

# Precorso

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Connettori logici</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teoria ingenua degli insiemi</b>	<b>2</b>
2.1	Operazioni tra insiemi . . . . .	3
2.2	Proprietà delle operazioni fra insiemi . . . . .	5
2.3	Corrispondenze e funzioni . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Equazioni</b>	<b>9</b>
3.1	Legge di cancellazione . . . . .	9
3.2	Polinomi . . . . .	9
3.3	Moltiplicazione fra polinomi . . . . .	10
3.4	Divisione fra polinomi . . . . .	10
3.5	Equazioni algebriche . . . . .	11
3.6	Soluzioni di equazioni polinomiali semplici . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Disequazioni</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Potenze di numeri</b>	<b>14</b>
5.1	Potenze di numeri reali con esponenti interi . . . . .	14
5.2	Radicali . . . . .	14
5.3	Potenze di numeri reali con esponenti razionali positivi . . . . .	15
5.4	Potenze di numeri reali con esponenti reali . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Disequazioni son valore assoluto</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Logaritmi</b>	<b>17</b>
<b>8</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>19</b>
<b>9</b>	<b>Trigonometria</b>	<b>22</b>

## 1 Connettori logici

### Definizione Proposizione

Una *proposizione* è un'espressione che può essere vera o falsa.

### Definizione Connettore logico e

Date due proposizioni  $P$  e  $Q$ ,  $P \wedge Q$ , è un'altra proposizione vera solamente se  $P$  è vera e  $Q$  è vera.

$\wedge$	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	falso
vero	falso	falso
vero	vero	vero

### Definizione Connettore logico oppure

Date due proposizioni  $P$  e  $Q$ ,  $P \vee Q$ , è un'altra proposizione vera se  $P$  è vera oppure  $Q$  è vera (o entrambe sono vere).

$\vee$	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	vero
vero	falso	vero
vero	vero	vero

## 2 Teoria ingenua degli insiemi

### Definizione Insieme ingenuo

Un *insieme* è una collezione di oggetti di qualunque tipo, detti *elementi dell'insieme*. Diciamo che un elemento  $a$  appartiene ad un insieme  $A$  con  $a \in A$ , mentre  $a \notin A$  se non appartiene.

### Esempio Insieme

$$A = \{3, 5, -3, \sqrt{5}, \phi\}$$

dove  $\phi$  è una funzione.

È importante notare che l'ordine degli elementi non ha importanza. Un insieme può contenere tra i suoi elementi anche altri insiemi.

Un insieme viene spesso descritto per mezzo di una proprietà comune dei suoi elementi, piuttosto che per elencazione estensiva.

### Esempio Insieme costruito per proprietà

$$D = \{n \mid n = m^2 - 1, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

In generale, può essere difficile determinare se un elemento appartiene ad un certo insieme o meno. Per esempio, non è sempre facile determinarne se un grande numero appartiene all'insieme di tutti i

numeri primi. In alcuni casi, è difficile addirittura stabilire se un insieme contenga elementi, o quanti ne contenga. Tuttavia, questa difficoltà non implica che l'insieme non sia ben definito.

### Definizione Sottoinsieme

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo che  $A$  è un *sottoinsieme* di  $B$ , se ogni elemento di  $A$  è un elemento di  $B$ .

$$A \subseteq B \iff B \supseteq A \iff \forall a \in A, a \in B$$

In caso contrario, diciamo che  $A \not\subseteq B$  oppure  $B \not\supseteq A$

### Esempio Sottoinsieme

$$\{1, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \{ \text{insieme dei numeri dispari} \}$$

$$\{1, 3, 5, 8, 11\} \not\subseteq \{ \text{insieme dei numeri dispari} \}$$

### Definizione Sottoinsieme proprio o stretto

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo che  $A$  è un *sottoinsieme proprio* di  $B$ , se ogni elemento di  $A$  è un elemento di  $B$  ma  $A \neq B$ .

$$A \subset B \iff B \supset A \iff \forall a \in A, a \in B \wedge A \neq B$$

In caso contrario, diciamo che  $A \not\subset B$  oppure  $B \not\supset A$

### Esempio Sottoinsieme proprio

$$\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 4, 5\}$$

Alcuni insiemi convenzionali sono:

- **Insieme dei numeri naturali:**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ;
- **Insieme dei numeri interi:**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ;
- **Insieme dei numeri razionali:**  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$ ;
- **Insieme dei numeri reali:**  $\mathbb{R}$ ;
- **Insieme dei numeri complessi:**  $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ;

## 2.1 Operazioni tra insiemi

### Definizione Intersezione

Dati degli insiemi  $A$  e  $B$ , l'*intersezione* di  $A$  e  $B$  è data da gli insiemi che stanno sia in  $A$  che in  $B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

### Definizione Unione

Dati degli insiemi  $A$  e  $B$ , l'*unione* di  $A$  e  $B$  è data da gli insiemi che stanno o in  $A$  o in  $B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

### Definizione Differenza

Dati degli insiemi  $A$  e  $B$ , la *differenza* di  $A$  e  $B$  è data da gli insiemi che stanno in  $A$  ma non in  $B$

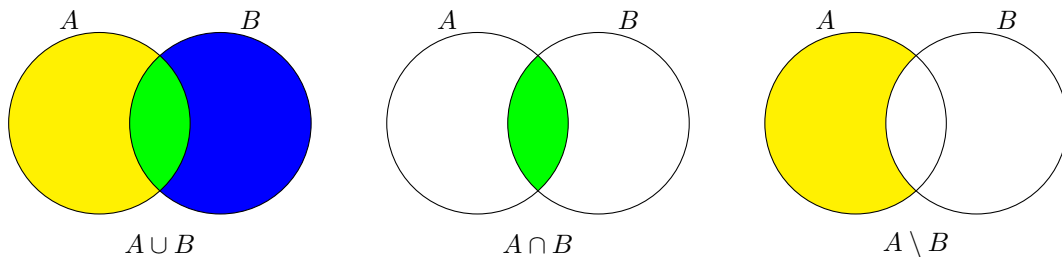
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

### Esempio Intersezione

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{\text{insieme dei numeri primi}\} = \{1, 9\}$$

$$\{\text{insieme dei numeri primi}\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{\text{insieme dei numeri primi} > 13\}$$

Nota che, convenzionalmente, nella definizione dei numeri primi il numero 1 è escluso.



