

Analisi I

Paolo Bettelini

Contents

1	Sottoinsiemi finali	3
2	Combinatoria	3
2.1	Funzione indicatrice	4
2.2	Altre proprietà	4
3	Interi relativi	5
4	Definizioni con ordini	7
4.1	Considerazioni	7
4.2	Estremi superiori e inferiori	8
4.3	Conseguenze della proprietà del sup	10
4.4	Esercizi sup	11
5	Esponenziali	14
5.1	Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi	14
5.2	Potenze a esponente reale	14
5.3	Esponenziali	15
6	Numeri complessi	16
6.1	Inclusione dei reali	16
6.2	Operazioni algebriche	16
6.3	Passaggio polari e cartesiane	17
6.4	De Moivre	17
7	Distanza fra due insiemi	17
8	Teorema di Ruffini	18
9	Spazi metrici	19
10	Spazi topologici	19
11	Successioni	20
11.1	Aritmetica dei limiti	22
11.2	Limiti notevoli	25
11.3	Limiti notevoli con funzioni trigonometriche	30
11.4	Proprietà asintotico	31
11.5	Esercizi	32
12	Serie numeriche	33
12.1	Aritmetica delle serie	33
12.2	Formula di Stirling	38
12.3	Serie a termini di segno qualunque	40
12.4	Serie con parametri	47

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann	51
13 Successioni, sottosuccessioni e topologia	53

1 Sottoinsiemi finali

Definizione Sottoinsieme finale

Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ si dice *finale* se $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$.

Esiste quindi un valore $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$$

Proposition

Usando l'assioma induttivo si deduce che se A è un insieme tale che $n_0 \in A$ e $\forall n \in A, S(n) \in A$, allora A è finale.

2 Combinatoria

Il valore $n!$ è pari alla cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni da F_n a F_n che sono biettive. Dove $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$n! = |\{f: F_n \rightarrow F_n\}|$$

Proof Cardinalità di queste funzioni

- Il caso base è F_1 , che contiene solo 1 elemento e $1! = 1$.
- Caso induttivo: notiamo che dato l'insieme F_n , aggiungendo un oggetto quest'ultimo possiamo posizionarlo in $n + 1$ posizioni. Di conseguenza, il nuovo numero di permutazioni è $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

La funzione $\sigma(n)$ è una funzione di permutazione (funzione biettiva che permuta n elementi). Infatti, le permutazioni di n sono $n!$, ossia la cardinalità, cioè tutte le funzioni biettive possibili per permutare gli oggetti.

Definizione Disposizioni

Le *disposizioni* di k oggetti scelti fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero delle funzioni iniettive $f: F_k \rightarrow F_n$.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione Combinazioni

Le *combinazioni* di k oggetti scelto fra n oggetti, dove $1 \leq k \leq n$, sono il numero di sottoinsiemi di F_n di cardinalità k .

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo che

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$$

Lemma Proprietà dei coefficienti binomiali

Per ogni $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema Leggi di De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

con il complementare rispetto a qualche insieme X .

Proof Leggi di De Morgan

$x \in (A \cap B)^c$ è equivalente a $x \notin A \cap B$, che è equivalente a $x \notin A$ o $x \notin B$. Allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, e quindi $x \in A^c \cup B^c$.

Teorema Teorema del binomio

Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.1 Funzione indicatrice

Definizione Funzione indicatrice

Sia X un insieme e $E \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di E è data da

$$1_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dati due insiemi E e F , abbiamo $E \neq F \implies 1_E \neq 1_F$.

La notazione y^x indica $\{f: x \rightarrow y\}$, cioè tutte le funzioni da x a y .

La funzione $\Xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ è biettiva. La funzione $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ è pari a $f = 1_E$ per $E = \{x \mid f(x) = 1\}$. Una funzione che ti dice 1 se l'elemento sta nel sottoinsieme, 0 altrimenti. Quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^n$$

2.2 Altre proprietà

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0$$

Questa è la somma dei sottoinsiemi con un numero pari di elementi meno quelli con un numero dispari.

3 Interi relativi

In \mathbb{N} è definita la funzione $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dove $(m, n) \rightarrow m + n$.

Abbiamo chiaramente che $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Le proprietà sono:

- è associativa;
- è distributiva;
- esiste un elemento neutro 0 tale che $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

Tuttavia, $m - n$ è definito solo per $m \geq n$.

Definiamo \mathbb{Z} come l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Abbiamo allora $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists_{-1} n' = -n \mid n + (-n) = 0$, e quindi

$$n - m \triangleq n + (-m)$$

Abbiamo quindi la somma $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ che gode di tutte le proprietà precedenti ma in più

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \mid n + (-n) = 0$$

Per definire gli inversi di tutti i numeri $\neq 0$, si introducono le frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Si dice che due frazioni sono equivalenti $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m}{n}$ se $mn' = m'n$. I numeri razionali sono descritti dalle frazioni quando si identificano con frazioni equivalenti (classe di equivalenza), e le operazioni vengono fatte sulle frazioni. La classe di equivalenza è quindi data relazione $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

Abbiamo che

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \frac{mq + pn}{nq}$$

Risulta che i razionali \mathbb{Q} con le operazioni $+$ e \cdot introdotte. Quindi $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano, (\mathbb{Q}^*, \cdot) è anch'esso un gruppo abeliano (da notare l'assenza dello 0).

Vale la proprietà distributiva di prodotto rispetto alla somma

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, per cui possiede le operazioni $+$ e \cdot con le proprietà alle quali siamo abituati.

In particolare, in \mathbb{Q} si possono risolvere le equazioni di primo grado.

$$ax + b = 0$$

con $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= -b \\ ax &= -b \\ a^{-1}(ax) &= -a^{-1}b \\ a^{-1}ax &= -a^{-1}b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il campo di \mathbb{Q} ha un ordinamento totale dove $r \leq s$ se e solo se $r - s$ è non-negativa.

In \mathbb{Q} è definito un ordinamento che è compatibile con le operazioni $+$ e \cdot , cioè soddisfa le condizioni

$$r \leq s \implies t + r \leq t + s$$

con $t \in \mathbb{Q}$ e con $t \geq 0$ abbiamo $tr \leq ts$.

Definizione Campo ordinato

Un campo F nel quale è definito un ordinamento per il quale valgono le proprietà appena date, viene detto *ordinato*.

Non tutte le equazioni in \mathbb{Q} sono risolvibili.

Teorema Radice di due

L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in \mathbb{Q} .

Proof Radice di due

Supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini $r = \frac{m}{n}$, tale che $r^2 = 2$. Abbiamo quindi che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, quindi $m^2 = 2n^2$. Ciò ci dice che m^2 è pari. Allora, 2 è un fattore anche di m (siccome la fattorizzazione è unica e non cambia), quindi m è pari. Di conseguenza, se m è divisibile per 2, allora m^2 è divisibile per 4. Abbiamo quindi $4k = n^2$ e quindi n^2 è divisibile per 2, anche n , contro l'ipotesi del fatto che i due numeri fossero coprimi.

4 Definizioni con ordini

Sia $E \subseteq X$ un insieme dove $E \neq \emptyset$.

Si dice che $m \in X$ è *maggiorante* di E se $\forall x \in E, x \leq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *superiormente limitato*.

Si dice che $m \in X$ è *minorante* di E se $\forall x \in E, x \geq m$.

Se un tale valore esiste, E si dice *inferiormente limitato*.

L'insieme E si dice *limitato* se è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un valore $m \in X$ si dice *massimo* di E se M è un maggiorante di E e $m \in E$.

Un valore $m \in X$ si dice *minimo* di E se M è un minorante di E e $m \in E$.

4.1 Considerazioni

Nel caso in cui l'insieme E sia finito, vi è un massimo ed un minimo. Tuttavia, in caso contrario, valori massimi e minimi non esistono necessariamente.

Consideriamo per esempio $X = \mathbb{Q}$ ed

$$E = \left\{ r_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Possiamo notare che il valore 0 è il minimo di E . Vi sono diversi minoranti di E , come -1 , -30 etc. In generale, tutti i $x \leq 0$ sono dei minoranti di E . I maggioranti di E sono tutti i valori $x \geq 1$.

Tuttavia, non vi è un massimo. Per dimostrarlo prendiamo $r_n \in E$. È facile vedere che r_n non può essere maggiorante in quanto se $n' > n$, $r_{n'} > r_n$. Dato qualsiasi r_n , è possibile trovare un altro elemento in E che è maggiore, e per cui non esistono maggioranti.

Notiamo che il numero 1, che è il maggiorante, è infatti il più piccolo dei maggioranti: supponiamo che $z < 1$, verifichiamo quindi che z non è un maggiorante. Il valore z non è maggiorante di E se esiste una $x \in E$ tale che $x > z$. Esiste infatti n tale che $r_n > z$, studiamo quindi la disequazione

$$r_n - z = 1 - \frac{1}{n} - z = (1 - z) - \frac{1}{n} > 0$$

purché $1 - z > 1/n$. Qualunque numero più piccolo di z sia dato, si possono fare altri valori maggiori, dati quindi da

$$n > \frac{1}{1 - z}$$

4.2 Estremi superiori e inferiori

Definizione Estremo superiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo superiore* di E se μ è un maggiorante di E e μ è il più piccolo dei maggioranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \sup E$$

Definizione Estremo inferiore

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non-vuoto, diciamo che μ è l'*estremo inferiore* di E se μ è un minorante di E e μ è il più grande dei minoranti. Scriviamo quindi

$$\mu = \inf E$$

I valori di minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, sono unici se esistono. Ci sono sottoinsiemi di \mathbb{Q} che non hanno estremi superiori (e quindi ci sono tante funzioni senza limiti, derivate e integrali. L'analisi in \mathbb{Q} sarebbe quindi un disastro per questo motivo).

Teorema

Sia

$$E = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$$

allora, E è non-vuoto, limitato superiormente, ma non esiste il suo estremo superiore.

