Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Sottoinsiemi finali **3**

2 Combinatorica **3**
2.1 Funzione indicatrice 4
2.2 Altre proprietà 4

3 Interi relativi **5**

4 Definizioni con ordini **7**
4.1 Considerazioni 7
4.2 Estremi superiori e inferiori 8
4.3 Conseguenze della proprietà del sup 10
4.4 Esercizi sup 11

5 Esponenziali **14**
5.1 Potenze ad esponente reale e esponziali e logaritmi 14
5.2 Potenze a esponente reale 14
5.3 Esponenziali 15

6 Numeri complessi **16**
6.1 Inclusione dei reali 16
6.2 Operazioni algebriche 16
6.3 Passaggio polari e cartesiane 17
6.4 De Moivre 17

7 Distanza fra due insiemi **17**

8 Teorema di Ruffini **18**

9 Spazi metrici **19**

10 Spazi topologici **19**

11 Successioni **20**
11.1 Aritmetica dei limiti 22
11.2 Limiti notevoli 25
11.3 Limiti notevoli 28
11.4 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche 30
11.5 Proprietà asintotico 31
11.6 Esercizi 32

12 Serie numeriche **33**
12.1 Aritmetica delle serie 33
12.2 Formula di Stirling 38
12.3 Serie a termini di segno qualunque 40

12.4 Serie con parametri 48

1 Sottoinsiemi finali

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma indutivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Combinatorica

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni fa F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

$$n! = |\{f : F_n \to F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1, che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n, aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n + 1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazione di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f : F_k \to F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbimao che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X.

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.1 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F, abbiamo $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f \colon x \to y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y.

La funzione $\Xi \colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X$ è biettiva. La funzione $f \colon X \to \{0, 1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

3 Interi relativi

In $\mathbb{N}$ è definita la funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dove $(m,n) \to m+n$.

Abbiamo chiaramente che $(a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le prorpietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo $\mathbb{Z}$ come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{=1} n' = -n \,|\, n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists - n \,|\, n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \to \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e $\cdot$ con le prorpietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in $\mathbb{Q}$ si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di $\mathbb{Q}$ ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento che è compatibile ocn le operazioni $+$ e $\cdot$, cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in $\mathbb{Q}$ sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciô ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizazzione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n, contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

4 Definizioni con ordini

Sia $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato.*

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato.*

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.
Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

4.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E. Vi sono diversi minoranti di E, come -1, -30 etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E. I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quando se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n, è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1-z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 1$. Qualcunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1-z}$$

4.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo del maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande del minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in $\mathbb{Q}$ sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq 0 \land r^2 \leq 2 \right\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

  $$\mu + \frac{1}{n}$$

  che sono chiaramente più grandi di μ. Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

  $$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

  è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

  $$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

  Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che inf, sup, min, max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E, allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In $\mathbb{Q}$ (e poi in $\mathbb{R}$), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiornate cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

Definizione Numeri reali

Definiamo $\mathbb{R}$ come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

Teorema Teorema di unicità

Siano F_1 e F_2 due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione $\phi\colon F_1 \to F_2$ tale che è un isomorfismo del gruppo additivo $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$ per ogni $x, y \in F_1$ e $\phi(-x) = -\phi(x)$ per ogni $x \in F_1$. Se aggiungiamo anche che $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$ per tutte le $x, y \in F_1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali $\mathbb{Q}$. Chiaramente, diversi campi generano $\mathbb{Q}$ diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire $\phi_0\colon \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \to \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$. Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato $x \in F_1$, abbiamo $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \,|\, r \leq x\} = \sup E_x$. Allora $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \,|\, r \in E_x\}$. Così viene esteso ϕ a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{ numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \cdots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Con la prescrizione che $n, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \overline{9} = n, a_1, \cdots, a_{k-1}, (a_k + 1)$.