Il disegno suggerisce la seguente proposizione

### Proposition

Dati due insiemi  $A$  e  $B$

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

Si può dimostrare separatamente che ogni elemento del primo insieme appartiene al secondo e viceversa. Prendiamo quindi  $x \in A$ , bisogna mostrare che  $x \in A \setminus B$  oppure  $x \in A \cap B$ , siccome si tratta di una intersezione fra due insiemi. Abbiamo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni deve essere vera:

1.  $x \in A \wedge x \notin B$
2.  $x \in A \wedge x \in B$

Se  $x \in B$ , allora  $x \in A \cap B$ . Se  $x \notin B$ , allora  $x \in A \setminus B$ . Di conseguenza, almeno una delle due è vera.

Viceversa, sia  $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ . Abbiamo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni è vera

1.  $x \in A \wedge x \notin B$  quindi  $x \in A \setminus B$
2.  $x \in A \wedge x \in B$  quindi  $x \in A \cap B$

Se la prima è vera, entrambi  $x \in A$  e  $x \notin B$  sono vere (in particolare,  $x \in A$  è vera). Se la seconda è vera, entrambe  $x \in A$  e  $x \in B$  sono vere (in particolare,  $x \in A$  è vera). In ogni caso,  $x \in A$  è vera.

## 2.2 Proprietà delle operazioni fra insiemi

### Proposition

Dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$

- **Intersezione commutativa:**  $A \cap B = B \cap A$
- **Unione commutativa:**  $A \cup B = B \cup A$
- **Intersezione associativa:**  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Unione associativa:**  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- **Distributiva:**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Distributiva:**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Di conseguenza,  $A \cap B \cap C$  e  $A \cup B \cup C$  non sono ambigue.

Data una famiglia di insiemi  $\{A_i\}_{i \in I}$  dove  $I$  è un insieme di indici, è possibile eseguire l'unione e intersezioni

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

e

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

ossia rispettivamente l'insieme che contiene tutti gli elementi di tutti gli insiemi  $A_i$  e quello che tutti gli insiemi  $A_i$  hanno in comune.

### Proposition

Dati due insiemi  $A$  e  $B$

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Chiaramente, nessun elemento soddisfa la condizione data, in quanto un elemento dovrebbe sia appartenere ad  $A$  e non appartenere ad  $A$ , e sia appartenente a  $B$  che non appartenente a  $B$ .

### Definizione Prodotto cartesiano

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle coppie ordinate

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

### Esempio Prodotto cartesiano

Dati  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  abbiamo

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Questa operazione non è commutativa, in quanto le coppie ordinate di  $A \times B$  e  $B \times A$  hanno le coppie di elementi scambiate.

### Definizione Prodotto cartesiano generalizzato

Dati degli insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle n-uple

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \cdots a_n \in A_n\}$$

Chiaramente, per ogni insieme  $A$ ,  $A \times \emptyset = \emptyset$

## 2.3 Corrispondenze e funzioni

### Definizione Corrispondenza

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una *corrispondenza*  $\sim$  fra  $A$  e  $B$  è una legge che lega gli elementi di  $A$  e  $B$

$$\sim \subseteq A \times B$$

Diciamo che  $a \in A$  è in relazione con  $b \in B$  se la tupla  $(a, b)$  è in  $\sim$ .

### Definizione Operatore divisione

Dati  $m, n \in \mathbb{N}$ , possiamo mettere in relazione  $m$  e  $n$ , dicendo che  $m$  divide  $n$ , scrivendo  $m \mid n$ .

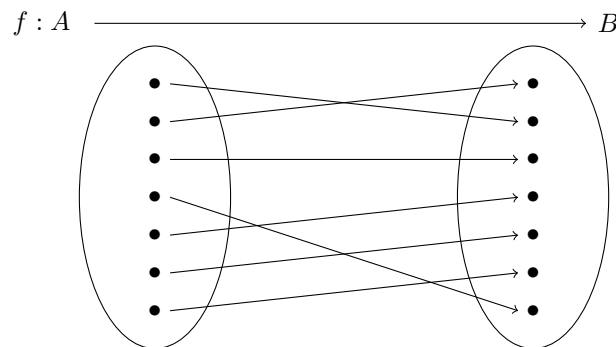
La divisione fra interi induce una corrispondenza  $\sim \subseteq \mathbb{N}^2$  dove  $x \sim y \iff x \mid y$ . Alcuni elementi di questa corrispondenza sono  $(1, 2), (1, 100), (2, 50), (50, 250)$ . Possiamo anche scrivere  $50 \sim 250$  oppure  $50 \not\sim 251$ .

### Definizione Funzione

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una *funzione*  $\phi$  da  $A$  a  $B$ , scritta  $\phi: A \rightarrow B$  è una corrispondenza da  $A$  a  $B$  in cui per ogni tupla  $(a, b)$ , non vi sono altre tuple  $(a, c)$  dove  $c \neq b$ , e per ogni  $a \in A$  vi è una corrispondenza  $(a, b)$ .

$$\phi \subseteq A \times B$$

L'insieme  $A$  è detto *dominio*, mentre l'insieme  $B$  è detto *codominio*.



