Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Sottoinsiemi finali

Definizione Sottoinsieme finale
Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$$

Proposition
Usando l'assioma indutivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Combinatorica

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni fa F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

$$n! = |\{f : F_n \to F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1, che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n, aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n + 1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazione di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni
Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f : F_k \to F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni
Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbimao che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali
Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X.

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.1 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F, abbiamo $E \neq F \iff 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f : x \to y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y.

La funzione $\Xi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ tale che $\Xi(E) = 1_E$ è biettiva. È iniettiva perché sottoinsiemi diversi hanno funzioni caratteristiche diverse, suriettiva perché ogni funzione definisce un insieme diverso (e quindi c'è sempre un insieme che porta in ciascuna funzione). La funzione $f : X \to \{0,1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti.

Quindi, siccome è biettiva le cardinalità coincidono

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^n$$

2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

3 Interi relativi

In $\mathbb{N}$ è definita la funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dove $(m,n) \to m+n$.

Abbiamo chiaramente che $(a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le prorpietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo $\mathbb{Z}$ come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{=1} n' = -n \,|\, n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists - n \,|\, n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \to \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e $\cdot$ con le prorpietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in $\mathbb{Q}$ si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di $\mathbb{Q}$ ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento che è compatibile ocn le operazioni $+$ e $\cdot$, cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in $\mathbb{Q}$ sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciò ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n, contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

4 Definizioni con ordini

Sia $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato*.

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.
Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

4.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E. Vi sono diversi minoranti di E, come -1, -30 etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E. I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quando se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n, è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 1$. Qualcunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1-z}$$

4.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo del maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande del minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in $\mathbb{Q}$ sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2 \right\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di μ. Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $\left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che inf, sup, min, max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E, allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In $\mathbb{Q}$ (e poi in $\mathbb{R}$), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiornate cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

4.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della prorpietà del sup sono:

- **proprietà archimedea:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, na > x$ (in realtà vale anche in $\mathbb{Q}$).
- **densità dei razionali nel reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \,|\, x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \,|\, x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E. Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \to t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E, contro l'ipotesi impossibile perché x, che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x, e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere nè più grande nè più piccolo, $x^n = y$.
- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

4.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \,|\, x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E, F, $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il temrine $n+2$ cresce con n, quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approcciando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F. Allora siccome ci avviciamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$. Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1-z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.
- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il max non esiste in quando $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anchde il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.
- Posto $E + F = \{x + y \,|\, x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:
  1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
  2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > e_1 > \sup E . \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_2 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.

- Posto $-E = \{-x \mid x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E. Analogamente per il min.

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{x^2+1} \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore.
Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2)-(n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il maggiornate e supremum è quindi x_{14}.

5 Esponenziali

5.1 Potenze ad esponente reale e esponziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = \left(x^{-}1\right)^{r}$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \left(x^r\right)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

5.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = \left(\sqrt[p]{x}\right)^m < \left(\sqrt[p]{x}\right)^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

E infinie se $0 < x < 1$

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

5.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x, $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è stretta crescente, e strettamente descrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a(x^y) &= y \log_a(x) \\ \log_a(b) &= \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)} \end{aligned}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g $\ln(x(x-1))$ non is può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$. Estendiamo il campo $\mathbb{R}$ costruendo un campo $\mathbb{C}$ che contiene una immagine isomorfa di $\mathbb{R}$ nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in $\mathbb{R}$;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare $\mathbb{C}$ come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

6.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

6.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \qquad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \qquad \dots$$

Dato $z = a + bi$, diciamo che $\Re(z) = a$ e $\Im(z) = b$.

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z,

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\overline{wz} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

6.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e il punto polare (r, θ) abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

6.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\cos\theta)^{n-k}(\sin\theta)^k$$

7 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\mathrm{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

8 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha moltiplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

9 Spazi metrici

Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se tutti i punti sono interni in A.

10 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

($\Longrightarrow$) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ dove $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0. Chiaramente, esiste un $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \cdots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ε esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

($\Longleftarrow$) Trivial.

11 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che $M = \max x_n$ se $\forall n x_n < M$ e $\exists n' \,|\, x_{n'} = M$. Analogamente il min.

Definiamo inoltre $\sup_n x_n = \sup\{x_n \,|\, x \in \mathbb{N}\}$ Analogamente per l'inf.

Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà P, una successione $\{x_n\}$ soddisfa la proprietà P definitivamente se $\exists N \,|\, \forall n, P(n) \geq N$.

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore a maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \to l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorni diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l-\varepsilon, l+\varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi $x_n \to \xi$ se per ogni interno I esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$.

Lemma

Se λ e $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ and $\lambda \neq \mu$ allora esistono intorni I di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Proof

Siano per esempio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda < \mu$. $\forall r \leq \frac{\mu-\lambda}{2}$ gli intorni $I = (\lambda - r, \lambda + r)$ e $J = (\mu - r, \mu + r)$ sono disgiunti.

Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $x_n \to \lambda$ e $x_n \to \mu$ allora $\lambda = \mu$. Infatti supponiamo che $\lambda \neq \mu$ per il lemma $\exists I$ intorni di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$. Per ipotesi $x_n \to \lambda$ quindi $\exists M_1$ tale che $x_n \in I \forall n \geq N_1$. $x_n \to \mu$ quindi $\exists M_2$ tale che $x_n \in J \forall n \geq N_2$. Quindi se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in I \cap J = \emptyset$ ↯.
2. Se $x_n \to l \in \mathbb{R}$, allora $\{x_n\}$ è limitato cioè esiste $m \leq M$ tale che $m \leq x_n \leq M$ per tutte le n. Infatti, per ipotesi $x_n \to l$ quindi usando $1 = \varepsilon$ nella definizione, risulta che $\exists N \,|\, l - 1 < x_n < l + 1$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte, per ogni $n = 1, \cdots, N-1$ abbiamo che
$$A = \min\{x_1, \cdots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_{N-1} = B\}$$
che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che $m = \min\{l-1, A\} \leq x_n \leq \max\{l+1, B\} = M$
3. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N \,|\, \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N$, $x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorni I di λ e J di μ tale che
$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

- $$x_n \to \lambda \implies \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$
- $$y_n \to \lambda \implies \exists N_2 \,|\, \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

Infatti, $x_n \to 0$ se e solo se $|x_n| \to 0$

$$\begin{cases} x_n \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$

poniamo $y_0 = 0, \forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.
In particolare, se $y_n \to \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni)**: Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \to l$ e $z_n \to l$. Allora, $y_n \to l$.
Se $x_n \to +\infty$ e $z_n \to +\infty$, allora $y_n \to +\infty$.
Se $x_n \to -\infty$ e $z_n \to -\infty$, allora $y_n \to -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq n$, allora $x_n \cdot y_n \to 0$. Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \,|\, a < b \land a \leq x_n \leq b, \forall n$
2. $\exists M > 0 \,|\, |x_n| \leq M, \forall n$

11.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \to \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \to \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \to \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n - y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leqslant |x_n - \lambda| + |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \to \lambda + \mu$.
Dimostriamo ora che se $x_n \to +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \to +\infty$. Ricordiamo chde se $y_n \to \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.
Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n. $x_n \to +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.
Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + k) - K = M$ (alla pegio tolgo un K).
Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \to +\infty$ e $y_n \to -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \to +\infty \\ y_n = -n \to -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \to c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \to l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualuncuque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positvo. Allora $x_n \to l$ infatti basta aplicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \to \lambda$, $y_n \to \mu$ allora $x_n \cdot y_n \to \lambda \to \mu$ dove $\lambda\mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \to \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \to \mu$ fissato $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - \lambda\mu| &= |x_n y_n - x_n\mu + x_n\mu - \lambda\mu| \\
&= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\
&\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\
&\leq N \cdot |y_n - \mu| + |y||x_n - \lambda| \\
&\leq (N + |\mu|)\varepsilon
\end{aligned}$$

$x_n \to \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \to \lambda\mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^{\pm}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significatica forma di indecisione, al contrario del denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1+\frac{\sin n}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $(1+\frac{1}{n})$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m}+\frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \,|\, \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
  - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, x_N > \xi - \varepsilon$

  e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

  $$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \,|\, x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonia

  $$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

  e per definzione, $x_n \to +\infty = \sup x_n$.

11.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \to A$ e $b_n \to B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \to A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \to 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \to \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1+h) \implies A^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \to +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $\left(\frac{1}{A}\right)^n \to +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \to A \geq 0$, $b_n \to B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \to A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0.
Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.
Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).
Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \to B$, allora

$$\log b_n \to \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,
$$\frac{n^\alpha}{A^n} \to 0$$
(in particolare con α)
2. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha > 0$,
$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \to 0^+$$
3. $\forall \alpha, \beta > 0$,
$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \to 0$$
4. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,
$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \to 0$$
5. $\forall A > 1$,
$$\frac{A^n}{n!} \to 0^+$$
6.
$$\frac{n!}{n^n} \to 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \to 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \to 0$$

Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \to 0$$

Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1. a_n è monotona strettamente crescente;
2. b_n è monotona strettamente decrescente;
3. $\forall n, a_n \leq b_n$ quindi a_n è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora, $a_n \to e^-$, $b_n \to e^+$ e $e \approx 2.7182818$.

Proof

1. Mostriamo che $\forall n \geq 1, a_n < a_{n-1}$. Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni $n \geq 2$ studiamo il rapporto

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} > \frac{1-\frac{1}{n^2}\cdot n}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

3. Per tutte le n

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome a_n è limitata superiormente e ed è monotina crescente, esiste $\lim a_n = e^-$ Poiché $b_n = a_n + (b_n - a_n)$,

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n} \to 0$$

Quindi $b_n \to e^+$ siccome è decrescente. Siccome $a_n < e < b_n$ si può approssimare scegliendo n sufficientemente grandi.

Proposition

Se a_n è crescente, e b_n è decrescente e $a_n < b_n$ si deduce che $\forall m, n, a_m < b_n$

Corollario

Se $c_n \to +\infty$ allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proof

Siccome vale sempre $[c_n] \leq c_n < [c_n]+1$

$$1+\frac{1}{[c_n]+1} < 1+\frac{1}{c_n} \leq 1+\frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]} < \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]}\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

Proposition

Se $|c_n| \to +\infty$, allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proposition

Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$$

Segue dall'ultima proposition con $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Proposition

Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \to \alpha$$

Proof

Basta porre $\delta_n = (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \to 0$ dove chiaramente $\delta_n \neq 0$ definitivamente. Quindi esprimere ε_n in termini di δ_n per concludere.

Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

Vogliamo applicare $\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1$ con $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})}$. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2}+\log n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(1+\frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \to 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

11.3 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

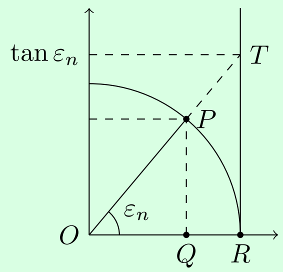
Teorema

Sia $\varepsilon_n \to 0$, allora

1. $\sin \varepsilon_n \to 0$, $\cos \varepsilon_n \to 1$ e $\tan \varepsilon_n \to 0$;
2. Se $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora
$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$
e
$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$$
e
$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Proof

1. Per la definizione del seno,
$$|\sin \alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$
Quindi $|\sin \varepsilon_n| \leq |k_n| \to 0$ e $\cos^2 \varepsilon_n = 1 - \sin^2 \varepsilon_n \to 1$ da cui $\varepsilon_n \to 1$. Inoltre,
$$\tan \varepsilon_n = \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \to 0$$
2. Sia $\varepsilon_n \to 0$ con $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,
$$\frac{\sin x}{x}$$
è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $\forall n, \varepsilon_n > 0$ e poiché $\varepsilon_n \to 0$ posso anche supporre che $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$. Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo OPQ è minore o uguale dell'area del settore circolare OPR che è minore o uguale del triangolo OTR.
Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo α è data dalla proporzione
$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$
quindi
$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$
Abbiamo allora che
$$\frac{1}{2}\cos \varepsilon_n \sin \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varepsilon_n$$
che semplificando diventa
$$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

Siccome $\cos \varepsilon_n \to 1$ e $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \to 1$, per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)\left(\frac{1}{\cos \varepsilon_n}\right) \to 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1-\cos \varepsilon_n)(1+\cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1+\cos \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1-\cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1+\cos \varepsilon_n} \\ &= \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\cos \varepsilon_n} \to \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2)\sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \to 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}a_n &= (n+2)\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})}{n^2} \to 1\end{aligned}$$

11.4 Proprietà asintotico

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$ se $a_n \to \infty$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} = n(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$. Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$ se $a_n \to 1$. Per esempio, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$.

Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $a_n = \mathcal{O}(b_n)$;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = \mathcal{O}(d_n)$, allora $a_n c_n = o(b_n d_n)$. Infatti,

$$\left|\frac{a_n c_n}{b_n d_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \left|\frac{c_n}{d_n}\right|$$

  che tendono entrambi a zero;
- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, allora $a_n + c_n = o(b_n)$. Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

  che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$;

11.5 Esercizi

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right)\left(\sqrt[3]{n^6+1} - n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4+n}}}$$

12 Serie numeriche

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n\pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n\pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}$$

Proof Serie geometrica per Induzione

Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

La serie ha ragione $q = \frac{1}{10}$ e quindi

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2\cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^{n+2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\
&= \frac{1}{7^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\
&= \frac{1}{7^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + \frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n+2} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

12.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

Esempio

Mostriamo che se $x = N, a_1 a_2 \cdots a_k \overline{9}$ dove $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $a_k < 9$, allora $x = N a_1 a_2 \cdots (a_k + 1)$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} x &= N + \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k}(a_k + 1) \end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Corollario

Se $a_n = o(b_n)$ cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$ e quindi si applica il confronto.

Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esempio Teorema di condensazione

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$ che converge se e solo se $p > 1$.

Teorema Rapporto di radici

Sia $\sum a_n$ una serie a termini ≥ 0 e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1. $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$;
2. $a_n > 0$ definitivamente e $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$;

Allora se $L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ allora $a_n \to \infty$.

Se $L = 1$ il test è **inclonclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se $p > 1$ e diverge altrimenti.

Corollario

Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$. Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora se $L < 1$, la serie converge e $a_n \to 0$ e se $L > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists N$ tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se $L < 1$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (basta scegliere $\varepsilon = (1 - L)/2$). Dalla disequazione $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché $L + \varepsilon < 1$ la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se $L > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, come per esempio $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, quindi per $n \geq N$ abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla n otteniamo $a_n > (L - \varepsilon)^n \to +\infty$ e per confronto $a_n \to +\infty$. In particolare, a_n non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso, $\exists \lim_n \frac{a_{n+1} a_n}{=} L$ come nel caso precedente. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che $L > 1$ cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere ε tale che $L - \varepsilon > 1$ e abbiamo che $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$ moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_N} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L-\varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di $L - \varepsilon$. Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L-\varepsilon)^{-N+1} \cdot (L-\varepsilon)^n \cdot a_N \to +\infty$$

e per confronto $a_n \to +\infty$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con $A > 0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \to 0$$

Quindi la serie converge, e converge a $e^A - 1$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotito. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e. Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domincia sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n \log n}$ come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2}\left\{1 + e^{n \log \log(n) - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2}\right\}}{e^{3n \log n}\left\{1 + e^{-2n \log n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n}\right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2\left\{1 - \frac{\log \log n}{n^2}\right\}} \to \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left(e^{n^2 - 3n \log n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{n\left(1 - \frac{3 \log n}{n}\right)} \to \infty > 1$$

Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+2)(2n)!$ e $(n+1)\log(n+1) = n\log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)\log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n \log n}}\end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)}(n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned}n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\log\left(n^{\log n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\log n)^2} \to 1\end{aligned}$$

Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{a^{\sqrt{n}\log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n}\log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}}\right\}}\end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2\log n - \sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right\}}\end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2\log n - \sqrt{n}\log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{2\log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \to -\infty\right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

12.2 Formula di Stirling

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \to 0\end{aligned}$$

Quindi la serie converge.
Con radici abbiamo

$$\begin{aligned}\left[\frac{n^n}{(2n)!}\right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n}(1+o(1))\right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2}(4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}}(1+o(1))^{\frac{1}{n}}} \to 0\end{aligned}$$

E quindi converge

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned}
(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \left(n^2\right)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2}(1 + o(1)) + e^{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2}\right\}}(1 + o(1)) + e^{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2}\right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2n^2\{\cdots\}} \right\} \\
&\sim e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2}\right\}} = \left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}
\end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{\left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{\left(n^2\right)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\
&= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \to 0
\end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

12.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite $\lim\limits_n a_n = L \in \mathbb{F}$. Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se $n, m > N$, allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

Definizione Successione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Si dice che $\{a_n\}$ soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \,|\, \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se $a_n \to L$ finito, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1. $\exists$ finito
$$\lim_n a_n = L$$
2. $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$.

Proposition

Sia

$$\sum^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia $\{S_N\}$ la successione delle sue somme parziali. Per definizione, $\sum a_n$ converge a S se esiste finito $\lim\limits_n S_n \in \mathbb{R}$.

Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie $\sum a_n$ converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

1. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N, |S_N - S_M| < \varepsilon$$
equivalentmeente notando che se $n > m$,
$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{m+1}^{n} a_k$$
2. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$
ovvero
$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

3. **condizione più usata:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$
con $0 < p \leq 1$ converge ma non assolutamente. La serie converge per $p > 0$.

Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata
Sia $\{b_k\}$ una successione, allora
$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k|$$

Proof
Per induzione

- il caso base è banale;
-

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) + b_{n+1} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| + |b_{n+1}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k|$$

Proof Teorema fondamentale
Sapendo che
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$
la tesi è che
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
converga equivalentemente soddisfa le condizionid i Cauchy.
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi $\sum |a_k|$ converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq m \geq N$
$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \varepsilon$$
Ma per il lemma $\forall n \geq m \geq N$,
$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

> **Esempio**
> Considera
> $$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$
> che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.
> $$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$
> Poiché $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$ converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per
$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$
con $p > 1$. Se $p \leq 1$, allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio, $|\sin x| > \frac{1}{2}$ se $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che l'intervallo
$$I_k = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$$
ha lunghezza $\frac{2\pi}{3} > 1$, quindi conviene un interno n, in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie
$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$
dove n_k è un intero in ognuno di I_k. Ciò è maggiore o uguale di
$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$
in quanto il valore a denominatore è al minomo $\frac{5}{6}\pi + k\pi$. Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

> **Esempio**
> Considera
> $$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$
> allora guardiamo il modulo:
> $$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$
> Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.
> $$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$
> Notiamo che $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$ perché $n = 1$ dà il valore massimo. Quindi
> $$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2\sum n^{-\frac{7}{8}} + 2\sum n^{-\frac{4}{3}} + 2\sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3}(\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Perché il teorema valga basta che $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per n sufficientemente grande.

