

Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1	Sottoinsiemi finali	3
2	Combinatoria	3
2.1	Funzione indicatrice	4
2.2	Altre proprietà	4
3	Interi relativi	5
4	Definizioni con ordini	7
4.1	Considerazioni	7
4.2	Estremi superiori e inferiori	8
4.3	Conseguenze della proprietà del sup	10
4.4	Esercizi sup	11
5	Esponenziali	14
5.1	Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi	14
5.2	Potenze a esponente reale	14
5.3	Esponenziali	15
6	Numeri complessi	16
6.1	Inclusione dei reali	16
6.2	Operazioni algebriche	16
6.3	Passaggio polari e cartesiane	17
6.4	De Moivre	17
7	Distanza fra due insiemi	17
8	Teorema di Ruffini	18
9	Spazi metrici	19
10	Spazi topologici	19
11	Successioni	20
11.1	Aritmetica dei limiti	22
11.2	Limiti notevoli	25
11.3	Limiti notevoli con funzioni trigonometriche	30
11.4	Proprietà asintotico	31
11.5	Esercizi	32
12	Serie numeriche	33
12.1	Aritmetica delle serie	33
12.2	Formula di Stirling	38
12.3	Serie a termini di segno qualunque	40
12.4	Serie con parametri	47

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann	51
13 Successioni, sottosuccessioni e topologia	53
14 Limiti	58
14.1 Proprietà dei limiti	60
14.2 Aritmetica dei limiti	61
14.3 Continuità	68
15 Limiti e discontinuità di funzioni monotone	70
15.1 Compattezza	71
15.2 Continuità uniforme	73
16 Derivate	77
16.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità	78
16.2 Punti di singolarità	81
16.3 Massimi e minimi	82
16.4 Conseguenze del teorema di Lagrange	85
16.5 Derivate di ordine superiore	89
16.6 Classificazione punti stazionari	95
16.7 Convessità	98
16.8 Asintoti	102
16.9 Studio di funzioni	102
17 Integrali	103
17.1 Integrazione di Riemann	103
17.2 Area del cerchio	103
17.3 Funzione gradini	103

1 Sottoinsiemi finali

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma induttivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Combinatoria

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1 , che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n + 1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazioni di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f: F_k \rightarrow F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X .

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.1 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F , abbiamo $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f: x \rightarrow y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y .

La funzione $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ è biettiva. La funzione $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

3 Interi relativi

In \mathbb{N} è definita la funzione $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dove $(m, n) \rightarrow m + n$.

Abbiamo chiaramente che $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo \mathbb{Z} come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali \mathbb{Q} con le operazioni $+$ e \cdot introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, (\mathbb{Q}^*, \cdot) è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e \cdot con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in \mathbb{Q} si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di \mathbb{Q} ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In \mathbb{Q} è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni $+$ e \cdot , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in \mathbb{Q} sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in \mathbb{Q} .

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciò ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

4 Definizioni con ordini

Sia $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato*.

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.

Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

4.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E . Vi sono diversi minoranti di E , come -1 , -30 etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E . I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quanto se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n , è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 0$. Qualunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

4.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di \mathbb{Q} che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in \mathbb{Q} sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di μ . Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che \inf, \sup, \min, \max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E , allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In \mathbb{Q} (e poi in \mathbb{R}), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

Definizione Numeri reali

Definiamo \mathbb{R} come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

Teorema Teorema di unicità

Siano F_1 e F_2 due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ tale che è un isomorfismo del gruppo additivo $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$ per ogni $x, y \in F_1$ e $\phi(-x) = -\phi(x)$ per ogni $x \in F_1$. Se aggiungiamo anche che $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$ per tutte le $x, y \in F_1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali \mathbb{Q} . Chiaramente, diversi campi generano \mathbb{Q} diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire $\phi_0: \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \rightarrow \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$. Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato $x \in F_1$, abbiamo $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$. Allora $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$. Così viene esteso ϕ a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \dots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Con la prescrizione che $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \bar{9} = n, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k + 1)$.

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

Definizione di somma e prodotto: Prendiamo $x = n, a_1, \dots, a_k \dots$ e $y = m, b_1, \dots, b_k \dots$ che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di \mathbb{R} soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Per ogni $x \in E$ scriveremo $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \dots$. E è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in \mathbb{Z} limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$ Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$. Con lo stesso metodo troviamo a_3, a_4, \dots , ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \dots$$

Dico che μ è un maggiorante di E , e che se $z < \mu$, z non è maggiorante. Sia allora $\bar{x} \in E$, quindi

$$\bar{x} = n_{\bar{x}}, a(\bar{x})_1, a(\bar{x})_2, \dots$$

Allora $n_{\bar{x}} \leq N$ se $n_{\bar{x}} < N$. $\bar{x} < \mu$. Gli elementi in E_0 sono al massimo a_1 . Se $n_{\bar{x}} = N$ e $n_{\bar{x}} \in E_0$ e $a_1(\bar{x}) = a_1$.

Se $a(\bar{x})_1 < a_1 \implies \bar{x} < \mu$.

Se invece $a(\bar{x})_1 = a_1 \implies \bar{x} \in E_1$ e $a(\bar{x})_2 \leq a_2$

Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se $\exists k$ tale che $a(\bar{x})_k < a_k \implies \bar{x} < \mu$. Se $\forall k, a(\bar{x})_k = a_k$, allora $\bar{x} = \mu$ e μ è il max di E . Questo procedimento non dimostra che $\mu \in E$.

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \dots < \mu$$

Deve quindi succedere che o $n_z < N$, e allora $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$, oppure $n_z = N$ e $a(z)_j = a_j$ per tutte le $j < k$ ma $a(z)_k < a_k$. Allora $\mu = \sup E$.

4.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeas:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$ (in realtà vale anche in \mathbb{Q}).
- **densità dei razionali nei reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E . Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \rightarrow t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E , contro l'ipotesi impossibile perché x , che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x , e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere né più grande né più piccolo, $x^n = y$.

- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

4.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova \inf , \sup , \min , \max (se esistono) di E , F , $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare \sup e \inf , è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine $n+2$ cresce con n , quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approssimando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$.

Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In \sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il \max non esiste in quanto $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.

- Posto $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di \sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:

1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.

- Posto $-E = \{-x \mid x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il \max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E . Analogamente per il \min .

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$
$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il massimo è quindi x_{14} .

5 Esponenziali

5.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

5.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

5.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x , $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra \mathbb{R} e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g. $\ln(x(x-1))$ non si può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in \mathbb{R} , $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in \mathbb{R} . Estendiamo il campo \mathbb{R} costruendo un campo \mathbb{C} che contiene una immagine isomorfa di \mathbb{R} nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in \mathbb{R} ;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare \mathbb{C} come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

6.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

6.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \quad \dots$$

Dato $z = a + bi$, diciamo che $\Re(z) = a$ e $\Im(z) = b$.

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\bar{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \bar{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z ,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\bar{w}\bar{z} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

6.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e il punto polare (r, θ) abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

6.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k$$

7 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

8 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha molteplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

9 Spazi metrici

Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se tutti i punti sono interni in A .

10 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

(\Rightarrow) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dove x_1, x_2, \dots, x_n sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0 . Chiaramente, esiste un $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ε esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

(\Leftarrow) Trivial.

11 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che $M = \max x_n$ se $\forall n x_n < M$ e $\exists n' \mid x_{n'} = M$. Analogamente il min.

Definiamo inoltre $\sup_n x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$ Analogamente per l'inf.

Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà P , una successione $\{x_n\}$ soddisfa la proprietà P definitivamente se $\exists N \mid \forall n, P(n) \geq N$.

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore è maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \rightarrow l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorno diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi $x_n \rightarrow \xi$ se per ogni intorno I esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$.

Lemma

Se λ e $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ and $\lambda \neq \mu$ allora esistono intorno I di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Proof

Siano per esempio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda < \mu$. $\forall r \leq \frac{\mu - \lambda}{2}$ gli intorno $I = (\lambda - r, \lambda + r)$ e $J = (\mu - r, \mu + r)$ sono disgiunti.

Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $x_n \rightarrow \mu$ allora $\lambda = \mu$. Infatti supponiamo che $\lambda \neq \mu$ per il lemma $\exists I$ intorno di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$. Per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ quindi $\exists M_1$ tale che $x_n \in I \forall n \geq N_1$. $x_n \rightarrow \mu$ quindi $\exists M_2$ tale che $x_n \in J \forall n \geq N_2$. Quindi se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in I \cap J = \emptyset$ ∇ .
2. Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $\{x_n\}$ è limitato cioè esiste $m \leq M$ tale che $m \leq x_n \leq M$ per tutte le n . Infatti, per ipotesi $x_n \rightarrow l$ quindi usando $1 = \varepsilon$ nella definizione, risulta che $\exists N \mid l - 1 < x_n < l + 1$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte, per ogni $n = 1, \dots, N - 1$ abbiamo che

$$A = \min\{x_1, \dots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}\} = B$$

che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che $m = \min\{l - 1, A\} \leq x_n \leq \max\{l + 1, B\} = M$

3. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N \mid \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorno I di λ e J di μ tale che

$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

•

$$x_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$

•

$$y_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y_n \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Infatti, $x_n \rightarrow 0$ se e solo se $|x_n| \rightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

poniamo $y_0 = 0$, $\forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.

In particolare, se $y_n \rightarrow \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni):** Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \rightarrow l$ e $z_n \rightarrow l$. Allora, $y_n \rightarrow l$.
Se $x_n \rightarrow +\infty$ e $z_n \rightarrow +\infty$, allora $y_n \rightarrow +\infty$.
Se $x_n \rightarrow -\infty$ e $z_n \rightarrow -\infty$, allora $y_n \rightarrow -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \rightarrow 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq M$, allora $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$. Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \mid a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2. $\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M, \forall n$

11.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \rightarrow \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \rightarrow \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leq |x_n - \lambda| + |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$.

Dimostriamo ora che se $x_n \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \rightarrow +\infty$. Ricordiamo che se $y_n \rightarrow \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.

Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n . $x_n \rightarrow +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.

Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + K) - K = M$ (alla peggio tolgo un K).

Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \rightarrow +\infty$ e $y_n \rightarrow -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \rightarrow +\infty \\ y_n = -n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \rightarrow c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \rightarrow l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualunque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positivo. Allora $x_n \rightarrow l$ infatti basta applicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \rightarrow \lambda$, $y_n \rightarrow \mu$ allora $x_n \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot \mu$ dove $\lambda \mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \rightarrow \mu$ fissato $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda \mu| &= |x_n y_n - x_n \mu + x_n \mu - \lambda \mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |\mu| |x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \rightarrow \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \rightarrow \lambda \mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^\pm$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significativa forma di indecisione, al contrario del

denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1 + \frac{\sin n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin n}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m} + \frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \mid \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
 - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
 - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid x_N > \xi - \varepsilon$
 e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

$$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \mid x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonìa

$$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

e per definizione, $x_n \rightarrow +\infty = \sup x_n$.

11.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \rightarrow A$ e $b_n \rightarrow B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \rightarrow A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \rightarrow 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1 + h) \implies A^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \rightarrow +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $(\frac{1}{A})^n \rightarrow +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \rightarrow A \geq 0$, $b_n \rightarrow B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0 .

Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.

Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).

Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \rightarrow B$, allora

$$\log b_n \rightarrow \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \rightarrow 0$$

(in particolare con α)

2. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \rightarrow 0^+$$

3. $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

4. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \rightarrow 0$$

5. $\forall A > 1$,

$$\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0^+$$

- 6.

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \rightarrow 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 0$$

Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1. a_n è monotona strettamente crescente;
2. b_n è monotona strettamente decrescente;
3. $\forall n, a_n \leq b_n$ quindi a_n è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora, $a_n \rightarrow e^-$, $b_n \rightarrow e^+$ e $e \approx 2.7182818$.

Proof

1. Mostriamo che $\forall n \geq 1, a_n < a_{n+1}$. Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni $n \geq 2$ studiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1 - \frac{1}{n^2} \cdot n}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n \left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

3. Per tutte le n

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome a_n è limitata superiormente e ed è monotona crescente, esiste $\lim a_n = e^-$ Poiché $b_n = a_n + (b_n - a_n)$,

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Quindi $b_n \rightarrow e^+$ siccome è decrescente. Siccome $a_n < e < b_n$ si può approssimare scegliendo n sufficientemente grandi.

Proposition

Se a_n è crescente, e b_n è decrescente e $a_n < b_n$ si deduce che $\forall m, n, a_m < b_n$

Corollario

Se $c_n \rightarrow +\infty$ allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

Proof

Siccome vale sempre $[c_n] \leq c_n < [c_n] + 1$

$$1 + \frac{1}{[c_n] + 1} < 1 + \frac{1}{c_n} \leq 1 + \frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{[c_n] + 1}\right)^{[c_n]} < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

Proposition

Se $|c_n| \rightarrow +\infty$, allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

Proposition

Se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

Segue dall'ultima proposition con $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Proposition

Se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \alpha$$

Proof

Basta porre $\delta_n = (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \rightarrow 0$ dove chiaramente $\delta_n \neq 0$ definitivamente. Quindi esprimere ε_n in termini di δ_n per concludere.

Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

Vogliamo applicare $\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$ con $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}$. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2} + \log n}{n + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

11.3 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

Teorema

Sia $\varepsilon_n \rightarrow 0$, allora

1. $\sin \varepsilon_n \rightarrow 0$, $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ e $\tan \varepsilon_n \rightarrow 0$;
2. Se $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

e

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Proof

1. Per la definizione del seno,

$$|\sin \alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$

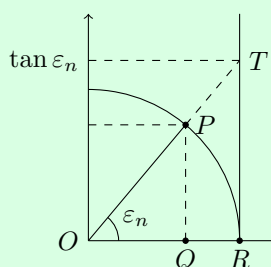
Quindi $|\sin \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \rightarrow 0$ e $\cos^2 \varepsilon_n = 1 - \sin^2 \varepsilon_n \rightarrow 1$ da cui $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$. Inoltre,

$$\tan \varepsilon_n = \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 0$$

2. Sia $\varepsilon_n \rightarrow 0$ con $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,

$$\frac{\sin x}{x}$$

è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $\forall n, \varepsilon_n > 0$ e poiché $\varepsilon_n \rightarrow 0$ posso anche supporre che $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$. Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo OPQ è minore o uguale dell'area del settore circolare OPR che è minore o uguale del triangolo OTR .

Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo α è data dalla proporzione

$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

quindi

$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$

Abbiamo allora che

$$\frac{1}{2} \cos \varepsilon_n \sin \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varepsilon_n$$

che semplificando diventa

$$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

Siccome $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ e $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 1$, per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right) \left(\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \right) \rightarrow 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1 - \cos \varepsilon_n)(1 + \cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1 + \cos \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \\ &= \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \rightarrow \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2) \sin \left(\frac{n+1}{n^2} \right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} a_n &= (n+2) \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})}{n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

11.4 Proprietà asintotico

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$ se $a_n \rightarrow \infty$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} = n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$. Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$ se $a_n \rightarrow 1$. Per esempio, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \rightarrow +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$.

Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $a_n = \mathcal{O}(b_n)$;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = \mathcal{O}(d_n)$, allora $a_n c_n = o(b_n d_n)$. Infatti,

$$\left| \frac{a_n c_n}{b_n d_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \left| \frac{c_n}{d_n} \right|$$

che tendono entrambi a zero;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, allora $a_n + c_n = o(b_n)$. Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$;

11.5 Esercizi

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right) \left(\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4 + n}}}$$

12 Serie numeriche

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n \pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n \pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Proof Serie geometrica per Induzione

Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

La serie ha ragione $q = \frac{1}{10}$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^{n+2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

12.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

Esempio

Mostriamo che se $x = N, a_1 a_2 \dots a_k \bar{9}$ dove $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $a_k < 9$, allora $x = N a_1 a_2 \dots (a_k + 1)$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
x &= N + \left(\sum_{j=1}^k a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k} (a_k + 1)
\end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Corollario

Se $a_n = o(b_n)$ cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$ e quindi si applica il confronto.

Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esempio Teorema di condensazione

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$ che converge se e solo se $p > 1$.

Teorema Rapporto di radici

Sia $\sum a_n$ una serie a termini ≥ 0 e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1. $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$;
2. $a_n > 0$ definitivamente e $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$;

Allora se $L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ allora $a_n \rightarrow \infty$.

Se $L = 1$ il test è **inconclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se $p > 1$ e diverge altrimenti.

Corollario

Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$. Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora se $L < 1$, la serie converge e $a_n \rightarrow 0$ e se $L > 1$ allora $a_n \rightarrow +\infty$.

Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists N$ tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se $L < 1$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (basta scegliere $\varepsilon = (1 - L)/2$). Dalla disequazione $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché $L + \varepsilon < 1$ la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se $L > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, come per esempio $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, quindi per $n \geq N$ abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla n otteniamo $a_n > (L - \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$ e per confronto $a_n \rightarrow +\infty$. In particolare, a_n non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso, $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ come nel caso precedente. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che $L > 1$ cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere ε tale che $L - \varepsilon > 1$ e abbiamo che $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$ moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di $L - \varepsilon$. Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \rightarrow +\infty$$

e per confronto $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con $A > 0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \rightarrow 0$$

Quindi la serie converge, e converge a $e^A - 1$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotico. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e . Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domina sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n \log n}$ come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log \log n - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2} \right\}}{e^{3n \log n} \left\{ 1 + e^{-2n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n} \right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{ 1 - \frac{\log \log n}{n^2} \right\}} \rightarrow \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left(e^{n^2 - 3n \log n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{n \left(1 - \frac{3 \log n}{n} \right)} \rightarrow \infty > 1$$

Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ e $(n+1) \log(n+1) = n \log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1) \log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n \log n}} \end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} (n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \log(n^{\log n})} \\ &= e^{\frac{1}{2} (\log n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{\sqrt{n} \log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n} \log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2 \log n - \sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2 \log n - \sqrt{n} \log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \rightarrow -\infty \right\}$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

12.2 Formula di Stirling

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\begin{aligned} \left[\frac{n^n}{(2n)!} \right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n} (1 + o(1)) \right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E quindi converge

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} (n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - 2n^2 \left\{ \dots \right\}} \right\} \\ &\sim e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} = (n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2} \end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

12.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$. Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se $n, m > N$, allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

Definizione Successione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Si dice che $\{a_n\}$ soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \mid \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se $a_n \rightarrow L$ finito, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1. \exists finito

$$\lim_n a_n = L$$

2. $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in \mathbb{R} ma non in \mathbb{Q} .