Ogni funzione deve avere una (sola) freccia che parte da ogni punto.

In parole povere ciò significa che una funzione deve associare ogni elemento di  $A$  ad un elemento di  $B$ , ma solo ed unicamente uno. Elementi di  $A$  diversi possono essere in relazione con lo stesso elemento di  $B$ .

### Esempio Funzione

La corrispondenza da  $A = \mathbb{Z}$  a  $B = \mathbb{Z}$  data da  $a \sim b \iff b^2 = a$  è una funzione.

$$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

La corrispondenza opposta  $a \sim b \iff a^2 = b$  non è una funzione perché non tutti gli elementi hanno una corrispondenza.

### Esempio Funzione

La corrispondenza da  $A = \mathbb{R}$  a  $B = \mathbb{R}^+$  data da  $a \sim b \iff a = b^2$  è una funzione, ma non l'inverso.

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

### Esempio Funzione

La corrispondenza da  $A = \mathbb{R}^+$  a  $B = \mathbb{R}^+$  data da  $a \sim b \iff a = b^2$  è una funzione, e pure il suo inverso da  $B$  ad  $A$ .

$$\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

### Definizione Funzione identica

Dato un insieme  $A$ , una funzione

$$\phi: A \rightarrow A$$

è detta *identica*  $I_A$ , se ogni elemento viene relazionato con sè stesso.

### Definizione Suriettività

Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è detta *suriettiva* se per ogni elemento  $b \in B$ , esiste almeno un elemento  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$ .

### Definizione Iniettività

Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è detta *iniettiva* se per ogni elemento  $b \in B$ , esiste al massimo un  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$ .

### Definizione Iniettività

Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è detta *biettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Una funzione biettiva è quindi una corrispondenza dove ogni elemento viene relazionato con solo un elemento. Ogni funzione biettiva è sempre reversibile.

### Definizione Funzione inversa

Data una funzione  $\phi: A \rightarrow B$  biettiva, è possibile definire la *funzione inversa*  $\phi^{-1}: B \rightarrow A$ , che è data alla corrispondenza con gli elementi delle coppie ordinate invertite.

### Definizione Composizione di funzioni

Dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  e le funzioni  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , dove  $f$  è suriettiva, la *composizione* di  $f$  e  $g$  è una funzione data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### Proposition Composizione di funzione e inversa

Data una funzione  $\phi: A \rightarrow B$  e la sua inversa  $\phi^{-1}: B \rightarrow A$  abbiamo che

$$\phi \circ \phi^{-1} = I_B$$

$$\phi^{-1} \circ \phi = I_A$$

**Esempio** Surriettività e iniettività

La funzione  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  data da  $y = x^2$  è suriettiva ma non iniettiva.

**Esempio** Surriettività e iniettività

La funzione  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $y = x^2$  è iniettiva ma non suriettiva.

**Esempio** Biettività

La funzione  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  data da  $y = x^2$  è iniettiva e suriettiva, quindi biettiva.



## 3 Equazioni

### 3.1 Legge di cancellazione

#### Teorema Legge di cancellazione

Dati  $a, c, b \in \mathbb{R}$ ,

$$ac = bc \iff a = b$$

purché  $c \neq 0$

Il passaggio da  $f(x) = g(x)$  a  $f(x)h(x) = g(x)h(x)$  potrebbe introdurre delle nuove soluzioni (come quando  $h(x) = 0$ ) oppure perdere delle soluzioni.

Per semplificare  $f(x)h(x) = g(x)h(x)$  è necessario prima cercare le soluzioni di  $h(x) = 0$ . Successivamente, cercare le soluzioni di  $f(x) = g(x)$ . Le soluzioni sono l'unione degli insiemi soluzioni di così trovate.

Il passaggio da  $f(x) = g(x)$  a  $f^2(x) = g^2(x)$  è possibile, ma potrebbe introdurre nuove soluzioni (che vanno testate nell'equazione originale). Invece, non possiamo ricavare le soluzioni di  $f(x) = g(x)$  da  $f^2(x) = g^2(x)$ .

Il passaggio da  $f(x) = g(x)$  a  $f^3(x) = g^3(x)$  è possibile in quanto il cubo è una funzione iniettiva.

#### Teorema

Data una equazione  $f(x) = g(x)$ , le sue soluzioni sono equivalenti a  $f^n(x) = g^n(x)$  se  $n$  è dispari. Nel caso  $n$  fosse pari, l'equazione  $f^n(x) = g^n(x)$  può essere ridotta a  $f(x) = g(x)$  e  $f(x) = -g(x)$ .

### 3.2 Polinomi

#### Definizione Polinomio $\mathbb{R}$

Un *polinomio* a coefficienti in  $\mathbb{R}$  è un'espressione del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

dove i *coefficienti*  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Un polinomio  $p$  definisce una funzione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ponendo  $\alpha \rightarrow a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$ .

#### Definizione Grado di un polinomio

Dato un polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , il *grado* del polinomio, denotato  $\deg p(x)$ , è il massimo indice  $i$  tale che  $a_i \neq 0$ . Il coefficiente  $a_i$  viene chiamato *coefficiente direttivo*.

Il polinomio nullo  $p = 0$  non ha quindi un grado. Tuttavia, a volte si dice che il polinomio nullo abbia grado  $-\infty$  oppure  $-1$ .

I polinomi di grado 0 sono quindi della forma  $p(x) = a$  per  $a \neq 0$ .