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

Definizione di somma e prodotto: Prendiamo $x = n, a_1, \cdots, a_k \cdots$ e $y = m, b_1, \cdots, b_k \cdots$ che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verificiamo che questo modello di $\mathbb{R}$ soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdot$$

Per ogni $x \in E$ scriveremo $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \cdots$. E è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \,|\, x \in E\}$$

è un insieme di numeri in $\mathbb{Z}$ limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \,|\, n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo $a_1 = \max\{a(x)_1 \,|\, x \in E_0\}$ Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \,|\, a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora $a_2 = \max\{a(x)_2 \,|\, x \in E_1\}$. Con lo stesso metodo troviamo $a_3, a_4, \cdots$, ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \,|\, x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \,|\, x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \cdots$$

Dico che μ è un maggiorante di E, e che se $z < \mu$, z non è maggiorante. Sia allora $\overline{x} \in E$, quindi

$$\overline{x} = n_{\overline{x}}, a(\overline{x})_1, a(\overline{x})_2, \cdots$$

Allora $n_{\overline{x}} \leq N$ se $n_{\overline{x}} < N$. $\overline{x} < \mu$. Gli elementi in E_0 sono al massimo a_1. Se $n_{\overline{x}} = N$ e $n_{\overline{x}} \in E_0$ e $a_1(\overline{x}) = a_1$.
Se $a(\overline{x})_1 < a_1 \implies \overline{x} < \mu$.
Se invece $a(\overline{x})_1 = a_1 \implies \overline{x} \in E_1$ e $a(\overline{x})_2 \leq a_2$
Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se $\exists k$ tale che $a(\overline{x})_k < a_k \implies \overline{x} < \mu$. Se $\forall k, a(\overline{x})_k = a_k$, allora $\overline{x} = \mu$ e μ è il max di E. Questo procedimento non dimostra che $\mu \in E$.

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \cdots < \mu$$

Deve quindi succedere che o $n_z < N$, e allora $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$, oppure $n_z = N$ e $a(z)_j = a_j$ per tutte le $j < k$ ma $a(z)_k < a_k$. Allora $\mu = \sup E$.

4.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della prorpietà del sup sono:

- **proprietà archimedea:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, na > x$ (in realtà vale anche in $\mathbb{Q}$).
- **densità dei razionali nel reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \,|\, x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \,|\, x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z > 0 \land z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E. Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \to t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande

  $$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

  e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E, contro l'ipotesi impossibile perché x, che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande

  $$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

  allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x, e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere nè più grande nè più piccolo, $x^n = y$.
- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

4.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \,|\, x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E, F, $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

  $$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

  È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

  $$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

  Il temrine $n + 2$ cresce con n, quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approcciando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F. Allora siccome ci avviciamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$.

Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1-z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il max non esiste in quando $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anchde il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

  Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \,\middle|\, \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

  Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.
- Posto $E + F = \{x + y \,|\, x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

  Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:
  1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
  2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

  Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > e_1 > \sup E . \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_2 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.
- Posto $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E. Analogamente per il min.

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{x^2+1} \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore.
Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2)-(n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il maggiornate e supremum è quindi x_{14}.

5 Esponenziali

5.1 Potenze ad esponente reale e esponziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come
$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = \left(x^{-}1\right)^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \left(x^r\right)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

5.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = \left(\sqrt[p]{x}\right)^m < \left(\sqrt[p]{x}\right)^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

E infinie se $0 < x < 1$
$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

5.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x, $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è stretta crescente, e strettamente descrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g $\ln(x(x-1))$ non is può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$. Estendiamo il campo $\mathbb{R}$ costruendo un campo $\mathbb{C}$ che contiene una immagine isomorfa di $\mathbb{R}$ nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in $\mathbb{R}$;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare $\mathbb{C}$ come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

6.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

6.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \qquad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \qquad \dots$$

Dato $z = a + bi$, diciamo che $\Re(z) = a$ e $\Im(z) = b$.

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z,

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\overline{wz} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

6.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e il punto polare (r, θ) abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

6.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\cos\theta)^{n-k} (\sin\theta)^k$$

7 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

8 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha moltiplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

9 Spazi metrici

Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se tutti i punti sono interni in A.

10 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,
$$((x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$
2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

($\Longrightarrow$) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ dove $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0. Chiaramente, esiste un $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \cdots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ε esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

($\Longleftarrow$) Trivial.