Proposition

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia $\{S_n\}$ la successione delle sue somme parziali. Per definizione, $\sum a_n$ converge a S se esiste finito $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$.

Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie $\sum a_n$ converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

- 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N, |S_n - S_m| < \varepsilon$$

equivalentemente notando che se $n > m$,

$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^n a_k$$

- 2.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

3. condizione più usata:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con $0 < p \leq 1$ converge ma non assolutamente. La serie converge per $p > 0$.

Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia $\{b_k\}$ una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_k|$$

Proof

Per induzione

- il caso base è banale;
-

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) + b_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| + |b_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^n |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k| \end{aligned}$$

Proof Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizioni di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi $\sum |a_k|$ converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \varepsilon$$

Ma per il lemma $\forall n \geq m \geq N$,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$

Poiché $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$ converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per

$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$

con $p > 1$. Se $p \leq 1$, allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio, $|\sin x| > \frac{1}{2}$ se $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che l'intervallo

$$I_k = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$$

ha lunghezza $\frac{2\pi}{3} > 1$, quindi conviene un intero n , in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie

$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$

dove n_k è un intero in ognuno di I_k . Ciò è maggiore o uguale di

$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

in quanto il valore a denominatore è al minimo $\frac{5}{6}\pi + k\pi$. Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$

allora guardiamo il modulo:

$$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$

Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.

$$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$

Notiamo che $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$ perché $n = 1$ dà il valore massimo. Quindi

$$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2 \sum n^{-\frac{7}{8}} + 2 \sum n^{-\frac{4}{3}} + 2 \sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3} (\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Perché il teorema valga basta che $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per n sufficientemente grande.

Esempio

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni $0 < p \leq 1$.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché $\forall n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi $p = 2 > 1$ e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che $\forall n$, $a_{2n+1} < a_{2n+2}$.

Nota: $a_n \sim b_n$ e b_n monotona crescente non implica necessariamente che a_n sia monotona decrescente.

Infatti,

Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. È chiaro che b_n è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti, a_n non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se a_n fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

Esempio Stima errore teorema Leibniz

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di 10^{-3} . Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni, $a_n \rightarrow 0$ e $a_{n+1} < a_n$, quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_N| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$ certamente $|E_N| < 10^{-3}$. Dobbiamo usare almeno $N = 6$ per ottenere $(N+1)! = 5040 > 1000$. Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di $\frac{1}{6!}$.

Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto $p = \frac{1}{2} \leq 1$ e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto $a_n \geq 0$ e $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+2) - (n+1)\sqrt{n-1}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 &\geq (n+1)^3 = n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con $n \rightarrow \infty$ del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non riusciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e b_n è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\sqrt{n}n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^i n fty(-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

ha modulo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono assolutamente allora $\sum (a_n + b_n)$ converge assolutamente. Infatti,

$$\sum |a_n - b_n| \leq \sum (|a_n| + |b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n| < +\infty$$

12.4 Serie con parametri

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

per $x \leq -1 \vee x \geq 2$, altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left| \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2) \right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log \log n} \rightarrow 1$ e $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (limite notevole) e

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Quindi $|x^2 - x - 2| = L$ e se $L < 1$, la serie converge assolutamente, se $L > 1$ il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione $L < 1$

$$|x^2 - x - 2| < 1$$

Siccome $|t| < a \iff -a < t < a$ scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Se $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ oppure $x > \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui $L = 1$. In tale caso, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Nel caso in cui $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ sappiamo che $x^2 - x - 2 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con $p = 1$ e $q > 1$, quindi la serie diverge. Invece, se $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ abbiamo che $x^2 - x - 2 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se $a - a_{n+1} \geq 0$ definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned} (n+2)\log n - (n+1) \left[\log n + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] &= \log n - (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\sim \log n - (n+1) \frac{1}{n} \rightarrow +\infty - 1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

siccome $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon \rightarrow 0$. Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n$$

La serie è a termini non-negativi quando $x-1 < 0$ cioè $x < 1$. Studiamo allora la convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|$$

appliciamo il criterio della radice n-esima

$$\left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|^{1/n} = \frac{2 \left(1 + \frac{\log n}{2^n} \right)^{1/n}}{n^{1/n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{1/n}} \cdot \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} \rightarrow \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = L$$

Se $L < 1$, la serie converge assolutamente. Se $L > 1$, il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se $L = 1$ il test è inconclusivo. Abbiamo allora

$$L = \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} < 1 \iff 2|x-1| < \sqrt{x^2+4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) &< x^2 + 4 \\ 3x^2 - 8x &< 0 \\ x(3x - 8) &< 0 \end{aligned}$$

allora la soluzione è $0 < x < \frac{8}{3}$. In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se $x < 0$ o $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge. Poiché è a termini positivi per $x \leq 1$ se $x < 0$ la serie diverge. Per $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se $x = 0$ o $x = \frac{8}{3}$ abbiamo $L = 1$ e il criterio è inane. Per tali valori,

$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = 1$$

poiché

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

è negativo in $x = 0$ e positivo in $x = \frac{8}{3}$, concludiamo che per $x = 0$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = -\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Invece, per $x = \frac{8}{3}$ abbiamo che

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = +\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Nel caso $x = 0$ la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso $x = \frac{8}{3}$ la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione a_n è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché $\frac{\log n}{n + \sqrt{n}} \rightarrow 0$, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per $x = \frac{8}{3}$.

Teorema Teorema di Dirichlet

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

be a series where:

1. $a_n \geq 0$;
2. $a_n \rightarrow 0$;
3. $a_n \geq a_{n+1}$;
4. Let

$$\sum_{k=1}^n b_k$$

there exist M such that $\forall n, |B_n| \leq M$

Then, the series converges.

Dimostrazione per lode.

Il teorema di Leibniz è quindi un corollario di questo teorema.

Proposition Prodotto di serie secondo Cauchy

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con rispettiva somme parziali A_N e B_N , vogliamo definire una serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ con somme parziali C_N in modo che se $A_N \rightarrow A$ e $B_N \rightarrow B$, allora $C_N \rightarrow AB$. Per trovare la forma di questa serie consideriamo

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) = a_0b_0 + x(a_0b_1 + a_1b_0) + x^2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

Definiamo quindi il prodotto di serie secondo Cauchy con

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Teorema Teorema di Mertens

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti rispettivamente con somma A e B e supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente. Allora, la serie prodotto converge a AB .

Dimostrazione per lode. È importante che almeno una delle due deve convergere assolutamente.

Mostriamo che $e^x e^y = e^{x+y}$ usando il prodotto secondo Cauchy delle espansioni di Taylor.

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

L'espansione di Taylor ci permette di estendere la funzione esponenziale ai valori complessi.

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann

TODO: esempi

Definizione Convergenza incondizionale

Una serie è incondizionatamente convergente se ogni serie permutata ha la stessa somma.

Teorema

Sia consideri la serie $\sum a_n$:

1. Se $a_n \geq 0$ allora ogni permutazione $\sum a_{\sigma(n)}$ ha lo stesso carattere e la stessa somma;
2. Se $\sum |a_n| < +\infty$ allora $\sum |a_{\sigma(n)}| < +\infty$ e ha la stessa somma.
3. Teorema di Riemann: se $\sum a_n$ converge solo semplicemente, allora:
 - (a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, esiste una serie permutata con valore λ ;
 - (b) esiste una permutazione σ tale che $\sum a_{\sigma(n)}$ oscilla.

Corollario

Una serie numerica è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente.

Proof Punto I

Sia $a_n \geq 0$ e sia σ una permutazione di \mathbb{N} arbitraria e consideriamo la serie permutata $\sum a_{\sigma(n)}$ e sia

$$A_N = \sum_{k=1}^N a_n \quad B_N = \sum_{k=1}^N b_n$$

Notiamo che per ogni n esiste N tale che

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$$

Cosicché

$$B_N = \sum_{k=1}^N a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^N a_k = A_N \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Passando limite otteniamo

$$\lim B_N = B = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Notando che, se σ^{-1} è la permutazione inversa, per ogni n

$$a_n = a_{\sigma^{-1}(n)}$$

lo stesso ragionamento mostra che

$$A = \sum a_n \leq B = \sum a_{\sigma(n)}$$

e quindi vale $A = B$.

Punto II lode.

Proof Teorema di Riemann (dimostrazione concettuale)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie convergente solamente semplicemente e poniamo

$$\forall n, p_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases} \quad q_n = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$$

Cosicché $\forall n, a_n = p_n - q_n$ e $|a_n| = p_n + q_n$. Poiché $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty$ mentre $\sum a_n = \sum (p_n - q_n)$ converge, deve essere che sia $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ (devono divergere entrambe). Se solo una divergesse, spezzandola la serie avrebbe una parte che converge e una che diverge, quindi la differenza divergerebbe, ma la differenza deve convergere. Siccome $a_n \rightarrow 0$ allora $p_n \rightarrow 0$ e $q_n \rightarrow 0$. Siccome entrambe le serie divergono, io posso creare una permutazione per giungere a qualsiasi cosa. Supponiamo che il primo termine sia 0. Possiamo definire p_n e q_n tale che la somma sale sopra uno e scende sotto meno uno, all'infinito e oscillando. Oppure, posso farla oscillare ma avvicinandosi sempre di più a 0, e quindi il valore sarebbe zero.

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

che converge assolutamente per $p > 1$. Vogliamo studiare la convergenza semplice per $0 < p \leq 1$. Notiamo che se $p \leq 0$, allora il termine non tende a zero e la serie non converge. Applichiamo il teorema di Dirichlet con $b_n = \sin n$ e $a_n = \frac{1}{n^p}$. Per applicare il teorema bisogna verificare che la successione $\{b_n\}$ ha somme parziali limitate. Allora,

$$B_N = \sum_{k=1}^N \sin k$$

che è limitato se la consideriamo come serie geometrica con l'identità di Eulero.

13 Successioni, sottosuccessioni e topologia

Definizione Sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in \mathbb{N} . La successione $\{x_{n_k}\}$ viene detta *sottosuccessione* di $\{x_n\}$.

Teorema Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in \mathbb{N} . Sono equivalenti

1. $\{x_n\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$;
2. per ogni successione $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$;
3. da ogni sotto successione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ si può generare una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$.

Notiamo che in generale se esiste una successione $\{x_{n_k}\}$ che tende a λ , niente si può dire di $\{x_n\}$. Per esempio $x_{2k} = (-1)^{2k} \rightarrow 1$ ma la successione non ammette limite.

Proof Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

1. **(1) \implies (2):** dimostriamo che il primo punto implica il secondo. Supponiamo che $x_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Per definizione di limite per ogni intorno I di λ di raggio $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$. Sia ora $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione. Poiché n_k è strettamente crescente $\forall k, n_k \geq k$. Quindi se $k \geq N$, $n_k \geq N$ da cui $x_{n_k} \in I$ e per definizione $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$ con $k \rightarrow \infty$.
2. **(2) \implies (3):** il secondo punto implica il terzo: se $x_{n_k} \rightarrow \lambda$ per quanto appena visto ogni sua sottosuccessione tende a λ e quindi il punto vale.
3. **(3) \implies (1):** dimostriamo ora che il terzo punto implica il primo. Se per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ tale che $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$ abbiamo $\{x_n\} \rightarrow \lambda$. Dimostriamo la contronominale. Dimostriamo quindi che se $\{x_n\}$ non tende a λ , allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che nessuna sua sottosuccessione tende a λ . Il fatto che $\{x_n\}$ non tenda a λ , per negazione della definizione è $\exists I_0(\lambda), \forall N \exists n \geq N$ tale che $x_n \notin I_0$. Costruiamo tale sottosuccessione. Scegliamo $N = 1$. Per il primo punto, $\exists n_1 \geq 1 \mid x_{n_1} \notin I_0$. Sia poi $N = n_1 + 1$. Per il primo punto, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 \mid x_{n_2} \notin I_0$. Iterando il procedimento si ottiene una successione n_k tale che $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ e $x_{n_k} \notin I_0$ per tutte le k . Poiché $\{x_{n_k}\} \notin I_0$, nessuna sua sottosuccessione può tendere a I_0 .

Corollario

Sia $\{x_n\}$ una successione. Allora:

1. se $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k}$ non ha limite, allora $\{x_n\}$ non ha limite;
2. se $\exists \{x_{n_k}\}$ e $\{x_{n_j}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$ e $\{x_{n_j}\} \rightarrow \mu$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\{x_n\}$ non ha limite;
3. se $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ tendono allo stesso limite λ , allora $\{x_n\} \rightarrow \lambda$ (o suddividendo in qualsiasi altra partizione disgiunta).

Teorema Punti di chiusura e successioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Sono equivalenti:
 - (a) x_0 è punto di accumulazione per E ;
 - (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \rightarrow x_0$;
2. Sono equivalenti:
 - (a) $x_0 \in \bar{E}$;
 - (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \rightarrow x_0$.

Proof

1. **(1.a) \implies (1.b)**: supponiamo che x_0 sia di accumulazione. Per definizione $\forall I$ intorno di x_0 , esiste $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$. In particolare,

$$\forall I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right), \exists x_n \neq x_0 \mid x_n \in E \cap I_n$$

cioè $x_n \in E$ e $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ che per il teorema dei carabinieri converge a x_0 .

2. **(1.b) \implies (1.a)**: supponiamo che

$$\exists \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \neq x_0 \wedge x_n \rightarrow x_0$$

Allora per ogni intorno I di x_0 , esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in (I \cap E) \setminus \{x_0\}$ e per definizione x_0 è di accumulazione.

3. **(2.a) \implies (2.b)**: Siccome $x_0 \in \overline{E}$ si presentano due casi:
 - (a) $x_0 \in E$: basta porre $\forall n, x_n = x_0$ e $\{x_n\} \subseteq E$ quindi $x_0 \rightarrow x_0$;
 - (b) $x_0 \notin E$: ciò implica che $x_0 \in E'$ e per il primo punto $\exists \{x_0\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \rightarrow x_0$.
4. **(2.b) \implies (2.a)**: esercizio.

Teorema Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $\lambda = \inf E$ e $\mu = \sup E$. Allora, esistono successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$ tale che $\{x_n\} \rightarrow \lambda^+$ e $\{y_n\} \rightarrow \mu^-$.

Proof Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso dell'inf. Dobbiamo considerare due casi distinti:

1. $\lambda > -\infty$: per definizione di $\lambda = \inf E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \mid \lambda \leq x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ si trova quindi $x_n \in E$ tale che $\lambda \leq x_n < \lambda + \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, $x_n \rightarrow \lambda^+$.

2. $\lambda = -\infty$: per definizione E non è limitato inferiormente. Quindi, $\forall n, -n$ non è minorante e per tanto $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n < -n$. Allora, chiaramente $x_n \rightarrow -\infty$ per confronto.

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato sup (e inferiormente). Allora:

1. $\sup E = \mu \in \overline{E}$ e $\inf E = \lambda \in \overline{E}$;
2. se E è limitato superiormente (o inferiormente), allora E ammette massimo (o minimo).

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{x_n\}$ una successione limitata in \mathbb{R} . Allora, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proof Dimostrazione 1

Si danno due casi:

1. $\{x_n\}$ assume infinite volte lo stesso valore x_0 . Allora $\{n_k\}$ è la successione tale che $x_{n_k} = x_0$ banalmente $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$.
2. $\{x_n\}$ non assume infinite volte lo stesso valore, quindi assume infiniti valori distinti. Poiché $\{x_n\}$ è limitata esiste un intervallo $I_0 = [a; b]$ tale che $x_n \in I_0$. Consideriamo il punto

medio $m_0 = \frac{a+b}{2}$ e i due sottointervalli $[a; m_0]$ e $[m_0; b]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori. Scegliamo allora quest'ultimo come $I_1 = [a_0, b_0]$ e iteriamo. Consideriamo quindi gli intervalli I_n dove chiaramente

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ and } l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n) = \frac{1}{2^n}l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

e costruiamo la sottosuccessione nella seguente maniera: sia n_1 il primo n tale che $x_n \in T_1$. Consideriamo I_2 che contiene infiniti valori della successione. Allora n_2 è il primo $n > n_1$ tale che $x_{n_2} \in I_2$, e così via. Allora la sottosuccessione converge per l'assioma di continuità. Dato $\varepsilon > 0$ si scelga j tale che $\frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e si conclude che $\forall k \geq j, |x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e per definizione $x_{n_k} \rightarrow x_0$.

Lemma Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Allora da tale successione si può estrarre una sottosuccessione monotona.

Proof Dimostrazione 2

Per il lemma di Polya, da $\{x_n\}$ estraggo una sottosuccessione monotona $\{x_{n_k}\}$ che quindi ha limite λ . Poiché $\{x_{n_k}\}$ è limitata, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una qualunque successione reale e sia $S = \{n \mid \forall m \geq n, x_m \geq x_n\}$ un insieme di indici. Si presentano due casi mutualmente esclusivi

1. S è infinito. Allora S ha forma $\{n_1, n_2, \dots\}$. Per definizione di S , per ogni k abbiamo $\forall m \geq n, x_{n_k} \leq x_m$. In particolare $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ e $\{x_{n_k}\}$ è monotona crescente.
2. S è finito (eventualmente vuoto) esiste una N tale che $\forall n \geq N, n \notin S$. Sia $n_1 = N \notin S$ per definizione di S esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} < x_{n_1}$ con $n_2 \notin S$ per definizione $\exists n_3 < n_2$ tale che $x_{n_3} < x_{n_2}$. Iterando troviamo una sottosuccessione x_{n_k} strettamente decrescente.

Teorema Equivalenza convergenza e Cauchy

Una successione $\{x_n\}$ reale converge se e solo se è di Cauchy.

Lemma

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in \mathbb{R} . Allora:

1. la successione è limitata;
2. se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$, allora $\{x_n\} \rightarrow L$.

Proof Dimostrazione del lemma

1. Per definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$, esiste N tale che $\forall n, m \geq N$, si ha $|x_n - x_m| < \varepsilon$. In particolare, $\forall n \neq N$ (con $m = N$), si ha che

$$|x_n - x_N| < 1$$

da cui

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1, \quad \forall n \neq N$$

e quindi posto $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$ risulta quindi $\forall n, |x_n| \leq M$ e quindi $\{x_n\}$ è limitata.

