

Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1	Assiomi di Peano	2
2	Principio di induzione	3
3	Combinatoria	4
4	Funzione indicatrice	6
5	Altre proprietà	6
6	Interi relativi	7
7	Definizioni con ordini	9
7.1	Considerazioni	9
7.2	Estremi superiori e inferiori	10
7.3	Conseguenze della proprietà del sup	12
7.4	Esercizi sup	13
8	Esponenziali	16
8.1	Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi	16
8.2	Potenze a esponente reale	16
8.3	Esponenziali	17
8.4	Assioma di continuità	17
9	Numeri complessi	19
9.1	Inclusione dei reali	19
9.2	Operazioni algebriche	19
9.3	Passaggio polari e cartesiane	20
9.4	De Moivre	20
10	Distanza fra due insiemi	20
11	Teorema di Ruffini	21
12	Spazi metrici	22
13	Spazi topologici	22
14	Successioni	23
14.1	Aritmetica dei limiti	25
14.2	Limiti notevoli	28

1 Assiomi di Peano

Definizione Assiomi di Peano

Gli *assiomi di Peano* includono i numeri naturali:

- il valore 1 è un numero;
- ogni numero n ha il suo successore $S(n) = n + 1$;
- se $m \neq n$, allora $S(m) \neq S(n)$;
- il numero 1 non è il successore di alcun numero;
- **assioma induttivo:** sia $E \subseteq \mathbb{N}$ tale che $1 \in E$, allora

$$n \in E \implies S(n) \in E$$

Allora l'insieme E è l'insieme \mathbb{N} .

La funzione successore è iniettiva.

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma induttivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Principio di induzione

Teorema Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$, allora

$$P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

Teorema Equivalenza principio e assioma di induzione

L'assioma induttivo è equivalente al principio di induzione.

Proof Equivalenza assioma e principio di induzione

Given a proposition $P(n)$, let

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

(\implies) If $0 \in E$, then $P(0)$ is true.

If $n \in E \implies S(n) \in E$, then $P(n) \implies P(S(n))$.

If the latter conditions are satisfied, then by the axiom of induction, $E = \mathbb{N}$, and thus

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

(\impliedby) If $P(0)$ is true, then $0 \in E$.

If $P(n) \implies P(S(n))$, then if $n \in E \implies S(n) \in E$.

If the latter conditions are satisfied, then by the principle of induction

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in E$$

and thus $E = \mathbb{N}$.

Proposition Principio di induzione forte

Il principio di induzione è equivalente alla seguente forma: sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$ tale che

- $P(1)$ è vera;
- $P(k)$ è vera per tutte le $k \leq n$, allora $P(n+1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per tutte le n .

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, la somma

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Il caso base è dato da $n = 1$ dove $1 = \frac{2}{2} = 1$.
- Il caso induttivo è dato da $\xi = n + 1$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + \xi &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{aligned}$$

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

e impostiamo $j = n - k + 1$, abbiamo che la sommatoria è pari a

$$\sum_{j=1}^n a_{n-j+1}$$

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esempio Principio di induzione

Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $h > -1$,

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

3 Combinatoria

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1 , che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n+1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n+1) = (n+1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazioni di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f: F_k \rightarrow F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X .

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

4 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F , abbiamo $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f: x \rightarrow y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y .

La funzione $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ è biettiva. La funzione $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

5 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

6 Interi relativi

In \mathbb{N} è definita la funzione $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dove $(m, n) \rightarrow m + n$.

Abbiamo chiaramente che $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo \mathbb{Z} come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

Definizione Gruppo

Un insieme G con un operazione binaria \circ tale che

- **associativa:** $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- **elemento neutro:** $\forall a \in A, \exists 0 \in G \mid 0 \circ a = a \circ 0 = a$
- **elemento opposto:** $\forall a \in G, \exists a' \mid a + a' = a' + a = 0$

Se aggiungiamo la commutatività viene detto *gruppo abeliano*.

Per esempio $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano.

La struttura algebrica (\mathbb{Z}, \circ) dove $(a, b) \rightarrow a \cdot b$ non è un gruppo abeliano, in quanto non c'è un inverso n^{-1} (c'è solamente per 1 e -1). La divisione si può fare solo se uno è un multiplo dell'altro.

