

# Analisi I

Paolo Bettelini

## Contents

<b>1</b>	<b>Assiomi di Peano</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Principio di induzione</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Combinatoria</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Funzione indicatrice</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Altre proprietà</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Interi relativi</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Definizioni con ordini</b>	<b>9</b>
7.1	Considerazioni . . . . .	9
7.2	Estremi superiori e inferiori . . . . .	10
7.3	Conseguenze della proprietà del sup . . . . .	12
7.4	Esercizi sup . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Esponenziali</b>	<b>16</b>
8.1	Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi . . . . .	16
8.2	Potenze a esponente reale . . . . .	16
8.3	Esponenziali . . . . .	17
8.4	Assioma di continuità . . . . .	17
<b>9</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>19</b>
9.1	Inclusione dei reali . . . . .	19
9.2	Operazioni algebriche . . . . .	19
9.3	Passaggio polari e cartesiane . . . . .	20
9.4	De Moivre . . . . .	20
<b>10</b>	<b>Distanza fra due insiemi</b>	<b>20</b>
<b>11</b>	<b>Teorema di Ruffini</b>	<b>21</b>
<b>12</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>22</b>
<b>13</b>	<b>Spazi topologici</b>	<b>22</b>
<b>14</b>	<b>Successioni</b>	<b>23</b>
14.1	Aritmetica dei limiti . . . . .	25
14.2	Limiti notevoli . . . . .	28
14.3	Limiti notevoli . . . . .	32
14.4	Limiti notevoli con funzioni trigonometriche . . . . .	34
14.5	Simboli di Landau . . . . .	35
14.6	Esercizi . . . . .	37

<b>15 Serie numeriche</b>	<b>38</b>
15.1 Aritmetica delle serie . . . . .	41
15.2 $p - q$ serie . . . . .	50
15.3 Formula di Stirling . . . . .	51
15.4 Serie a termini di segno qualunque . . . . .	53

## 1 Assiomi di Peano

### Definizione Assiomi di Peano

Gli *assiomi di Peano* includono i numeri naturali:

- il valore 1 è un numero;
- ogni numero  $n$  ha il suo successore  $S(n) = n + 1$ ;
- se  $m \neq n$ , allora  $S(m) \neq S(n)$ ;
- il numero 1 non è il successore di alcun numero;
- **assioma induttivo:** sia  $E \subseteq \mathbb{N}$  tale che  $1 \in E$ , allora

$$n \in E \implies S(n) \in E$$

Allora l'insieme  $E$  è l'insieme  $\mathbb{N}$ .

La funzione successore è iniettiva.

### Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{N}$  si dice *finale* se  $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$  per qualche  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Esiste quindi un valore  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

### Proposition

Usando l'assioma induttivo si deduce che se  $A$  è un insieme tale che  $n_0 \in A$  e  $\forall n \in A, S(n) \in A$ , allora  $A$  è finale.

## 2 Principio di induzione

### Teorema Principio di induzione

Sia  $P(n)$  una proposizione dove  $n \in \mathbb{N}$ , allora

$$P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

### Teorema Equivalenza principio e assioma di induzione

L'assioma induttivo è equivalente al principio di induzione.

### Proof Equivalenza assioma e principio di induzione

Given a proposition  $P(n)$ , let

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

( $\implies$ ) If  $0 \in E$ , then  $P(0)$  is true.

If  $n \in E \implies S(n) \in E$ , then  $P(n) \implies P(S(n))$ .

If the latter conditions are satisfied, then by the axiom of induction,  $E = \mathbb{N}$ , and thus

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

( $\impliedby$ ) If  $P(0)$  is true, then  $0 \in E$ .

If  $P(n) \implies P(S(n))$ , then if  $n \in E \implies S(n) \in E$ .

If the latter conditions are satisfied, then by the principle of induction

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in E$$

and thus  $E = \mathbb{N}$ .

### Proposition Principio di induzione forte

Il principio di induzione è equivalente alla seguente forma: sia  $P(n)$  una proposizione dove  $n \in \mathbb{N}$  tale che

- $P(1)$  è vera;
- $P(k)$  è vera per tutte le  $k \leq n$ , allora  $P(n+1)$  è vera.

Allora  $P(n)$  è vera per tutte le  $n$ .

### Esempio Principio di induzione

Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$ , la somma

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Il caso base è dato da  $n = 1$  dove  $1 = \frac{2}{2} = 1$ .
- Il caso induttivo è dato da  $\xi = n + 1$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + \xi &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{aligned}$$

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

e impostiamo  $j = n - k + 1$ , abbiamo che la sommatoria è pari a

$$\sum_{j=1}^n a_{n-j+1}$$

#### Esempio Principio di induzione

Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

#### Esempio Principio di induzione

Per ogni  $n \geq 0$  e per ogni  $h > -1$ ,

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

### 3 Combinatoria

Il valore  $n!$  è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da  $F_n$  a  $F_n$  che sono biettive. Dove  $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

#### Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è  $F_1$ , che contiene solo 1 elemento e  $1! = 1$ .
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme  $F_n$ , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in  $n+1$  posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è  $n!(n+1) = (n+1)!$ .

La funzione  $\sigma(n)$  è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta  $n$  elementi). Infatti, le permutazioni di  $n$  sono  $n!$ , ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

#### Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di  $k$  oggetti scelti fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero delle funzioni iniettive  $f: F_k \rightarrow F_n$ .

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

#### Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di  $k$  oggetti scelto fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero di sottoinsiemi di  $F_n$  di cardinalità  $k$ .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

**Lemma** Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme  $X$ .

### Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$  è equivalente a  $x \notin A \cap B$ , che è equivalente a  $x \notin A$  o  $x \notin B$ . Allora  $x \in A^c$  o  $x \in B^c$ , e quindi  $x \in A^c \cup B^c$ .

### Teorema Teorema del binomio

Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

## 4 Funzione indicatrice

### Definizione Funzione indicatrice

Sia  $X$  un insieme e  $E \subseteq X$ . La *funzione caratteristica* di  $E$  è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi  $E$  e  $F$ , abbiamo  $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$ .

La notazione  $y^x$  indica  $\{f: x \rightarrow y\}$ , cioè tutte le funzioni da  $x$  a  $y$ .

La funzione  $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$  è biettiva. La funzione  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  è pari a  $f = 1_E$  per  $E = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

## 5 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

## 6 Interi relativi

In  $\mathbb{N}$  è definita la funzione  $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  dove  $(m, n) \rightarrow m + n$ .

Abbiamo chiaramente che  $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$ .

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che  $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia,  $m - n$  è definito solo per  $m \geq n$ .

Definiamo  $\mathbb{Z}$  come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$ , e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma  $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

### Definizione Gruppo

Un insieme  $G$  con un operazione binaria  $\circ$  tale che

- **associativa:**  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- **elemento neutro:**  $\forall a \in A, \exists 0 \in G \mid 0 \circ a = a \circ 0 = a$
- **elemento opposto:**  $\forall a \in G, \exists a' \mid a + a' = a' + a = 0$

Se aggiungiamo la commutatività viene detto *gruppo abeliano*.

Per esempio  $(\mathbb{Z}, +)$  è un gruppo abeliano.

La struttura algebrica  $(\mathbb{Z}, \circ)$  dove  $(a, b) \rightarrow a \cdot b$  non è un gruppo abeliano, in quanto non c'è un inverso  $n^{-1}$  (c'è solamente per 1 e  $-1$ ). La divisione si può fare solo se uno è un multiplo dell'altro.

TODO: definizione di anello

Per definire gli inversi di tutti i numeri  $\neq 0$ , si introducono le frazioni  $\frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Si dice che due frazioni sono equivalenti  $\frac{m'}{n'}$  e  $\frac{m}{n}$  se  $mn' = m'n$ . I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione  $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$ .

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali  $\mathbb{Q}$  con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  introdotte. Quindi  $(\mathbb{Q}, +)$  è un gruppo abeliano,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo, per cui possiede le operazioni  $+$  e  $\cdot$  con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in  $\mathbb{Q}$  si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con  $a, b, x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di  $\mathbb{Q}$  ha un ordinamento totale dove  $r \leq s$  se e solo se  $r - s$  è non-negativa.

In  $\mathbb{Q}$  è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni  $+$  e  $\cdot$ , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con  $t \in \mathbb{Q}$  e con  $t \geq 0$  abbiamo  $tr \leq ts$ .

#### **Definizione** Campo ordinato

Un campo  $F$  nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in  $\mathbb{Q}$  sono risolvibili.