11 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che $M = \max x_n$ se $\forall n x_n < M$ e $\exists n' \mid x_{n'} = M$. Analogamente il min.

Definiamo inoltre $\sup_n x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$ Analogamente per l'inf.

Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà P, una successione $\{x_n\}$ soddisfa la proprietà P definitivamente se $\exists N \mid \forall n, P(n) \geq N$.

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore a maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \to l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorni diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l-\varepsilon, l+\varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi $x_n \to \xi$ se per ogni interno I esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$.

Lemma

Se λ e $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ and $\lambda \neq \mu$ allora esistono intorni I di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Proof

Siano per esempio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda < \mu$. $\forall r \leq \frac{\mu-\lambda}{2}$ gli intorni $I = (\lambda - r, \lambda + r)$ e $J = (\mu - r, \mu + r)$ sono disgiunti.

Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $x_n \to \lambda$ e $x_n \to \mu$ allora $\lambda = \mu$. Infatti supponiamo che $\lambda \neq \mu$ per il lemma $\exists I$ intorni di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$. Per ipotesi $x_n \to \lambda$ quindi $\exists M_1$ tale che $x_n \in I \forall n \geq N_1$. $x_n \to \mu$ quindi $\exists M_2$ tale che $x_n \in J \forall n \geq N_2$. Quindi se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in I \cap J = \emptyset$ ↯.
2. Se $x_n \to l \in \mathbb{R}$, allora $\{x_n\}$ è limitato cioè esiste $m \leq M$ tale che $m \leq x_n \leq M$ per tutte le n. Infatti, per ipotesi $x_n \to l$ quindi usando $1 = \varepsilon$ nella definizione, risulta che $\exists N \mid l - 1 < x_n < l + 1$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte, per ogni $n = 1, \cdots, N-1$ abbiamo che
$$A = \min\{x_1, \cdots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_{N-1} = B\}$$
che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che $m = \min\{l-1, A\} \leq x_n \leq \max\{l+1, B\} = M$
3. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N \mid \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N$, $x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorni I di λ e J di μ tale che
$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

- $$x_n \to \lambda \implies \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$
- $$y_n \to \lambda \implies \exists N_2 \,|\, \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

Infatti, $x_n \to 0$ se e solo se $|x_n| \to 0$

$$\begin{cases} x_n \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \to 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$

poniamo $y_0 = 0, \forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.
In particolare, se $y_n \to \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni)**: Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \to l$ e $z_n \to l$. Allora, $y_n \to l$.
   Se $x_n \to +\infty$ e $z_n \to +\infty$, allora $y_n \to +\infty$.
   Se $x_n \to -\infty$ e $z_n \to -\infty$, allora $y_n \to -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq n$, allora $x_n \cdot y_n \to 0$. Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \,|\, a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2. $\exists M > 0 \,|\, |x_n| \leq M, \forall n$

11.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \to \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \to \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \to \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n - y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leqslant |x_n - \lambda| + |y_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \to \lambda + \mu$.
Dimostriamo ora che se $x_n \to +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \to +\infty$. Ricordiamo chde se $y_n \to \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.
Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n. $x_n \to +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.
Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + k) - K = M$ (alla pegio tolgo un K).
Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \to +\infty$ e $y_n \to -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \to +\infty \\ y_n = -n \to -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \to c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \to l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualuncuque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \,|\, \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positvo. Allora $x_n \to l$ infatti basta aplicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \to \lambda$, $y_n \to \mu$ allora $x_n \cdot y_n \to \lambda \to \mu$ dove $\lambda\mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \to \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \to \mu$ fissato $\exists N_2 \,|\, \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda\mu| &= |x_n y_n - x_n\mu + x_n\mu - \lambda\mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |y||x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \to \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \,|\, |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \to \lambda\mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \to \lambda$ e $y_n \to \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^{\pm}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significatica forma di indecisione, al contrario del denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1+\frac{\sin n}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $(1+\frac{1}{n})$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m}+\frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \,|\, \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
  - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \,|\, x_N > \xi - \varepsilon$

  e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

  $$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \,|\, x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonia

  $$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

  e per definzione, $x_n \to +\infty = \sup x_n$.