#### Esempio Grado di polinomio

Il grado del polinomio  $3 + 2x + 0x^2 - 4x^3 + 0x^4$  è 3.

### 3.3 Moltiplicazione fra polinomi

I polinomi si possono sommare e moltiplicare secondo le usuali regole.

#### Teorema Moltiplicazione di polinomi

Dati i polinomi

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

Il loro prodotto è dato da

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^n c_i$$

dove

$$c_i = \sum_{h=0}^i a_h b_{i-h}$$

le operazioni tra polinomi si comportano bene rispetto alla valutazione. Se  $p(x)+q(x) = h(x)$  e  $p(x)q(x) = k(x)$ , allora per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha  $p(\alpha) + q(\alpha) = h(\alpha)$  e  $p(\alpha)q(\alpha) = k(\alpha)$ .

### 3.4 Divisione fra polinomi

#### Proposition Divisione fra polinomi

Dati due polinomi  $f(x)$  e  $g(x)$  con  $g(x) \neq 0$ . Allora, esistono e sono univocamente determinati due polinomi  $q(x)$  e  $r(x)$  tali che

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

con  $r(x) = 0$  oppure  $\deg r(x) < \deg g(x)$ .

#### Proof Esistenza del quoziente e resto

Poniamo dei valori iniziali a  $q(x)$  e  $r(x)$  ponendo  $q_0(x) = 0$  e  $r_0 = f(x)$  (affinché l'equazione rimanga soddisfatta).

Se fosse  $r_0(x) = 0$  o  $\deg r_0(x) < \deg g(x)$  (cioè se il dividendo è il polinomio nullo o ha il grado minore del divisore, ho già finito). Altrimenti, abbiamo la situazione in cui  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  con  $a_n \neq 0$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  e  $a_m \neq 0$  e  $m \leq n$ .

A questo punto aggiustiamo il quoziente, ponendo quindi

$$q_1(x) = q_0(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

e trovo

$$\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - q_1(x)g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - \left( \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_0 + \dots + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_mx^m \right) \\ &= a_nx^n - a_nx^n + \dots \end{aligned}$$

E quindi rimangono solamente termini di grado minore di  $n$ . Dunque  $r_1(x) = 0$  oppure  $r_1(x)$  ha grado minore di  $r_0(x) = f(x)$  (cioè il grado è diminuito).

Se  $r_1(x) = 0$  o  $\deg r_1(x) < \deg g(x)$  ho finito. Se  $\deg r_1(x) \geq \deg g(x) = m$  si ripete il ragionamento. Eventualmente verranno trovati resti di gradi via via più piccoli (o addirittura resto nullo). Il processo termina quando il resto è nullo  $r_k(x) = 0$  o il suo grado è minore del grado del quoziente  $g(x)$ . Il quoziente e il resto sono quindi  $q_k(x)$  e  $r_k(x)$ .

### Proof Unicità del quoziente e resto

Supponiamo che  $f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$  con  $r(x) = 0$  o  $\deg r(x) < \deg g(x)$  e  $r'(x) = 0$  o  $\deg r'(x) < \deg g(x)$ .

Partendo da  $g(x)q(x) - g(x)q'(x) = r'(x) - r(x)$ , giungiamo a  $q(x)(q(x) - q'(x)) = r'(x) - r(x)$ . Per la dimostrazione supponiamo che quoziente e resto non siano unici, quindi che  $q(x) \neq q'(x)$  oppure  $q(x) - q'(x) \neq 0$ , il primo membro avrebbe grado almeno  $n$ . Il secondo membro è nullo o ha grado minore di  $n$ . Questa è una contraddizione, confutando quindi la supposizione. Il quoziente è quindi unico e, naturalmente, anche il resto.

	Divisore $g(x)$
Dividendo $f(x)$	Quoziente $q(x)$
$\vdots$	
$\vdots$	
$\vdots$	
Resto $r(x)$	

### Esempio Divisione polinomi

Prendiamo  $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$  e  $g(x) = 2x^3 + 2$ . Allora  $f(x) = g(x)(2x^2 + \frac{3}{2}) + (-2x^2 - x - 2)$

## 3.5 Equazioni algebriche

### Definizione Equazione algebrica

Un'equazione *algebrica* è una equazione del tipo  $f(x) = 0$  dove  $f(x)$  è un polinomio non-nullo.

Il grado di una equazione algebrica è il grado del polinomio.

### Teorema Teorema del resto

Dato un polinomio  $p(x)$  e un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la divisione di  $p(x)$  per  $x - \alpha$  ha resto  $p(\alpha)$ .

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$$

### Proof Teorema del resto

Dividendo  $p(x)$  per  $x - \alpha$  troviamo che  $f(x)$  è uguale a

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$$

dove  $r(x) = 0$  oppure  $\deg r(x) < \deg x - \alpha = 1$ . Quindi  $r(x)$  è costante. Abbiamo allora  $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$  e quindi

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$$

e quindi  $r(x) = p(\alpha)$ .

### Corollario

Il valore  $\alpha$  è soluzione di  $f(x) = 0$  se e solo se  $f(x) = (x - \alpha)q(x)$  per qualche  $q(x)$ .

### Corollario Numero di soluzioni di equazione algebriche

Se  $f(x) = 0$  è un'equazione algebrica di grado  $n$ , allora ha al massimo  $n$  soluzioni distinte.

