

# Analisi I

Paolo Bettelini

## Contents

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Assiomi di Peano                                      | 1  |
| 2   | Principio di induzione                                | 3  |
| 3   | Combinatoria  | 4  |
| 4   | Funzione indicatrice                                  | 6  |
| 5   | Altre proprietà                                       | 6  |
| 6   | Interi relativi                                       | 7  |
| 7   | Definizioni con ordini                                | 9  |
| 7.1 | Considerazioni  | 9  |
| 7.2 | Estremi superiori e inferiori                         | 10 |
| 7.3 | Conseguenze della proprietà del sup                   | 12 |
| 7.4 | Esercizi sup  | 13 |
| 8   | Esponenziali  | 16 |
| 8.1 | Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi | 16 |
| 8.2 | Potenze a esponente reale                             | 16 |
| 8.3 | Esponenziali  | 17 |

## 1 Assiomi di Peano

### Definizione Assiomi di Peano

Gli *assiomi di Peano* includono i numeri naturali:

- il valore 1 è un numero;
- ogni numero  $n$  ha il suo successore  $S(n) = n + 1$ ;
- se  $m \neq n$ , allora  $S(m) \neq S(n)$ ;
- il numero 1 non è il successore di alcun numero;
- **assioma induttivo:** sia  $E \subseteq \mathbb{N}$  tale che  $1 \in E$ , allora

$$n \in E \implies S(n) \in E$$

Allora l'insieme  $E$  è l'insieme  $\mathbb{N}$ .

La funzione successore è iniettiva.

### Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{N}$  si dice *finale* se  $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$  per qualche  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Esiste quindi un valore  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

**Proposition**

Usando l'assioma indutivo si deduce che se  $A$  è un insieme tale che  $n_0 \in A$  e  $\forall n \in A, S(n) \in A$ , allora  $A$  è finale.

## 2 Principio di induzione

### Teorema Principio di induzione

Sia  $P(n)$  una proposizione dove  $n \in \mathbb{N}$ , allora

$$P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

### Teorema Equivalenza principio e assioma di induzione

L'assioma induttivo è equivalente al principio di induzione.

### Proof Equivalenza assioma e principio di induzione

Given a proposition  $P(n)$ , let

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

( $\implies$ ) If  $0 \in E$ , then  $P(0)$  is true.

If  $n \in E \implies S(n) \in E$ , then  $P(n) \implies P(S(n))$ .

If the latter conditions are satisfied, then by the axiom of induction,  $E = \mathbb{N}$ , and thus

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

( $\impliedby$ ) If  $P(0)$  is true, then  $0 \in E$ .

If  $P(n) \implies P(S(n))$ , then if  $n \in E \implies S(n) \in E$ .

If the latter conditions are satisfied, then by the principle of induction

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in E$$

and thus  $E = \mathbb{N}$ .

### Proposition Principio di induzione forte

Il principio di induzione è equivalente alla seguente forma: sia  $P(n)$  una proposizione dove  $n \in \mathbb{N}$  tale che

- $P(1)$  è vera;
- $P(k)$  è vera per tutte le  $k \leq n$ , allora  $P(n+1)$  è vera.

Allora  $P(n)$  è vera per tutte le  $n$ .

### Esempio Principio di induzione

Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$ , la somma

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Il caso base è dato da  $n = 1$  dove  $1 = \frac{2}{2} = 1$ .
- Il caso induttivo è dato da  $\xi = n + 1$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + \xi &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{aligned}$$

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

e impostiamo  $j = n - k + 1$ , abbiamo che la sommatoria è pari a

$$\sum_{j=1}^n a_{n-j+1}$$

#### Esempio Principio di induzione

Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

#### Esempio Principio di induzione

Per ogni  $n \geq 0$  e per ogni  $h > -1$ ,

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

### 3 Combinatoria

Il valore  $n!$  è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da  $F_n$  a  $F_n$  che sono biettive. Dove  $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

#### Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è  $F_1$ , che contiene solo 1 elemento e  $1! = 1$ .
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme  $F_n$ , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in  $n+1$  posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è  $n!(n+1) = (n+1)!$ .

La funzione  $\sigma(n)$  è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta  $n$  elementi). Infatti, le permutazioni di  $n$  sono  $n!$ , ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

#### Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di  $k$  oggetti scelti fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero delle funzioni iniettive  $f: F_k \rightarrow F_n$ .