11.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \to A$ e $b_n \to B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \to A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \to 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \to \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1+h) \implies A^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \to +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $\left(\frac{1}{A}\right)^n \to +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \to A \geq 0$, $b_n \to B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \to A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0.
Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.
Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.
Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).
Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \to B$, allora

$$\log b_n \to \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,
$$\frac{n^\alpha}{A^n} \to 0$$
(in particolare con α)
2. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha > 0$,
$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \to 0^+$$
3. $\forall \alpha, \beta > 0$,
$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \to 0$$
4. $\forall a_n \to \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,
$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \to 0$$
5. $\forall A > 1$,
$$\frac{A^n}{n!} \to 0^+$$
6.
$$\frac{n!}{n^n} \to 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \to 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \to 0$$

Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \to 0$$

Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1. a_n è monotona strettamente crescente;
2. b_n è monotona strettamente decrescente;
3. $\forall n, a_n \leq b_n$ quindi a_n è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora, $a_n \to e^-$, $b_n \to e^+$ e $e \approx 2.7182818$.

Proof

1. Mostriamo che $\forall n \geq 1, a_n < a_{n-1}$. Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni $n \geq 2$ studiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} > \frac{1-\frac{1}{n^2}\cdot n}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

3. Per tutte le n

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome a_n è limitata superiormente e ed è monotina crescente, esiste $\lim a_n = e^-$ Poiché $b_n = a_n + (b_n - a_n)$,

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n} \to 0$$

Quindi $b_n \to e^+$ siccome è decrescente. Siccome $a_n < e < b_n$ si può approssimare scegliendo n sufficientemente grandi.

Proposition

Se a_n è crescente, e b_n è decrescente e $a_n < b_n$ si deduce che $\forall m, n, a_m < b_n$

11.3 Limiti notevoli

Corollario

Se $c_n \to +\infty$ allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proof

Siccome vale sempre $[c_n] \leq c_n < [c_n]+1$

$$1+\frac{1}{[c_n]+1} < 1+\frac{1}{c_n} \leq 1+\frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]} < \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]}\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

Proposition
Se $|c_n| \to +\infty$, allora

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \to e$$

Proposition
Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$$

Segue dall'ultima proposition con $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Proposition
Se $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1+\varepsilon_n)^{\alpha}-1}{\varepsilon_n} \to \alpha$$

Proof
Basta porre $\delta_n = (1+\varepsilon_n)^{\alpha} - 1 \to 0$ dove chiaramente $\delta_n \neq 0$ definitivamente. Quindi esprimere ε_n in termini di δ_n per concludere.

Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo
Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}-1}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

Vogliamo applicare $\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1$ con $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})}$. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}-1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2}+\log n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(1+\frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \to 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

11.4 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

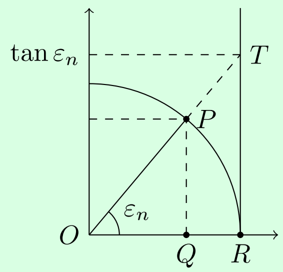
Teorema

Sia $\varepsilon_n \to 0$, allora

1. $\sin\varepsilon_n \to 0$, $\cos\varepsilon_n \to 1$ e $\tan\varepsilon_n \to 0$;
2. Se $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora
$$\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$
e
$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$$
e
$$\frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Proof

1. Per la definizione del seno,
$$|\sin\alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$
Quindi $|\sin\varepsilon_n| \leq |k_n| \to 0$ e $\cos^2\varepsilon_n = 1-\sin^2\varepsilon_n \to 1$ da cui $\varepsilon_n \to 1$. Inoltre,
$$\tan\varepsilon_n = \frac{\sin\varepsilon_n}{\cos\varepsilon_n} \to 0$$
2. Sia $\varepsilon_n \to 0$ con $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,
$$\frac{\sin x}{x}$$
è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $\forall n, \varepsilon_n > 0$ e poiché $\varepsilon_n \to 0$ posso anche supporre che $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$. Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo OPQ è minore o uguale dell'area del settore circolare OPR che è minore o uguale del triangolo OTR.
Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo α è data dalla proporzione
$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$
quindi
$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$
Abbiamo allora che
$$\frac{1}{2}\cos\varepsilon_n \sin\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan\varepsilon_n$$
che semplificando diventa
$$\cos\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin\varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos\varepsilon_n}$$