Esempio

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni $0 < p \leq 1$.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché $\forall n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi $p = 2 > 1$ e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che $\forall n, a_{2n+1} < a_{2n+2}$.

Nota: $a_n \sim b_n$ e b_n monotona crescente non implica necessariamente che a_n sia monotona decrescente.

Infatti,

Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. È chiaro che b_n è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti, a_n non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se a_n fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

Esempio Stima errore teorema Leibniz

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di 10^{-3}. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni, $a_n \to 0$ e $a_{n+1} < a_n$, quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_n| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$ certamente $|E_N| < 10^{-3}$. Dobbiamo usare almeno $N = 6$ per ottenere $(N+1)! = 5040 > 1000$. Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di $\frac{1}{6!}$.

Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto $p = \frac{1}{2} \leq 1$ e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto $a_n \geq 0$ e $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+1) - (n+1)^{3/2}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 \geq (n+1)^3 &= n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con $n \to \infty$ del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1 + \varepsilon_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n}(1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non risuciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e b_n è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\sqrt{n} n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{i} nfty(-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

ha modulo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\\ &= \frac{(n+1)-\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\\ &= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergano assolutamente allora $\sum(a_n+b_n)$ converge assolutamente. Infatti,

$$\sum |a_n-b_n| \leq \sum(|a_n|+|b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n| < +\infty$$

12.4 Serie con parametri

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}\left(x^2-x-2\right)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2-x-2 \geq 0$$

per $x \leq -1 \vee x \geq 2$, altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left|\frac{\log n}{n+1}(x^2-x-2)\right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log\log n} \to 1$ e $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ (limite notevole) e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Quindi $|x^2-x-2| = L$ e se $L<1$, la serie converge assolutamente, se $L>1$ il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione $L<1$

$$|x^2-x-2| < 1$$

Siccome $|t| < a \iff -a < t < a$ scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Se $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui $L = 1$. In tale caso, $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Nel caso in cui $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ sappiamo che $x^2 - x - 2 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con $p = 1$ e $q > 1$, quindi la serie diverge. Invece, se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo che $x^2 - x - 2 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \to 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se $a - a_{n+1} \geq 0$ definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned} (n+2)\log n - (n+1)\left[\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] &= \log n - (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\sim \log n - (n+1)\frac{1}{n} \to +\infty - 1 \to \infty \end{aligned}$$

siccome $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon \to 0$. Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n$$

La serie è a termini non-negativi quando $x-1<0$ cioè $x<1$. Studiamo allora la convergenza assoluta

$$\sum\left|\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n\right|$$

applichiamo il criterio della radice n-esima

$$\left|\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n\right|^{1/n}=\frac{2\left(1+\frac{\log n}{2^n}\right)^{1/n}}{n^{1/n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1(/n)}}\cdot\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}\to\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}=L$$

Se $L<1$, la serie converge assolutamente. Se $L>1$, il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se $L=1$ il test è inconclusivo. Abbiamo allora

$$L=\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}<1\iff 2|x-1|<\sqrt{x^2+4}$$

e quindi

$$\begin{gathered}4(x^2-2x+1)<x^2+4\\ 3x^2-8x<0\\ x(3x-8)<0\end{gathered}$$

allora la soluzione è $0<x<\frac{8}{3}$. In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se $x<0$ o $x>\frac{8}{3}$ la serie non converge. Poiché è a termini positivi per $x\leq 1$ se $x<0$ la serie diverge. Per $x>\frac{8}{3}$ la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se $x=0$ o $x=\frac{8}{3}$ abbiamo $L=1$ e il criterio è inane. Per tali valori,

$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}=1$$

poiché

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

è negativo in $x=0$ e positivo in $x=\frac{8}{3}$, concludiamo che per $x=0$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}=-\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{-n}\log n}{n+\sqrt{n}}$$

Invece, per $x=\frac{8}{3}$ abbiamo che

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}=+\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+2^{-n}\log n}{n+\sqrt{n}}$$

Nel caso $x = 0$ la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \to 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso $x = \frac{8}{3}$ la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione a_n è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum (-1)^n \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché $\frac{\log n}{n + \sqrt{n}} \to 0$, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per $x = \frac{8}{3}$.

Teorema Teorema di Dirichlet

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

be a series where:

1. $a_n \geq 0$;
2. $a_n \to 0$;
3. $a_n \geq a_{n+1}$;
4. Let

$$\sum_{k=1}^{n} b_k$$

there exist M such that $\forall n, |B_n| \leq M$

Then, the series converges.

Dimostrazione per lode.

Il teorema di Leibniz è quindi un corollario di questo teorema.

Proposition Prodotto di serie secondo Cauchy

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con rispettiva somme parziali A_N e B_N, vogliamo definire una serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ con somme parziali C_N in modo che se $A_N \to A$ e $B_N \to N$, allora $C_N \to AB$. Per trovare la forma di questa serie consideriamo

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = a_0 b_0 + x(a_0 b_1 + a_1 b_0) + x^2 (a_0 b_2 + a_1 b_1 a_2 b_0) + \cdots$$

Definiamo quindi il prodotto di serie secondo Cauchy con

$$c_n = \sum_{k=0}^{N} a_k b_{n-k}$$

Teorema Teorema di Mertens

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti rispettivamente con somma A e B e supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente. Allora, la serie prodotto converge a AB.

Dimostrazione per lode. È importante che almeno una delle deu deve convergere assolutamente.

Mostriamo che $e^x e^y = e^{x+y}$ usando il prodotto secondo Cauchy delle espansioni di Taylor.

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e^{x+y}
\end{aligned}
$$

L'espansione di Taylor ci permette di estendere la funzione esponenziale ai valori complessi.

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann

TODO: esempi

Definizione Convergenza incondizionale

Una serie è incondizionatamente convergente se ogni serie permutata ha la stessa somma.

Teorema

Sia considerì la serie $\sum a_n$:

1. Se $a_n \geq 0$ allora ogni permutazione $\sum a_{\sigma(n)}$ ha lo stesso carattere e la stessa somma;
2. Se $\sum |a_n| < +\infty$ allora $\sum |a_{\sigma(n)}| < +\infty$ e ha la stessa somma.
3. Teorema di Riemann: se $\sum a_n$ converge solo semplicemente, allora:
   (a) $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, esiste una serie permutata con valore λ;
   (b) esiste una permutazione σ tale che $\sum a_{\sigma(n)}$ oscilla.

Corollario

Una serie numerica è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente.

Proof Punto I

Sia $a_n \geq 0$ e sia σ una permutazione di $\mathbb{N}$ arbitraria e consideriamo la serie permutata $\sum a_{\sigma(n)}$ e sia

$$
A_N = \sum_{k=1}^{N} a_n \qquad B_N = \sum_{k=1}^{N} b_n
$$

Notiamo che per ogni n esiste N tale che

$$
\{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(N)\} \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}
$$

Cosicché

$$B_N = \sum_{k=1}^{N} a_{\sigma(n)} \le \sum_{k=1}^{N} a_k = A_N \le A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Passando limite otteniamo

$$\lim B_N = B = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(n)} \le A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Notando che, se σ^{-1} è la permutazione inversa, per ogni n

$$a_n = a_{\sigma^{-1}(n)}$$

lo stesso ragionamento mostra che

$$A = \sum a_n \le B = \sum a_{\sigma(n)}$$

e quindi vale $A = B$.

Punto II lode.

Proof Teorema di Riemann (dimostrazione concettuale)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie convergente solamente semplicemente e poniamo

$$\forall n, p_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n \le 0 \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \ge 0 \end{cases}$$

Cosicché $\forall n, a_n = p_q - q_n$ e $|a_n| = p_n + q_n$. Poiché $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty$ mentre $\sum a_n = \sum (p_n - q_n)$ converge, deve essere che sia $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ (devono divergere entrambe). Se solo una divergesse, spezzandola la serie avrebbe una parte che converge e una che diverge, quindi la differenza divergerebe, ma la differenza deve convergere. Siccome $a_n \to 0$ allora $p_n \to 0$ e $q_n \to 0$. Siccome entrambe le serie divergono, io posso creare una permutazione per giungere a qualsiasi cosa. Supponiamo che il primo termine sia 0. Possiamo definire p_n e q_n tale che la somma sale sopra uno e scende sotto meno uno, all'inifnito e oscillando. Oppure, posso farla oscillare ma avvicinandosi sempre di più a 0, e quindi il valore sarebbe zero.

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

che converge assolutamente per $p > 1$. Vogliamo studiare la convergenza semplice per $0 < p \le 1$. Notiamo che se $p \le 0$, allora il termine non tende a zero e la serie non converge. Applochiamo il teorema di Dirichlet con $b_n = \sin n$ e $a_n = \frac{1}{n^p}$. Per applicare il teorema bisogna verificare che la successione $\{b_n\}$ ha somme parziali limitate. Allora,

$$B_N = \sum_{k=1}^{n} \sin k$$

che è limitato se la consideriamo come serie geometrica con l'identità di Eulero.

13 Successioni, sottosuccessioni e topologia

Definizione Sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$. La successione $\{x_{n_k}\}$ viene detta *sottosuccessione* di $\{x_n\}$.

Teorema Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$. Sono equivalenti

1. $\{x_n\} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$;
2. per ogni successione $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\} \to \lambda$;
3. da ogni sotto successione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ si può generare una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\} \to \lambda$.

Notiamo che in generale se esiste una successione $\{x_{n_k}\}$ che tende a λ, niente si può dire di $\{x_n\}$. Per esempio $x_{2k} = (-1)^{2k} \to 1$ ma la successione non ammette limite.

Proof Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

1. $(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$: dimostriamo che il primo punto implica il secondo. Supponiamo che $x_n \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Per definizione di limite per ogni intorno I di λ di raggio $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$. Sia ora $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione. Poiché n_k è strettamente crescente $\forall k, n_k \geq k$. Quindi se $k \geq N$, $n_k \geq N$ da cui $x_{n_k} \in I$ e per definizione $\{x_{n_k}\} \to \lambda$ con $k \to \infty$.
2. $(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{3})$: il secondo punto implica il terzo: se $x_{h_k} \to \lambda$ per quanto appena visto ogni sua sottosuccessione tende a λ e quindi il punto vale.
3. $(\mathbf{3}) \implies (\mathbf{1})$: dimostriamo ora che il terzo punto implica il primo. Se per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ tale che $\{x_{n_{k_j}}\} \to \lambda$ abbiamo $\{x_n\} \to \lambda$. Dimostriamo la contronominale. Dimostriamo quindi che se $\{x_n\}$ non tende a λ, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che nessuna sua sottosuccessione tende a λ. Il fatto che $\{x_n\}$ non tenda a λ, per negazione della definizione è $\exists I_0(\lambda)$, $\forall N \exists n \geq N$ tale che $x_n \notin I_0$. Costruiamo tale sottosuccessione. Scegliamo $N = 1$. Per il primo punto, $\exists n_1 \geq 1 \,|\, x_{n_1} \notin I_0$. Sia poi $N = n_1 + 1$. Per il primo punto, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 \,|\, x_{n_2} \notin I_0$. Iterando il procedimento si ottiene una successione n_k tale che $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ e $x_{n_k} \notin I_0$ per tutte le k. Poiché $\{x_{n_k}\} \notin I_0$, nessuna sua sottosuccessione può tendere a I_0.

Corollario

Sia $\{x_n\}$ una successione. Allora:

1. se $\exists \{x_{n_k}\} \,|\, x_{n_k}$ non ha limite, allora $\{x_n\}$ non ha limite;
2. se $\exists \{x_{n_k}\}$ e $\{x_{n_j}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to \lambda$ e $\{x_{n_j}\} \to \mu$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\{x_n\}$ non ha limite;
3. se $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ tendono allo stesso limite λ, allora $\{x_n\} \to \lambda$ (o suddividendo in qualsiasi altra partizione disgiunta).

Teorema Punti di chiusura e successioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Sono equivalenti:
   (a) x_0 è punto di accumulazione per E;
   (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$;
2. Sono equivalenti:
   (a) $x_0 \in \overline{E}$;
   (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \to x_0$.

Proof

1. $(\mathbf{1.a}) \implies (\mathbf{1.b})$: supponiamo che x_0 sia di accumulazione. Per definizione $\forall I$ intorno di x_0, esiste $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$. In particulare,

$$\forall I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right), \exists x_n \neq x_0 \,|\, x_n \in E \cap I_n$$

cioè $x_n \in E$ e $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ che per il teorema dei carabinieri converge a x_0.
2. $(\mathbf{1.b}) \implies (\mathbf{1.a})$: supponiamo che

$$\exists \{x_n\} \subseteq E \,|\, \forall n, x_n \neq x_0 \wedge x_n \to x_0$$

Allora per ogni intorno I di x_0, esiste N tale che $\forall n \geq N$, $x_n \in (I \cap E) \setminus \{x_0\}$ e per definizione x_0 è di accumulazione.
3. $(\mathbf{2.a}) \implies (\mathbf{2.b})$: Siccome $x_0 \in \overline{E}$ si presentano due casi:
   (a) $x_0 \in E$: basta porre $\forall n, x_n = x_0$ e $\{x_n\} \subseteq E$ quindi $x_0 \to x_0$;
   (b) $x_0 \notin E$: ciò implica che $x_0 \in E'$ e per il primo punto $\exists \{x_0\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$.
4. $(\mathbf{2.b}) \implies (\mathbf{2.a})$: esercizio.

Teorema Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $\lambda = \inf E$ e $\mu = \sup E$. Allora, esistono successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$ tale che $\{x_n\} \to \lambda^+$ e $\{y_n\} \to \mu^-$.

Proof Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso dell'inf. Dobbiamo considerare due casi distinti:

1. $\lambda > -\infty$: per definizione di $\lambda = \inf E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \,|\, \lambda \leq x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ si trovs quindi $x_n \in E$ tale che $\lambda \leq x_n < \lambda + \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, $x_n \to \lambda^+$.
2. $\lambda = -\infty$: per definizione E non è limitato inferiormente. Quindi, $\forall n, -n$ non è minorante e per tanto $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n < -n$. Allora, chiaramente $x_n \to -\infty$ per confronto.

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato sup (e inferiormente). Allora:

1. $\sup E = \mu \in \overline{E}$ e $\inf E = \lambda \in \overline{E}$;
2. se E è limitato superiormente (o inferiormente), allora E ammette massimo (o minimo).

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{x_n\}$ una successione limitata in $\mathbb{R}$. Allora, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proof Dimostrazione 1

Si danno due casi:

1. $\{x_n\}$ assume infinite volte lo stesso valore x_0. Allora $\{n_k\}$ è la successione tale che $x_{n_k} = x_0$ banalmente $\{x_{n_k}\} \to x_0$.
2. $\{x_n\}$ non assume infinite volte lo stesso valore, quindi assume infiniti valori distinti. Poiché $\{x_n\}$ è limitata esiste un intervallo $I_0 = [a; b]$ tale che $x_n \in I_0$. Consideriamo il punto

medio $m_0 = \frac{a+b}{2}$ e i due sottointervalli $[a;m_0]$ e $[m_0;b]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori. Scegliamo allora quest'ultimo come $I_1 = [a_0, b_0]$ e iteriamo. Consideriamo quindi gli intervalli I_n dove chiaramente

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ and } l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n) = \frac{1}{2^n}l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

e costruiamo la sottosuccessione nella seguente maniera: sia n_1 il primo n tale che $x_n \in T_1$. Consideriamo I_2 che contiene infiniti valori della successione. Allora n_2 è il primo $n > n_1$ tale che $x_{n_2} \in I_2$, e così via. Allora la sottosuccessione converge per l'assioma di continuità. Dato $\varepsilon > 0$ si scelga j tale che $\frac{b-a}{j} \leq \varepsilon$ e si conclude che $\forall k \geq j$, $|x_0 x_{n_k}| \leq \frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e per definizione $x_{n_k} \to x_0$.

Lemma Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Allora da tale successione si può estrarre una sottosuccessione monotona.

Proof Dimostrazione 2

Per il lemma di Polya, da $\{x_n\}$ estraggo una sottosuccesione monotona $\{x_{n_k}\}$ che quindi ha limite λ. Poiché $\{x_{n_k}\}$ è limitata, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una qualunque successione reale e sia $S = \{n \,|\, \forall m \geq n, x_m \geq x_n\}$ un insieme di indici. Si presentano due casi mutualmente esclusivi

1. S è infinito. Allora S ha forma $\{n_1, n_2, \cdots\}$. Per definizione di S, per ogni k abbiamo $\forall m \geq n, x_{n_k} \leq x_m$. In particolare $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ e $\{x_{n_k}\}$ è monotona crescente.
2. S è finito (eventualmente vuoto) esiste una N tale che $\forall n \geq N$, $n \notin S$. Sia $n_1 = N \notin S$ per definizione di S esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} < x_{n_1}$ con $n_2 \notin S$ perdefinizione $\exists n_3 < n_2$ tale che $x_{n_3} < x_{n_2}$. Iterando troviamo una sottosuccessione x_{n_k} strettamente decrescente.

Teorema Equivalenza convergenza e Cauchy

Una successione $\{x_n\}$ reale converge se e esolo se è di Cauchy.

Lemma

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Allora:

1. la successione è limitata;
2. se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to L$, allora $\{x_n\} \to L$.

Proof Dimostrazione del lemma

1. Per definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$, esiste N tale che $\forall n, m \geq N$, si ha $|x_n - x_m| < \varepsilon$. In particolare, $\forall n \neq N$ (con $m = N$), si ha che

$$|x_n - x_N| < 1$$

da cui

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1, \quad \forall n \neq N$$

e quindi posto $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N|+1\}$ risulta quindi $\forall n, |x_n| \leq M$ e quindi $\{x_n\}$ è limitata.