2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e supponiamo che esista $\{x_{n_k}\}$ sottosuccessione di $\{x_n\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$. La tesi è che $x_n \rightarrow L$. Per ipotesi, fissati $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \mid \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$(\{x_n\})$ è di Cauchy

$$\exists K \mid \forall k \geq K, |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$(\{x_{n_k}\} \rightarrow L)$. Sia quindi $n \geq N$ e fissiamo $k \geq \max\{K, N\}$ cosicché $k \geq N \implies n_k \geq k \geq N$. Pertanto, vale $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$. Quindi

$$\forall n \geq N, |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon$$

e quindi per definizione $x_n \rightarrow L$.

Proof Equivalenza convergenza e Cauchy

La successione $\{x_n\}$ è limitata per il lemma. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a $L \in \mathbb{R}$. Per il secondo punto del lemma, $x_n \rightarrow L$ e quindi converge.

La definizione di una successione di Cauchy è la stessa nei complessi e anche quella di convergenza. Vale sempre il medesimo teorema.

In particolare, mostriamo che se è di Cauchy, allora converge. Notiamo che, dato un numero complesso w banalmente

$$\begin{cases} |\Re w| \\ |\Im w| \end{cases} \leq |w| \leq |\Re w| + |\Im w|$$

Mostriamo che $z_n \rightarrow \alpha$ se e solo se $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$. Infatti,

$$\begin{cases} |\Re z_n - \Re \alpha| \\ |\Im z_n - \Im \alpha| \end{cases} \leq |z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha|$$

poiché $z_n \rightarrow \alpha$ se e solo se $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$, le dis di sind ice che se $z_n \rightarrow \alpha$ allora $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$. Viceversa se $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$ allora

$$|z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha| \rightarrow 0$$

cosicché $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$ e $z_n \rightarrow \alpha$. Analogamente, $\{z_n\}$ è di Cauchy se e solo se $\{\Re z_n\}$ e $\{\Im z_n\}$ sono di Cauchy. Siccome entrambe queste successioni sono di Cauchy nei reali, allora convergono. Quindi

$$\Re z_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \wedge \Im z_n \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \implies z_n = \Re z_n + i \Im z_n \rightarrow \alpha + i \beta$$

Anche nei complessi le serie sono analoghe. Una serie converge se se la successione delle sue somme parziali converge. La serie diverge se il suo modulo tende a infinito. Se il limite delle somme parziali non esiste, la serie è oscillante.

La medesima convergenza e successione di Cauchy si estende a tutti gli spazi metrici.

Importante: in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma non necessariamente il contrario.

Per esempio, in $(\mathbb{Q}, |r - s|)$ la successione $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $r_n \rightarrow \sqrt{2}$. Allora, questa successione è di Cauchy nei reali e anche nei razionali, in quanto la metrica è la stessa. Tuttavia, la successione non converge nello spazio metrico dato.

Definizione Spazio metrico completo

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy convergono.

14 Limiti

Definizione

Sia E un insieme diciamo che $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione esteso di E se o $\xi \in \mathbb{R}$ e ξ è un punto di accumulazione di E o $\xi = \pm\infty$ e E è limitata superiormente/inferiormente.

Quindi ξ è un punto di accumulazione esteso di E se $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \rightarrow \xi$ con $\forall n, x_n \neq \xi$.

Definizione Intorno puntato

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia I un intorno di x_0 . L'insieme $I \setminus \{x_0\}$ viene detto *intorno puntato* di x_0 .

Definizione Limite

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso per E . Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

e per ogni intorno I di μ esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in (J \setminus \{\xi\}) \cap E, f(x) \in I$.

Sintassi: scriviamo anche $f(x) \rightarrow \mu$ per $x \rightarrow \xi$.

Richiediamo che il punto sia di accumulazione esteso per esterne la definizione di limiti ai punti infiniti (stando nel dominio).

La definizione di limite non coinvolge il valore di f in ξ . In tal punto, la funzione non deve essere necessaria definita.

Se $\mu, \xi \in \mathbb{R}$, la definizione si specifica in:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E \cap [(\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}], f(x) \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$$

In questo caso $I = (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ e $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Equivalentemente, possiamo scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x \neq \xi, |x - \xi| < \delta \implies |f(x) - \mu| < \varepsilon$$

Modificando tale espressione esplicitando le condizioni del valore assoluto, è possibile introdurre la definizione di limite da destra/sinistra da sotto (per difetto) e da sopra (per eccesso).

Definizione Limite da sinistra

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \mu^+$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, \xi - \delta < x < \xi \implies \mu \leq f(x) < \mu + \varepsilon$$

Dalla definizione di limite, il limite esiste se e solo se il limite destro e quello sinistro esistono e coincidono.

Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, gli intorno di ξ sono delle forma $J = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ e gli intorno di $\pm\infty$ sono $(+M, +\infty)$ e $(-\infty, -M)$ con $M > 0$.

La definizione di $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \pm\infty$ diventa

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in E \begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), x \neq \xi \\ \xi - \delta < x < \xi + \delta, x \neq \xi \\ 0 < |x - \xi| < \delta \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} f(x) \in (M, +\infty) \\ f(x) > M \end{cases}$$

Come nel caso precedente si possono definire $\lim_{x \rightarrow \xi^+} = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \xi^-} = \pm\infty$.

Se $\xi = +\infty$ la definizione è uguale al limite delle successioni. Per $\xi = -\infty$ è leggermente diversa.

Esempio Limite

Dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3} = 2$$

Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ abbiamo che $0 < |x - 1| < \delta$ implica $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Prendiamo quindi $\varepsilon > 0$. Studiamo la disequazione

$$|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$$

e determiniamo un $\delta > 0$ per cui la disequazione vale per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ e eventualmente $x \neq 1$. Vogliamo quindi

$$2 - \varepsilon < \sqrt{x^2 + 3} < 2 + \varepsilon$$

Supponiamo $\varepsilon < 1$ e quindi $2 - \varepsilon > 0$. Siccome tutto è positivo, quadriamo e otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 + 3) < (2 + \varepsilon)^2 \\ x^2 + 3 > (2 - \varepsilon)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x^2 > 1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 \end{cases}$$

Quindi, la prima diventa $|x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$, mentre la seconda è sempre vera se $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < 0$, e nel caso in cui sia maggiore o uguale a zero, allora $|x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}$. Scegliamo $\varepsilon < \frac{1}{4}$ e allora $1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$ e la disuguaglianza $|\sqrt{x^2 + 3} - 2| < \varepsilon$ è equivalente a

$$\begin{cases} |x| < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2} \\ |x| > \sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} \end{cases}$$

Supponiamo ora che $x > 0$, data la natura del limite, quindi

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} < x < \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}$$

Scegliamo allora

$$\delta = \min\{\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}, \sqrt{1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}\}$$

Il seguente teorema fa da ponte per permetterci di usare le proposizioni circa i limiti di successioni come limiti di funzioni.

Teorema

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso per E . Sono equivalenti:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

2.

$$\forall \{x_n\} \subseteq E, \forall n, x_n \neq \xi \mid x_n \rightarrow \xi \implies f(x_n) \rightarrow \mu$$

Proof

(\implies) Per ipotesi $f(x) \rightarrow \mu$ per $x \rightarrow \xi$. Sia $\{x_n\} \subseteq E$ con $x_n \neq \xi$ per tutte le n e $x_n \rightarrow \xi$. Applichiamo la definizione di limite per dimostrare $f(x) \rightarrow \mu$. Sia I un intorno di μ , la tesi è che $\exists N$ tale che $\forall n \geq N, f(x_n) \in I$. Poiché $f(x) \rightarrow \mu$ per $x \rightarrow \xi$ per definizione $\exists J$ intorno di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$ si ha $f(x) \in I$. Ma per ipotesi $x_n \rightarrow \xi$ e $\forall n, x_n \neq \xi$, quindi $\exists N$ tale che $x_n \in I \cap J$ e $x_n \in E$ quindi $f(x_n) \in I$ come richiesto.

(\impliedby) Dimostriamo la contronominale. Supponiamo quindi che $f(x)$ non tenda a μ cioè esiste un intorno I_0 di μ tale che per ogni intorno J di ξ , esiste un punto $x \neq \xi$ con $x \in E \cap J$ tale che $f(x) \notin I_0$. Consideriamo $\xi \in \mathbb{R}$ cosicché gli intorno di ξ abbiamo forma $J = (\xi - \delta; \xi + \delta)$ e \exists intorno I_0 di μ tale che $\forall \delta > 0$, esiste $x_\delta \in E \cap (\xi - \delta; \xi + \delta)$ e $x_\delta \neq \xi$ tale che $f(x_\delta) \notin I_0$. Scegliamo ora $\delta = \frac{1}{n}$ si ottiene quindi che $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n \neq \xi$ con

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n}$$

tale che $f(x_n) \notin I_0$. Per il teorema dei due carabinieri $x_n \rightarrow \xi$ con $x_n \neq \xi$ e $x_n \in E$ ma $\forall n, f(x_n) \notin I_0$ cosicché $f(x_n)$ non tenda a μ . I casi $\xi = \pm\infty$ è analogo e lasciato per esercizio.

14.1 Proprietà dei limiti

Proposition Il limite, se esiste, è unico

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso di E . Il limite se esiste è unico.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu \implies \lambda = \mu$$

Proof Il limite, se esiste, è unico

Poiché $f(x) \rightarrow \lambda$, $\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi$, abbiamo che $x_n \rightarrow \xi$. Allora $f(x_n) \rightarrow \lambda$ e $f(x_n) \rightarrow \mu$ ma il limite di successioni è unico, quindi $\lambda = \mu$.

Proposition Permanenza del segno e monotonia del limite

Siano $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia ξ un punto di accumulazione esteso di E , e supponiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda \wedge \exists \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \mu$$

1. Se $\lambda \neq \mu$, allora $\forall c$ tale che $\lambda < c < \mu$ esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$, allora $f(x) < c$ e $g(x) > c$
2. se esiste un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi$, abbiamo

$$f(x) \leq g(x) \implies \lambda \leq \mu$$

Dal primo punto segue in particolare che $f(x) < g(x)$ in $J \cap E \setminus \{\xi\}$, e se $f(x) \equiv 0$, $f(x) \rightarrow 0 = \lambda$ e concludiamo che se $g(x) \rightarrow \mu > 0$ per $x \rightarrow \xi$ esiste un intorno J di ξ tale che $g(x) > 0$ in $(J \cap E) \setminus \{\xi\}$ (permanenza del segno).

Proof Permanenza del segno e monotonia del limite

1. Per ipotesi $\lambda < c < \mu$ esistono due intorni I_λ di λ e I_μ di μ tale che I_λ è tutto a sinistra di c e I_μ è tutto a destra di c . Per definizione di limite, esiste un intorno $J_1(\xi)$ di ξ tale che $\forall x \in E \cap J_1, x \neq \xi, f(x) \in I_\lambda$ e $\forall x \in E \cap J_2, x \neq \xi, g(x) \in I_\mu$ (ossia $f(x) \rightarrow \lambda$ e $g(x) \rightarrow \mu$). Quindi $\forall x \in E \cap [J_1 \cap J_2], x \neq \xi$ abbiamo $f(x) < c < g(x)$.
2. Esercizio: contronominale.

Proposition Limitatezza

Se $f(x) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow \xi$ allora usando la definizione di limite con $J = (L - 1, L + 1)$ si trova un intorno J di ξ tale che $\forall x \in E \cap J, x \neq \xi, L - 1 < f(x) < L + 1$ e in particolare f è limitata nell'intorno puntato $J \setminus \{\xi\}$ di ξ .

Teorema Teorema dei carabinieri

Siano $f, g, h: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ punto di accumulazione esteso di E . Se esiste un intorno J_0 di ξ tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

in $(E \cap J) \setminus \{\xi\}$ e

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \mu = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x)$$

allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$$

Proof Teorema dei carabinieri

Per il teorema che lega limiti di funzioni e limiti successionali, la tesi equivale a

$$\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \neq \xi, g(x_n) \rightarrow \mu$$

Sia allora $\{x_n\}$ una tale successione. Poiché $f(x) \rightarrow \mu$, risulta $f(x_n) \rightarrow \mu$ e poiché $h(x) \rightarrow \mu$, risulta $h(x_n) \rightarrow \mu$ e poiché $\forall x \in J \cap E, x \neq \xi, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e siccome $x_n \rightarrow \xi, \forall x_n \neq \xi$ risulta che esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in J \cap E, x_n \neq \xi$ cosicché per tali n

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

e per il teorema dei carabinieri delle successioni vale la tesi.

14.2 Aritmetica dei limiti

Proposition Aritmetica dei limiti

Siano $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso di E e supponiamo che $f(x) \rightarrow \lambda$, $g(x) \rightarrow \mu$ per $x \rightarrow \xi$. Allora:

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \pm g(x) = \lambda \pm \mu$$

purché non si presenti forma $\infty - \infty$.

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = \lambda\mu$$

purché non si presenti forma $0 \cdot \infty$.

3. se $\mu \neq 0$ cosicché $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di E (per la permanenza del segno) allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

purché non si presenti forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se $g(x) \neq 0$ in un intorno puntato di ξ e $g(x) \rightarrow 0^\pm$, allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{0^\pm} = \pm\infty$$

(il segno è dato dalla regola dei segni) purché $\lambda \neq 0$.

Proof

Mostriamo che $f(x)g(x) \rightarrow \lambda\mu$ se non si presenta forma $0 \cdot \infty$. Sia infatti $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq \xi$ e $x_n \rightarrow \xi$, allora $f(x_n) \rightarrow \lambda$ e $g(x_n) \rightarrow \mu$ implica che $f(x_n)g(x_n) \rightarrow \lambda\mu$ purché non si presenti forma $0 \cdot \infty$.

In modo analogo si estendono tutte le formule di calcolo per i limiti viste per i limiti di successione. Per esempio,

$$f(x)^{g(x)} \rightarrow \lambda^\mu$$

purché non si presenti forma 1^∞ e ∞^0 . Nel caso in cui $f(x) \rightarrow 0^+$ cosicché $f(x) > 0$ in un intorno puntato la forma indeterminata relativa è 0^0 ($(0^+)^0 = 0$) tranne per $\mu = 0$.

Teorema Cambiamento di variabile nei limiti

Siano $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E dove $f(x) \rightarrow \lambda$ per $x \rightarrow \xi$, $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e λ un punto di accumulazione esteso dove $g(y) \rightarrow \mu$ per $y \rightarrow \lambda$, e supponiamo infine che ξ sia di accumulazione esteso per

$$f^{-1}(F) = \text{C.E. di } g \circ f$$

e

$$\text{C.E. di } (g \circ f) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = f^{-1}(F)$$

Allora, $g(f(x)) \rightarrow \mu$ per $x \rightarrow \xi$ in $f^{-1}(F)$. Si può scrivere tale relazione come

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lambda} g(y)$$

pongo

$$y = f(x) \rightarrow \lambda$$

per $x \rightarrow \xi$.

le relazioni di limiti per le successioni conducono alle corrispondenti di limite per le funzioni. Se $\forall \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, abbiamo le analoghe con x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \rightarrow \alpha$$

Definizione Condizione di Cauchy

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E . Diciamo che f soddisfa la condizione di Cauchy (C) per $x \rightarrow \xi$ se $\forall \varepsilon > 0$, esiste un intorno J di ξ tale che

$$\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}, \varepsilon > |f(x) - f(x')|$$

nei casi in cui $\xi \in \mathbb{R}$ la condizione si semplifica a

$$0 < |x - \xi| < \delta \wedge 0 < |x' - \xi| < \delta$$

e per $\xi = +\infty$

$$x, x' > M$$

per qualche M .

Teorema

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ξ un punto di accumulazione esteso per E . Sono equivalenti:

1. esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = L$$

2. $f(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy per $x \rightarrow \xi$.

Proof

(\Rightarrow) Supponiamo che $f(x) \rightarrow L$ per $x \rightarrow \xi$. Per definizione $\forall \varepsilon > 0$, esiste un intorno J di L tale che

$$\forall x \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}, |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi $\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}$ abbiamo

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x') - L + L| \leq |f(x) - L| + |L - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e vale la condizione.

(\Leftarrow) Supponiamo che f soddisfa la condizione di Cauchy. Abbiamo che

$$\forall \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \neq \xi \wedge x_n \rightarrow \xi, f(x_n) \rightarrow L$$

(usiamo la successione analoga). Mostriamo che:

1. esiste L tale che $f(x) \rightarrow L$. $\forall \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \rightarrow \xi \wedge x_n \neq \xi$, $f(x_n)$ è di Cauchy, e quindi

$$\exists \lim_n f(x_n) = L$$

Sia allora $\{x_n\} \subseteq E \mid \forall x_n \rightarrow \xi \wedge x_n \neq \xi$. Dimostriamo che dato $\varepsilon > 0$, $\exists N \mid \forall n, m \geq N$, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, quindi $f(x_n)$ è di Cauchy. Poiché f soddisfa la condizione di Cauchy dato $\varepsilon > 0$ esiste J intorno di ξ tale che $\forall x, x' \in (E \cap J) \setminus \{\xi\}$, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Per ipotesi, $x_n \in E$ e $x_n \neq \xi$ per tutte le n e $x_n \rightarrow \xi$ quindi esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in (J \cap E) \setminus \{\xi\}$. Quindi $\forall n, m \geq N$, $x_n, x_m \in (J \cap E) \setminus \{\xi\}$ da cui $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ come si voleva;

2. il limite è lo stesso per tutte le successioni. Sia allora $\{x'_n\} \subseteq E$ un'altra successione tale che $x'_n \neq \xi$ per tutte le n e $x'_n \rightarrow \xi$. $\{f(x'_n)\}$ è di Cauchy e quindi esiste finito

$$\lim_n (x'_n) = L'$$

La tesi è quindi che $L = L'$ e per dimostrarlo costruiamo una successione che intercala le due

$$x''_n = \begin{cases} x_n & n \text{ pari} \\ x'_n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi $\forall n, x''_n \neq \xi$ e $x''_n \rightarrow \xi$. Abbiamo che $\{f(x''_n)\}$ è di Cauchy quindi esiste finito

$$\lim_n (x''_n) = L''$$

Ma $f(x''_{2k} = f(x_{2k})) \rightarrow L$ perché è sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$. Tuttavia, questa tende anche a L'' perché è sottosuccessione di $\{f(x''_n)\}$. Abbiamo quindi che $L = L''$. Analogamente, con i dispari, mostriamo che $L' = L''$ e quindi $L = L'$.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x \sin x}{x^3 \cos(x) - (e^x - 1)^2} = 2$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x^3\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, $\sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Inoltre, $x^3 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim x^{7/2}$, quindi al numeratore raggruppiamo $x^{7/2}$. Per il denominatore $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x}x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)^2 &\sim x^{5/2}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Riscriviamo allora l'espressione come

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{7/2} \left\{ x^{-7/2} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + x^{1/2} \sin\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \right\}}{x^2 \left\{ x^{-2} x^{1/2} (\sqrt{x^2+1}-x)^2 + x \cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right\}} \\ &\sim 2x^{3/2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x-1}$$

la forma di indecisione è 1^∞ . Allora usiamo la forma esponenziale

$$e^{(2x-1) \log\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)}$$

Vogliamo usare $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ con $f(x) \rightarrow 0$. Allora scriviamo

$$e^{(2x-1) \log\left(1 - \frac{6}{4x+5}\right)}$$

dove l'esponente è asintotico a -3 . Allora il limite è pari a e^{-3} .