Siccome $\cos\varepsilon_n \to 1$ e $\frac{1}{\cos\varepsilon_n} \to 1$, per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin\varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)\left(\frac{1}{\cos\varepsilon_n}\right) \to 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1-\cos\varepsilon_n)(1+\cos\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2\cdot(1+\cos\varepsilon_n)} \\ &= \frac{1-\cos^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\cdot\frac{1}{1+\cos\varepsilon_n} \\ &= \left(\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos\varepsilon_n} \to \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2)\sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \to 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}a_n &= (n+2)\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\cdot\varepsilon_n \\ &= \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})}{n^2} \to 1\end{aligned}$$

11.5 Proprietà asintotico

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$ se $a_n \to \infty$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} = n(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$. Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$ se $a_n \to 1$. Per esempio, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \to +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$.

Il termine $o(1)$ indica che la successione tende a zero.

Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $a_n = \mathcal{O}(b_n)$;
- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = \mathcal{O}(d_n)$, allora $a_n c_n = o(b_n d_n)$. Infatti,

$$\left|\frac{a_n c_n}{b_n d_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \left|\frac{c_n}{d_n}\right|$$

  che tendono entrambi a zero;
- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, allora $a_n + c_n = o(b_n)$. Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

  che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$;

11.6 Esercizi

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right)\left(\sqrt[3]{n^6+1} - n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4+n}}}$$

12 Serie numeriche

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n\pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n\pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \to \frac{1}{2}$$

Proof Serie geometrica per Induzione

Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

La serie ha ragione $q = \frac{1}{10}$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\
&= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\
&= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+2} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

12.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

Proposition
Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

Esempio
Mostriamo che se $x = N, a_1 a_2 \cdots a_k \overline{9}$ dove $a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a_k < 9$, allora $x = N a_1 a_2 \cdots (a_k + 1)$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} x &= N + \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\ &= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k}(a_k + 1) \end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Corollario
Se $a_n = o(b_n)$ cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$ e quindi si applica il confronto.

Esercizio
Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esempio Teorema di condensazione

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$ che converge se e solo se $p > 1$.

Teorema Rapporto di radici

Sia $\sum a_n$ una serie a termini ≥ 0 e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1. $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$;
2. $a_n > 0$ definitivamente e $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$;

Allora se $L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ allora $a_n \to \infty$.

Se $L = 1$ il test è **inclonclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se $p > 1$ e diverge altrimenti.

Corollario

Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$. Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora se $L < 1$, la serie converge e $a_n \to 0$ e se $L > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists N$ tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se $L < 1$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (basta scegliere $\varepsilon = (1 - L)/2$). Dalla disequazione $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché $L + \varepsilon < 1$ la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se $L > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, come per esempio $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, quindi per $n \geq N$ abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla n otteniamo $a_n > (L - \varepsilon)^n \to +\infty$ e per confronto $a_n \to +\infty$. In particolare, a_n non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso, $\exists \lim_n \frac{a_{n+1} a_n}{=} L$ come nel caso precedente. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che $L > 1$ cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere ε tale che $L - \varepsilon > 1$ e abbiamo che $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$ moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_N} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di $L - \varepsilon$. Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \to +\infty$$

e per confronto $a_n \to +\infty$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con $A > 0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \to 0$$

Quindi la serie converge, e converge a $e^A - 1$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotito. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e. Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domincia sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n \log n}$ come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{1 + e^{n \log \log(n) - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2}\right\}}{e^{3n \log n} \left\{1 + e^{-2n \log n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n}\right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{1 - \frac{\log \log n}{n^2}\right\}} \to \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left(e^{n^2 - 3n \log n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{n\left(1 - \frac{3 \log n}{n}\right)} \to \infty > 1$$

