Precorso

Paolo Bettelini

Contents

1 Connettori logici

Definizione Proposizione

Una *proposizione* è un'espressione che può essere vera o falsa.

Definizione Connettore logico e

Date due proposizioni P e Q, $P \wedge Q$, è un'altra proposizione vera solamente se P è vera e Q è vera.

$\wedge$	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	falso
vero	falso	falso
vero	vero	vero

Definizione Connettore logico oppure

Date due proposizioni P e Q, $P \vee Q$, è un'altra proposizione vera se P è vera oppure Q è vera (o entrambe sono vere).

$\vee$	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	vero
vero	falso	vero
vero	vero	vero

2 Teoria ingenua degli insiemi

Definizione Insieme ingenuo

Un *insieme* è una collezione di oggetti di qualunque tipo, detti *elementi dell'insieme*. Diciamo che un elemento a appartiene ad un insieme A con $a \in A$, mentre $a \notin A$ se non appartiene.

Esempio Insieme

$$A = \{3, 5, -3, \sqrt{5}, \phi\}$$

dove ϕ è una funzione.

È importante notare che l'ordine degli elementi non ha importanza. Un insieme può contenere tra i suoi elementi anche altri insiemi.

Un insieme viene spesso descritto per mezzo di una proprietà comune dei suoi elementi, piuttosto che per elencazione estensiva.

Esempio Insieme costruito per proprietà

$$D = \{n \,|\, n = m^2 - 1, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

In generale, può essere difficile determinare se un elemento appartiene ad un certo insieme o meno. Per esempio, non è sempre facile determinanre se un grande numero appartiene all'insieme di tutit i numeri primi. In alcuni casi, è difficile addirittura stabilire se un insieme contenga elementi, o quanti ne contenga. Tuttavia, questo difficoltà non implica che l'insieme non sia ben definito.

Definizione Sottoinsieme

Dati due insiemi A e B, diciamo che A è un *sottoinsieme* di B, se ogni elemento di A è un elemento di B.

$$A \subseteq B \iff B \supseteq A \iff \forall a \in A, a \in B$$

In caso contrario, diciamo che $A \nsubseteq B$ oppure $B \nsupseteq A$

Esempio Sottoinsieme

$$\{1, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \{\text{ insieme dei numeri dispari }\}$$
$$\{1, 3, 5, 8, 11\} \nsubseteq \{\text{ insieme dei numeri dispari }\}$$

Definizione Sottoinsieme proprio o stretto

Dati due insiemi A e B, diciamo che A è un *sottoinsieme proprio* di B, se ogni elemento di A è un elemento di B ma $A \neq B$.

$$A \subset B \iff B \supset A \iff \forall a \in A, a \in B \land A \neq B$$

In caso contrario, diciamo che $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

Esempio Sottoinsieme proprio

$$\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 4, 5\}$$

Alcuni insiemi convenzionali sono:

- **Insieme dei numeri naturali:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$;
- **Insieme dei numeri interi:** $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$;
- **Insieme dei numeri razionali:** $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z} \land n \neq 0\}$;
- **Insieme dei numeri reali:** $\mathbb{R}$;
- **Insieme dei numeri complessi:** $\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$;

2.1 Operazioni tra insiemi

Definizione Intersezione

Dati degli insiemi A e B, l'*intersezione* di A e B è data da gli insiemi che stanno sia in A che in B

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \land b \in B\}$$

Definizione Unione

Dati degli insiemi A e B, l'*unione* di A e B è data da gli insiemi che stanno o in A o in B

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \lor b \in B\}$$

Definizione Differenza

Dati degli insiemi A e B, la *differenza* di A e B è data da gli insiemi che stanno in A ma non in B

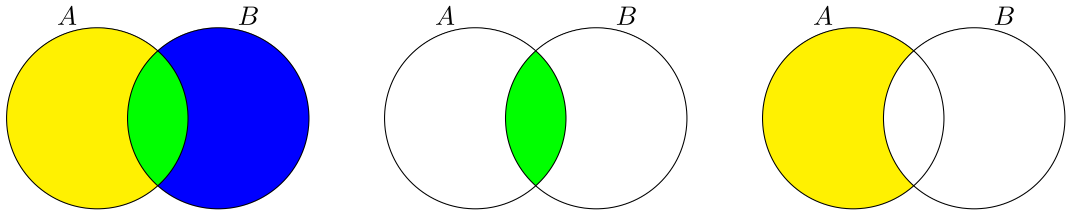
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge b \notin B\}$$

Esempio Intersezione

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{\text{ insieme dei numeri primi }\} = \{1, 9\}$$

$$\{\text{ insieme dei numeri primi }\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{\text{ insieme dei numeri primi } > 13\}$$

Nota che, convenzionalmente, nella definizione dei numeri primi il numero 1 è escluso.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B$

Il disegno suggerisce la seguente proposizione

Proposition

Dati due insiemi A e B

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

Si può dimostrare separatamente che ogni elemento del primo insieme appartiene al secondo e viceversa. Prendiamo quindi $x \in A$, bisogna mostrare che $x \in A \setminus B$ oppure $x \in A \cap B$, siccome si tratta di una intersezione fra due insiemi. Abbiamo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni deve essere vera:

1. $x \in A \wedge x \notin B$
2. $x \in A \wedge x \in B$

Se $x \in B$, allora $x \in A \cap B$. Se $x \notin B$, allora $x \in A \setminus B$ Di conseguenza, almeno una delle due è vera.

