Fisica I

Paolo Bettelini

Contents

1 Introduzione

2 Vettori spostamento

- vettore spostamento: direzione, verso, lunghezza;
- somma di vettori;
- moltiplicazione con scalare reale $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- modulo di un vettore;

Proposition Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma vettoriale

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

3 Sistemi di coordinate

Il punto di origine è il posto in cui viene posizionato l'osservatore. I sistemi di coordinate trattati sono esclusivamente cartesiani e con basi ortogonali. L'oservatore ha i versori delle direzioni.

Si possono quindi individuare le componenti di un vettore lungo le sue direzioni, ossia le proiezioni ortogonali del vettori lungo gli assi cartesiani. Di conseguenza, le coordinate di un vettore hanno senso solamente rispetto ad una base.

Definizione Prodotto scalare
Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un numero reale (in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Chiaramente il prodotto scalare è commutativo.

Proposition Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Proposition Prodotto vettoriale con componenti
TODO....

Da qui possiamo notare che il prodotto scalare ha lo stesso ridultato per ogni basta ortonormata.

Definizione Prodotto vettoriale
Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un vettore (in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il risultato è un vettore con modulo

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a||b| \sin\theta$$

e direzione normale al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Convenzionalmente, il verso del vettore normale è scelto secondo la regola della mano destra.

Proposition Proprietà del prodotto vettoriale

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$;
2. $(\gamma\vec{a}) \wedge \vec{b} = \gamma(\vec{a} \wedge \vec{b})$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

Consideriamo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, allora

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_y\hat{z} \\ \vec{b} &= b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_y\hat{z} \end{aligned}$$

Sapendo che

$$\begin{aligned} \hat{x} \wedge \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{x} \wedge \hat{z} &= -\hat{y} \\ \hat{y} \wedge \hat{z} &= \hat{x} \end{aligned}$$

Possiamo eseguire il prodotto esplicitamente

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= a_xb_y\hat{z} + a_xb_z(-\hat{y}) + a_yb_x(-\hat{z}) + a_yb_z\hat{x} + a_zb_x\hat{y} + a_zb_y(-\hat{x}) \\ &= [a_yb_z - a_zb_z]\,\hat{x} + [a_zb_x - a_xb_z]\,\hat{y} + [a_xb_y - a_yb_x]\,\hat{z} \end{aligned}$$

4 Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che descrive il moto di un punto materiale. Per descrivere il moto di un oggetto è necessario procurarsi un sistema di riferimento. Sceglieremo quindi un'origine e una base ortonormata.

Definizione Posizione

La *posizione* di un punto è rappresentata unicamente da un vettore $\vec{r}(t)$, che mostra lo spostamento fra l'origine e la sua posizione $P(t)$ in un determinato istante di tempo.

Se vogliamo considerare la posizione solo nella direzione x possiamo calcoalre

$$\hat{x}(t) = \vec{x}\vec{r}(t)$$

In generale

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\vec{r}(t) + \hat{x}\vec{y}(t) + \hat{z}\vec{r}(t)$$

La relazione fra due osservatori diversi è data da $\vec{R} + \vec{r'}(t) = \vec{r}(t)$.

La velocità è quindi relativa a due posizioni $P(t)$ e $P(t + \Delta t)$. Lo spostamento è $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{s}(t)$.

Definizione Velocità

La *velocità* di un punto rappresenta lo spostamento che il punto materiale percorre in un unità di tempo $\vec{v}(t)$. Allora la velocità è definita come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Il vettore della velocità si orienta verso la tangente della curva (cioè nella direzione in cui si sta spostando). Chiaramente la derivata può essere separata nelle componenti

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

dove possiamo anche dire che

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Definizione Accelerazione

L'*accelerazione* di un punto rappresenta il cambiamento istantaneo della velocità

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

5 Leggi orarie

Proposition Caduta da una altezza

Il tempo di caduta di un oggetto da un altezza h, soggetto a gravità costante g è cado da

$$t_{\text{caduta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con velocità

$$-\sqrt{2gh}$$

6 Dinamica

Principio di relatività: Non esiste nessun esperimento in grado di decidere se noi siamo in quiete rispetto allo spazio assoluto o ci stiamo muovendo in un moto rettilineo uniforme. Alternativamente, tutte le leggi della fisica sono equivalenti indipendentemente dalla direzione dell'esperimento e dal sistema di riferimento (inerziali).

Il principio della relavitià risale a Galileo nel dialogo, 1632.

Leggi di Newton:

1. un corpo mantiene il prorpio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non agiscono forze esterne;
2. $\vec{F} = m\vec{a}$;
3. se un corpo 1 esercita una forza $\vec{F_{1,2}}$ su un corpo 2, allora il corpo 2 esercita una forza $\vec{F_{2,1}} = -\vec{F_{1,2}}$ sul corpo 1.

La prima è in realtà un caso particolare della seconda.

L'espressione $\vec{F} = m\vec{a}$ è una relazione fra causa ed effetto. La forza è la causa, che determina direttamente le accelerazioni.

Tuttavia, è necessario prima definire il concetto di massa. Ciò può essere fatto con una serie di esperimenti e osservazioni. Consideriamo due palline attaccate ai capi di una molla:

1. $\vec{a_1} \neq 0 \implies \vec{a_2} \neq 0$;
2. $\vec{a_1}$ e $\vec{a_2}$ hanno verso opposto;
3. il rapporto
$$\frac{|\vec{a_1}|}{|\vec{a_2}|}$$
è indipendente dalla interazione, bensì solamente dalle caratteristiche delle particelle;
4. se i due corpi sono dello stesso materiale, ma di volumi diversi, allora
$$\frac{|\vec{a_1}|}{|\vec{a_2}|} = \frac{V_2}{V_1}$$

Allora, per ogni coppia di corpi, definiamo

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a_1}|}{|\vec{a_2}|}$$

Dobbiamo quindi scegliere una massa di base sulla quale basare le altre misure. Sperimentalmente, troviamo anche che $\vec{F_1} + \vec{F_2} = m(\vec{a_1} + \vec{a_2})$.

Conservazione della quantità di moto
$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

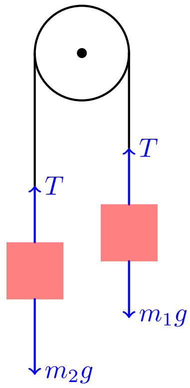
e
$$\vec{Q} = \vec{Q_1} + \vec{Q_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$

La derivata della quantità di moto è data da

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt} + m_2\frac{d\vec{v_2}}{dt} = m_1\vec{Q_1} + m_2\vec{Q_2}$$

Il vettore della quantità di moto nel tempo, di due moti che interagiscono fra di loro, è sempre il medesimo, e quindi si conserva.

7 Carrucola con due masse



Abbiamo $a_2 = -a_1$

$$\begin{cases} m_1a_1 = T - m_1g \\ -m_2a_1 = T - m_2g \end{cases}$$

8 Attriti

Se la velocità di un oggetto è nulla, la forza di attrito esercitata su di esso è anch'essa nulla. In caso contrario, per velocità relativamente basse, la forza è data da $\vec{F_a} = -\gamma\vec{v}$.

In un liquido con viscosità η, dalla legge di Stokes, una sfera di raggio a (con superficie perfettamente rigida che non ha interazioni con il fluido) ha coefficiente di attrito

$$\gamma = 6\pi\eta a$$

Consideriamo il moto di un oggetto affetto solamente dalla forza di attrito. Allora $-\gamma v = ma$. L'equazione differenziale che governe il moto è quindi

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v$$

e quindi

$$v(t) = v_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = -\frac{\gamma}{m}$$

e il moto

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda}e^{\lambda t} + x_0, \quad \lambda = -\frac{\gamma}{m}$$

Ma siccome $x(0) = 0$, allora $x_0 = -\frac{v_0}{\gamma}$ e quindi

$$x(t) = v_0\frac{m}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]$$

La velocità tende a zero senza toccarlo, ma la posizione è finita.