2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e supponiamo che esista $\{x_{n_k}\}$ sottosuccessione di $\{x_n\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \to L$. La tesi è che $x_n \to L$. Per ipotesi, fissati $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \mid \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

($\{x_n\}$) è di Cauchy

$$\exists K \mid \forall k \geq K, |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

($\{x_{n_k}\} \to L$). Sia quindi $n \geq N$ e fissiamo $k \geq \max\{K, N\}$ cosicché $k \geq N \implies n_k \geq k \geq N$. Pertanto, vale $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$. Quindi

$$\forall n \geq N, |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_l} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon$$

e quindi per definizione $x_n \to L$.

Proof Equivalenza convergenza e Cauchy

La successione $\{x_n\}$ è limitata per il lemma. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a $L \in \mathbb{R}$. Per il secondo punto del lemma, $x_n \to L$ e quindi converge.

La definizione di una successione di Cauchy è la stessa nei complessi e anche quella di convergenza. Vale sempre il medesimo teorema.

In particolare, mostriamo che se è di Cauchy, allora converge. Notiamo che, dato un numero complesso w banalmente

$$\begin{cases} |\Re w| \\ |\Im w| \end{cases} \leq |w| \leq |\Re w| + |\Im w|$$

Mostrimao che $z_n \to \alpha$ se e solo se $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$. Infatti,

$$\begin{cases} |\Re z_n - \Re\alpha| \\ |\Im z_n - \Im\alpha| \end{cases} \leq |z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re\alpha| + |\Im z_1 - \Im\alpha|$$

poiché $z_n \to \alpha$ se e solo se $|z_n - \alpha| \to 0$, le dis di sind ice che se $z_n \to \alpha$ allora $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$. Viceversa se $\Re z_n \to \Re\alpha$ e $\Im z_n \to \Im\alpha$ allora

$$|z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re\alpha| + |\Im z_n - \Im\alpha| \to 0$$

cosicché $|z_n - \alpha| \to 0$ e $z_n \to \infty$. Analogamente, $\{z_n\}$ è di Cauchy se e solo se $\{\Re z_n\}$ e $\{\Im z_n\}$ sono di Cauchy. Siccome entrambe queste successioni sono di Cauchy nei reali, allora convergono. Quindi

$$\Re z_n \to \alpha \in \mathbb{R} \wedge \Im z_n \to \beta \in \mathbb{R} \implies z_n = \Re z_n + i\Im z_n \to \alpha + i\beta$$

Anche nei complessi le serie sono analoghe. Una serie converge se se la successione delle sue somme parziali converge. La serie diverge se il suo modulo tende a infinito. Se il limite delle somme parziali non esiste, la serie è oscillante.

La medesima convergenza e successione di Cauchy si estende a tutti gli spazi metrici.
Importante: in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma non necessariamente il contrario.

Per esempio, in $(\mathbb{Q}, |r - s|)$ la successione $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $r_n \to \sqrt{2}$. Allora, questa successione è di Cauchy nei reali e anche nei razionali, in quanto la metrica è la stessa. Tuttavia, la successione non converge nello spazio metrico dato.

Definizione Spazio metrico completo

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy convergono.

14 Limiti

Definizione

Sia E un insieme diciamo che $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione esteso di E se o $\xi \in \mathbb{R}$ e ξ è un punto di accumulazione di E o $\xi = \pm\infty$ e E è limitata superiormente/inferiormente.

Quindi ξ è un punto di accumulazione esteso di E se $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \to \xi$ con $\forall n, x_n \neq \xi$.

Definizione Intorno puntato

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia I un intorno di x_0. L'insieme $I \backslash \{x_0\}$ viene detto *intorno puntato* di x_0.

Definizione Limite

Sia $f \colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso per E. Diciamo che

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

e per ogni intorno I di μ esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in (J \backslash \{\xi\}) \cap E, f(x) \in I$.
Sintassi: scriviamo anche $f(x) \to \mu$ per $x \to \xi$.

Richiediamo che il punto sia di accumulazione esteso per esterre la definizione di limiti ai punti infiniti (stando nel dominio).

La definizione di limite non coinvolge il valore di f in ξ. In tal punto, la funzione non deve essere necessaria definitiva.

Se $\mu, \xi \in \mathbb{R}$, la definizione si speicfica in:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E \cap [(\xi - \delta, \xi + \delta) \backslash \{\xi\}]\,, f(x) \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$$

In questo caso $I = (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ e $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Equivalentemente, possiamo scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \,|\, \forall x \in E, x \neq \xi, |x - \xi| < \delta \implies |f(x) - \mu| < \varepsilon$$

Modifiando tale espressione esplicitando le condizioni del valore assoluto, è possibile introdurre la definizione di limite da destra/sinistra da sotto (per difetto) e da sopra (per eccesso).

Definizione Limite da sinistra

Si dice che

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = \mu^+$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E, \xi - \delta < x < \xi \implies \mu \leq f(x) < \mu + \varepsilon$$

Dalla definizione di limite, il limite esiste se e solo se il limite destro e quello sinistro esistono e coincidono.

Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, gli intorno di ξ sono delle forma $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ e gli intorni di $\pm\infty$ sono $(+M, +\infty)$ e $(-\infty, -M)$ con $M > 0$.

La definizione di $\lim_{x \to \xi} f(x) = \pm\infty$ diventa

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E \begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), x \neq \xi \\ \xi - \delta < x < \xi + \delta, x \neq \xi \\ 0 < |x - \xi| < \delta \end{cases}$$

si ha
$$\begin{cases} f(x) \in (M, +\infty) \\ f(x) > M \end{cases}$$

Come nel caso precedente si possono definire $\lim_{x \to \xi^+} = \pm\infty$ e $\lim_{x \to \xi^-} = \pm\infty$.

Se $\xi = +\infty$ la definizione è uguale al limite delle successioni. Per $\xi = -\infty$ è leggermente diversa.

Esempio Limite

Dimostrare
$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2 + 3} = 2$$

Dobbiamo verificare che $\forall > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ abbiamo che $0 < |x - 1| < \delta$ implica $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Prendiamo quindii $\varepsilon > 0$. Studiamo la disequazione

$$|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$$

e determiniamo un $\delta > 0$ per cui la disequazione vale per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ e eventualmente $x \neq 1$. Vogliamo quindi
$$2 - \varepsilon < \sqrt{x^2 + 3} < 2 + \varepsilon$$

Supponiamo $\varepsilon < 1$ e quindi $2 - \varepsilon > 0$. Siccome tutto è positivo, quadriamo e otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 + 3) < (2 + \varepsilon)^2 \\ x^2 + 3 > (2 - \varepsilon)^2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 < 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x^2 > 1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 \end{cases}$$

Quindi, la prima diventa $|x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$, mentre la seconda è sempre vera se $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < 0$, e nel caso in cui sia maggiore o uguale a zero, allora $|x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}$. Scegliamo $\varepsilon < \frac{1}{4}$ e allora $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$ e la disuguaglianza $|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$ è equivalente a

$$\begin{cases} |x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2} \\ |x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} \end{cases}$$

Supponiamo ora che $x > 0$, data la natura del limite, quindi

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} < x < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$$

Scegliamo allora
$$\delta = \min\{\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}, \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}\}$$

Il seguente teorema fa da ponte per permetterci di usare le proposizioni circi i limiti di successioni come limiti di funzioni.

Teorema

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso per E. Sono equivalenti:

1. $$\lim_{x\to\xi} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$
2. $$\forall \{x_n\} \subseteq E, \forall n, x_n \neq \xi \,|\, x_n \to \xi \implies f(x_n) \to \mu$$

Proof

($\Longrightarrow$) Per ipotesi $f(x) \to \mu$ per $x \to \xi$. Sia $\{x_n\} \subseteq E$ con $x_n \neq \xi$ per tutte le n e $x_n \to \xi$. Applichiamo la definizione di limite per dimostrare $f(x) \to \mu$. Sia I un inorno di μ, la tesi è che $\exists N$ tale che $\forall n \geq N, f(x_n) \in I$. Poiché $f(x) \to \mu$ per $x \to \xi$ per definizione $\exists J$ intorno di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$ si ha $f(x) \in I$. Ma per ipotesi $x_n \to \xi$ e $\forall n, x_n \neq \xi$, quindi $\exists N$ tale che $x_n \in I \cap J$ e $x_n \in \xi$ quindi $f(x_n) \in I$ come richiesto.

($\Longleftarrow$) Dimostriamo la contronominale. Supponiamo quindi che $f(x)$ non tenda a μ cioè esiste un intorno I_0 di μ tale che per ogni intorno J di ξ, esiste un punto $x \neq \xi$ con $x \in E \cap J$ tale che $f(x) \notin I$. Consideriamo $\xi \in \mathbb{R}$ cosicché gli intorni di ξ abbiamo forma $J = (\xi - \delta; \xi + \delta)$ e $\exists$ intorno I_0 di μ tale che $\forall \delta > 0$, esiste $x_\delta \in E \cap (\xi - \delta; \xi + \delta)$ e $x_\delta \neq \xi$ tle che $f(x_\delta) \notin I_0$. Scegliamo ora $\delta = \frac{1}{n}$ si ottiene quindi che $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n \neq \xi$ con

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n}$$

tale che $f(x_n) \notin I_0$. Per il teorema dei due carabinieri $x_n \to \xi$ con $x_n \neq \xi$ e $x_n \in E$ ma $\forall n, f(x_n) \notin I_0$ cosicché $f(x_n)$ non tenda a mu. I casi $\xi = \pm\infty$ è analogo e lasciato per esercizio.

14.1 Proprietà dei limiti

Proposition Il limite, se esiste, è unico

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso di E. Il liimte se esiste è unico.

$$\exists \lim_{x\to\xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x\to\xi} f(x) = \mu \implies \lambda = \mu$$

Proof Il limite, se esiste, è unico

Poiché $f(x) \to \lambda$, $\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi$, abbiamo che $x_n \to \xi$. Allora $f(x_n) \to \lambda$ e $f(x_n) \to \mu$ ma il limite di successioni è unico, quindi $\lambda = \mu$.

Proposition Permanenza del segno e monotonia del limite

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso di E, e supponiamo

$$\exists \lim_{x\to\xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x\to\xi} g(x) = \mu$$

1. Se $\lambda \neq \mu$, allora $\forall c$ tale che $\lambda < c < \mu$ esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x in E \cap J, x \neq \xi$, allora $f(x) < c$ e $g(x) > c$
2. se esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$, abbiamo

$$f(x) \leq g(x) \implies \lambda \leq \mu$$

Dal primo punto segue in particolare che $f(x) < g(x)$ in $J \cap E \backslash \{\xi\}$, e se $f(x) \equiv 0$, $f(x) \to 0 = \lambda$ e concludiamo che se $g(x) \to \mu > 0$ per $x \to \xi$ esiste un intorno J di ξ tale che $g(x) > 0$ in $(J \cap E) \backslash \{\xi\}$ (permanenza del segno).

Proof Permanenza del segno e monotonia del limite

1. Per ipotesi $\lambda < c < \mu$ esistono due intorni I_λ di λ e I_μ di μ tale che I_λ è tutto a sinsitra di c e I_μ è tutto a destra di c. Per definizione di limite, esiste un intorno $J_1(\xi)$ di ξ tale che $\forall x \in E \cap J_1, x \neq \xi, f(x) \in I_\lambda$ e $\forall x \in E \cap J_2, x \neq \xi, g(x) \in I_\mu$ (ossia $f(x) \to \lambda$ e $g(x) \to \mu$). Quindi $\forall x \in E \cap [J_1 \cap J_2], x \neq \xi$ abbiamo $f(x) < c < g(x)$.
2. Esercizio: contronominale.

Proposition Limitatezza

Se $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ per $x \to \xi$ allora usnado la definizione di limite con $J = (L-1, L+1)$ si trova un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi, L-1 < f(x) < L+1$ e in particolare f è limitata nell'intorno puntato $J \backslash \{\xi\}$ di ξ.

Teorema Teorema dei carabinieri

Siano $f, g, h \colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ punto di accumulazione esteso di E. Se esiste un intorno J_0 di ξ tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

in $(E \cap J) \backslash \{\xi\}$ e

$$\exists \lim_{x \to \xi} f(x) = \mu = \lim_{x \to \xi} h(x)$$

allora

$$\exists \lim_{x \to \xi} g(x)$$

Proof Teorema dei carabinieri

Per il teorema che lega limiti di funzioni e limiti successionali, la tesi equivale a

$$\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi, g(x_n) \to \mu$$

Sia allora $\{x_n\}$ una tale successione. Poiché $f(x) \to \mu$, risulta $f(x_n) \to \mu$ e poiché $h(x) \to \mu$, risulta $h(x_n) \to \mu$ e poiché $\forall x \in J \cap E, x \neq \xi, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e siccome $x_n \to \xi, \forall x_n \neq \xi$ risulta che esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in J \cap E, x_n \neq \xi$ cosicché per tali n

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

e per il teorema dei carabinieri delle successioni vale la tesi.

14.2 Aritmetica dei limiti

Proposition Aritmetica dei limiti

Siano $f, g \colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso di E e supponiamo che $f(x) \to \lambda$, $g(x) \to \mu$ per $x \to \xi$. Allora:

1. $$\exists \lim_{x \to \xi} f(x) \pm g(x) = \lambda \pm \mu$$
   purché non si presenti forma $\infty - \infty$.
2. $$\exists \lim_{x \to \xi} f(x)g(x) = \lambda\mu$$

purché nons i presenti forma $0 \cdot \infty$.

3. se $\mu \neq 0$ cosicché $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di E (per la permanenza del segno) allora

$$\exists \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

purché non si presenti forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di ξ e $g(x) \to 0^{\pm}$, allora

$$\exists \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

(il segno è dato dalla regola dei segni) purché $\lambda \neq 0$.

Proof

Mostriamo che $f(x)g(x) \to \lambda\mu$ se non si presenta forma $0 \cdot \infty$. Sia infatti $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq \xi$ e $x_n \to \xi$, allora $f(x_n) \to \lambda$ e $f(x_n) \to \mu$ implica che $f(x_n)g(x_n) \to \lambda\mu$ purché non si presenti forma $0 \cdot \infty$.

In modo analogo si estendono tutte le formule di calcolo per i limiti viste per i limiti di successione. Per esempio,

$$f(x)^{g(x)} \to \lambda^{\mu}$$

purché non si presenti forma 1^{∞} e ∞^0. mel caso in cui $f(x) \to 0^+$ cosicché $f(x) > 0$ in un intorno puntato la forma indeterminata relativa è 0^0 $((0^+)^{\mu} = 0)$ trane per $\mu = 0$.

Teorema Cambiamento di variabile nei limiti

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E dove $f(x) \to \lambda$ per $x \to \xi$, $g(x)\colon F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e λ un punto di accumulazione esteso dove $g(y) \to \mu$ per $y \to \lambda$, e supponiamo infine che ξ sia di accumulazione esteso per

$$f^{-1}(F) = \text{C.E. di } g \circ g$$

e

$$\text{C.E. di } (g \circ f) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = f^{-1}(F)$$

Allora, $g(f(x)) \to \mu$ per $x \to \xi$ in $f^{-1}(F)$. Si può scrivere tale relazione come

$$\lim_{x \to \xi} g(f(x)) = \lim_{y \to \lambda} g(y)$$

pongo

$$y = f(x) \to \lambda$$

per $x \to \xi$.

le relazioni dilimiti pe rle successioni conducono alle corrispondenti di limite per le funzioni. Se $\forall \varepsilon_n \to 0, \varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, abbiamo le analoghe con x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \to 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\alpha} - 1}{x} \to \alpha$$

Definizione Condizione di Cauchy

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E. Diciamo che f soddisfa la condizione di Cauchy (C) per $x \to \xi$ se $\forall \varepsilon > 0$, esiste un intorno J di ξ tale che

$$\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}, \varepsilon > |f(x) - f(x')|$$

nei casi in cui $\xi \in \mathbb{R}$ la condizione si semplifica a

$$0 < |x - \xi| < \delta \wedge 0 < |x' - \xi| < \delta$$

e per $\xi = +\infty$

$$x, x' > M$$

per qualche M.

Teorema

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E. Sono equivalenti:

1. esiste ed è finito
$$\lim_{x\to\xi} f(x) = L$$
2. $f(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy per $x \to \xi$.

