Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Assiomi di Peano

Definizione Assiomi di Peano

Gli *assiomi di Peano* incudono i numeri naturali:
- il valore 1 è un numero;
- ogni numero n ha il suo successore $S(n) = n + 1$;
- se $m \neq n$, allora $S(m) \neq S(n)$;
- il numero 1 non è il successore di alcun numero;
- **assioma induttivo:** sia $E \subseteq \mathbb{N}$ tale che $1 \in E$, allora

$$n \in E \implies S(n) \in E$$

  Allora l'insieme E è l'insieme $\mathbb{N}$.

La funzione successore è initettiva.

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma indutivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Principio di induzione

Teorema Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$, allora

$$P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

Teorema Equivalenza principio e assioma di induzione

L'assioma induttivo è equivalente al principio di induzione.

Proof Equivalenza assioma e principio di induzione

Given a proposition $P(n)$, let

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

($\implies$) If $0 \in E$, then $P(0)$ is true.
If $n \in E \implies S(n) \in E$, then $P(n) \implies P(S(n))$.
If the latter conditions are satisfied, then by the axiom of induction, $E = \mathbb{N}$, and thus

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

($\impliedby$) If $P(0)$ is true, then $0 \in E$.
If $P(n) \implies P(S(n))$, then if $n \in E \implies S(n) \in E$.
If the latter conditions are satisfied, then by the principle of induction

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in E$$

and thus $E = \mathbb{N}$.

Proposition Principio di induzione forte

Il principio di induzione è equivalente alla seguente forma: sia $P(n)$ una proposizione dove $n \in \mathbb{N}$ tale che

- $P(1)$ è vera;
- $P(k)$ è vera per tutte le $k \leq n$, allora $P(n+1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per tutte le n.

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

- Il caso base è dato da $n = 1$ dove $1 = \frac{2}{2} = 1$.
- Il caso induttivo è dato dato da $\xi = n + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} + \xi &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{\xi(\xi+1)}{2}
\end{aligned}$$

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

e impostiamo $j = n - k + 1$, abbiamo che la sommatoria è pari a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1}$$

Esempio Principio di induzione

Dimostrare che

$$\sum_{k+1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$$

Esempio Principio di induzione

Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $h > -1$,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

3 Combinatorica

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni fa F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

$$n! = |\{f \colon F_n \to F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1, che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n, aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n+1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n+1) = (n+1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazione di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f \colon F_k \to F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbimao che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X.

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

4 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F, abbiamo $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f : x \to y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y.

La funzione $\Xi : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X$ è biettiva. La funzione $f : X \to \{0, 1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

5 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

6 Interi relativi

In $\mathbb{N}$ è definita la funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dove $(m,n) \to m+n$.

Abbiamo chiaramente che $(a,b) = (a',b') \iff a = a' \land b = b'$.

Le prorpietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo $\mathbb{Z}$ come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{=1} n' = -n \,|\, n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \,|\, n + (-n) = 0$$

Definizione Gruppo

Un insieme G con un operazione binaria $\circ$ tale che

- **associativa:** $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- **elemento neutro:** $\forall a \in A, \exists 0 \in G \,|\, 0 \circ a = a \circ 0 = a$
- **elemento opposto:** $\forall a \in G, \exists a' \,|\, a + a' = a' \circ a = 0$

Se aggiungiamo la commutatività viene detto *gruppo abeliano*.

Per esempio $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano.

La struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \circ)$ dove $(a,b) \to a \cdot b$ non è un gruppo abeliano, in quanto non c'è un inverso n^{-1} (c'è solamente per 1 e -1). La divisione si può fare solo se uno è un multiplo dell'altro.

TODO: definizione di anello

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \to \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e $\cdot$ con le prorpietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in $\mathbb{Q}$ si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di $\mathbb{Q}$ ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento che è compatibile ocn le operazioni $+$ e $\cdot$, cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in $\mathbb{Q}$ sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciô ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n, contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

7 Definizioni con ordini

Definizione Insieme totalmente ordinato

Un *insieme ordinato* è una tupla $(X, \leq)$ dove X è un insieme e $\leq$ è un ordinamento totale.

