

# Algebra I

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Esercizi</b>	<b>1</b>
1.1	Limiti	1
1.2	Continuità	3
1.3	Integrali	4

## 1 Esercizi

### 1.1 Limiti

#### Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \ln(1+x) + 3x}{\sin(x) + 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \ln(1+x) + 3)}{x(\frac{\sin x}{x} + 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0 + 3}{1 + 0} = 3\end{aligned}$$

#### Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) (e^{x^2} - 1)}{(1 - \cos(x)) [\ln(1 + \sqrt{x})]^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 + o(1))x^2(1 + o(1))}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))\sqrt{x}(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 + 2o(1) + o^2(1))}{1 + o^2(1) + 3o(1) + o^3(1)} = 4\end{aligned}$$

#### Esercizio

Considera  $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \left[ e^{-x^n} - 1 + \ln(\cos(x^n)) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} [-x^n(1 + o(1)) + \ln(1 + \cos(x^n) - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \left[ -x^n(1 + o(1)) + \ln \left( 1 - \frac{x^{2n}}{2}(1 + o(1)) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \left[ -x^n(1 + o(1)) - \frac{x^{2n}}{2}(1 + o(1)) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{x^2} \left[ x^n \left( 1 + \frac{x^n}{2} \right) (1 + o(1)) \right]\end{aligned}$$

Nel caso  $n > 0$  abbiamo

$$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ -2 & n = 2 \\ -\infty & 0 < m < 2 \end{cases}$$

Nel caso  $n = 0$  il limite è  $-\infty$ , mentre se  $n < 0$  il limite non è ben definito.

### Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{1 - e^{-x^2}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indeterminazione  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \cos x - 1 + x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) + x^2\right)}{\frac{x^2}{2}(1 + o(1))} = 1$$

### Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin(2x))^{\frac{1}{\ln(1 + \cos(x + \frac{\pi}{4}))}}$$

Sostituendo troviamo la forma di indecisione  $1^\infty$ . Facciamo un cambio di variabile  $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) \right)^{\frac{1}{\ln(1 + \cos(x + \frac{\pi}{4}))}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{\ln(1 - \sin t)} \cdot \ln(\cos(2t)) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{\ln(1 + \cos(2t) - 1)}{\ln(1 - \sin t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{\ln(1 - 2t^2)}{1 - t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{-2t}{t} \right\} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

## 1.2 Continuità

### Esercizio

Studia la continuità di

$$f(x) = (\ln |x|)^{-1}$$

## 1.3 Integrali

### Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$$

Allora sostituiamo  $t = e^x$  quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{t} \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt \\ &= \log |t| - \log |t+1| + C \\ &= \log \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) + C\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx$$

Allora abbiamo

$$\int \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^2 + 2e^x + 5} dx$$

Sostituiamo  $t = e^x$  e otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{e^x + 1}{2} \right\}\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

Cominciamo sostituendo  $t = x^{-\frac{1}{2}}$  e proseguiamo per parti

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{3}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx &= \int t^3 \arctan(t) (-2t^{-3}) dt \\ &= -2 \int \arctan(t) \cdot 1 dt \\ &= -2 \left[ t \arctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2} dt \right] \\ &= -2t \arctan(t) + \int \frac{2t}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

Sostituiamo  $v = 1 + t^2$

$$\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \int \frac{dv}{v} = \log(1+t^2) + C$$

Allora il risultato è

$$-2x^{-\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log(1+x^{-1}) + C$$

### Esercizio

$$\begin{aligned}\int \log(x^2 + 4) dx &= x \log(x^2 + 4) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx \\ &= x \log(x^2 + 4) - 2 \int 1 - \frac{4}{x^2 + 4} dx \\ &= x \log(x^2 + 4) - 2x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

### Esercizio

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$$

Sostituiamo  $x + 1 = t^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{2t}{t \cdot (t^2 - 1)} dt \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} \\ &= \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \log|t-1| - \log|t+1| + C \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C\end{aligned}$$

### Esercizio

Procediamo per parti

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) dx &= 2x^{\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}{1+x^{-1}} dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \arctan(x^{-\frac{1}{2}}) + \log|1+x| + C\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

Sostituiamo  $t = \sqrt{x}$  e poi procediamo per parti

$$2 \int \arcsin(t) dt = t \arcsin(t) - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Sostituiamo ora  $v = 1 - t^2$

$$t \arcsin(t) + \int v^{-\frac{1}{2}} dv = \sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + C$$

### Esercizio

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + 3e^x + 2}$$

Sostituiamo  $t = e^x$

$$\int \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

### Esercizio

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Sostituiamo  $t = x + 1$ .

### Esercizio

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} dx$$

Sostituiamo  $t = e^x$ .