Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Assiomi di Peano

Definizione Assiomi di Peano

Gli *assiomi di Peano* incudono i numeri naturali:

- il valore 1 è un numero;
- ogni numero n ha il suo successore $S(n) = n + 1$;
- se $m \neq n$, allora $S(m) \neq S(n)$;
- il numero 1 non è il successore di alcun numero;
- **assioma induttivo:** sia $E \subseteq \mathbb{N}$ tale che $1 \in E$, allora

$$n \in E \implies S(n) \in E$$

L'insieme E è l'insieme $\mathbb{N}$.

La funzione successore è initettiva.

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma indutivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Principio di induzione

Teorema Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$, allora

$$P(0) \land (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

Teorema Equivalenza principio e assioma di induzione

L'assioma induttivo è equivalente al principio di induzione.

Proof Equivalenza principio e assioma di induzione

($\Longrightarrow$) Sia

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

Se $P(1)$ è vera e cioè $1 \in E$, e che per ogni n per cui $P(n)$ è vera, e cioè $n \in E$, abbiamo $n+1 \in E$. Allora $E = \mathbb{N}$, che è la conclusione dell'assioma induttivo.

($\Longleftarrow$) TODO: Dimostrare che $E = \mathbb{N}$ sapendo che vale il principio di induzione.

Proposition Principio di induzione forte

Il principio di induzione è equivalente alla seguente forma: sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$ tale che

- $P(1)$ è vera;
- $P(k)$ è vera per tutte le $k \leq n$, allora $P(n+1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per tutte le n.

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

- Il caso base è dato da $n = 1$ dove $1 = \frac{2}{2} = 1$.
- Il caso induttivo è dato dato da $\xi = n + 1$

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} + \xi &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{\xi(\xi+1)}{2}\end{aligned}$$

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

e impostiamo $j = n - k + 1$, abbiamo che la sommatoria è pari a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1}$$

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che

$$\sum_{k+1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Esempio Principio di induzione

Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $h > -1$,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$