#### **Teorema** Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in  $\mathbb{Q}$ .

#### **Proof** Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini  $r = \frac{m}{n}$ , tale che  $r^2 = 2$ . Abbiamo quindi che  $\frac{m^2}{n^2} = 2$ , quindi  $m^2 = 2n^2$ . Ciò ci dice che  $m^2$  è pari. Allora, 2 è un fattore anche di  $m$  (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi  $m$  è pari. Di conseguenza, se  $m$  è divisibile per 2, allora  $m^2$  è divisibile per 4. Abbiamo quindi  $4k = n^2$  e quindi  $n^2$  è divisibile per 2, anche  $n$ , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.



## 7 Definizioni con ordini

### Definizione Insieme totalmente ordinato

Un *insieme ordinato* è una tupla  $(X, \leq)$  dove  $X$  è un insieme e  $\leq$  è un ordinamento totale.

Sia anche  $E \subseteq X$  un insieme dove  $E \neq \emptyset$ .

Si dice che  $m \in X$  è *maggiorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \leq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *superiormente limitato*.

Si dice che  $m \in X$  è *minorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \geq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme  $E$  si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore  $m \in X$  si dice *massimo* di  $E$  se  $M$  è un maggiorante di  $E$  e  $m \in E$ .

Un valore  $m \in X$  si dice *minimo* di  $E$  se  $M$  è un minorante di  $E$  e  $m \in E$ .

### 7.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme  $E$  sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio  $X = \mathbb{Q}$  ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di  $E$ . Vi sono diversi minoranti di  $E$ , come  $-1, -30$  etc. In generale, tutti i  $x \leq 0$  sono dei minoranti di  $E$ . I maggioranti di  $E$  sono tutti i valori  $x \geq 1$ .

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo  $r_n \in E$ . È facile vedere che  $r_n$  non può essere maggiorante in quanto se  $n' > n$ ,  $r_{n'} > r_n$ . Dato qualsiasi  $r_n$ , è possibile trovare un altro elemento in  $E$  che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che  $z < 1$ , verifichiamo quindi che  $z$  non è un maggiorante. Il valore  $z$  non è maggiorante di  $E$  se esiste una  $x \in E$  tale che  $x > z$ . Esiste infatti  $n$  tale che  $r_n > z$ , studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché  $1 - z > 1/n$ . Qualunque numero più piccolo di  $z$  sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

## 7.2 Estremi superiori e inferiori

### Definizione Estremo superiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo superiore* di  $E$  se  $\mu$  è un maggiorante di  $E$  e  $\mu$  è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

### Definizione Estremo inferiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo inferiore* di  $E$  se  $\mu$  è un minorante di  $E$  e  $\mu$  è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$  che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in  $\mathbb{Q}$  sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

### Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora,  $E$  è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

### Proof

- Per dimostrare che  $E \neq \emptyset$  possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme  $E$  è banalmente limitato superiormente da tutti i valori  $x \geq 2$ .
- Supponiamo per assurdo che esista un  $\mu = \sup E$ . Notiamo che ovviamente  $\mu > 0$ . Possiamo notare che  $\mu^2 = 2$  è impossibile per il teorema di Euclide. Allora,  $\mu$  potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che  $\mu^2 < 2$ , allora dimostro che  $\exists x \in E$  tale che  $x > \mu$  e quindi che  $\mu$  non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di  $\mu$ . Possiamo quindi scegliere  $n$  sufficientemente grande tale che  $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$ , e quindi  $\mu + \frac{1}{n} \in E$  in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di  $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$ . Ciò è dato dal fatto che  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ .

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che  $\mu^2$  non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi  $\mu$  non esiste.

È facile verificare che  $\inf, \sup, \min, \max$  se esistono sono unici. Se esiste il massimo di  $E$ , allora esiste il  $\sup E$  e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste  $\sup E$  e  $\sup E \in E$ .

In  $\mathbb{Q}$  (e poi in  $\mathbb{R}$ ), se  $E$  non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè  $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$  tale che  $e > M$ ) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se  $E$  non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

### Definizione Numeri reali

Definiamo  $\mathbb{R}$  come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

### Teorema Teorema di unicità

Siano  $F_1$  e  $F_2$  due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione  $\phi: F_1 \rightarrow F_2$  tale che è un isomorfismo del gruppo additivo  $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$  per ogni  $x, y \in F_1$  e  $\phi(-x) = -\phi(x)$  per ogni  $x \in F_1$ . Se aggiungiamo anche che  $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$  per tutte le  $x, y \in F_1$  e  $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$  abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che  $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$ , abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali  $\mathbb{Q}$ . Chiaramente, diversi campi generano  $\mathbb{Q}$  diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire  $\phi_0: \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \rightarrow \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$ . Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato  $x \in F_1$ , abbiamo  $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$ . Allora  $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$ . Così viene esteso  $\phi$  a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \dots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove  $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Con la prescrizione che  $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \bar{9} = n, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k + 1)$ .

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

**Definizione di somma e prodotto:** Prendiamo  $x = n, a_1, \dots, a_k \dots$  e  $y = m, b_1, \dots, b_k \dots$  che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di  $\mathbb{R}$  soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Per ogni  $x \in E$  scriveremo  $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \dots$ .  $E$  è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in  $\mathbb{Z}$  limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo  $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$  Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora  $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$ . Con lo stesso metodo troviamo  $a_3, a_4, \dots$ , ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \dots$$

Dico che  $\mu$  è un maggiorante di  $E$ , e che se  $z < \mu$ ,  $z$  non è maggiorante. Sia allora  $\bar{x} \in E$ , quindi

$$\bar{x} = n_{\bar{x}}, a(\bar{x})_1, a(\bar{x})_2, \dots$$

Allora  $n_{\bar{x}} \leq N$  se  $n_{\bar{x}} < N$ .  $\bar{x} < \mu$ . Gli elementi in  $E_0$  sono al massimo  $a_1$ . Se  $n_{\bar{x}} = N$  e  $n_{\bar{x}} \in E_0$  e  $a_1(\bar{x}) = a_1$ .

Se  $a(\bar{x})_1 < a_1 \implies \bar{x} < \mu$ .

Se invece  $a(\bar{x})_1 = a_1 \implies \bar{x} \in E_1$  e  $a(\bar{x})_2 \leq a_2$

Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se  $\exists k$  tale che  $a(\bar{x})_k < a_k \implies \bar{x} < \mu$ . Se  $\forall k, a(\bar{x})_k = a_k$ , allora  $\bar{x} = \mu$  e  $\mu$  è il max di  $E$ . Questo procedimento non dimostra che  $\mu \in E$ .

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \dots < \mu$$

Deve quindi succedere che o  $n_z < N$ , e allora  $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$ , oppure  $n_z = N$  e  $a(z)_j = a_j$  per tutte le  $j < k$  ma  $a(z)_k < a_k$ . Allora  $\mu = \sup E$ .

### 7.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeas:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$  (in realtà vale anche in  $\mathbb{Q}$ ).
- **densità dei razionali nei reali:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  dove  $x < y$ , esiste  $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$ .

#### Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

### Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che  $E$  non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo  $x = \sup E$  e mostriamo che  $x^n = y$ .

- **Non vuoto:** se  $y \geq 1$ , basta scegliere  $x = 1$  in quanto  $x^n = 1 \leq y$ . Altrimenti, se  $y < 1$ , poniamo  $x = y$  e notiamo che, perché  $y < 1$ , allora  $y^n < y$ , e quindi  $y \in E$ .
- **Limitato superiormente:**  $E$  è limitato superiormente, infatti  $1 + y$  è un maggiorante di  $E$ . Se  $z \geq (1 + y)$ , poiché la funzione  $t \rightarrow t^2$  è crescente per  $t > 0$ , si ha  $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$ . Sia  $x = \sup E$ . Dico che  $x^n = y$ . Dimostro che se suppongo  $x^n > y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi  $x - \frac{1}{k}$  è ancora un maggiorante di  $E$ , contro l'ipotesi impossibile perché  $x$ , che è il  $\sup E$ , è il più piccolo maggiorante. Invece, se  $x^n < y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora  $x + \frac{1}{k} \in E$  ed è più grande di  $x$ , e  $x$  non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che  $x$  non può essere né più grande né più piccolo,  $x^n = y$ .

- **Unicità:** notiamo che se  $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$ .