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

#### Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di  $k$  oggetti scelto fra  $n$  oggetti, dove  $1 \leq k \leq n$ , sono il numero di sottoinsiemi di  $F_n$  di cardinalità  $k$ .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

**Lemma** Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme  $X$ .

### Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$  è equivalente a  $x \notin A \cap B$ , che è equivalente a  $x \notin A$  o  $x \notin B$ . Allora  $x \in A^c$  o  $x \in B^c$ , e quindi  $x \in A^c \cup B^c$ .

### Teorema Teorema del binomio

Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

## 4 Funzione indicatrice

### Definizione Funzione indicatrice

Sia  $X$  un insieme e  $E \subseteq X$ . La *funzione caratteristica* di  $E$  è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi  $E$  e  $F$ , abbiamo  $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$ .

La notazione  $y^x$  indica  $\{f: x \rightarrow y\}$ , cioè tutte le funzioni da  $x$  a  $y$ .

La funzione  $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$  è biettiva. La funzione  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  è pari a  $f = 1_E$  per  $E = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

## 5 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

## 6 Interi relativi

In  $\mathbb{N}$  è definita la funzione  $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  dove  $(m, n) \rightarrow m + n$ .

Abbiamo chiaramente che  $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$ .

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che  $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia,  $m - n$  è definito solo per  $m \geq n$ .

Definiamo  $\mathbb{Z}$  come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$ , e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma  $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

### Definizione Gruppo

Un insieme  $G$  con un operazione binaria  $\circ$  tale che

- **associativa:**  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- **elemento neutro:**  $\forall a \in A, \exists 0 \in G \mid 0 \circ a = a \circ 0 = a$
- **elemento opposto:**  $\forall a \in G, \exists a' \mid a + a' = a' + a = 0$

Se aggiungiamo la commutatività viene detto *gruppo abeliano*.

Per esempio  $(\mathbb{Z}, +)$  è un gruppo abeliano.

La struttura algebrica  $(\mathbb{Z}, \circ)$  dove  $(a, b) \rightarrow a \cdot b$  non è un gruppo abeliano, in quanto non c'è un inverso  $n^{-1}$  (c'è solamente per 1 e  $-1$ ). La divisione si può fare solo se uno è un multiplo dell'altro.

TODO: definizione di anello

Per definire gli inversi di tutti i numeri  $\neq 0$ , si introducono le frazioni  $\frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Si dice che due frazioni sono equivalenti  $\frac{m'}{n'}$  e  $\frac{m}{n}$  se  $mn' = m'n$ . I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione  $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$ .

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali  $\mathbb{Q}$  con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  introdotte. Quindi  $(\mathbb{Q}, +)$  è un gruppo abeliano,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo, per cui possiede le operazioni  $+$  e  $\cdot$  con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in  $\mathbb{Q}$  si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con  $a, b, x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di  $\mathbb{Q}$  ha un ordinamento totale dove  $r \leq s$  se e solo se  $r - s$  è non-negativa.

In  $\mathbb{Q}$  è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni  $+$  e  $\cdot$ , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con  $t \in \mathbb{Q}$  e con  $t \geq 0$  abbiamo  $tr \leq ts$ .

#### **Definizione** Campo ordinato

Un campo  $F$  nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in  $\mathbb{Q}$  sono risolubili.

#### **Teorema** Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in  $\mathbb{Q}$ .

#### **Proof** Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini  $r = \frac{m}{n}$ , tale che  $r^2 = 2$ . Abbiamo quindi che  $\frac{m^2}{n^2} = 2$ , quindi  $m^2 = 2n^2$ . Ciò ci dice che  $m^2$  è pari. Allora, 2 è un fattore anche di  $m$  (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi  $m$  è pari. Di conseguenza, se  $m$  è divisibile per 2, allora  $m^2$  è divisibile per 4. Abbiamo quindi  $4k = n^2$  e quindi  $n^2$  è divisibile per 2, anche  $n$ , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.



## 7 Definizioni con ordini

### Definizione Insieme totalmente ordinato

Un *insieme ordinato* è una tupla  $(X, \leq)$  dove  $X$  è un insieme e  $\leq$  è un ordinamento totale.

Sia anche  $E \subseteq X$  un insieme dove  $E \neq \emptyset$ .