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin^2(x) \log(1 + \tan^4(\frac{x}{1+x^4}))}{(e^{2 \sin^4 x} - 1) \left(\sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \right)}$$

Abbiamo:

1. $\sin(x^2) \sim x^2$
2. $\tan(1 + \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2})) \sim \tan^4(\frac{x^2}{1+x^2}) \sim \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 \sim x^4$
3. $e^{2 \sin^4(x)} - 1 \sim 2 \sim x^4 \sim 2x^4$

4. $\sqrt[6]{1 + \frac{x^2}{(1+x)^{3/7}}} - 1 \sim \frac{1}{6}x^2$
XXX

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + 2x)}{\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}$$

Scriviamo l'asintotico con l'o-piccolo:

1. $\sin x = x(1 + o(1))$
2. $\log(1 + 2x) = 2x(1 + o(1))$

Allora

$$\begin{aligned}\sin x - \log(1 + 2x) &= x + xo(1) - 2x - 2xo(1) \\ &= -x + xo(1) = -x(1 + o(1))\end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo

$$(1 + x)^{1/6} - 1 = \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

e allora

$$(1 + x)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}x(1 + o(1))$$

Trasformiamo analogamente l'altro termine e troviamo

$$\sqrt[6]{1+x} - \sqrt[6]{1-x} = \frac{1}{3}x(1 + o(1)) \sim \frac{1}{3}x$$

e quindi il limite fa -3 .

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - \cos \sqrt{x}}{(\tan(2x))^\alpha}$$

Il primo termine è pari a $1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1))$, il secondo $1 - \frac{1}{2}x(1 + o(1))$. Abbiamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{2}{3}x(1 + o(1)) - 1 + \frac{1}{2}x(1 + o(1))}{(2x)^\alpha} \sim \frac{7}{3 \cdot 2^{\alpha+1} x^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0^+ & \alpha < 1 \\ \frac{7}{12} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + (x - \frac{\pi}{2})^2}{\sin x (\sqrt{x} - \frac{\pi}{2})}$$

Conviene razionalizzare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x + (x - \frac{\pi}{2})^2] (\sqrt{x} + \frac{\pi}{2})}{\sin x [(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2})(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2})]} = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos x + (x - \frac{\pi}{2})^2]}{\sin x (x - \frac{\pi}{2})}$$

Sostituiamo la variabile $y = x - \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi} [\cos(y + \frac{\pi}{2}) + y^2]}{y}$$

Notiamo che $\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(y) \sim -y$. Quindi,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi}(-y)}{y} = -\sqrt{2\pi}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} & x > 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo allora i limiti dalla due direzioni.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

L'altro limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{x-1} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite generale non esiste.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right]^{\frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x}}$$

Scriviamo la forma esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left\{ \frac{x+1}{x^3 + \tan^2 x} \log \left(1 + \sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right) \right) \right\}$$

Il primo termine è asintotico a $\frac{1}{x^2}$, mentre il logaritmo è asintotico a $\sin\left(\frac{x^\alpha}{x+1}\right)$ che è asintotico a $\frac{x^\alpha}{x+1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ e & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha < 2 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2+x}\right) \right\}^{\frac{\tan x}{\log(1+1+x^2)}}$$

14.3 Continuità

Definizione Continuità

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni intorno I di $f(x_0)$, esiste un intorno J di x_0 tale che $\forall x \in E \cap J, f(x) \in I$.

Nota che non si richiede che x_0 sia un punto di accumulazione come nel limite. Infatti, se $x_0 \in E$ è isolato in E , cioè $\exists J$ intorno di x_0 tale che $E \cap J = \{x_0\}$ la condizione di continuità è automaticamente soddisfatta. In altri termini ogni funzione è continua nei punti isolati del suo dominio.

Se invece $x_0 \in E$ è un punto di accumulazione, la definizione di continuità è equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione Continuità

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, \delta > |x - x_0| \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le definizioni con ε e δ possiamo parlare di continuità da destra e sinistra.

Definizione Continuità da sinistra

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 da sinistra se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x_0 - \delta < x \leq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definizione Continuità da destra

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Diciamo che f è continua in x_0 da destra se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in E, x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Proposition

Una funzione è continua se e solo se è sia continua da destra che da sinistra.

Proposition

Se x_0 è un punto di accumulazione per E destro e sinistro, f è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Teorema Continuità e continuità per successione

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Sono equivalenti:

1. f è continua in x_0 ;
2. *continuità per successioni*: $\forall \{x_n\} \subset E \mid x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Proof Continuità e continuità per successione

Esercizio. Se x_0 non è di accumulazione (è isolato), la successione deve essere definitivamente pari a x_0 .

(\implies) TODO

(\Leftarrow) TODO

La continuità è equivalente alla continuità per successione in ogni spazio metrico.

Proposition Proprietà delle funzioni continue

Siano $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0 .

1. supponiamo che $f(x_0) < g(x_0)$, allora per tutte le c tali che $f(x_0) < c < g(x_0)$, esiste un intorno J di x_0 tale che

$$\forall x \in J \cap E, f(x) < c < g(x)$$

Se x_0 è isolato, la tesi è banale. Altrimenti, usiamo il teorema della permanenza del segno dei limiti. Troviamo quindi un intorno dove la condizione vale necessariamente ovunque tranne nel punto x_0 , ma nel punto x_0 la tesi vale per ipotesi.

2. esistono M e J intorno di x_0 tale che

$$\forall x \in E \cap J, |f(x)| \leq M$$

Chiaramente se il limite è finito, allora esiste un intorno puntato dove la funzione è limitata. Siccome la tesi vale anche per il punto stesso, vale la tesi.

Proposition Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Siano $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ continue in x_0 .

1. $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0 ;
2. $f(x)g(x)$ è continua in x_0 ;
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continuità in x_0 per $g(x) \neq 0$.

Proof Proprietà aritmetiche delle funzioni continue

Se il punto non è di accumulazione tali proprietà sono banali. Altrimenti, seguono dalle proprietà dei limiti. Nel caso della divisione distinguiamo $g(x)$ positivo e negativo.

Tali proprietà sono analoghe per la continuità destra e sinistra.

Definizione Continuità intervallo

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in E se è continua in ogni punto di E .

Teorema Composizione delle funzioni continue

Siano $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in E$ e $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0) \in F$. Then, the composite function

$$g \circ f: f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

is continuous x_0 .

15 Limiti e discontinuità di funzioni monotone

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente su I , e sia x_0 intorno a I . Allora esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f$$

In particolare, f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

e se f non è continua in x_0 allora x_0 è una discontinuità di salto.

Un analogo risultato vale per funzioni monotone decrescenti, e si può ricavare osservando che f è monotona decrescente se e solo se $-f$ è monotona crescente.

Proof

Dimostra che esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Per monotonia, per ogni $x_1 < x < x_0$ abbiamo

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

da cui

$$\forall x_1 < x_0, f(x_1) \leq \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Per definizione di supremum,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \mid f(x_\varepsilon) > \sup_{x < x_0} f(x) - \varepsilon$$

Per monotonia concludiamo che $\forall x_\varepsilon < x < x_0$ vale quindi

$$\sup_{x < x_0} f(x) - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \sup_{x < x_0} f(x)$$

Quindi, posto $\delta = x_0 - x_\varepsilon$ vale che per tutte le x tali che $x_0 - \delta < x < x_0$ abbiamo

$$\sup_{x < x_0} f - \varepsilon < f(x) < \sup_{x < x_0} f(x)$$

e per definizione

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f$$

Corollario

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotona. Allora, l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia monotona crescente e siano x_1 e x_2 due punti di discontinuità. Consideriamo x' , x'' e x''' come punti negli intervalli definiti da x_1 e x_2 . Dal

teorema precedente

$$f(x') \leq \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) \leq f(x_1) \leq \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \leq f(x'') \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) \leq f(x_2) \leq \lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) \leq f(x''')$$

e poiché per ipotesi f è discontinua in x_1, x_2 almeno una delle disuguaglianze in rosso o in blu sono strette. Questo dice che gli intervalli di salto

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f, \lim_{x \rightarrow x_1^+} f$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f, \lim_{x \rightarrow x_2^+} f$$

sono disgiunti. Dissando un razionale in ciascuno degli intervalli di salto corrispondente ai punti di discontinuità in f si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra

$$D = \{x \in I \mid f \text{ è discontinua in } x\}$$

e un sottoinsieme di \mathbb{R} . Poiché \mathbb{Q} è numerabile, D è al più numerabile.

15.1 Compattezza

Quindi i punti di massimo forte sono al più numerabile, mentre quelli deboli non sono necessariamente numerabile.

Definizione Compattezza di successioni nei reali

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che K è compatto per successioni se

$$\forall \{x_n\} \subseteq K$$

esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$, cioè da ogni successione di punti di K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K .

Se K è finito allora è compatto per successioni (un insieme finito è chiuso in quanto non contiene punti di accumulazione).

Teorema Teorema di Heine Borel

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:

1. K è compatto per successioni
2. K è chiuso e limitato.

Proof Teorema di Heine Borel

- (2) \implies (1). Consideriamo $\{x_n\} \subseteq K$. Siccome K è limitata, $\{x_n\}$ è limitata. Quindi, per Bolzano-Weierstrass esiste $\exists \{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. Poiché $\{x_{n_k}\} \subseteq K$ e $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ per la caratterizzazione dei punti di chiusura $\bar{x} \in \overline{K} = K$ perché K è chiuso, quindi $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in K$ e K è compatto.
- (1) \implies (2).
 - K è **chiuso**: Sia $\bar{x} \in \overline{K}$. Per il teorema di caratterizzazione di \overline{K} , esiste $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Poiché K è compatto, esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. Ma $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ e quindi $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ e per unicità del limite $\bar{x} = x_0 \in K$ e K è chiuso.
 - K è **limitato**: Mostriamo che $\mu = \sup K < +\infty$. Abbiamo dimostrato che $\exists \{x_n\} \subseteq K$ tale che $x_n \rightarrow \mu$. Ma K è compatto cosicché esista $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. Per unicità $x_0 = \mu$ e quindi μ è finito.

Corollario Teorema di Wierstrass

Se K è compatto per successioni, allora esiste $\min\{K\}$ e $\max\{K\}$.

Siccome il supremum e l'infimum appartenogno a K (dalla dimostrazione).

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora, $f(K)$ è compatto.

Proof Teorema di Heine-Cantor

Data $\{y_n\} \subseteq f(K)$, dobbiamo dimostrare che esiste $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ tale che $y_{n_k} \rightarrow y \in f(K)$. Per definizione, $y_n \in f(K)$ quindi esiste $x_n \in K$ tale che $f(x_n) = y_n$. La successione $\{x_n\}$ è contenuta in K compatto. Esiste $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. Ma è continua su K e quindi in x_0 . Quindi per il teorema su continuità e continuità per successione, abbiamo che

$$x_{n_k} \rightarrow x_0 \implies f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow f(x_0) = y_0 \in f(K)$$

e quindi $f(K)$ è compatto.

Corollario Teorema di Wierstrass

Sia $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è limitata ed assume massimo e minimo.

Teorema Teorema degli zeri

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a; b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora, esiste $c \in [a; b]$ tale che $f(c) = 0$.

Proof Teorema degli zeri

Senza perdita di generalità, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo l'insieme

$$E = \{x \mid \forall t \in [a, x], f(t) < 0\}$$

Notiamo che $a \in E \neq \emptyset$. Sia $c = \sup E$. La tesi è che $f(c) = 0$. Notiamo che $c > a$ in quanto $f(a) < 0$ e f continuano implicano, per il teorema di permanenza del segno, che $f(t) < 0$ in $[a; a + \delta)$ per qualche $\delta > 0$. Analogamente, $c < b$ siccome $f(b) > 0$ ed esiste δ_1 tale che $f(t) > 0$ in $(b - \delta; b)$ e quindi $c < b$. Mostriamo che $f(c) = 0$ facendo vedere che non può essere nè $f(c) < 0$ nè $f(c) > 0$. Infatti, se fosse $f(c) < 0$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) < 0$ per $t \in (c - \delta, c + \delta)$. D'altra parte, per definizione di $c = \sup\{x \mid f(t) < 0, t \in [0, x]\}$ esisterebbe $x_0 \in E$ tale che $c - \delta < x_0 < c$. Quindi si avrebbe $f(t) < 0$ in $[a, x_0]$ e in $(c - \delta; c + \delta)$. Quindi, $f(t) < 0$ in $[a; c + \delta]$ e c non è maggiorante di E 4. Se invece fosse $f(c) > 0$ per lo stesso motivo esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(t) > 0$ per $t \in (c - \delta; c + \delta)$ e quindi $\forall x_0 \in (c - \delta; c + \delta), f(x_0) > 0$ e quindi c non è più piccolo maggiorante di E 4.

Esempio

Dimostriamo che la funzione $f(x) = x - \cos x$ ha un (e un solo) zero in $(0; \frac{\pi}{2})$ e determinarlo con un errore minore di 10^{-2} . La funzione è continua nell'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$ e $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$. Per cui, per il teorema degli zeri esiste uno zero c in tale intervallo. Lo zero è unico in quanto è strettamente crescente, per la derivata $f'(x) = 1 + \sin x$. Calcoliamo $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.078 > 0$. Quindi, $c \in (0; \frac{\pi}{4})$. Se si approssima c con il punto medio dell'intervallo, quindi $c = \frac{\pi}{8}$, l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{8}$. Consideriamo poi $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{8} - \cos(\frac{\pi}{8}) = -0.53 < 0$. Quindi, c si trova in $(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$. Allora prendiamo la media $c = \frac{3\pi}{16}$, e l'errore è al massimo $E = \frac{\pi}{16}$. Iteriamo il processino fino a quando $E < 10^{-2}$.

Teorema Teorema dei valori intermedi di Darboux

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I . Vi sono due versioni:

1. Se $I = [a; b]$, allora f assume tutti i valori fra $f(a)$ e $f(b)$;
2. Se I è arbitrario, finito o infinito, aperto o chiuso o semiaperto, allora $\forall \xi$ con

$$\inf_I f < l < \sup_I f$$

esiste $c \in I$ tale che $f(c) = \xi$.

Proof Teorema dei valori intermedi di Darboux

1. Se $a = b$ il teorema è banale. Senza perdita di generalità, supponiamo ora che $f(a) < f(b)$, e sia $f(a) < l < f(b)$. Consideriamo la funzione ausiliaria $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - l$. Notiamo che g è continua in $[a; b]$, $g(a) = f(a) - l < 0$ e $g(b) = f(b) - l > 0$ quindi per il teorema degli zeri, $\exists c \in [a, b] \mid g(c) = f(c) - l = 0$. Quindi, $f(c) = l$.
2. Sia $\inf_I f < l < \sup_I f$. Per definizione di infimum, esiste $a \in I$ tale che

$$\inf_I f < f(a) < l$$

e, analogamente, esiste $b \in I$ tale che

$$l < f(b) < \sup_I f$$

Se $a < b$, applicando il punto primo all'intervallo $[a; b]$, si deduce che esiste $c \in (a; b) \subseteq I$ tale che $f(c) = l$. Se, invece, $a > b$ si considera l'intervallo $[b; a]$ e si conclude in maniera analoga.

Corollario

Se f è continua su I intervallo, allora $f(I)$ è un intervallo.

Combinando il teorema di Weierstrass con il teorema dei valori intermedi, otteniamo che se f è continua in $[a; b]$, allora $f([a; b]) = [m; M]$ con $m = \min_I f$ e $M = \max_I f$.

I teoremi degli zeri e dei valori intermedi, valgono per funzioni continue su intervalli.

Variazione del teorema di Weierstrass quando non valgono tutte le premesse:

Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$ o $x \rightarrow +\infty$. Allora f è limitata inferiormente e ammette min assoluto.

Per dimostrarlo sia $x_0 \in (0, +\infty)$ e sia $M = f(x_0) + 1$. Per definizione di limite esistono $d < x_0$ e $R > x_0$ tale che $\forall x \in (0; d) \cup (R, +\infty), f(x) > M$. f è continua su $[\delta; R]$ chiuso e limitato. Quindi è limitata inferiormente su $[\delta, R]$ e assume minimo assoluto $m = f(x_1)$ con $x_1 \in [\delta, R]$ cioè $f(x) \geq m = f(x_1)$ per tutte le $x \in [\delta, R]$. In particolare, $m = f(x_1) \leq f(x_0) < M$. Se $x \in [\delta, R], f(x) \geq f(x_1) = m$. Se $x \in (0, \delta) \cup (R, +\infty), f(x) > M > m = f(x_1)$. Quindi, $m = f(x_1)$ è il min assoluto di f in $(0, +\infty)$.

15.2 Continuità uniforme

Definizione Continuità uniforme

Una funzione f si dice *uniformemente continua* in E se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $\forall x_0 \in E$ e $\forall x \in E$, per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Quindi il valore δ è indipendente dal punto.

Lemma

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f non è uniformemente continua in E se esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_0\}, \{x'_n\}$ tale che $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon}$.

Proof

Abbiamo che f non è uniformemente continua se $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ esistono $x_\delta, x'_\delta \in E$ con $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \bar{\varepsilon}$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n}$ si ottengono successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in E tale che $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ e $|f(x_0) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon}$.

La funzione \sqrt{x} è uniformemente continua su $[0, +\infty]$.