Possiamo anche mettere  $z \geq 0$  così dimostrare che  $E \neq \emptyset$  è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che  $0 < y < 1 \implies y^n < y$ , per  $n > 1$ . (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

## 7.4 Esercizi sup

### Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di  $E$ ,  $F$ ,  $E \cup F$  e  $E \cap F$ .

- $E$  è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è  $\frac{1}{2}$ , mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi  $\sup E = 5$ , ma non vi è un massimo.
- $F$  è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché  $x_n > 0$ . Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine  $n+2$  cresce con  $n$ , quindi  $\frac{1}{n+2}$  decresce al crescere di  $n$  e quindi  $x_n$  cresce approssimando 1. Allora con  $n = 1$  il termine assume il valore più piccolo, ossia  $\frac{2}{3}$ , quindi il minimo di  $F$ . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare  $\sup F = 1$ .

Il massimo di  $F$  non esiste. Rimane da far vedere che se  $z < 1$  allora  $z$  non è maggiorante di  $F$  cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché  $\frac{1}{n+2} < 1 - z$  cioè  $n > \frac{1}{1-z} - 2$ . Quindi  $z$  non è maggiorante e  $\sup E = 1$ .

- Verificare che  $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$ . Abbiamo che  $\sup E \leq \sup F$ . In  $\sup$  è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi  $\sup E \cup F = 5$ . Tuttavia, il  $\max$  non esiste in quanto  $5 \notin E \cup F$ . Analogamente,  $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$ . Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi  $F \subseteq E$ . Consideriamo allora  $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali  $n$  vale che  $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$ ? Abbiamo  $4(n+2) \leq 5(n+1)$  e quindi  $n \geq 3$ . Allora  $\sup E_1 \cap F = 1$  e non vi è massimo, mentre  $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$  che è anche il minimo.

- Posto  $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$  mostrare  $\sup E + F = \sup E + \sup F$ . Supponiamo quindi che  $\sup E$  e  $\sup F$  siano finiti. Siccome, per definizione,  $\forall e \in E, e \leq \sup E$  e  $\forall f \in F, f \leq \sup F$ , abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di  $\sup$  dicendo che  $\mu$  è pari a  $\sup E$  se:

1.  $\forall x \in E, x \leq \mu$ ;
2.  $\forall \epsilon > 0, \mu - \epsilon$  non è maggiorante.

**Nota:** se  $x < \mu$  allora posto  $\epsilon = \mu - x$  risulta  $x = \mu - \epsilon$ . Allora sia  $\epsilon > 0$ . Diciamo che esistono  $e_1 \in E$  e  $f_1 \in F$  tali che  $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \epsilon$ . Poiché  $\sup E$  è, appunto, il supremum, esiste per definizione una  $e_1 \in E$  tale che  $e_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2}$ . Analogamente, esiste  $f_1 \in F$  tale che  $f_1 > \sup F - \frac{\epsilon}{2}$ . Da cui  $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2} + \sup F - \frac{\epsilon}{2} = \sup E + \sup F - \epsilon$ .

- Posto  $-E = \{-x \mid x \in E\}$  mostrare che  $\sup -E = -\inf E$  e  $\inf -E = -\sup E$ .

Dimostrare che il  $\max$  esiste se e solo se  $\sup E$  è finito e appartiene a  $E$ . Analogamente per il  $\min$ .

### Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale  $x_n \leq x_{n+1}$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-7}{n^2+1} &\leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1} \\ \frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono  $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$ . Di conseguenza, l'espressione è negativa per  $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$ . Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che  $14^2 < 201 < 15^2$ , e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e  $\frac{27}{2}$ . Allora, tutte le  $n$  intere che soddisfano l'equazione sono  $n = 13$ . Ne consegue che se  $n \geq 14$ ,  $x_n > x_{n+1}$ . Il massimo e supremum è quindi  $x_{14}$ .

## 8 Esponenziali

### 8.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni  $p$  intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza  $x^r$  è quindi ben definita con  $r \in \mathbb{Q}^{>0}$ . Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1.  $\forall x > 0, x^0 = 1$ ;
2.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$ ;
3.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$ ;

Con  $r > 0$  posso definire  $0^r = 0$  e se  $r = \frac{m}{n}$  (ridotta ai minimi termini) con  $n$  dispari posso definire  $x^{\frac{m}{n}}$  se  $x < 0$ .

### 8.2 Potenze a esponente reale

Se  $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$ . Se  $x > 1$  e  $r < s$ , allora  $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con  $a > 1$  e  $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad  $a < 0$  come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se  $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$



### 8.3 Esponenziali

Fissata una base  $a > 0$  abbiamo poi l'esponenziale che è definita da  $a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Risulta che se  $a = 1$ , allora la funzione è sempre 1. Se  $a > 1$  la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se  $0 < a < 1$ .

La funzione è biettiva tra  $\mathbb{R}$  e  $(0, +\infty)$ , quindi è invertibile. La funzione inversa è  $y = \log_a(x)$ .

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

#### Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g.  $\ln(x(x-1))$  non si può riscrivere come  $\ln(x) + \ln(x-1)$  perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo  $\log_2(x^2)$ , possiamo riscriverlo come  $2 \log_2 |x|$ .

### 8.4 Assioma di continuità

$$\bigcup_{n \neq 2} \left[ \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$$

#### Assioma Assioma di Dedekind

Se  $\{I_n\}$  è una successione di intervalli chiusi della forma  $I_n = [a_n; b_n]$  tali che  $I_{n+1} \subseteq I_n$  e

$$l(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} l(I_n)$$

e quindi

$$l(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}} l(I_1)$$

allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

Questo assioma non vale nei razionali.

#### Teorema Assioma di Dedekind equivalenza assioma di completezza

L'assioma di Dedekind è equivalente all'assioma della completezza.

**Proof** Assioma di continuità equivalenza assioma di Dedekind

( $\Rightarrow$ ) Sia  $E$  un insieme non vuoto e limitato superiormente, dimostriamo che esiste  $c = \sup E$ . Poiché  $E$  è limitato superiormente esiste un  $b_1$  maggiorante di  $E$  dove  $b_1 \geq e, \forall e \in E$ . Poiché  $E$  è non vuoto esiste  $\bar{e} \in E$  e poniamo  $a_1 = \bar{e} - 1$  cosicché  $a_1 < \bar{e}$  e  $a_1$  non è maggiorante. Sia  $I_1 = [a_1, b_1]$  e sia  $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , allora vi sono due casi:

- $m_1$  è un maggiorante e allora poniamo  $a_2 = a_1$  e  $b_2 = m_1$ ;
- $m_1$  non è un maggiorante e allora poniamo  $a_2 = m_1$  e  $b_2 = b_1$ .

Sia  $I_2 = [a_2, b_2]$ . Iteriamo allora il procedimento otteniamo una successione di intervalli

$$I_n = [a_n, b_n]$$

tali che  $I_{n+1} \subseteq I_n$  e  $l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n)$ . Per ogni  $n$ ,  $a_n$  non è maggiorante di  $E$ ,  $b_n$  è maggiorante di  $E$ . Per l'assioma di continuità  $\exists c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

La nostra tesi è quindi  $c = \sup E$ . Supponiamo quindi per assurdo che non sia un maggiorante, allora che esiste un elemento  $e \in E$  dove  $e > c$ . Per definizione  $c$  è in almeno un  $I_n$  quindi  $a_n \leq c \leq b_n$  e poiché  $e > c$  abbiamo  $a_1 \leq c < e \leq b_n$  perché  $e \in E$  e  $b_n$  è maggiorante di  $E$  per ogni  $n$ . Quindi

$$[c, e] \subseteq [a_n, b_n]$$

e allora

$$[c, e] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

che è quindi una contraddizione. Dobbiamo ora mostrare che  $c$  è il più piccolo dei maggioranti. Supponiamo quindi per assurdo che ci sia un altro maggiorante  $x < c$ . Poiché  $b_n \geq c$  per ogni  $n$  abbiamo che  $x < c \leq b_n$ . Per ipotesi,  $x$  è maggiorante di  $E$  mentre  $a_n$  non è maggiorante di  $E$  per ogni  $n$ . Quindi per tutte le  $n$  esiste un elemento  $e_n$  tale che

$$a_n < e_n \leq x < c \leq b_n$$

e quindi si deduce che l'intervallo  $[x, c] \subseteq [a_n, b_n] = I_n$  da cui

$$[c, e] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

che quindi è assurdo.