### Proof Numero di soluzioni di equazione algebriche

Siano  $a_1, a_2, \dots, a_t$  soluzioni distinte di  $f(x) = 0$  dove  $f(x)$  non è nullo. Dobbiamo dimostrare che  $t < n$ . Per il teorema del resto  $f(x) = (x - a_1)q_1(x)$  per qualche polinomio  $q_1(x)$ . Lo stesso vale per  $a_2, a_3, \dots$ . Sostituendo otteniamo quindi  $0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)q_1(a_2)$ . Poiché  $a_1 \neq a_2$ , abbiamo allora (per il principio di annullamento) che  $q_1(a_2) = 0$ . Per il teorema del resto  $q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)$  per qualche  $q_2(x)$ , e quindi  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$ . Per induzione, giungiamo a  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)q_t(x)$  e confrontando i gradi troviamo che  $t \leq n$ .

## 3.6 Soluzioni di equazioni polinomiali semplici

L'equazione di primo grado  $ax + b = 0$  con  $a \neq 0$  ha un'unica soluzione data da  $x = -\frac{b}{a}$ .

L'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  con  $a \neq 0$  e  $\Delta = b^2 - 4ac$  ha

$$\begin{cases} 0 & \Delta < 0 \\ 1 & \Delta = 0 \\ 2 & \Delta > 0 \end{cases}$$

soluzioni date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A partire dalle equazioni di secondo grado, non esiste una formula risolutiva.

### Esempio

La seguente equazione non è algebrica, in quanto gli oggetti non sono polinomi, ma potremo ricondurla ad una tale equazione.

$$-\frac{x}{4-x^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2+4x+4}$$

Bisogna innanzitutto verificare per quali valori di  $x$  le funzioni coinvolte sono definite. In questo caso, quando il denominatore è diverso da zero.

$$4-x^2 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \wedge x^2+4x+4 \neq 0$$

per cui  $x \neq 2 \wedge x \neq -2$ .

$$-\frac{x}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

La moltiplicazione per  $(2-x)(2+x)^2$  rischia di introdurre le soluzioni  $x = 2$  e  $x = -2$ .

$$\begin{aligned} -x(2+x) &= -(2+x)^2 - 2(2-x) \\ -2x - x^2 &= -4 - 4x - x^2 - 4 + 2x \\ 0 &= -8 \end{aligned}$$

E quindi non abbiamo nessuna soluzione. Se ci fossero state delle soluzioni, avremmo dovuto scartare i valori 2 e -2 per le condizioni di esistenza.

## 4 Disequazioni

### Definizione Disequazione

Una *disequazione* è una funzione del tipo  $f(x) \neq g(x)$ ,  $f(x) > g(x)$  oppure  $f(x) \geq g(x)$  dove  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni reali.

Come si comportano le operazioni in  $\mathbb{R}$  rispetto all'ordinamento?

### Proposition

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  abbiamo

$$\begin{aligned}a \leq b &\iff a + c \leq b + c \\a \leq b &\iff ac \leq bc, \quad c > 0\end{aligned}$$

### Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \neq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

Le condizioni di esistenza sono  $x \neq 2 \wedge x \neq 0$ . Risolviamo l'equazione associata

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

e troviamo le soluzioni  $x = 1$  e  $x = -4$ . Per cui, le soluzioni della disequazione sono

$$\{x \mid x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4\}$$

### Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \leq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

In questo caso **non** è possibile moltiplicare per  $x(x-2)$  perché questo assume valori non sempre positivi. Si procede per

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2} - \frac{2}{2x-x^2} + \frac{3}{x} &\leq 0 \\ \frac{x^2 + 2 + 3(x-2)}{x(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x(x-2)} &\leq 0\end{aligned}$$

Sappiamo che  $x^2 + 3x - 4$  si annulla per  $x = 1$  e  $x = -4$ , e per il teorema del resto abbiamo che  $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ .

$$\frac{(x-1)(x+4)}{x(x-2)} \leq 0$$

Dallo studio dei segni di  $x-1$ ,  $x+4$ ,  $x$  e  $x-2$  possiamo determinare il segno dell'intera funzione nei vari intervalli. Giungiamo quindi alla soluzione

$$x \in [-4; 0) \cup [1; 2)$$

## 5 Potenze di numeri

### 5.1 Potenze di numeri reali con esponenti interi

#### Definizione Potenza intera su numero reale

Dato  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , il valore  $a^n$  viene definito con la seguente ricorrenza:

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a^{n-1} & n > 0 \\ \frac{1}{a^n} & n < 0 \end{cases}$$

per  $a \neq 0 \wedge n \neq 0$ .

È convenzionalmente possibile anche definire  $0^0 = 1$ . Mediante queste definizioni è possibile dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

#### Proposition Proprietà potenze

Dato  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n, m \in \mathbb{N}^+$ ,

1.  $a^n a^m = a^{m+n}$
2.  $(a^m)^n = a^{mn}$
3.  $(ab)^n = a^n b^n$

### 5.2 Radicali

#### Proposition Esistenza radicale

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ , esiste un unico  $\beta \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$\beta^n = \alpha$$

Nel caso  $n$  sia pari,  $(-\beta)^n = \alpha$ .

Se  $n$  è pari, i valori per beta possono essere due.

#### Definizione Radicale

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ , il valore positivo  $\beta$  tale che  $\beta^n = \alpha$  viene denotato  $\sqrt[n]{\alpha}$ . Questo valore è definito per

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\alpha} \geq 0 & n \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{R} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

#### Proposition Proprietà dei radicali

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n, m \in \mathbb{N}^+$ ,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$$

qualunque siano  $m, n$  se  $\alpha \geq 0$ , mentre solo se  $m$  e  $n$  sono entrambi dispari se  $\alpha < 0$ .