Si dice che  $m \in X$  è *maggiorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \leq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *superiormente limitato*.

Si dice che  $m \in X$  è *minorante* di  $E$  se  $\forall x \in E, x \geq m$ .

Se un tale valore esiste,  $E$  si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme  $E$  si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore  $m \in X$  si dice *massimo* di  $E$  se  $M$  è un maggiorante di  $E$  e  $m \in E$ .

Un valore  $m \in X$  si dice *minimo* di  $E$  se  $M$  è un minorante di  $E$  e  $m \in E$ .

### 7.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme  $E$  sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio  $X = \mathbb{Q}$  ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di  $E$ . Vi sono diversi minoranti di  $E$ , come  $-1, -30$  etc. In generale, tutti i  $x \leq 0$  sono dei minoranti di  $E$ . I maggioranti di  $E$  sono tutti i valori  $x \geq 1$ .

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo  $r_n \in E$ . È facile vedere che  $r_n$  non può essere maggiorante in quanto se  $n' > n$ ,  $r_{n'} > r_n$ . Dato qualsiasi  $r_n$ , è possibile trovare un altro elemento in  $E$  che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che  $z < 1$ , verifichiamo quindi che  $z$  non è un maggiorante. Il valore  $z$  non è maggiorante di  $E$  se esiste una  $x \in E$  tale che  $x > z$ . Esiste infatti  $n$  tale che  $r_n > z$ , studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché  $1 - z > 1/n$ . Qualunque numero più piccolo di  $z$  sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

## 7.2 Estremi superiori e inferiori

### Definizione Estremo superiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo superiore* di  $E$  se  $\mu$  è un maggiorante di  $E$  e  $\mu$  è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

### Definizione Estremo inferiore

Sia  $E \subseteq X$  un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che  $\mu$  è l'*estremo inferiore* di  $E$  se  $\mu$  è un minorante di  $E$  e  $\mu$  è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$  che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in  $\mathbb{Q}$  sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

### Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora,  $E$  è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

### Proof

- Per dimostrare che  $E \neq \emptyset$  possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme  $E$  è banalmente limitato superiormente da tutti i valori  $x \geq 2$ .
- Supponiamo per assurdo che esista un  $\mu = \sup E$ . Notiamo che ovviamente  $\mu > 0$ . Possiamo notare che  $\mu^2 = 2$  è impossibile per il teorema di Euclide. Allora,  $\mu$  potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che  $\mu^2 < 2$ , allora dimostro che  $\exists x \in E$  tale che  $x > \mu$  e quindi che  $\mu$  non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di  $\mu$ . Possiamo quindi scegliere  $n$  sufficientemente grande tale che  $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$ , e quindi  $\mu + \frac{1}{n} \in E$  in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di  $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$ . Ciò è dato dal fatto che  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ .

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che  $\mu^2$  non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi  $\mu$  non esiste.

È facile verificare che  $\inf, \sup, \min, \max$  se esistono sono unici. Se esiste il massimo di  $E$ , allora esiste il  $\sup E$  e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste  $\sup E$  e  $\sup E \in E$ .

In  $\mathbb{Q}$  (e poi in  $\mathbb{R}$ ), se  $E$  non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè  $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$  tale che  $e > M$ ) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se  $E$  non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

### Definizione Numeri reali

Definiamo  $\mathbb{R}$  come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

### Teorema Teorema di unicità

Siano  $F_1$  e  $F_2$  due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione  $\phi: F_1 \rightarrow F_2$  tale che è un isomorfismo del gruppo additivo  $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$  per ogni  $x, y \in F_1$  e  $\phi(-x) = -\phi(x)$  per ogni  $x \in F_1$ . Se aggiungiamo anche che  $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$  per tutte le  $x, y \in F_1$  e  $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$  abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che  $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$ , abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali  $\mathbb{Q}$ . Chiaramente, diversi campi generano  $\mathbb{Q}$  diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire  $\phi_0: \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \rightarrow \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$ . Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato  $x \in F_1$ , abbiamo  $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$ . Allora  $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$ . Così viene esteso  $\phi$  a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \dots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove  $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Con la prescrizione che  $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \bar{9} = n, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k + 1)$ .