( $\Leftarrow$ ) TODO (in the future)

## 9 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 \geq 0$  e vale  $x^2 = 0 \iff x = 0$ . Quindi l'equazione  $x^2 = -1$  non ha soluzione in  $\mathbb{R}$ . Estendiamo il campo  $\mathbb{R}$  costruendo un campo  $\mathbb{C}$  che contiene una immagine isomorfa di  $\mathbb{R}$  nel quale  $z^2 = -1$  ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in  $\mathbb{R}$ ;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia  $0, 0$ ;
3. l'opposto di  $(a, b)$  è  $-(a, b)$ ;

Si può rappresentare  $\mathbb{C}$  come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento  $(1, 0)$  è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere  $z^{-1} = (x, y)$  dove  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$ .

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ .

### 9.1 Inclusione dei reali

Ogni number  $r \in \mathbb{R}$  può essere identificato con il numero complesso  $(r, 0)$ . Cosifacendo, l'applicazione  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\varphi(a) = (a, 0)$  preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere  $z = (a, b)$  come  $a(1, 0) + b(0, 1)$ . Se identifichiamo  $i = (0, 1)$ , possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità  $i^2 = -1$ .

### 9.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \quad \dots$$

Dato  $z = a + bi$ , diciamo che  $\Re(z) = a$  e  $\Im(z) = b$ .

### Definizione Coniugio

Dato  $z = a + bi \in \mathbb{Z}$ ,

$$\bar{z} = a - bi$$

Chiaramente,  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ . Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

### Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:**  $\overline{\bar{z}} = z$ ;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ ;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$  per  $n \in \mathbb{Z}$ .

Per ogni numero complesso  $z$ ,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

e per ogni numero complesso  $w$

$$\overline{wz} = wz\bar{w}\bar{z} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare,  $|z^n| = |z|^n$ .

La disuguaglianza  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ .

- $|wz| = |w| \cdot |z|$ ;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ .

Da dimostrare:  $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ .

## 9.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato  $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e il punto polare  $(r, \theta)$  abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

## 9.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k$$

## 10 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

## 11 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio  $p(z)$ ,  $z_0$  è una radice di  $p(z)$  se esiste un polinomio  $q(z)$  con  $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$  tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se  $p(z)$  è divisibile per  $z - z_0$ .

La radice  $z_0$  ha molteplicità  $m \geq 1$  se  $p(z)$  è divisibile per  $(z - z_0)^m$  ma non per  $(z - z_0)^{m+1}$ .

## 12 Spazi metrici

### Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è *aperto* se tutti i punti sono interni in  $A$ .

## 13 Spazi topologici

Un punto  $x_0$  è isolato in  $E$  se  $\exists r > 0$  tale che  $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$ .

### Teorema

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sono equivalenti:

1.  $x_0$  è di accumulazione cioè  $\forall r > 0$ ,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2.  $\forall r > 0$ ,  $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$  è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di  $E$ ).

### Proof

( $\Rightarrow$ ) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che  $\exists r > 0$  tale che  $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$  è finito, e quindi  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono gli elementi di  $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$  diversi da  $x_0$ . Chiaramente, esiste un  $0 < \epsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$ . Siccome l'insieme è finito,  $\epsilon$  esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione  $x_0$  non è di accumulazione.

( $\Leftarrow$ ) Trivial.

## 14 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che  $M = \max x_n$  se  $\forall n x_n < M$  e  $\exists n' \mid x_{n'} = M$ . Analogamente il min.

Definiamo inoltre  $\sup_n x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$  Analogamente per l'inf.

### Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà  $P$ , una successione  $\{x_n\}$  soddisfa la proprietà  $P$  definitivamente se  $\exists N \mid \forall n, P(n) \geq N$ .

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore è maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \rightarrow l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorno diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi  $x_n \rightarrow \xi$  se per ogni intorno  $I$  esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n \in I$ .

### Lemma

Se  $\lambda$  e  $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$  and  $\lambda \neq \mu$  allora esistono intorno  $I$  di  $\lambda$  e  $J$  intorno di  $\mu$  tale che  $I \cap J = \emptyset$ .

### Proof

Siano per esempio  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\lambda < \mu$ .  $\forall r \leq \frac{\mu - \lambda}{2}$  gli intorno  $I = (\lambda - r, \lambda + r)$  e  $J = (\mu - r, \mu + r)$  sono disgiunti.

### Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia  $\{x_n\}$  una successione. Se  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $x_n \rightarrow \mu$  allora  $\lambda = \mu$ . Infatti supponiamo che  $\lambda \neq \mu$  per il lemma  $\exists I$  intorno di  $\lambda$  e  $J$  intorno di  $\mu$  tale che  $I \cap J = \emptyset$ . Per ipotesi  $x_n \rightarrow \lambda$  quindi  $\exists M_1$  tale che  $x_n \in I \forall n \geq N_1$ .  $x_n \rightarrow \mu$  quindi  $\exists M_2$  tale che  $x_n \in J \forall n \geq N_2$ . Quindi se  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ,  $x_n \in I \cap J = \emptyset$   $\nabla$ .
2. Se  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora  $\{x_n\}$  è limitato cioè esiste  $m \leq M$  tale che  $m \leq x_n \leq M$  per tutte le  $n$ . Infatti, per ipotesi  $x_n \rightarrow l$  quindi usando  $1 = \varepsilon$  nella definizione, risulta che  $\exists N \mid l - 1 < x_n < l + 1$  per ogni  $n \geq N$ . D'altra parte, per ogni  $n = 1, \dots, N - 1$  abbiamo che

$$A = \min\{x_1, \dots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}\} = B$$

che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che  $m = \min\{l - 1, A\} \leq x_n \leq \max\{l + 1, B\} = M$

3. **Teorema di permanenza del segno:** Se  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$  e  $\lambda < \mu$ , allora esiste  $N \mid \forall n \geq N, x_n < y_n$ . Infatti,  $\forall \lambda < a < b < \mu$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n < a$  e  $y_n > a$ . Infatti, assumendo  $\lambda < \mu$ , dati  $a, b$  tale che  $\lambda < a < b < \mu$ , esistono intorno  $I$  di  $\lambda$  e  $J$  di  $\mu$  tale che

$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

•

$$x_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$

•

$$y_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ , abbiamo  $x_n \in (-\infty, a)$  cioè  $x_n < a$  e  $y_n \in (b, +\infty)$ , cioè  $y_n > b$ . Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Infatti,  $x_n \rightarrow 0$  se e solo se  $|x_n| \rightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

poniamo  $y_0 = 0, \forall n$  non vale nè  $x_n \geq 0$  nè  $x_n \leq 0$  definitivamente.

In particolare, se  $y_n \rightarrow \mu > 0$ ,  $y_n$  è definitivamente strettamente  $> 0$  cioè esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, y_n > 0$  e infatti  $\forall b \in (0, \mu)$  esiste  $N$  tale che  $y_n > b, \forall n \geq N$ .

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni):** Siamo  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni tale che  $x_n \leq y_n$  definitivamente. Se  $\exists \lim x_n = \lambda$  e  $\exists \lim y_n = \mu$  allora  $\lambda \leq \mu$ .
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano  $\{x_n\}, \{y_n\}$  e  $\{z_n\}$  tre successioni reali con  $x_n \leq y_n \leq z_n$  definitivamente, e supponiamo che  $x_n \rightarrow l$  e  $z_n \rightarrow l$ . Allora,  $y_n \rightarrow l$ .  
Se  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $z_n \rightarrow +\infty$ , allora  $y_n \rightarrow +\infty$ .  
Se  $x_n \rightarrow -\infty$  e  $z_n \rightarrow -\infty$ , allora  $y_n \rightarrow -\infty$ .

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè  $\lambda > \mu$ , per il punto 3 si avrebbe  $x_n \geq y_n$  definitivamente.

### Proposition

Se  $x_n \rightarrow 0$  e  $\{y_n\}$  è limitata cioè  $\exists m < M$  tale che  $m \leq y_n \leq M$ , allora  $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$ . Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

### Proposition

Sono equivalenti:

1.  $\exists a, b \mid a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2.  $\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M, \forall n$



## 14.1 Aritmetica dei limiti

Siano  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni reali con  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$  con  $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ .

### Proposition Addizione

$x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$  dove  $\lambda + \mu$ . Questa somma è quella usuale se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , altrimenti  $\pm\infty + c = \pm\infty$  con  $c \in \mathbb{R}$  e  $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$ .

### Proof

Nel caso in cui  $\lambda, \mu$  sono finiti,  $x_n \rightarrow \lambda$ , ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e  $y_n \rightarrow \mu$ , ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leq |x_n - \lambda| + |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione  $x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$ .