Viceversa, sia $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Abbimo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni è vera

1. $x \in A \wedge x \notin B$ quind $x \in A \setminus B$
2. $x \in A \wedge x \in B$ quindi $x \in A \cap B$

Se la prima è vera, entrambi $x \in A$ e $x \notin B$ sono vere (in particolare, $x \in A$ è vera). Se la seconda è vera, entrambe $x \in A$ e $x \in B$ sono vere (in particolare, $x \in A$ è vera). In ogni caso, $x \in A$ è vera.

2.2 Proprietà delle operazioni fra insiemi

Proposition

Dati tre insiemi A, B e C

- **Intersezione commutativa:** $A \cap B = B \cap A$
- **Unione commutativa:** $A \cup B = B \cup A$
- **Intersezione associative:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Unione associative:** $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cup C)$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Di conseguenza, $A \cap B \cap C$ e $A \cup B \cup C$ non sono ambigue.

Data una famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ dove I è un insieme di indici, è possibile eseguire l'unione e intersezioni

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

e

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

ossia rispettivamente l'insieme che contiene tutti gli elementi di tutti gli insiemi A_i e quello che tutti gli insiemi A_i hanno in comune.

Proposition

Dati due insiemi A e B

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Chiaramente, nessun elemento soddisfa la condizione data, in quando un elemento dovrebbe sia appartenente ad A e non appartenente ad A, e sia appartenente a B che non appartenente a B.

Definizione Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle coppie ordinate

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Esempio Prodotto cartesiano

Dati $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ abbiamo

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Questa operazione non è commutativa, in quando le coppie ordinate di $A \times B$ e $B \times A$ hanno le coppie di elementi scambiate.

Definizione Prodotto cartesiano generalizzato

Dati degli insiemi A_1, A_2, $\cdots$, A_n, il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle n-uple

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \cdots a_n \in A_n\}$$

Chiaramente, per ogni insieme A, $A \times \emptyset = \emptyset$

2.3 Corrispondenze e funzioni

Definizione Corrispondenza

Dati due insiemi A e B, una *corrispondenza* $\sim$ fra A e B è una legge che lega gli elementi di A e B

$$\sim \subseteq A \times B$$

Diciamo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ se la tupla (a, b) è in $\sim$.

Definizione Operatore divisione

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, possiamo mettere in relazione m e n, dicendo che m divide n, scrivendo $m \mid n$.

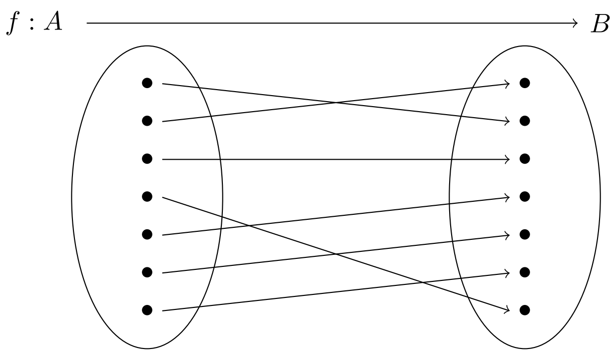
La divisione fra interi induce una corrispondenza $\sim \subseteq \mathbb{N}^2$ dove $x \sim y \iff x \mid y$. Alcuni elementi di questa corrispondenza sono $(1, 2), (1, 100), (2, 50), (50, 250)$. Possiamo anche scrivere $50 \sim 250$ oppure $50 \nsim 251$.

Definizione Funzione

Dati due insiemi A e B, una *funzione* ϕ da A a B, scritta $\phi \colon A \to B$ è una corrispondenza da A a B in cui per ogni tupla (a, b), non vi sono altre tuple (a, c) dove $c \neq a$, e per ogni $a \in A$ vi è una corrispondenza (a, b).

$$\phi \subset A \times B$$

L'insieme A è detto *domanio*, mentre l'insieme B è detto *codominio*.



Ogni funzione deve avere una (sola) freccia che parte da ogni punto.

In parole povere ciò significa che una funziona deve associare ogni elemento di A ad un elemento di B, ma solo ed unicamente uno. Elementi di A diversi possono essere in relazione con lo stesso elemento di B.

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{Z}$ data da $a \sim b \iff b^2 = a$ è una funzione.

$$\phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

La corrispondenza opposta $a \sim b \iff a^2 = b$ non è una funzione perché non tutti gli elementi hanno una corrispondenza.