Un oggetto che cade ha forza $F_z = -mg - \gamma v_z = ma_z = m\frac{dv_z}{dt}$ E quindi l'equazione differenziale è

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m}v_z$$

e quindi

$$v_z(t) = g\frac{m}{\gamma}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right]$$

Un oggetto su un piano al quale viene applicata una forza, subirà la forza inversa dell'attrito dove $|\vec{F_A}| = \mu R$ dove μ è un coefficiente adimensionale che dipende dalla natura delle due superfici e R è la reazioe vincolare. **NON** è proporzionale alla massa, ma la reazione vincolare è certamente legata alla massa. La reazione vincolare deve essere tale da compensare esattamente la forza peso. Quindi, la reazione vincolare è mg. È importante notare che potrebbe esserci il caso $g = 0$, dove non vi è attrito, e quindi non è proporzionale alla massa. i coefficienti di attrito di distinguono in quello statico e quello dinamico. Quello statico è legato alla minima forza che bisogna applicare per mettere in moto un oggetto, mentre quello dinamico è legato al movimento dell'oggetto stesso. In generale $\mu_S > \mu_D$.

Il coefficiente di attrito deriva dal fatto che le superfici di contatto siano ruvide; solamente una piccola porzione delle due superfici macroscopiche sono effettivamente a contatto. Questo è anche il motivo per il quale il coefficiente di attrito statico è generalmente maggiore di quello dinamico, ossia il fatto che bisogna applicare sufficiente energia per rompere i punti di blocco fra le due superfici. I coefficienti di attrito non dipendono dall'area di appoggio (infatti, a parità di massa ma differenza di area superficiale i coefficienti di attrito sono equivalenti).

Nel piano inclinato il corpo si muove solamente se $mg\sin\alpha > \mu_S mg\cos\alpha$ ossia $\tan\alpha > \mu_S$. Una volta in movimento l'accelerazione è data da $g\cos\alpha\,[\tan\alpha - \mu_D] > 0$. Questo tipo di attrito non dipende dalla velocità.

9 Forze apparenti

Quando una macchina frena e io vengono spinto in avanti, la forza è apparente se descrivo il sistema di riferimento come non-inerziale.

Nel caso della terra, la forza di Coriolis è data da

$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

È sempre ortogonale all'asse di rotazione (l'equatore). Il suo modulo è dato da

$$F_c = m\omega^2 R \sin\alpha$$

dove α è l'angolo compreso e R il raggio della terra. La componente verticale è $m\omega^2 R \sin^2\alpha$.

9.1 Sistemi a massa variabile

Se la massa di un oggetto è esplicitamente dipendente dal tempo $M(t)$, l'equazione di Newton non è $\vec{F} = M(t)\vec{a}$.

Immaginiamo di porre delle palline per terra e coprirle con una scatola. Trasciniamo la scatola con velocità v. Ad un certo punto, la scatola comincierà a trascinare anche le palline al suo interno. Usiamo il teorema dell'impulso per dire che la differenza di quantità di moto è l'integrale della forza. In questo caso la forza è quindi data da $F = \frac{dM}{dt}v$. Anche se la velocità è costante, la forza deve aumentare per mantenere il medesimo moto. L'accelerazione è nulla ma la forza non è nulla.

Una generalizzazione per descrivere sia i casi a massa costante che a massa variabile è quella di scrivere

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \quad \vec{Q} = M(t)\vec{v}(t)$$

Quindi,

$$\vec{F} = \begin{cases} M\vec{a} & M \text{ costante} \\ \frac{dM}{dt}\vec{v} + M\vec{a} & M \text{ non costante} \end{cases}$$

10 Energia

Viene spesso definitva la funzione $U(x)$ tale che

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

In tal caso

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F_x \, dx = U(x_A) - U(x_B)$$

Siccome $L_{AB} = E_C(B) - E_C(A)$, otteniamo che

$$E_C(A) + U_A = E_C(B) + U_B$$

La funzione U è detta l'energia potenziale.

Definizione Energia meccanica

L'*energia meccanica* è data da

$$E_C + U$$

L'energia meccanica viene conservata (per tutte le forze conservative, cioè dove è possibile definire una tale funzione U).

Le forze vincolari non sono conservative, ma non compiono lavoro quindi possiamo ignorarle. Le forze posizionali sono conservatrici (deve dipendere solamente dalla posizione istantanea). La forza di attrito viscoso, per esempio, non dipende solo dalla posizione e quindi non potrà mai esistere una funzione U.

11 Velocità areolare

Trovare l'equazione del pendolo usando il momento angolare.

12 Problema dei due corpi

Sappiamo che $\vec{F_{12}} = m_1\vec{a_1}$, $\vec{F_{21}} = m_2\vec{a_2}$ e che $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$. Sappiamo anche che

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{21}} = 0$$

quindi la quantità di moto si conserva. Adesso scriviamo

$$\vec{a_1} - \vec{a_2} - \frac{\vec{F_{12}}}{m_1} - \frac{\vec{F_{21}}}{m_2} = \vec{F_{12}}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Definiamo la massa ridotta come

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

quindi

$$\mu(\vec{a_1} - \vec{a_2}) = \vec{F_{12}}$$

Troviamo allora che

$$\vec{a_1} = \frac{d\vec{v_1}}{dt} = \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2}$$

e

$$\vec{a_2} = \frac{d\vec{v_2}}{dt} = \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}$$

Assieme abbiamo

$$\vec{a_1} - \vec{a_2} = \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r_1} - \vec{r_2}\right)$$

è l'accelerazione della particella 1 vista dalla 2. È come se fosse la seconda legge di Newton vista da un osservatore posizionato sulla particella 2. La differenza, è che l'osservatore due darebbe μ come massa al posto di m_1. Anche se lui non può usare le equazioni di Newton, lo fa lo stesso con solamente l'avvertenza di cambiare la massa, ottenendo comunque qualcosa di corretto. Più la differenza di masse è grande, più μ corrisponde alla massa vera.

13 Flussi

Il flusso in un campo di forza è definito come $f_i = \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ dove va definito l'orientamento del vettore normale $\vec{n}$. Per tutta la superficie chiusa il flusso è $\sum_i f_i$.

Teorema Teorema del flusso di Gauss

Il teorema di Gauss dice che se la forza $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$, allora il flusso sulla superficie chiusa è dato da

$$4\pi K$$

dove la sorgente è interna alla superficie, altrimenti il flusso è zero.

Esempio Se ci trovassimo sul fondo di un buco sulla superficie terrestre profondo $R - r$, quale gravità misureremmo?

Dobbiamo considerare la distribuzione della massa, cioè la densità ρ che è approssimativamente omogenea

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Possiamo immaginarci infinite sorgenti che esercitano su di noi una forza

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\sum_i G \frac{m \cdot dm_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Quindi il flusso è dato dalla somma

$$\sum_i -Gm \cdot dm_i = -4\pi GmM$$

Noriamo che per calcolare il flusso dobbiamo fare

$$\sum_i (dS_i) \vec{F}_i \cdot \hat{n}_i = F \sum_i (dS_i) = 4F\pi r^2$$

dove $\hat{n_i}$ è la normale. Quindi, la forza è data

$$F \cdot 4\pi r = -gm \cdot 4\pi \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rho$$
$$F = -G \frac{mM}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)$$

È importante notare che per fare ciò abbiamo considerato le sorgenti della massa del volume racchiuso dalla superficie indotta dal punto in cui mi trovo (una sottosfera). Le superfici esterne non contribuiscono sempre per il teorema di Gauss.

