

Fisica I

Paolo Bettelini

Contents

1	Introduzione	1
2	Vettori spostamento	1
3	Sistemi di coordinate	1
4	Cinematica	3
5	Leggi orarie	3
6	Moto arbitrario	4
7	Relatività	5

1 Introduzione

2 Vettori spostamento

- vettore spostamento: direzione, verso, lunghezza;
- somma di vettori;
- moltiplicazione con scalare reale $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- modulo di un vettore;

Proposition Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma vettoriale

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

3 Sistemi di coordinate

Il punto di origine è il posto in cui viene posizionato l'osservatore. I sistemi di coordinate trattati sono esclusivamente cartesiani e con basi ortogonali. L'osservatore ha i versori delle direzioni.

Si possono quindi individuare le componenti di un vettore lungo le sue direzioni, ossia le proiezioni ortogonali dei vettori lungo gli assi cartesiani. Di conseguenza, le coordinate di un vettore hanno senso solamente rispetto ad una base.

Definizione Prodotto scalare

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un numero reale (in uno spazio euclideo \mathbb{R}^n)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra \vec{a} e \vec{b} ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Chiaramente il prodotto scalare è commutativo.

Proposition Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Proposition Prodotto vettoriale con componenti

TODO....

Da qui possiamo notare che il prodotto scalare ha lo stesso risultato per ogni base ortonormata.

Definizione Prodotto vettoriale

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un vettore (in uno spazio euclideo \mathbb{R}^n)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo θ fra \vec{a} e \vec{b} , il risultato è un vettore con modulo

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a||b| \sin \theta$$

e direzione normale al piano formato da \vec{a} e \vec{b} . Convenzionalmente, il verso del vettore normale è scelto secondo la regola della mano destra.

Proposition Proprietà del prodotto vettoriale

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$;
2. $(\gamma \vec{a}) \wedge \vec{b} = \gamma(\vec{a} \wedge \vec{b})$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

Consideriamo \vec{a} e \vec{b} , allora

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

Sapendo che

$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$$

Possiamo eseguire il prodotto esplicitamente

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x b_y \hat{z} + a_x b_z (-\hat{y}) + a_y b_x (-\hat{z}) + a_y b_z \hat{x} + a_z b_x \hat{y} + a_z b_y (-\hat{x}) \\ &= [a_y b_z - a_z b_y] \hat{x} + [a_z b_x - a_x b_z] \hat{y} + [a_x b_y - a_y b_x] \hat{z} \end{aligned}$$

4 Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che descrive il moto di un punto materiale. Per descrivere il moto di un oggetto è necessario procurarsi un sistema di riferimento. Scegliamo quindi un'origine e una base ortonormata.

Definizione Posizione

La *posizione* di un punto è rappresentata unicamente da un vettore $\vec{r}(t)$, che mostra lo spostamento fra l'origine e la sua posizione $P(t)$ in un determinato istante di tempo.

Se vogliamo considerare la posizione solo nella direzione x possiamo calcolare

$$\hat{x}(t) = \vec{x}\vec{r}(t)$$

In generale

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\vec{r}(t) + \hat{y}\vec{r}(t) + \hat{z}\vec{r}(t)$$

La relazione fra due osservatori diversi è data da $\vec{R} + \vec{r}'(t) = \vec{r}(t)$.

La velocità è quindi relativa a due posizioni $P(t)$ e $P(t + \Delta t)$. Lo spostamento è $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{s}(t)$.

Definizione Velocità

La *velocità* di un punto rappresenta lo spostamento che il punto materiale percorre in un unità di tempo $\vec{v}(t)$. Allora la velocità è definita come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Il vettore della velocità si orienta verso la tangente della curva (cioè nella direzione in cui si sta spostando). Chiaramente la derivata può essere separata nelle componenti

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

dove possiamo anche dire che

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Definizione Accelerazione

L'*accelerazione* di un punto rappresenta il cambiamento istantaneo della velocità

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

5 Leggi orarie

Proposition Caduta da una altezza

Il tempo di caduta di un oggetto da un'altezza h , soggetto a gravità costante g è dato da

$$t_{\text{caduta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con velocità

$$-\sqrt{2gh}$$

6 Moto arbitrario

Consideriamo un moto arbitrario $\vec{r}(t)$. Questo vettore punta sempre alla posizione dell'oggetto. La sua velocità $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ è un vettore sempre nella direzione della traiettoria. Definiamo allora il versore tangente

$$\hat{T}(t)v(t) = \vec{v}(t)$$

Abbiamo allora che

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left(v(t)\hat{T}(t) \right) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = a_t(t)\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt}$$

La prima componente, $\frac{dv(t)}{dt}\hat{T}$, è chiamata *accelerazione tangenziale* mentre il secondo *accelerazione centripeta* (entrambi sono perpendicolari fra di loro).

Per studiare il significato di tale termine, cominciamo partendo dall'identità $\hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t) = 1$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t) \right) &= 0 \\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \cdot \hat{T}(t) + \hat{T}(t) \cdot \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0 \\ \hat{T}(t) \cdot \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dall'analisi differenziale troviamo che

$$\left| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dl}{\Delta t}$$

e l'arco di circonferenza

$$s = R d\theta$$

dove R è la lunghezza della retta fino al punto di rotazione (raggio di curvatura, ossia il raggio del cerchio osculatore). Mettendo assieme queste due informazioni troviamo che

$$\left| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{S}{\Delta t} \frac{1}{R} \right] = \frac{v}{R}$$

Adesso possiamo scrivere

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

e quindi $\frac{dv}{dt}$ è la componente tangenziale e $\frac{v^2}{R}$ quella centripeta. Notiamo che l'accelerazione centripeta è più piccola più il cerchio è grande, quindi nulla quando andiamo dritti.

Nel caso specifico del moto circolare,

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} = \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

con $\omega = \frac{v}{R}$.

7 Relatività