Teorema Teorema di Heine-Cantor

Sia $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora f è uniformemente continua su K . In particolare, $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, è uniformemente continua.

Proof

Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Per il lemma, esistono $\bar{\varepsilon} > 0$ e successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in K tale che $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$ e $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon} > 0$. Siccome K è compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. Poiché $x'_{n_k} = x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow x_0$ e poiché f è continua in x_0 , per l'equivalenza fra continuità e continuità per successioni, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ e $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Quindi, $\bar{\varepsilon} \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0$, ma dovrebbe essere sempre maggiore o uguale a $\bar{\varepsilon} \not\rightarrow 0$.

Definizione Funzione Lipschiziana

Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *Lipschiziana* se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

Se $L = 1$ si dice espansiva. Se $L < 1$ si dice contrazione.

Definizione Funzione Hölderiana

Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *Hölderiana* di esponente $\alpha \in (0, 1]$ se esiste $M > 0$ tale che $\forall x, x' \in I$,

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha$$

Proposition

Tutte le funzioni α -Hölderiane, sono uniformemente continue.

Proof

Consideriamo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha, \quad M > 0$$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ se $M|x - x'|^\alpha$ con $M > 0$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$ se $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ purché $M|x - x'|^\alpha < \varepsilon$, cioè

$$|x - x'| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} = d$$

Proposition Proprietà di funzioni uniformemente continue

Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continue. Allora

1. $f + g$ è uniformemente continua. Per dimostrarlo basta considerare $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$;
2. se f e g sono anche entrambe limitate su I , allora fg è uniformemente continua;
3. se $\frac{1}{f}$ è definita è uniformemente continua.
4. se $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora $\forall E_1 \subseteq E$, f è uniformemente continua su E_1 .

Teorema

Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su I e uniformemente continua in $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, allora è uniformemente continua su tutto I .

Proof

Dato $\varepsilon > 0$ bisogna trovare δ tale che $\forall x_1, x_2 \in I$ se $|x_2 - x_1| < \delta$ allora vale $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Poiché f è uniformemente continua su $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$, esistono $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I \cap (-\infty, c)$ con $|x_2 - x_1| < \delta$ si ha $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ e analogamente δ_2 . Poiché f è continua in c , $\exists \delta_3$ tale che $\forall x \in I$ con $|x - c| < \delta_3$, abbiamo $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi se $x_1 < c < x_2$ e $|x_2 - x_1| < \delta$, allora la distanza $|c - x_1| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$ e $|x_2 - c| \leq |x_2 - x_1| < \delta_3$. E quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(c)| + |f(c) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Allora posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ si ha la tesi.

Proposition

Siano $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dove f è continua nel dominio e g è uniformemente continua nel dominio e $f \sim g$ per $x \rightarrow \infty$. Allora, f è uniformemente continua nel dominio. In particolare, se f è continua su $[A, +\infty)$ e

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

allora f è uniformemente continua.

Per dimostrarlo, stimiamo la differenza fra $|f(x_1) - f(x_2)|$ per x molto grande intercalando la funzione g . Troviamo quindi che il δ che va bene per g va bene anche per f .

Proposition

Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua nel dominio, allora esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Per dimostrarlo mostriamo che $f(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy per x che tende ad a^+ o b^- (cosa che deriva naturalmente dalla definizione di continuità uniforme).

Se una funzione è continua e invertibile, ciò non implica necessariamente che l'inversa sia continua.

Lemma Lemma 1

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile su I intervallo. Allora, f è strettamente monotona.

Proof Lemma 1

Supponiamo per assurdo che non sia strettamente monotona. Esistono quindi $x_1 < x_2 < x_3$ in

I . Quindi (uguaglianze non strette), o $f(x_1) = f(x_2)$ oppure $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) \geq f(x_3)$ o viceversa (o prima cresce e poi decresce o viceversa o rimane uguale). Chiaramente, se vale una di questi casi (tutti i casi), f non è iniettiva e quindi non invertibile. Se invece valgono le disuguaglianze strette, allora per il teorema dei valori intermedi, applicato agli intervalli $[x_1; x_2]$ e $[x_2; x_3]$ si trova che

$$\forall \max\{f(x_1), f(x_3)\} \leq \xi < f(x_2)$$

esistono almeno 2 valori di x tali che $f(x) = \xi$. Quindi, la funzione non è iniettiva.

Lemma Lemma 2

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotona su I intervallo. Se $f(I)$ è un intervallo, allora f è continua.

Proof Lemma 2

Assumiamo che $x_0 \in I$ sia un punto di discontinuità di f . Allora, sarebbe una discontinuità di salto, e $f(I)$ non sarebbe un intervallo.

Teorema Continuità dell'inversa

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile su I che è un intervallo. Allora, f^{-1} è continua.

Proof Continuità dell'inversa

Per il Lemma 1 f è strettamente monotona. Quindi, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ è strettamente monotona. Per il teorema dei valori intermedi $f(I)$ è un intervallo e $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ è monotona definita su un intervallo e la sua immagine è l'intervallo I . Per il Lemma 2, f^{-1} è continua.

16 Derivate

Definizione Derivabilità

Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esistono finito il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione Retta tangente

La retta tangente è definita come

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nel caso esistano i limiti finiti da destra o sinistra si dirà che la funzione è derivabile da destra o sinistra nel punto.

Proposition

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I . Se f è derivabile rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0 , allora f è continua rispettivamente da destra, da sinistra, in x_0 .

Proof

Senza perdita di generalità, supponiamo per esempio che f sia derivabile da destra in x_0 cioè esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = D_+ f(x_0) \cdot 0 = 0$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

e f è continua da destra in x_0 .

Proposition Proprietà aritmetiche della derivabilità

Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile (rispettivamente da sinistra o destra) in x_0 interno ad I . Allora:

1. $f \pm g$ è derivabile in x_0 e vale che

$$D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$$

2. $\forall c \in \mathbb{R}$, cf è derivabile in x_0 e vale

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ è derivabile in x_0 e vale

$$D(af + gb)(x_0) = aDf(x_0) + bDg(x_0)$$

4. fg è derivabile in x_0 e vale

$$(fg)'(x_0) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

che si chiama Formula di Leibniz

5. $g(x_0) \neq 0$ allora $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 cosicché $\frac{f}{g}$ sia derivabile in un intorno di x_0 è derivabile in x_0 e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proof Proprietà aritmetiche della derivabilità

1. esercizio;
2. segue dal 3;
3. calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Per ipotesi, il primo termine tende a $f'(x_0)$ mentre l'ultimo $g'(x_0)$. L'altro termine $g(x)$ tende a $g(x_0)$ perché $x \rightarrow x_0$ e g è derivabile in x_0 (il fatto che sia derivabile, implica che sia continua), e l'altro termine analogo. Quindi, vale la tesi.

4. Poiché per ipotesi $g(x_0) \neq 0$ e g è continua in x_0 perché è derivabile $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 per permanenza del segno. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

Come prima otteniamo la tesi siccome g derivabile implica g continua.

Proposition Derivata della tangente

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

16.1 Condizioni equivalenti alla derivabilità

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 interno ad I . Sono equivalenti:

1. f è derivabile in x_0 e $Df(x_0) = \lambda \in \mathbb{R}$
2. differenziabilità in x_0

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x)$$

dove $r(x) = o(x - x_0)$.

Notiamo che (2) dice che, se approssimiamo f con l'equazione della retta tangente al grafico, l'errore $r(x)$ tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La retta tangente è l'unica per la quale l'errore tende a zero più velocemente di $x - x_0$. La differenziabilità è quindi la proprietà di poter essere approssimata bene con una funzione affine.

Proof

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] (x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lambda(x - x_0) + r(x) \end{aligned}$$

e chiaramente f è derivabile in x_0 con derivata se e solo se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \lambda \iff \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] \rightarrow 0$$

se e solo se

$$r(x) = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right] \rightarrow 0$$

è tale che

$$\frac{r(x)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

Corollario

Se f è derivabile in x_0 allora, $\forall m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = Df(x_0) - m = 0 \iff m = Df(x_0)$$

Quindi, la retta tangente è precisamente quella che approssima meglio la funzione attorno ad x_0 .

Teorema Formula di derivazione della funzione composta

Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$ interno a J . Allora, $Dg(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Proof Formula di derivazione della funzione composta

Dobbiamo dimostrare che esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Introduciamo una funzione ausiliaria $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(y) \triangleq \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 = f(x_0) \\ Dg(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

e notiamo che, per definizione di derivata

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = Dg(y_0)$$

Osserviamo ora che $\forall x \in I$ vale l'uguaglianza

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Infatti, se $f(x) = f(x_0)$ allora il primo membro è nullo e così per il secondo. Se invece $f(x) \neq f(x_0)$ allora

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per $x \rightarrow x_0$ abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow Df(x_0)$$

e $f(x) \rightarrow f(x_0) = y_0$ perché f derivabile implica f continua, e quindi

$$\varphi(f(x)) \rightarrow \varphi(y_0) = Dg(y_0) = Dg(f(x_0))$$

da cui otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che porta alla tesi.

Teorema Derivata di funzione inversa

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I e invertibile in I con $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$. Supponiamo che:

1. $Df(x_0) \neq 0$;
2. f^{-1} sia continua in $y_0 = f(x_0)$.

Allora, f^{-1} è derivabile in x_0 e vale

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{Df(f^{-1}(y_0))}$$

Osserviamo che se f è continua e invertibile su I allora f^{-1} è continua su $f(I)$ e quindi il secondo puntato è automaticamente garantito.

Proof Derivata di funzione inversa

Studiamo il limite

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Allora posto $f^{-1}(y) = x$ e $f^{-1}(y_0) = x_0$, abbiamo $f(x) = y$ e $f(x_0) = y_0$ e per la continuità di f^{-1} in y_0 se $y \rightarrow y_0$, allora $f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$. Allora, possiamo applicare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{Df(x_0)} \end{aligned}$$

Notiamo le seguenti:

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \in (-1; 1)$$

$$D \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$D \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$D \tanh(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}$$

$$D \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

16.2 Punti di singolarità

Definizione Punto singolare

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I dove f non è derivabile in $c \in I$. Allora, c è un *punto singolare* per f .

Possiamo parzialmente classificare tali punti:

1. esistono finite le derivate destre e sinistre nel punto ma diverse, allora c è un punto angoloso;
2. esistono infinite le derivate destre e sinistre. La funzione non è derivabile ma diciamo comunque che $Df(c) = \pm\infty$ e che c è un punto a tangente verticale.
3. esistono infinite le derivate destre e sinistre ma con segno opposto. Allora c è un punto di cuspid.

Le varie formule di derivazione, forniscono condizioni sufficienti per la derivabilità delle derivate, ma se le ipotesi non sono rispettate, è necessario studiare direttamente il limite.

Per esempio, $x^{1/3}$ e $x^{4/5}$ non sono derivabili in $x = 0$, ma il loro prodotto è derivabile in $x = 0$.

Studiando il limite incrementale di $|x|^\alpha$ troviamo che il rapporto incrementale è dato da

$$\begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ +1 & \alpha = 1 \wedge x \rightarrow 0^+ \\ -1 & \alpha = 1 \wedge x \rightarrow 0^- \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & 0 < \alpha < 1 \wedge x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Quindi la funzione è derivabile solo in $\alpha > 1$. Per $\alpha = 1$ abbiamo un punto angoloso, e per $0 < \alpha < 1$ abbiamo un punto di cuspid.

Esercizio Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} = f_+(x) & x > 0 \\ a \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + e^{b \cos(x)-1} = f_-(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di derivabilità $f_+(x)$ è derivabile per $x > 0$ e quindi f è derivabile per $x > 0$. La funzione f_- è anch'essa derivabile per $x < 0$, in particolare per $x \leq 0$. Quindi, manca da studiare il punto $x = 0$. La continuità deve valere

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Il limite è dato da

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f_-(0) = e^{b-1}$$

in quanto f_- è continua. Quindi, f è sempre continua a sinistra. L'altro limite è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x} + x^{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{x^2}{x} + e^{(\sqrt{1+x^2}-1) \ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{2} x^2 \ln(x)} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^2} \rightarrow 0$$

Quindi, il secondo limite è 1. Allora f è continua se e solo se $1 = e^{b-1}$, quindi $b = 1$. Poiché la derivabilità implica la continuità, deve essere $b = 1$. Inoltre devono esistere finite $D_-f(0) = D_+f(0)$, quindi

$$D_-f(0) = D_-(f_-)(0) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_-(x) - f_-(0)}{x - 0} = -a \\ Df_-(0) = -a \end{cases}$$

e quella sinistra

$$D_+f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_+(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo allora che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $b = 1$ e $a = -\frac{1}{2}$. In tal caso $f'(0) = \frac{1}{2}$. Se $b = 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$, f è continua ma non derivabile e $x = 0$ abbiamo un punto angoloso.

16.3 Massimi e minimi

Definizione Massimo locale o relativo

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora x_0 è un *punto di massimo locale o relativo* debole se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$. Il punto x_0 dice *punto di massimo locale o relativo* forte se esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)$ per tutte le $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$.

Se x_0 è tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutte le $x \in E$ si dice punto di massimo globale o assoluto, e debole se $f(x) < f(x_0)$ con $x \neq x_0$. Analogamente per i punti di minimo locale e assoluti, forti e deboli.

Un punto può essere contemporaneamente minimo e massimo locale debole. Tuttavia, è incompatibile essere minimo locale forte e massimo locale debole e viceversa. Inoltre, la forza implica la debolezza.

Definizione

Un punto x_0 si dice estremamente debole/forte se è un minimo o massimo debole/forte.

Teorema Teorema di Fermat

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto estremamente per f (locale/globale debole/forte) e supponiamo

1. x_0 è interno ad I ;
2. f è derivabile in x_0 .

Allora $f'(x_0) = 0$.

Proof Teorema di Fermat

Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo debole. Per definizione, esiste un intorno J di x_0 tale che $\forall x \in J \cap I, f(x) \geq f(x_0)$. Poiché x_0 è interno prendendo un J più piccolo possiamo supporre che $J \subseteq I$. Consideriamo allora il rapporto incrementale per $x \in J \subseteq I$ e $x \neq x_0$. Abbiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x > x_0 \\ \leq 0 & x < x_0 \end{cases}$$

In questo passaggio è essenziale che x_0 sia un punto interno. Facendo tendere $x \rightarrow x_0^+$ e rispettivamente $x \rightarrow x_0^-$ e utilizzando il teorema di monotonia del limite otteniamo che

$$D_-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lim_{x \rightarrow x_0} \leq 0$$

e

$$D_+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \lim_{x \rightarrow x_0} \geq 0$$

Poiché f è derivabile, $D_+(x_0) = D_-f(x_0) = f'(x_0)$ e quindi $f'(x_0) = 0$.

Definizione Punto critico o stazionario

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Allora x_0 è un *punto critico o stazionario* se $f'(x_0) = 0$.

Corollario

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, gli eventuali punti estremanti di f in I vanno ricercati tra:

- i punti interni stazionari;
- i punti interni dove f non è derivabile (cioè è punti singolari);
- gli estremi di I che appartengono a I .

Esercizio Tra tutti i contenitori cilindrici di volume fissato V , trovare quello che ha superficie minima.

Abbiamo che

$$V = r^2\pi h$$

e

$$S = 2r^2\pi h + 2r\pi h$$

Vogliamo minimizzare S con V costante. Troviamo $h = \frac{V}{\pi r^2}$, e allora

$$\frac{S}{2} = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

I vincoli sono $r > 0$. Minimizziamo allora $f(r) = \frac{S}{2}$. La funzione è derivabile e quindi continua in $(0, +\infty)$. Notiamo che $f(r) \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow 0^+$ e $r \rightarrow \infty$. Per estensione del teorema di Weierstrass

al caso di funzioni definite su intervalli aperti che tendono ad infinito agli estremi, esiste un minimo assoluto in tale intervallo. Poiché f è derivabile in $(0, +\infty)$, tale minimo è assunto in un punto stazionario, per il teorema di Fermat. Abbiamo

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r^2}(2\pi r^3 - V)$$

Risolviamo quindi $f'(r) = 0$ e quindi

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2}$$

Vi è un unico punto stazionario nell'intervallo, e quindi questo è il minimo assoluto.

Teorema Teorema di Rolle

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia:

1. continua in $[a, b]$;
2. derivabile in (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$.

Allora, esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Proof Teorema di Rolle

Poiché f è continua in $[a; b]$ chiuso e limitato, per Weierstrass ammette minimo m e massimo M assoluti in $[a, b]$. Per definizione, $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$. Consideriamo due casi:

- $m = M$, allora f è costante e $f'(c) = 0$ per ogni c in $[a, b]$;
- $m < M$, allora se x_m e x_M sono i punti dove f assume minimo e massimo rispettivamente, cioè $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$ poiché $f(a) = f(b)$ e $m < M$ almeno uno dei due punti deve essere interno. Tale punto è estremamente interno dove f è derivabile. Quindi per Fermat, $f'(c) = 0$.

Le ipotesi di Rolle sono strettamente necessarie. Se manca la derivabilità il controesempio è $|x|$. Se manca la continuità l'esempio è

$$\begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Teorema Teorema di Lagrange

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dove

1. continua in $[a, b]$;
2. derivabile in (a, b) ;

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La retta tangente esiste sempre in quanto la funzione è derivabile.

Proof Teorema di Lagrange

Vogliamo applicare il teorema di Rolle, ma la condizione che $f(a) = f(b)$. Allora, sottraiamo ad f la della corda

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

che è una funzione affine. Tale funzione è continua in $[a, b]$, in quanto viene mantenuta la derivabilità, è quindi anche derivabile, e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Allora, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$

tale che

$$\varphi(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Notiamo che Rolle è un caso particolare di Lagrange. Infatti, le due sono equivalenti, e le condizioni sono strettamente necessarie.

Teorema Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dove

1. f, g siano continue in $[a, b]$;
2. f, g siano derivabili in (a, b) .

Allora, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

In particolare, se $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ cosicché $g(a) \neq g(b)$ per Rolle, allora dividendo si ottiene

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se $g(x) = x$, allora l'espressione data diventa

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

e quindi Lagrange è un caso particolare di Cauchy.

Proof Teorema di Cauchy dei valori intermedi

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Allora φ è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) come combinazione lineare di funzioni con queste proprietà. Inoltre, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Quindi, per il teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\varphi'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi.