**Definizione Valore assoluto**

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il *valore assoluto* è dato da

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

**Proposition Radicale di quadrato**

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

**Proposition Semplificazione dei radicali**

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n, m, k \in \mathbb{N}^+$ , l'espressione

$$\sqrt[kn]{\alpha^{km}} = \begin{cases} \sqrt[n]{|\alpha|^m} & k \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha^m} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

### 5.3 Potenze di numeri reali con esponenti razionali positivi

**Definizione Potenza razionale positiva su numero reale**

Dato  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $q \in \mathbb{Q}$  con  $q = \frac{m}{n}$  dove  $m, n \in \mathbb{N}^+$ , il valore  $a^q$  viene definito nella seguente maniera:

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

per  $a \neq 0 \wedge q \neq 0$ .

Il motivo per cui la potenza razionale non è definita per una base negativa in quando il valore cambia se la frazione dell'esponente viene espressa in un altro modo. Per esempio  $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$ . Considerando solo gli esponenti ridotti ai minimi termini, cadrebbero le proprietà delle potenze.

**Esercizio Radicali**

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 + a^4}}{\sqrt{a}} \cdot \left( \sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} + \frac{a \sqrt[12]{1+a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^{-1}$$

Gli argomenti di radicali con esponenti dispari, non danno problemi. Gli argomenti di radicali con esponenti pari, devono essere non negativi. Dunque abbiamo queste condizioni

$$a \geq 0 \wedge \frac{1+a}{a} \geq 0 \wedge 1+a \geq 0$$

Inoltre, i divisori devono essere diversi da 0.

$$\sqrt{a} \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge \sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} \neq 0 \wedge \sqrt[4]{a} \neq 0$$

Le prime condizioni possono essere semplificate a  $a \geq 0$  Le seconde condizioni assieme alle prime possono essere ricondotte a  $a > 0$ . Semplificando l'espressione otteniamo

$$2\sqrt[4]{a^3} \sqrt[12]{1+a}$$

## 5.4 Potenze di numeri reali con esponenti reali

**Proprietà dei numeri reali** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi non vuoti di numeri reali tale che:

- per ogni  $x \in A$  e ogni  $y \in B$ , si ha  $x < y$ .
- per ogni  $k > 0$  esiste  $x \in A$  e  $y \in B$  tale che  $d(x, y) < k$ , cioè  $y - x < k$ .

Allora, esiste un unico numero reale tale che  $x \leq r \leq y$  per ogni  $x \in A$  e  $y \in B$ .

### Definizione Potenza reale su numero reale

Dato un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{R}$ . Per caso il caso  $\alpha > 1$ . Si può dimostrare che se  $p < q$  sono due razionali, allora  $\alpha^p < \alpha^q$ . Allora, considerando i due insiemi

$$A = \{\alpha^p \mid p \in \mathbb{Q}, p < r\}$$

e

$$B = \{\alpha^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < r\}$$

ogni elemento di  $A$  è minore di ogni elemento di  $B$ . Inoltre, si può dimostrare che  $A$  e  $B$  sono due insiemi che soddisfano anche la seconda richiesta proprietà di prima, cioè la vicinanza arbitraria. Dunque, esiste un unico reale  $s$  tale che  $x \leq s \leq y$  per ogni  $x \in A$  e ogni  $y \in B$ . Poniamo allora

$$\alpha^r = s$$

La definizione per  $\alpha = 1$  è data da  $\alpha^r = 1$ .

La definizione per  $\alpha < 1$  è analoga (con ordinamento scambiato).

La definizione è ben posta e si può dimostrare che in questo modo le proprietà delle potenze si estendono.

### Proposition Proprietà potenze reali

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$

$$(ab)^r = a^r b^r, \quad a, b \geq 0$$

Inoltre,

$$a^r < a^s \iff a > 1 \wedge r < s$$

$$a^r > a^s \iff 0 < a < 1 \wedge r < s$$

Tra gli esponenziali, di particolare importanza, è quello di base numero di Eulero  $e$ , un numero definito per procedimento di limite.



## 6 Disequazioni con valore assoluto

Supponiamo di avere una disequazione  $k \geq |g(x)|$  con  $k \geq 0$ , allora  $-k \leq g(x) \leq k$ . Nel caso in cui  $k < 0$ , la disequazione non avrebbe soluzioni.

Se, al posto di  $k$ , avessimo una funzione, come in

$$f(x) \geq |g(x)|$$

si potrebbe comunque studiare il segno di  $f(x)$  per verificare quando è positivo. Tuttavia, ciò non è strettamente necessario. Possiamo considerare il valore assoluto come  $|a| = \max a, -a$ . Allora,  $f(x) \geq |g(x)|$  è equivalente a  $f(x) \geq \max g(x), -g(x)$  e quindi  $-f(x) \leq g(x) \leq f(x)$ . Analogamente, lo stesso ragionamento vale per  $f(x) \leq |g(x)|$ , il che è equivalente a  $g(x) \leq -f(x) \vee g(x) \geq f(x)$ .

## 7 Logaritmi

L'esponenziale è definito per basi  $a > 0$ . Assume, al variare di  $x$ , tutti i valori reali positivi se  $x \neq 1$ .

### Definizione Logaritmi

La soluzione dell'equazione

$$a^x = b$$

con  $b > 0$  e  $a > 0 \wedge a \neq 1$ , è pari al *logaritmo* di  $b$  in base  $a$

$$x = \log_a(b)$$

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle dell'esponenziale.

### Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g.  $\ln(x(x-1))$  non si può riscrivere come  $\ln(x) + \ln(x-1)$  perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo  $\log_2(x^2)$ , possiamo riscriverlo come  $2 \log_2 |x|$ .