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{R}$ a $B = \mathbb{R}^+$ data da $a \sim b \iff a = b^2$ è una funzione, ma non l'inverso.

$$\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{R}^+$ a $B = \mathbb{R}^+$ data da $a \sim b \iff a = b^2$ è una funzione, e pure il suo inverso da B ad A.

$$\phi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

Definizione Funzione identica

Dato un insieme A, una funzione

$$\phi \colon A \to A$$

è detta *identica* I_A, se ogni elemento viene relazionato con sè stesso.

Definizione Suriettività

Una funzione $f \colon A \to B$ è detta *suriettiva* se per ogni elemento $b \in B$, esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Definizione Iniettività

Una funzione $f \colon A \to B$ è detta *iniettiva* se per ogni elemento $b \in B$, esiste al massimo un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Definizione Iniettività

Una funzione $f \colon A \to B$ è detta *biettiva* se è sia inittiva che suriettiva.

Una funzione biettiva è quindi una corrispondenza dove ogni elemento viene relazionato con solo un elemento. Ogni funzione biettiva è sempre reversibile.

Definizione Funzione inversa

Data una funzione $\phi \colon A \to B$ biettiva, è possibile definire la *funzione inversa* $\phi^{-1} \colon B \to A$, che è data alla corrispondenza con gli elementi delle coppie ordinate invertite.

Definizione Composizione di funzioni

Dati tre insiemi A, B e C e le funzioni $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$, dove f è suriettiva, la *composizione* di f e g è una funzione data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(a))$$

Proposition Composizione di funzione e inversa

Data una funzione $\phi \colon A \to B$ e la sua inversa $\phi^{-1} \colon B \to A$ abbiamo che

$$\phi \circ \phi^{-1} = I_B$$

$$\phi^{-1} \circ \phi = I_A$$

Esempio Surriettività e iniettività

La funzione $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ data da $y = x^2$ è suriettiva ma non iniettiva.

Esempio Surriettività e iniettività

La funzione $\phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ data da $y = x^2$ è iniettiva ma non suriettiva.

Esempio Biettività

La funzione $\phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ data da $y = x^2$ è iniettiva e suriettiva, quindi biettiva.

3 Equazioni

3.1 Legge di cancellazione

Teorema Legge di cancellazione

Dati $a, c, b \in \mathbb{R}$,

$$ac = bc \iff a = b$$

purché $c \neq 0$

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ potrebbe introdurre delle nuove soluzioni (come quando $h(x) = 0$) oppure perdere delle soluzioni.

Per semplificare $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ è necessario prima cercare le soluzioni di $h(x) = 0$. Successivamente, cercare le soluzioni di $f(x) = g(x)$. Le soluzioni sono l'unione degli insiemi soluzioni di così trovate.

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f^2(x) = g^2(x)$ è possibile, ma potrebbe introdurre nuove soluzioni (che vanno testate nell'equazione originale). Invece, non possiamo ricavare le soluzioni di $f(x) = g(x)$ da $f^2(x) = g^2(x)$.

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f^3(x) = g^3(x)$ è possibile in quanto il cubo è una funzione iniettiva.

Teorema

Data una equazione $f(x) = g(x)$, le sue soluzioni sono equivalenti a $f^n(x) = g^n(x)$ se n è dispari. Nel caso n fosse pari, l'equazione $f^n(x) = g^n(x)$ può essere ridotta a $f(x) = g(x)$ e $f(x) = -g(x)$.

3.2 Polinomi

Definizione Polinomio $\mathbb{R}$

Un *polinomio* a coefficienti in $\mathbb{R}$ è un'espressione del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

dove i *coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

Un polinomio p definisce una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ponendo $\alpha \to a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$.

Definizione Grado di un polinomio

Dato un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, il *grado* del polinomio, denotato $\deg p(x)$, è il massimo indice i tale che $a_i \neq 0$. Il coefficiente a_i viene chiamato *coefficiente direttivo*.

Il polinomio nullo $p = 0$ non ha quindi un grado. Tuttavia, a volte si dice che il polinomio nullo abbia grado $-\infty$ oppure -1.

I polinomi di grado 0 sono quindi della forma $p(x) = a$ per $a \neq 0$.

Esempio Grado di polinomio

Il grado del polinomio $3 + 2x + 0x^2 - 4x^3 + 0x^4$ è 3.

3.3 Moltiplicazione fra polinomi

I polinomi si possono sommare e moltiplicare secondo le usuali regole.

Teorema Moltiplicazione di polinomi

Dati i polinomi

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Il loro prodotto è dato da

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i$$

dove

$$c_i = \sum_{h=0}^{i} a_n b_{i-n}$$

le operazioni tra polinomi si comportano bene rispetto alla valutazione. Se $p(x)+q(x) = h(x)$ e $p(x)q(x) = k(x)$, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $p(\alpha) + q(\alpha) = h(\alpha)$ e $p(\alpha)q(\alpha) = k(\alpha)$.