Come funzione ausiliaria si sarebbe potuta scegliere, più in generale, una combinazione lineare di f e g tale che $\varphi(a) = \varphi(b)$

In sintesi abbiamo che siccome il teorema di Cauchy implica quello di Rolle, allora i 3 teoremi sono tutti equivalenti.

16.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo e derivabile nell'interno $\overset{\circ}{I}$. Allora:

1. f è costante su I se e solo se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$;
2. f è monotona crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$, e analogamente decrescente,
3. Se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$, allora f è strettamente crescente in I . Nota che il fatto che f sia strettamente crescente in $\overset{\circ}{I}$ non implica che $f'(x) > 0$ in $\overset{\circ}{I}$. Per esempio, $f(x)x^3$ si annulla

in un punto solo.

4. Posto $Z = \{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\}$, allora f è strettamente crescente in I se e solo se:

- (a) $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$;
- (b) Z non ha punti interni (non contiene intervalli).

Proof

Poiché f è derivabile in $\overset{\circ}{I}$ e continua in I , $\forall a < b \in I$, f è continua in $[a, b] \subseteq I$ e f è derivabile in $(a, b) \in \overset{\circ}{I}$. Per Lagrange, risulta quindi che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

1. è chiaro che se f è costante in I , $\forall x \in I, f'(x) = 0$ in particolare $\forall x \in \overset{\circ}{I}$. Viceversa, supponiamo che $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$. Per quanto detto sopra $\forall a < b \in I, \exists c$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

cioè $\forall a < b \in I$ risulta $f(a) = f(b)$ e f è quindi costante.

2. supponiamo che f sia monotona crescente in I e sia x_0 interno ad I . Allora, $\forall x > x_0, x \in I$, risulta che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

da cui facendo tendere x a x_0^+ e usando la monotonia del limite, si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_+ f(x_0) = f'(x_0)$$

in quanto la funzione è derivabile. Viceversa, se $\forall x, f'(x) \geq 0$ allora $\forall a < b \in I$ dalla conclusione di Lagrange segue che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0$$

da cui $f(b) \geq f(a)$, e quindi f è monotona crescente.

3. Se $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$ dal ragionamento fatto nel precedente punti, deduciamo che $\forall a < b \in I, f(a) < f(b)$ e quindi f è strettamente crescente.
4. Supponiamo che f sia strettamente crescente, per il secondo punto abbiamo che è $\forall \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$. Se Z contenesse un intervallo (a, b) , allora per il primo punto f sarebbe costante in (a, b) , equindi non monotona crescente ζ . Viceversa, f è monotona crescente, e Z non contiene intervalli. Supponiamo che f non sia strettamente crescente, esistono $a < b \in I$ tale che $f(a) \geq f(b)$ ma poiché f è monotona crescente, $f(a) = f(b)$, e quindi in tale intervallo è costante. Quindi, $(a, b) \in Z$, contro l'ipotesi ζ .

Teorema

Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $(a, b]$ e derivabile in (a, b) . Supponiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda$$

In particolare, se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile da sinistra in b e

$$D_- f(b) = \lambda \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

Vale lo stesso per $[a, b)$ continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b) con il limite da sinistra e per $I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{c\}$ per il quale esiste

$$\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$$

Proof

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Per ogni $x \in (a, b)$, f è continua in $[x, b)$ ed è derivabile in (x, b) quindi soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange ed esiste c_x tale che

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c_x), \quad x < c_x < b$$

Per $x \rightarrow b^-$, $c_x \rightarrow b^-$ e quindi $f'(c_x) \rightarrow \lambda$ da cui

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lambda = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

nel caso considerato se $\lambda \in \mathbb{R}$, non solo la derivata sinistra esiste finita, ma $f'(x)$ risulta continua da sinistra. In particolare il teorema fornisce una condizione solo sufficiente per la derivabilità: se il limite della derivata esiste, finito o infinito, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale e i due limiti sono uguali. Ma, può accadere che esista

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

ma non

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

Esempio

Verificare per quali valori di $\alpha > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. f è continua per ogni $\alpha > 0$ per il teorema dei due carabinieri. Infatti, $|f(x)| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0 = f(0)$ per $x \rightarrow 0$. Il rapporto è dato da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \nexists & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per ogni α , f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = D[|x|^\alpha \cos \frac{1}{x}] = |x|^{\alpha-2} \left\{ \alpha |x| \operatorname{sgn} x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right\}$$

Quindi $f'(0)$ esiste per $\alpha > 1$, f' è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$.

Teorema Teorema di de L'Hôpital

Siano $f, g: (a, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\xi \leq +\infty$ e supponiamo che f, g siano derivabili in (a, ξ) , che g, g' siano diverse da zero in (a, ξ) , che o $f, g \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \xi^-$, o $g(x) \rightarrow \pm\infty$ e che

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Analogamente per limiti destri e bilaterali

Proof

Consideriamo il caso in cui $\xi = b \in \mathbb{R}$ e $f, g \rightarrow 0$ per $x \rightarrow b$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy: osserviamo che poiché $f(x), g(x) \rightarrow 0$, posto $f(b) = g(b) = 0$ risulta che la funzione così estese sono

1. continue in $(a, b]$;
2. derivabili in (a, b)

e inoltre per ipotesi $g'(x), g(x) \neq 0$ in (a, b) e valgono le ipotesi del teorema di Cauchy. $[x, b]$ per ogni $x \in (a, b)$. Quindi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

e per Cauchy esiste $c_x \in (x, b)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Per $x \rightarrow b^-$, $c_x \rightarrow b^-$ e per ipotesi

$$\frac{f(c_x)}{g(c_x)} \rightarrow \lambda$$

cosicché

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

16.5 Derivate di ordine superiore

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$. Così è definita $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se f' è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ si dice che f è derivabile 2 volte in x_0 e si pone

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = (f')'(x_0)$$

Notiamo che affinché una funzione f sia doppiamente derivabile in I , dobbiamo avere:

- esiste un intorno I_1 di x_0 tale che f è derivabile in tutti i punti di I_1 ;
- la funzione $f': I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 .

Le derivate di ordine successive vengono definite iterativamente in maniera analoga: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0 se esiste un intorno I_1 di x_0 tale che le derivate di ordine $k \leq n-1$ esistano in I_1 e la derivata di ordine $n-1$ è derivabile in x_0 .

Proposition Proprietà delle funzioni derivabili n-volte

Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili n volte in $x_0 \in I$. Allora,

1. $f \pm g$ è derivabile n volte in x_0 e

$$D^n(f \pm g)(x_0) = D^n f(x_0) \pm D^n g(x_0)$$

2. fg è derivabile n volte in x_0 e vale la formula di Leibniz

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x_0) \cdot D^{n-k} g(x_0)$$

3. se $g(x_0) \neq 0$ ($g(x_0) \neq 0$ in un intorno), allora f/g è derivabile n volte in x_0

Proposition Derivabilità della funzione composta

Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in I$ e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $y_0 = f(x_0) \in J$. Allora, $g \circ f: f^{-1}(J) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0 .

Proposition Derivabilità della funzione inversa

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile e derivabile n volte in x_0 , e supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$.

Definizione Classe di continuità

La classe di continuità è definita come

$$C^n = \begin{cases} \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } I\} & n = 0 \\ \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \text{ in } I \wedge \forall k \leq n, f^{(k)} \text{ è continua in } I\} & n \in \mathbb{N}^* \\ \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \text{ in } I \wedge f^{(n)} \text{ continua in } I\} & n = \infty \end{cases}$$

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$$

Lemma

Sia

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

un polinomio di grado minore o uguale a n in $x - x_0$. Allora,

$$P^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^n a_k D^m (x - x_0)^k = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ m! = k! & m = k \end{cases}$$

Definizione Polinomio di Taylor

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0 interno ad I . Si dice *polinomio di Taylor* di ordine n centrato in x_0 il polinomio

$$P_n(f, x_0, x) \triangleq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$$

Definizione Polinomio di MacLaurin

Si dice *polinomio di MacLaurin* un polinomio di Taylor con $x_0 = 0$.

Proposition

Il polinomio di Taylor di f in x_0 arrestato all'ordine n è l'unico polinomio tale che $\forall k \leq n$,

$$D^k P_n(x_0) = D^k f(x_0)$$

Il prossimo teorema estende le proprietà delle funzioni differenziabili, permettendo di approssimarle con polinomio di grado superiore.

Teorema Teorema di Taylor

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I e sia

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}$$

il suo polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 . Allora,

1. *formula di Taylor con resto in forma di Peano:*

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \text{ con } x \rightarrow \infty$$

2. *formula di Taylor con resto in forma di Lagrange:* se si suppone anche che f sia derivabile $n + 1$ volte in tutto I , allora

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

dove r_n si rappresenta nel modo seguente: $\forall x \in I$, esiste c_x compreso tra x_0 e x (che dipende in generale sia da x che da n e di cui non si può predire altro che il fatto che sia compreso tra x e x_0), tale che

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Proof

1. Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}\end{aligned}$$

Siccome $\forall k \leq n, D^k P(x_0) = D^k f(x_0)$ possiamo applicare nuovamente il teorema de l'Hôpital iterativamente.

$$\begin{aligned}&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D^2 f(x) - D^2 P_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-1}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D^{n-1} f(x) - D^{n-1} P_n(x)}{n(n-1) \cdots 2(x - x_0)}\end{aligned}$$

A questo punto non possiamo più applicare il teorema in quanto si necessita che la funzione sia derivabile in un intorno, ma possiamo necessariamente derivarla solo in x_0 . Tuttavia, $D^n(f(x_0)) = D^n P_n(x_0)$. Quindi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D^{n-1} f(x) - D^{n-1} f(x_0)}{x - x_0} - \frac{D^{n-1} P_n(x) - D^{n-1} P_n(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{n!} \{D^n f(x_0) - D^n P_n(x_0)\} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Mostriamo che per tutte le x esiste c compreso tra x_0 e x tale che

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(c)(x - x_0)^{n+1}$$

equivalentemente

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(c)$$

Vogliamo applicare il teorema di Cauchy. Poniamo $F(x) = f(x) - P_n(x)$ e $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$ e notiamo che $F(0) = 0$ e infatti $\forall k \leq n, D^k F(x_0) = 0$, e analogamente $G(x_0) = 0$ e infatti

$$\forall k \leq n, D^k(x - x_0)^{n+1} = (n+1)n \cdots (n-k)(x - x_0)^{n-k+1} = 0$$

in $x = x_0$. Allora,

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)}$$

notando che F, G sono derivabili $n+1$ volte in I e $G(x) - G(x_0) \neq 0$, e $D^k G(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ per ogni $t = 1 \cdots n+1$. Esiste quindi x_1 compreso fra x e x_0 tale che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1) - F'(x_0)}{G'(x_1) - G'(x_0)}$$

Usiamo allora il teorema di Cauchy nuovamente: esiste un x_2 fra x_1 e x

$$\begin{aligned}&= \frac{D^2 F(x_2)}{D^2 G(x_2)} = \frac{D^2 F(x_0) - D^2 F(x_0)}{D^2 G(x_2) - D^2 G(x_0)}\end{aligned}$$

e ripetiamo iterativamente quanto possiamo: esiste c compreso tra x_n e x_0

$$= \frac{D^{n+1}F(c)}{D^{n+1}G(c)} = \frac{1}{(n+1)} D^{n+1}F(c) = (n+1)!$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{(n+1)!} \{D^{n+1}f(c) - D^{n+1}P_n(c)\} = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}f(c)$$

Proposition Serie di MacLaurin dell'esponenziale

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del seno

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{D^{2k+1} \sin(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + o(x^{2n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition Serie di MacLaurin del coseno

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \begin{cases} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1-x)$

Abbiamo che

$$D^k \log(1-x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$$

Allora

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{k!} + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $\log(1+x)$

Abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

Proposition Serie di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$

Notiamo che se $\alpha = n$, allora è un polinomio di grado n , quindi lui stesso è il suo Polinomio di Taylor

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

Altrimenti,

$$D^k(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

e allora

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}$$

con i coefficienti binomiali generalizzati.

Teorema Teorema di Unicità

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I . Supponiamo che

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k$$

sia un polinomio di grado minore o uguale a n tale che $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$. Allora, $P(x) = P_n(x)$. In particolare, per il principio di identità dei polinomi,

$$\frac{D^k f(x_0)}{k!}$$

Proof

Poiché f è derivabile n volte in x_0 dalla Formula di Taylor con resto di Peano risulta che

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

risulta quindi

$$P(x) - P_n(x) = [f(x) - P_n(x)] - [f(x) - P(x)] = o((x-x_0)^n)$$

Posto $Q(x) = P(x) - P_n(x)$ la dimostrazione si riduce a mostrare che se $Q(x)$ è un polinomio in $(x-x_0)$ di grado minore o uguale a n e $Q(x) = o((x-x_0)^n)$ allora $Q(x) = 0$ cioè tutti i coefficienti di Q sono nulli. Scriviamo

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k$$

e supponiamo per assurdo che

$$\frac{Q(x)}{(x-x_0)^n} \rightarrow 0$$

ma $Q(x) \neq 0$. Tra tutti i coefficienti non nulli, ce n'è uno con indice più piccolo k_0 , quindi tutti quelli prima sono nulli. Abbiamo quindi che

$$Q(x) = \sum_{k=k_0}^n b_k (x-x_0)^k$$

Siccome il termine tende a zero, raccogliamo la potenza più piccola

$$Q(x) = (x-x_0)^{k_0} \sum_{k=k_0}^n b_k (x-x_0)^{k-k_0}$$

da cui

$$\frac{Q(x)}{(x-x_0)^n} = (x-x_0)^{k_0-n} \sum_{k=k_0}^n b_k (x-x_0)^{k-k_0}$$

la sommatoria tende a b_{k_0} e il termine esterno $\pm\infty$ per $k_0 < n$, altrimenti 1 (o magari non esiste il limite). Quindi, $Q(x)$ non tende a zero ∇ .

Esempio Espansione di MacLaurin del seno iperbolico

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}$$

Esempio Espansione di MacLaurin del coseno iperbolico

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + XX$$

Esercizio

Verificare per induzione che per ogni k ,

$$D^k e^{-\frac{1}{x^2}} = P_k(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

con $x \neq 0$, dove P_k è un polinomio di grado minore o uguale a k in $\frac{1}{x^3}$. Dedurre inoltre che per tutte le k ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 0 = D^k \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right) (0)$$

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in C^∞ e sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

la sue serie di Taylor in x_0 . Poiché è infinitamente differenziabile, soddisfa le ipotesi di Teorema di Taylor per tutte le n e quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Notiamo che $P_n(x)$ è la somma parziale della serie di Taylor.

Teorema

La serie di Taylor di f calcolata in x converge a $f(x)$ se e solo se $R_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Tale uguaglianza vale per le funzioni viste. Per e^x abbiamo il resto in forma di Lagrange

$$R(x) = \frac{D^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

dove ξ è compreso fra 0 e x . Abbiamo allora

$$R(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

in ogni caso $e^\xi \leq \max\{e^\xi, 1\} \leq e^{|x|}$ Quindi,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}x^{n+1} \rightarrow 0$$

per gerarchia degli infiniti. Quindi, e^x è pari alla sue serie di MacLaurin.

Per il seno abbiamo

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(D^{2n+2}\sin)(\xi)}{(2n+2)!}$$

e siccome le derivate pari del seno sono o il seno o il seno negativo, abbiamo

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|\pm \sin(\xi)|}{(2n+2)!}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0$$

16.6 Classificazione punti stazionari

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in x_0 interno ad I e supponiamo che $f'(x_0) = 0$, quindi x_0 è stazionario:

1. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo forte;
2. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo forte;
3. se x_0 è un punto di minimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \geq 0$;
4. se x_0 è un punto di massimo relativo (debole o forte) allora $f''(x_0) \leq 0$;

Proof

Per la formula di Taylor al secondo ordine centrata in x_0 abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

e poiché $f'(x_0) = 0$, risulta che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &= (x - x_0)^2 \left\{ \frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right\}, \quad \forall x \neq x_0 \end{aligned}$$

Per definizione l'ultimo termine tende a zero per $x \rightarrow 0$, quindi prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{4}|f''(x_0)| > 0$ nel caso (1) o (2) dalla definizione di limiti risulta che

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta$$

abbiamo

$$\left| \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \right| < \frac{1}{4} |f''(x_0)|$$

Consideriamo il primo caso senza perdita di generalità, quindi $f''(x_0) > 0$ risulta quindi che

$$-\frac{1}{4}f''(x_0) < \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$$

da cui

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}f''(x_0)$$

Sostituendo in una vecchia equazione otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x-x_0)^2 \left\{ \frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \right\} \\ &\geq \frac{1}{4}f''(x_0)(x-x_0)^2 > 0, \quad \forall 0 < |x-x_0| < \delta \end{aligned}$$

e x_0 è punto di minimo relativo forte.

Il caso in cui $f''(x_0) < 0$ segue notando che

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0) < 0$$

Per la seconda parte del teorema consideriamo x_0 come punto di minimo relativo (forte o debole). Sappiamo che $f'(x_0) = 0$ per Fermat e inoltre deve essere $f''(x_0) \geq 0$ perché altrimenti x_0 sarebbe punto di massimo relativo forte e quindi non potrebbe essere punto di minimo relativo. Analogamente per l'ultimo punto.

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 interno ad I con

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora

1. Se n è dispari, x_0 non è estremante;
2. Se n è pari, x_0 è un estremante e più precisamente:
 - (a) è un minimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) > 0$;
 - (b) è un massimo relativo forte se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Teorema Teorema di Darboux per le funzioni derivate

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I

1. se $I = [a, b] \wedge f'(a)f'(b) < 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$;
- 2.

$$\forall l \mid \inf_I f' < l < \sup_I f', \exists c \in (a, b) \mid f'(c) = l$$

Nota che non occorre supporre che la derivata sia continua (in tal caso sarebbe ovvio).

Proof

1. la funzione parte scendendo e termina salendo (senza perdita di generalità). Per definizione

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0$$

Per permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

in $a, a + \delta$ cioè $f(x) < f(a)$ in $(a, a + \delta)$ e f non può assumere minimo in $x = a$. Analogamente si verifica che $f(x) - f(b) < 0$ in $(b - \delta, b)$ e quindi f non può assumere minimo in $x = b$. Ma f è derivabile, e quindi continua in $[a, b]$ e per Weierstrass assume minimo assoluto in un punto $c \in [a, b]$ che è quindi interno. Per Fermat $f'(c) = 0$.