Esempio
Studiare il carattere di
$$\sum^{\infty} \frac{n^{n\log n}}{(2n)!}$$
che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+2)(2n)!$ e $(n+1)\log(n+1) = n\log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$. Il rapporto è dato da
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)\log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n\log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n)+\log(n+1)}}{n^{n\log n}}\end{aligned}$$
Con
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$
troviamo
$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n\log(1+1/n)}(n+1)^{\log(n+1)}$$
Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio
Considera
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$
Il criterio della radice non funziona. Infatti,
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$
Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come
$$\begin{aligned}n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\log\left(n^{\log n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\log n)^2} \to 1\end{aligned}$$
Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora
$$\begin{aligned}a_n &= \frac{a^{\sqrt{n}\log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n}\log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}}\right\}}\end{aligned}$$
L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\
&= e^{2\log n - \sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right\}}
\end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2\log n - \sqrt{n}\log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n}\left\{\log 2 - \frac{2\log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \to -\infty\right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

12.2 Formula di Stirling

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \to 0
\end{aligned}$$

Quindi la serie converge.
Con radici abbiamo

$$\begin{aligned}
\left[\frac{n^n}{(2n)!}\right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n}(1+o(1))\right]^{1/n}} \\
&= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2}(4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}}(1+o(1))^{\frac{1}{n}}} \to 0
\end{aligned}$$

E quindi converge

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n\log n} = e^{n^2}\left\{1 + e^{n\log n - n^2}\right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned}
(n^2)! + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \left(n^2\right)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2}(1+o(1)) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}(1+o(1)) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}}\left\{1 + o(1) + e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2n^2\{\cdots\}}\right\} \\
&\sim e^{2n^2\left\{\log n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\log\sqrt{2\pi n^2}\right\}} = \left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}
\end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{\left(n^2\right)^{n^2} e^{-n^2}\sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{\left(n^2\right)^n e^{-n}(2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\
&= \frac{e^{2n}}{n^{2n}(2n)^{1/n} n^{1/n}} \to 0
\end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

12.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$. Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se $n, m > N$, allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leqslant |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

Definizione Successione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Si dice che $\{a_n\}$ soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \,|\, \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se $a_n \to L$ finito, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1. $\exists$ finito
$$\lim_n a_n = L$$
2. $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$.

Proposition

Sia

$$\sum^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia $\{S_N\}$ la successione delle sue somme parziali. Per definizione, $\sum a_n$ converge a S se esiste finito $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$.

Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie $\sum a_n$ converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

1. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N, |S_N - S_M| < \varepsilon$$
   equivalentmeente notando che se $n > m$,
   $$S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{m+1}^{n} a_k$$
2. $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$
   ovvero
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \,|\, \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

3. **condizione più usata:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con $0 < p \leq 1$ converge ma non assolutamente. La serie converge per $p > 0$.

Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia $\{b_k\}$ una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k|$$

Proof

Per induzione

- il caso base è banale;
-

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) + b_{n+1} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| + |b_{n+1}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k|$$

Proof Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizionid i Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi $\sum |a_k|$ convrgr quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \varepsilon$$

Ma per il lemma $\forall n \geq m \geq N$,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

> **Esempio**
> Considera
> $$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$
> che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.
> $$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$
> Poiché $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$ converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per
$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$
con $p > 1$. Se $p \leq 1$, allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio, $|\sin x| > \frac{1}{2}$ se $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che l'intervallo
$$I_k = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$$
ha lunghezza $\frac{2\pi}{3} > 1$, quindi conviene un interno n, in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie
$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$
dove n_k è un intero in ognuno di I_k. Ciò è maggiore o uguale di
$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$
in quanto il valore a denominatore è al minomo $\frac{5}{6}\pi + k\pi$. Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

> **Esempio**
> Considera
> $$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$
> allora guardiamo il modulo:
> $$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$
> Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.
> $$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$
> Notiamo che $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$ perché $n = 1$ dà il valore massimo. Quindi
> $$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2 \sum n^{-\frac{7}{8}} + 2 \sum n^{-\frac{4}{3}} + 2 \sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3} (\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Teorema Teorema di Leibniz

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

dove $\forall n, a_n \geq 0$ (serie a termini di segno alterno). Supponiamo che:

1. $a_n \to 0$ con $n \to +\infty$ (condizione necessaria per la convergenza);
2. a_n è monotona decrescente $a_n \geq a_{n+1}$.