TODO: definizione di anello

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali \mathbb{Q} con le operazioni $+$ e \cdot introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, (\mathbb{Q}^*, \cdot) è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e \cdot con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in \mathbb{Q} si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di \mathbb{Q} ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In \mathbb{Q} è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni $+$ e \cdot , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in \mathbb{Q} sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in \mathbb{Q} .

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciò ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

7 Definizioni con ordini

Definizione Insieme totalmente ordinato

Un *insieme ordinato* è una tupla (X, \leq) dove X è un insieme e \leq è un ordinamento totale.

Sia anche $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato*.

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.

Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

7.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E . Vi sono diversi minoranti di E , come $-1, -30$ etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E . I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quanto se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n , è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 0$. Qualunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

7.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di \mathbb{Q} che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in \mathbb{Q} sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di μ . Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che \inf, \sup, \min, \max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E , allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In \mathbb{Q} (e poi in \mathbb{R}), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

Definizione Numeri reali

Definiamo \mathbb{R} come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

Teorema Teorema di unicità

Siano F_1 e F_2 due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ tale che è un isomorfismo del gruppo additivo $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$ per ogni $x, y \in F_1$ e $\phi(-x) = -\phi(x)$ per ogni $x \in F_1$. Se aggiungiamo anche che $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$ per tutte le $x, y \in F_1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali \mathbb{Q} . Chiaramente, diversi campi generano \mathbb{Q} diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire $\phi_0: \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \rightarrow \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$. Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato $x \in F_1$, abbiamo $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$. Allora $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$. Così viene esteso ϕ a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \dots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Con la prescrizione che $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \bar{9} = n, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k + 1)$.

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

Definizione di somma e prodotto: Prendiamo $x = n, a_1, \dots, a_k \dots$ e $y = m, b_1, \dots, b_k \dots$ che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di \mathbb{R} soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Per ogni $x \in E$ scriveremo $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \dots$. E è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in \mathbb{Z} limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$ Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$. Con lo stesso metodo troviamo a_3, a_4, \dots , ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \dots$$

Dico che μ è un maggiorante di E , e che se $z < \mu$, z non è maggiorante. Sia allora $\bar{x} \in E$, quindi

$$\bar{x} = n_{\bar{x}}, a(\bar{x})_1, a(\bar{x})_2, \dots$$

Allora $n_{\bar{x}} \leq N$ se $n_{\bar{x}} < N$. $\bar{x} < \mu$. Gli elementi in E_0 sono al massimo a_1 . Se $n_{\bar{x}} = N$ e $n_{\bar{x}} \in E_0$ e $a_1(\bar{x}) = a_1$.

Se $a(\bar{x})_1 < a_1 \implies \bar{x} < \mu$.

Se invece $a(\bar{x})_1 = a_1 \implies \bar{x} \in E_1$ e $a(\bar{x})_2 \leq a_2$

Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se $\exists k$ tale che $a(\bar{x})_k < a_k \implies \bar{x} < \mu$. Se $\forall k, a(\bar{x})_k = a_k$, allora $\bar{x} = \mu$ e μ è il max di E . Questo procedimento non dimostra che $\mu \in E$.

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \dots < \mu$$

Deve quindi succedere che o $n_z < N$, e allora $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$, oppure $n_z = N$ e $a(z)_j = a_j$ per tutte le $j < k$ ma $a(z)_k < a_k$. Allora $\mu = \sup E$.

7.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeas:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$ (in realtà vale anche in \mathbb{Q}).
- **densità dei razionali nei reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E . Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \rightarrow t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E , contro l'ipotesi impossibile perché x , che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x , e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere né più grande né più piccolo, $x^n = y$.

- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

7.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova \inf , \sup , \min , \max (se esistono) di E , F , $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare \sup e \inf , è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine $n+2$ cresce con n , quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approssimando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$.

Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In \sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il \max non esiste in quanto $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.

- Posto $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di \sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:

1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
2. $\forall \epsilon > 0, \mu - \epsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\epsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \epsilon$. Allora sia $\epsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \epsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\epsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2} + \sup F - \frac{\epsilon}{2} = \sup E + \sup F - \epsilon$.

- Posto $-E = \{-x \mid x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il \max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E . Analogamente per il \min .

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il massimo è quindi x_{14} .

8 Esponenziali

8.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

8.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

8.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x , $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra \mathbb{R} e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g. $\ln(x(x-1))$ non si può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

8.4 Assioma di continuità

$$\bigcup_{n \neq 2} \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$$

Assioma Assioma di Dedekind

Se $\{I_n\}$ è una successione di intervalli chiusi della forma $I_n = [a_n; b_n]$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ e

$$l(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} l(I_n)$$

e quindi

$$l(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}} l(I_1)$$

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

Questo assioma non vale nei razionali.