3.4 Divisione fra polinomi

Proposition Divisione fra polinomi

Dati due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ con $g(x) \neq 0$. Allora, esistono e sono univocamente determinati due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

con $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Proof Esistenza del quoziente e resto

Poniamo dei valori iniziali a $q(x)$ e $r(x)$ ponendo $q_0(x) = 0$ e $r_0 = f(x)$ (affinché l'equazione rimanga soffisfatta).
Se fosse $r_0(x) = 0$ o $\deg r_0(x) < \deg g(x)$ (cioè se il dividendo è il polinomio nullo o ha il grado minore del divisore, ho già finito). Altrimenti, abbiamo la situazione in cui $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^m$ e $a_m \neq 0$ e $m \leq n$.
A questo punto aggiustiamo il quoziente, ponendo quindi

$$q_1(x) = q_0(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$$

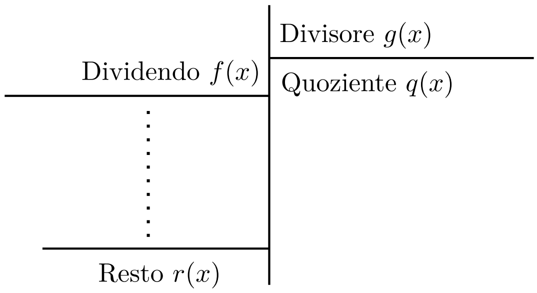
e trovo

$$\begin{aligned} r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) &= a_0 + a_1 x \cdots a_n x^n - \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_0 + \cdots + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_m x^m \right) \\ &= a_n x^n - a_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

E quindi rimangono solamente termini di grado minore di n. Dunque $r_1(x) = 0$ oppure $r_1(x)$ ha grado minore di $r_0(x) = f(x)$ (cioè il grado è diminuito).
Se $r_1(x) = 0$ o $\deg r_1(x) < \deg g(x)$ ho finito. Se $\deg r_1(x) \geq \deg g(x) = m$ si ripete il ragionamento. Eventualmente verranno trovati resti di gradi via via più piccoli (o addirittura resto nullo). Il processo termina quando il resto è nullo $r_k(x) = 0$ o il suo grado è minore del grado del quoziente $g(x)$. Il quoziente e il resto sono quindi $q_k(x)$ e $r_k(x)$.

Proof Unicità del quoziente e resto

Supponiamo che $f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$ con $r(x) = 0$ o $\deg r(x) < \deg g(x)$ e $r'(x) = 0$ o $\deg r'(x) < \deg g(x)$.
Partendo da $g(x)q(x) - g(x)q'(x) = r'(x) - r(x)$, giungiamo a $q(x)\,(q(x) - q'(x)) = r'(x) - r(x)$.
Per la dimostrazione supponiamo che quoziente e resto non siano unici, quindi che $q(x) \neq q'(x)$ oppure $q(x) - q'(x) \neq 0$, il primo membro avrebbe grado almeno n. Il secondo membro è nullo o ha grado minore di n. Questa è una contraddizione, confutando quindi la supposizione. Il quoziente è quindi unico e, naturalmente, anche il resto.



Esempio Divisione polinomi

Prendiamo $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $g(x) = 2x^3 + 2$.
Allora $f(x) = g(x)(2x^2 + \frac{3}{2}) + (-2x^2 - x - 2)$

3.5 Equazioni algebriche

Definizione Equazione algebrica

Un'equazione *algebrica* è una equazione del tipo $f(x) = 0$ dove $f(x)$ è un polinomio non-nullo.

Il grado di una equazione algebrica è il grado del polinomio.

Teorema Teorema del resto

Dato un polinomio $p(x)$ e un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, la divisione di $p(x)$ per $x - \alpha$ ha resto $p(\alpha)$.

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$$

Proof Teorema del resto

Dividendo $p(x)$ per $x - \alpha$ troviamo che $f(x)$ è uguale a

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$$

dove $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg x - \alpha = 1$. Quindi $r(x)$ è costante. Abbiamo allora $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$ e quindi

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(x) + r(x) = r(x)$$

e quindi $r(x) = p(\alpha)$.

Corollario

Il valore α è soluzione di $f(x) = 0$ se e solo se $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ per qualche $q(x)$.

Corollario Numero di soluzioni di equazione algebriche

Se $f(x) = 0$ è un'equazione algebrica di grado n, allora ha al massimo n soluzioni distinte.

Proof Numero di soluzioni di equazione algebriche

Siano a_1, a_2, $\cdots$, a_t soluzioni distinte di $f(x) = 0$ dove $f(x)$ non è nullo. Dobbiamo dimostrare che $t < n$. Per il teorema del resto $f(x) = (x - a_1)q_1(x)$ per qualche polinomio $q_1(x)$. Lo stesso vale per a_2, a_3, $\cdots$. Sostituendo otteniamo quindi $0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)q_1(a_2)$. Poiché $a_1 \neq a_2$, abbiamo allora (per il principio di annullamento) che $q_1(a_2) = 0$. Per il teorema del resto $q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)$ per qualche $q_2(x)$, e quindi $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$. Per induzione, giungiamo a $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_t)q_t(x)$ e confrontando i gradi troviamo che $t \leq n$.