Proof

($\Longrightarrow$) Supponiamo che $f(x) \to L$ per $x \to \xi$. Per definizione $\forall \varepsilon > 0$, esiste un intorno J di L tale che
$$\forall x \in (E \cap J)\backslash\{\xi\}, |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$
Quidi $\forall x, x' \in (E \cap J)\backslash\{\xi\}$ abbiamo
$$|f(x) - f(x') = |f(x) - f(x') - L + L|| \leqslant |f(x) - L| + |L - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
e vale la condizione.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che f soddisfa la condizione di Cauchy. Abbiamo che
$$\forall \{x_n\} \subseteq E \,|\, \forall n, x_n \neq \xi \wedge x_n \to \xi, f(x_n) \to L$$
(usiamo la successione analoga). Mostriamo che:

1. esiste L tale che $f(x) \to L$. $\forall \{x_n\} \subseteq E \,|\, \forall n, x_n \to \xi \wedge x_n \neq \xi$, $f(x_n)$ è di Cauchy, e quindi
$$\exists \lim_n f(x_n) = L$$
Sia allora $\{x_n\} \subseteq E \,|\, \forall x_n \to \xi \wedge x_n \neq \xi$. Dimostriamo che dato $\varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n, m \geq N, |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, quindi $f(x_n)$ è di Cauchy. Poiché f soddisfa la condizione di Cauchy dato $\varepsilon > 0$ esiste J intrno di ξ tale che $\forall x, x' \in (E \cap J)\backslash\{\xi\}, |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Per ipotesi, $x_n \in E$ e $x_n \neq \xi$ per tutte le n e $x_n \to \xi$ quindi esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in (J \cap E)\backslash\{\xi\}$. Quindi $\forall n, m \geq N$, $x_n, x_m \in (J \cap E)\backslash\{\xi\}$ da cui $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ come si voleva;
2. il limite è lo stesso per tutte le successioni. Sia allora $\{x'_n\} \subseteq E$ un'altra successione tale che $x'_n \neq \xi$ per tutte le n e $x'_n \to \xi$. $\{f(x'_n)\}$ è di Cauchy e quindi esiste finito
$$\lim_n (x'_n) = L'$$
La tesi è quindi che $L = L'$ e per dimostrarlo costruiamo una sucessione che intercala le due
$$x''_n = \begin{cases} x_n & n \text{ pari} \\ x'_n & n \text{ dispari} \end{cases}$$
quindi $\forall n, x''_n \neq \xi$ e $x''_n \to \xi$. Abbimao che $\{f(x''_n)\}$ è di Cauchy quindi esiste finito
$$\lim_n (x''_n) = L''$$
Ma $f(x''_{2k} = f(x_{2k})) \to L$ perché è sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$. Tuttavia, questa tende anche a L'' perché è sottosuccessione di $\{f(x''_n)\}$. Abbiamo quindi che $L = L''$. Analogamente, con i dispari, mostriamo che $L' = L''$ e quindi $L = L'$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x\sin x}{x^3\cos(x) - (e^x - 1)^2} = 2$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 + x^3\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, $\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Inoltre, $x^3\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$, quindi a numeratore raggruppiamo $x^{7/2}$. Per il denominatore $1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}x^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}} \to 0\end{aligned}$$

Riscriviamo allo l'espressione come

$$\begin{aligned}&= \frac{x^{7/2}\left\{x^{-7/2}x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + x^{1/2}\sin(\frac{1}{x^{1/2}})\right\}}{x^2\left\{x^{-2}x^{1/2}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 + x\cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}} \\ &\sim 2x^{3/2} \to +\infty\end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è 1^∞. Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1)\log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare $\log(1 + f(x)) \sim f(x)$ con $f(x) \to 0$. Allora scriviamo

$$e^{(2x-1)\log\left(1 - \frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a -3. Allora il limite è pari a e^{-3}.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin^2(x)\log(1 + \tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{\left(e^{2\sin^4 x} - 1\right)\left(\sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1\right)}$$

Abbiamo:

1. $\sin(x^2) \sim x^2$
2. $\tan(1 + \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3. $e^{2\sin^4(x)} - 1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$

4. $\sqrt[6]{1+\frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}}-1\sim\frac{1}{6}x^2$

XXX

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log(1+2x)}{\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}$$

Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1. $\sin x = x(1+o(1))$
2. $\log(1+2x)=2x(1+o(1))$

Allora

$$\begin{aligned}\sin x-\log(1+2x) &= x+xo(1)-2x-2xo(1)\\ &= -x+xo(1)=-x(1+o(1))\end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo

$$(1+1x)^{1/6}-1=\frac{1}{6}x(1+o(1))$$

e allora

$$(1+1x)^{1/6}=1+\frac{1}{6}x(1+o(1))$$

Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo

$$\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}=\frac{1}{3}x(1+o(1))\sim\frac{1}{3}x$$

e quindi il limite fa -3.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{3}x}-\cos\sqrt{x}}{(\tan(2x))^{\alpha}}$$

Il primo termine è pari a $1+\frac{2}{3}x(1+o(1))$, il secondo $1-\frac{1}{2}x(1+o(1))$. Abbiamo allora

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{2}{3}x(1+o(1))-1+\frac{1}{2}x(1+o(1))}{(2x)^{\alpha}}\sim\frac{7}{3\cdot 2^{\alpha+1}x^{1-\alpha}}=\begin{cases}0^+ & \alpha<1\\ \frac{7}{12} & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Conviene razionalizzare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left[\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sin x\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]}=\frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Sostituiamo la variabile $y=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2\pi}\left[\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y^2\right]}{y}$$

Notiamo che $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(y) \sim -y$. Quindi,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y} = -\sqrt{2\pi}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{x-1} & x > 1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}x) & x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{x-1} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \left[1+\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left\{\frac{x+1}{x^3+\tan^2 x}\log\left(1+\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)\right)\right\}$$

Il primo termine è asintotico a $\frac{1}{x^2}$, mentre il logaritmo è asintotico a $\sin(\frac{x^\alpha}{x+1})$ che è asintotico a $\frac{x^\alpha}{x+1}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ e & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha < 2 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \left\{\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right)\right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+1+x^2)}}$$

14.3 Continuità

Definizione Continuità

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni intorno I di $f(x_0)$, esiste un intorno J di x_0 tale che $\forall x \in E \cap J, f(x) \in I$.

Nota che non si richiede che x_0 sia un punto di accumulazione come nel limite. Infatti, se $x_0 \in E$ è isolato in E, cioè $\exists J$ intorno di x_0 tale che $E \cap J = \{x_0\}$ la condizione di continuità è automaticamente soddisfatta. In altri termini ogni funzione è continua nei punti isolati del suo dominio.

Se invece $x_0 \in E$ è un punto di accumulazione, la definizione di continuità è equivalente a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione Continuità

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E, \delta > |x - x_0| \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le definizioni con ε e δ possiamo parlare di continuità da destra e sinistra.

Definizione Continuità da sinistra

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 da sinistra se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E, x_0 - \delta < x \leq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definizione Continuità da destra

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 da sinistra se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in E, x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Proposition

Una funzione è continua se e solo se è sia continua da destra che da sinistra.

Proposition

Se x_0 è un punto di accumulazione per E destro e sinistro, f è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Teorema Continuità e continuità per successione

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Sono equivalenti:

1. f è continua in x_0;
2. *continuità per successioni:* $\forall \{x_n\}E \,|\, x_n \to x_0, f(x_n) \to f(x_0)$.

Proof Continuità e continuità per successione

Esercizio. Se x_0 non è di accumulazione (è isolato), la successione deve essere definitivamente pari a x_0.
$(\Longrightarrow)$ TODO

($\Longleftarrow$) TODO

La continuità è equivalente alla continuità per successione in ogni spazio metrico.

Proposition Proprietà delle funzioni continue

Siano $f, g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0.

1. supponiamo che $f(x_0) < g(x_0)$, allora per tutte le c tali che $f(x_0) < c < g(x_0)$, esiste un intorno J di x_0 tale che
$$\forall x \in J \cap E, f(x) < c < g(x)$$
Se x_0 è isolato, la tesi è banale. Altrimenti, usiamo il teorema della permanenza del segno dei limiti. Troviamo quindi un intorno dove la condizione vale necessariamente ovunque tranne nel punto x_0, ma nel punto x_0 la tesi vale per ipotesi.
2. esistono M e J intorno di x_0 tale che
$$\forall x \in E \cap J, |f(x)| \leq M$$
Chiaramente se il limite è finito, allora esiste un intorno puntato dove la funzione è limitata. Siccome la tesi vale anche per il punto stesso, vale la tesi.

Proposition Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Siano $f, g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0.

1. $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0;
2. $f(x)g(x)$ è continua in x_0;
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continuità in x_0 per $g(x) \neq 0$.

Proof Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Se il punto non è di accumulazione tali proprietà sono banali. Altrimenti, seguono dalle proprietà dei limiti. Nel caso della divisione distinguiamo $g(x)$ positivo e negativo.

Tali proprietà sono analoghe per la continuità destra e sinistra.

Definizione Continuità intervallo

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in E se è continua in ogni punto di E.

Teorema Composizione delle funzioni continue

Siano $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$ e $g\colon F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0) \in F$. Then, the composite function
$$g \circ f\colon f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
is continuous x_0.

15 Limiti e discontinuità di funzioni monotone

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona crescente su I, e sia x_0 intorno a I. Allora esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x>x_0} f$$

In particolare, f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

e se f non è continua in x_0 allora x_0 è una discontinuità di salto.

Un analogo risultato vale per funzioni monotone decrescenti, e si può ricavare osservando che f è monotona decrescente se e solo se $-f$ è monotona crescente.

Proof

Dimostra che esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \le f(x_0)$$

Per monotonia, per ogni $x_1 < x < x_0$ abbiamo

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

da cui

$$\forall x_1 < x_0, f(x_1) \le \sup_{x<x_0} f(x) \le f(x_0)$$

Per definizione di supremum,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \,|\, f(x_\varepsilon) > \sup_{x<x_0} f(x) - \varepsilon$$

Per monotonia concludiamo che $\forall x_\varepsilon < x < x_0$ vale quindi

$$\sup_{x<x_0} f(x) - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le f(x) \le \sup_{x<x_0} f(x)$$

Quindi, posto $\delta = x_0 - x_\varepsilon$ vale che per tutte le x tali che $x_0 - \delta < x < x_0$ abbiamo

$$\sup_{x<x_0} f - \varepsilon < f(x) < \sup_{x<x_0} f(x)$$

e per definizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{x<x_0} f$$

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona. Allora, l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia monotona crescente e siano x_1 e x_2 due punti di discontinuità. Consideriamo x', x'' e x''' come punti negli intervalli definiti da x_1 e x_2. Dal teorema precedente

$$f(x') \leq \lim_{x \to x_1^-} \leq f(x_1) \leq \lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq f(x'') \leq \lim_{x \to x_2^-} \leq f(x_2) \leq \lim_{x \to x_2^+} f(x) \leq f(x''')$$

e poiché per ipotesi f è discontinua in x_1, x_2 almeno una delle disuguaglianza in rosso o in blu sono strette. Questo dice che gli intervalli di salto

$$\lim_{x \to x_1^-} f, \lim_{x \to x_1^+} f$$

e

$$\lim_{x \to x_2^-} f, \lim_{x \to x_2^+} f$$

sono disgiunti. Dissando un razionale in ciascuno degli intervalli di salto corrispondente ai punti di discontinuità in f si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra

$$D = \{x \in I \mid f \text{ è discontinua in } x\}$$

e un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Poichè $\mathbb{Q}$ è numerabile, D è al più numerabile.

15.1 Compattezza

Quindi i punti di massimo forte sono al più numerabile, mentre quelli deboli non sono necessariamente numerabile.

Definizione Compattezza di successioni nei reali

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che K è compatto per successioni se

$$\forall \{x_n\} \subseteq K$$

esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$, cioè da ogni successione di punti di K si può estrarre una sottosuccesione convergente a un punto di K.

Se K è finito allora è compatto per successioni (un insieme finito è chiuso in quanto non contiene punti di accumulazione).

Teorema Teorema di Heine Borel

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:
1. K è compatto per successioni
2. K è chiuso e limitato.

Proof Teorema di Heine Borel

- (2) $\implies$ (1). Consideriamo $\{x_n\} \subseteq K$. Siccome K è limitata, $\{x_n\}$ è limitata. Quindi, per Bolzano-Weierstrass esiste $\exists \{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to \overline{x}$. Poiché $\{x_{n_k}\} \subseteq K$ e $x_{n_k} \to \overline{x}$ per la caratterizzazione dei punti di chiusura $\overline{x} \in \overline{K} = K$ perché K è chiuso, quindi $x_{n_k} \to \overline{x} \in K$ e K è compatto.
- (1) $\implies$ (2).
  - K **è chiuso**: Sia $\overline{x} \in \overline{K}$. Per il teorema di caratterizzazione di $\overline{K}$, esiste $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \to \overline{x}$. Poiché K è compatto, esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Ma $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ e quindi $x_{n_k} \to \overline{x}$ e per uincitià del limite $\overline{x} = x_0 \in K$ e K è chiuso.
  - K **è limitato**: Mostriamo che $\mu = \sup K < +\infty$. Abbiamo dimostrato che $\exists \{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \to \mu$. Ma K è compatto cosicché esista $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Per unicità $= x_0 0 n K$ e quindi μ è finito.

Corollario Teorema di Wierstrass

Se K è compatto per successioni, allora esiste $\min\{K\}$ e $\max\{K\}$.

Siccome il supremum e l'infimum appartenogno a K (dalla dimostrazione).

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora, $f(K)$ è compatto.

Proof Teorema di Heine-Cantor

Data $\{y_n\} \subseteq f(K)$, dobbiamo dimostrare che esiste $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ tale che $y_{n_k} \to y \in f(K)$. Per definizione, $y_n \in f(K)$ quindi esiste $x_n \in K$ tale che $f(x_n) = y_n$. La successione $\{x_n\}$ è contenuta in K compatto. Esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Ma è continua su K e quindi in x_0. Quindi per il teorema su continuità e continuità per successione, abbiamo che

$$x_{n_k} \to x_0 \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x_0) = y_0 \in f(K)$$

e quindi $f(K)$ è compatto.

Corollario Teorema di Wierstrass

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è limitata ed assume massimo e minimo.

Teorema Teorema degli zeri

Sia $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora, esiste $c \in [a;b]$ tale che $f(c) = 0$.

Proof Teorema degli zeri

Senza perdita di generalità, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo l'insieme

$$E = \{x \mid \forall t \in [a,x], f(t) < 0\}$$

Notiamo che $a \in E \neq \emptyset$. Sia $c = \sup E$. La tesi è che $f(c) = 0$. Notiamo che $c > a$ in quanto $f(a) < 0$ e f continuano implicano, per il teorema di permamenza del segno, che $f(t) < 0$ in $[a; a+\delta)$ per qualche $\delta > 0$. Analogamente, $c < b$ siccome $f(b) > 0$ ed esiste δ_1 tale che $f(t) > 0$ in $(b-\delta; b)$ e quindi $c < b$. Mostriamo che $f(c) = 0$ facendo vedere che non può essere nè $f(c) < 0$ nè $f(c) > 0$. Infatti, se fosse $f(c) < 0$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) < 0$ per $t \in (c-\delta, c+\delta)$. D'altra parte, per definizione di $c = \sup\{x \mid f(t) < 0, t \in [0,x]\}$ esisterebbe $x_0 \in E$ tale che $c - \delta < x_0 < c$. Quindi si avrebbe $f(t) < 0$ in $[a, x_0]$ e in $(c-\delta; c+\delta)$. Quindi, $f(t) < 0$ in $[a; c+\delta]$ e c non è maggiorante di E $\lightning$. Se invece fosse $f(c) > 0$ per lo stesso motivo esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) > 0$ per $t \in (c-\delta; c+\delta)$ e quindi $\forall x_0 \in (c-\delta; c+\delta), f(x_0) > 0$ e quindi c non è più piccolo maggiorante di E $\lightning$.

Esempio

Dimostriamo che la funzione $f(x) = x - \cos x$ ha un (e un solo) zero in $(0; \frac{\pi}{2})$ e determinarlo con un errore minore di 10^{-2}. La funzione è continua nell'intervallo $[0; \frac{\pi}{]}2$ e $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$. Per cui, per il teorema degli zeri esiste uno zero c in tale intervallo. Lo zero è unico in quanto è strettamente crescente, per la derivata $f'(x) = 1 + \sin x$. Calcoliamo $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.078 > 0$. Quindi, $c \in (0; \frac{\pi}{4})$. Se si approssima c con il punto medio dell'intervallo, quindi $c = \frac{\pi}{8}$, l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{8}$. Consideriamo poi $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8} - \cos(\frac{\pi}{8}) = -0.53 < 0$. Quindi, c si trova in $(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$. Allora prendiamo la media $c = \frac{3\pi}{16}$, e l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{16}$. Iteriamo il processino fino a quando $E < 10^{-2}$.

Teorema Teorema dei valori intermedi di Darboux

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua su I. Vi sono due versioni:

1. Se $I = [a; b]$, allora f assume tutti i valori fra $f(a)$ e $f(b)$;
2. Se I è arbitrario, finito o infinito, aperto o chiuso o semiaperto, allora $\forall \xi$ con
$$\inf_I f < l < \sup_I f$$
esiste $c \in I$ tale che $f(c) = \xi$.

Proof Teorema dei valori intermedi di Darboux

1. Se $a = b$ il teorema è banale. Senza perdita di generalità, supponiamo ora che $f(a) < f(b)$, e sia $f(a) < l < f(b)$. Consideriamo la funzione ausiliaria $g\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - l$. Notiamo che g è continua in $[a; b]$, $g(a) = f(a) - l < 0$ e $g(b) = f(b) - l > 0$ quindi per il teorema degli zeri, $\exists\, c \in [a, b] \mid g(c) = f(c) - l = 0$. Quindi, $f(c) = l$.
2. Sia $\inf_I f < l < \sup_I f$. Per definizione di infimum, esiste $a \in I$ tale che
$$\inf_I f < f(a) < l$$
e, analogamente, esiste $b \in I$ tale che
$$l < f(b) < \sup_I f$$
Se $a < b$, applicando il punto primo all'intervallo $[a; b]$, si deduce che esiste $c \in (a; b) \subseteq I$ tale che $f(c) = l$. Se, invece, $a > b$ si considera l'intervallo $[b; a]$ e si conclude in maniera analoga.

Corollario

Se f è continua su I intervallo, allora $f(I)$ è un intervallo.

Combinando il teorema di Weierstrass con il teorema dei valori intermedi, otteniamo che se f è continua in $[a; b]$, allora $f([a; b]) = [m; M]$ con $m = \min_I f$ e $M = \max_I f$.

I teoremi degli zeri e dei valori intermedi, valgono per funzioni continue su intervalli.

Variazione del teorema di Weierstrass quando non valgono tutte le premesse:
Sia $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ o $x \to +\infty$. Allora f è limitata inferiormente e ammtte min assolito.

Per dimostrarlo sia $x_0 \in (0, +\infty)$ e sia $M = f(x_0) + 1$. Per definizione di limite esistono $d < x_0$ e $R > x_0$ tale che $\forall x \in (0; \delta) \cup (R, +\infty), f(x) > M$. f è continua su $[\delta; R]$ chiuso e limitato. Quind è limitata inferiormente su $[\delta, R]$ e assume minimo assoluto $m = f(x_1)$ con $x_1 \in [\delta, R]$ cioè $f(x) \geq m = f(x_1)$ per tutte le $x \in [\delta, R]$. In particolare, $m = f(x_1) \leq f(x_0) < M$. Se $x \in [\delta, R], f(x) \geq f(x_1) = m$. Se $x \in (0, \delta) \cup (R, +\infty)$, $f(x) > M > m = f(x_1)$. Quindi, $m = f(x_1)$ è il min assoluto di f in $(0, +\infty)$.

15.2 Continuità uniforme

Definizione Continuità uniforme

Una funzione f si dice *uniformemente continua* in E se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $\forall x_0 \in E$ e $\forall x \in E$, per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Quindi il valore δ è indipendente dal punto.

Lemma

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f non è uniformemente continua in E se esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_0\}, \{x'_n\}$ tale che $|x_n - x'_n| \to 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon}$.