Proof

- Per dimostrare che $E \neq \emptyset$ possiamo semplicemente darne un elemento, come per esempio 1.
- L'insieme E è banalmente limitato superiormente da tutti i valori $x \geq 2$.
- Supponiamo per assurdo che esista un $\mu = \sup E$. Notiamo che ovviamente $\mu > 0$. Possiamo notare che $\mu^2 = 2$ è impossibile per il teorema di Euclide. Allora, μ potrebbe essere minore di 2 oppure maggiore di 2. Supponiamo che $\mu^2 < 2$, allora dimostro che $\exists x \in E$ tale che $x > \mu$ e quindi che μ non è maggiorante. Consideriamo quindi i numeri razionali della forma

$$\mu + \frac{1}{n}$$

che sono chiaramente più grandi di μ . Possiamo quindi scegliere n sufficientemente grande tale che $(\mu + \frac{1}{n})^2 < 2$, e quindi $\mu + \frac{1}{n} \in E$ in quanto

$$\begin{aligned} 2 - \left(\mu + \frac{1}{n}\right)^2 &= 2 - \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= (2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

è chiaramente più grande di $(2 - \mu^2) - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n}$. Ciò è dato dal fatto che $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{2\mu + 1}{n} < 2 - \mu^2, \quad n > \frac{2 - \mu^2}{2\mu + 1}$$

Analogamente, si dimostra che μ^2 non può essere nemmeno maggiore di 2, e quindi μ non esiste.

È facile verificare che \inf, \sup, \min, \max se esistono sono unici. Se esiste il massimo di E , allora esiste il $\sup E$ e coincidono. Infatti, il massimo esiste se esiste $\sup E$ e $\sup E \in E$.

In \mathbb{Q} (e poi in \mathbb{R}), se E non è limitato superiormente (cioè non ha maggiorante cioè $\forall M \in \mathbb{Q}, \exists e \in E$ tale che $e > M$) si dice che

$$\sup E = +\infty$$

Analogamente se E non è limitato inferiormente si dice che

$$\inf E = -\infty$$

Possiamo quindi notare che

$$\sup \emptyset = -\infty$$

e

$$\inf \emptyset = +\infty$$

Definizione Numeri reali

Definiamo \mathbb{R} come un campo totalmente ordinato nel quale vale la seguente proprietà del sup:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset \wedge E \text{ limitato sup. esiste}$$

Bisogna tuttavia dimostrare l'unicità di questa costruzione e la sua esistenza.

Teorema Teorema di unicità

Siano F_1 e F_2 due campi ordinati nei quali vale la proprietà del sup di prima. Allora, esiste una biezione $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ tale che è un isomorfismo del gruppo additivo $\phi(x +_{F_1} y) = \phi(x) +_{F_2} \phi(y)$ per ogni $x, y \in F_1$ e $\phi(-x) = -\phi(x)$ per ogni $x \in F_1$. Se aggiungiamo anche che $\phi(x \cdot_{F_1} y) = \phi(x) \cdot_{F_2} \phi(y)$ per tutte le $x, y \in F_1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ abbiamo un isomorfismo di campo. Se aggiungiamo anche che $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$, abbiamo quindi un isomorfismo di campo ordinato.

Date le proprietà di un campo, ogni campo genera un insieme dei razionali \mathbb{Q} . Chiaramente, diversi campi generano \mathbb{Q} diversi ma con gli stessi elementi in un certo senso. Possiamo mappare un insieme dei razionali di un campo a quello di un altro.

È facile definire $\phi_0: \mathbb{Q}_1 \subseteq F_1 \rightarrow \mathbb{Q}_2 \subseteq F_2$. Usando la proprietà del sup possiamo eseguire tale mappatura. Dato $x \in F_1$, abbiamo $x = \sup\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid r \leq x\} = \sup E_x$. Allora $\phi(x) = \sup\{\phi_0(r) \mid r \in E_x\}$. Così viene esteso ϕ a tutto. Bisognerebbe tuttavia dimostrare che le proprietà classiche vengano preservate.

Per dimostrare l'esistenza è necessario considerare

$$\mathbb{R} = \{ \text{numeri decimali } n, a_1, a_2, a_3, \dots \} \text{ finiti o infiniti periodici o meno}$$

dove $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Con la prescrizione che $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \bar{9} = n, a_1, \dots, a_{k-1}, (a_k + 1)$.

I numeri reali possono essere anche definiti mediante le sezioni di Dedekind. Alternativamente si possono definire mediante le successioni di Cauchy.

Definizione di somma e prodotto: Prendiamo $x = n, a_1, \dots, a_k \dots$ e $y = m, b_1, \dots, b_k \dots$ che sono due numeri decimali, nessuno dei quali con period 9, allora

$$x = y \iff n = m \wedge a_k = b_k$$

e

$$x < y \iff n < m \vee (n = m \wedge a_i = b_i, i < k \wedge a_k < b_k)$$

Le operazioni sono definite mediante troncamenti. Verifichiamo che questo modello di \mathbb{R} soddisfi la proprietà del sup.

Prendiamo quindi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sup limitato. Costruiamo il sup mediante un algoritmo.

$$\sup E = \mu = n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Per ogni $x \in E$ scriveremo $n_x, a(x)_1, a(x)_2, \dots$. E è non-vuoto e limitato sup, per cui

$$\{n_x \mid x \in E\}$$

è un insieme di numeri in \mathbb{Z} limitato superiormente. Sia

$$N = \max\{n_x : x \in E\}$$

Prendiamo ora tutti gli insiemi

$$E_0 = \{x \in E \mid n_x = N\} \neq \emptyset$$

Poniamo $a_1 = \max\{a(x)_1 \mid x \in E_0\}$ Abbiamo quindi

$$E_1 = \{x \in E_0 \mid a(x)_1 = a_1\} \neq \emptyset$$

Poniamo ora $a_2 = \max\{a(x)_2 \mid x \in E_1\}$. Con lo stesso metodo troviamo a_3, a_4, \dots , ossia

$$a_k = \max\{a(x)_k \mid x \in E_{k-1}\} \quad a_{k+1} = \max\{a(x)_{k+1} \mid x \in E_k\}$$

Trovando quindi

$$\mu = N, a_1, a_2, \dots$$

Dico che μ è un maggiorante di E , e che se $z < \mu$, z non è maggiorante. Sia allora $\bar{x} \in E$, quindi

$$\bar{x} = n_{\bar{x}}, a(\bar{x})_1, a(\bar{x})_2, \dots$$

Allora $n_{\bar{x}} \leq N$ se $n_{\bar{x}} < N$. $\bar{x} < \mu$. Gli elementi in E_0 sono al massimo a_1 . Se $n_{\bar{x}} = N$ e $n_{\bar{x}} \in E_0$ e $a_1(\bar{x}) = a_1$.

Se $a(\bar{x})_1 < a_1 \implies \bar{x} < \mu$.

Se invece $a(\bar{x})_1 = a_1 \implies \bar{x} \in E_1$ e $a(\bar{x})_2 \leq a_2$

Fino che ad un certo punto non trovo un decimale diverso.

Iterando, se $\exists k$ tale che $a(\bar{x})_k < a_k \implies \bar{x} < \mu$. Se $\forall k, a(\bar{x})_k = a_k$, allora $\bar{x} = \mu$ e μ è il max di E . Questo procedimento non dimostra che $\mu \in E$.

Mostriamo ora che è il più piccolo dei maggioranti. Sia

$$z = n_z, a(z)_1, a(z)_2, \dots < \mu$$

Deve quindi succedere che o $n_z < N$, e allora $\forall x \in E_0 \neq \emptyset, z < x$, oppure $n_z = N$ e $a(z)_j = a_j$ per tutte le $j < k$ ma $a(z)_k < a_k$. Allora $\mu = \sup E$.

4.3 Conseguenze della proprietà del sup

Le conseguenze della proprietà del sup sono:

- **proprietà archimedeica:** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid na > x$ (in realtà vale anche in \mathbb{Q}).
- **densità dei razionali nei reali:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dove $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q} \mid x < r < y$.

Teorema Esistenza delle radici nei reali

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists_{=1} x > 0 \mid x^n = y$$

Proof

Sia

$$E = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \wedge z^n \leq y\}$$

Dobbiamo quindi mostrare che E non è vuoto, ed è limitato superiormente. Definiamo $x = \sup E$ e mostriamo che $x^n = y$.

- **Non vuoto:** se $y \geq 1$, basta scegliere $x = 1$ in quanto $x^n = 1 \leq y$. Altrimenti, se $y < 1$, poniamo $x = y$ e notiamo che, perché $y < 1$, allora $y^n < y$, e quindi $y \in E$.
- **Limitato superiormente:** E è limitato superiormente, infatti $1 + y$ è un maggiorante di E . Se $z \geq (1 + y)$, poiché la funzione $t \rightarrow t^2$ è crescente per $t > 0$, si ha $z^n \geq (1 + y)^n > (1 + y) > y \implies z \notin E$. Sia $x = \sup E$. Dico che $x^n = y$. Dimostro che se suppongo $x^n > y$ allora per k grande

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^n > y$$

e quindi $x - \frac{1}{k}$ è ancora un maggiorante di E , contro l'ipotesi impossibile perché x , che è il $\sup E$, è il più piccolo maggiorante. Invece, se $x^n < y$ allora per k grande

$$\left(x + \frac{1}{k}\right)^n < y$$

allora $x + \frac{1}{k} \in E$ ed è più grande di x , e x non è quindi un maggiorante (assurdo). Visto che x non può essere né più grande né più piccolo, $x^n = y$.

- **Unicità:** notiamo che se $0 < t_1 < t_2 \implies t_1^n < t_2^n$.

Possiamo anche mettere $z \geq 0$ così dimostrare che $E \neq \emptyset$ è più facile.

Esercizio: dimostrazione per induzione che $0 < y < 1 \implies y^n < y$, per $n > 1$. (Che abbiamo usato nell'ultima dimostrazione).

