Esercizi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Esercizi

1.1 Serie a coefficienti positivi

Esempio Serie telescopica

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

manipoliamo la serie come telescopica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}}{4n-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{4n+3} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}, \quad b_n = 4n-1
\end{aligned}$$

Quindi il risultato è dato da

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1}\right] = \frac{1}{12}$$

Esempio Serie geometrica

Considera

$$x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = a_n$$

manipoliamo la serie come geometrica

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2 \cdot 4^{-n}}{9^{-1} \cdot 3^n} \\
&= 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

la serie diventa allora

$$\begin{aligned}
18\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{12}^n &= 18\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}^n\right) - 1 - \frac{1}{12}\right] \\
&= 18\left[\frac{1}{1-\frac{1}{12}} - 1 - \frac{1}{12}\right] \\
&= \frac{3}{22}
\end{aligned}$$

Esempio Termine n-esimo

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16-n^4}{n^2+3}$$

Notiamo che il termine n-esimo non tende a zero, quindi la serie non converge.

Esempio p-q-serie

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

vogliamo confrontarla con una serie nota

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log n)^{-1}}$$

Ignoriamo il $+1$ a denominatore. Questa serie può essere confrontata con una p-q-serie con $p = 1$ e $q = -1$, quindi diverge.

Esempio Test del confronto

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(con il confronto). Chiaramente, $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ e quindi siccome la serie armonica diverge, anche questa diverge.

Esempio Test del confronto asintotico

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n\cos n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4 + n\log n + e^{-n}}$$

Abbiamo il termine

$$a_n = \frac{n^2\left[1 + \frac{\cos n}{n} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}\right]}{n^4\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^4 + \frac{\log n}{n^3} + \frac{e^{-n}}{n^4}\right]} \sim \frac{1}{n^2}$$

con

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}(1+o(1))} \to 1$$

Questo ultimo passaggio è dato dal fato che $\log(1+\varepsilon_n) = \varepsilon(1+o(1))$. Quindi, la serie ha lo steso carattere della p-serie con $p = 2$ che converge.

Esempio Test del rapporto

Considera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

applichiamo il test del rapporto

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(11\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Quindi, siccome $L < 1$, la serie converge.

Esempio Test della radice ennesima

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$$

applichiamo il tst della radice ennesima

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\sqrt{n}}{2}}}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \log n} \to \frac{1}{2}$$

Quindi, siccome $L < 1$, la serie converge.

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n}}{10^{n+2}}$$

La serie è geometrica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n}}{10^{n+2}} &= \frac{1}{100} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{100} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} \right) - 1 - 1 \right] \\
&= \frac{1}{100} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{10}} \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \right) - 1 - 1 \right] \\
&= \frac{37}{400}
\end{aligned}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

Possiamo estrarre l'esponente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} \right)^n$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^2 \log n}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n) + 1}{3^n + n}$$

Siccome $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$, la serie ha lo stesso carattere di

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n + n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n \left(1 + \frac{n}{3^n}\right)} \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

che converge per gerarchia degli infiniti.

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+3n+2)}$$

1.2 Serie a coefficienti qualunque

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Analizziamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge per confronto con p-serie. Quindi, la serie è assolutamente convergente e quindi convergente.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Analizziamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

questa serie non converge, quindi la nostra serie iniziale non converge assolutamente. Tuttavia, possiamo notare che la serie soddisfa il criterio di Leibniz, quindi converge. La serie ha infatti forma $\sum (-1)^n a_n$ dove $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$. Inoltre abbiamo anche la condizione necessaria per la convergenza, ossia che $\lim a_n = 0$.

Esercizio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + n}{3^n + n^2}$$

Analizziamo la convergenza assoluta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2^n + n}{3^n + n^2} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{3^n + n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1 + \frac{n}{2^n})}{3^n (1 + \frac{n^2}{2^n})} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1 + o(1))}{3^n (1 + o(1))} \end{aligned}$$

Il carattere è quindi il medesimo di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

che converge in quanto serie geometrica convergente.

Esercizio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+n}{1+n+n^2}$$

Analizziamo la convergenza assoluta

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2+n}{1+n+n^2} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n+n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Allora la serie non converge assolutamente. Applichiamo il criterio di Leibniz. Notiamo che il termine è definitivamente decrescente

$$\begin{aligned}\frac{2+n}{1+n+n^2} &\geq \frac{3+n}{1+(n+1)+(n+1)^2} = \frac{3+n}{3+3n+n^2} \\ (3+3n+n^2)(2+n) &\geq (3+n)(1+n+n^2) \\ 3+5n+n^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Il limite del termine tende a 0 ed è strettamente positivo. Allora, la serie converge.

1.3 Serie con parametri

Esercizio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

Analizziamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n \cdot 2^n}$$

Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned} \lim_n |a_n| &= \lim_n \left| \frac{x}{2} \right|^n \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_n \frac{q^n}{n} = \begin{cases} 0 & q \leq 1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}, \quad q = \left| \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

Possiamo quindi notare che se $q > 1$, la serie non converge assolutamente. In particolare, il limite del termine non è pari a zero, e quindi la serie non converge. Applichiamo il criterio della radice n-esima,

$$\begin{aligned} \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_n \left(\frac{|x|^n}{n \cdot 2^n} \right)^{1/n} \\ &= \frac{|x|}{2} = q \end{aligned}$$

Allora, se $q < 1$, oppure $|x| < 2$, la serie converge assolutamente, mentre nel caso $q > 1$, oppure $|x| > 2$, la serie non converge. Infine, nel caso singolo $q = 1$, oppure $|x| = 2$, il caso è inane. In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che non converge assolutamente. La serie originale è invece

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n}$$

che non converge, e

$$\sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$$

con $x = -2$, caso in cui converge. In conclusione la serie

$$\begin{cases} \text{converge assolutamente} & -2 < x < 2 \\ \text{non converge} & x < -2 \vee x \geq 2 \\ \text{converge semplicemente} & x = -2 \end{cases}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[2024]{n}}$$

Esercizio
Studia
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n[\log n]^2}$$

Esercizio
Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Esercizio
Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log(e^n+1)}{n}$$

Esercizio
Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(\sqrt{n^4+1}-n\right)^2+\frac{e^n}{n!}}$$

Esercizio
Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{n\cdot\frac{x+1}{x-1}}}{n+\sqrt{n}}$$