore $\vec{\omega}$ stesso non è costante. Per dimostrare ciò, dobbiamo dare la forma di $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \hat{u}_j \wedge \frac{d\hat{u}_j}{dt}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \sum_{i=1}^{3} x_i'(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^{3} x_i'\hat{u}_i \\
&= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'(t)
\end{aligned}$$

Verifichiamo che la forma di $\vec{\omega}$ soddisfi la condizione data, quindi

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x &= \omega_y u_i^z - \omega_z u_i^y \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left\{ u_i^z \left[u_j^z \frac{du_j^x}{dt} - u_j^x \frac{du_j^z}{dt} \right] - u_i^y \left[u_j^x \frac{du_j^y}{dt} - u_j^y \frac{du_j^x}{dt} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{du_j^x}{dt} \left[u_i^z u_j^z + u_i^y u_j^y \right] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{du_j^x}{dt} \left[\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j - u_i^x u_j^x \right] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{du_j^x}{dt} \left[\delta_{i,j} - u_i^x u_j^x \right] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{du_j^x}{dt} \delta_{i,j} - u_j^x \left[u_i^x \frac{du_j^x}{dt} + \frac{du_j^y}{dt} u_i^y + \frac{du_j^z}{dt} u_i^z \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^x \left[u_i^x \frac{du_j^x}{dt} + \frac{du_j^y}{dt} u_i^y + \frac{du_j^z}{dt} u_i^z \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^x \left[\hat{u}_i \cdot \frac{d\hat{u}_j}{dt} \right]
\end{aligned}$$

Siccome

$$0 = \frac{\hat{u}_i}{dt} \cdot \hat{u}_j + \hat{u}_i \frac{\hat{u}_j}{dt}$$

Allora

$$\hat{u}_i \frac{\hat{u}_j}{dt} = -\frac{\hat{u}_i}{dt} \cdot \hat{u}_j$$

e quindi

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x &= \omega_y u_i^z - \omega_z u_i^y \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^x \left[\hat{u}_j \cdot \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} \\
&= \frac{du_i^x}{dt}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x = \frac{du_i^x}{dt} \qquad (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_y = \frac{du_i^y}{dt} \qquad (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_z = \frac{du_i^z}{dt}$$

Tornando alla velocità,

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' + \sum_{i=1}^{3} x_i'(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^{3} x_i' \hat{u}_i \\
&= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'
\end{aligned}
$$

Troviamo ora la medesima relazione per l'accelerazione. Siccome

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{d^2 x_i'}{dt^2} \hat{u}_i + \frac{dx_i'}{dt} \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right] \\
&= \vec{a}' + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt} \frac{d\hat{u}_i}{dt} \\
&= \vec{a}' + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt} (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt} \hat{u}_i \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'
\end{aligned}
$$

Possiamo trovare la velocità

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{A} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt} \\
&= \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')
\end{aligned}
$$