Allora, la serie converge. Inoltre, posto S la somma della serie e S_n la somma parziale, si ha che l'errore $E_n = S - S_n$ soddisfa

$$|E_n| \leq a_{N+1}$$

e inoltre il segno di E_N è il segno di $(-1)^{N+1}$. Quindi, se N è pari, $S_N \geq S$ e $S_N \leq S$ se N è dispari (l'ugliaglianza capita solo quando i termini diventano nulli).

Perché il teorema valga basta che $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per n sufficientemente grande.

Esempio

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni $0 < p \leq 1$.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché $\forall n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi $p = 2 > 1$ e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che $\forall n, a_{2n+1} < a_{2n+2}$.

Nota: $a_n \sim b_n$ e b_n monotona crescente non implica necessariamente che a_n sia monotona decrescente.

Infatti,

Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. È chiaro che b_n è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti, a_n non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se a_n fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

Proof Teorema di Leibniz

Consideriamo separatamente le somme parziali di indici pari e di indici dispari. Notiamo che:

1.
$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n a_n \\ &= \sum_{n+1}^{2N-1} ((-1)^n a_n) + (-1)^{2N} - a_{2n} \\ &\geq S_{2N-1} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} S_{2N} &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots - a_{2N-1} + a_{2N} \\ &= -(a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2N-1} - a_{2N}) \end{aligned}$$

   Siccome $a_n \geq a_{n+1}$, tutti i raggruppamenti sono maggiori o uguali a zero. Quindi

$$\begin{aligned} S_{2N} &\leq -(a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2N-3} - a_{2N-2}) \\ &= S_{2N-2} \end{aligned}$$

   quindi S_{2N} è monotona decrescente.
3. Consideriamo i dispari:

$$S_{2N+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2N-2} - a_{2N-1}) + (a_{2N} - a_{2N+1})$$

   Esattamente come prima, tutti i raggruppamenti sono maggiori o uguali a zero (in particolare, l'ultimo), quindi

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &\geq -a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2N-2} - a_{2N-1}) \\ &= S_{2N-1} \end{aligned}$$

   quindi S_{2N+1} è monotona crescente.

Otteniamo quindi che $\forall N, S_{2N} \geq S_{2N-1} \geq S_1$, siccome quelli dispari sono crescenti, il più piccolo di tutti è il primo. Allora S_{2N} è monotina decrescente e limitata inferiormente. Quindi,

$$\exists \lim_N S_{2N} = S^+$$

che siccome è monotona decrescente il limite da sopra (per eccesso). poiché $S_{2N+1} = S_{2N} - a_{2N+1}$, dove il primo termine tende ad S e a_{2N+1} tende a zero, allora anche S_{2N+1} tende a S. In questo caso, per difetto, in quanto S_{2N+1} è monotina crescente. Di conseguenza, siccome sia S_{2N} e S_{2N+1} tendono ad S, tutta la sequenza converge a S. Inoltre, per quanto visto, tutti i termini pari sono più grandi di S e tutti quelli dispari sono più piccoli di S. Poiché $S_{2N+1} \to S^-$ e $S_{2N} \to S^+$, abbiamo

$$\forall n, M, S_{2M+1} \leq S \leq S_{2N}$$

Consideriamo ora l'errore $E_N = S - S_N$. Se N è pari, allora $N = 2k$, quindi siccome $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$,

$$E_N = S - S_{2k} \geq S_{2k+1} - S_{2k} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1}$$

Abbiamo quindi che

$$|E_{2k}| \leq a_{2k+1}$$

e il segno di $E_{2k} = -1$. L'altro caso $N = 2k + 1$ è analogo.