14 Derivazione delle leggi di Kepler dalla legge di gravitazione universale

Consideriamo il sistema Terra-Sole. Possiamo scrivere le equazioni di Newton per la Terra, sul sistema di riferimento non inerziale del sole, se alla terra associamo la massa ridotta

$$\mu = \frac{M_S M_T}{M_S + M_T}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -G\frac{M_S M_T}{r^2}\hat{r} \\
\frac{M_S M_T}{M_S + M_T}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -G\frac{M_S M_T}{r^2}\hat{r} \\
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -G\frac{M_S + M_T}{r^2}\hat{r}
\end{aligned}$$

che è l'equazione che avrei scritto se avessi considerato un sistema con un oggetto di massa $M_S + M_T$.

Ricordiamo che vi sono delle proprietà che vengono conservate, come

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$$

e allora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

implica che l'orbita sia piana. Poniamo l'origine nel centro delle forze: $\vec{L} = L\vec{z}$ e quindi l'orbita giace sul piano xy.

Ricordiamo anche che le forse sono centrali e quindi conservative. Abbiamo quindi l'energia potenziale

$$\frac{dU}{dt} = -f(r)$$

e quindi

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

L'energia meccanica per unità di massa è quindi

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r}$$

che viene conservata come il momento angolare per unità di massa.

$$L_z = xv_y - yv_x$$

Usiamo le coordinate polari piane e troviamo $v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$ e $v_y = \dot{r}\sin < theta + r\dot{\theta}\cos\theta$. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} L_z = r^2\dot{\theta} \\ v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Otteniamo allora l'energia

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\frac{L_z^2}{r^4} - \frac{GM}{r} \\
&= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}
\end{aligned}$$

Possiamo identficare il termine $\frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ come un potenziale efficace $U_{\text{eff}}(r)$. Notiamo che vi è un asintoto verticale a destra di $r = 0$ verso $+\infty$, e che il limite tende a 0^+. Siccome l'altro addendo è positivo, quando l'energia è negativa non vi sono soluzioni per valori $E < E_{\min}$ in quanto l'energia minima è appunto il minimo di $U_{\text{eff}}(r)$. Più in generale, vi è soluzione solo per un certo intervallo. Ciò succede quando $E_{\min} < E < 0$.

Per risolvere l'equazione ci chiediamo quale sia la traiettoria della particella. Ricordiamo l'altra legge di conservazione

$$L_z = r^2\dot{\theta} \to \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \to r(\theta) \end{cases}$$

Se prendiamo la derivata otteniamo

$$\frac{d}{dt}r(\theta(t)) = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{L_z}{r^2}$$

Allora sostituiamo nella conservazione dell'energia e otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

che è una funzione per la traiettoria. Definiamo ora una variabile $u = r^{-1}$. Allora $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$. Quindi

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$$

Risostituendo troviamo

$$E = \frac{1}{2}L_z^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2}u^2 - GMu$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = A + Bu - u^2, \quad A = \frac{2E}{L_z^2}, B = \frac{2GM}{L_z^2}$$

La seguente equazione soddisfa l'equazione differenziale

$$\mu(\theta) = a + b\cos(\theta - \theta_0)$$

per opportuni a, b. Sostituendo troviamo

$$b^2 = [A - a^2 + aB] + (bB - 2ab)\cos(\theta - \theta_0)$$

Affinché l'equazione sia vera per ogni θ, abbiamo le condizioni

$$\begin{cases} bB = 2ab \\ A - a^2 + aB = b^2 \end{cases} \to \begin{cases} a = \frac{B}{2} \\ b = \pm\sqrt{A + \frac{B^2}{4}} \end{cases}$$

Tuttavia, il $\pm$ è ridondante in quanto spostando θ_0 ritroviamo le stesse soluzioni. Scegliamo il segno negativo. Abbiamo

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - e\cos\theta}, \quad l = \frac{2}{B}, e = \frac{2}{B}\sqrt{A + \frac{B^2}{4}}$$

isolando E troviamo

$$E \geq -\frac{(GM)^2}{L_z^2} = E_{\min}$$

Nel caso dell'energia minima, la traiettoria è circolare in quanto l'intervallo dei raggi della traiettoria $r_{\min} < r < r_{\max}$ è un singoletto, in quanto ci troviamo al minimo del potenziale.
Per evitare divisione con zero prendiamo $0 \leq e < 1$. Dobbiamo anche vincolare $\cos\theta < \frac{1}{e}$, che limita la

traiettoria possibile. Importiamo ora $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e moltiplichiamo l'equazione per $\cos\theta$ a destra e sinistra e per $\sin\theta$, otteniamo

$$\begin{aligned}\cos\theta r(\theta) &= \frac{l\cos\theta}{1-e\cos\theta}\\ l\cos\theta &= x(1-e\cos\theta)\\ l\sin\theta &= y(1-e\cos\theta)\end{aligned}$$

e quindi troviamo

$$\sin\theta = \frac{y}{l+xe}$$

Partendo dall'identità pitagorica

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\sin^2\theta &= \frac{x^2}{(l+xe)^2}+\frac{y^2}{(l+xe)^2}\\ x^2+y^2 &= l^2+x^2e^2+2lex\\ x^2(1-e^2)+y^2-2lex &= l^2\end{aligned}$$

che è una conica. Se $e = 0$ è una circonferenza, se $e < 1$ è un ellisse, se $e > 1$ è un iperbole.

Notiamo che

$$r_{\min} = \frac{l}{1+e}$$

che si ottiene per $\theta = \pi$ e

$$r_{\max} = \frac{l}{1-e}$$

che si ottiene per $\theta = 0$. Il semiasse maggiore è dato da

$$a = \frac{r_{\max}+r_{\min}}{2} = \frac{2/B}{1-\left(1+\frac{4A}{B^2}\right)} = -\frac{B}{2A}$$

che dipende solo dall'energia (dal modulo). Più grande il modulo, più piccolo è il semiasse maggiore. Più si va all'esterno del sistema solare più l'energia diminuisce.

Abbiamo quindi dimostrato le prime due leggi di Kepler. Rimane da dimostrare la terza.

Per fare ciò scriviamo

$$\dot\theta = \frac{L_z}{r^2} = \frac{L_z}{l^2}(1-e\cos\theta)^2$$

allora abbiamo

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-e\cos\theta)^2} = \frac{L_z}{l^2}\cdot 2\pi$$

con la sostituzione $v = \tan\frac{\theta}{2}$ troviamo

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+v^2\left(1-e\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}\,dv = \frac{e^{L_z}}{L_z}\cdot\frac{2\pi}{(1-e)^{3/2}}$$

TODO e quindi

$$T^2 = a^3\frac{4\pi^2}{GM}$$

15 Dinamica dei sistemi

Consideriamo n particelle con masse $m_1, m_2, \cdots, m_n$ mutualmente interagenti e in presenza di forze esterne.

L'equazione di Newton è data da

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} + \vec{f}_i$$

dove $\vec{f}_i$ sono le forze esterne.