4.4 Esercizi sup

Esercizio

Let

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\right\}$$

and the sequence

$$F = \{x = x_n \mid x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Trova inf, sup, min, max (se esistono) di E , F , $E \cup F$ e $E \cap F$.

- E è limitato superiormente e inferiormente. Il minimo è $\frac{1}{2}$, mentre 5 è un maggiorante, è il più piccolo dei maggioranti quindi $\sup E = 5$, ma non vi è un massimo.
- F è limitato superiormente in quanto

$$x_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$$

È limitato inferiormente perché $x_n > 0$. Per verificare sup e inf, è comodo riscrivere

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Il termine $n+2$ cresce con n , quindi $\frac{1}{n+2}$ decresce al crescere di n e quindi x_n cresce approssimando 1. Allora con $n = 1$ il termine assume il valore più piccolo, ossia $\frac{2}{3}$, quindi il minimo di F . Allora siccome ci avviciniamo arbitrariamente a 1, è lecito ipotizzare $\sup F = 1$.

Il massimo di F non esiste. Rimane da far vedere che se $z < 1$ allora z non è maggiorante di F cioè

$$x_n - z = (1 - z) - \frac{1}{n+2} > 0$$

purché $\frac{1}{n+2} < 1 - z$ cioè $n > \frac{1}{1-z} - 2$. Quindi z non è maggiorante e $\sup E = 1$.

- Verificare che $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$. Abbiamo che $\sup E \leq \sup F$. In \sup è il massimo dei due in quanto uno è maggiore dell'altro, e fa parte dell'insieme, quindi $\sup E \cup F = 5$. Tuttavia, il \max non esiste in quanto $5 \notin E \cup F$. Analogamente, $\inf E \cup F = \frac{1}{2}$. Questo valore è anche il minimo in quanto fa parte dell'insieme.
- Mostrare con un esempio che non c'è qualcosa di analogo per l'intersezione.

$$E \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 5 \right\}$$

Quindi $F \subseteq E$. Consideriamo allora $E_1 = [\frac{4}{5}, 5)$

$$E_1 \cap F = \left\{ x_n = \frac{x+1}{x+2} \mid \frac{4}{5} \leq x_n \leq 5 \right\}$$

Per quali n vale che $\frac{4}{5} \leq \frac{x+1}{x+2} = x_n$? Abbiamo $4(n+2) \leq 5(n+1)$ e quindi $n \geq 3$. Allora $\sup E_1 \cap F = 1$ e non vi è massimo, mentre $\inf E_1 \cap F = \frac{4}{5}$ che è anche il minimo.

- Posto $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$ mostrare $\sup E + F = \sup E + \sup F$. Supponiamo quindi che $\sup E$ e $\sup F$ siano finiti. Siccome, per definizione, $\forall e \in E, e \leq \sup E$ e $\forall f \in F, f \leq \sup F$, abbiamo che

$$\forall e \in E, \forall f \in F, e + f \leq \sup E + \sup F$$

Per mostrare che questo è il più piccolo dei maggioranti, è comodo riscrivere la definizione di \sup dicendo che μ è pari a $\sup E$ se:

1. $\forall x \in E, x \leq \mu$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \mu - \varepsilon$ non è maggiorante.

Nota: se $x < \mu$ allora posto $\varepsilon = \mu - x$ risulta $x = \mu - \varepsilon$. Allora sia $\varepsilon > 0$. Diciamo che esistono $e_1 \in E$ e $f_1 \in F$ tali che $e_1 + f_1 > \sup E + \sup F - \varepsilon$. Poiché $\sup E$ è, appunto, il supremum, esiste per definizione una $e_1 \in E$ tale che $e_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, esiste $f_1 \in F$ tale che $f_1 > \sup F - \frac{\varepsilon}{2}$. Da cui $e_1 + f_1 > \sup E - \frac{\varepsilon}{2} + \sup F - \frac{\varepsilon}{2} = \sup E + \sup F - \varepsilon$.

- Posto $-E = \{-x \mid x \in E\}$ mostrare che $\sup -E = -\inf E$ e $\inf -E = -\sup E$.

Dimostrare che il \max esiste se e solo se $\sup E$ è finito e appartiene a E . Analogamente per il \min .

Esercizio

Trovare sup, inf, min, max dell'insieme

$$E = \left\{ x_n = \frac{n-7}{n^2+1} \mid n \geq 1 \right\}$$

Questa successione ha sicuramente un minimo in quanto ci sono solamente 6 numeri negativi. Possiamo notare che il denominatore cresce più velocemente del numeratore. Studiamo quindi per quali indici vale $x_n \leq x_{n+1}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-7}{n^2+1} &\leq \frac{(n+1)-7}{(n+1)^2+1} \\ \frac{(n-7)(n^2+2n+2) - (n-6)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Il denominatore è positivo, quindi studiamo il numeratore

$$n^2 - 13n - 8 \leq 0$$

Le radici di questo polinomio sono $n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{201}}{2}$. Di conseguenza, l'espressione è negativa per $\frac{13-\sqrt{201}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{201}}{2}$. Notiamo che l'estremo di sinistra è negativo. Notiamo anche che $14^2 < 201 < 15^2$, e quindi l'estremo di destra è compreso fra 14 e $\frac{27}{2}$. Allora, tutte le n intere che soddisfano l'equazione sono $n = 13$. Ne consegue che se $n \geq 14$, $x_n > x_{n+1}$. Il massimo è quindi x_{14} .

5 Esponenziali

5.1 Potenze ad esponente reale e esponenziali e logaritmi

Abbiamo definito le radici n-esime come

$$x^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{x^m}$$

Si dimostra inoltre che per ogni p intero positivo,

$$x^{\frac{x \cdot p}{n \cdot p}} = x^{\frac{m}{n}}$$

La potenza x^r è quindi ben definita con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Successivamente, definiamo le potenze negative

$$x^{-r} = (x^{-1})^r$$

Abbiamo le consuete proprietà:

1. $\forall x > 0, x^0 = 1$;
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, x^r x^s = x^{r+s}$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (x^r)^s = x^{rs}$;

Con $r > 0$ posso definire $0^r = 0$ e se $r = \frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) con n dispari posso definire $x^{\frac{m}{n}}$ se $x < 0$.

5.2 Potenze a esponente reale

Se $x = 1, \forall a \in \mathbb{R}, x^a = 1$. Se $x > 1$ e $r < s$, allora $x^r < x^s$

$$r = \frac{m}{p} < s = \frac{n}{p}, m < n$$

$$x^r = (\sqrt[p]{x})^m < (\sqrt[p]{x})^n$$

Definiamo quindi la potenza reale con $a > 1$ e $x > 1$

$$x^a = \sup\{x^r \mid r \leq a\}$$

Estendiamo la definizione ad $a < 0$ come

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

E infine se $0 < x < 1$

$$x^a = (x^{-1})^{-a}$$

5.3 Esponenziali

Fissata una base $a > 0$ abbiamo poi l'esponenziale che è definita da a^x , $x \in \mathbb{R}$.

Risulta che se $a = 1$, allora la funzione è sempre 1. Se $a > 1$ la funzione è strettamente crescente, e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

La funzione è biettiva tra \mathbb{R} e $(0, +\infty)$, quindi è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a(x)$.

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g. $\ln(x(x-1))$ non si può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

6 Numeri complessi

In un campo ordinato e quindi in \mathbb{R} , $x^2 \geq 0$ e vale $x^2 = 0 \iff x = 0$. Quindi l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in \mathbb{R} . Estendiamo il campo \mathbb{R} costruendo un campo \mathbb{C} che contiene una immagine isomorfa di \mathbb{R} nel quale $z^2 = -1$ ha soluzioni.

Tuttavia, tale campo non ammette il medesimo ordinamento che avevamo. Definiamo quindi

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definiamo l'operazione di addizione

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

in maniera tale che

$$(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$$

1. anche questa somma è associativa, e commutativa come in \mathbb{R} ;
2. l'elemento neutro 0 è la coppia $0, 0$;
3. l'opposto di (a, b) è $-(a, b)$;

Si può rappresentare \mathbb{C} come punti nel piano. La moltiplicazione è definita come

$$(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - db, ad + bc)$$

Questo prodotto è

1. è associativo;
2. è commutativo;
3. l'elemento $(1, 0)$ è l'elemento neutro;
4. esiste un elemento inverso

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \mid (a, b) \neq (0, 0), \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \mid zz^{-1} = (1, 0)$$

Per determinare questa forma basta risolvere $z^{-1} = (x, y)$ dove $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Abbiamo quindi un campo.

Adesso, notiamo che $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

6.1 Inclusione dei reali

Ogni number $r \in \mathbb{R}$ può essere identificato con il numero complesso $(r, 0)$. Cosifacendo, l'applicazione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi(a) = (a, 0)$ preserva le operazioni.

Possiamo poi scrivere $z = (a, b)$ come $a(1, 0) + b(0, 1)$. Se identifichiamo $i = (0, 1)$, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + bi$$

che viene detta forma algebrica. Le operazioni di numeri complessi in forma algebrica si forma con le consuete regole del calcolo letterale e l'identità $i^2 = -1$.

6.2 Operazioni algebriche

$$\begin{cases} i^0 = +1 \\ i^1 = +i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} i^4 = +1 \\ i^5 = +i \\ i^6 = -1 \\ i^7 = -i \end{cases} \quad \dots$$

Dato $z = a + bi$, diciamo che $\Re(z) = a$ e $\Im(z) = b$.

Definizione Coniugio

Dato $z = a + bi \in \mathbb{Z}$,

$$\bar{z} = a - bi$$

Chiaramente, $z + \bar{z} = 2\Re(z)$. Possiamo quindi dire che

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Proposition Proprietà del coniugio

- **involutivo:** $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;
- $w \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Per ogni numero complesso z ,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

e per ogni numero complesso w

$$\overline{wz} = wz\bar{w}\bar{z} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In particolare, $|z^n| = |z|^n$.

La disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

- $|wz| = |w| \cdot |z|$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Da dimostrare: $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.

