Algebra I

Paolo Bettelini

Contents

1 Esercizi

1.1 Limiti

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x\ln(1+x) + 3x}{\sin(x) + 3x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(x - \ln(1+x) + 3)}{x(\frac{\sin x}{x} + 3x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0 - 0 + 3}{1 + 0} = 3\end{aligned}$$

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\left(e^{x^2} - 1\right)}{(1-\cos(x))[\ln(1+\sqrt{x})]^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x(1+o(1))x^2(1+o(1))}{\frac{x^2}{2}(1+o(1))\sqrt{x}(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4(1+2o(1)+o^2(1))}{1+o^2(1)+3o(1)+o^3(1)} = 4\end{aligned}$$

Esercizio

Considera $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^2}\left[e^{-x^n} - 1 + \ln\left(\cos(x^n)\right)\right] &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) + \ln\left(1 + \cos(x^n) - 1\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) + \ln\left(1 - \frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1)) - \frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x^2}\left[x^n\left(1 + \frac{x^n}{2}\right)(1+o(1))\right]\end{aligned}$$

Nel caso $n > 0$ abbiamo

$$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ -2 & n = 2 \\ -\infty & 0 < m < 2 \end{cases}$$

Nel caso $n = 0$ il limite è $-\infty$, mentre se $n < 0$ il limite non è ben definito.

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos x + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{1 - e^{-x^2}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} ln(1 + \cos x - 1 + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) + x^2\right)}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin(2x))^{\frac{1}{\ln\left(1+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indecisione 1^∞. Facciamo un cambio di variabile $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\sin\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}} &= \lim_{t\to 0} \exp\left\{\frac{1}{\ln(1 - \sin t)} \cdot \ln(\cos(2t))\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \exp\left\{\frac{\ln(1 + \cos(2t) - 1)}{\ln(1 - \sin t)}\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \exp\left\{\frac{\ln(1 - 2t^2)}{1 - t}\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \exp\left\{\frac{-2t}{t}\right\} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

1.2 Continuità

Esercizio

Studia la continuità di

$$f(x) = (\ln |x|)^{-1}$$

1.3 Integrali

Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

Allora sostituiamo $t = e^x$ quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{t}\frac{1}{1+t}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= \log|t| - \log|t+1| + C \\
&= \log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x+2+e^{-x}}\,dx$$

Allora abbiamo

$$\int \frac{1}{e^x+2+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^2+2e^x+5}\,dx$$

Sostituiamo $t = e^x$ e otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2+2t+5} &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left\{\frac{e^x+1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Esercizio

$$\int x^{-\frac{3}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

Cominciamo sostituendo $t = x^{-\frac{1}{2}}$ e proseguiamo per parti

$$\begin{aligned}
\int x^{-\frac{3}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx &= \int t^3\arctan(t)(-2t^{-3})\,dt \\
&= -2\int \arctan(t)\cdot 1\,dt \\
&= -2\left[t\arctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right] \\
&= -2t\arctan(t) + \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}$$

Sostituiamo $v = 1+t^2$

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dv}{v} = \log(1+t^2) + C$$

Allora il risultato è

$$-2x^{-\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log(1+x^{-1}) + C$$

Esercizio

$$
\begin{aligned}
\int \log(x^2+4)\,dx &= x\log(x^2+4) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx \\
&= x\log(x^2+4) - 2\int 1 - \frac{4}{x^2+4}\,dx \\
&= x\log(x^2+4) - 2x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio

$$
\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx
$$

Esercizio

$$
\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx
$$

Sostituiamo $x+1=t^2$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{2t}{t\cdot(t^2-1)}\,dt \\
&= 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} \\
&= \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t+1} \\
&= \log|t-1| - \log|t+1| + C \\
&= \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio

Procediamo per parti

$$
\begin{aligned}
\int x^{-\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}})\,dx &= 2x^{\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}{1+x^{-1}}\,dx \\
&= 2x^{\frac{1}{2}}\arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log|1+x| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio

$$
\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx
$$

Sostituiamo $t=\sqrt{x}$ e poi procediamo per parti

$$
2\int \arcsin(t)\,dt = t\arcsin(t) - 2\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt
$$

Sostituiamo ora $v = 1 - t^2$

$$t \arcsin(t) + \int v^{-\frac{1}{2}}\, dv = \sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + C$$

Esercizio

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + 3e^x + 2}$$

Sostituiamo $t = e^x$

$$\int \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Esercizio

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\, dx$$

Sostituiamo $t = x + 1$.

Esercizio

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx$$

Sostituiamo $t = e^x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1+t}{1+t^2}\frac{1}{t}\, dt &= \int \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{t}\, dt + \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan(t) + \int \frac{-t}{1+t^2} + \frac{1}{t}\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \ln(e^x) + \arctan(e^x)\end{aligned}$$