3.6 Soluzioni di equazioni polinomiali semplici

L'equazione di primo grado $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ ha un'unica soluzione data da $x = -\frac{b}{2}$.

L'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$ ha

$$\begin{cases} 0 & \Delta < 0 \\ 1 & \Delta = 0 \\ 2 & \Delta > 0 \end{cases}$$

soluzioni date da

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A partire dalle equazioni di secondo grado, non esiste una formula risolutiva.

Esempio

La seguente equazione non è algebrica, in quando gli oggetti non sono polinomi, ma potremo ricondurla ad una tale equazione.

$$-\frac{x}{4 - x^2} = \frac{1}{x_2} - \frac{2}{x^2 + 4x + 4}$$

Bisogna innanzitutto verificare per quali valori di x le funzioni coinvolte sono definite. In quando caso, quando il denominatore è diverso da zero.

$$4 - x^2 \neq 0 \land x - 2 \neq 0 \land x^2 + 4x + 4 \neq 0$$

per cui $x \neq 2 \land x \neq -2$.

$$-\frac{x}{(2 - x)(2 + x)} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{(x + 2)^2}$$

La moltiplicazione per $(2 - x)(2 + x)^2$ *rischia* di introdurre le soluzioni $x = 2$ e $x = -2$.

$$\begin{aligned} -x(2 + x) &= -(2 + x)^2 - 2(2 - x) \\ -2x - x^2 &= -4 - 4x - x^2 - 4 + 2x \\ 0 &= -8 \end{aligned}$$

E quindi non abbiamo nessuna soluzione. Se ci fossero state delle soluzioni, avremmo dovuto scartare i valori 2 e -2 per le condizioni di esistenza.

4 Disequazioni

Definizione Disequazione

Una *disequazione* è una funzione del tipo $f(x) \neq g(x)$, $f(x) > g(x)$ oppure $f(x) \geq g(x)$ dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni reali.

Come si comportano le operazioni in $\mathbb{R}$ rispetto all'ordinamento?

Proposition

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c$$
$$a \leq b \iff ac \leq bc, \quad c > 0$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \neq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

Le condizioni di esistenza sono $x \neq 2 \wedge x \neq 0$. Risolviamo l'equazione associata

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

e troviamo le soluzioni $x = 1$ e $x = -4$. Per cui, le soluzioni della disequazione sono

$$\{x \mid x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4\}$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \leq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

In questo caso **non** è possibile moltiplicare per $x(x-2)$ perché questo assume valori non sempre positivi. Si procede per

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{2x-x^2} + \frac{3}{x} \leq 0$$
$$\frac{x^2 + 2 + 3(x-2)}{x(x-2)} \leq 0$$
$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x(x-2)} \leq 0$$

Sappiamo che $x^2 + 3x - 4$ si annulla per $x = 1$ e $x = -4$, e per il teorema del resto abbiamo che $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$.

$$\frac{(x-1)(x+4)}{x(x-2)} \leq 0$$

Dallo studio dei segni di $x - 1$, $x + 4$, x e $x - 2$ possiamo determinare il segno dell'intera funziona nei vari intervalli. Giungiamo quindi alla soluzione

$$x \in [-4; 0) \cup [1; 2)$$

5 Potenze di numeri

5.1 Potenze di numeri reali con esponenti interi

Definizione Potenza intera su numero reale

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, il valore a^n viene definito con la seguente ricorrenza:

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a^{n-1} & n > 0 \\ \frac{1}{a^n} & < 0 \end{cases}$$

per $a \neq 0 \land n \neq 0$.

È convenzionalmente possibile anche definire $0^0 = 1$. Mediante queste definizioni è possibile dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

Proposition Proprietà potenze

Dato $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}^+$,

1. $a^n a^m = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

5.2 Radicali

Proposition Esistenza radicale

Dato $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}^+$, esiste un unico $\beta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\beta^n = \alpha$$

Nel caso n sia pari, $(-\beta)^n = a$.

Se n è pari, i valori per beta possono essere due.

Definizione Radicale

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, il valore positivo β tale che $\beta^n = \alpha$ viene denotato $\sqrt[n]{\alpha}$. Questo valore è definito per

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\alpha} \geq 0 & n \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{R} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Proposition Proprietà dei radicali

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$$

qualunche siano m, n se $\alpha \geq 0$, mentre solo se m e n sono entrambi dispari se $\alpha < 0$.