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

**Definizione di somma e prodotto:** Prendiamo  $x = n, a_1, \dots, a_k \dots$  e  $y = m, b_1, \dots, b_k \dots$  che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di  $\mathbb{R}$  soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Per ogni  $x \in E$  scriveremo  $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \dots$ .  $E$  è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in  $\mathbb{Z}$  limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo  $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$  Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora  $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$ . Con lo stesso metodo troviamo  $a_3, a_4, \dots$ , ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \dots$$

Dico che  $\mu$  è un maggiorante di  $E$ , e che se  $z < \mu$ ,  $z$  non è maggiorante. Sia allora  $\bar{x} \in E$ , quindi

$$\bar{x} = n_{\bar{x}}, a(\bar{x})_1, a(\bar{x})_2, \dots$$

Allora  $n_{\bar{x}} \leq N$  se  $n_{\bar{x}} < N$ .  $\bar{x} < \mu$ . Gli elementi in  $E_0$  sono al massimo  $a_1$ . Se  $n_{\bar{x}} = N$  e  $n_{\bar{x}} \in E_0$  e  $a_1(\bar{x}) = a_1$ .

Se  $a(\bar{x})_1 < a_1 \implies \bar{x} < \mu$ .

Se invece  $a(\bar{x})_1 = a_1 \implies \bar{x} \in E_1$  e  $a(\bar{x})_2 \leq a_2$

Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se  $\exists k$  tale che  $a(\bar{x})_k < a_k \implies \bar{x} < \mu$ . Se  $\forall k, a(\bar{x})_k = a_k$ , allora  $\bar{x} = \mu$  e  $\mu$  è il max di  $E$ . Questo procedimento non dimostra che  $\mu \in E$ .

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \dots < \mu$$

Deve quindi succedere che o  $n_z < N$ , e allora  $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$ , oppure  $n_z = N$  e  $a(z)_j = a_j$  per tutte le  $j < k$  ma  $a(z)_k < a_k$ . Allora  $\mu \sup E$ .

### 7.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeas:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$  (in realtà vale anche in  $\mathbb{Q}$ ).
- **densità dei razionali nei reali:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  dove  $x < y$ , esiste  $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$ .

#### Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

### Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che  $E$  non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo  $x = \sup E$  e mostriamo che  $x^n = y$ .

- **Non vuoto:** se  $y \geq 1$ , basta scegliere  $x = 1$  in quanto  $x^n = 1 \leq y$ . Altrimenti, se  $y < 1$ , poniamo  $x = y$  e notiamo che, perché  $y < 1$ , allora  $y^n < y$ , e quindi  $y \in E$ .
- **Limitato superiormente:**  $E$  è limitato superiormente, infatti  $1 + y$  è un maggiorante di  $E$ . Se  $z \geq (1 + y)$ , poiché la funzione  $t \rightarrow t^2$  è crescente per  $t > 0$ , si ha  $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$ . Sia  $x = \sup E$ . Dico che  $x^n = y$ . Dimostro che se suppongo  $x^n > y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi  $x - \frac{1}{k}$  è ancora un maggiorante di  $E$ , contro l'ipotesi impossibile perché  $x$ , che è il  $\sup E$ , è il più piccolo maggiorante. Invece, se  $x^n < y$  allora per  $k$  grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora  $x + \frac{1}{k} \in E$  ed è più grande di  $x$ , e  $x$  non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che  $x$  non può essere né più grande né più piccolo,  $x^n = y$ .

- **Unicità:** notiamo che se  $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$ .

Possiamo anche mettere  $z \geq 0$  così dimostrare che  $E \neq \emptyset$  è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che  $0 < y < 1 \implies y^n < y$ , per  $n > 1$ . (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

## 7.4 Esercizi sup

### Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di  $E$ ,  $F$ ,  $E \cup F$  e  $E \cap F$ .

- $E$  è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è  $\frac{1}{2}$ , mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi  $\sup E = 5$ , ma non vi è un massimo.
- $F$  è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché  $x_n > 0$ . Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine  $n+2$  cresce con  $n$ , quindi  $\frac{1}{n+2}$  decresce al crescere di  $n$  e quindi  $x_n$  cresce approssimando 1. Allora con  $n = 1$  il termine assume il valore più piccolo, ossia  $\frac{2}{3}$ , quindi il minimo di  $F$ . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare  $\sup F = 1$ .