Un metodo si risolvere l'equazione è quello di scrivere

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} + \sum_i \vec{f}_i$$

Siccome $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$, possiamo semplificare la doppia sommatoria

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} = 0$$

Possiamo definire la quantità di moto totale

$$\vec{Q} = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Mettendo assieme quest informazioni possiamo notare che la variazione di quantità di moto è solamente la somma delle forze esterne

Teorema Prima legge cardinale

In un sistema di n particelle

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

Definizione Centro di massa

In un sistema di n particelle, il *centro di massa* è definito come

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_1 \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

La derivata del centro di massa è data da

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_i m_1 \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{Q}}{M}$$

Un'altra cosa che si può fare è partire dall'equazione di Newton e moltiplicare per $\vec{r}_i$ a sinistra e poi sommare rispetto a i

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j} + \vec{f}_i$$

$$\sum_i \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{a}_i) = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,j} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i$$

Possiamo considerare il momento angolare

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_1 \vec{v}_i$$

la cui derivata è data da

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{v}_i \wedge m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge m_1\vec{a}_i$$

Il primo termine è nullo e rimane il momento angolare della i-esima particella. Definiamo allora il momento angolare totale del sistema

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_1\vec{v}_i$$

Consideriamo ora il termine

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,j}$$

Prendendo due particelle a e b abbiamo

$$\vec{r}_a \wedge \vec{F}_{a,b} - \vec{r}_b \wedge \vec{F}_{a,b} = (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \wedge \vec{F}_{a,b}$$

Se imponiamo la condizione che una forza tra una coppia di particelle sia orientata verso la congiungente delle due (il che vale per una grande classi di forze), allora il prodotto è nullo. In tal caso,

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,j} = 0$$

Teorema Seconda legge cardinale
In un sistema di n particelle

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i$$

che è il momento delle forze esterne.

In particolare, se non vi sono forze esterne, il momento angolare totale si conserva. Ciò è dipendente dall'origine in quanto se avessi $\vec{r}_i + \vec{T}$ al posto di $\vec{r}_i$, il nuovo momento angolare sarebbe

$$\begin{aligned}
\vec{L}' &= \sum_i \vec{F}'_i \wedge m_i\vec{v}_i \\
&= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{T}) \wedge m_i\vec{v}_i \\
&= \vec{L} + \vec{T} \wedge \sum_i m_i\vec{v}_i \\
&= \vec{L} + \vec{T} \wedge \vec{Q}
\end{aligned}$$

La sua derivata sarebbe

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt} \\
&= \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{T} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\
&= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i + \vec{T} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\
&= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{f}_i
\end{aligned}$$

per la prima legge cardinale. Quindi la derivata è indipendente dal sistema di riferimento.
Notiamo che $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{R}$. Allora la velocità anche cambia per il centro di massa, quindi $\vec{v}_i = \vec{v}_i + \vec{V}$.

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m_1 \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \wedge m_1(\vec{v}'_i + \vec{V}) \\ &= \vec{L}' + \left(\sum_i m_1 \vec{r}'_i\right) \wedge \vec{V} + \vec{R} \wedge \sum_i m_i \vec{v}'_i + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V}\end{aligned}$$

Se ora valutiamo la quantità di moto nel centro di massa otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{Q}' &= \sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{V}) m_i \\ &= \vec{Q} - \vec{V} \sum_i m_i = 0\end{aligned}$$

che è nulla per definizione. La quantità di moto del centro di massa vista dal centro di massa è zero. Allora, abbiamo dimostrato che il termine

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

Ora valutiamo

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \vec{r}'_i &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) m_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{R} \sum_i m_i = 0\end{aligned}$$

Di nuovo, dalla definizione di $\vec{R}$, tale termine è zero. Siccome questi due termini sono nulli, in definitiva abbiamo

$$\vec{L} = \vec{L}' + M\vec{R} \wedge \vec{V}$$

e la variazione

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + M\frac{d\vec{R}}{dt} \wedge \vec{V} + M\vec{R} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{R} \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{R} \wedge \sum_i \vec{f}_i\end{aligned}$$

usando la prima e la seconda legge cardinale della dinamica. Allora troviamo

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i - \vec{R} \wedge \sum_i \vec{f}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \wedge \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{f}_i\end{aligned}$$

Quindi la seconda legge cardinale della dinamica vale anche nel sistema non inerziale del centro di massa. Se consideriamo la variazione dell'energia cinetica di tutte le particelle otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{dE_c}{dt} &= \sum_i \frac{1}{2} \cdot 2m_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}_i \\ &= \sum_i \vec{v}_i \cdot \left[\sum_{j\neq i} \vec{F}_{i,j} + \vec{f}_i\right] \\ &= \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{i,j} + \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{f}_i\end{aligned}$$

che non si semplifica come nell'altro caso.

16 Esercizi

16.1 17 ottobre

Esercizio Il moto nel piano x, y di una particella è definito da

$$\begin{cases} x = \alpha t^2 + \beta t \\ y = \alpha t^2 - \beta t \end{cases}$$

Con $\alpha = 0.1 m/s^2$ e $\beta = 1 m/s$. Si calcolino i moduli della velocità e dell'accelerazione all'istante $\tau = 10s$

Calcoliamo le velocità

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t + \beta \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2\alpha t - \beta \end{cases}$$

e le accelerazioni

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\alpha \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2\alpha \end{cases}$$

Il modulo della velocità è pari a

$$\begin{aligned} |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} &= \sqrt{4\alpha^2 t^2 + 4\alpha\beta t + \beta^2 + 4\alpha^2 t^2 - 4\alpha\beta t + \beta^2} \\ &= \sqrt{8\alpha^2 t^2 + 2\beta^2} \end{aligned}$$

Il modulo della accelerazione è pari a

$$|a| = \sqrt{8}\alpha$$

Esercizio Un'automobile in moto con velocità di modulo v_0 comincia a frenare e, muovendosi di moto rettilineo, si arresta in uno spazio l. Si determini l'accelerazione scalare media di frenamento nei tre casi seguenti:

1. l'accelerazione scalare ha valore A costante nel tempo: Abbiamo che $v = v_0 + At$ e $s = v_0 t + \frac{1}{2}At^2$. Chiamiamo allora t^* il tempo per cui $v = 0$. Allora $v_0 + At^* = 0 \implies t^* = -\frac{v_0}{A}$. Sostituiamo t^* nell'accelerazione media

$$a_m = \frac{v - v_0}{-t^*} = \frac{v_0}{-t^*} = A$$

2. l'accelerazione dipende dalla velocità scalare con la legge: $a = b(v + v_0)$. Dobbiamo trovare

$$\frac{dv}{dt} = b(v + v_0)$$

quindi

$$v = ce^{\xi t} + V \qquad \frac{dv}{dt} = c\xi e^{\xi t} + V$$

con $V = -v_0$, $\xi = b$ e c libera. Siccome $v(0) = v_0$ allora $c = 2v_0$ e quindi $v(t) = v_0(2e^{bt} - 1)$. Per calcolare la posizione integriamo nuovamente

$$\frac{ds}{dt} = v_0(2e^{bt} - 1)$$

e allora

$$s(t) = \frac{2v_0}{b}e^{bt} - v_0 t + s_0$$

Siccome $s(0) = 0 = -\frac{2v_0}{b}$, troviamo

$$s(t) = \frac{2v_0}{b}(e^{bt} - 1) - v_0 t$$

Per il tempo di arresto abbiamo che $v_0(2e^{bt} - 1) = 0$ e quindi $t^* = -\frac{\ln 2}{b}$. Quindi

$$l = s(t^*) = \frac{v_0}{b}(\ln 2 - 1)$$
$$b = \frac{v_0}{l}(\ln 2 - 1)$$

Quindi l'accelerazione media è data da

$$a_m = \frac{-v_0}{t^*} = \frac{v_0^2}{t}\frac{\ln 2 - 1}{\ln 2}$$

3. l'accelerazione varia linearmente nel tempo $a = \gamma t$: Integrando dobbiamo troviamo

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2$$
$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{6}\gamma t^3$$

siccome $s_0 = 0$. $\cdots$ Infine,

$$a_m = \frac{2v_0^2}{3l}$$

Esercizio Un corpo di piccole dimensioni viene lanciato verticalmente verso l'alto all'istante $t = 0$. Nella fase di salita e in quella successiva di discesa, l'oggetto passa dalla quota h, rispetto alla posizione di lancio, agli istanti t_1 e t_2, rispettivamente: si dimostri che vale la relazione $t_1 t_2 = 2h/g$. Si trascuri l'effetto della resistenza dell'aria sul moto del corpo.