6.3 Passaggio polari e cartesiane

Dato $x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e il punto polare (r, θ) abbiamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

6.4 De Moivre

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k$$

7 Distanza fra due insiemi

La distanza (minima) fra due insiemi è definita come

$$\text{dist}(S, R) = \inf\{d(z, w) \mid z \in S \wedge w \in R\}$$

8 Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $p(z)$, z_0 è una radice di $p(z)$ se esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q(z) = \deg p(z) - 1$ tale che

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

, cioè se $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

La radice z_0 ha molteplicità $m \geq 1$ se $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.

9 Spazi metrici

Definizione Insieme aperto in spazio metrico

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *aperto* se tutti i punti sono interni in A .

10 Spazi topologici

Un punto x_0 è isolato in E se $\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E = \{x_0\}$.

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ (vale in qualsiasi spazio metrico) e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. x_0 è di accumulazione cioè $\forall r > 0$,

$$((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$$

2. $\forall r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è infinito (ogni intorno contiene infiniti punti di E).

Proof

(\Rightarrow) Dimostriamo la contronominale. Assumiamo quindi che $\exists r > 0$ tale che $A = (x_0 - r, x_0 + r) \cap E$ è finito, e quindi $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dove x_1, x_2, \dots, x_n sono gli elementi di $(x_0 + r, x_0 - r) \cap E$ diversi da x_0 . Chiaramente, esiste un $0 < \varepsilon < \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$. Siccome l'insieme è finito, ε esiste ed è strettamente positivo. Quindi, per definizione x_0 non è di accumulazione.

(\Leftarrow) Trivial.

11 Successioni

La sequenza è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se l'immagine è limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente.

Diciamo che $M = \max x_n$ se $\forall n x_n < M$ e $\exists n' | x_{n'} = M$. Analogamente il min.

Definiamo inoltre $\sup_n x_n = \sup\{x_n | x \in \mathbb{N}\}$ Analogamente per l'inf.

Definizione Proprietà soddisfatta definitivamente

Data una proprietà P , una successione $\{x_n\}$ soddisfa la proprietà P definitivamente se $\exists N | \forall n, P(n) \geq N$.

Quando facciamo un limite su una successione, l'unica cosa alla quale la variabile possa tendere è infinito. La sequenza tende al limite superiore se dopo un certo punto il suo valore è maggiore a quello del limite, analogamente per il limite inferiore, e entrambi per il limite in senso generale.

$$x_n \rightarrow l^+$$

Possiamo definire i vari tipi di limiti in maniera equivalente ma con intorno diversi a seconda del tipo

$$I = \begin{cases} (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \xi \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty), M > 0 & \xi = +\infty \\ (-\infty, -M), M > 0 & \xi = -\infty \end{cases}$$

Quindi $x_n \rightarrow \xi$ se per ogni intorno I esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$.

Lemma

Se λ e $\mu \in \mathbb{R}$ and $\lambda \neq \mu$ allora esistono intorno I di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Proof

Siano per esempio $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda < \mu$. $\forall r \leq \frac{\mu - \lambda}{2}$ gli intorno $I = (\lambda - r, \lambda + r)$ e $J = (\mu - r, \mu + r)$ sono disgiunti.

Proposition Proprietà dei limiti

1. Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $x_n \rightarrow \mu$ allora $\lambda = \mu$. Infatti supponiamo che $\lambda \neq \mu$ per il lemma $\exists I$ intorno di λ e J intorno di μ tale che $I \cap J = \emptyset$. Per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ quindi $\exists M_1$ tale che $x_n \in I \forall n \geq N_1$. $x_n \rightarrow \mu$ quindi $\exists M_2$ tale che $x_n \in J \forall n \geq N_2$. Quindi se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $x_n \in I \cap J = \emptyset$ ∇ .
2. Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $\{x_n\}$ è limitato cioè esiste $m \leq M$ tale che $m \leq x_n \leq M$ per tutte le n . Infatti, per ipotesi $x_n \rightarrow l$ quindi usando $1 = \varepsilon$ nella definizione, risulta che $\exists N | l - 1 < x_n < l + 1$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte, per ogni $n = 1, \dots, N - 1$ abbiamo che

$$A = \min\{x_1, \dots, x_{N-1}\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}\} = B$$

che esistono perché sono insiemi finiti. Concludiamo che $m = \min\{l - 1, A\} \leq x_n \leq \max\{l + 1, B\} = M$

3. **Teorema di permanenza del segno:** Se $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ e $\lambda < \mu$, allora esiste $N | \forall n \geq N, x_n < y_n$. Infatti, $\forall \lambda < a < b < \mu$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n < a$ e $y_n > a$. Infatti, assumendo $\lambda < \mu$, dati a, b tale che $\lambda < a < b < \mu$, esistono intorno I di λ e J di μ tale che

$$I \subseteq (-\infty, a)$$

e

$$J \subseteq (b, +\infty)$$

Per definizione di limite:

•

$$x_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, x_n \in I \subseteq (-\infty, a)$$

•

$$y_n \rightarrow \lambda \implies \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, y_n \in J \subseteq (b, +\infty)$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, abbiamo $x_n \in (-\infty, a)$ cioè $x_n < a$ e $y_n \in (b, +\infty)$, cioè $y_n > b$. Nota: perché valga la tesi, deve esserci la disuguaglianza stretta. Con

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Infatti, $x_n \rightarrow 0$ se e solo se $|x_n| \rightarrow 0$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - 0| < \varepsilon \\ |x_n| \rightarrow 0 & \forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, ||x_n| - 0| < \varepsilon \end{cases}$$

Poichè

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

poniamo $y_0 = 0, \forall n$ non vale nè $x_n \geq 0$ nè $x_n \leq 0$ definitivamente.

In particolare, se $y_n \rightarrow \mu > 0$, y_n è definitivamente strettamente > 0 cioè esiste N tale che $\forall n \geq N, y_n > 0$ e infatti $\forall b \in (0, \mu)$ esiste N tale che $y_n > b, \forall n \geq N$.

4. **Monotonia del limite (preserva la relazione d'ordine tra le successioni):** Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni tale che $x_n \leq y_n$ definitivamente. Se $\exists \lim x_n = \lambda$ e $\exists \lim y_n = \mu$ allora $\lambda \leq \mu$.
5. **Teorema dei carabinieri:** Siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ e $\{z_n\}$ tre successioni reali con $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente, e supponiamo che $x_n \rightarrow l$ e $z_n \rightarrow l$. Allora, $y_n \rightarrow l$.
Se $x_n \rightarrow +\infty$ e $z_n \rightarrow +\infty$, allora $y_n \rightarrow +\infty$.
Se $x_n \rightarrow -\infty$ e $z_n \rightarrow -\infty$, allora $y_n \rightarrow -\infty$.

La 4. è la contronominale del 3. Se non valesse la tesi, cioè $\lambda > \mu$, per il punto 3 si avrebbe $x_n \geq y_n$ definitivamente.

Proposition

Se $x_n \rightarrow 0$ e $\{y_n\}$ è limitata cioè $\exists m < M$ tale che $m \leq y_n \leq M$, allora $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$. Infatti,

$$0 \leq |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot \max\{|m|, |M|\}$$

Proposition

Sono equivalenti:

1. $\exists a, b \mid a < b \wedge a \leq x_n \leq b, \forall n$
2. $\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M, \forall n$

11.1 Aritmetica dei limiti

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali con $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$ con $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition Addizione

$x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$ dove $\lambda + \mu$. Questa somma è quella usuale se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, altrimenti $\pm\infty + c = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$.

Proof

Nel caso in cui λ, μ sono finiti, $x_n \rightarrow \lambda$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $y_n \rightarrow \mu$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (\lambda + \mu)| = |(x_n - \lambda) + (y_n - \mu)| \leq |x_n - \lambda| + |y_n - \mu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e per definizione $x_n + y_n \rightarrow \lambda + \mu$.

Dimostriamo ora che se $x_n \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\}$ è limitata allora $x_n + y_n \rightarrow +\infty$. Ricordiamo che se $y_n \rightarrow \mu$ finito allora $\{y_n\}$ è limitata si conclude che vale la tesi nel caso $\lambda = +\infty$ e μ finito.

Infatti, $\{y_n\}$ è limitato quindi esiste K tale che $|y_n| \leq K$ per tutte le n . $x_n \rightarrow +\infty$ per definizione $\forall M > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n > M + K$.

Quindi $\forall n \geq N, x_n + y_n > (M + K) - K = M$ (alla peggio tolgo un K).

Il caso $-\infty$ è identico.

Mostriamo ora che $x_n \rightarrow +\infty$ e $y_n \rightarrow -\infty$, allora $x_n + y_n$ può tendere a $c \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ o oscillare.

Esempio

Considera

$$\begin{cases} x_n = n + c \rightarrow +\infty \\ y_n = -n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Allora $x_n + y_n = c \rightarrow c$.

La definizione di limite finito è $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Proposition

Se so che $x_n \rightarrow l$ finito dato $\varepsilon > 0$ posso applicare la definizione di limite a un qualunque multiplo di ε e concludere che

$$\exists N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$$

Supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ si trovi $N \mid \forall n \geq N, |x_n - l| < c\varepsilon$ con c fisso positivo. Allora $x_n \rightarrow l$ infatti basta applicare le condizioni a $\frac{\varepsilon}{c}$.

Proposition Moltiplicazione successioni

Dati $x_n \rightarrow \lambda$, $y_n \rightarrow \mu$ allora $x_n \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot \mu$ dove $\lambda \mu$ è l'usuale prodotto se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $\pm\infty \cdot c = \pm\infty$ con le regole dei segni, e $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ con le regole dei segni. Non è definito $0 \cdot \infty$ forma indeterminata del prodotto.