Il massimo di  $F$  non esiste. Rimane da far vedere che se  $z < 1$  allora  $z$  non è maggiorante di  $F$  cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché  $\frac{1}{n+2} < 1 - z$  cioè  $n > \frac{1}{1-z} - 2$ . Quindi  $z$  non è maggiorante e  $\sup E = 1$ .

- Verificare che  $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$ . Abbiamo che  $\sup E \leq \sup F$ . In  $\sup$  è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi  $\sup E \cup F = 5$ . Tuttavia, il  $\max$  non esiste in quanto  $5 \notin E \cup F$ . Analogamente,  $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$ . Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi  $F \subseteq E$ . Consideriamo allora  $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali  $n$  vale che  $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$ ? Abbiamo  $4(n+2) \leq 5(n+1)$  e quindi  $n \geq 3$ . Allora  $\sup E_1 \cap F = 1$  e non vi è massimo, mentre  $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$  che è anche il minimo.

- Posto  $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$  mostrare  $\sup E + F = \sup E + \sup F$ . Supponiamo quindi che  $\sup E$  e  $\sup F$  siano finiti. Siccome, per definizione,  $\forall e \in E, e \leq \sup E$  e  $\forall f \in F, f \leq \sup F$ , abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di  $\sup$  dicendo che  $\mu$  è pari a  $\sup E$  se:

1.  $\forall x \in E, x \leq \mu$ ;
2.  $\forall \epsilon > 0, \mu - \epsilon$  non è maggiorante.

**Nota:** se  $x < \mu$  allora posto  $\epsilon = \mu - x$  risulta  $x = \mu - \epsilon$ . Allora sia  $\epsilon > 0$ . Diciamo che esistono  $e_1 \in E$  e  $f_1 \in F$  tali che  $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \epsilon$ . Poiché  $\sup E$  è, appunto, il supremum, esiste per definizione una  $e_1 \in E$  tale che  $e_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2}$ . Analogamente, esiste  $f_1 \in F$  tale che  $f_1 > \sup F - \frac{\epsilon}{2}$ . Da cui  $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\epsilon}{2} + \sup F - \frac{\epsilon}{2} = \sup E + \sup F - \epsilon$ .

- Posto  $-E = \{-x \mid x \in E\}$  mostrare che  $\sup -E = -\inf E$  e  $\inf -E = -\sup E$ .

Dimostrare che il  $\max$  esiste se e solo se  $\sup E$  è finito e appartiene a  $E$ . Analogamente per il  $\min$ .

### Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale  $x_n \leq x_{n+1}$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-7}{n^2+1} &\leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1} \\ \frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono  $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$ . Di conseguenza, l'espressione è negativa per  $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$ . Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che  $14^2 < 201 < 15^2$ , e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e  $\frac{27}{2}$ . Allora, tutte le  $n$  intere che soddisfano l'equazione sono  $n = 13$ . Ne consegue che se  $n \geq 14$ ,  $x_n > x_{n+1}$ . Il massimo è quindi  $x_{14}$ .

## 8 Esponenziali

### 8.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni  $p$  intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza  $x^r$  è quindi ben definita con  $r \in \mathbb{Q}^{>0}$ . Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1.  $\forall x > 0, x^0 = 1$ ;
2.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$ ;
3.  $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$ ;

Con  $r > 0$  posso definire  $0^r = 0$  e se  $r = \frac{m}{n}$  (ridotta ai minimi termini) con  $n$  dispari posso definire  $x^{\frac{m}{n}}$  se  $x < 0$ .

### 8.2 Potenze a esponente reale

Se  $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$ . Se  $x > 1$  e  $r < s$ , allora  $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con  $a > 1$  e  $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad  $a < 0$  come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se  $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$



### 8.3 Esponenziali

Fissata una base  $a > 0$  abbiamo poi l'esponenziale che è definita da  $a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Risulta che se  $a = 1$ , allora la funzione è sempre 1. Se  $a > 1$  la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se  $0 < a < 1$ .

La funzione è biettiva tra  $\mathbb{R}$  e  $(0, +\infty)$ , quindi è invertibile. La funzione inversa è  $y = \log_a(x)$ .

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

#### Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g.  $\ln(x(x-1))$  non si può riscrivere come  $\ln(x) + \ln(x-1)$  perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo  $\log_2(x^2)$ , possiamo riscriverlo come  $2 \log_2 |x|$ .

#### Assioma

xx