### Esercizio Logaritmi

$\log_2(x) + \log_3(x-1)$  è definito per  $x > 1$ . Per portare tutto in base 2 è necessario eseguire la seguente operazione

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2(x-1) &= \log_2 x + \log_2(x-1)^{\log_3(2)} \\ &= \log_2(x(x-1)^{\log_3(2)}) \end{aligned}$$

### Esercizio

L'equazione

$$3^{x+1} = 5$$

ha soluzione  $x = 1 \log_3(5)$ .

### Esercizio

L'equazione

$$\log(x-1) + \log(2x+1) = 2\log(x+1)$$

ha condizioni iniziali  $x > 1$ .

$$\begin{aligned}\log(x-2)(2x-1) &= \log(x+1)^2 \\ &= (x-1)(2x-1) = (x+1)^2 \\ &= x^2 - 5x = 0\end{aligned}$$

che ha come soluzioni  $x = 0$  e  $x = 5$ . Di queste solo  $x = 5$  è compatibile con la condizione di esistenza.

## 8 Sistemi lineari

### Definizione Sistema lineare

Un *sistema lineare* di  $m$  equazioni in  $n$  incognite è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  e  $x_j$  sono incognite.

Le soluzioni di un tale sistema sono n-uple.

### Esempio Sistema equazioni

$$\begin{cases} 2x - 3y + \sqrt{3} - 7w = 2 \\ x + 0y + 4z - 11w = 1 \end{cases}$$

In questo caso le soluzioni sono quaterne.

### Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x = z \\ 5y = -7 \\ 3z = 4\pi \end{cases}$$

ha un'unica soluzione  $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{4\pi}{3})$ .

### Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x + 5w = 2 \\ 2y = \sqrt{5} \\ 3z - 2w = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

si può risolvere trattando  $w$  come un parametro, e trovare le soluzioni accordatamente. La soluzione è  $(x, y, z, w) = (\frac{2-5w}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}-2w}{3}, w)$ , ossia un insieme infinito di soluzioni, in funzione di  $w$  (parametro libero).

Le trasformazioni lecite su un sistema sono quelle reversibili:

- riordinare l'ordine delle equazioni;
- moltiplicare un'equazione per una costante non nulla;
- sostituire a un'equazione la somma tra quella equazione e  $k$  volte un'altra.

### Esempio Trasformazioni sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 2x - 3z - w = 5 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

È possibile sommare alla seconda equazione 3 volte la prima, si trova

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 11x + 6y - 12z + 20w = 11 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

In questo modo ho ottenuto un altro sistema equivalente ma non mi sono avvicinato alla soluzione. Avrei potuto generalmente sommare alla seconda equazione  $k$  volte la prima, e notare che con  $k = -\frac{2}{3}$  si ottiene del progresso.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 0x - \frac{4}{3}y - \frac{14}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

Così facendo, nella terza equazione l'incognita  $x$  non compare. Adesso, è possibile usare la seconda equazione per eliminare la  $y$  dalla terza equazione.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ -\frac{4}{3}y - \frac{19}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ \frac{59}{2}z - \frac{45}{2}w = \frac{35}{2} \end{cases}$$

Trattando  $w$  come un parametro libero, dall'ultima equazione calcoliamo  $z$  in funzione di  $w$ , dalla seconda calcolo  $y$  in funzione di  $z$  e infine  $x$  in funzione di  $w$ .

### Esempio

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 2x + y - w = 3 \\ 3x + 2y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$$

Non è possibile utilizzare la prima equazione per eliminare la  $x$ , ma è possibile utilizzare la seconda per eliminarla dalle altre. Sottraiamo quindi 2 volte la seconda dalla terza, 3 volte la seconda dalla quarta.

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 3y - 2z - 7w = -1 \\ 5y - 12w = -6 \end{cases}$$

Vi è il rischio che un'incognita eliminata venga reintrodotta quando si prova ad eliminarne una seconda. Per evitare il problema, dopo aver utilizzato una equazione una certa equazione per eliminare una certa incognita, è cosa furba portare tale equazione in testa al sistema, e successivamente continuo lavorando sulle successive.

### Esercizio Sistema senza soluzioni

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 7y - 4y + 13z = 6 \end{cases}$$

Usiamo la prima equazione per eliminare la  $x$  dalle successive

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ \frac{26}{3}y + \frac{4}{3}z = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Usiamo la seconda equazione per eliminare la  $y$  dalla successiva.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Di conseguenza, il sistema *non* ha soluzioni in quanto l'ultima equazione non è mai soddisfatta.

Nel caso ottenessimo un'equazione del tipo  $0x + 0y + 0z + \dots = 0$ , ossia un'identità, essa può essere scartata in quanto non contiene nessuna informazione necessaria.

## 9 Trigonometria

Per introdurre le funzioni goniometriche è comodo impostare come sistema di riferimento il piano cartesiano:

- un punto fissato  $O$ , detto *origina*;
- due rette ortogonali tra loro e passanti per  $O$ , dette *assi*;
- due punti  $U_1$  e  $U_2$ , sugli stessi assi, posti alla stessa distanza non nulla da  $O$ , detti *punti unitari*.