Proof

Supponiamo presi λ, μ finiti per ipotesi $x_n \rightarrow \lambda$ fissato $\varepsilon > 0 \exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - \lambda| < \varepsilon$ e $y_n \rightarrow \mu$ fissato $\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - \mu| < \varepsilon$. Se $n \geq \max\{N_1, N_2\} = N$ abbiamo

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \lambda \mu| &= |x_n y_n - x_n \mu + x_n \mu - \lambda \mu| \\ &= |x_n(y_n - \mu) + \mu(x_n - \lambda)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \mu| + |\mu| \cdot |x_n - \lambda| \\ &\leq N \cdot |y_n - \mu| + |\mu| |x_n - \lambda| \\ &\leq (N + |\mu|)\varepsilon \end{aligned}$$

$x_n \rightarrow \lambda$ finito implica che x_n è limitata, cioè $\exists M \mid |x_n| \leq M, \forall n$. Per l'osservazione fatta, questo dimostra che $x_n y_n \rightarrow \lambda \mu$.

Proposition Quoziente successioni

Siamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni reali tali che $x_n \rightarrow \lambda$ e $y_n \rightarrow \mu$. Supponiamo che $y_n \neq 0$ definitivamente (questo, per il teorema di permanenza del segno, è sicuramente garantito se $\mu \neq 0$), cosicché è definitivamente definita la successione $\frac{x_n}{y_n}$. Allora

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\frac{\lambda}{\mu}$ è l'usuale quoziente. Se invece $\lambda = \pm\infty$ e $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = \pm\infty$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0$$

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\mu = 0^\pm$, allora

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm\infty$$

con la regola dei segni. Non è definito il rapporto $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ (forme indeterminate del quoziente) e $\frac{\lambda}{0}$ con 0 senza segno.

Proof

Non data.

Vediamo qualche esempio. Se non ci sono forme indeterminate le cose vanno sempre bene. Quindi, consideriamo gli altri.

Esempio

Il calcolo

$$\lim n^2 + (\sin n)n - \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2 + \frac{2}{n}}$$

non ammette limite. Il numeratore ha una significativa forma di indecisione, al contrario del

denominatore. È importante raccogliere il termine dominante nel numeratore e denominatore.

$$(n+1)^2 = \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

che ci porta a

$$\frac{1 + \frac{\sin n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2}{n^3}}$$

Il termine $\frac{\sin n}{n}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri. Abbiamo che

$$n^{3/2} > n \forall n \geq 1$$

quindi $0 < \frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n}$, e che quindi tende a zero, sempre per lo stesso teorema. Inoltre, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)$ tende a 1 e $\frac{2}{n^3}$ tende a 0.

Nota: Il termine dominante in $\frac{3}{m} + \frac{4}{n^2}$ è $\frac{3}{m}$.

Teorema Teorema delle successioni monotone

Sia $\{x_n\}$ una successione reale monotona definitivamente. Allora esiste finito o infinito

$$\lim x_n$$

Inoltre, se $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$ (definitivamente monotona crescente), allora

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n$$

e se $\forall n \geq N, x_n \geq x_{n+1}$ (definitivamente monotona decrescente), allora

$$\lim x_n = \inf_{n \geq N} x_n$$

Proof

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui x_n è definitivamente monotona crescente e che quindi $\forall n \geq N, x_n \leq x_{n+1}$. Dimostriamo che

$$\lim x_n = \sup_{n \geq N} x_n = \xi$$

Dobbiamo considerare due casi:

- $\xi < +\infty$: La tesi è che esiste $\exists N_1 > 0 \mid \forall n \geq N_1, \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi$. Infatti, ricordiamo che per definizione del supremum, $\forall \varepsilon > 0$ we have that
 - $\forall n \geq N, x_n \leq \xi$
 - $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid x_N > \xi - \varepsilon$
 e poiché x_n è monotona crescente, $\forall n \geq N$ abbiamo

$$\xi - \varepsilon < x_{N_1} \leq x_n \leq \xi$$

- $\xi = +\infty$: La tesi è che $\{x_n\}$ non è limitata superiormente, quindi $\forall M > 0, \exists N_1 \mid x_{N_1} > M$ e, ancora per monotonìa

$$\forall n \geq N_1, M < x_{N_1} \leq x_n$$

e per definizione, $x_n \rightarrow +\infty = \sup x_n$.

11.2 Limiti notevoli

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni reali, e supponiamo che $a_n \rightarrow A$ e $b_n \rightarrow B$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^\alpha \rightarrow A^\alpha$$

dove A^α è la usuale potenza se $A > 0$. Se $\alpha \neq 0$ decisamente e $A = +\infty$ allora

$$\infty^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Nota: se $\alpha = 0$ e $a_n > 0$ definitivamente, allora $a_n^\alpha = 1$ definitivamente e $a_n^\alpha \rightarrow 1$.

Proposition

Se $A > 0$ allora

$$A^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & A > 1 \\ 1 & A = 1 \\ 0^+ & 0 < A < 1 \end{cases}$$

Proof

Infatti posso scrivere

$$1 < A = (1 + h) \implies A^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \rightarrow +\infty$$

con $h = A - 1$. Se $0 < A < 1$, allora

$$A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$$

dove $\frac{1}{A} > 1$ e $(\frac{1}{A})^n \rightarrow +\infty$.

Proposition

Se $a_n > 0$ definitivamente $a_n \rightarrow A \geq 0$, $b_n \rightarrow B$ con $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow A^B$$

dove A^B è la solita potenza se $A, B \in \mathbb{R}$ escludendo il caso 0^0 .

Se $A > 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = +\infty$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = +\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $A > 1$ e $B = -\infty$, allora $A^B = 0^+$.

Se $0 \leq A < 1$ e $B = -\infty$, allora $A^{-\infty} = +\infty$.

Non è definito il caso $A = 1$ e $B = \infty$ (1^∞).

Non è definito il caso $A = \infty$ e $B = 0$ (∞^0).

Le forme indeterminate sono quindi

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Proposition Successioni di logaritmi

Considerando

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log b_n}{\log a_n}$$

, con $b_n > 0$ definitivamente e $b_n \rightarrow B$, allora

$$\log b_n \rightarrow \log B = \begin{cases} +\infty & B = +\infty \\ \log B & B \in (0, +\infty) \\ -\infty & B = 0^+ \end{cases}$$

Non ci sono quindi forme indeterminate in questo caso.

Proposition Velocità delle successioni

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall A > 1$,

$$\frac{n^\alpha}{A^n} \rightarrow 0$$

(in particolare con α)

2. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha > 0$,

$$\frac{a_n^\alpha}{A^{a_n}} \rightarrow 0^+$$

3. $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

4. $\forall a_n \rightarrow \infty$ e $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta} \rightarrow 0$$

5. $\forall A > 1$,

$$\frac{A^n}{n!} \rightarrow 0^+$$

- 6.

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0^+$$

Proof

Dimostriamo che con $A > 1$ abbiamo

$$\frac{n}{A^n} \rightarrow 0$$

Scriviamo $A = B^2$ con $B = (1 + h)$ con $h > 0$ da cui per la disuguaglianza di Beroulli risulta

$$A^n = B^{2n} = [(1 + h)^n]^2 \geq (1 + hn)^2$$

Quindi

$$0 < \frac{n}{A^n} \leq \frac{n}{(1 + hn)^2} = \frac{n}{n^2(h + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 0$$

Proof

Dimostriamo che

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Teorema Numero di Eulero

Siano

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1. a_n è monotona strettamente crescente;
2. b_n è monotona strettamente decrescente;
3. $\forall n, a_n \leq b_n$ quindi a_n è limitata superiormente.

Sia

$$e = \lim a_n$$

Allora, $a_n \rightarrow e^-$, $b_n \rightarrow e^+$ e $e \approx 2.7182818$.

Proof

1. Mostriamo che $\forall n \geq 1, a_n < a_{n+1}$. Per mostrare ciò mostriamo che

$$\forall n \geq 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Per ogni $n \geq 2$ studiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1 - \frac{1}{n^2} \cdot n}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

2. Mostriamo che $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli, per $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n \left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

3. Per tutte le n

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n$$

Siccome a_n è limitata superiormente e ed è monotona crescente, esiste $\lim a_n = e^-$ Poiché $b_n = a_n + (b_n - a_n)$,

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Quindi $b_n \rightarrow e^+$ siccome è decrescente. Siccome $a_n < e < b_n$ si può approssimare scegliendo n sufficientemente grandi.

Proposition

Se a_n è crescente, e b_n è decrescente e $a_n < b_n$ si deduce che $\forall m, n, a_m < b_n$

Corollario

Se $c_n \rightarrow +\infty$ allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

Proof

Siccome vale sempre $[c_n] \leq c_n < [c_n] + 1$

$$1 + \frac{1}{[c_n] + 1} < 1 + \frac{1}{c_n} \leq 1 + \frac{1}{[c_n]}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{[c_n] + 1}\right)^{[c_n]} < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right) = e$$

Proposition

Se $|c_n| \rightarrow +\infty$, allora

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \rightarrow e$$

Proposition

Se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

Segue dall'ultima proposition con $c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Proposition

Se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \alpha$$

Proof

Basta porre $\delta_n = (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \rightarrow 0$ dove chiaramente $\delta_n \neq 0$ definitivamente. Quindi esprimere ε_n in termini di δ_n per concludere.