Esempio Stima errore

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di 10^{-3}. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni, $a_n \to 0$ e $a_{n+1} < a_n$, quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_n| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$ certamente $|E_N| < 10^{-3}$. Dobbiamo usare almeno $N = 6$ per ottenere $(N+1)! = 5040 > 1000$. Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di $\frac{1}{6!}$.

Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto $p = \frac{1}{2} \leq 1$ e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto $a_n \geq 0$ e $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+1) - (n+1)^{3/2}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 \geq (n+1)^3 &= n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con $n \to \infty$ del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2}\left\{1 - \frac{2}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1\right\}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1+\varepsilon_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} - \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1\right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n}(1+o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n}o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}o(1) \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + o(1)\right\} \\ &\sim \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non risuciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e b_n è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\sqrt{n}n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{i} nfty(-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ha modulo

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$
$$= \frac{(n+1)-\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergano assolutamente allora $\sum(a_n+b_n)$ converge assolutamente. Infatti,

$$\sum |a_n-b_n| \leq \sum(|a_n|+|b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n| < +\infty$$

12.4 Serie con parametri

Esempio

Considera

$$\sum n = 1^{\infty} \frac{\log n}{n+1}\left(x^2-x-x\right)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2-x-2 \geq 0$$

per $x \leq -1 \vee x \geq 2$, altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left|\frac{\log n}{n+1}(x^2-x-2)\right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log\log n} \to 1$ e $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ (limite notevole) e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Quindi $|x^2-x-2| = L$ e se $L < 1$, la serie converge assolutamente, se $L > 1$ il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione $L < 1$

$$|x^2-x-2| < 1$$

Siccome $|t| < a \iff -a < t < a$ scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Se $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui $L = 1$. In tale caso, $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Nel caso in cui $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ sappiamo che $x^2 - x - 2 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con $p = 1$ e $q > 1$, quindi la serie diverge. Invece, se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo che $x^2 - x - 2 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \to 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se $a - a_{n+1} \geq 0$ definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned}(n+2)\log n - (n+1)\left[\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] &= \log n - (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \log n - (n+1)\frac{1}{n} \to +\infty - 1 \to \infty\end{aligned}$$

siccome $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon \to 0$. Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio
Considera
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n$$
La serie è a termini non-negativi quando $x-1<0$ cioè $x<1$. Studiamo allora la convergenza assoluta
$$\sum\left|\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n\right|$$
applichiamo il criterio della radice n-esima
$$\left|\frac{2^n+\log n}{n+\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^n\right|^{1/n}=\frac{2\left(1+\frac{\log n}{2^n}\right)^{1/n}}{n^{1/n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1(/n)}}\cdot\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}\to\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}=L$$
Se $L<1$, la serie converge assolutamente. Se $L>1$, il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se $L=1$ il test è inconclusivo. Abbiamo allora
$$L=\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}<1\iff 2|x-1|<\sqrt{x^2+4}$$

e quindi
$$\begin{gathered}4(x^2-2x+1)<x^2+4\\3x^2-8x<0\\x(3x-8)<0\end{gathered}$$
allora la soluzione è $0<x<\frac{8}{3}$. In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se $x<0$ o $x>\frac{8}{3}$ la serie non converge. Poiché è a termini positivi per $x\leq 1$ se $x<0$ la serie diverge. Per $x>\frac{8}{3}$ la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se $x=0$ o $x=\frac{8}{3}$ abbiamo $L=1$ e il criterio è inane. Per tali valori,
$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}}=1$$
poiché
$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$
è negativo in $x=0$ e positivo in $x=\frac{8}{3}$, concludiamo che per $x=0$,
$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}=-\frac{1}{2}$$
e la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{-n}\log n}{n+\sqrt{n}}$$
Invece, per $x=\frac{8}{3}$ abbiamo che
$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}=+\frac{1}{2}$$
e la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+2^{-n}\log n}{n+\sqrt{n}}$$

Nel caso $x = 0$ la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \to 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso $x = \frac{8}{3}$ la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione a_n è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2^n (n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché $\frac{\log n}{n + \sqrt{n}} \to 0$, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per $x = \frac{8}{3}$.