Proof

Abbiamo che f non è uniformemente continua se $\exists \overline{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ esistono $x_\delta e x'_\delta \in E$ con $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n}$ si ottengono successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in E tale che $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \to 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon}$.

La funzione $\sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0, +\infty]$.

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f\colon K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è uniformemente continua su K. In particolare, $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continua, è uniformemente continua.

Proof

Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Per il lemma, esistono $\overline{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in K tale che $|x_n - x'_n| \to 0$ e $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \overline{\varepsilon} > 0$. Siccome K è compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Poiché $x'_{n_k} = x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k}) \to x_0$ e poiché f è continua in x_0, per l'equivalenza fra continuità e continuità per successioni, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$. Quindi, $\overline{\varepsilon} \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \to 0$, ma dovrebbe essere sempre maggiore o uguale a $\overline{\varepsilon}$ ↯.

Definizione Funzione Lipschiziana

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice *Lipschiziana* se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

Se $L = 1$ si dice espansiva. Se $L < 1$ si dice contrazione.

Definizione Funzione Hölderiana

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice *Hölderiana* di esponente $\alpha \in (0, 1]$ se esiste $M > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha$$

Proposition

Tutte le funzioni α-Hölderiane, sono uniformemente continue.

Proof

Consideriamo $f\colon I \to \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha, \qquad M > 0$$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ se $M|x - x'|^\alpha$ con $M > 0$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$ se $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ purché $M|x - x'|^\alpha < \varepsilon$, cioè

$$|x - x'| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/d} = d$$

Proposition Proprietà di funzioni uniformemente continue

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ uniformemente continue. Allora

1. $f+g$ è uniformemente continue. Per dimostrarlo basta considerare $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$;
2. se f e g sono anche entrambe limitate su I, allora fg è uniformemente continua;
3. se $\frac{1}{f}$ è definitiva è uniformemente continua.
4. se $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continue, allora $\forall E_1 \subseteq E$, f è uniformemente continua su E_1.

Teorema

Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è continua su I e uniformemente continua in $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, allora è uniformemente continua su tutto I.

Proof

Dato $\varepsilon > 0$ bisogna trovare δ tale che $\forall x_1, x_2 \in I$ se $|x_2 - x_1| < \delta$ allora vale $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Poiché f è uniformemente continua su $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, esistono $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I \cap (-\infty, c)$ con $|x_2 - x_1| < \delta$ si ha $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ e analogamente δ_2. Poiché f è continua in c, $\exists \delta_3$ tale che $\forall x \in I$ con $|x - c| < \delta_3$, abbiamo $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi se $x_1 < c < x_2$ e $|x_2 - x_1| < \delta$, allora la distanza $|c - x_1| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$ e $|x_2 - c| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$. E quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x)| + f(c) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Allora posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ si ha la tesi.

Proposition

Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dove f è continua nel dominio e g è uniformemente continua nel dominio e $f \sim g$ per $x \to \infty$. Allora, f è uniformemente continua nel dominio. In particolare, se f è continua su $[A, +\infty)$ e

$$\exists \lim_{x \to \infty} f(x)$$

allora f è uniformemente continua.

Per dimostrarlo, stimiamo la differenza fra $|f(x_1) - f(x_2)|$ per x molto grande intercalando la funzione g. Troviamo quindi che il δ che va bene per g va bene anche per f.

Proposition

Se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua nel dominio, allora esistono finiti

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Per dimostriamo mostriamo che $f(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy per x che tende ad a^+ o b^- (cosa che deriva naturalmente dalla definizione di continuità uniforme).

Se una funzione è continua e invertibile, ciò non implica necessariamente che l'inversa sia continua.

Lemma Lemma 1

Sia $f\colon I\mathbb{R}$ continua e invertibile su I intervallo. Allora, f è strettamente monotona.

Proof Lemma 1

Supponiamo per assurdo che non sia strettamente monotona. Esistono quindi $x_1 < x_2 < x_3$ in

I. Quindi (uguaglianze non strette), o $f(x_1) = f(x_2)$ oppure $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) \geq f(x_3)$ o viceversa (o prima cresce e poi decresce o viceversa o rimane uguale). Chiaramente, se vale una di questi casi (tutti i casi), f non è iniettiva e quindi non invertibile. Se invece valgono le disuguaglianza stretta, allora per il teorema dei valori intermedi, applicato agli intervalli $[x_1; x_2]$ e $[x_2; x_3]$ si trova che

$$\forall \max\{f(x_1), f(x_3)\} \leq \xi < f(x_2)$$

esistono almeno 2 valori di x tali che $f(x) = \xi$. Quindi, la funzione non è iniettiva.

Lemma Lemma 2

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona su I intervallo. Se $f(I)$ è un intervallo, allora f è continua.

Proof Lemma 2

Assumiamo che $x_0 \in I$ sia un punto di discontinuità di f. Allora, sarebbe una discontinuità di salto, e $f(I)$ non sarebbe un intervallo.

Teorema Continuità dell'inversa

Sia $f\colon I\mathbb{R}$ continua e invertibile su I che è un intervallo. Allora, f^{-1} è continua.

Proof Continuità dell'inversa

Per il Lemma 1 f è strettamente monontona. Quindi, $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è strettamente monotona. Per il teorema dei valori intermedi $f(I)$ è un intervallo e $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è monotona definita su un intervallo e la sua immagine è l'intervallo I. Per il Lemma 2, f^{-1} è continua.

16 Derivate

Definizione Derivabilità

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esistono finito il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Definizione Retta tangente

La retta tangente è definita come

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Nel caso esistano i limiti finiti da destra o sinistra si dirà che la funzione è derivabile da destra o sinistra nel punto.

Proposition

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I. Se f è derivabile rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0, allora f è continua rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0.

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo per esempio che che f sia derivabile da destra in x_0 cioè esiste finito

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = D_+f(x_0)$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} [f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = D_+f(x_0)\cdot 0 = 0$$

cioè

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

e f è continua da destra in x_0.

Proposition Proprietà aritmetiche della derivabilità

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile (rispettivamente da sinistra o destra) in x_0 interno ad I. Allora:

1. $f \pm g$ è derivabile in x_0 e vale che

$$D(f\pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$$

2. $\forall c \in \mathbb{R}$, cf è derivabile in x_0 e vale

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ è derivabile in x_0 e vale

$$D(af+gb)(x_0) = aDf(x_0) + bDg(x_0)$$

4. fg è derivabile in x_0 e vale

$$(fg)'(x_0) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

   che si chiama Formula di Leibniz

5. $g(x_0) \neq 0$ allora $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 cosicché $\frac{f}{g}$ sia derivabile in un intorno di x_0 è derivabile in x_0 e vale
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proof Proprietà aritmetiche della derivabilità

1. esercizio;
2. segue dal 3;
3. calcoliamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$
Per ipotesi, il primo termine tende a $f'(x_0)$ mentre l'ultimo $g'(x_0)$. L'altro termine $g(x)$ tende a $g(x_0)$ perché $x \to x_0$ e g è derivabile in x_0 (il fatto che sia derivabile, implica che sia continua), e l'altro termine analogo. Quindi, vale la tesi.
4. Poiché per ipotesi $g(x_0) \neq 0$ e g è continua in x_0 perché è in derivabie $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 per permanenza del segno. Calcoliamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\end{aligned}$$
Come prima otteniamo la tesi siccome g derivabile implica g continua.

Proposition Derivata della tangente

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

16.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I. Sono equivalenti:

1. f è derivabile in x_0 e $Df(x_0) = \lambda \in \mathbb{R}$
2. *differenziaiblità in* x_0
$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x)$$
dove $r(x) = o(x - x_0)$.

Notiamo che (2) dice che, se approssimiamo f con l'equazione della retta tangente al grafico, l'errore $r(x)$ tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La reta tangente è l'unica per la quale l'errore tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La differenziaiblità è quindi la proprieté di poter essere approssimata bene con una funzione affine.

Proof

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x-x_0) + \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - Df(x_0)\right](x-x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x-x_0) + r(x) \end{aligned}$$

e chiaramente f è derivabile in x_0 con derivata se e solo se

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \lambda \iff \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lambda\right] \to 0$$

se e solo se

$$r(x) = \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lambda\right] \to 0$$

è tale che

$$\frac{r(x)}{x-x_0} \to 0$$

Corollario

Se f è derivabile in x_0 allora, $\forall m$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)]}{x-x_0} = Df(x_0) - m = 0 \iff m = Df(x_0)$$

Quindi, la retta tangente è precisamente quella che approssima meglio la funzione attorno ad x_0.

Teorema Formula di derivazione della funzione composta

Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e $g\colon J \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$ interno a J. Allora, $Dg(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Proof Formula di derivazione della funzione composta

Dobbiamo dimostrare che esiste finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x - 0} = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Introduciamo una funzione ausiliaria $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(y) \triangleq \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 = f(x_0) \\ Dg(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

e notiamo che, per definizione di derivata

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = Dg(y_0)$$

Osserviamo ora che $\forall x \in I$ vale l'uguaglianza

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Infatti, se $f(x) = f(x_0)$ allora il primo membro è nullo e così per il secondo. Se invece $f(x) \neq f(x_0)$ allora

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per $x \to x_0$ abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to Df(x_0)$$

e $f(x) \to f(x_0) = y_0$ perché f derivabile implica f continua, e quindi

$$\varphi(f(x)) \to \varphi(y_0) = Dg(y_0) = Dg(y_0)$$

da cui otteniamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che porta alla tesi.

Teorema Derivata di funzione inversa

Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e invertibile in I con $f^{-1} \colon f(I) \to I$. Supponiamo che:

1. $Df(x_0) \neq 0$;
2. f^{-1} sia continua in $y_0 = f(x_0)$.

Allora, f^{-1} è derivabile in x_0 e vale

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{Df(f^{-1}(y_0))}$$

Osserviamo che se f è continua e invertibile su I allora f^{-1} è continua su $f(I)$ e quindi il secondo puntato è automaticamente garantito.

Proof Derivata di funzione inversa

Studiamo il limite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Allora posto $f^{-1}(y) = x$ e $f^{-1}(y_0) = x_0$, abbiamo $f(x) = y$ e $f(x_0) = y$ e per la continuità di f^{-1} in y_0 se $y \to y_0$, allora $f^{-1}(y) = x \to f^{y_0} = x_0$. Allora, possiamo applicare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} &= \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{Df(x_0)} \end{aligned}$$

Notiamo le seguenti:

$$D\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \in (-1;1)$$
$$D\arccos(x) = -\frac{1}{1-x^2}$$
$$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$D\sinh(x) = \cosh(x)$$
$$D\cosh(x) = \sinh(x)$$
$$D\tanh(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1-\tanh^2(x) \end{cases}$$
$$D\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$D\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$D\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

16.2 Punti di singolarità

Definizione Punto singolare

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in I dove f non è derivabile in $c \in I$. Allora, c è un *punto singolare* per f.

Possiamo parzialmente classificare tali punti:

1. esistono finite le derivate destre e sinistre nel punto ma diverse, allora c è un punto angoloso;
2. esistono infinite le derivate destre e sinistre. La funzione non è derivabile ma diciamo comunque che $Df(c) = \pm\infty$ e che c è un punto a tangente verticale.
3. esistono infinite le derivate destre e sinistre ma con segno opposto. Allora c è un punto di cuspide.

Le varie formule di derivazione, forniscono condizioni sufficiente per la derivabilità delle derivate, ma se le ipotesi non sono rispettate, è necessario studiare direttamente il limite.

Per esempio, $x^{1/3}$ e $x^{4/5}$ non sono derivabili in $x = 0$, ma il loro prodotto è derivabile in $x = 0$.

Studiando il limite incrementale di $|x|^\alpha$ troviamo che il rapporto incrementale è dato da

$$\begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ +1 & \alpha = 1 \land x \to 0^+ \\ -1 & \alpha = 1 \land x \to 0^- \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \land x \to 0^+ \\ -\infty & 0 < \alpha < 1 \land x \to 0^- \end{cases}$$

Quindi la funzione è derivabile solo in $\alpha > 1$. Per $\alpha = 1$ abbiamo un punto angoloso, e per $0 < \alpha < 1$ abbiamo un punto di cuspide.

Esercizio Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + e^{b\cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità $f_+(x)$ è derivabile per $x > 0$ e quindi f è derivabile per $x > 0$. La funzione f_- è anch'essa derivabile per $x < 1$, in particolare per $x \leq 0$. Quindi, manca da studiare il punto $x = 0$. La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

l limite è dato da

$$\lim_{x \to 0^-} = f_-(0) = e^{b-1}$$

n quanto f_- è continua. Quindi, f è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\frac{x^2}{x} + e^{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\ln(x)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{2}x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \to 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora f è continua se e solo se $1 = e^{b-1}$, quindi $b = 1$. Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere $b = 1$. Inoltre devono esistere finite $D_- f(0) = D_+ f(0)$, quindi

$$D_- f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{f_-(x) - f_-(0)}{x - 0} = -a \\ D f_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinsitra

$$D_+ f(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f_+(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $b = 1$ e $a = -\frac{1}{2}$. In tal caso $f'(0) = \frac{1}{2}$. Se $b = 1$ e $a \neq \frac{1}{2}$, f è continua ma non derivabile e $x = 0$ abbiamo un punto angoloso.

16.3 Massimi e minimi

Definizione Massimo locale o relativo

Sia $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora x_0 è un *punto di massimo locale o relativo* debole se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$. Il punto x_0 dice dice *punto di massimo locale o relativo* forte se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$.

Se x_0 è tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in E$ di dice punto di massimo globale o assoluto, e debole se $f(x) < f(x_0)$ con $x \neq x_0$. Analogamente per i punti di minimo locale e assoluti, forti e deboli.

Un punto può essere contemporaneamente minimo e massimo locale debole. Tuttavia, è incompatibile essere minimo locale forte e massimo locale debole e viceversa. Inoltre, la forza implica la debolezza.

Definizione
Un punto x_0 si dice estremamente debole/forte se è un minimo o massimo debole/forte.

Teorema Teorema di Fermat
Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto estremanete per f (locale/globale debole/forte) e supponiamo
1. x_0 è interno ad I;
2. f è derivabile in x_0.

Allora $f'(x_0) = 0$.

Proof Teorema di Fermat
Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo debole. Per definizione, esiste un intorno J di x_0 tale che $\forall x \in J \cap I, f(x) \geq f(x_0)$. Poiché x_0 è interno prendendo un J più piccolo possiamo supporre che $J \subseteq I$. Consideriamo allora il rapporto incrementale per $x \in J \subseteq I$ e $x \neq x_0$. Abbiamo
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x > x_0 \\ \leq 0 & x < x_0 \end{cases}$$
In questo passaggio è essentiale che x_0 sia un punto interno. Facendo tendere $x \to x_0^+$ e rispettivamente $x \to x_0^-$ e utilizzando il teroema di monotonia del limite otteniamo che
$$D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \lim_{x \to x_0} \leq 0$$
e
$$D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \lim_{x \to x_0} \geq 0$$
Poiché f è derivabile, $D_+(x_0) = D_- f(x_0) = f'(x_0)$ e quindi $f'(x_0) = 0$.

Definizione Punto critico o stazionario
Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Allora x_0 è un *punto critico o stazionario* se $f'(x_0) = 0$.

Corollario
Sia $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora, gli eventuali punti estremanti di f in I vanno ricercati tra:
- i punti interni stazionari;
- i punti interni dove f non è derivabile (cioè è punti singolari);
- gli estremi di I che appartengono a I.

Esercizio Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato V, trovare quello che ha superficie minima.
Abbiamo che
$$V = r^2 \pi h$$
e
$$S = 2r^2 \pi h + 2r\pi h$$
Vogliamo minimizzare S con V costante. Troviamo $h = \frac{V}{\pi r^2}$, e allora
$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$
I vincoli sono $r > 0$. Minimizziamo allora $f(r) = \frac{S}{2}$. La funzione è derivabile e quindi continua in $(0, +\infty)$. Notiamo che $f(r) \to \infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to \infty$. Per estensione del teorema di Weierstrass

al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché f è derivabile in $(0, +\infty)$, tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi $f'(r) = 0$ e quindi

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

Teorema Teorema di Rolle

Sia $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia:

1. continua in $[a, b)$;
2. derivabile in (a, b);
3. $f(a) = f(b)$.

Allora, esiste almeno un $c \in (a;b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Proof Teorema di Rolle

Poiché f è continua in $[a;b]$ chiuso e limitato, per Weierstrass ammette minimo m e massimo M assoluti in $[a, b]$. Per definizione, $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ Consideriamo due casi:

- $m = M$, allora f è costante e $f'(c) = 0$ per ogni c in $[a, b]$;
- $m < M$, allora se x_m e X_M sono i punti dove f assume minimo e massimo rispettivamente, cioè $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$ poiché $f(a) = f(b)$ e $m < M$ almeno uno dei due punti deve essere interno. Tale punto è estremamente interno dove f è derivabile. Quindi per Fermat, $f'(c) = 0$.

Le ipotesi di Rolle sono strettamente necessarie. Se manca la derivabilità il controesempio è $|x|$. Se manca la continuità l'esempio è

$$\begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Teorema Teorema di Lagrange

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dove

1. continua in $[a, b)$;
2. derivabile in (a, b);

Allora, esite $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La retta tangente esiste sempre in quanto la funzione è derivabile.

Proof Teorema di Lagrange

Vogliamo applicare il teorema di Rolle, ma la condizione che $f(a) = f(b)$. Allora, sottraiamo ad f la della corda

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

che è una funzione affine. Tale funzione è continua in $[a, b)$, in quanto viene mantenuta la derivabilità, è quindi anche derivabile, e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Allora, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$

tale che

$$\varphi(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Notiamo che Rolle è un casino particle di Lagrange. Infatti, le due sono equivalenti, e le condizioni sono strettamente necessarie.

Teorema Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dove

1. f, g siano continue in $[a, b]$;
2. f, g siano derivabili in $[a, b]$.

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

In particolare, se $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ cosicché $g(a) = g(b)$ per Rolle, allora dividendo si ottiene

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se $g(x) = x$, allora l'espressione dats diventa

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

e quindi Lagrange è un caso particolare di Cauchy.

Proof Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Allora φ è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) come combinazione lienare di funzioni con queste proprietà- Inoltre, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Quindi, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\varphi'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi.

