Algebra I

Paolo Bettelini

Contents

1 Esercizi

1.1 Limiti

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x\ln(1+x)+3x}{\sin(x)+3x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-\ln(1+x)+3)}{x(\frac{\sin x}{x}+3x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{0-0+3}{1+0} = 3\end{aligned}$$

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\left(e^{x^2}-1\right)}{(1-\cos(x))[\ln(1+\sqrt{x})]^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x(1+o(1))x^2(1+o(1))}{\frac{x^2}{2}(1+o(1))\sqrt{x}(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4(1+2o(1)+o^2(1))}{1+o^2(1)+3o(1)+o^3(1)} = 4\end{aligned}$$

Esercizio

Considera $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[e^{-x^n}-1+\ln\left(\cos(x^n)\right)\right] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1))+\ln\left(1+\cos(x^n)-1\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1))+\ln\left(1-\frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}\left[-x^n(1+o(1))-\frac{x^{2n}}{2}(1+o(1))\right] \\ &= \lim_{x\to 0^+}-\frac{2}{x^2}\left[x^n\left(1+\frac{x^n}{2}\right)(1+o(1))\right]\end{aligned}$$

Nel caso $n > 0$ abbiamo

$$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ -2 & n = 2 \\ -\infty & 0 < m < 2 \end{cases}$$

Nel caso $n = 0$ il limite è $-\infty$, mentre se $n < 0$ il limite non è ben definito.

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \ln(\cos x + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{1 - e^{-x^2}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} ln(1 + \cos x - 1 + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) + x^2\right)}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin(2x))^{\frac{1}{\ln\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indecisione 1^∞. Facciamo un cambio di variabile $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\sin\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\ln\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)}} &= \lim_{t \to 0} \exp\left\{\frac{1}{\ln(1 - \sin t)} \cdot \ln(\cos(2t))\right\} \\ &= \lim_{t \to 0} \exp\left\{\frac{\ln(1 + \cos(2t) - 1)}{\ln(1 - \sin t)}\right\} \\ &= \lim_{t \to 0} \exp\left\{\frac{\ln(1 - 2t^2)}{1 - t}\right\} \\ &= \lim_{t \to 0} \exp\left\{\frac{-2t}{t}\right\} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

1.2 Continuità

Esercizio

Studia la continuità di

$$f(x) = (\ln |x|)^{-1}$$