La legge oraria è data da $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Dal testo abbiamo $s(t_1) = s(t_2) = h$ e $at^2 - 2v_0 t + 2h = 0$. Le soluzioni sono

$$t_1 t_2 = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{2h}{g}}$$

e quindi

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

Esercizio Un corpo viene lanciato orizzontalmente da altezza h_0 rispetto al suolo, con velocità v_0. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli:

1. la componente tangenziale a_T e quella normale a_N dell'accelerazione del corpo rispetto alla traiettoria, in un generico punto di altezza h: abbiamo che $P_0 = (0, h_0)$ e $\vec{v_0} = (v_0, 0)$. Allora

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ z = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il vettore tangente è il vettore della velocità. Vogliamo trovare la legge che lega il tempo all'asse z. Quindi $\vec{v} = v_0\hat{x} - \sqrt{2g(h_0 - z)}\hat{z}$ e $|v| = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - z)}$. Se considiamo α come l'angolo fra il vettore di gravitazione (asse x) e il vettore normale,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\hat{x}}{|v|} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - z)}}$$

che dipende da z. Proiettiamo la gravità sulle sulle componenti, quindi $a_T = g\sin\alpha$ e $a_N = g\cos\alpha$, che si calcola facilmente con la relazione pitagorica del seno e coseno.

2. lo spazio s percorso dal corpo dall'istante di lancio $t = 0$ a quello in cui tocca il suolo:

$$\int_0^{\text{gittata}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

Esercizio Una persona sale delle scale a chiocchiola partendo dal piano terra all'istante $t = 0$. La persona si mantiene a distanza costante $r = 2$, dall'asse centrale delle scale e ogni secondo sale uno scalino alto $h = 20cm$ e profondo $d = 20cm$. Per studiare il moto della persona si adoperi:

1. un sistema di coordinate cartesiane ortogonali;
2. un sistema di coordinate cilindriche.

Si ricavino nei due casi le equazioni della traiettoria, le legge orarie e le componenti della velocità in funzione del tempo.

1. XXX;
2. XXX.

Esercizio Un punto percorre una traiettoria ellittica con modulo V della velocità costante nel tempo. Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con a e b indicando i semiassi. Si calcolino le componenti x e y dell'accelerazione posseduta dal punto nella posizione $P \equiv (x, y)$.

XXX

Esercizio Si consideri un moto piano tale per cui la velocità istantanea del piunto materiale mantenga sempre lo stesso angolo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ con la congiungente l'origine degli assi. Si ricavi la traiettoria.

XXX

16.2 24 ottobre

Esercizio Un osservatore lascia cadere un sasso in un pozzo al fine di rilevarne la profondità h. Se l'intervallo di tempo intercorrente tra l'istante iniziale e quello in cui si ode il rumore prodotto dalla collissione del sasso con il fondo del pozzo è Δt, quanto vale h? Si tenga conto della velocità del suono.

Abbiamo che il tempo di caduta più il tempo del suono è pari a

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{\text{suono}}} = \Delta t$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2h}{g}} &= \Delta t - \frac{h}{v_s} \\
\frac{2h}{g} &= \left(\Delta t - \frac{h}{v_s}\right)^2 \\
\Delta t^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - \frac{2\Delta t h}{s_v} &= \frac{2h}{g} \\
0 &= h^2 - 2\Delta t v_s h - \frac{2v_s^2 h}{g} + \Delta t^2 v_s^2 \\
0 &= h^2 - \left(2\Delta t v_s + \frac{2v_s^2}{g} + \Delta t^2 v_s^2\right) \\
h_{1,2} &= \Delta t v_s + \frac{v_s^2}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\Delta t g}{v_s}}\right)
\end{aligned}$$

Di cui consideriamo quella delle due che soddisfa l'equazione iniziale

$$h = \Delta t v_s + \frac{v_s^2}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta t g}{v_s}}\right)$$

Esercizio Un proiettile viene sparato contro un bersaglio inizialmente posto ad'altezza h e che viene fatto cadere contemporaneamente allo sparo. Si dimostri che la condizione affinché il proiettile colpisca il bersaglio è che esso sia inizialmente puntato contro il bersaglio stesso.

Se la distanza del proiettile è D allora dobbiamo dimostrare che

$$\tan\alpha = \frac{h}{d}$$

Le equazioni del moto del proiettile sono

$$\begin{cases} x_p = (v_0 \cos\alpha)t \\ y_p = (v_0 \cos\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Le equazioni del moto del proiettile sono

$$\begin{cases} x_b = D \\ y_b = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dobbiamo imporre il fatto che i due oggetti si incontrino in un certo momento. Quindi $x_p = x_b$ e $y_p = y_b$. Troviamo allora

$$\begin{cases} (v_0 \cos\alpha)t = D \\ (v_0 \sin\alpha)t = h \end{cases}$$

Senza risolvere le equazioni, notiamo che la divisione porta alla nostra condizione

$$\frac{v_0 t \sin\alpha}{v_0 t \cos\alpha} = \frac{h}{D}$$

Esercizio Un punto materiale si muove lungo un arco di circonferenza di raggio R con la seguente legge oraria:

$$s = s_0 \cos\omega t$$

dove s è l'ascissa curvilinea ed s_0 e ω sono costanti assegnate. Trovare la velocità angolare e le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione.

Abbiamo che $s = R\theta$. Allora

$$R\theta = R\theta_0 \cos(\omega t)$$
$$\theta = 0_0 \cos(\omega t)$$

e quindi la velocità angolare è data da

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = -w\theta_0 \sin(\omega t)$$

L'accelerazione è data dalla componente normale

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

e

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

Siccome $v = \Omega R$, abbiamo

$$v = -\omega R\theta_0 \sin(\omega t)$$

e

$$\begin{cases} a_N = \frac{\omega^2 R^2 \theta_0^2 \sin^2(\omega t)}{R} \\ a_T = -\omega^2 R\theta_0 \cos(\omega t) = -\omega^2 s \end{cases}$$

Esercizio Due aeroplani A e B hanno velocità opposte di modulo v e le loro traiettorie sono due rette parallele distanti d Sia $t = 0$ l'istante in cui la retta AB sarebbe perpendicolare alle due traiettorie. L'asse del cannone montato su A forma un angolo α con l'asse dell'aereo e i proiettili vengono sparati con velocità di modulo v_r relativa ad A. A quale istante t^* l'aereo A deve sparare affinché l'aereo B venga colpito? Non si consideri l'Accelerazione di gravità.