Come funzione ausiliaria si sarebbe potuta scegliere, più in generale, una combinazione lineare di f e g tale che $\varphi(a) = \varphi(b)$

In sintesi abbiamo che siccome il teorema di Cauchy implica quello di Rolle, allora i 3 teoremi sono tutti equivalenti.

16.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo e derivabile nell'interno $\overset{\circ}{I}$. Allora:

1. f è costante su I se e solo se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$;
2. f è monotona crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$, e analogamente decrescente,
3. Se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$, allora f è strettamente crescente in I. Nota che il fatto che f sia strettamente crescente in $\overset{\circ}{I}$ non implica che $f'(x) > 0$ in $\overset{\circ}{I}$. Per esempio, $f(x)x^3$ si annulla

in un punto solo.

4. Posto $Z = \{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\}$, allora f è strettamente crescente in I se e solo se:
   (a) $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$;
   (b) Z non ha punti interni (non contiene intervalli).

Proof

Poiché f è derivabile in $\mathring{I}$ e continua in I, $\forall a < b \in I$, f è continua in $[a,b] \subseteq I$ e f è derivabile in $(a,b) \in \mathring{I}$. Per Lagrange, risulta quindi che esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

1. è chiaro che se f è costante in I, $\forall x \in I, f'(x) = 0$ in particolare $\forall x \in \mathring{I}$. Viceversa, supponiamo che $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0$. Per quanto detto sopra $\forall a < b \in I, \exists c$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$$

   cioè $\forall a < b \in I$ risulta $f(a) = f(b)$ e f è quindi costante.
2. supponiamo che f sia monotona crescente in I e sia x_0 interno ad I. Allora, $\forall x > x_0$, $x \in I$, risulta che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

   da cui facendo tendere x a x_0^+ e usando la monotonia del limite, si deduce che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = D_+ f(x_0) = f'(x_0)$$

   in quanto la funzione è derivabile. Viceversa, se $\forall x, f'(x) \geq 0$ allora $\forall a < b \in I$ dalla conclusione di Lagrange segue che esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \geq 0$$

   da cui $f(b) \geq f(a)$, e quindi f è monotona crescente.
3. Se $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) > 0$ dal ragionamento fatto nel precedente punti, deduciamo che $\forall a < b \in I, f(a) < f(b)$ e quindi f è strettamente crescente.
4. Supponiamo che f sia strettamente crescente, per il secondo punto abbiamo che è $\forall \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$. Se Z contenesse un intervallo (a,b), allora per il primo punto f sarebbe costante in (a,b), equindi non monotona crescente $\lightning$. Viceversa, f è monotona crescente, e Z non contiene intervalli. Supponiamo che f non sia strettamente crescente, esistono $a < b \in I$ tale che $f(a) \geq f(b)$ ma poiché f è monotona crescente, $f(a) = f(b)$, e quindi in tale intervallo è costante. Quindi, $(a,b) \in Z$, contro l'ipotesi $\lightning$.

Teorema

Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $(a,b]$ e derivabile in (a,b). Supponiamo

$$\exists \lim_{x \to b^-} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lambda$$

In particolare, se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile da sinistra i b e

$$D_{-}f(b) = \lambda \lim_{x \to b^{-}} f'(b)$$

Vale lo stesso per $[a, b)$ continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b) con il limite da sinistra e per $I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \backslash \{c\}$ per il quale esiste

$$\lim_{x \to c} f'(x)$$

Proof

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Per ogni $x \in (a, b)$, f è continua in $[x, b)$ ed è derivabile in (x, b) quindi soddisfa le ipotesi del Teorema di lagrange ed esiste c_x tale che

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c_x), \quad x < c_x < b$$

Per $x \to b^{-}$, $c_x \to b^{-}$ e quindi $f'(c_x) \to \lambda$ da cui

$$\lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda = \lim_{x \to b^{-}} f'(x)$$

nel caso considerato se $\lambda \in \mathbb{R}$, non solo la derivata sinistra esiste finita, ma $f'(x)$ risulta continua da sinistra. In particolare il teorema fornisce una condizione solo sufficiente per la derivabilità: se il limite della derivata esiste, finito o infinito, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale e i due limiti sono uguali. Ma, può accadere che esista

$$\lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

ma non

$$\lim_{x \to b^{-}} f'(x)$$

Esempio

Verificare per quali valori di $\alpha > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. f è continua per ogni $\alpha > 0$ per il teorema dei due carabinieri. Infatti, $|f(x)| \leq |x|^{\alpha} \to 0 = f(0)$ per $x \to 0$. Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha - 1} \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \cos\frac{1}{x} \to \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni α, f è derivabile in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ e

$$f'(x) = D[|x|^{\alpha} \cos\frac{1}{x}] = |x|^{\alpha - 2} \left\{ \alpha |x| \mathrm{sgn} x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \right\}$$

Quindi $f'(0)$ esiste per $\alpha > 1$, f' è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$.

Teorema Teorema di de L'Hôpital

Siano $f, g\colon (a,\xi) \to \mathbb{R}$ con $\xi \leq +\infty$ e supponiamo che f, g siano derivabili in (a,ξ), che g, g' siano diverse da zero in (a,ξ), che o $f, g \to 0$ per $x \to \xi^-$, o $g(x) \to \pm\infty$ e che

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Analogamente per limiti destri e bilaterali

Proof

Consideriamo il caso in cui $\xi = b \in \mathbb{R}$ e $f, g \to 0$ per $x \to b$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy: osserviamo che poiché $f(x), g(x) \to 0$, posto $f(b) = g(b) = 0$ risulta che la funzione così estese sono

1. continue in $(a, b]$;
2. derivabili in (a, b)

e inoltre per ipotesi $g'(x), g(x) \neq 0$ in (a, b) e valgono le ipotesi del teorema di Cauchy. $[x, b]$ per ogni $x \in (a, b)$. Quindi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

e per Cauchy esiste $c_x \in (x, b)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Per $x \to b^-$, $c_x \to b^-$ e per ipotesi

$$\frac{f(c_x)}{g(c_x)} \to \lambda$$

cosicché

$$\exists \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

16.5 Derivate di ordine superiore

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$. Così è definita $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Se f' è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ si dice che f è derivabile 2 volte in x_0 e si pone

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = (f')'(x_0)$$

Notiamo che affinché una funzione f sia doppiamente derivabile in I, dobbiamo avere:

- esiste un intorno I_1 di x_0 tale che f è derivabile in tutti i punti di I_1;
- la funzione $f'\colon I_1 \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0.

Le derivate di ordine successive vengono definite iterativamente in maniera analoga: $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0 se esiste un intorno I_1 di x_0 tale che le derivate di ordine $k \leq n-1$ esistano in I_1 e la derivata di ordine $n-1$ è derivabile in x_0.

Proposition Proprietà delle funzioni derivabili n-volte

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivabili n volte in $x_0 \in I$. Allora,

1. $f \pm g$ è derivabile n volte in x_0 e

$$D^n(f \pm g)(x_0) = D^n f(x_0) \pm D^n g(x_0)$$

2. fg è derivabile n volte in x_0 e vale la formula di Leibniz

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x_0) \cdot D^{n-k} g(x_0)$$

3. se $g(x_0) \neq 0$ ($g(x_0) \neq 0$ in un intorno), allora f/g è derivabile n volte in x_0

Proposition Derivabilità della funzione composta

Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in I$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $y_0 = f(x_0) \in J$. Allora, $g \circ f\colon f^{-1}(J) \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0.

Proposition Derivabilità della funzione inversa

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ invertibile e derivabile n volte in x_0, e supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$.

Definizione Classe di continuità

La *classe di continuità* è definita come

$$C^n = \begin{cases} \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } I\} & n = 0 \\ \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \text{ in } I \land \forall k \leq n, f^{(n)} \text{ è continua in } I\} & n \in \mathbb{N}^* \\ \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \text{ in } I \land f^{(n)} \text{ continua in } I\} & n = \infty \end{cases}$$

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$$

Lemma

Sia
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$
un polinomio di grado minore o uguale a n in $x - x_0$. Allora,
$$P^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^m (x - x_0)^k = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ m! = k! & m = k \end{cases}$$

Definizione Polinomio di Taylor

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0 interno ad I. Si dice *polinomio di Taylor* di ordine n centrato in x_0 il polinomio
$$P_n(f, x_0, x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$$

Definizione Polinomio di MacLaurin

Si dice *polinomio di MacLaurin* un polinomio di Taylor con $x_0 = 0$.

Proposition

Il polinomio di Taylor di f in x_0 arrestato all'ordine n è l'unico polinomio tale che $\forall k \leq n$,
$$D^k P_n(x_0) = D^k f(x_0)$$

Il prossimo teorema estende le proprietà delle funzioni differenziabili, permettendo di approssimarle con polinomio di grado superiore.

Teorema Teorema di Taylor

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I e sia
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{k!}$$
il suo polinomio di Taylor di orinde n centrato in x_0. Allora,

1. *formula di Taylor con resto in forma di Peano:*
$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \qquad \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0 \text{ con } x \to \infty$$
2. *formula di Taylor con resto in forma di Lagrange:* se si suppone anche che f sia derivabile $n + 1$ volte in tutto I, allora
$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$
dove r_n si rappresenta nel modo seguente: $\forall x \in I$, esiste c_x compreso tra x_0 e x (che dipende in generale sia da x che da n e di cui non si può preditare altro che il fatto che sia compreso tra x e x_0), tale che
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Proof

1. Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\end{aligned}$$

Siccome $\forall k \leq n, D^k P(x_0) = D^k f(x_0)$ possiamo applicare nuovamente il teormea de l'Hôpital iterativamente.

$$\begin{aligned}&\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{D^2 f(x)-D^2 P_n(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-1}}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{D^{n-1} f(x)-D^{n-1} P_n(x)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}\end{aligned}$$

A questo punto non possiamo più applicare il teorema in quanto si necessiti che la funzione sia derivabiel in un intorno, ma possiamo necessariamente derivarla solo in x_0. Tuttavia, $D^n(f(x_0)) = D^n P_n(x_0)$. Quindi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \lim_{x\to x_0}\frac{D^{n-1}f(x)-D^{n-1}f(x_0)}{x-x_0} - \frac{D^{n-1}P_n(x)-D^{n-1}P_n(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{n!}\{D^n f(x_0) - D^n P_n(x_0)\}\\ &= 0\end{aligned}$$

2. Mostriamo che per tutte le x esiste c compreso tra x_0 e x tale che

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(c)(x-x_0)^{n+1}$$

equivalentemente

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(c)$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy. Poniamo $F(x) = f(x) - P_n(x)$ e $G(x) = (x-x_0)^{n+1}$ e notiamo che $F(0) = 0$ e infatti $\forall k \leq n, D^k F(x_0) = 0$, e analogamente $G(x_0) = 0$ e infatti

$$\forall k \leq n, D^k(x-x_0)^{n+1} = (n+1)n\cdots(n-k)(x-x_0)^{n-k+1} = 0$$

in $x = x_0$. Allora,

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}$$

notando che F, G sono derivabili $n+1$ volte in I e $G(x) - G(x_0) \neq 0$, e $D^k G(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ per ogni $t = 1 \cdots n+1$. Esiste quindi x_1 compreso fra x e x_0 tale che

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1)-F'(x_0)}{G'(x_1)-G'(x_0)}$$

Usiamo allora il teorema di Cauchy nuovamente: esiste un x_2 fra x_1 e x

$$= \frac{D^2F(x_2)}{D^2G(x_2)} = \frac{D^2F(x_0)-D^2F(x_0)}{D^2G(x_2)-D^2G(x_0)}$$

e ripetiamo iterativamente quanto possiamo: esiste c compreso tra x_n e x_0

$$= \frac{D^{n+1}F(c)}{D^{n+1}G(c)} = \frac{1}{(n+1)}D^{n+1}F(c) = (n+1)!$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{(n+1)!}\left\{D^{n+1}f(c) - D^{n+1}P_n(c)\right\} = \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(c)$$

Proposition Serie di MacLaurin dell'esponenziale

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(0)}{k!}x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del seno

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{2k+1}\sin(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + o(x^{2n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del coseno

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1-x)$

Abbiamo che

$$D^k \log(1-x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$$

Allora

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k!} + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1+x)$

Abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$

Notiamo che se $\alpha = n$, allora è un polinomio di grado n, quindi lui stesso è il suo Polinomio di Taylor

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

Altrimenti,

$$D^k(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

e allora

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

con i coefficienti binomiali generalizzati.

Teorema Teorema di Unicità

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I. Supponiamo che

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

sia un polinomio di grado minore o uguale a n tale che $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$. Allora, $P(x)P_n(x)$. In particolare, per il principio di identità dei polinomi,

$$\frac{D^k f(x_0)}{k!}$$

Proof

Poiché f è derivabile n volte in x_0 dalla Fromula di Taylor conr esto Peano risulta che

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

risulta quindi

$$P(x) - P_n(x) = [f(x) - P_n(x)] - [f(x) - P(x)] = o((x-x_0)^n)$$

Posto $Q(x) = P(x) - P_n(x)$ la dimostrazione si riduce a mostrare che se $Q(x)$ è un polinomio in $(x-x_0)$ di grado minore o uguale a n e $Q(x) = o((x-x_0)^n)$ allora $Q(x) = 0$ cioè tutti i coefficienti di Q sono nulli. Scriviamo

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k$$

e supponiamo per assurdo che

$$\frac{Q(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$$

ma $Q(x) \neq 0$. Tra tutti i coefficienti non nulli, ce n'è uno con indice più piccolo k_0, quindi tutti quelli prima sono nulli. Abbiamo quindi che

$$Q(x) = \sum_{k=k_0}^{n} b_k (x-x_0)^k$$

Siccome il termine tende a zero, raccogliamo la potenza più piccola

$$Q(x) = (x-x_0)^{k_0} \sum_{k=k_0}^{n} b_k (x-x_0)^{t-t_0}$$

da cui

$$\frac{Q(x)}{(x-x_0)^n} = (x-x_0)^{k_0-n} \sum_{k=k_0}^{n} b_k (x-x_0)^{k-k_0}$$

la sommatoria tende a b_{k_0} e il termine esterno $\pm\infty$ per $k_0 < n$, altrimenti 1 (o magari non esiste il limite). Quindi, $Q(x)$ non tende a zero $\lightning$.

Esempio Espansione di MacLaurin del seno iperbolico

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}$$

Esempio Espansione di MacLaurin del coseno iperbolico

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + XX$$

Esercizio

Verificare per induzione che per ogni k,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con $x \neq 0$, dove P_k è un polinomio di grado minore o uguale a k in $\frac{1}{x^3}$. Dedurre inoltre che per tutte le k,

$$\lim_{x\to 0} D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 = D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)(0)$$

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ in C^∞ e sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

la sue serie di Taylor in x_0. Poiché è infinitamente differenziabile, soddisfa le ipotesi di Teorema di Taylor per tutte le n e quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Notiamo che $P_n(x)$ è la somma parziale della serie di Taylor.

Teorema
La serie di Taylor di f calcolata in x converge a $f(x)$ se e solo se $R_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$.

Tale uguaglianza vale per le funzioni viste. Per e^x abbiamo il resto in forma di Lagrange

$$R(x) = \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove ξ è compreso fra 0 e x. Abbiamo allora

$$R(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

in ogni caso $e^{\xi} \leq \max\{e^{\xi}, 1\} \leq e^{|x|}$ Quindi,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0$$

per gerarchia degli infiniti. Quindi, e^x è pari alla sue serie di MacLaurin.

Per il seno abbiamo

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(D^{2n+2} \sin)(\xi)}{(2n+2)!}$$

e siccome le derivate pari del seno sono o il seno o il seno negativo, abbiamo

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|\pm \sin(\xi)|}{(2n+2)!} x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

16.6 Classificazione punti stazionari

Teorema
Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in x_0 interno ad I e supponiamo che $f'(x_0) = 0$, quindi x_0 è stazionario:

1. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo forte;
2. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo forte;
3. se x_0 è un punto di minimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \geq 0$;
4. se x_0 è un punto di massimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \leq 0$;

Proof
Per la formula di Taylor al secondo ordine centrata in x_0 abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

e poiché $f'(x_0) = 0$, risulta che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &= (x - x_0)^2 \left\{ \frac{1}{2} f''(x_0) + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right\}, \quad \forall x \neq x_0 \end{aligned}$$

Per definizione l'ultimo termine tende a zero per $x \to 0$, quindi prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{4}|f''(x_0)| > 0$ nel caso (1) o (2) dalla definizione di limiti risulta che

$$\exists \delta > 0 \,|\, \forall x \,|\, 0 < |x - x_0| < \delta$$

abbiamo

$$\left|\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right| < \frac{1}{4}|f''(x_0)|$$

Consideriamo il primo caso senza perdita di generalità, quindi $f''(x_0) > 0$ risulta quindi che

$$-\frac{1}{4}f''(x_0) < \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$$

da cui

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}f''(x_0)$$

Sostituendo in una vecchia equazione otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x-x_0)^2\left\{\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right\} \\ &\geq \frac{1}{4}f''(x_0)(x-x_0)^2 > 0, \quad \forall 0 < |x-x_0| < \delta \end{aligned}$$

e x_0 è punto di minimo relativo forte.
Il caso in cui $f''(x_0) < 0$ segue notando che

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0) < 0$$

Per la seconda parte del teorema consideriamo x_0 come punto di minimo relativo (forte o debole). Sappiamo che $f'(x_0) = 0$ per Fermat e inoltre deve essere $f''(x_0) \geq 0$ perché altrimenti x_0 sarebbe punto di massimo relativo forte e quindi non potrebbe essere punto di minimo relativo. Analogamente per l'ultimo punto.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I con

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora

1. Se n è dispari, x_0 non è estremante;
2. Se n è pari, x_0 è un estremante e più precisamente:
   (a) è un minimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) > 0$;
   (b) è un massimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Teorema Teorema di Darboux per le funzioni derivate

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I

1. se $I = [a,b] \wedge f'(a)f'(b) < 0$ allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$;
2. $$\forall l \mid \inf_I f' < l < \sup_I f', \exists c \in (a,b) \mid f'(c) = l$$

Nota che non occorre supporre che la derivata sia continua (in tal caso sarebbe ovvio).