Definizione Valore assoluto

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, il *valore assoluto* è dato da

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

Proposition Radicale di quadrato

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

Proposition Semplificazione dei radicali

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, m, k \in \mathbb{N}^+$, l'espressione

$$\sqrt[kn]{\alpha^{km}} = \begin{cases} \sqrt[n]{|\alpha|^m} & k \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha^m} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

5.3 Potenze di numeri reali con esponenti razionali positivi

Definizione Potenza razionale positiva su numero reale

Dato $a \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Q}$ con $q = \frac{m}{n}$ dove $m, n \in \mathbb{N}^+$, il valore a^q viene definito nella seguente maniera:

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

per $a \neq 0 \land q \neq 0$.

Il motivo per cui la potenza razionale non è definita per una base negativa in quando il valore cambia se la frazione dell'esponenze viene espressa in un altro modo. Per esempio $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$. Considerando solo gli esponenti ridotti ai minimi termini, cadrebbero le proprietà delle potenze.

Esercizio Radicali

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 + a^4}}{\sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} + \frac{a \sqrt[12]{1+a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^{-1}$$

Gli argomenti di radicali con esponenti dispari, non danno problemi. Gli argomenti di radicali con esponenti pari, devono essere non negativi. Dunque abbiamo queste condizioni

$$a \geq 0 \land \frac{1+a}{a} \geq 0 \land 1 + a \geq 0$$

Inoltre, i divisori devono essere diversi da 0.

$$\sqrt{a} \neq 0 \land a \neq 0 \land \sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} \neq 0 \land \sqrt[4]{a} \neq 0$$

Le prime condizioni possono essere semplificate a $a \geq 0$ Le seconde condizioni assieme alle prime possono essere ricondotte a $a > 0$. Semplificando l'espressione otteniamo

$$2\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[12]{1+a}$$

5.4 Potenze di numeri reali con esponenti reali

Proprietà dei numeri reali Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali tale che:

- per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$, si ha $x < y$.
- oer ogni $k > 0$ esiste $x \in A$ e $y \in B$ tale che $d(x, y) < k$, cioè $y - x < k$.

Allora, esiste un unico numero reale tale che $x \leq r \leq y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$.

Definizione Potenza reale su numero reale

Dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$. Per caso il caso $\alpha > 1$. Si può dimostrare che se $p < q$ sono due razionali, allora $\alpha^p < \alpha^q$. Allora, considerando i due insiemi

$$A = \{\alpha^p \,|\, p \in \mathbb{Q}, p < r\}$$

e

$$B = \{\alpha^q \,|\, q \in \mathbb{Q}, q < r\}$$

ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B. Inoltre, si può dimostrare che A e B sono due insiemi che soddisfano anche la seconda richiesta proprietà di prima, cioè la vicinanza arbitraria. Dunque, esiste un unico reale s tale che $x \leq s \leq y$ per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$. Poniamo allora

$$\alpha^r = s$$

La definizione oer $\alpha = 1$ è data data $\alpha^r = 1$.
La definizione per $\alpha < 1$ è analoga (con ordinamento scambiato).

La definizione è ben posta e si può dimostrare che in questo modo le prorpietà delle potenze si estendono.

Proposition Proprietà potenze reali

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$
$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$
$$(ab)^r = a^r b^r, \quad a, b \geq 0$$

Inoltre,

$$a^r < a^s \iff a > 1 \wedge r < s$$
$$a^r > a^s \iff 0 < a < 1 \wedge r < s$$

Tra gli esponenziali, di particolare importanza, è quello di base numero di Eulero e, un numero definito per procedimento di limite.

6 Disequazioni son valore assoluto

Supponiamo di avere una disequazione $k \geq |g(x)|$ con $k \geq 0$, allora $-k \leq g(x) \leq k$. Nel caso in cui $k < 0$, la disequazione non avrebbe soluzioni.

Se, al posto di k, avessimo una funzione, come in

$$f(x) \geq |g(x)|$$

si potrebbe comunque studiare il segno di $f(x)$ per verificre quando è positivo. Tuttavia, ciò non è strettamente necessario. Possiamo considerare il valore assoluto come $|a| = \max a, -a$. Allora, $f(x) \geq |g(x)|$ è equivalente a $f(x) \geq \max g(x), -g(x)$ e quindi $-f(x) \leq g(x) \leq f(x)$. Analogamente, lo stesso ragionamento vale per $f(x) \leq |g(x)$, il che è equivalente a $g(x) \leq -f(x) \vee g(x) \geq f(x)$.

7 Logaritmi

L'esponenziale è definiti per basi $a > 0$. Assume, al variare di x, tutti i valori reali positivi se $x \neq 1$.

Definizione Logaritmi

La soluzione dell'equazione

$$a^x = b$$

con $b > 0$ e $a > 0 \wedge a \neq 1$, è pari al *logaritmo* di b in base a

$$x = \log_a(b)$$

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle dell'espnonenziale.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g $\ln(x(x-1))$ non is può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2\log_2|x|$.

Esercizio Logaritmi

$\log_2(x) + \log_3(x-1)$ è definito per $x > 1$. Per portare tutto in base 2 è necessario eseguire la seguente operazione

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2(x-1) &= log_2 x + \log_2(x-1)^{\log_3(2)} \\ &= \log_2(x(x-1)^{\log_3(2)})\end{aligned}$$

Esercizio

L'equazione

$$3^{x+1} = 5$$

ha soluzione $x = 1\log_3(5)$.