Fatto ciò, posso assegnare ad ogni punto  $P$  del piano una coppia di reali  $x_p, y_p$  detti *coordinate* del punto  $P$ . Per trovare  $x_p$  considero la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse che contiene  $U_1$ , trovando un certo punto  $H$ . Si considera il rapporto tra le lunghezze del segmento  $\overline{OH}$  e la lunghezza del segmento  $\overline{OU_1}$ . Poniamo poi

$$x_p = \begin{cases} \frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{se } H \text{ e } U_1 \text{ stanno sulla stessa semiretta di origine } O \\ -\frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analogamente, per  $y_p$  vale lo stesso. Definiamo le seguenti linee:

- la retta  $OU_1$  è detta asse delle  $x$  o asse delle ascisse;
- la retta  $OU_2$  è detta asse delle  $y$  o asse delle ordinate;

Se  $P$  e  $Q$  sono due punti diversi, almeno una delle due proiezioni e quindi  $P$  e  $Q$  hanno almeno una coordinata diversa; in altri termini la coppia  $(x_p, y_p)$  individua  $P$ . Viceversa, data una coppia di numeri reali  $(x, y)$  si trova un unico punto che ha esattamente  $(x, y)$  come coordinate. Dunque, possiamo identificare il piano con l'insieme delle coppie ordinate dei numeri reali  $\mathbb{R}^2$ .

(In realtà, non è strettamente necessario considerare tutte le coppie di numeri reali per soddisfare gli assiomi euclidei)

Supponiamo di avere una semiretta  $s$  uscente dall'origine. È possibile associare un angolo  $\theta$  fra la semiretta e l'ascisse. Chiaramente, lo stesso angolo può assumere anche i valori  $\theta + 2k\pi$   $k \in \mathbb{N}$  oppure, l'angolo inverso,  $2\pi - \theta$ . Quindi, abbiamo infiniti angoli che quantificano la stessa ampiezza di semiretta.

Questo sistema, detto *radiante* prende come riferimento il valore  $2\pi$  per quantificare un giro completo attorno all'origine. Una semiretta con ampiezza 1 radiante, forma un arco di lunghezza dell'arco stesso.

Esiste anche il sistema sessagesimale dove un angolo giro equivale a  $360^\circ$ . La conversione da radianti  $x$  e  $x^\circ$  è data da

$$x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} x$$

### Definizione Funzione seno

Dato un angolo  $\theta$ , la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza  $\theta$ . Consideriamo il punto  $P$  come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore  $\sin \theta$  rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di  $P$  sulle ascisse.

### Definizione Funzione coseno

Dato un angolo  $\theta$ , la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza  $\theta$ . Consideriamo il punto  $P$  come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore  $\cos \theta$  rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di  $P$  sulle ordinate.

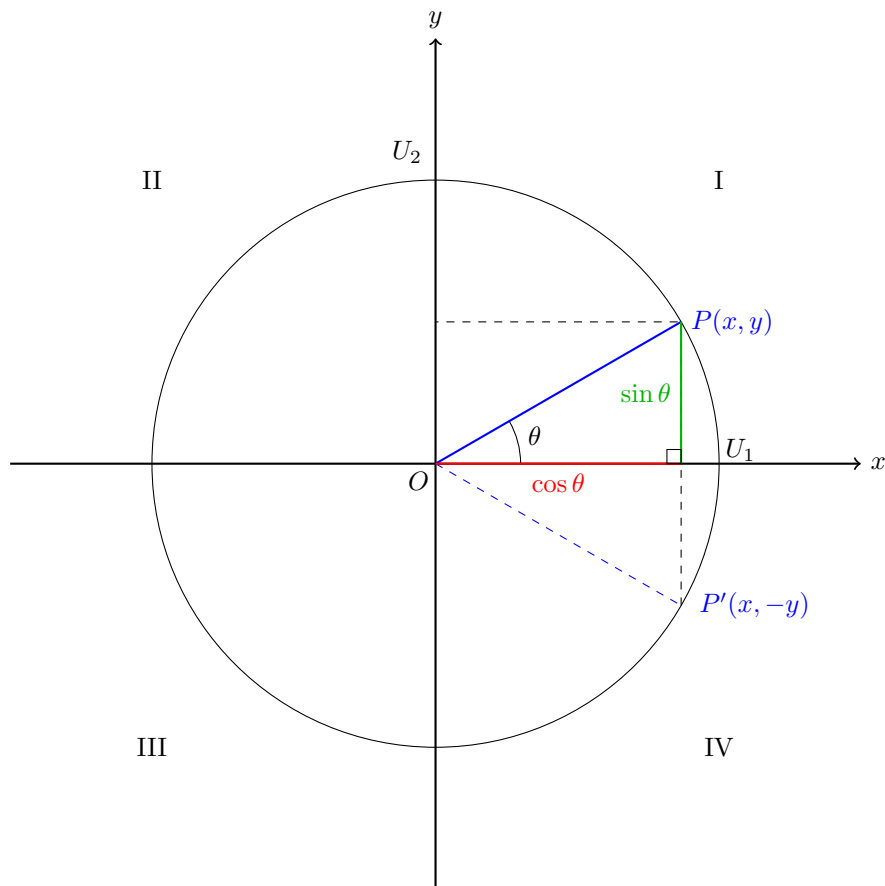
**Definizione Funzione tangente**

Dato un angolo  $\theta$ , la *tangente* è definita come

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

quando  $\cos \theta \neq 0$ .

Il coseno è pari a zero solo quando  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$  per  $k \in \mathbb{N}$ .



Notiamo che il punto  $P$ , che sta sulla circonferenza, dista 1 dall'origine, e forma un triangolo rettangolo in  $(0, P_y)$ . Per il teorema di pitagora, abbiamo allora la seguente proposizione:

**Proposition Relazione pitagorica**

Dato un  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Da questa proposizione possiamo anche chiaramente vedere che

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

e

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—
$\frac{3\pi}{2}$	—1	0	—
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche con un periodo di  $2\pi$ . La funzione coseno possiede la medesima forma del seno ma è spostata di  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\cos \theta = \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

La funzione tangente è anch'essa periodica ma ha un periodo di  $\pi$ .

Da mettere: grafici.