La legge oraria per A per $t < t^*$ è data da

$$\begin{cases} x_A(t) = vt \\ y_A(t) = 0 \end{cases}$$

mentre per $t \geq t*$ consideriamo il moto del proiettile

$$\begin{cases} x_P(t) = vt^* + (v_r \cos\alpha + v)(t - t^*) \\ y_P(t) = (v_r \sin\alpha)(t - t^*) \end{cases}$$

La legge oraria di B

$$\begin{cases} x_B(t) = -vt \\ y_B(t) = d \end{cases}$$

Allora dobbiamo eguagliare le leggi orarie

$$\begin{cases} x_P(t) = x_B(t) \\ y_P(t) = y_B(t) \end{cases}$$

quindi troviamo

$$\begin{cases} vt^* + (v + v_r \cos\alpha)(t - t^*) = -vt \\ (v_r \sin\alpha)(t - t*) = d \end{cases}$$

Dalla seconda ricaviamo $t - t^* = \frac{d}{v_r \sin\alpha}$. Sostituiamo questo valore nella prima

$$\begin{aligned} vt^* + (v + v_r \cos\alpha)\frac{d}{v_r \sin\alpha} &= -vt \\ &= -v(t - t^*) - vt^* \\ &= -v(t - t^*) - vt^* \\ -\frac{d(2v + v_r \cos\alpha)}{2vv_r \sin\alpha} &= t^* \end{aligned}$$

Esercizio Un'automobile parte da ferma con moto uniformemente accelerato con accelerazione a. Dopo un tempo τ si lancia un proietile che si può supporre in moto con velocità costante v_0. Determinare la minima velocità v_0 necessaria a colpire l'automobile, in funzione di a e τ. Si pu?o considerare il moto puramente unidimensionale.

Le legge orarie sono

$$\begin{cases} x_A(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ x_P(t) = v_0(t - \tau) \end{cases}$$

Abbiamo allora $x_A(t) = x_P(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}at^2 &= v_0(t - \tau) \\ \frac{1}{2}at^2 + v_0\tau &= v_0 t \end{aligned}$$

e quindi

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{2v_0\tau}{a}}$$

e la condizione è data dal discriminante

$$\frac{v_0^2}{a^2} > \frac{2v_0\tau}{a} \implies v_0 > 2a\tau$$

Esercizio Un treno in moto rettilineo uniforme con una velocità di modulo v rallenta bruscamente con decelerazione costante di modulo A: come conseguenza, una valigia, posata in bilico sul portapacchi, cade e finisce sul pavimento del treno. Si determini la traiettoria della valigia come apapre a un osservatore O fermo a terra e a uno O' sul treno.

La legge oraria inerziale della valigia è data da

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Per il riferimento non inerziale abbiamo $\vec{a} = \vec{a'} + \vec{\Delta}_{\text{trascinamento}}$, quindi $\vec{a'} = \vec{g} - \vec{A}$.

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = A \\ \frac{d^2y'}{dt^2} = -g \end{cases}$$

Da queste due leggi ricaviamo le leggi orarie

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}At^2 \\ y' = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

e da cui troviamo la traiettoria $y' = h - \frac{g}{A}x'$ che è una retta.

16.3 31 ottobre

Esercizio Un uomo di trova su un ascensore che sale a velocità costante V_0. Egli lancia ua pallina verticalmente verso l'alto con velocità v_0 relativa all'ascensore:

1. determinare dopo quanto tmepo la pallina ritorna nella mano dell'uomo;
2. rispondere alla domanda precedente nel caso in cui l'ascensore abbia una accelerazione diretta verso l'alto pari a A_{asc}.

Suggerimento: provare a risolvere il problema in due modi:

1. usando le leggi dei moti relativi;
2. usando le leggi del moto dei due corpi viste dal sistema di riferimento della terra ferma. Verificare che i risultati siano gli stessi.

XXX

Esercizio Sia $\vec{g_0}$ l'accelerazione di gravità che si misurerebbe in corrispondenza di un punto P della superficie terrestre qualore la Terra non fosse in rotazione; si determini l'accelerazione di gravità efficace misurata da un osservatore solidale con la Terra. Si calcoli inoltre la deviazione subita da un corpo in caduta libera dovuta all'accelerazione di Coriolis, all'equatore.

XXX

Esercizio Su di un corpo di massa m agisce una forza funzione del tempo data da: $F = F_0 - \alpha t$, con F_0 ed α costanti assegnate. All'istante iniziale il corpo transita per l'origine con velocità v_0. Si trovino velocità e posizione in funzione del tempo.

XXX

Esercizio Una particella si muove sotto l'azione di una forza $\vec{F} = \vec{u} \times \vec{c}$, dove $\vec{c}$ è un vettore costante. SI trovino traiettoria e legge oraria.

XXX

Esercizio Due rimorchiatori trainano un battello tramite cavi d'acciaio, fissati a prua del battello. L'angolo tra i cavi e l'orizzontale è $60°$, e la tensione è pari a $2 \times 10^5 N$ per ciascuno dei cavi. Si trovi la forza resistente dovuta all'acqua, se il battello si muove di moto uniforme.

XXX

16.4 9 novembre

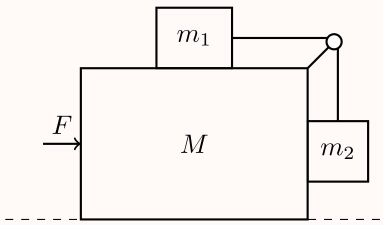
Esercizio Due corpi A e B, aventi rispettivamente masse M_A e M_B con $M_B > M_A$, scrivolano lungo un piano inclinato (con angolo di inclinazione α); essi sono in contatto tra loro, con B più in alto di A. Calcolare l'accelerazione del sistema costituito dai due corpi, se i coefficienti di attrito sono rispettivamente μ_A e μ_B. Con quale forza il corpo B spinge A?

XXX

Esercizio Una corda passante per una puleggia senza attrito ha due masse M e m attaccate agli estremi, con $M > m$. Determinare l'accelerazione del sistema e la tensione della corda.

XXX

Esercizio Assumendo tutte le superfici senza attrito e l'inerzia della corda e della carrucola trascurabili, trovare il valore della forza orizzontale F tale che non ci sia alcun moto relativo tra le masse m_1, m_2 e M.



XXX

Esercizio Una particella di massa m è vincolata a muoversi senza attrito all'interno di una superficie conica di angolo α. Trovare le condizioni iniziali tale per cui la particella si muova di moto circolare uniforme rispetto all'asse verticale del cono.

XXX

Esercizio Un blocco di massa m_1 è posizionato sopra un blocco di massa m_2 che si trova a riposo su un piano liscio. Se il coefficiente di attrito tra i blocchi è μ, trovare il valore massimo della forza orizzontale F che si può applicare a m_2 affinché m_1 non scivoli.

XXX

Esercizio Un corpo di massa m, posto su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito μ) è tirato da una forza $\vec{F}$ formante un angolo α rispetto all'orizzontale. Il corpo si muove con velocità costante. Si determini l'angolo per il quale l'intensità della forza è minima; ricavare inoltre il valore di quest'ultima.

XXX

Esercizio Due blocchi, A e B, di massa rispettivamente m_a e m_b, sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile. Al blocco A che poggia su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale, è inoltre vincolata una molla di costante elastica k la cui altra estremità è fissata a un sostegno alla base del piano inclinato. Il corpo B è appeso tramite una carrucola parallelamente al cateto verticale del cuneo così formato. Trascurando gli attriti si ricavi il periodo di oscillazione dei due corpi attorno alla posizione di equilibrio.

XXX

16.5 14 novembre

Esercizio Un ascensore sale con accelerazione costante $A = -0.1g$; all'interno dell'ascensore si trova un piano inclinato, con inclinazione α rispetto all'orizzontale e lunghezza l. Alla sommità de piano inclinato viene posto, con velocità nulla, un corpo di massa m che scende scivolando lungo il piano. Si calcoli il modulo v della velocità relativa all'ascensore che il corpo possiede quando giunge in fondo al piano, supponendo che tra il corpo e il piano esiste attrito con coefficiente di attrito dinamico μ_D.