Dimostriamo ora che se  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $\{y_n\}$  è limitata allora  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ . Ricordiamo che se  $y_n \rightarrow \mu$  finito allora  $\{y_n\}$  è limitata si conclude che vale la tesi nel caso  $\lambda = +\infty$  e  $\mu$  finito.

Infatti,  $\{y_n\}$  è limitato quindi esiste  $K$  tale che  $|y_n| \leq K$  per tutte le  $n$ .  $x_n \rightarrow +\infty$  per definizione  $\forall M > 0$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq N, x_n > M + K$ .

Quindi  $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + K) - K = M$  (alla peggio tolgo un  $K$ ).

Il caso  $-\infty$  è identico.

Mostriamo ora che  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $y_n \rightarrow -\infty$ , allora  $x_n + y_n$  può tendere a  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\pm\infty$  o oscillare.

### Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \rightarrow +\infty \\ y_n = -n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Allora  $x_n + y_n = c \rightarrow c$ .

La definizione di limite finito è  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$ .

### Proposition

Se so che  $x_n \rightarrow l$  finito dato  $\varepsilon > 0$  posso applicare la definizione di limite a un qualunque multiplo di  $\varepsilon$  e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato  $\varepsilon > 0$  si trovi  $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$  con  $c$  fisso positivo. Allora  $x_n \rightarrow l$  infatti basta applicare le condizioni a  $\frac{\varepsilon}{c}$ .

### Proposition Moltiplicazione successioni

Dati  $x_n \rightarrow \lambda$ ,  $y_n \rightarrow \mu$  allora  $x_n \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot \mu$  dove  $\lambda \mu$  è l'usuale prodotto se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Se  $c \neq 0$ ,  $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$  con le regole dei segni, e  $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$  con le regole dei segni. Non è definito  $0 \cdot \infty$  forma indeterminata del prodotto.

### Proof

Supponiamo presi  $\lambda, \mu$  finiti per ipotesi  $x_n \rightarrow \lambda$  fissato  $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$  e  $y_n \rightarrow \mu$  fissato  $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$ . Se  $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$  abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda \mu| &= |x_n y_n - x_n \mu + x_n \mu - \lambda \mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |\mu| |x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \rightarrow \lambda$  finito implica che  $x_n$  è limitata, cioè  $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$ . Per l'osservazione fatta, questo dimostra che  $x_n y_n \rightarrow \lambda \mu$ .

### Proposition Quoziente successioni

Siamo  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  successioni reali tali che  $x_n \rightarrow \lambda$  e  $y_n \rightarrow \mu$ . Supponiamo che  $y_n \neq 0$  definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se  $\mu \neq 0$ ), cosicché è definitivamente definita la successione  $\frac{x_n}{y_n}$ . Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , allora  $\frac{\lambda}{\mu}$  è l'usuale quoziente. Se invece  $\lambda = \pm\infty$  e  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mu = \pm\infty$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $\mu = 0^\pm$ , allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$  (forme indeterminate del quoziente) e  $\frac{\lambda}{0}$  con 0 senza segno.

### Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

### Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significativa forma di indecisione, al contrario del

denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[ n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1 + \frac{\sin n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2}{n^3}}$$

Il termine  $\frac{\sin n}{n}$  tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi  $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$ , e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre,  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  tende a 1 e  $\frac{2}{n^3}$  tende a 0.

**Nota:** Il termine dominante in  $\frac{3}{m} + \frac{4}{n^2}$  è  $\frac{3}{m}$ .

### Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia  $\{x_n\}$  una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se  $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$  (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se  $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$  (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

### Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui  $x_n$  è definitivamente monotona crescente e che quindi  $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ . Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$ : La tesi è che esiste  $\exists N_1 > 0 \mid \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$ . Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum,  $\forall \varepsilon > 0$  we have that
  - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid x_N > \xi - \varepsilon$
 e poiché  $x_n$  è monotona crescente,  $\forall n \geq N$  abbiamo

$$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$ : La tesi è che  $\{x_n\}$  non è limitata superiormente, quindi  $\forall M > 0, \exists N_1 \mid x_{N_1} > M$  e, ancora per monotonìa

$$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

e per definizione,  $x_n \rightarrow +\infty = \sup x_n$ .

**Corollario** Proprietà del sup implica assioma di continuità

Sia  $I_n = [a_n, b_n]$  una successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$

e la lunghezza  $l(I_n) \rightarrow 0$  (come nel caso  $= \frac{1}{2}l$ ). Allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

Poiché  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$  si deduce che  $a_{n+1} \geq a_n$  e  $b_{n+1} \leq b_n$  per ogni  $n$ . Quindi:

- la successione  $a_n$  è crescente e limitata superiormente, per cui  $a_n \rightarrow c^-$ ;
- la successione  $b_n$  è decrescente e limitata inferiormente, per cui  $b_n \rightarrow c^+$ ;

In particolare,  $\forall n, a_n \leq c \wedge b_n \geq c$ . Tuttavia,  $b_n = a_n + (b_n - a_n) \rightarrow c$ , e per unicità del limite  $c = c_1$ . Allora abbiamo  $\forall n, a_n \leq c \leq b_n$ , che implica

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq \{c\}$$

e poiché  $b_n - a_n \rightarrow 0$ ,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

**14.2 Limiti notevoli**

Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  successioni reali, e supponiamo che  $a_n \rightarrow A$  e  $b_n \rightarrow B$ .

**Proposition**

Se  $a_n > 0$  definitivamente, e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora

$$a_n^\alpha \rightarrow A^\alpha$$

dove  $A^\alpha$  è la usuale potenza se  $A > 0$ . Se  $\alpha \neq 0$  decisamente e  $A = +\infty$  allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

**Nota:** se  $\alpha = 0$  e  $a_n > 0$  definitivamente, allora  $a_n^\alpha = 1$  definitivamente e  $a_n^\alpha \rightarrow 1$ .

**Proposition**

Se  $A > 0$  allora

$$A^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

**Proof**

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1 + h) \implies A^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \rightarrow +\infty$$

con  $h = A - 1$ . Se  $0 < A < 1$ , allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove  $\frac{1}{A} > 1$  e  $(\frac{1}{A})^n \rightarrow +\infty$ .

### Proposition

Se  $a_n > 0$  definitivamente  $a_n \rightarrow A \geq 0$ ,  $b_n \rightarrow B$  con  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow A^B$$

dove  $A^B$  è la solita potenza se  $A, B \in \mathbb{R}$  escludendo il caso  $0^0$ .

Se  $A > 1$  e  $B = +\infty$ , allora  $A^B = +\infty$ .

Se  $0 \leq A < 1$  e  $B = +\infty$ , allora  $A^B = 0^+$ .

Se  $A > 1$  e  $B = -\infty$ , allora  $A^B = 0^+$ .

Se  $0 \leq A < 1$  e  $B = -\infty$ , allora  $A^{-\infty} = +\infty$ .

Non è definito il caso  $A = 1$  e  $B = \infty$  ( $1^\infty$ ).

Non è definito il caso  $A = \infty$  e  $B = 0$  ( $\infty^0$ ).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

### Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con  $b_n > 0$  definitivamente e  $b_n \rightarrow B$ , allora

$$\log b_n \rightarrow \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

### Proposition Velocità delle successioni

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  and  $\forall A > 1$ ,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \rightarrow 0$$

(in particolare con  $\alpha$ )

2.  $\forall a_n \rightarrow \infty$  e  $\forall \alpha > 0$ ,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \rightarrow 0^+$$

3.  $\forall \alpha, \beta > 0$ ,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

4.  $\forall a_n \rightarrow \infty$  e  $\forall \alpha, \beta > 0$ ,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \rightarrow 0$$

5.  $\forall A > 1$ ,

$$\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0^+$$

6.

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0^+$$

**Proof**

Dimostriamo che con  $A > 1$  abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \rightarrow 0$$

Scriviamo  $A = B^2$  con  $B = (1 + h)$  con  $h > 0$  da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 0$$

**Proof**

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

### Teorema Numero di eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1.  $a_n$  è monotona strettamente crescente;
2.  $b_n$  è monotona strettamente decrescente;
3.  $\forall n, a_n \leq b_n$  quindi  $a_n$  è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora,  $a_n \rightarrow e^-$ ,  $b_n \rightarrow e^+$  e  $e \approx 2.7182818$ .