16.7 Convessità

Una funzione si dice convessa se il suo grafico giace sempre sotto quelle delle corde secanti (strettamente o meno).

Definizione Funzione convessa

Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è (strettamente) convessa in I se $\forall x_1 < x_2 \in I$ vale (una delle seguenti)

1. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2. $\forall x$ tale che $x_1 < x < x_2$, vale

$$f(x) < f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

3. notando che

$$\forall x_1 \leq x \leq x_2, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

e ponendo

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0, 1), \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$$

e risolvendo la prima rispetto ad x si trova $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ e quindi la condizione diventa

$$\forall \lambda \in (0, 1), f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

o minore o uguale per la convessità semplice.

Notiamo infatti che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \end{cases}$$

è l'equazione parametrica che passa per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

La convessità esprime il fatto che la regione

$$E_f = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$

detta *epigrafico*, è un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^2 .

Infatti, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall x, y \in C$, l'insieme del segmento

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C$$

Definizione Funzione concava

Una funzione è concava se $-f$ è convessa.

Convesso è come dire concava verso l'alto, e concava è concava verso il basso.

Proposition

Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora

1. se f, g sono convesse e $\alpha, \beta \geq 0$, allora $\alpha f + \beta g$ è convessa ed è strettamente convessa se almeno una delle due lo è e il corrispondente coefficiente è strettamente positivo;
2. le funzioni lineari affini (polinomi di primo grado) sono le uniche funzioni che sono sia concave che convesse (non strettamente);
3. f è (strettamente) convessa se e solo se $f(x) + ac + b$ lo è.

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo. Sono equivalenti:

1. f è convesso (rispettivamente strettamente convessa);
2. $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

3. $\forall x_0 \in I$, il coefficiente angolare

$$F_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente (rispettivamente strettamente crescente) in $I \setminus \{x_0\}$.

Proof

1. (1) \implies (2): osserviamo che per ipotesi f è convessa in I se $\forall x_1 < x_2$ e $\forall x_0$ tale che $x_1 < x_0 < x_2$ vale la disuguaglianza 2 nella definizione

$$f(x_0) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Poiché

$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

possiamo riscrivere la disequazione nella forma

$$\left\{ \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \right\} f(x_0) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Quindi rearranging

$$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} [f(x_0) - f(x_1)] \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_0)]$$

e dividendo otteniamo la seconda condizione.

2. (2) \implies (1): supponiamo che f non sia convessa (strettamente convessa). Allora esistono punti $x_1 < x_0 < x_2$ tale che

$$f(x_0) > f(x_1) \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Gli stessi conti fatti sopra, mostrano che per i punti selezionati non vale la disuguaglianza (2) ovvero non vale il minore stretto (vale il maggiore uguale).

3. (2) \implies (3): slides;
4. (3) \implies (2): ovvio.

La convessità non implica la continuità. Vi è solamente un unico controesempio: quello di una funzione concava dove gli estremi dell'intervallo sono punti distaccati più in alto dei punti vicini.

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa su I intervallo.

1. $\forall x_0$ interno ad I , esistono finite $D_-f(x_0) \leq D_+f(x)$. In particolare ciò implica che f è continua in x_0 ;
2. $\forall x_1 < x_2$ interni ad I si ha

$$D_-(x_1) \leq D_+f(x_1) \leq D_-f(x_0) \leq D_+f(x_2)$$

Inoltre, se f è strettamente convessa, $D_+f(x_1) < D_-f(x_2)$.

3. $\forall x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ interni ad I

$$D_+f(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq D_-f(x_4)$$

In particolare, f è Lipschiziana in $[x_1, x_4]$.

Proof

1. segue direttamente dal punto (3) del teorema (1). Infatti, il rapporto incrementale centrato in x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una funzione monotona crescente di x . Quindi, $\forall x_1 < x < x_0 < x' < x_2$ con x_1, x_2 interni, vale

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

facendo tendere $x \rightarrow x_0^-$, $x' \rightarrow x_0^+$, i limiti dei rapporti incrementali esistono per monotonia e si conclude che esistono

$$D_-f(x_0) \leq D_+f(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

2.,3. si ottengono con considerazioni simili. (bisogna considerare 5 punti)

Corollario

Se f è convessa (rispettivamente strettamente convessa) in I e derivabile allora $f'(x)$ è monotona crescente (rispettivamente monotona crescente)

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora f è (strettamente) convessa se e solo se $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \in I$ per $x \neq x_0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Proof

(\Rightarrow) Supponiamo che f sia (strettamente) convessa- Quindi dal un teorema precedente, $\forall x_1 < x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Dalla disuglianza destra si ricava

$$\forall x_2 > x_0, f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

e da quella sinistra si deduce che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

e qiomdo vale la tesi. Se f è strettamente convessa valgono le disuglianze strette nell'ultima disuglianza, e quindi lo stesso vale per quella prima.

(\Leftarrow) Supponiamo che valga

$$\forall x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

con $x \neq x_0$. Allora gli stessi conti mostrano che per $x_2 > x_1$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \implies \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq f'(x_0)$$

e analogamente per $x_1 < x_0$ si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$$

Quindi

$$\forall x_1 < x_0 < x_2, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

e f è strettamente (strettamente) convessa per un vecchio teorema.

Teorema

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I aperto. Allora

1. f è (strettamente) convessa in I se e solo se f' è (strettamente) monotona crescente.
2. se f è derivabile 2 volte in I , f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ in I . Se $f'' > 0$, allora f è strettamente convessa.

Proof

1. (\Rightarrow) Sappiamo già che f (strettamente) convessa implica f' monotona crescente.

(\Leftarrow) Supponiamo che f' sia (strettamente) monotona crescente.

Mostriamo che vale una vecchia condizione, cioè $\forall x_0 \in I$ e $\forall x \neq x_0$,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Per il teorema di Lagrange $\forall x \neq x_0$, esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Sia $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e poiché f' è monotona (strettamente) crescente otteniamo

$$f'(\xi) \geq f'(x_0)$$

e quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f'(x_0) \geq 0$$

Analogamente se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ cosicché $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ e $x - x_0 < 0$.

Come prima,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. (2) segue da (1) perché se f è derivabile 2 volte allora f è monotona crescente se e solo se $f'' \geq 0$ e $f'' > 0$ implica f' strettamente monotona

Definizione

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I e sia c tale che f è convessa per $x < c$ e concava per $x > c$ o viceversa. Allora, c è un *punto di flesso*.

Teorema

Sia f derivabile 1 volta in I e supponiamo che

1. $x = c$ sia un punto di flesso per f ;
2. f sia derivabile 2 volte in $x = c$.

Allora, $f''(c) = 0$.

Infatti, poiché $x = c$ è di flesso, f è convessa (concava) in un intorno sinistro di c , e concava (convessa) in un intorno destro di f , è monotona crescente (decrecente) per $x < c$ e monotona decrescente (crescente) per $x > c$ è un punto estremo per f' . Per il teorema di Fermat, $(f')'(c) = f''(c) = 0$.

16.8 Asintoti

Definizione Asintoto

Sia $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Una retta $y = y_0 + mx$ si dice *asintoto* per $x \rightarrow +\infty$ se

$$f(x) - [y_0 + mx] \rightarrow 0$$

per $x \rightarrow \infty$. Se $m = 0$ la retta $y = y_0$ è *asintoto orizzontale*. Se $m \neq 0$ la retta $y = y_0 + mx$ è un *asintoto obliquo*.

Proposition Condizioni asintoto

1. *asintoto orizzontale* $y = y_0$ per $x \rightarrow \infty$ se e solo se $f(x) \rightarrow y_0$ per $x \rightarrow +\infty$;
2. *asintoto obliquo* $y = mx + q$ se e solo se:
 - (a) $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow \infty$
 - (b)

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow m \in \mathbb{R}^*$$

- (c) $f(x) - mx \rightarrow q \in \mathbb{R}$

Teorema

Sia $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa in $(a, +\infty)$. Se $y = mx + q$ è asintoto per $x \rightarrow +\infty$ allora $f(x) \geq mx + q$ per tutte le x in (a, ∞) .

Analogamente sta sempre sotto se concava. E anche per la dis. stretta.

16.9 Studio di funzioni

Esercizio

Dimostrare che se f è continua, periodica e non costante, ammette un minimo periodo positivo. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni razionale, quindi non ha un periodo minimo.

17 Integrali

17.1 Integrazione di Riemann

Abbiamo la partizione

$$\bigcup_{i=1}^n I_i = [0, 1]$$

e $i \neq j \implies I_j \cap I_i = \emptyset$. Troviamo i rettangoli come

$$r_n = \bigcup_{i=1}^n I_i \times \left[0, f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right]$$

e

$$R_n = \bigcup_{i=1}^n I_i \times \left[0, f\left(\frac{i}{n}\right) \right]$$

Quindi l'area sottesa è data da

$$A(r_n) = \sum_{i=1}^n XXX$$

e

$$A(R_n) = \sum_{i=1}^n XXX$$

Entrambe, convergono al medesimo valore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$$

17.2 Area del cerchio

L'area del cerchio è la medesima considerato i triangoli inscritti e circoscritti

17.3 Funzione gradini

Definizione Funzione a scala

Sia $I \neq \emptyset$ un intervallo non vuoto. Una funzione $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a scalini se esiste una partizione $\{I_k\}$ di I mediante intervalli (eventualmente ridotti ad un punto) tale che φ è costante su ciascun intervallo I_k .

Una tale partizione di I viene detta adattata a φ . Osserviamo che suddividendo uno o più intervalli di una partizione adattata, si ottiene una partizione adattata. Diciamo che $\{I_k\}$ è una partizione indotta da φ se la funzione assume valore diversi su intervalli consecutivi. Una partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partizione indotta.

Notiamo che se φ è a scala, $\{I_k\}$ è una partizione adatta e α_k è il valore costante che φ assume in I_k

$$\varphi(x) = \alpha_k$$

per tutte le $x \in I_k$. Allora possiamo scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}(x)$$

Infatti poiché $\{I_k\}$ è una partizione di I , $\forall x \in I$, esiste una sola \bar{k} tale che $x \in I_{\bar{k}}$.

Proposition Proprietà delle funzioni a scala

Siano $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a scala.

1. esiste una partizione $\{I_k\}$ di I adattata ad entrambe;
2. la combinazione lineare delle due è a scala. Infatti sia $\{I_k\}$ una partizione di I adattata ad ambo le funzioni cosicché

$$\varphi = \sum \alpha_k \chi_{I_k}$$

e

$$\psi = \sum \beta_k \chi_{I_k}$$

Allora

$$a\varphi + b\psi = \sum (a\alpha_k + b\beta_k) \chi_{I_k}$$

che è a scala.

3. Se $\{J_l\}$ è una famiglia di sottointervalli di I e $\gamma_l \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum \gamma_l \chi_{J_l}$$

è a scala (conseguenza del risultato precedente). Quindi, le funzioni a scala sono precisamente le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

4. $\psi\varphi$ e, se $\psi \neq 0$ in I , $\frac{\varphi}{\psi}$ sono a scala.
5. Se $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ è a scala, $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, e $\varphi(I) \subseteq A$ cosicché è definita $F \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, $F \circ \varphi$ è a scala. In particolare, se φ è a scala allora $|\varphi|$ è a scala e

$$\varphi_+ = \frac{|\varphi| + \varphi}{2}$$

e

$$\varphi_- = \frac{|\varphi| - \varphi}{2}$$

sono a scala.

Definizione

Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a scala e sia $\{I_k\}_{k=1}^n$ la partizione indotta da φ cosicché

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}$$

Definiamo allora

$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_k \ell(I_k)$$

Poiché ogni partizione adattata si ottiene suddividendo uno o più intervalli della partizione indotta e poiché se se

$$I_k = \bigcup_i J_i$$

e $\varphi(x) = \alpha_k$ su I_k dove i J_i sono disgiunti tra loro, allora

$$\alpha_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{i=1} \alpha_k \cdot \ell(J_{k_i})$$

Risulta allora che se $\{J_i\}_{i=1}^m$ è una partizione adattata a φ e

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}$$

risulta che

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \ell(J_i) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \ell(I_k)$$

e quindi nella definizione dell'integrale non corre usare la rappresenta di φ ottenute mediante le partizioni indotte. Si può usare una qualunque partizione adattata.

Proposition Proprietà dell'integrale di funzioni a scala

Siano $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a scala

1.

$$\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$$

Infatti, se $\{J_i\}$ è una partizione adattata ad entrambe φ e ψ e

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}, \quad \psi = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{J_i}$$

cosicché

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^m (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) \chi_{J_i}$$

risulta la tesi ovviamente spezzando la sommatoria non c'è bisogno che lo scriva è troppo ovvio.

2. *monotonia*: se $\varphi \leq \psi$ su I allora

$$\int_I \varphi \leq \int_I \psi$$

infatti se $\{I_k\}$ è adattata ad entrambe φ e ψ cosicché

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{J_i}, \quad \psi = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{J_i}$$

$\varphi(x) \leq \psi(x)$ per tutte le $x \in I$ vale se e solo se $\alpha_k \leq \beta_k$ per tutte le k e quindi

$$\int_I \varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^n \beta_k \ell(I_k) = \int_I \psi$$

In particolare se $\psi \geq 0$ su I allora

$$\int_I \psi \geq 0$$

3. *disuguaglianza triangolare*: se φ è a scala cosicché $|\varphi|$ è a scala allora

$$\left| \int_I \varphi \right| \leq \int_I |\varphi|$$

4. *additività rispetto all'intervallo di integrazione*: Se $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ è a scala e $I = I_1 \cup I_2$ disgiunti allora φ è a scala su I_1 e I_2 e

$$\int_I \varphi = \int_{I_1} \varphi + \int_{I_2} \varphi$$

5. Se $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono a scala e $\varphi(x) = \psi(x)$ eccetto che in un numero finito di punti (nell'integrale di Lebesgue anche numerabile) di punti allora

$$\int_I \varphi = \int_I \psi$$

Definizione Integrale di Riemann

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su I intervallo limitato. L'integrale inferiore di f su I

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\}$$

e superiore

$$\bar{\int}_I f = \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\}$$

Ovviamente $\int_I f \leq \bar{\int}_I f$. Diciamo che f è integrabile nel senso di Riemann se $\int_I f \leq \bar{\int}_I f$. In tal caso, il valore comune è l'*integrale di Riemann*

$$R - \int_I f$$

Quindi per ogni funzione φ, ψ a scala dove $\varphi \leq f \leq \psi$ vale

$$\int_I \varphi \leq \int_I f \leq \bar{\int}_I f \leq \int_I \psi$$

Se $s = S$ allora la funzione è Riemann integrabile

$$\int_I \varphi \leq R - \int_I f \leq \int_I \psi$$

Lemma

Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è a scala allora f è Riemann integrabile e

$$\int_I f = R - \int_I f$$

Proof

Basta dimostrare che se f è a scala vale

$$\begin{aligned} \int_I f &= \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \end{aligned}$$

Ci limitiamo a verificare la prima uguaglianza. Per tutte le φ a scala con $\varphi \leq f$ per monotonia dell'integrale di funzione a scala

$$\int_I \varphi \leq \int_I f$$

e passando al suo su φ a scala $\varphi \leq f$ otteniamo

$$\sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I f$$

D'altra parte poiché f è a scala, f stessa è una delle funzioni a scala, quindi per definizione di supremum

$$\int_I f \leq \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I f$$

Quindi vige l'uguaglianza.

Come conseguenza, se f è a scala togliamo il prefisso di $R-$.

Non tutte le funzioni (limitate su intervallo limitata) sono integrabili nel senso di Riemann. Nonostante la maggior parte non lo sia, non è banale mostrarne una. Per esempio la funzione di Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ non è integrabile nel senso di Riemann. Abbiamo che

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = 0, \quad S(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = b - a$$

Per mostrare ciò cominciamo con $1_{\mathbb{Q}} \geq 0$ e per definizione di integrale inferiore

$$s(1_{\mathbb{Q}}, [a, b]) = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I \right\} \leq \int_I f \geq \int_I 0 = 0$$

D'altra parte, sia

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}$$

una funzione a scala con $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$ su $[a, b]$ dove $\{I_k\}$ è una partizione di $I = [a, b]$ cioè

$$\bigcup_k I_k = I$$

e $I_j \cap I_k = \emptyset$ se $j \neq k$ cosicché

$$\begin{aligned} \int_I \varphi &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) = 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \alpha_k \cdot \ell(I_k) \end{aligned}$$

Poiché \mathbb{R} e $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in \mathbb{R} , ogni intervallo I_k tale che $\ell(I_k) > 0$ contiene infinite razionali e infiniti irrazionali. In particolare, esiste $x_k \in I_k$ con $x_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e poiché $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0)$ su I_k avremo

$$\varphi(x_n) \leq 1_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$$

Quindi, per tutte le k , $\ell(I_k) \geq 0$ e $\alpha_k \leq 0$ da cui sostituendo nell'integrale, il valore è al massimo zero. Quindi

$$\int_I \varphi \leq 0$$

per ogni φ a scala con $\varphi \leq 1_{\mathbb{Q}}$. Allora passando al sup otteniamo

$$s(1_{\mathbb{Q}}, I) \leq 0 \implies s(1_{\mathbb{Q}}, I) = 0$$

La dimostrazione per il fatto che $S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \ell(I)$ è simile: Abbiamo che $1_{\mathbb{Q}} \leq 1$ su I , il che implica che

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) = \inf \left\{ \int_I \psi \mid \psi \in \mathcal{S} \wedge \psi \geq 1_{\mathbb{Q}} \text{ in } I \right\} \leq \int_I 1 = \ell(I)$$

Il viceversa è come sopra: per la disuglianza inversa, supponiamo che $1_{\mathbb{Q}}$ sia a scala con $\psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$ e sia

$$\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{I_k}$$

dove $\{I_k\}$ è una partizione adattata a ψ come sopra. Allora

$$\int_I \psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k)$$

Allora per tutte le k abbiamo $\ell(I_k) > 0$ esiste $x'_k \in I_k$ tale che $x'_k \in \mathbb{Q}$ da cui

$$\beta_k = \psi(x'_k) \geq 1_{\mathbb{Q}}(x'_k) = 1$$

e sostituendo nell'integrale troviamo

$$\begin{aligned} \int_I \psi &= \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) \\ &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ \ell(I_k) > 0}}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \ell(I_k) = \ell(I_k) \end{aligned}$$

cioè $\forall \psi \geq 1_{\mathbb{Q}}$ a scala

$$\int_I \psi \geq \ell(I)$$

e passando all'infimum abbiamo

$$S(1_{\mathbb{Q}}, I) \geq \ell(I)$$

Teorema CNS per la Riemann integrabilità

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su I intervallo limitato. Sono equivalenti:

1. f è Riemann integrabile su I ;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala con $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon = \int_I (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) < \varepsilon$$

3. Esistono successioni di funzioni a scala $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ tale che per tutte le n $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su I e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \int_I (\psi_n - \varphi_n) \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Inoltre esistono

$$\lim_n \int_I \varphi_n = \lim_n \int_I \psi_n = \int_I f$$

Proof

1. (1) \implies (2): sia f integrabile nel senso di Riemann. Per definizione,

$$\begin{aligned} \int_I f &= \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \\ &= \int_I f = \int_I f \end{aligned}$$

Per definizione di infimum e supremum (finiti) $\forall \varepsilon > 0$ esiste φ_ε a scala con $\varphi_\varepsilon \leq f$ su I tale

che

$$\int_I \varphi_\varepsilon > \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f - \frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente esiste ψ_ε a scala con $\psi_\varepsilon \geq f$ su I tale che

$$\int_I \psi_\varepsilon < \int_I f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da questo segue quindi

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \left(\int_I f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\int_I f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Il maggiore o uguale a zero è per monotonia delle funzioni a scala

2. (2) \implies (3): per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ su I e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Posto $\varepsilon = \frac{1}{n}$, per tutte le n esiste φ_n, ψ_n a scala con $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su I e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n < \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

e quindi vale la terza proposizione.