Sia anche $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato.*

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.
Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato.*

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.
Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

7.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E. Vi sono diversi minoranti di E, come -1, -30 etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E. I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quando se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n, è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1-z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 1$. Qualcunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1-z}$$

7.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo del maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande del minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in $\mathbb{Q}$ sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq 0 \land r^2 \leq 2 \right\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

  $$\mu + \frac{1}{n}$$

  che sono chiaramente più grandi di μ. Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

  $$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

  è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

  $$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

  Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che inf, sup, min, max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E, allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In $\mathbb{Q}$ (e poi in $\mathbb{R}$), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiornate cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

Definizione Numeri reali

Definiamo $\mathbb{R}$ come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

Teorema Teorema di unicità

Siano F_1 e F_2 due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione $\phi\colon F_1 \to F_2$ tale che è un isomorfismo del gruppo additivo $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$ per ogni $x, y \in F_1$ e $\phi(-x) = -\phi(x)$ per ogni $x \in F_1$. Se aggiungiamo anche che $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$ per tutte le $x, y \in F_1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali $\mathbb{Q}$. Chiaramente, diversi campi generano $\mathbb{Q}$ diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire $\phi_0\colon \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \to \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$. Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato $x \in F_1$, abbiamo $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$. Allora $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$. Così viene esteso ϕ a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{\text{ numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \cdots\} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Con la prescrizione che $n, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \overline{9} = n, a_1, \cdots, a_{k-1}, (a_k + 1)$.

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

Definizione di somma e prodotto: Prendiamo $x = n, a_1, \cdots, a_k \cdots$ e $y = m, b_1, \cdots, b_k \cdots$ che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di $\mathbb{R}$ soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdot$$

Per ogni $x \in E$ scriveremo $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \cdots$. E è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in $\mathbb{Z}$ limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x \colon x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$ Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$. Con lo stesso metodo troviamo $a_3, a_4, \cdots$, ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \cdots$$

Dico che μ è un maggiorante di E, e che se $z < \mu$, z non è maggiorante. Sia allora $\overline{x} \in E$, quindi

$$\overline{x} = n_{\overline{x}}, a(\overline{x})_1, a(\overline{x})_2, \cdots$$

Allora $n_{\overline{x}} \leq N$ se $n_{\overline{x}} < N$. $\overline{x} < \mu$. Gli elementi in E_0 sono al massimo a_1. Se $n_{\overline{x}} = N$ e $n_{\overline{x}} \in E_0$ e $a_1(\overline{x}) = a_1$.
Se $a(\overline{x})_1 < a_1 \implies \overline{x} < \mu$.
Se invece $a(\overline{x})_1 = a_1 \implies \overline{x} \in E_1$ e $a(\overline{x})_2 \leq a_2$
Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se $\exists k$ tale che $a(\overline{x})_k < a_k \implies \overline{x} < \mu$. Se $\forall k, a(\overline{x})_k = a_k$, allora $\overline{x} = \mu$ e μ è il max di E. Questo procedimento non dimostra che $\mu \in E$.

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \cdots < \mu$$

Deve quindi succedere che o $n_z < N$, e allora $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$, oppure $n_z = N$ e $a(z)_j = a_j$ per tutte le $j < k$ ma $a(z)_k < a_k$. Allora $\mu \sup E$.

7.3 Conseguenze della prorpietà del sup

Le conseguenze della prorpietà del sup sono:

- **proprietà archimedea:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$ (in realtà vale anche in $\mathbb{Q}$).
- **densità dei razionali nel reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E. Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \to t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande
$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$
e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E, contro l'ipotesi impossibile perché x, che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande
$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$
allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x, e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere nè più grande nè più piccolo, $x^n = y$.
- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

7.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \,|\, x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E, F, $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto
$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$
È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere
$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$
Il temrine $n + 2$ cresce con n, quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approcciando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F. Allora siccome ci avviciamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$.

Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il max non esiste in quando $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anchde il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \;\middle|\; \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.
- Posto $E + F = \{x + y \,|\, x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:
  1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
  2. $\forall \epsilon > 0, \mu - \epsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\epsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \epsilon$. Allora sia $\epsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \epsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > e_1 > \sup E . \frac{\epsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\epsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_2 > \sup E - \frac{\epsilon}{2} + \sup F - \frac{\epsilon}{2} = \sup E + \sup F - \epsilon$.
- Posto $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E. Analogamente per il min.

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{x^2+1} \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicurament eun minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore.
Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\frac{n-7}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1}$$

$$\frac{(n-7)(n^2+2n+2)-(n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \leq 0$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il maggiornate e supremum è quindi x_{14}.

8 Esponenziali

8.1 Potenze ad esponente reale e esponziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = \left(x^{-}1\right)^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \left(x^r\right)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

8.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = \left(\sqrt[p]{x}\right)^m < \left(\sqrt[p]{x}\right)^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

E infinie se $0 < x < 1$

$$x^a = \left(x^{-1}\right)^{-a}$$

8.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x, $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è stretta crescente, e strettamente descrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g $\ln(x(x-1))$ non is può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2\log_2|x|$.

8.4 Assioma di continuità

$$\bigcup_{n \neq 2} \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1)$$

Assioma Assioma di continuità

Se $\{I_n\}$ è una successione di intervalli chiusi della forma $I_n = [a_n; b_n]$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ e

$$l(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} l(I_n)$$

e quindi

$$l(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}} l(I_i)$$

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

Questo assioma non vale nei razionali. Un altro teorema dice che questo assioma è equivalente alla proprietà del sup.