Teorema Assioma di Dedekind equivalenza assioma di completezza

L'assioma di Dedekind è equivalente all'assioma della completezza.

Proof Assioma di continuità equivalenza assioma di Dedekind

(\Rightarrow) Sia E un insieme non vuoto e limitato superiormente, dimostriamo che esiste $c = \sup E$. Poiché E è limitato superiormente esiste un b_1 maggiorante di E dove $b_1 \geq e, \forall e \in E$. Poiché E è non vuoto esiste $\bar{e} \in E$ e poniamo $a_1 = \bar{e} - 1$ cosicché $a_1 < \bar{e}$ e a_1 non è maggiorante. Sia $I_1 = [a_1, b_1]$ e sia $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, allora vi sono due casi:

- m_1 è un maggiorante e allora poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$;
- m_1 non è un maggiorante e allora poniamo $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$.

Sia $I_2 = [a_2, b_2]$. Iteriamo allora il procedimento otteniamo una successione di intervalli

$$I_n = [a_n, b_n]$$

tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n)$. Per ogni n , a_n non è maggiorante di E , b_n è maggiorante di E . Per l'assioma di continuità $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

La nostra tesi è quindi $c = \sup E$. Supponiamo quindi per assurdo che non sia un maggiorante, allora che esiste un elemento $e \in E$ dove $e > c$. Per definizione c è in almeno un I_n quindi $a_n \leq c \leq b_n$ e poiché $e > c$ abbiamo $a_1 \leq c < e \leq b_n$ perché $e \in E$ e b_n è maggiorante di E per ogni n . Quindi

$$[c, e] \subseteq [a_n, b_n]$$

e allora

$$[c, e] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

che è quindi una contraddizione. Dobbiamo ora mostrare che c è il più piccolo dei maggioranti. Supponiamo quindi per assurdo che ci sia un altro maggiorante $x < c$. Poiché $b_n \geq c$ per ogni n abbiamo che $x < c \leq b_n$. Per ipotesi, x è maggiorante di E mentre a_n non è maggiorante di E per ogni n . Quindi per tutte le n esiste un elemento e_n tale che

$$a_n < e_n \leq x < c \leq b_n$$

e quindi si deduce che l'intervallo $[x, c] \subseteq [a_n, b_n] = I_n$ da cui

$$[c, e] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

che quindi è assurdo.

(\Leftarrow) TODO (in the future)

9 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in \mathbb{R} , $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in \mathbb{R} . Estendiamo il campo \mathbb{R} costruendo un campo \mathbb{C} che contiene una immagine isomorfa di \mathbb{R} nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in \mathbb{R} ;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare \mathbb{C} come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

9.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

9.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \quad \dots$$

Dato $z = a + bi$, diciamo che $\Re(z) = a$ e $\Im(z) = b$.

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\bar{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \bar{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z ,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\bar{w}\bar{z} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

9.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e il punto polare (r, θ) abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

9.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k$$

10 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

11 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha molteplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

12 Spazi metrici

Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se tutti i punti sono interni in A .

13 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

(\Rightarrow) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dove x_1, x_2, \dots, x_n sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0 . Chiaramente, esiste un $0 < \epsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ϵ esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

(\Leftarrow) Trivial.

14 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che $M = \max x_n$ se $\forall n x_n < M$ e $\exists n' \mid x_{n'} = M$. Analogamente il min.

Definiamo inoltre $\sup_n x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$ Analogamente per l'inf.

Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà P , una successione $\{x_n\}$ soddisfa la proprietà P definitivamente se $\exists N \mid \forall n, P(n) \geq N$.

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore è maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \rightarrow l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorno diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi $x_n \rightarrow \xi$ se per ogni intorno I esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$.

Lemma

Se λ e $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ and $\lambda \neq \mu$ allora esistono intorno I di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Proof

Siano per esempio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda < \mu$. $\forall r \leq \frac{\mu - \lambda}{2}$ gli intorno $I = (\lambda - r, \lambda + r)$ e $J = (\mu - r, \mu + r)$ sono disgiunti.

Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $x_n \rightarrow \mu$ allora $\lambda = \mu$. Infatti supponiamo che $\lambda \neq \mu$ per il lemma $\exists I$ intorno di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$. Per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ quindi $\exists M_1$ tale che $x_n \in I \forall n \geq N_1$. $x_n \rightarrow \mu$ quindi $\exists M_2$ tale che $x_n \in J \forall n \geq N_2$. Quindi se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in I \cap J = \emptyset$ ∇ .
2. Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $\{x_n\}$ è limitato cioè esiste $m \leq M$ tale che $m \leq x_n \leq M$ per tutte le n . Infatti, per ipotesi $x_n \rightarrow l$ quindi usando $1 = \varepsilon$ nella definizione, risulta che $\exists N \mid l - 1 < x_n < l + 1$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte, per ogni $n = 1, \dots, N - 1$ abbiamo che

$$A = \min\{x_1, \dots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}\} = B$$

che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che $m = \min\{l - 1, A\} \leq x_n \leq \max\{l + 1, B\} = M$

3. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N \mid \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorno I di λ e J di μ tale che

$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

•

$$x_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$

•

$$y_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y_n \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Infatti, $x_n \rightarrow 0$ se e solo se $|x_n| \rightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

poniamo $y_0 = 0, \forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.

In particolare, se $y_n \rightarrow \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni):** Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \rightarrow l$ e $z_n \rightarrow l$. Allora, $y_n \rightarrow l$.
Se $x_n \rightarrow +\infty$ e $z_n \rightarrow +\infty$, allora $y_n \rightarrow +\infty$.
Se $x_n \rightarrow -\infty$ e $z_n \rightarrow -\infty$, allora $y_n \rightarrow -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \rightarrow 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq M$, allora $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$. Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \mid a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2. $\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M, \forall n$

14.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \rightarrow \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \rightarrow \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leq |x_n - \lambda| + |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$.

Dimostriamo ora che se $x_n \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \rightarrow +\infty$. Ricordiamo che se $y_n \rightarrow \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.

Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n . $x_n \rightarrow +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.

Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + K) - K = M$ (alla peggio tolgo un K).

Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \rightarrow +\infty$ e $y_n \rightarrow -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \rightarrow +\infty \\ y_n = -n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \rightarrow c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \rightarrow l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualunque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positivo. Allora $x_n \rightarrow l$ infatti basta applicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \rightarrow \lambda$, $y_n \rightarrow \mu$ allora $x_n \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot \mu$ dove $\lambda \mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \rightarrow \mu$ fissato $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda \mu| &= |x_n y_n - x_n \mu + x_n \mu - \lambda \mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |\mu| |x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \rightarrow \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \rightarrow \lambda \mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^\pm$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significativa forma di indecisione, al contrario del

denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1 + \frac{\sin n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin n}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m} + \frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \mid \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
 - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
 - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid x_N > \xi - \varepsilon$
 e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

$$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \mid x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonìa

$$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

e per definizione, $x_n \rightarrow +\infty = \sup x_n$.

Corollario Proprietà del sup implica assioma di continuità

Sia $I_n = [a_n, b_n]$ una successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$

e la lunghezza $l(I_n) \rightarrow 0$ (come nel caso $= \frac{1}{2}l$). Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

Poiché $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ si deduce che $a_{n+1} \geq a_n$ e $b_{n+1} \leq b_n$ per ogni n . Quindi:

- la successione a_n è crescente e limitata superiormente, per cui $a_n \rightarrow c^-$;
- la successione b_n è decrescente e limitata inferiormente, per cui $b_n \rightarrow c^+$;

In particolare, $\forall n, a_n \leq c \wedge b_n \geq c$. Tuttavia, $b_n = a_n + (b_n - a_n) \rightarrow c$, e per unicità del limite $c = c_1$. Allora abbiamo $\forall n, a_n \leq c \leq b_n$, che implica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq \{c\}$$

e poiché $b_n - a_n \rightarrow 0$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

14.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \rightarrow A$ e $b_n \rightarrow B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \rightarrow A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \rightarrow 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1 + h) \implies A^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \rightarrow +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $(\frac{1}{A})^n \rightarrow +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \rightarrow A \geq 0$, $b_n \rightarrow B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0 .

Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.

Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).

Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \rightarrow B$, allora

$$\log b_n \rightarrow \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \rightarrow 0$$

(in particolare con α)

2. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \rightarrow 0^+$$

3. $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

4. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \rightarrow 0$$

5. $\forall A > 1$,

$$\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0^+$$

6.

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \rightarrow 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 0$$