3. (3) \implies (1): Per ipotesi esiste $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ successioni di funzioni a scala tale che per ogni n $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

Ancora per definizione, per tutte le n abbiamo

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \text{ in } I \right\} \geq \int_I \varphi_n$$

e

$$\int_I f = \inf \left\{ \int_I \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \geq f \text{ in } I \right\} \leq \int_I \psi_n$$

da cui

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi_n \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

cosicché $\int_I f$ non può che non essere uguale a $\int_I \varphi_n$ e quindi f è integrabile nel senso di Riemann. Inoltre, otteniamo che

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi_n = \int_I f - \int_I \varphi_n \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n \rightarrow 0$$

e questo dimostra che esiste

$$\lim_n \int_I \varphi_n = \int_I f$$

Analogamente per l'altro caso.

Proposition Proprietà dell'integrale

Siano $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su I limitato

1. Se f e g sono Riemann integrabili, allora

(a) *linearità* $\forall a, b, af + bg$ è Riemann-integrabile e vale

$$\int_I af + bg = a \int_I f + b \int_I g$$

- (b) fg è Riemann integrabile e se $\frac{1}{g}$ è limitata su I f/g è Riemann-integrabile su I
 2. se f, g sono Riemann-integrabili su I e $f \leq g$ su I allora

$$\int_I f \leq \int_I g$$

In particolare se $g \geq 0$ su I ,

$$\int_I g \geq 0$$

3. *disuglianza triangolare* se f è Riemann interabile su I allora f^+ e f^- e $|f|$ sono Riemann integrabili e vale

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

4. *additività rispetto all'insieme di integrazione* Se $I = I_1 \cup I_2$ disgiunti allora f è integrabile su I se e solo se è integrabile su I_1 e su I_2 e in tal caso

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$$

Nel caso in cui $I = I_1 \cup I_2$ ma gli intervalli non sono necessariamente disgiunti allora la conclusione sull'integrabilità vale ma la (prima) viene sostituita da

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f$$

5. Se $f = g$ eccetto al più in un numero finiti di punti allora f è Riemann integrabile se e solo se g è Riemann integrabile e in tal caso

$$\int_I f = \int_I g$$

Proof

Non sono difficili da dimostrare, basta il teorema sulle condizioni necessarie sufficienti e le proprietà degli integrali delle funzioni a scala.

- Dimostriamo quella sull'addizione. Per tutte le $\varepsilon > 0$ esistono funzioni a scala $\varphi_\varepsilon^f \leq f \leq \psi_\varepsilon^f$ su I tale che

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\varphi_\varepsilon^g \leq g \leq \psi_\varepsilon^g$ su I

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^g \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g$ e $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g$ risulta che φ_ε e ψ_ε sono a scala e

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g \leq f + g \leq \psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g = \psi_\varepsilon$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon &< \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^f - \int_I \varphi_\varepsilon^g - \int_I \varphi_\varepsilon^g \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi $f + g$ è Riemann integrabile inoltre per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_I (\varphi_\varepsilon^f + \varphi_\varepsilon^g) &\leq \int_I f + g \leq \int_I (\psi_\varepsilon^f + \psi_\varepsilon^g) \\ \int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g &\leq \int_I f + \int_I g \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g\end{aligned}$$

da cui deduciamo che

$$\int_I (f + g) - \left(\int_I f + \int_I g \right) \leq \int_I \psi_\varepsilon^f + \int_I \psi_\varepsilon^g - \int_I \psi_\varepsilon^g - \left(\int_I \varphi_\varepsilon^f + \int_I \varphi_\varepsilon^g \right) = \varepsilon$$

da cui concludiamo che

$$\left| \int_I (f + g) - \left(\int_I f + \int_I g \right) \right| < \varepsilon$$

per tutte le $\varepsilon > 0$.

- Dimostriamo ora che f^+ è Riemann integrabile. Siccome f , quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Chiaramente, $\varphi_\varepsilon^+ \leq f^+ \leq \psi_\varepsilon^+$ e vale

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon^+ - \int_I \varphi_\varepsilon^+ \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Otteniamo quindi l'integrabilità. Analogamente si verifica che f^- è Riemann integrabile.

- Poiché $|f| = f^+ - f^-$

$$\left| \int_I f \right| = \left| \int_I (f^+ - f^-) \right| = \left| \int_I f^+ - \int_I f^- \right|$$

che per disuguaglianza triangolare è minore o uguale di

$$\leq \left| \int_I f^+ \right| + \left| \int_I f^- \right| = \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I (f^+ + f^-) = \int_I |f|$$

Teorema Classi di funzioni integrabili

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo limitato

1. se $I = [a, b]$ e f è
 - (a) monotona su I ;
 - (b) continua su I ;
 allora f è limitata su I (o perché è monotona e quindi compresa fra $f(b)$ e $f(a)$, o perché è continua su un chiuso limitato per Weierstrass) ed è integrabile su $I = [a, b]$;
2. se $I = [a, b)$ e f è limitata in I e
 - (a) monotona su I ;
 - (b) continua su I ;
 allora f è Riemann integrabile. (Questo punto contiene anche quello precedente).
3. se I è un intervallo limitato e f è limitata e continua eccetto che in un numero finito di punti, allora f è integrabile
4. se I è un intervallo, f è limitata su I , e l'insieme

$$B = \{x \in I \mid f \text{ non è continua in } x\}$$

ha un numero finito di punti di accumulazione, allora f è Riemann integrabile su I .

In effetti si dimostra che $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su I limitato è Riemann integrabile se e solo se l'insieme B ha misura di Lebesgue nulla. Cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\{I_n\}$ successione di intervalli aperti tale che

$$B \subseteq \bigcup_n I_n \wedge \sum_n \ell(I_n) < \varepsilon$$

Proof

1. (a) Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in punti x_0, x_1, \dots, x_n . I punti x_k hanno forma $a + k \frac{b-a}{n}$ con $0 \leq k \leq n$. La partizione di $[a, b]$ è data da $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $0 < k < n$. Per ogni k siano

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

e siano per ogni n

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n m_k \chi_{I_k}$$

e

$$\psi_n = \sum_{k=1}^n M_k \chi_{I_k}$$

cosicché φ_n e ψ_n sono a scala, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ su $I = [a, b]$ e

$$\int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \ell(I_k) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{b-a}{n}$$

e rispettivamente

$$\int_I \psi_n = \sum_{k=1}^n M_k \frac{b-a}{n}$$

Dal teorema CNS per l'integrabilità risulta che se

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$$

allora f è Riemann integrabile su I .

Sia f monotona in $I = [a, b]$. Senza perdita di generalità supponiamo che f sia monotona crescente (altrimenti applichiamo a $-f$ e l'opposto di una funzione integrabile è integrabile). Cosicché

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_{k-1})$$

e

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f = f(x_k)$$

(qua \sup e \inf corrispondono a \max e \min siccome è monotona). Sostituendo ciò nell'equazione CNS dell'integrabilità abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$.

- (b) Sia f continua su $[a, b]$. Mostriamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$$

facendo vedere che $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N$

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

Usiamo la definizione di limite per $n \rightarrow \infty$. Poiché f è continua su $[a, b]$ chiuso e limitato, f è uniformemente continua su $[a, b]$, e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a, b]$ con $|x - x'| < \varepsilon$ si ha che $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. In questo caso sostituiamo ε con $\frac{\varepsilon}{b-a}$. L'idea è quella di stimare $M_k - m_k$. La distanza fra i punti dove assumono il massimo M_k e il minimo m_k non può essere maggiore della lunghezza dell'intervallo. Sia allora n tale che $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Per ogni k , f è continua su $[x_{k-1}, x_k]$ chiuso e limitato, e quindi per Weierstrass $\exists x_k, x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tale che

$$M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x'_k) \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k)$$

cosicché

$$M_k - m_k = f(x'_k) - f(x_k) = |f(x'_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

poiché $|x'_k - x_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$. Quindi, sostituendo questo nella solita disuguaglianza otteniamo che

$$0 \leq \int_I \psi_n - \int_I \varphi_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) < \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

2. (a) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e monotona. Per monotonia, esiste

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

che è finito in quanto f è limitata. Posto $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ L & x = b \end{cases}$$

\bar{f} è monotona su $[a, b]$ e quindi ivi integrabile e quindi $\bar{f} = f$ è integrabile nel sottoinsieme $[a, b]$.

- (b) sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua. Per dimostrare che f è integrabile su $[a, b]$, costruiamo una funzione a scala sopra e sotto. $\forall \varepsilon > 0$ costruiamo $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ a scala tale che $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ e

$$0 \leq \int_I \psi_\varepsilon - \int_I \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

Osserviamo che f è continua su $[a, b - \delta]$ per tutti $\delta > 0$. Per il punto precedente f è quindi integrabile su $[a, b - \delta]$ per tutte $\delta > 0$. Ci rimane allora da considerare l'intervallo $[b - \delta, b]$. Per ipotesi f è limitata su $[a, b]$, quindi $\exists M$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per tutte le $x \in [a, b]$. Scegliamo δ tale che

$$2M\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

poiché f è integrabile su $[a, b - \delta]$, dato ε esistono funzioni a scala (che scegliamo costanti) $\varphi'_\varepsilon, \psi'_\varepsilon$ tale che $\varphi'_\varepsilon \leq f \leq \psi'_\varepsilon$ su $[a, b - \delta]$ e

$$0 \leq \int_{[a, b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a, b-\delta]} \varphi'_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo allora

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi'_\varepsilon & x \in [a, b - \delta] \\ -M & x \in [b - \delta, b) \end{cases}$$

e

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} \psi'_\varepsilon & x \in [a, b - \delta] \\ M & x \in [b - \delta, b) \end{cases}$$

Siccome $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ sono a scala, $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ in $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{[a,b)} \psi_\varepsilon - \int_{[a,b)} \varphi_\varepsilon &= \left(\int_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) \\ &\quad + \left(\int_{[b-\delta,b)} M - \int_{[b-\delta,b)} (-M) \right) \\ &= \left(\int_{[a,b-\delta]} \psi'_\varepsilon - \int_{[a,b-\delta]} \varphi'_\varepsilon \right) + 2M\delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Si deduce facilmente che se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e continua allora è Riemann integrabile (al posto che il ragionamento solo a destra lo faccio da ambo le parti) e quindi se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e continua eccetto che in $c \in (a, b)$, poiché $(a, b) = (a, c) \cup \{c\} \cup (c, b)$ e f è integrabile su ciascuno dei 3 sottointervalli f è integrabile su (a, b) . In generale, con molteplici punti mancanti, si fa lo stesso procedimento isolandoli.
4. Esercizio: nell'intorno

Corollario

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su I limitato e supponiamo che esista una partizione $\{I_k\}_{k=1}^n$ tale che f è o continua o monotona in ciascun I_k . Allora f è integrabile su I .

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su (a, b) . Allora, comunque essa venga estesa a $[a, b]$ rimane integrabile e l'integrale ha lo stesso valore siccome

$$\int_{\{a\}} f = 0$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f$$

senza ambiguità. Osserviamo poi che dalla proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, l'integrale si può spezzare.

Definizione

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su I (quindi I è limitato e f è limitata su I). Allora $\forall a, b \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{(a,b)} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_b^a f & b < a \end{cases}$$

Definizione

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di I . Fissato $a \in I$ definiamo la *funzione integrale* di f centrata in a

$$F_a(x) = \int_a^x f = \begin{cases} \int_{(a,x)} f & a < x \\ 0 & a = x \\ - \int_{(x,a)} f & a > x \end{cases}$$

Esercizio

Scrivere la relazione fra $F_a(x)$ e $F_b(x)$ per $a \neq b$.

Lemma

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo di I e siano $a, b, c \in I$. Allora,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proof

La dimostrazione si fa a casi e ne diamo solo due. Se $a < c < b$ il risultato segue dall'additività rispetto all'insieme di integrazione. Supponiamo $a < b < c$. Allora, sempre per l'additività rispetto all'insieme di integrazione

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

da cui

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Teorema Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$ e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

la sua funzione integrale centrata in a . Allora:

1. F è Lipschiziana in $[a, b]$ (in particolare continua su $[a, b]$);
2. Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F è derivabile in x_0 e vale

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

3. Se f è continua in $[a, b]$ allora F è una primitiva di f in $[a, b]$;
4. Se f è continua in $[a, b]$ e G è una sua primitiva (che per il punto precedente esiste, quindi qua stiamo dimostrando che se è continua esiste la primitiva) allora $\forall x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

e in particolare

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Proof

1. per ipotesi f è integrabile su $[a, b]$ e quindi in particolare è limitata, cioè $\exists M$ tale che $|f(t)| \leq M$ per tutte le $t \in [a, b]$. Dati $x, x' \in [a, b]$, supponendo senza perdere la generalità che $x < x'$ (il modulo nella definizione di Lipschiziana ce lo permette), abbiamo

$$\begin{aligned} |F(x') - F(x)| &= \left| \int_a^{x'} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x'} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{[x, x']} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{[x, x']} f(t) dt \\ &\leq M \cdot \int_{[x, x']} 1 dt = M(x' - x) = M|x' - x| \end{aligned}$$

2. Sia f continua in $x_0 \in [a, b]$. Mostriamo che F è derivabile in x_0 con $F'(x_0) = f(x_0)$ cioè che

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \rightarrow f(x_0)$$

per $h \rightarrow 0$ cioè che

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow 0$. Possiamo scrivere $\forall h \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - hf(x_0) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \end{aligned}$$

Se $h > 0$ (la disuguaglianza triangolare vale quando l'estremo superiore è maggiore a quello inferiore), allora

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt$$

Per ipotesi, f è continua in x_0 quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vale

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Quindi se $0 < h < \delta$, per tutte le $t \in [x_0, x_0 + h]$

$$|t - x_0| < \delta$$

e sostituendo e usando la monotonia dell'integrale ottemiamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &< \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} h \varepsilon = \varepsilon, \quad \forall 0 < h < \delta \end{aligned}$$

Per definizione

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = 0$$

cioè $D_+ F(x_0) = f(x_0)$.

Se invece $h < 0$ vale ancora

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right|$$

Per usare la disuguaglianza triangolare dobbiamo invertire il segno

$$\left| \frac{1}{-h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| = -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt$$

Come prima, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $-\delta < h < 0$. Quindi,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt &\leq -\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\ &= -\frac{1}{h} (-h \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $D_- F(x_0) = f(x_0)$.

3. Se f è continua in $x_0 \forall x_0$ allora per il punto 2 F è derivabile in x_0 con $F'(x_0) = f(x_0)$.
 $\forall x_0 \in [a, b]$ e F è una primitiva di f .
4. Sia G una primitiva di f . Per il punto 3,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una primitiva. Quindi per il teorema di caratterizzazione delle primitive esiste C tale che $G(x) = F(x) + C$ per tutte le $x \in [a, b]$. Possiamo dire qualcosa della funzione integrale solo per $x = a$

$$G(a) = F(a) + C = C = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Quindi $C = G(a)$ e si ottiene $G(x) = F(x) + G(a)$ cioè

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Corollario

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile nel senso di Riemann su ogni sottointervallo limitato. Fissati $a \in I$ sia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Allora,

1. F è Lipschitziana su ogni sottointervallo limitato che contiene a (non possiamo dire che sia Lipschitziana su tutto). Infatti se $a \in [\alpha, \beta] \subseteq I$ applichiamo il punto 1 del teorema a tale intervallo. In particolare, F è continua su tutto I , in quanto Lipschitziana su tutti i sottointervalli;
2. Se f è continua in $x_0 \in I$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$;
3. se f è continua in I , F è una primitiva di f in I ;
4. se G è una primitiva di f in I , $\forall x \in I$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Corollario Formula di derivazione delle funzioni integrali

Sia $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni sottointervallo limitato di J e siano $\alpha, \beta: I \rightarrow J$ continue. Definiamo

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y) dy$$

che è ben posto. Allora:

1. H è continua su I .
2. Se f è continua su J e α, β sono derivabili in I , H è derivabile in I e vale

$$H'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Proof

Scelto $y_0 \in J$, possiamo scrivere, $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y) dy = \int_{\alpha(x)}^{y_0} f(y) dy + \int_{y_0}^{\beta(x)} f(y) dy \\ &= F(\beta(x)) - F(\alpha(x)) \end{aligned}$$

dove

$$F(y) = \int_{y_0}^y f(t) dt$$

è la funzione integrale di f centrata in y_0 .

1. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, F è continua su J e quindi H è continua come composizione di funzioni continue.
2. Se f è continua in J , F è derivabile in J con $F'(y) = f(y)$ e se inoltre α, β sono derivabili dal teorema di derivazione delle funzioni composte, H è derivabile e

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \end{aligned}$$