Esercizio

L'equazione

$$\log(x-1) + \log(2x+1) = 2\log(x+1)$$

ha condizioni iniziali $x > 1$.

$$\begin{aligned}\log(x-2)(2x-1) &= \log{(x+1)}^2 \\ &= (x-1)(2x-1) = {(x+1)}^2 \\ &= x^2 - 5x = 0\end{aligned}$$

che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = 5$. Di queste solo $x = 5$ è compatibile con la condizione di esistenza.

8 Sistemi lineari

Definizione Sistema lineare

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ e x_j sono incognite.

Le soluzioni di un tale sistema sono n-uple.

Esempio Sistema equazioni

$$\begin{cases} 2x - 3y + \sqrt{3} - 7w = 2 \\ x + 0y + 4z - 11w = 1 \end{cases}$$

In questo caso le soluzioni sono quaterne.

Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x = z \\ 5y = -7 \\ 3z = 4\pi \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{4\pi}{3})$.

Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x + 5w = 2 \\ 2y = \sqrt{5} \\ 3z - 2w = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

si può risolvere trattando w come un parametro, e trovare le soluzioni accordatamente. La soluzione è $(x, y, z, w) = (\frac{2-5w}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}-2w}{3}, w)$, ossia un insieme infinito di soluzioni, in funzione di w (parametro libero).

Le trasformazioni lecite su un sitema sono quelle reversibili:

- riordinare l'ordine delle equazioni;
- moltiplicare un'equazione per una costante non nulla;
- sostituire a un'equazione la somma tra quella equazione e k volte un'altra.

Esempio Trasformazioni sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 2x - 3z - w = 5 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

È possibilare sommare alla seconda equazione 3 volte la prima, si trova

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 11x + 6y - 12z + 20w = 11 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

In questo modo ho ottenuto un altro sistema equivalente ma non mi sono avvicinato alla soluzione. Avrei potuto generalmente sommare alla seconda equazione k volte la prima, e notare che con $k = -\frac{2}{3}$ si ottiene del progresso.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 0x - \frac{4}{3}y - \frac{14}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

Così facendo, nella terza equazione l'incognita x non compare. Adesso, è possibilire usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ -\frac{4}{3}y - \frac{19}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ \frac{59}{2}z - \frac{45}{2}w = \frac{35}{2} \end{cases}$$

Trattando w come un parametro libero, dall'ultima equazione calcoliamo z in funzione di w, dalla seconda calcolo y in funzione di z e infine x in funzione di w.

Esempio

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 2x + y - w = 3 \\ 3x + 2y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$$

Non è possibile utilizzare la prima equazione per eliminare la x, ma è possibile utilizzare la seconda per eliminarla dalle altre. Sottraiamo quindi 2 volte la seconda dalla terza, 3 volte la seconda dalla quarta.

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 3y - 2z - 7w = -1 \\ 5y - 12w = -6 \end{cases}$$

Vi è il rischio che un'incognita eliminata venga reintrodotta quando si prova ad eliminarne una seconda. Per evitare il problema, dopo aver utilizzato una equazione una certa equazione per eliminare una certa incognita, è cosa furba portare tale equazione in testa al sistema, e successivamente continuo lavorando sulle successive.

Esercizio Sistema senza soluzioni

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 7y - 4y + 13z = 6 \end{cases}$$

Usiamo la prima equazione per eliminare la x dalle successive

$$\begin{cases} 3x + 2y + tz = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ \frac{26}{3}y + \frac{4}{3}z = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Usiamo la seconda equazione per eliminare la y dalla successiva.

$$\begin{cases} 3x + 2y + tz = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Di conseguenza, il sistema *non* ha soluzioni in quanto l'ultima equazione non è mai soffisdatta.

Nel caso ottenessimo un'equazione del tipo $0x + 0y + 0z + \cdots = 0$, ossia un'identità, essa può essere scartata in quanto non contiene nessuna infromazione necessaria.

9 Trigonometria

Per introdurre le funzioni goniometrica è comodo impostare come sistema di riferimento il piano cartesiano:

- un punto fissato O, detto *origina*;
- due rette ortogonali tra loro e passanti per O, dette *assi*;
- due punti U_1 e U_2, sugli stessi assi, posti alla stessa distanza non nulla da O, detti *punti unitari.*

Fatto ciò, posso assegnare ad ogni punto P del piano una coppia di reali x_p, y_p detti *coordinate* del punto P. Per trovare x_p considero la proiezione ortogonale di x sull'asse che contiene U_1, trovando un certo punto H. Si considera il rapporto tra le lunghezze del segmento $\overline{OH}$ e la lunghezza del segmento $\overline{OU_1}$. Poniamo poi

$$x_p = \begin{cases} \frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{se } H \text{ e } U_1 \text{ stanno sulla stessa semiretta di origine } O \\ -\frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analogamente, per x_p

- la retta OU_1 è detta asse delle x o asse delle ascisse;
- la retta OU_2 è detta asse delle y o asse delle ordinate;

Se P e Q sono due punti diversi, almeno una delle due proiezioni e quindi P e Q hanno almeno una coordinata diversa; in altri termini la coppia (x_p, y_p) individua P. Viceversa, data una coppia di numeri reali (x, y) si trova un unico punto che ha esattamente (x, y) come coordinate. Dunque, possiamo identificare il piano con l'insieme delle coppie ordinate dei numeri reali $\mathbb{R}^2$.