Consideriamo un sistema di riferimento storto sul piano inclinato. Abbiamo quindi una forza apparente $\vec{F}_A$. Scrivendo l'equazione di Newton e l'accelerazione otteniamo

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt} = mg\sin\alpha + mA\sin\alpha - \mu_D R \\ 0 = -mg\cos\alpha - mA\cos\alpha + R \end{cases}$$

dove R è la reazione vincolare. Dalla seconda ricaviamo

$$R = m(g + A)\cos\alpha$$

e quindi

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt} &= m(g + A)\sin\alpha - \mu_D m(g + A)\cos\alpha \\ &= m(g + A)(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha) \\ &= \frac{11}{10}g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha) \end{aligned}$$

Integriamo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{11}{10}g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)(t - t_0)$$

e quindi

$$x(t) = \frac{11}{20}g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)(t - t_0)^2$$

allora

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{11}{20}g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)}}$$

e sostituendo nella velocità troviamo $v(t) \to v(x)$

$$v(x) = \sqrt{\frac{11}{5}(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)gx}$$

e allora troviamo $v(l)$ sostituendo $x = l$.

Esercizio Una pallina si trova ferma alla base di un piano inclinato di α rispetto all'orizzontale e di altezza h, montato sopra un carrello. Il carrello viene messo in movimento con accelerazione costante A per un intervallo di tempo τ, dopodiché il carrello prosegue di moto uniforme. Si determinino i valori di A per i quali la pallina, scivolando senza attrito lungo il piano inclinato, ne raggiunge la sommità.

Il moto va descritto in due fasi distinte. Consideriamo un sistema di riferimento storto sul piano inclinato. Abbiamo quindi una forza apparente $\vec{F}_A$.

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha + mA\cos\alpha & t \leq \tau \\ m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha & t > \tau \end{cases}$$

La velocità e la posizione al tempo τ è data da

$$v(\tau) = \tau(A\cos\alpha - g\sin\alpha)$$

e

$$x(\tau) = \frac{1}{2}(A\cos\alpha - g\sin\alpha)\tau^2$$

Queste sono le condizioni iniziali per il secondo sistema. Integrando troviamo

$$v(t) = v(\tau) - g\sin\alpha(t-\tau)$$

e

$$x(t) = x(\tau) + v(\tau)(t-\tau) - \frac{1}{2}g\sin\alpha(t-\tau)$$

Troviamo il tempo t^* per cui la velocità è nulla, quindi $v(t) = 0$ cioè quando la pallina di ferma

$$v(\tau) - g\sin\alpha(t^* - \tau) = 0$$
$$t^* = \tau + \frac{v(\tau)}{g\sin\alpha}$$

la posizione in cui la pallina si ferma è

$$x(t^*) = x^* = x(\tau) + \frac{1}{2}\frac{v^2(\tau)}{g\sin\alpha}$$

Quindi la pallina raggiunge la cima se $x^*\sin\alpha \geq h$. Abbiamo quindi la disequazione

$$\frac{1}{2}(A\cos\alpha - g\sin\alpha)\tau^2\sin\alpha + \frac{(A\cos\alpha - g\sin\alpha)^2\tau^2}{2g} \geq h$$

che ha soluzioni

$$A \geq \frac{g\sin\alpha + \sqrt{g^2\sin^2\alpha + \frac{8hg}{\tau^2}}}{2\cos\alpha}$$

Esercizio Un punto materiale di massa m è appeso tramite una molla di costante elastica k ad un supporto che avanza con accelerazione a. Clcolare l'allungamento della molla.

Esercizio Un piano inclinato 3-4-5 è fissato su una piattaforma rotante. Un blocco è posizionato a riposo sul piano e il coefficiente d'attrito statico fra il blocco e il piano è μ_s. Il blocco è inizialmente alla distanza di 40 cm dal centro della piattaforma. Trovare il valore minimo della velocità angolare ω che impedisce al blocco di cadere sulla piattaforma.

XXX

16.6 5 Dicembre

16.7 11 Dicembre

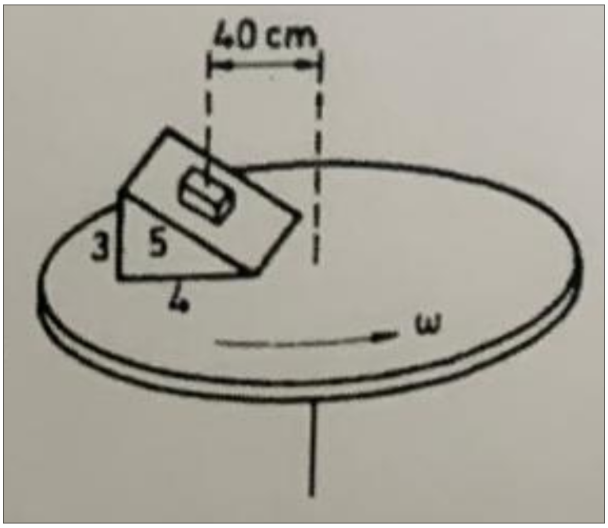
Esercizio 7.1

Per ogni punto della traiettoria la pallina deve soddisfare la legge di Newton, affinché il giro della morte si completi, in particolare nel punto B, dove la forza è data da

$$mg + N - m\frac{v^2}{R} = 0$$

Da cui ricaviamo la reazione vincolare

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg$$



la reazione vincolare in B deve essere maggiore o uguale a zero, come condizione limite per completare il giro della morte. Quindi,

$$m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0$$
$$v^2 \geq Rg$$

Ora, leghiamo la velocità con l'altezza di partenza. Consideriamo la conservazione dell'energia. Nel punto iniziale l'energia è mgh e in B è $\frac{1}{2}mv_b^2 + 2mgR$. Allora ricaviamo

$$h = 2R + \frac{1}{2}\frac{v_b^2}{g}$$

Il valore minimo è allora

$$h \geq 2E + \frac{1}{2}\frac{Rg}{g} = \frac{5}{2}R$$

L'energia è iniziale è la medesima con la quale la molla viene schiacciata. Abbiamo allora

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

e quindi la compressione è data da

$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}$$

Esercizio 7.2

Vi sono la forza elastica, quella di gravità, e il vincolo della pallina sul piatot. La legge di Newton del piatto, fino a quanto stanno a contatto, abbiamo

$$m'a = -m'g + -kx - N$$

e quella della pallina

$$ma = -mg + N$$

Troviamo quindi

$$\begin{cases} mm'a = -mm'g - kmx - mN \\ mm'a = -mm'g + m'N \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$N = \frac{-kmX}{m+m'} = -\frac{kmX}{M}$$

Calcoliamo la compressione iniziale per cui piatto e pallina superano quota zero. L'energia iniziale è solo quella potenziale della molla $E_i = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$. Essa deve pari a quella finale, che deve essere sufficiente per almeno arrivare a quota zero con velocità nulla.

$$\frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = Mg\Delta L$$

da cui

$$\Delta L = \frac{2Mg}{k}$$

Esercizio 7.3

Il corpo rimarrà fermo se $T \leq F_{att} = \mu_s mg = 2\mu_s mg$. La tensione è data da

$$T - mg\cos\theta - m\frac{v^2}{l} = 0$$

che è l'equazione di Newton per la sferetta. La tensione è massima quando $\theta = 0$, quindi

$$T_{\max} = mg + m\frac{v^2}{l}$$

Chiamiamo $v_{\max}$ la velocità per $\theta = 0$. L'energia iniziale è data da

$$E_i = mg(l - l\cos\theta_0)$$

dove fissiamo lo zero al punto minimo. Abbiamo allora

$$\frac{1}{2}mv_{\max} = mg(l - l\cos\theta_0)$$

Da cui ricaviamo

$$v_{\max}^2 = 2gl(1 - \cos\theta_0)$$

Allora la tensione massima è data da

$$\begin{aligned} T_{\max} &= mg + m\frac{2gl(1-\cos\theta_0)}{l} \\ &= 3mg - 2mg\cos\theta_0 \end{aligned}$$