### Proof

1. Mostriamo che  $\forall n \geq 1, a_n < a_{n+1}$ . Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni  $n \geq 2$  studiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1 - \frac{1}{n^2} \cdot n}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che  $\forall n \geq 1$ ,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per  $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n \left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

3. Per tutte le  $n$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome  $a_n$  è limitata superiormente e ed è monotona crescente, esiste  $\lim a_n = e^-$  Poiché  $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ ,

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Quindi  $b_n \rightarrow e^+$  siccome è decrescente. Siccome  $a_n < e < b_n$  si può approssimare scegliendo  $n$  sufficientemente grandi.

### Proposition

Se  $a_n$  è crescente, e  $b_n$  è decrescente e  $a_n < b_n$  si deduce che  $\forall m, n, a_m < b_n$

## 14.3 Limiti notevoli

### Corollario

Se  $c_n \rightarrow +\infty$  allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

### Proof

Siccome vale sempre  $[c_n] \leq c_n < [c_n] + 1$

$$1 + \frac{1}{[c_n] + 1} < 1 + \frac{1}{c_n} \leq 1 + \frac{1}{[c_n]}$$



e

$$\left(1 + \frac{1}{[c_n] + 1}\right)^{[c_n]} < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

### Proposition

Se  $|c_n| \rightarrow +\infty$ , allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

### Proposition

Se  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente, allora

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

Segue dall'ultima proposition con  $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

### Proposition

Se  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \alpha$$

### Proof

Basta porre  $\delta_n = (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \rightarrow 0$  dove chiaramente  $\delta_n \neq 0$  definitivamente. Quindi esprimere  $\varepsilon_n$  in termini di  $\delta_n$  per concludere.

### Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

Vogliamo applicare  $\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$  con  $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}$ . Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2} + \log n}{n + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

## 14.4 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

### Teorema

Sia  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , allora

1.  $\sin \varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$  e  $\tan \varepsilon_n \rightarrow 0$ ;
2. Se  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente, allora

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

e

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

### Proof

1. Per la definizione del seno,

$$|\sin \alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$

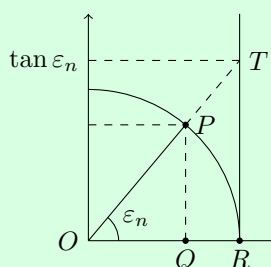
Quindi  $|\sin \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \rightarrow 0$  e  $\cos^2 \varepsilon_n = 1 - \sin^2 \varepsilon_n \rightarrow 1$  da cui  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ . Inoltre,

$$\tan \varepsilon_n = \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 0$$

2. Sia  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  con  $\varepsilon_n \neq 0$  definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,

$$\frac{\sin x}{x}$$

è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo  $\forall n, \varepsilon_n > 0$  e poiché  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  posso anche supporre che  $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ . Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo  $OPQ$  è minore o uguale dell'area del settore circolare  $OPR$  che è minore o uguale del triangolo  $OTR$ .

Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo  $\alpha$  è data dalla proporzione

$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

quindi

$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$

Abbiamo allora che

$$\frac{1}{2} \cos \varepsilon_n \sin \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varepsilon_n$$

che semplificando diventa

$$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

Siccome  $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$  e  $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 1$ , per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right) \left( \frac{1}{\cos \varepsilon_n} \right) \rightarrow 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1 - \cos \varepsilon_n)(1 + \cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1 + \cos \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \\ &= \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \left( \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \rightarrow \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

### Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2) \sin \left( \frac{n+1}{n^2} \right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} a_n &= (n+2) \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})}{n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

## 14.5 Simboli di Landau

### Definizione Simboli di Landau

1. **Asintotico:** diciamo che  $a_n \sim b_n$  se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow \infty$ ;
2. **O-piccolo:** diciamo che  $a_n = o(b_n)$  se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ ;
3. **O-grande:** diciamo che  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  se  $\exists M \mid \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M$ ;
4. **Ugual ordine di grandezza:** diciamo che  $a_n \asymp b_n$  se  $\exists 0 < m \leq M < +\infty$  tale che

$$m \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M$$

### Esempio

1.  $n \sim n + \sqrt{n}$ ;
2.  $n = o(n^2)$ ;

3.  $n = \mathcal{O}(n^2)$ ;
4.  $3n + 5 \asymp n$ .

Se due funzioni sono asintotiche, in particolare hanno lo stesso ordine di grandezza.

#### Proposition Proprietà dell'asintotico

La relazione dell'asintotico è una relazione di equivalenza nell'insieme delle successioni.

#### Proposition Proprietà dell'asintotico

Se  $a_n \sim b_n$ , allora

$$\exists \lim_n a_n = \xi \in \mathbb{R} \iff \exists \lim_n b_n = \xi$$

Infatti, posso scrivere  $a_n = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) b_n$

#### Proposition Proprietà dell'asintotico

$$a_n \sim b_n \iff \exists c_n \rightarrow 1 \mid a_n = c_n b_n$$

Infatti, in generale

$$\frac{a_n}{b_n} b_n$$

posto  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ,  $a_n \sim b_n \iff c_n \rightarrow 1$ .

#### Proposition Proprietà dell'asintotico

$a_n \sim b_n \iff a_n = (1 + \varepsilon_n) b_n$  con  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

#### Proposition Proprietà dell'asintotico

Se  $a_n \sim b_n$  e  $c_n \sim d_n$ , allora

1.  $a_n c_n \sim b_n d_n$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  con le usuali condizioni di esistenza,  $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$
- 3.

$$\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$$

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$  se  $a_n \rightarrow \infty$ . Per esempio,  $a_n = n + \sqrt{n} = n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$ . Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$  se  $a_n \rightarrow 1$ . Per esempio,  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$  e  $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ . Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \rightarrow +\infty$$

**Nota:** non vale  $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$ . Per esempio,  $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$ .

Il termine  $o(1)$  indica che la successione tende a zero.

#### Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se  $a_n = o(b_n)$ , allora  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ ;

- Se  $a_n = o(b_n)$  e  $c_n = \mathcal{O}(d_n)$ , allora  $a_n c_n = o(b_n d_n)$ . Infatti,

$$\left| \frac{a_n c_n}{b_n d_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \left| \frac{c_n}{d_n} \right|$$

che tendono entrambi a zero;

- Se  $a_n = o(b_n)$  e  $c_n = o(b_n)$ , allora  $a_n + c_n = o(b_n)$ . Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere  $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$ ;

## 14.6 Esercizi

### Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

### Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

### Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right) \left(\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2\right)$$

### Esercizio

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4 + n}}}$$

## 15 Serie numeriche

### Definizione Serie numerica

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Per ogni  $N$  si consideri la *somma parziale*  $N$ -esima

$$S_N = \sum_{n=0}^N$$

Si dice serie associata alla successione  $\{a_n\}$ , la successione  $S_n$  delle sue somme parziali e si indica tale successione con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \{S_N\}$$

Si dice anche che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

è la serie di termine generale  $\{a_n\}$ . La serie:

1. *converge* a  $S$  se  $S_N \rightarrow S$  per  $N \rightarrow \infty$ ;
2. *diverge* a  $\pm\infty$  se  $S_N \rightarrow \pm\infty$  per  $N \rightarrow \infty$ ;
3. se  $\exists \lim S_N = L$  e quindi la serie converge o diverge, allora la serie è *regolare*.
4. se  $\nexists \lim S_N = L$ , la serie è *irregolare* o *oscillante*;
5. se  $S_N \rightarrow S$ , allora  $S$  è la somma della serie e

$$\sum_{n=0}^{\infty} = S$$

6. se  $S_N \rightarrow \pm\infty$  allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \pm\infty$$

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Abbiamo  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 1$ ,  $S_{2k} = 1$  e  $S_{2k+1} = -1$ , per cui la serie oscilla.

### Esempio

Considera  $a_n \geq c > 0$ , allora

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \geq \sum_{n=0}^N c = Nc \rightarrow \infty$$

### Esempio Serie di Mengoli

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Allora,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

### Proposition

Esiste sempre una formula per la quale

$$\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

### Definizione Serie telescopica

Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

si dice *telescopica* se  $a_n = b_n - b_{n+1}$ .

### Proposition

Una serie telescopica

$$\sum_{n=0}^N (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{N+1}$$

Quindi, la serie è regolare se e solo se esiste  $\lim b_{N+1} = \lim b_N$ .

### Esercizio

Sia  $\{b_n\}$  una successione e sia  $\{b_{n \pm k_0}\}$  la successione traslata di  $\pm k$ . Dimostrare che  $\lim b_n$  esiste se e solo se  $\lim b_{n \pm k_0}$  esiste e che i limiti sono uguali.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

### Definizione Serie geometrica

La *serie geometrica* di ragione  $q$  ha forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

e somma parziale

$$S_N = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$

se  $q \neq 1$ . Nel caso  $q = 1$ , chiaramente  $S_N = N + 1$ .