(In realtà, non è strettamente necessario considerare tutte le coppie di numeri reali per soddisfare gli assiomi euclidei)

Supponiamo di avere una semiretta s uscente dall'origine. È possibile associare un angolo θ fra la semiretta e l'ascisse. Chiaramente, lo stesso angolo può assumere anche i valori $\theta + 2k\pi \ k \in \mathbb{N}$ oppure, l'angolo inverso, $2\pi - \theta$. Quindi, abbiamo infiniti angoli che quantificano la stessa ampiezza di semiretta.

Questo sistema, detto *radiante* prende come riferimento il valore 2π per quantificare un giro completo attorno all'origine. Una semiretta con ampiezza 1 radiante, forma un arco di lunghezza dell'arco stesso.

Esiste anche il sistema sessagesimale dove un angolo giro equivale a 360°. La conversione da radianti x e $x°$ è data da

$$x° = \frac{180°}{\pi}$$

Definizione Funzione seno

Dato un angolo θ, la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza θ. Consideriamo il punto P come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore $\sin\theta$ rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di P sulle ascisse.

Definizione Funzione coseno

Dato un angolo θ, la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza θ. Consideriamo il punto P come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore $\cos\theta$ rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di P sulle ordinate.

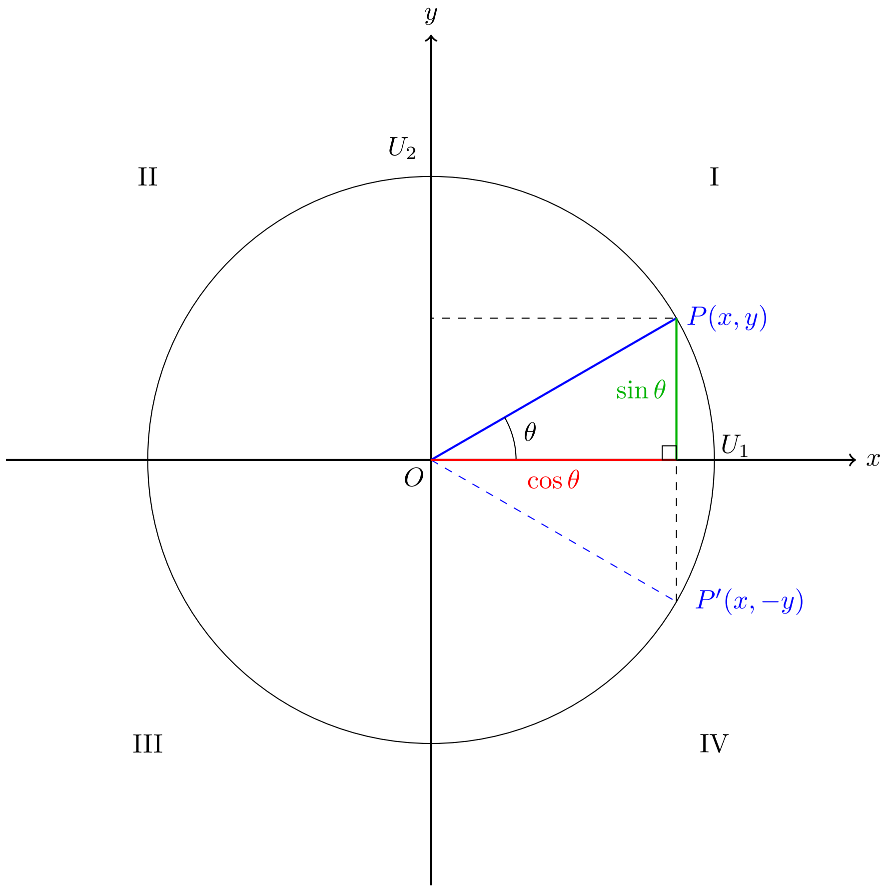
Definizione Funzione tangente

Dato un angolo θ, la *tangente* è definita come

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

quando $\cos\theta \neq 0$.

Il coseno è pari a zero solo quando $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{N}$.



Notiamo che il punto P, che sta sulla circonferenza, dista 1 dall'origine, e forma un triangolo rettangolo in $(0, P_y)$. Per il teorema di pitagora, abbiamo allora la seguente proposizione:

Proposition Relazione pitagorica

Dato un $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$