Esempio Motivazione per non fare i limiti in tal modo

Calcolare il limite di

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

Vogliamo applicare $\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$ con $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}$. Abbiamo allora

$$a_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{n + \sqrt{n}}{n^{3/2} + \log n}}$$

e allora

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n^{3/2} + \log n}{n + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{\log n}{n^{3/2}}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

11.3 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

Teorema

Sia $\varepsilon_n \rightarrow 0$, allora

1. $\sin \varepsilon_n \rightarrow 0$, $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ e $\tan \varepsilon_n \rightarrow 0$;
2. Se $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente, allora

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

e

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Proof

1. Per la definizione del seno,

$$|\sin \alpha| \leq \min\{1, |\alpha|\}$$

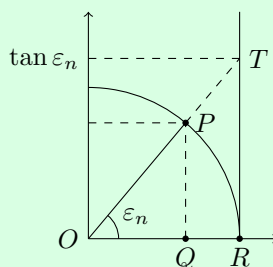
Quindi $|\sin \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \rightarrow 0$ e $\cos^2 \varepsilon_n = 1 - \sin^2 \varepsilon_n \rightarrow 1$ da cui $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$. Inoltre,

$$\tan \varepsilon_n = \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 0$$

2. Sia $\varepsilon_n \rightarrow 0$ con $\varepsilon_n \neq 0$ definitivamente. Osserviamo che poiché il seno è dispari,

$$\frac{\sin x}{x}$$

è pari. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $\forall n, \varepsilon_n > 0$ e poiché $\varepsilon_n \rightarrow 0$ posso anche supporre che $\forall n, 0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$. Andiamo a confrontare le aree nella circonferenza trigonometrica.



Per confronto di aree, l'area del triangolo OPQ è minore o uguale dell'area del settore circolare OPR che è minore o uguale del triangolo OTR .

Ricordiamo che l'area del settore circolare di angolo α è data dalla proporzione

$$\frac{\text{Area } S_\alpha}{\text{Area cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

quindi

$$\text{Area}_{OPR} = \frac{1}{2}\alpha$$

Abbiamo allora che

$$\frac{1}{2} \cos \varepsilon_n \sin \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varepsilon_n$$

che semplificando diventa

$$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

Siccome $\cos \varepsilon_n \rightarrow 1$ e $\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 1$, per il teorema dei carabinieri,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n}$$

Per la tangente abbiamo semplicemente

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right) \left(\frac{1}{\cos \varepsilon_n} \right) \rightarrow 1$$

E per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} &= \frac{(1 - \cos \varepsilon_n)(1 + \cos \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 \cdot (1 + \cos \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \\ &= \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \rightarrow \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Proposition

Calcolare il limite della successione

$$a_n = (n+2) \sin \left(\frac{n+1}{n^2} \right)$$

Notiamo che

$$\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} a_n &= (n+2) \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})}{n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

11.4 Proprietà asintotico

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}$ se $a_n \rightarrow \infty$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} = n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n = b_n$. Quindi

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \implies \log a_n \sim \log b_n$ se $a_n \rightarrow 1$. Per esempio, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Tuttavia,

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} \rightarrow +\infty$$

Nota: non vale $a_n \sim b_n \wedge c_n \sim d_n \implies a_n \pm c_n \sim b_n \pm d_n$. Per esempio, $a_n = n + \sqrt{n} \sim n = b_n$.

Proposition Proprietà dell'o-piccolo

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $a_n = \mathcal{O}(b_n)$;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = \mathcal{O}(d_n)$, allora $a_n c_n = o(b_n d_n)$. Infatti,

$$\left| \frac{a_n c_n}{b_n d_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \left| \frac{c_n}{d_n} \right|$$

che tendono entrambi a zero;

- Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, allora $a_n + c_n = o(b_n)$. Infatti,

$$\frac{a_n + c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{b_n}$$

che tendono entrambi a zero. Possiamo anche scrivere $o(b_n) + o(b_n) = o(b_n)$;

11.5 Esercizi

Esercizio

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1}{\sqrt{n^3+1} + \log n}$$

Esercizio

$$a_n = \frac{n^{1/2} + \cos(1/n) + \log n}{(n + \sqrt{n})^2 - \sqrt{n}}$$

Esercizio

$$a_n = \log\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \log n}\right)\right) \left(\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2\right)$$

Esercizio

$$a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^3 - \log n}{\sqrt{n^4 + n}}}$$

12 Serie numeriche

Esercizio

Sia $\{b_n\}$ una successione e sia $\{b_{n \pm k_0}\}$ la successione traslata di $\pm k$. Dimostrare che $\lim b_n$ esiste se e solo se $\lim b_{n \pm k_0}$ esiste e che i limiti sono uguali.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Allora

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Proof Serie geometrica per Induzione

Esempio

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

La serie ha ragione $q = \frac{1}{10}$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Esercizio

Calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n} + \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \\ &= \frac{1}{7^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} + \frac{2}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^{n+2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

12.1 Aritmetica delle serie

Le operazioni aritmetiche sulle serie sono giustificate a posteriori; se alla fine vi è una forma di indecisione non erano legali.

Proposition

Un numero decimale può essere espresso come

$$x = N + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

Esempio

Mostriamo che se $x = N, a_1 a_2 \dots a_k \bar{9}$ dove $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $a_k < 9$, allora $x = N a_1 a_2 \dots (a_k + 1)$. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
x &= N + \left(\sum_{j=1}^k a_j \cdot 10^{-j} \right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \sum_{h=0}^{\infty} 10^{-h} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + a_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} \\
&= N + \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot 10^{-j} \right) + 10^{-k} (a_k + 1)
\end{aligned}$$

Ciò può essere esteso ad ogni base.

Corollario

Se $a_n = o(b_n)$ cioè

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$ e quindi si applica il confronto.

Esercizio

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (1 + 1/n)^n + \sin n}{(n + \sqrt{n})^3 + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Notiamo che $\forall n \geq 1, a_n \geq 0$. Notiamo allora che

$$a_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{n}\right)}{n^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{n^3} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right\}} \sim \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica è una serie-p con $p = 1$, allora la serie diverge.

Esempio Teorema di condensazione

È possibile applicare il teorema di condensazione alla serie armonica e ottenere che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

che è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$ che converge se e solo se $p > 1$.

Teorema Rapporto di radici

Sia $\sum a_n$ una serie a termini ≥ 0 e supponiamo che una delle due condizioni sia soddisfatta:

1. $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in [0; +\infty]$;
2. $a_n > 0$ definitivamente e $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = h \in [0; +\infty]$;

Allora se $L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ allora $a_n \rightarrow \infty$.

Se $L = 1$ il test è **inconclusivo**.

La condizione della radice è più potente in quanto implica anche l'altra.

Infatti, con la p-serie armonica il limite tende a 1, il che coincide con il fatto che la serie converge se $p > 1$ e diverge altrimenti.

Corollario

Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$. Se

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

oppure se il limite esiste e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora se $L < 1$, la serie converge e $a_n \rightarrow 0$ e se $L > 1$ allora $a_n \rightarrow +\infty$.

Proof

Consideriamo il primo caso cosicché

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists N$ tale che

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

Se $L < 1$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (basta scegliere $\varepsilon = (1 - L)/2$). Dalla disequazione $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ deduciamo che

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n < (L + \varepsilon)^n$$

e poiché $L + \varepsilon < 1$ la serie converge per confronto con la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$$

Se $L > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, come per esempio $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, quindi per $n \geq N$ abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} > (L - \varepsilon) > 1$$

elevando alla n otteniamo $a_n > (L - \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$ e per confronto $a_n \rightarrow +\infty$. In particolare, a_n non tende a zero e la serie diverge per il criterio del termine ennesimo.

Per il secondo caso, $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ come nel caso precedente. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Sappiamo per esempio che $L > 1$ cosicché come nel caso precedente possiamo scegliere ε tale che $L - \varepsilon > 1$ e abbiamo che $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1 > 0$$

$\forall n \geq N$ moltiplicando i termini membro a membro

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_N} \geq (L - \varepsilon)^{n-N+1}$$

Ciascuno di questi è più grande di $L - \varepsilon$. Quindi,

$$a_{n+1} \geq (L - \varepsilon)^{-N+1} \cdot (L - \varepsilon)^n \cdot a_N \rightarrow +\infty$$

e per confronto $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

con $A > 0$. Quando ci sono i fattoriali usiamo il criterio dei rapporti. Abbiamo che

$$\forall n, a_n = \frac{A^n}{n!} > 0$$

per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \rightarrow 0$$

Quindi la serie converge, e converge a $e^A - 1$.

Esempio

Consider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + (\log n)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n + e^{3n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17}}$$

che è ovviamente positivo. Usiamo il criterio asintotico. A numeratore l'ultimo termine è finito e tende ad e . Dobbiamo verificare quale degli altri due termini è dominante. Scriviamo allora $(\log n)^n = e^{n \log \log n}$. Allora chiaramente e^{n^2} domina sull'altro termine. Analogamente, a denominatore abbiamo $n^n = e^{n \log n}$ come termine dominante.

$$a_n = \frac{e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log \log n - n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2} \right\}}{e^{3n \log n} \left\{ 1 + e^{-2n \log n} + \left(n + \frac{1}{n}\right)^{17} \cdot e^{-3n \log n} \right\}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{3n \log n}}$$

Allora

$$e^{n \log \log n - n^2} = e^{-n^2 \left\{ 1 - \frac{\log \log n}{n^2} \right\}} \rightarrow \infty$$

quindi la serie diverge. Oppure, con il criterio della radice

$$\left(e^{n^2 - 3n \log n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{n \left(1 - \frac{3 \log n}{n} \right)} \rightarrow \infty > 1$$

Esempio

Studiare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n \log n}}{(2n)!}$$

che ha termini positivi. Ci sono dei fattoriali quindi conviene utilizzare il criterio del rapporto. Notiamo che $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ e $(n+1) \log(n+1) = n \log(n+1) + \log(n+1) = n[\log n + \log(1+1/n)] + \log(n+1)$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1) \log(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n \log n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n) + \log(n+1)}}{n^{n \log n}} \end{aligned}$$

Con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} \cdot (n+1)^{\log(n+1)}$$

troviamo

$$\frac{1}{((2n+2)(2n+1))} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\log n} \cdot (n+1)^{n \log(1+1/n)} (n+1)^{\log(n+1)}$$

Dal primo e ultimo termine possiamo notare che la serie va ad infinito.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{\log n}}$$

Il criterio della radice non funziona. Infatti,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{n^{\frac{\log n}{n}}}$$

Il numeratore tende a 1, mentre scriviamo il denominatore come

$$\begin{aligned} n^{\frac{\log n}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \log(n^{\log n})} \\ &= e^{\frac{1}{2} (\log n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Allora il limite è $L = 1$, quindi il criterio è inconclusivo. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{\sqrt{n} \log 2}}{e^{(\log n)^2}} \\ &= e^{\sqrt{n} \log 2 - (\log n)^2} \\ &= e^{\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

L'esponente tende a infinito quindi la serie diverge per il criterio del termine n-esimo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}$$

che ha i termini della serie precedente ma invertiti. Dobbiamo usare il confronto per mostrare che la serie converge. Confrontiamo la serie con una p-serie, per esempio $\sum \frac{1}{n^2}$. Il rapporto è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 a_n \\ &= e^{2 \log n - \sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}} \end{aligned}$$

e abbiamo che

$$2 \log n - \sqrt{n} \log 2 + (\log n)^2 = -\sqrt{n} \left\{ \log 2 - \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\} \rightarrow -\infty$$

e quindi il rapporto tende a 0. Quindi, il rapporto è minore di 1 definitivamente e la serie converge per confronto.