Proof

1. la funzione parte scendendo e termina salendo (senza perdita di generalità). Per definizione

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0$$

Per permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

in $a, a+\delta$ cioè $f(x) < f(a)$ in $(a, a+\delta)$ e f non può assumere minimo in $x = a$. Analogamente si verifica che $f(x) - f(b) < 0$ in $(b - \delta, b)$ e quindi f non può assumere minimo in $x = b$. Ma f è derivabile, e quindi continua in $[a, b]$ e per Weierstrass assume minimo assoluto in un punto $c \in [a, b]$ che è quindi interno. Per Fermat $f'(c) = 0$.

16.7 Convessità

Una funzione si dice convessa se il suo grafico giace sempre sotto quelle delle corde secanti (strettamente o meno).

Definizione Funzione convessa

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è (strettamente) convessa in I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ vale (una delle seguenti)

1. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
2. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale
$$f(x) < f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_1}$$
3. notando che
$$\forall x_1 \leq x \leq x_2, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$
e ponendo
$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0,1), \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$$
e risolvendo la prima rispetto ad x si trova $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ e quindi la condizione diventa
$$\forall \lambda \in (0,1), f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

o minore o uguale per la convessità semplice.

Notiamo infatti che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \end{cases}$$
è l'equazione parametrica che passa per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

La convessità esprime il fatto che la regione
$$E_f = \{(x,y) \mid x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$
detta *epigrafico*, è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$.

Infatti, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall x, y \in C$, l'insieme del segmento
$$[x,y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} \subseteq C$$

Definizione Funzione concava

Una funzione è concava se $-f$ è convessa.

Convesso è come dire concava verso l'alto, e concava è concava verso il basso.

Proposition

Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora

1. se f, g sono convesse e $\alpha, \beta \geq 0$, allora $\alpha f + \beta g$ è convessa ed è strettamente convessa se almeno una delle due lo è e il corrispondente coefficiente è strettamente positivo;
2. le funzioni lineari affini (polinomi di primo grado) sono le uniche funzioni che sono sia concave che convesse (non strettamente);
3. f è (strettamente) convessa se e solo se $f(x) + ac + b$ lo è.

Teorema

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Sono equivalenti:

1. f è convesso (rispettivamente strettamente converssa);
2. $\forall x_1 < x_0 < x_2$
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
3. $\forall x_0 \in I$, il coefficiente angolare
$$F_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
è una funzione monotona crescente (rispettivamente strettamente crescente) in $I \backslash \{x_0\}$.

Proof

1. (1) $\implies$ (2): osserviamo che per ipotesi f è convessa in I se $\forall x_1 < x_2$ e $\forall x_0$ tale che $x_1 < x_0 < x_2$ vale la disuglianza 2 nella definizione
$$f(x_0) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Poiché
$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$
possiamo riscrivere la disequazione nella forma
$$\left\{\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}\right\} f(x_0) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Quindi rearranging
$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}[f(x_0) - f(x_1)] \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}[f(x_2) - f(x_0)]$$
e dividendo otteniamo la seconda condizione.
2. (2) $\implies$ (1): supponiamo chde f non sia convessa (strettamente convessa). Allora esistono punti $x_1 < x_0 < x_2$ tale che
$$f(x_0) > f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$
Gli stessi conti fatti sopra, mostrano che per i punti selezionati non vale la disuglianza (2) ovvero non vale il minore stretto (vale il maggiore uguale).
3. (2) $\implies$ (3): slides;
4. (3) $\implies$ (2): ovvio.

La convessità non implica la continuità. Vi è solamente un unico controesempio: quello di una funzione concava dove gli estremi dell'intervalli sono punti distaccati più in alto dei punti vicini.

Teorema

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa su I intervallo.

1. $\forall x_0$ interno ad I, esistono finite $D_- f(x_0) \leq D_+ f(x)$. In particolare ciò implica che f è continua in x_0;
2. $\forall x_1 < x_2$ interni ad I si ha
$$D_-(x_1) \leq D_+ f(x_1) \leq D_- f(x_0) \leq D_+ f(x_2)$$

Inoltre, se f è strettamente convessa, $D_+f(x_1) < D_-f(x_2)$.

3. $\forall x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ interni ad I

$$D_+f(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq D_-f(x_4)$$

In particolare, f è Lipschiziana in $[x_1, x_4]$.

Proof

1. segue direttamente dal punto (3) del teorema (1). Infatti, il rapporto incrementale centrato in x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente di x. Quindi, $\forall x_1 < x < x_0 < x' < x_2$ con x_1, x_2 interni, vale

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

facendo tendere $x \to x_0^-$, $x' \to x_0^+$, i limiti dei rapporti incrementali esistono per monotonia e si conclude che esistono

$$D_-f(x_0) \leq D_+f(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

2.,3. si ottengono con considerazioni simili. (bisogna considerare 5 punti)

Corollario

Se f è convessa (rispettivamente strettamente convessa) in I e derivabile allora $f'(x)$ è monotona crescente (rispettivamente monotona crescente)

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora f è (strettamente) convessa se e solo se $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \in I$ per $x \neq x_0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Proof

($\Longrightarrow$) Supponiamo che f sia (strettamente) convessa- Quindi dal un teorema precedente, $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Dalla disuglianza destra si ricava

$$\forall x_2 > x_0, f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

e da quella sinistra si deduce che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

e qiomdo vale la tesi. Se f è strettamente convessa valgono le disuglianze strette nell'ultima disuglianza, e quindi lo stesso vale per quella prima.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che valga

$$\forall x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

con $x \neq x_0$. Allora gli stessi conti mostrano che per $x_2 > x_1$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \implies \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq f'(x_0)$$

e analogamente per $x_1 < x_0$ si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$$

Quindi

$$\forall x_1 < x_0 < x_2, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

e f è strettamente (strettamente) convessa per un vecchio teorema.

Teorema

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora

1. f è (strettamente) convessa in I se e solo se f' è (strettamente) monotona crescente.
2. se f è derivabile 2 volte in I, f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ in I. Se $f'' > 0$, allora f è strettamente convessa.

Proof

1. ($\Longrightarrow$) Sappiamo già che f (strettamente) convessa implica f' monotona crescente.

   ($\Longleftarrow$) Supponiamo che f' sia (strettamente) monotona crescente.
   Mostriamo che vale una vecchia condizione, cioè $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \neq x_0$,

   $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   Per il teorema di Lagrange $\forall x \neq x_0$, esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

   Sia $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e poiché f' è monotona (strettamente) crescente otteniamo

   $$f'(\xi) \geq f'(x_0)$$

   e quindi

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f'(x_0) \geq 0$$

   Analogamente se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ cosicché $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ e $x - x_0 < 0$.
   Come prima,

   $$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
2. (2) segue da (1) perché se f è derivabile 2 volte allora f è monotona crescente se e solo se $f'' \geq 0$ e $f'' > 0$ implica f' strettamente monotona

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua su I e sia c tale che f è convessa per $x < c$ e concava per $x > c$ o viceversa. Allora, c è un *punto di flesso*.

Teorema

Sia f derivabile 1 volta in I e supponiamo che

1. $x = c$ sia un punto di flesso per f;
2. f sia derivabile 2 volte in $x = c$.

Allora, $f''(c) = 0$.

Infatti, poiché $x = c$ è di flesso, f è convessa (concava) in un intorno sinistro di c, e concava (convessa) in un intorno destro di f, è monotona crescente (decrescente) per $x < c$ e monotona decrescente (crescente) per $x > c$ è un punto estremanete per f'. Per il teorema di Fermat, $(f')'(c) = f''(c) = 0$.

16.8 Asintoti

Definizione Asintoto

Sia $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Una retta $y = y_0 + mx$ si dice *asintoto* per $x \to +\infty$ se

$$f(x) - [y_0 + mx] \to 0$$

per $x \to \infty$. Se $m = 0$ la retta $y = y_0$ è *asintoto orizzontale*. Se $m \neq 0$ la retta $y = y_0 + mx$ è un *asintoto obliquo*.

Proposition Condizioni asintoto

1. *asintoto orizzontale* $y = y_0$ per $x \to \infty$ se e solo se $f(x) \to y_0$ per $x \to +\infty$;
2. *asintoto obliquo* $y = mx + q$ se e solo se:
   (a) $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \infty$
   (b)
   $$\frac{f(x)}{x} \to m \in \mathbb{R}^*$$
   (c) $f(x) - mx \to q \in \mathbb{R}$

Teorema

Sia $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ convessa in $(a, +\infty)$. Se $y = mx + q$ è asintoto per $x \to +\infty$ allora $f(x) \geq mx + q$ per tutte le x in (a, ∞).

Analogamente sta sempre sotto se concava. E anche per la dis. stretta.

16.9 Studio di funzioni

Esercizio

Dimostrare che se f è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

17 Integrali

17.1 Integrazione di Riemann

Abbiamo la partizione

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [0,1]$$

e $i \neq j \implies I_j \cap I_i = \emptyset$. Troviamo i rettangoli come

$$r_n = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \times \left[0, f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]$$

e

$$R_n = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \times \left[0, f\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

Quindi l'area sottesa è data da

$$A(r_n) = \sum_{i=1}^{n} XXX$$

e

$$A(R_n) = \sum_{i=1}^{n} XXX$$

Entrambe, convergono al medesimo valore

$$\lim_{n\to\infty} A(r_n) = \lim_{n\to\infty} A(R_n)$$

17.2 Area del cerchio

L'area del cerchio è la medesima considerato i triangoli insicritti e circoscritti

17.3 Funzione gradini

Definizione Funzione a scala

Sia $I \neq \emptyset$ un intervallo non vuoto. Una funzione $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ si dice a scalini se esiste una partizione $\{I_k\}$ di I mediante intervalli (eventualmente ridotti ad un punto) tale che φ è costant su ciascun intervallo I_k.

Una tale partizione di I viene detta adattata a φ. Osserviamo che suddividendo uno o più intervalli di una partizione adattata, si ottiene una partizione adattata. Diciamo che $\{I_k\}$ è una partizione indotta di φse la funzione assume valore diversi su intervalli consecutivi. Una partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partzione indotta.

Notiamo che se φ è a scala, $\{I_k\}$ è una partizione adatta e α_k è il valore costante che φ assume in I_k

$$\varphi(x) = \alpha_k$$

per tutte le $x \in I_k$. Allora possiamo scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}(x)$$

Infatti poiché $\{I_k\}$ è una partizione di I, $\forall x \in I$, esiste una sola $\overline{k}$ tale che $x \in I_{\overline{k}}$.

Proposition Proprietà delle funzioni a scala

Siano $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ a scala.

1. esiste una partizione $\{I_k\}$ di I adattata ad entrambe;
2. la combinazione lineare delle due è a scala. Infatti sia $\{I_k\}$ una partizione di I adattata ad ambo le funzioni cosicché
$$\varphi = \sum \alpha_k \chi_{I_k}$$
e
$$\psi = \sum \beta_k \chi_{I_k}$$
Allora
$$a\varphi + b\psi = \sum (a\alpha_k + b\beta_k)\chi_{I_k}$$
che è a scala.
3. Se $\{J_l\}$ è una famiglia di sottointervalli di I e $\gamma_l \in \mathbb{R}$, allora
$$\sum \gamma_l \chi_{J_l}$$
è a scala (conseguenza del risultato precedente). Quindi, le funzioni a scala sono precisamente le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.
4. $\psi\varphi$ e, se $\psi \neq 0$ in I, $\frac{\varphi}{\psi}$ sono a scala.
5. Se $\varphi \colon I\mathbb{R}$ è a scala, $F \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, e $\varphi(I) \subseteq A$ cosicché è definita $F \circ \varphi \colon I \to \mathbb{R}$. Allora, $F \circ \varphi$ è a scala. In particolare, se φ è a scala allora $|\varphi|$ è a scala e
$$\varphi_+ = \frac{|\varphi| + \varphi}{2}$$
e
$$\varphi_- = \frac{|\varphi| - \varphi}{2}$$
sono a scala.

Definizione

Sia $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ a scala e sia $\{I_k\}_{k=1}^n$ la partizione indotta da φ cosicché
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$$
Definiamo allora
$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \ell(I_k)$$

Poiché ogni partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partizione indotta e poiché se se
$$I_k = \bigcup_i J_i$$
e $\varphi(x) = \alpha_k$ su I_k dove i J_i sono disgiunti tra loro, allora
$$\alpha_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{i=1} \alpha_k \cdot \ell(J_{k_i})$$
Risulta allora che se $\{J_i\}_{i=1}^m$ è una partizione adattata a φ e
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{J_i}$$

risulta che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ell(J_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell(I_k)$$

e quindi nella definizione dell'integrale non corre usare la rappresenta di φ ottenute mediante le partizioni indotte. Si può usare una qualunque partizione adattata.

Proposition Proprietà dell'integrale di funzioni a scala

Siano $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ a scala

1. $$\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$$

   Infatti, se $\{J_i\}$ è una partizione adattata ad entrambe φ e ψ e

   $$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{J_i}, \qquad \psi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{J_i}$$

   cosicché

   $$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^{m} (\alpha a_i + \beta b_i) \chi_{J_i}$$

   risulta la tesi ovviamente spezzando la sommatoria non c'è bisogna che lo scriva è troppo ovvio.

2. *monotonia:* se $\varphi \leq \psi$ su I allora

   $$\int_I \varphi \leq \int_I \psi$$

   infatti se $\{I_k\}$ è adattata ad entrambe φ e φ cosicché

   $$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{J_i}, \qquad \psi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{J_i}$$

   $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per tutte le $x \in I$ vale se e solo se $a_k \leq b_k$ per tutte le k e quindi

   $$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell(I_k) = \int_I \psi$$

   In particolare se $\psi \geq 0$ su I allora

   $$\int_I \psi \geq 0$$

3. *disuguaglianza triangolare:* se φ è a scala cosicché $|\varphi|$ è a scala allora

   $$\left| \int_I \varphi \right| \leq \int_I |\varphi|$$

4. *additività rispetto all'intervallo di integrazione:* Se $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ è a scala e $I = I_1 \cup I_2$ disgiunti allora φ è a scala su I_1 e I_2 e

   $$\int_I \varphi = \int_{I_1} \varphi + \int_{I_2} \varphi$$

5. Se $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ sono a scala e $\varphi(x) = \psi(x)$ eccetto che in un numero finito di punti (nell'integrale di Lebesgue anche numerabile) di punti allora

   $$\int_I \varphi = \int_I \psi$$

Definizione Integrale di Riemann

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I intervallo limitato. L'integrale inferiore di f su I

$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I\right\}$$

e superiore

$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I\right\}$$

Ovviamente $\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f$. Diciamo che f è integrabile nel senso di Riemann se $\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f$. In tal caso, il valore comune è l'*integrale di Riemann*

$$R - \int_I f$$

Quindi per ogni funzione φ, ψ a sclaa dove $\varphi \leq f \leq \psi$ vale

$$\int_I \varphi \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq \int_I \psi$$

Se $s = S$ allora la funzione è Riemann integrabile

$$\int_I \varphi \leq R - \int_I f \leq \int_I \psi$$

Lemma

Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è a scala allora f è Riemann integrabile e

$$\int_I f = R - \int_I f$$

Proof

Basta dimostra che se f è a scala vale

$$\begin{aligned}\int_I f &= \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I\right\} \\ &= \inf\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I\right\}\end{aligned}$$

Ci limitiamo a verificare la prima uguaglianza. Per tutte le φ a scala con $\varphi \leq f$ per monotnia dell'integrale di funzione a scala

$$\int_I \varphi \leq \int_I f$$

e passando al suo su φ a scala $\varphi \leq f$ otteniamo

$$\sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I\right\} \leq \int_I f$$

D'altra parte poiché f è a scala, f stessa è una delle funzioni a scala, quindi per definizione di supremum

$$\int_I f \leq \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I\right\} \leq \int_I f$$

Quindi vige l'uguaglianza.

Come conseguenza, se f è a scala togliamo il prefisso di $R-$.

Non tutte le funzioni (limitate su intervallo limitata) sono integrabili nel senso di Riemann. Nonostante la maggior parte non lo sia, non è banale mostrarne una. Per esempio la funzione di Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ non è integrabile nel senso di Riemann. Abbiamo che

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a,b]) = 0, \qquad S(1_{\mathbb{Q}}, [a,b]) = b-a$$

Per mostrare ciò cominciamo con $1_{\mathbb{Q}} \geq 0$ e per definizione di integrale inferiore

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a,b]) = \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I\right\} \leq \int_I f \geq \int_I 0 = 0$$

D'altra parte, sia

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$$

una funzione a scala con $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$ su $[a,b]$ dove $\{I_k\}$ è una partizione di $I = [a,b]$ cioè

$$\bigcup_k I_k = I$$

e $I_j \cap I_k = \emptyset$ se $j \neq k$ cosicché

$$\begin{aligned}
\int_I \varphi &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)>0}}^{n} \alpha_k \cdot \ell(I_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)=0}}^{n} \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)>0}}^{n} \alpha_k \cdot \ell(I_k)
\end{aligned}$$

Poiché $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, ogni intervallo I_k tale che $\ell(I_k) > 0$ contiene infinite razionali e infiniti irrazionali. In particolare, esiste $x_k \in I_k$ con $x_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e poiché $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$ su I_k avremo

$$\varphi(x_n) \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$$

Quindi, per tutte le k, $\ell(I_k) \geq 0$ e $\alpha_k \leq 0$ da cui sostituendo nell'integrale, il valore è al massimo zero. Quindi

$$\int_I \varphi \leq 0$$

per ogni φ a scala con $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}$. Allora passando al sup otteniamo

$$s(1_{\mathbb{Q}}, I) \leq 0 \implies s(1_{\mathbb{Q}}, I) = 0$$

La dimostrazione per il fatto che $S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \ell(I)$ è simile: Abbiamo che $1_{\mathbb{Q}} \leq 1$ su I, il che implica che

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \inf\left\{\int_I \psi \mid \psi \in \mathcal{S} \wedge \psi \geq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I\right\} \leq \int_I 1 = l(I)$$

Il viceversa è come sopra: per la disuglianza inversa, supponiamo che $1_{\mathbb{Q}}$ sia a scala con $\psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$ e sia

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{I_k}$$

dove $\{I_k\}$ è ua partizione adattata a ψ come sopra. Allora

$$\int_I \psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)>0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k)$$

Allora per tutte le k abbiamo $\ell(I_k) > 0$ esiste $x'_k \in I_k$ tale che $x'_k \in \mathbb{Q}$ da cui

$$\beta_k = \psi(x'_k) \geq 1_{\mathbb{Q}}(x'_k) = 1$$

e sostituendo nell'integrale troviamo

$$\begin{aligned}\int_I \psi &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)>0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) \\ &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k)>0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \ell(I_k)\end{aligned}$$

cioè $\forall \psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$ a scala

$$\int_I \psi \geq \ell(I)$$

e passando all'infimum abbiamo

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) \geq \ell(I)$$

Teorema CNS per la Riemann integrabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ limitata su I intervallo limitato. Sono equivalenti:

1. f è Riemann integrabile su I;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala con $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon = \int_I (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) < \epsilon$$

3. Esistono successioni di funzioni a scala $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ tale che per tutte le n $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su I e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \int_I (\psi_n - \varphi_n) \to 0$$

per $n \to \infty$. Inoltre esistono

$$\lim_n \int_I \varphi_n = \lim_n \int_I \psi_n = \int_I f$$

Proof

1. (1) $\implies$ (2): sia f integrabile nel senso di Riemann. Per definizione,

$$\begin{aligned}\underline{\int_I} f &= \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \\ &= \overline{\int_I} f = \int_I f\end{aligned}$$

Per definizione di infimum e supremum (finiti) $\forall \varepsilon > 0$ esiste φ_ε a scala con $\varphi_\varepsilon \leq f$ su I tale

che
$$\int_I \varphi_\varepsilon > \underline{\int_I} f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f - \frac{\varepsilon}{2}$$
e analogamente esiste ψ_ε a scala con $\psi_\varepsilon \geq f$ su I tale che
$$\int_I \psi_\varepsilon < \overline{\int_I} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$
Da questo segue quindi
$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \left(\int_I f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_I f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Il maggiore o uguale a zero è per monotinia delle funzioni a scala

2. (2) $\implies$ (3): per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ su I e
$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$
Posto $\varepsilon = \frac{1}{n}$, per tutte le n esiste $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala con $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su I e
$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n < \frac{1}{n} \to 0$$
e quindi vale la terza proposizione.