### Proof Induzione

#### Proof Aritmetica

Abbiamo

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + q + \cdots + q^N \\ qS_N &= q + q^2 + \cdots + q^N + q^{N+1} \\ &= (1 + q + \cdots + q^N) + q^{N+1} - 1 \\ &= S_N + q^{N+1} - 1 \\ (q - 1)S_N &= q^{N+1} - 1 \\ S_N &= \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

se  $q \neq 1$ .

Abbiamo quindi che con  $N \rightarrow \infty$ :

1. Se  $q = 1$ , allora  $S_N = N + 1 \rightarrow +\infty$ ;
2. Se  $q > 1$ , allora  $S_N \rightarrow +\infty$ ;
3. Se  $-1 < q < 1$ , allora

$$S_N \rightarrow \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}$$

4. Se  $q = -1$ , allora  $S_N$  oscilla;
5. Se  $q < -1$ , allora  $S_N$  oscilla.

### Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

La serie ha ragione  $q = \frac{1}{10}$  e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

### Teorema Teorema del termine n-esimo



Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, allora  $a_n \rightarrow 0$ . Altrimenti, o diverge o oscilla.

### Proof

Consideriamo

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1} + a_n$$

Quindi  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Se la serie converge e la sua somma è  $S$ , per definizione  $S_n \rightarrow S$  e anche  $S_{n-1} \rightarrow S$  (le successioni traslate hanno lo stesso limite). Per cui  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$ .

## 15.1 Aritmetica delle serie

Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

due serie regolari con somma  $A$  e  $B$  in  $\mathbb{R}$  rispettivamente.

1. La serie somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

ha somma  $A + B$  purché non si presenti forma indeterminata  $+\infty - \infty$ .

2. La serie prodotto per un numero  $c$

$$c \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

è sempre regolare e la sua somma è  $cA$  se  $c \neq 0$  e  $0$  se  $c = 0$ .

3. Possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

se non c'è forma indeterminata  $\infty - \infty$  e

$$c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

se  $c \neq 0$ .

### Teorema

Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

due serie e supponiamo che  $\forall n \geq n_0, a_n = b_n$ . Allora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, diverge o oscilla se e solo se così fa anche la serie  $b_n$ . Quindi le due serie hanno lo stesso carattere.

Ciò significa che modificare un numero finito di termini di una serie non ne cambia il carattere.

### Proof

$\forall N > n_0$  possiamo scrivere che

$$A_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^N a_n$$

e analogamente

$$B_N = \sum_{n=1}^N b_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0}^N b_n$$

Ma siccome per da  $n_0$  in poi,  $a_n = b_n$ , allora

$$B_N = \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0}^N a_n$$

Siccome  $\sum_{n=1}^{n_0-1} b_n$  è un numero finito, allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_n$$

esiste ed è finito se e solo se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^N a_n$$

esiste ed è finito se e solo se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_n$$

esiste ed è finito.

### Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

### Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

### Esempio

Mostriamo che se  $x = N, a_1 a_2 \cdots a_k \bar{9}$  dove  $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e  $a_k < 9$ , allora  $x = N a_1 a_2 \cdots (a_k + 1)$ . Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
x &= N + \left( \sum_{j=1}^k a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\
&= N + \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k} (a_k + 1)
\end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Lo studio del carattere consiste nel considerare serie a termini (definitivamente non-negativi).

### Teorema

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini  $\geq 0$ . Allora, la serie è regolare e  $S = \sup S_n$ . In particolare, la serie converge se e solo se la successione  $\{S_n\}$  è limitata superiormente. Nel caso in cui  $\{a_n\}$  sia maggiore o uguale a zero solo definitivamente la conclusione sul carattere vale ma la formula per la somma deve essere modificata in

$$S = S_{n_0} + \sup_n \sum_{n=n_0}^N a_n$$

se  $n_0$  è tale che  $\forall n > n_0, a_n \geq 0$ .

### Proof

Sia  $\forall n, a_n \geq 0$ , allora

$$S_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n = S_N + a_{N+1} \geq S_N$$

la successione  $\{S_n\}$  è monotona crescente e quindi

$$\exists \lim_n S_n = \sup_n S_n$$

Il caso in cui  $a_n \geq 0$  per  $n \geq n_0$  si tratta in modo analogo:  $\forall n > n_0$ ,

$$S_N = \sum_{j=1}^{n_0} a_j + \sum_{j=n_0+1}^N a_j$$

dove il secondo termine è monotono crescente in  $N$ .

Una serie di termini definitivamente positivi è sempre regolare.

### **Teorema** Teorema del confronto, confronto asintotico

Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

serie a termini non-negativi.

1. **Confronto:** se  $a_n \leq b_n$  allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

In particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

2. **Confronto asintotico:** se  $a_n \sim b_n$ , allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

### **Proof**

1. Siano

$$A_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

e

$$B_N = \sum_{n=1}^N b_n$$

poiché  $\forall n, a_n \leq b_n$  risulta  $A_N \leq B_N$  con  $N \rightarrow \infty$ , per monotonia del limite risulta che

$$\lim_n A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \lim_n B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Supponiamo che  $a_n \sim b_n$  cosicché

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

Per definizione di limite con  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  risulta che

$$\begin{aligned}\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, -\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} - 1 < \frac{1}{2} &\iff \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{1}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}b_n\end{aligned}$$

Utilizzando il primo punto abbiamo

$$\frac{1}{2} \sum_{n_0}^{\infty} b_n < \sum_{n_0}^{\infty} a_n < \frac{3}{2} \sum_{n_0}^{\infty} b_n$$

e segue la tesi.

### Corollario

Se  $a_n \perp b_n$  cioè

$$\forall n \geq n_0, \exists 0 < m < M \mid m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M$$

allora  $\sum^{\infty} a_n$  e  $\sum^{\infty} b_n$  hanno lo stesso carattere. In particolare questo accade se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$  con  $0 < l < +\infty$ .

### Corollario

Se  $a_n = o(b_n)$  cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

per definizione di limite, fissato  $\varepsilon = 1$ , esiste  $n_0$  tale che  $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$  e quindi si applica il confronto.

### Proposition Convergenza serie-p

Per  $p \geq 2$ , la p-serie converge. Per cominciare,  $\forall n \geq 2$  vale

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n(n+1)}$$

Usiamo quindi il confronto con la serie di Mengoli. Questo funziona perché  $\frac{n+1}{2} \leq n$  con  $n \geq 1$ . Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$$

Alternativamente, si nota  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

Il teorema di confronto e confronto asintotico non vale se le serie non sono a termini definitivamente non-negativi.

### Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che  $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$ . Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con  $p = 1$ , allora la serie diverge.

### Teorema Divergenza della serie armonica

La serie ha termini positivi, quindi o converge o diverge, e converge se e solo se le somme parziali sono limite superiormente. Consideriamo solamente le somme parziali della forma  $S_{2^k}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ S_8 &= S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Per induzione, risulta che  $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$  (eccetto il primo). Allora,

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Quindi abbiamo  $2^n$  termini tutti più grandi dell'ultimo. Quindi, tutto ciò è maggiore di

$$1 + n \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1) \frac{1}{2}$$

In conclusione,  $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . La successione delle somme parziali non è limitata superiormente e diverge.

Un teorema più forte sarebbe

### Teorema Teorema di condensazione di Cauchy

Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

una serie a termini positivi e supponiamo che  $\forall n, a_n \geq a_{n+1}$ . Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

**Proof**

TODO

### Esempio

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2^{p-1}}$  che converge se e solo se  $p > 1$ .

### Teorema Rapporto di radici

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini  $\geq 0$  e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1.  $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$ ;
2.  $a_n > 0$  definitivamente e  $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$ ;

Allora se  $L < 1$  la serie converge, mentre se  $L > 1$  allora  $a_n \rightarrow \infty$ .

Se  $L = 1$  il test è **inconclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se  $p > 1$  e diverge altrimenti.

### Corollario

Sia  $\{a_n\}$  una successione con  $a_n \geq 0$ . Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e  $a_n \neq 0$  definitivamente, allora se  $L < 1$ , la serie converge e  $a_n \rightarrow 0$  e se  $L > 1$  allora  $a_n \rightarrow +\infty$ .

### Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite,  $\forall \epsilon > 0$  fissato  $\exists N$  tale che

$$L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

Se  $L < 1$ , esiste  $\epsilon > 0$  tale che  $L + \epsilon < 1$  (basta scegliere  $\epsilon = (1 - L)/2$ ). Dalla disequazione  $\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$  deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \epsilon)^n$$

e poiché  $L + \epsilon < 1$  la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum_{n=N}^{\infty} (L + \epsilon)^n$$

Se  $L > 1$  allora esiste  $\epsilon > 0$  tale che  $L - \epsilon > 1$ , come per esempio  $\epsilon = \frac{L-1}{2}$ , quindi per  $n \geq N$  abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \epsilon) > 1$$

elevando alla  $n$  otteniamo  $a_n > (L - \epsilon)^n \rightarrow +\infty$  e per confronto  $a_n \rightarrow +\infty$ . In particolare,  $a_n$  non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso,  $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  come nel caso precedente. Quindi  $\forall \epsilon > 0$  esiste  $N$  tale che

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

Sappiamo per esempio che  $L > 1$  cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere  $\varepsilon$  tale che  $L - \varepsilon > 1$  e abbiamo che  $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$  moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di  $L - \varepsilon$ . Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \rightarrow +\infty$$

e per confronto  $a_n \rightarrow +\infty$ .

### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con  $A > 0$ . Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \rightarrow 0$$

Quindi la serie converge, e converge a  $e^A - 1$ .

### Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotico. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad  $e$ . Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora  $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$ . Allora chiaramente  $e^{n^2}$  domina sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo  $n^n = e^{n \log n}$  come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log \log n - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2} \right\}}{e^{3n \log n} \left\{ 1 + e^{-2n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n} \right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{ 1 - \frac{\log \log n}{n^2} \right\}} \rightarrow \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left( e^{n^2 - 3n \log n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{n \left( 1 - \frac{3 \log n}{n} \right)} \rightarrow \infty > 1$$



### Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che  $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$  e  $(n+1) \log(n+1) = n \log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1) \log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n \log n}} \end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} (n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

### Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \log(n^{\log n})} \\ &= e^{\frac{1}{2} (\log n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è  $L = 1$ , quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{\sqrt{n} \log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n} \log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

### Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2 \log n - \sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2 \log n - \sqrt{n} \log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \rightarrow -\infty \right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

## 15.2 $p - q$ serie

### **Definizione $p - q$ serie**

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\log n)^q}$$

converge se  $p > 1$  o  $p < 1$ , oppure  $p = 1 \wedge q > 1$ , altrimenti diverge.

Consideriamo il caso  $p = 1$  che è discriminante e  $q \geq 0$ . Allora

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^q}$$

ha termini chiaramente decrescenti. Possiamo quindi applicare il teorema di condensazione. La serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot (\log 2^k)^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^q \cdot k^q}$$

che è una p-serie, che converge se e solo se  $q > 1$ . Se  $q < 0$ , allora

$$\frac{1}{n (\log n)^q} = \frac{(\log n)^{-q}}{n}$$

è maggiore o uguale a  $\frac{1}{n}$  definitivamente poiché  $(\log n)^{-q} \rightarrow \infty$ , e la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Nel caso in cui  $p > 1$  mostriamo che la serie converge qualunque sia  $q$ .

$$\frac{1}{n^p (\log n)^q}$$

A questo punto il logaritmo è meno potente della potenza (sia che si trovi a numeratore per  $q$  negativo o a denominatore con  $q$  positivo), quindi la serie converge. Poiché  $p > 1$  possiamo scrivere  $p = p' + \varepsilon$  con

$p' > 1$  e  $\varepsilon > 0$  cosicché

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^{p'} \cdot n^\varepsilon (\log n)^q} \\ &= \frac{1}{n^{p'}} \cdot \frac{1}{n^\varepsilon (\log n)^q} \end{aligned}$$

In ogni caso, per ogni  $q$ , il termine

$$\frac{1}{n^\varepsilon (\log n)^q} \rightarrow 0$$

e si conclude che  $a_n < \frac{1}{n^{p'}}$  definitivamente e la serie converge per confronto con la serie

$$\sum \frac{1}{n^{p'}} < +\infty$$

perché  $p' > 1$ .

Il caso  $p < 1$  è simile. Si dimostra scrivendo  $p = p' - \varepsilon$  con  $p' < 1$  e  $\varepsilon > 0$  cosicché

$$a_n = \frac{1}{n^{p'}} \cdot \left( \frac{n^\varepsilon}{(\log n)^q} \right)$$

dove il secondo termine diverge.

### 15.3 Formula di Stirling

#### Proposition

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + o(1)) \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Possiamo quindi applicare il criterio della radice anche quando ci sono i fattoriali.

#### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\begin{aligned} \left[ \frac{n^n}{(2n)!} \right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[ (2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n} (1 + o(1)) \right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E quindi converge

### Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} (n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - 2n^2 \left\{ \dots \right\}} \right\} \\ &\sim e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} = (n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2} \end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che  $\sum a_n$  ha lo stesso carattere di  $\sum b_n$  e

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

## 15.4 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite  $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$ . Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se  $n, m > N$ , allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

### Definizione Successione di Cauchy

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Si dice che  $\{a_n\}$  soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \mid \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se  $a_n \rightarrow L$  finito, allora  $\{a_n\}$  è di Cauchy.

### Teorema

Sia  $\{a_n\}$  una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1.  $\exists$  finito

$$\lim_n a_n = L$$

2.  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in  $\mathbb{R}$  ma non in  $\mathbb{Q}$ .

### Proposition

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia  $\{S_n\}$  la successione delle sue somme parziali. Per definizione,  $\sum a_n$  converge a  $S$  se esiste finito  $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$ .

### Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie  $\sum a_n$  converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

- 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N, |S_n - S_m| < \varepsilon$$

equivalentemente notando che se  $n > m$ ,

$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^n a_k$$

- 2.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

### 3. condizione più usata:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

### Definizione Convergenza assoluta

Si dice che una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge assolutamente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

### Teorema Teorema fondamentale

Se una serie converge assolutamente, allora converge.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con  $0 < p \leq 1$  converge ma non assolutamente. La serie converge per  $p > 0$ .

### Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia  $\{b_k\}$  una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_k|$$

### Proof

Per induzione

- il caso base è banale;
- 

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| &= \left| \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + b_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| + |b_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^n |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k| \end{aligned}$$

### Proof Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizioni di Cauchy.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \epsilon$$

Per ipotesi  $\sum |a_k|$  converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato  $\epsilon > 0$ , esiste  $N$  tale che  $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \epsilon$$

Ma per il lemma  $\forall n \geq m \geq N$ ,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \epsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

### Esempio

Considera

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$

Poiché  $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  e  $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$  converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per

$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$

con  $p > 1$ . Se  $p \leq 1$ , allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio,  $|\sin x| > \frac{1}{2}$  se  $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Notiamo che l'intervallo

$$I_k = \left[ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$$

ha lunghezza  $\frac{2\pi}{3} > 1$ , quindi conviene un intero  $n$ , in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie

$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$

dove  $n_k$  è un intero in ognuno di  $I_k$ . Ciò è maggiore o uguale di

$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

in quanto il valore al denominatore è al minimo  $\frac{5}{6}\pi + k\pi$ . Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

### Esempio

Considera

$$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$

allora guardiamo il modulo:

$$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$

Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.

$$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$

Notiamo che  $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$  perché  $n = 1$  dà il valore massimo. Quindi

$$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2 \sum n^{-7/3} + 2 \sum n^{-4/3} + 2 \sum \frac{1}{n^{10/3}(\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

### Teorema Teorema di Leibniz

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

dove  $\forall n, a_n \geq 0$  (serie a termini di segno alterno). Supponiamo che:

1.  $a_n \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow +\infty$  (condizione necessaria per la convergenza);
2.  $a_n$  è monotona decrescente  $a_n \geq a_{n+1}$ .

Allora, la serie converge. Inoltre, posto  $S$  la somma della serie e  $S_n$  la somma parziale, si ha che l'errore  $E_n = S - S_n$  soddisfa

$$|E_n| \leq a_{N+1}$$

e inoltre il segno di  $E_N$  è il segno di  $(-1)^{N+1}$ .

Perché il teorema valga basta che  $a_n \geq 0$  e  $a_n \geq a_{n+1}$  valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per  $n$  sufficientemente grande.

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni  $p > 0$ .

**Nota:**  $a_n \sim b_n$  e  $b_n$  monotona decrescente non implica necessariamente  $a_n$  monotona decrescente.