12.2 Formula di Stirling

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Il limite è dato da

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n)!} \sim e \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{e^{n(1+1/n)}}{(2n)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie converge.

Con radici abbiamo

$$\begin{aligned} \left[\frac{n^n}{(2n)!} \right]^{1/n} &= \frac{n}{\left[(2n)^{2n} \cdot 2^{-2n} \cdot \sqrt{4\pi n} (1 + o(1)) \right]^{1/n}} \\ &= \frac{n}{(2n)^2 \cdot e^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E quindi converge

Esempio

Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} + n^n}{(n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

A numeratore abbiamo

$$e^{n^2} + n^n = e^{n^2} + e^{n \log n} = e^{n^2} \left\{ 1 + e^{n \log n - n^2} \right\} \sim e^{n^2}$$

A denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} (n^2)! + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= (n^2)^{n^2} \cdot e^{-n^2} \cdot \sqrt{2\pi n^2} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} (1 + o(1)) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} \left\{ 1 + o(1) + e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - 2n^2 \left\{ \dots \right\}} \right\} \\ &\sim e^{2n^2 \left\{ \log n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \log \sqrt{2\pi n^2} \right\}} = (n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2} \end{aligned}$$

Ora possiamo usare il criterio della radice

$$a_n \sim \frac{e^{n^2}}{(n^2)^{n^2} e^{-n^2} \sqrt{2\pi n^2}} = b_n$$

Abbiamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum b_n$ e

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b_n} &= \frac{e^n}{(n^2)^n e^{-n} (2n)^{\frac{1}{2n}} n^{1/n}} \\ &= \frac{e^{2n}}{n^{2n} (2n)^{1/n} n^{1/n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e quindi la serie converge.

12.3 Serie a termini di segno qualunque

Con serie di segno qualunque non è possibile applicare il criterio asintotico.

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa (o in uno spazio metrico) e supponiamo che esista finito il limite $\lim_n a_n = L \in \mathbb{F}$. Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Quindi, se $n, m > N$, allora

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon$$

Definizione Successione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Si dice che $\{a_n\}$ soddisfa la condizione (C) di Cauchy, o più brevemente che è una successione di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \mid \forall n, m \geq M, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Per quanto visto sopra, se $a_n \rightarrow L$ finito, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa. Sono equivalenti:

1. \exists finito

$$\lim_n a_n = L$$

2. $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che (1) implica (2). Il converso, vale in \mathbb{R} ma non in \mathbb{Q} .

Proposition

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie reali o complessa e sia $\{S_n\}$ la successione delle sue somme parziali. Per definizione, $\sum a_n$ converge a S se esiste finito $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$.

Corollario

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie $\sum a_n$ converga e che la successione delle somme parziali soddisfi le condizioni di Cauchy, scritte in 3 modi equivalenti:

- 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N, |S_n - S_m| < \varepsilon$$

equivalentemente notando che se $n > m$,

$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^n a_k$$

- 2.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n > m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n, m \geq N \quad n \geq m \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

3. condizione più usata:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall m, n \geq N \wedge \forall p \geq 0, \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

con $0 < p \leq 1$ converge ma non assolutamente. La serie converge per $p > 0$.

Lemma disuguaglianza triangolare generalizzata

Sia $\{b_k\}$ una successione, allora

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_k|$$

Proof

Per induzione

- il caso base è banale;
-

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) + b_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| + |b_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^n |b_k| + |b_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |b_k| \end{aligned}$$

Proof Teorema fondamentale

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

la tesi è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converga equivalentemente soddisfa le condizioni di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall n \geq m \geq N, \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

Per ipotesi $\sum |a_k|$ converge quindi soddisfa la condizione di Cauchy e dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\forall n \geq m \geq N$

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \varepsilon$$

Ma per il lemma $\forall n \geq m \geq N$,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

Quando abbiamo una serie che non ha termini solo positivi, la prima cosa da fare è mettere il modulo e controllare la convergenza assoluta.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

che non ha termini solo positivi. Allora proviamo a studiare la convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$$

Poiché $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2 \leq +\infty}$ converge (p-serie), allora la serie dei moduli converge assolutamente e quindi converge.

Vale lo stesso procedimento per

$$\sum \frac{\sin n}{n^p}$$

con $p > 1$. Se $p \leq 1$, allora diverge. Ciò segue dal fatto che, per esempio, $|\sin x| > \frac{1}{2}$ se $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che l'intervallo

$$I_k = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$$

ha lunghezza $\frac{2\pi}{3} > 1$, quindi conviene un intero n , in realtà 2 interi in quando la lunghezza è maggiore di 2. Allora la serie

$$\sum \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$$

dove n_k è un intero in ognuno di I_k . Ciò è maggiore o uguale di

$$\sum \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

in quanto il valore a denominatore è al minimo $\frac{5}{6}\pi + k\pi$. Allora troviamo un multiplo della serie armonica, che diverge.

Esempio

Considera

$$\sum \frac{-n + (\sin n)n^2 - \log n}{(1+n)^{10/3} - \cos n}$$

allora guardiamo il modulo:

$$|a_n| = \frac{|-n + (\sin n)n^2 - \log n|}{|(1+n)^{10/3} - \cos n|}$$

Maggioriamo rendendo più piccolo il denominatore e più grande il numeratore.

$$|a_n| \leq \frac{n + n^2|\sin n| + |\log n|}{(1+n)^{10/3} - 1}$$

Notiamo che $(1+n)^{10/3} - 1 \geq \frac{1}{2}(1+n)^{10/3} > \frac{1}{2}n^{10/3}$ perché $n = 1$ dà il valore massimo. Quindi

$$|a_n| \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{n^2}{\frac{1}{2}n^{10/3}} + \frac{\log n}{\frac{1}{2}n^{10/3}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 2 \sum n^{-\frac{7}{8}} + 2 \sum n^{-\frac{4}{3}} + 2 \sum_{n=2} \frac{1}{n^{10/3} (\log n)^{-1}}$$

Tutti i termini convergono e quindi la serie converge.

Perché il teorema valga basta che $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ valgano definitivamente. In tal caso la stima dell'errore vale solo per n sufficientemente grande.

Esempio

Si può applicare il teorema a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

e notare che la serie converge semplicemente ma non assolutamente per ogni $0 < p \leq 1$.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché $\forall n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi $p = 2 > 1$ e quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge. Tuttavia, è chiaro che $\forall n$, $a_{2n+1} < a_{2n+2}$.

Nota: $a_n \sim b_n$ e b_n monotona crescente non implica necessariamente che a_n sia monotona decrescente.

Infatti,

Esempio

Consideriamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. È chiaro che b_n è strettamente monotona decrescente. Inoltre,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

Verifichiamo allora che

$$a_{2k} > a_{2k-1}$$

Infatti, a_n non può essere definitivamente monotona decrescente in quanto se a_n fosse definitivamente monotona decrescente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

per il teorema di Leibniz sarebbe convergente. Tuttavia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

dove il secondo addendo chiaramente diverge. Allora, la serie di partenza diverge, nonostante il primo addendo converga.

Esempio Stima errore teorema Leibniz

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

con un errore minore di 10^{-3} . Abbiamo allora

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

La serie converge assolutamente per il criterio della radice e per il criterio del rapporto. La serie è a termini alterni, $a_n \rightarrow 0$ e $a_{n+1} < a_n$, quindi vale la condizione per il teorema di Leibniz. Per l'errore abbiamo

$$\forall N, |E_N| = |S - S_N| < \frac{1}{(N+1)!}$$

Se noi imponiamo che $\frac{1}{(N+1)!} < 10^{-3}$ certamente $|E_N| < 10^{-3}$. Dobbiamo usare almeno $N = 6$ per ottenere $(N+1)! = 5040 > 1000$. Allora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{6!} = S_6$$

che ha un errore minore o uguale di $\frac{1}{6!}$.