Tale forza deve essere minore o uguale a quella di attrito

$$\begin{aligned} 3mg - 2mg\cos\theta_0 &\leq 2\mu_s mg \\ \theta_0 \leq \arccos\left(\frac{3-2\mu_s}{2}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 7.4

Il momento angolare è

$$L_0 = mvR = m\omega R^2$$

che è costante. In particolare $L_0 = m\omega_1 R_1^2$. Allora,

$$\omega(R) = w_1\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$$

Quindi, la tensione della fune è pari a

$$\begin{aligned} T &= m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega_1^2\left(\frac{R_1}{R}\right)^4 R \\ &= m\omega_1^2 R_1\left(\frac{R_1}{R}\right)^3 \end{aligned}$$

La tensione massima ci dà la condizione per il raggio minimo

$$T_{\max} = m\omega_1^2 R_1\left(\frac{R_1}{R_{\min}}\right)^3$$

da cui ricaviamo

$$R_{\min} = \left(\frac{m\omega_1^2 R_1^4}{T_{\max}}\right)^{1/3}$$

Per ciò che concerne il lavoro abbiamo

$$\begin{aligned} W = \Delta E_K &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_1^2 R_1^2\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 1\right] \end{aligned}$$

per il teorema dell'energia cinetica.

Esercizio 7.5

Il momento nella direzione $\hat{z}$ si conserva in quanto $\vec{r} \wedge m\vec{g}$ è prtogonale all'asse z. Abbiamo

$$L_{0,az} = |\vec{r_A} \wedge m\vec{v_0}| = mv_0 R\sin\theta$$

e

$$L_{0,bz} = mvR$$

Allora otteniamo la conservazione del momento angolare

$$v = v_0\sin\theta$$

L'energia è anche conservata. La condizione minima è che la velocità sia nulla in cima alla bacinella. In tal caso, la velocità verticale è nulla alla fine.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

e quindi

$$v_0^2 = \frac{2gR}{\cos\theta}$$

Esercizio 7.6

Esercizio 7.7

$$\int_r^\infty \frac{k}{r^3}\,dr$$

16.8 18 dicembre (urti)

Esercizio 8.1

Il volo dei proiettili è soggetto solo alla forza peso, e dopo l'urto il centro di massa delle due masse si muoverà di moto parabolico. Abbiamo quindi che

$$m\frac{d\vec{V}_c}{dt} = m\vec{g}$$

dove $\vec{V}_c$ è la velocità del centro di massa. Possiamo allora scrivere

$$\begin{cases} m\vec{a}_{cx} = 0 \\ m\vec{a}_{cy} = -mg \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{v}_{cx}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \vec{v}_{cy}(t) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{x}_{cx}(t) = v_0 \cos\alpha t \\ \vec{x}_{cy}(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$y_c = x_c \tan\alpha = \frac{gx_c^2}{2v_0^2 \cos^2 alpha} = 0$$

da cui troviamo la soluzione

$$x_c = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha \sin\alpha$$

Questo punto del centro di massa è la media pesata dei due punti di atterraggio

$$x_c \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

E quindi troviamo

$$\frac{3}{2}x_c - \frac{x_2}{2}$$

Esercizio 8.2

Abbiamo la conservazione

$$\vec{p} = m_1\vec{v_{10}} + \frac{1}{2}m_1\vec{v_{20}} = 0$$

Proiettando l'equazione della quantità di moto sull'asse delle ascisse troviamo

$$p_x = m_1 v_{10} - \frac{1}{2}m_1 v_{20} = 0$$

Il corpo 1 ha

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \implies \begin{cases} v_x = v_{10} \\ v_y = -gt \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = v_{10}t \\ y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il momento in cui tocca terra è $\bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ e quindi

$$\overline{x_1} = x_1(\bar{t}) = v_{10}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Per il corpo 2 analogamente abbiamo

$$\begin{cases} x_2 = v_{20}t \\ y_2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

quindi

$$\overline{x_2} = x_2(\bar{t}) = -v_{20}\sqrt{\frac{2h}{g}} = -2v_{10}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distanza è allora

$$d = \overline{x_1} - \overline{x_2} = 3v_{10}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

da cui ricaviamo v_{10} e v_{20}.

Esercizio 8.3

La distanza iniziale è $L_0 - \Delta L$ e dopo che il filo viene tagliato le masse si cominciano a muovere con velocità v_1 e v_2. Visto che la forza della molla è interna, la quantità di moto lungo le ascisse si conserva. Quindi,

$$p = -v_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

Allora

$$|v_2| = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{v_1}{2}$$

con direzione opposta. L'energia del sistema vale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} k \Delta L^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,\max}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\max}^2 + 0 \\
K \Delta L &= \frac{3}{2} m_1 v_{1,\max}^2 \\
v_{1,\max} &= \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m_1}} \\
v_{2,\max} &= \sqrt{\frac{k}{6m_1}}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.4

Conservazione della quantità di moto

$$\vec{p} + M\vec{v_1} + m\vec{v_2} = (M+m)\vec{v_1} + m\vec{v_{2,r}}$$

la proiezione nell'ascisse è data da

$$(M+m)v_1 - m v_{2,r} \cos\alpha = 0$$

Da cui ricaviamo

$$v_{2,r} = \frac{M+m}{m\cos\alpha} v_1$$

Chiamiamo $A = m\cos\alpha$. Dal teorema di Pitagora generalizzato

$$v_2^2 = v_1^2 + v_{2,r}^2 - 2 v_1 v_{2,r} \cos\alpha$$

L'energia potenziale del cuneo non cambia quindi

$$\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \\
2gh &= \frac{v_1^2}{A} + \frac{v_1^2}{A^2 \cos^2\alpha} - \frac{2v_1^2}{A} \\
2gh &= v_1^2 \left(\frac{1}{A^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{A} \right)
\end{aligned}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh} A \cos\alpha}{\sqrt{1 - A^2\cos^2\alpha}}$$

Esercizio 8.5

La quantità di moto e l'energia cinetica si conservano. Le velocità sono tutte parallele. Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
m_1 v_0 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\
\frac{1}{2} m_1 v_0^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
v_1 &= \frac{m_1 v_0 - m_2 v_2}{m_1} \\
m_1 v_0^2 &= m_1 \left(v_0^2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2^2 - 2\frac{m_2}{m_1} v_2 v_0 \right) + m_2 v_2^2 \\
0 &= v_2 \left[\frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 - 2v_0 \right] \\
v_2 &= \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{v_0}{2} \\
v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{2}
\end{aligned}
$$

La traiettoria è data da

$$
y = h - \frac{gx^2}{2v_2^2}
$$

che deve essere nulla quando $x = d$, da cui

$$
v_2 = \sqrt{\frac{g}{2h}} d
$$

e quindi

$$
v_0 = \sqrt{\frac{2g}{h}} d
$$

Esercizio 8.6

L'energia iniziale è

$$
E_1 = \frac{1}{2} k h^2
$$

appena prima di colpire m_2 abbiamo

$$
E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k \Delta L^2
$$

con $\Delta L = d - L_0$. Abbiamo quindi $E_1 = E_2$ per la conservazione dell'energia da cui

$$
v_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}(h^2 - \Delta L^2)}
$$

L'urto è elastico e centtale quindi

$$
v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{2}
$$

Quindi l'energia subito dopo l'urto è

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta L^2 \\
&= \frac{1}{8} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k \Delta L^2 \\
&= \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{4} h^2 + \frac{3}{4} \Delta L^2 \right)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo allora la massima compressione, quindi

$$E_4 = \frac{1}{2}k\Delta L_{\max}^2 = E_3$$
$$L_{\max} = \frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{4}d - {L_0}^2$$

Esercizio 8.7

XXX