3. (3) $\implies$ (1): Per ipotesi esiste $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ successioni di funzioni a scala tale che per ogni n $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e
$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \to 0$$
Ancora per definizione, per tutte le n abbiamo
$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I\right\} \geq \int_I \varphi_n$$
e
$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I\right\} \leq \int_I \varphi_n$$
da cui
$$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi \to 0$$
cosicché $\overline{\int_I} f$ non può che non essere uguale a $\underline{\int_I} f$ e quindi f è integrabile nel senso di Riemann. Inoltre, otteniamo che
$$0 \leq \underline{\int_I} f - \int_I \varphi_n = \int_i f - \int_I \varphi_n \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \to 0$$
e questo dimostra che esiste
$$\lim_n \int_I \varphi_n = \int_I f$$
Analogamente per l'altro caso.

Proposition Proprietà dell'integrale

Siano $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I limitato

1. Se f e g sono Riemann integrabili, allora

(a) *linearità* $\forall a, b$, $af+bg$ è Riemann-integrabile e vale

$$\int_I af+bg = a\int_I f + b\int_I g$$

(b) fg è Riemann integrabile e se $\frac{1}{g}$ è limitata su I f/g è Riemann-integrabile su I

2. se f, g sono Riemann-integrabili su I e $f \leq g$ su I allora

$$\int_I f \leq \int_I g$$

In particolare se $g \geq 0$ su I,

$$\int_I g \geq 0$$

3. *disuglianza triangolare* se f è Riemann interabile su I allora f^+ e f^- e $|f|$ sono Riemann integrabili e vale

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

4. *additività rispetto all'insieme di integrazione* Se $I = I_1 \cup I_2$ disgiunti allora f è integrabile su I se e solo se è integrabile su I_1 e su I_2 e in tal caso

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$$

Nel caso in cui $I = I_1 \cup I_2$ ma gli intervalli non sono necessariamente disgiunti allora la conclusione sull'integrabilità vale ma la (prima) viene sostituita da

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f$$

5. Se $f = g$ eccetto al più in un numero finiti di punti allora f è Riemann integrabile se e solo se g è Riemann integrabile e in tal caso

$$\int_I f = \int_I g$$

Proof

Non sono difficili da dimostrare, basta il teorema sulle condizioni necessarie sufficienti e le proprietà degli integrali delle funzioni a scala.

- Dimostriamo quella sull'addizione. Per tutte le $\varepsilon > 0$ esistono funzioni a scala $\varphi_\varepsilon^f \leq f \leq \psi_\varepsilon^f$ su I tale che

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\varphi_\varepsilon^g \leq g \leq \psi_\varepsilon^g$ su I

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^g \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g$ e $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g$ risulta che φ_ε e ψ_ε sono a scala e

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g \leq f + G \leq \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g = \psi_\varepsilon$$

e

$$\begin{aligned}0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon &< \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^g \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

e quindi $f+g$ è Riemann integrabile inoltre per ogni $\varepsilon > 0$

$$\int_I (\varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g) \leq \int_I f + g \leq \int_I (\psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g)$$

$$\int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g \leq \int_I f + \int_I g \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g$$

da cui deduciamo che

$$\int_I (f+g) - \left(\int_I f + \int_I g\right) \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \psi_\varepsilon^g - \left(\int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g\right) = \varepsilon$$

da cui concludiamo che

$$\left|\int_I (f+g) - \left(\int_I f + \int_I g\right)\right| < \varepsilon$$

per tutte le $\varepsilon > 0$.

- Dimostriamo ora che f^+ è Riemann integrabile. Siccome f, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Chiaramente, $\varphi_\varepsilon^+ \leq f^+ \leq \psi_\varepsilon^+$ e vale

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^+ - \int_I \varphi_\varepsilon^+ \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Otteniamo quindi l'integrabilità. Analogamente si verifica che f^- è Riemann integrabile.

- Poiché $|f| - f^+ - f^-$

$$\left|\int_I f\right| = \left|\int_I (f^+ - f^-)\right| = \left|\int_I f^+ - \int_I f^-\right|$$

che per disuguaglianza triangolare è minore o uguale di

$$\leq \left|\int_I f^+\right| + \left|\int_I f^-\right| = \int_I f^+ + \int_I f^- = \int (f^+ + f^-) = \int_I |f|$$

Teorema Classi di funzioni integrabili

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ con I intervallo limitato

1. se $I = [a,b]$ e f è
   (a) monotona su I;
   (b) continua su I;
   allora f è limitata su I (o perché è monotona e quindi compresa fra $f(b)$ e $f(a)$, o perché è continua su un chiuso limitato per Weierstrass) ed è integrabile su $I = [a,b]$;
2. se $I = [a,b)$ e f è limitata in I e
   (a) monotona su I;
   (b) conotinua su I;
   allora f è Riemann integrabile. (Questo punto contiene anche quello precedente).
3. se I è un intervallo limitato e f è limitata e continua eccetto che in un numero finito di punti, allora f è integrabile
4. se I è un intervallo, f è limitata su I, e l'insieme

$$B = \{x \in I \mid f \text{ non è continua in } I\}$$

ha un numero finito di punti di accumulazione, allora f è Riemann integrabile su I.

In effetti si dimostra che $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I limitato è Riemann integrabile se e solo se l'insieme B ha misura di Lebesgue nulla. Cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\{I_n\}$ successione di intervalli aperti tale che

$$B \subseteq \bigcup_n I_n \wedge \sum_n \ell(I_n) < \varepsilon$$

Proof

1. (a) Suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$. I punti x_k hanno forma $a+k\frac{b-a}{n}$ con $0 \leq k \leq n$. La partizione di $[a,b]$ è data da $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $0 < k < n$. Per ogni k siano

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

e siano per ogni n

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{I_k}$$

e

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{I_k}$$

cosicché φ_n e ψ_n sono a scala, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su $I = [a,b]$ e

$$\int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n}$$

e rispettivamente

$$\int_I \psi_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n}$$

Dal teorema CNS per l'integrabilità risulta che se

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \to 0$$

allora f è Riemann integrabile su I.
Sia f monotona in $I = [a,b]$. Senza perdita di generalità supponiamo che f sia monotona crescente (altrimenti applichiamo a $-f$ e l'opposto di una funzione integrabile è integrabile). Cosicché

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_{k-1})$$

e

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_k)$$

(qua sup e inf corrispondono a max e min siccome è monotona). Sostituendo ciò nell'equazione CNS dell'integrabilità abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \to 0 \end{aligned}$$

per $n \to \infty$.

(b) Sia f continua su $[a,b]$. Mostriamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \to 0$$

facendo vedere che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

Usiamo la definizione di limite per $n \to \infty$. Poiché f è continua su $[a,b]$ chiuso e limitato, f è uniformemente continua su $[a,b]$, e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a,b]$ con $|x - x'| < \varepsilon$ si ha che $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. In questo caso sostituiamo ε con $\frac{\varepsilon}{b-a}$. L'idea è quella di stimare $M_k - m_k$. La distanza fra i punti dove assumono il massimo M_k e il minimo m_k non può essere maggiore della lunghezza dell'intervallo. Sia allora n tale che $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Per ogni k, f è continua su $[x_{k-1}, x_k]$ chiuso e limitato, e quindi per Weierstrass $\exists x_k, x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tale che

$$M_k = \max_{[x_{k-a}, x_k]} f = f(x'_k) \qquad m_k = \min_{[x_{k-a}, x_k]} f = f(x_k)$$

cosicché

$$M_k - m_k = f(x'_k) - f(x_k) = |f(x'_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

poiché $|x'_k - x_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$. Quindi, sostituendo questo nella solita disuguaglianza otteniamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) < \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

2. (a) Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ limitata e monotona. Per monotonia, esiste

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

che è finito in quanto f è limitata. Posto $\overline{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ L & x = b \end{cases}$$

$\overline{f}$ è monotona su $[a,b]$ e quindi ivi integrabile e quindi $\overline{f} = f$ è integrabile nel sottoinsieme $[a,b)$.

(b) sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Per dimsotrare che f è integrabile su $[a,b)$, costruiamo una funziona a scala sopra e sotto. $\forall \varepsilon > 0$ costruiamo $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Osserviamo che f è continua su $[a, b-\delta]$ per tutti $\delta > 0$. Per il punto precedente f è quindi integrabile su $[a, b-\delta]$ per tutte $\delta > 0$. Ci rimane allora da considerare l'intervallo $[b-\delta, b)$. Per ipotesi f è limitata su $[a,b]$, quindi $\exists M$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per tutte le $x \in [a,b]$. Scegliamo δ tale che

$$2M\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

poiché f è integrabile su $[a, b-\delta]$, dato ε esistono funzioni a scala (che scegliamo costanti) $\varphi'_\varepsilon, \psi'_\varepsilon$ tale che $\varphi'_\varepsilon \leq f \leq \psi'_\varepsilon$ su $[a, b-\delta]$ e

$$0 \leq \int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo allora

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi'_\varepsilon & x \in [a, b-\delta] \\ -M & x \in [b-\delta, b) \end{cases}$$

e

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} \psi'_\varepsilon & x \in [a, b-\delta] \\ M & x \in [b-\delta, b) \end{cases}$$

Siccome $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ sono a scala, $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ in $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int\limits_{[a,b)} \psi_\varepsilon - \int\limits_{[a,b)} \varphi_\varepsilon &= \left(\int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) \\ &+ \left(\int\limits_{[b-\delta,b)} M - \int\limits_{[b-\delta,b)} (-M) \right) \\ &= \left(\int\limits_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int\limits_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) + 2M\delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Si deduce facilmente che se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è limitata e continua allora è Riemann integrabile (al posto che il ragionamento solo a destra lo faccio da ambo le parti) e quindi se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è limitata e continua eccetto che in $c \in (a, b)$, poiché $(a, b) = (a, c) \cup \{c\} \cup (c, b)$ e f è integrabile su ciascuno dei 3 sottointervalli f è integrabile su (a, b). In generale, con molteplici punti mancanti, si fa lo stesso procedimento isolandoli.
4. Esercizio: nell'intorno

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ limitata su I limitato e supponiamo che esista una partizione $\{I_k\}_{k=1}^n$ tale che f è o continua o monotona in ciascun I_k. Allora f è integrabile su I.

Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su (a, b). Allora, comunque essa venga estesa a $[a, b]$ rimane integrabile e l'integrale ha lo stesso valore siccome

$$\int\limits_{\{a\}} f = 0$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f$$

senza ambiguità. Osserviamo poi che dalla proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, l'integrale si può spezzare.

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su I (quindi I è limitato e f è limitata su I). Allora $\forall a, b \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\int\limits_a^b f = \begin{cases} \int\limits_{(a,b)} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int\limits_b^a f & b < a \end{cases}$$

Definizione

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di I. Fissato $a \in I$ definiamo la *funzione integrale* di f centrata in a

$$F_a(x) = \int_a^x f = \begin{cases} \int\limits_{(a,x)} f & a < x \\ 0 & a = x \\ -\int\limits_{(x,a)} & a > x \end{cases}$$

Esercizio

Scrivere la relazione fra $F_a(x)$ e $F_b(x)$ per $a \neq b$.

Lemma

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo di I e siano $a, b, c \in I$. Allora,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proof

La dimostrazione si fa a casi e ne diamo solo due. Se $a < c < b$ il risultato segue dall'additività rispetto all'insieme di integrazione. Supponiamo $a < b < c$. Allora, sempre per l'additività rispetto all'insieme di integrazione

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

da cui

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Teorema Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$ e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

la sua funzione integrale centrata in a. Allora:

1. F è Lipschiziana in $[a, b]$ (in particolare continua su $[a, b)$);
2. Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F è derivabile in x_0 e vale

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

3. Se f è continua in $[a, b]$ allora F è una primitiva di f in $[a, b]$;
4. Se f è continua in $[a, b]$ e G è una sua primitiva (che per il punto precedente esiste, quindi qua stiamo dimostrando che se è continua esiste la primitiva) allora $\forall x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = G(x) - G(a)$$

e in particolare

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

Proof

1. per ipotesi f è integrabile su $[a,b]$ e quindi in particolare è limitata, cioè $\exists M$ tale che $|f(t)| \leq M$ per tutte le $t \in [a,b]$. Dati $x, x' \in [a,b]$, supponendo senza perdere la generalità che $x < x'$ (il modulo nella definizione di Lipschiziana ce lo permette), abbiamo

$$\begin{aligned}
|F(x') - F(x)| &= \left| \int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_{[x,x']} f(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_{[x,x']} f(t)\,dt \\
&\leq M \cdot \int_{[x,x']} 1\,dt = M(x'-x) = M|x'-x|
\end{aligned}$$

2. Sia f continua in $x_0 \in [a,b]$. Mostriamo che F è derivabile in x_0 con $F'(x_0) = f(x_0)$ cioè che

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \to f(x_0)$$

per $h \to 0$ cioè che

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \to 0$$

per $h \to 0$. Possiamo scrivere $\forall h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right) - f(x_0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - hf(x_0) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\,dt \right|
\end{aligned}$$

Se $h > 0$ (la disuglianza triangolare vale quando l'estremo superiore è maggiore a quello inferiore), allora

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\, dt \right| \leq \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

Per ipotesi, f è continua in x_0 quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vale

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Quindi se $0 < h < \delta$, per tutte le $t \in [x_0, x_0 + h]$

$$|t - x_0| < \delta$$

e sostituendo e usando la monotonia dell'integrale ottemiamo

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\, dt \right| \leq \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \\ &< \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon = \frac{1}{h} h\varepsilon = \varepsilon, \quad \forall 0 < h < \delta\end{aligned}$$

Per definizione

$$\lim_{h \to 0^+} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = 0$$

cioè $D_+F(x_0) = f(x_0)$.
Se invece $h < 0$ vale ancora

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\, dt \right|$$

Per usare la disuglianza triangolare dobbiamo invertire il segno

$$\left| \frac{1}{-h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\, dt \right| = -\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

Come prima, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $-\delta < h < 0$. Quindi,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt &\leq -\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt \\ &= -\frac{1}{h}(-h\varepsilon) = \varepsilon\end{aligned}$$

Quindi $D_-F(x_0) = f(x_0)$.

3. Se f è continua in $x_0\, \forall x_0$ allora per il punto 2 F è derivabile in x_0 con $F'(x_0) = f(x_0)$. $\forall x_0 \in [a, b]$ e F è una primitiva di f.
4. Sia G una primitiva di f. Per il punto 3,

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\, dt$$

è una primitiva. Quindi per il teorema di caratterizzazione delle primitive esiste C tale che $G(x) = F(x) + C$ per tutte le $x \in [a, b]$. Possiamo dire qualcosa della funzione integrale solo per $x = a$

$$G(a) = F(x) + C = C = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Quindi $C = G(a)$ e si ottiene $G(x) = F(x) + G(a)$ cioè

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Corollario

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile nel senso di Riemann su ogni sottointervallo limitato. Fissati $ainI$ sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora,

1. F è Lipschitziana su ogni sottointervallo limitato che contiene a (non possiamo dire che sia Lipschitziana su tutto). Infati se $a \in [\alpha, \beta] \subseteq I$ applichiamo il punto 1 del teorema a tale intervallo. In particolare, F è continua su tutto I, in quanto Lipschitziana su tutti i sottointervalli;
2. Se f è continua in $x_0 \in I$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$;
3. se f è continua in I, F è una primitiva di f in I;
4. se G è una primtiiva di f in I, $\forall x \in I$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Corollario Formula di derivazione delle funzioni integrali

Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di J e siano $\alpha, \beta\colon I \to J$ continue. Definiamo

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\,dy$$

che è ben posto. Allora:

1. H è continua su I.
2. Se f è continua su J e α, β sono derivabili in I, H è derivabile in I e vale

$$H'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Proof

Scelto $y_0 \in J$, possiamo scrivere, $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\,dy &= \int_{\alpha(x)}^{y_0} f(y)\,dy + \int_{y_0}^{\beta(x)} f(y)\,dy \\ &= F(\beta(x)) - F(\alpha(x)) \end{aligned}$$

dove

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,dt$$

è la funzione integrale di f centrata in y_0.

1. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, F è continua su J e quindi H è continua come composizione di funzioni continue.
2. Se f è continua in J, F è derivabile in J con $F'(y) = f(y)$ e se inoltre α, β sono derivabili dal teormea di derivazione delle funzioni composte, H è derivabile e

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \end{aligned}$$