Esempio

Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

la serie ha termini alterni con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Controlliamo la convergenza assoluta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

e

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

in quanto $p = \frac{1}{2} \leq 1$ e quindi non converge assolutamente. Vogliamo ora usare il teorema di Leibniz. Le condizioni sono soddisfatte in quanto $a_n \geq 0$ e $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Verifichiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n-1}}{n+2} \\ &= \frac{\sqrt{n}(n+2) - (n+1)\sqrt{n-1}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Studiamo allora quando il numeratore è maggiore di zero.

$$\sqrt{n}(n+2) \geq (n+1)^{3/2}$$

Siccome i termini sono tutti positivi, possiamo fare il quadrato

$$\begin{aligned} n(n+2)^2 &\geq (n+1)^3 = n^3 + 4n^2 + 4n \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

che è sempre vero. Alternativamente, potremmo fare il limite con $n \rightarrow \infty$ del numeratore

$$\sqrt{n}(n+2) - (n+1)^{3/2} = n^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \right\}$$

Abbiamo che

$$\frac{2}{n} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \sim (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right\} &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} o(1) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Adesso, per permanenza del segno, il fatto che il numeratore tenda ad infinito, implica che sia maggiore di zero definitivamente. Allora, possiamo utilizzare il teorema di Leibniz. Alternativamente, se non riusciamo a mostrare che i termini siano decrescente, abbiamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

e b_n è decrescente. Allora, scriviamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\sqrt{n}n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Cosifacendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^i n fty (-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Se non ci sono forme di intedeterminazione nel membro di destra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente ma non assolutamente per il teorema di Leibniz. La seconda serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

ha modulo

$$\begin{aligned}\left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) - \sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}(1+1/n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge come somma di

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che converge semplicemente ma non assolutamente e

$$\sum (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

che converge assolutamente e la convergenza non può essere assoluta perché se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono assolutamente allora $\sum (a_n + b_n)$ converge assolutamente. Infatti,

$$\sum |a_n - b_n| \leq \sum (|a_n| + |b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n| < +\infty$$

12.4 Serie con parametri

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2)^2$$

Controlliamo la positività

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

per $x \leq -1 \vee x \geq 2$, altrimenti i termini sono alterni. Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio di radice/rapporto

$$\left| \frac{\log n}{n+1} (x^2 - x - 2) \right|^{1/n} = \frac{(\log n)^{1/n}}{[n(1+1/n)]^{1/n}}$$

Scriviamo che $(\log n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log \log n} \rightarrow 1$ e $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (limite notevole) e

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Quindi $|x^2 - x - 2| = L$ e se $L < 1$, la serie converge assolutamente, se $L > 1$ il modulo del termine generale diverge e la serie non converge e diverge dove è a termini non-negativi. Dobbiamo allora risolvere la disequazione $L < 1$

$$|x^2 - x - 2| < 1$$

Siccome $|t| < a \iff -a < t < a$ scriviamo che ciò è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 1 \\ x^2 - x - 2 > -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima sono

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

mentre della seconda

$$x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Allora abbiamo che la serie converge assolutamente in $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Se $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, la serie non converge (presumibilmente oscilla ma bisognerebbe mostrarlo). Invece, se $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ oppure $x > \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ la serie non converge ed è a termini positivi, quindi diverge necessariamente. Manca ancora il caso per cui $L = 1$. In tale caso, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Nel caso in cui $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ sappiamo che $x^2 - x - 2 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

con

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} = \frac{\log n}{n(1+1/n)} \sim \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$$

che è quindi una p-q serie con $p = 1$ e $q > 1$, quindi la serie diverge. Invece, se $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ abbiamo che $x^2 - x - 2 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

che non converge assolutamente (caso di prima). Tuttavia,

$$a_n = \frac{\log n}{n+1} \sim \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Controlliamo ora i criteri per il teorema di Leibniz: verifichiamo se $a - a_{n+1} \geq 0$ definitivamente

$$\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)\log n - (n+1)\log(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

il numeratore è dato da

$$\begin{aligned} (n+2)\log n - (n+1) \left[\log n + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] &= \log n - (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\sim \log n - (n+1) \frac{1}{n} \rightarrow +\infty - 1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

siccome $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon \rightarrow 0$. Quindi, per la permanenza del segno il numeratore è definitivamente non-negativo. Valgono quindi le condizioni per il teorema di Leibniz, e quindi la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n$$

La serie è a termini non-negativi quando $x-1 < 0$ cioè $x < 1$. Studiamo allora la convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|$$

appliciamo il criterio della radice n-esima

$$\left| \frac{2^n + \log n}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)^n \right|^{1/n} = \frac{2 \left(1 + \frac{\log n}{2^n} \right)^{1/n}}{n^{1/n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{1/n}} \cdot \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} \rightarrow \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = L$$

Se $L < 1$, la serie converge assolutamente. Se $L > 1$, il modulo del termine generale diverge, e quindi la serie non converge e infatti diverge dove è a termini di segno non-negativo. Se $L = 1$ il test è inconclusivo. Abbiamo allora

$$L = \frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} < 1 \iff 2|x-1| < \sqrt{x^2+4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) &< x^2 + 4 \\ 3x^2 - 8x &< 0 \\ x(3x - 8) &< 0 \end{aligned}$$

allora la soluzione è $0 < x < \frac{8}{3}$. In questo intervallo, la serie converge assolutamente. Se $x < 0$ o $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge. Poiché è a termini positivi per $x \leq 1$ se $x < 0$ la serie diverge. Per $x > \frac{8}{3}$ la serie non converge e nient'altro si può dire senza ulteriore studio. Se $x = 0$ o $x = \frac{8}{3}$ abbiamo $L = 1$ e il criterio è inane. Per tali valori,

$$\frac{2|x-1|}{\sqrt{x^2+4}} = 1$$

poiché

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

è negativo in $x = 0$ e positivo in $x = \frac{8}{3}$, concludiamo che per $x = 0$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = -\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Invece, per $x = \frac{8}{3}$ abbiamo che

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} = +\frac{1}{2}$$

e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}}$$

Nel caso $x = 0$ la serie è a termini positivi e

$$a_n = \frac{1 + 2^{-n} \log n}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

e la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Nel caso $x = \frac{8}{3}$ la serie è

$$\sum (-1)^n a_n$$

che non converge assolutamente. Vorremmo usare il teorema di Leibniz. La successione a_n è decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2^n(n + \sqrt{n})}$$

la prima serie converge sicuramente per Leibniz. La seconda serie, poiché $\frac{\log n}{n + \sqrt{n}} \rightarrow 0$, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2^n} \frac{\log n}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

definitivamente, e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge in quanto è una serie geometrica. Quindi, la seconda serie converge assolutamente e concludiamo che la serie assegnata converge per $x = \frac{8}{3}$.

Teorema Teorema di Dirichlet

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

be a series where:

1. $a_n \geq 0$;
2. $a_n \rightarrow 0$;
3. $a_n \geq a_{n+1}$;
4. Let

$$\sum_{k=1}^n b_k$$

there exist M such that $\forall n, |B_n| \leq M$

Then, the series converges.

Dimostrazione per lode.

Il teorema di Leibniz è quindi un corollario di questo teorema.

Proposition Prodotto di serie secondo Cauchy

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con rispettiva somme parziali A_N e B_N , vogliamo definire una serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ con somme parziali C_N in modo che se $A_N \rightarrow A$ e $B_N \rightarrow B$, allora $C_N \rightarrow AB$. Per trovare la forma di questa serie consideriamo

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) = a_0b_0 + x(a_0b_1 + a_1b_0) + x^2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

Definiamo quindi il prodotto di serie secondo Cauchy con

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Teorema Teorema di Mertens

Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti rispettivamente con somma A e B e supponiamo che almeno una delle due converga assolutamente. Allora, la serie prodotto converge a AB .

Dimostrazione per lode. È importante che almeno una delle due deve convergere assolutamente.

Mostriamo che $e^x e^y = e^{x+y}$ usando il prodotto secondo Cauchy delle espansioni di Taylor.

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

L'espansione di Taylor ci permette di estendere la funzione esponenziale ai valori complessi.

12.5 Teorema delle permutazioni di Riemann

TODO: esempi

Definizione Convergenza incondizionale

Una serie è incondizionatamente convergente se ogni serie permutata ha la stessa somma.

Teorema

Sia consideri la serie $\sum a_n$:

1. Se $a_n \geq 0$ allora ogni permutazione $\sum a_{\sigma(n)}$ ha lo stesso carattere e la stessa somma;
2. Se $\sum |a_n| < +\infty$ allora $\sum |a_{\sigma(n)}| < +\infty$ e ha la stessa somma.
3. Teorema di Riemann: se $\sum a_n$ converge solo semplicemente, allora:
 - (a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, esiste una serie permutata con valore λ ;
 - (b) esiste una permutazione σ tale che $\sum a_{\sigma(n)}$ oscilla.

Corollario

Una serie numerica è incondizionatamente convergente se e solo se è assolutamente convergente.

Proof Punto I

Sia $a_n \geq 0$ e sia σ una permutazione di \mathbb{N} arbitraria e consideriamo la serie permutata $\sum a_{\sigma(n)}$ e sia

$$A_N = \sum_{k=1}^N a_n \quad B_N = \sum_{k=1}^N b_n$$

Notiamo che per ogni n esiste N tale che

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$$

Cosicché

$$B_N = \sum_{k=1}^N a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^N a_k = A_N \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Passando limite otteniamo

$$\lim B_N = B = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} \leq A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Notando che, se σ^{-1} è la permutazione inversa, per ogni n

$$a_n = a_{\sigma^{-1}(n)}$$

lo stesso ragionamento mostra che

$$A = \sum a_n \leq B = \sum a_{\sigma(n)}$$

e quindi vale $A = B$.

Punto II lode.

Proof Teorema di Riemann (dimostrazione concettuale)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie convergente solamente semplicemente e poniamo

$$\forall n, p_n = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases} \quad q_n = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n \geq 0 \end{cases}$$

Cosicché $\forall n, a_n = p_n - q_n$ e $|a_n| = p_n + q_n$. Poiché $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty$ mentre $\sum a_n = \sum (p_n - q_n)$ converge, deve essere che sia $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ (devono divergere entrambe). Se solo una divergesse, spezzandola la serie avrebbe una parte che converge e una che diverge, quindi la differenza divergerebbe, ma la differenza deve convergere. Siccome $a_n \rightarrow 0$ allora $p_n \rightarrow 0$ e $q_n \rightarrow 0$. Siccome entrambe le serie divergono, io posso creare una permutazione per giungere a qualsiasi cosa. Supponiamo che il primo termine sia 0. Possiamo definire p_n e q_n tale che la somma sale sopra uno e scende sotto meno uno, all'infinito e oscillando. Oppure, posso farla oscillare ma avvicinandosi sempre di più a 0, e quindi il valore sarebbe zero.

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

che converge assolutamente per $p > 1$. Vogliamo studiare la convergenza semplice per $0 < p \leq 1$. Notiamo che se $p \leq 0$, allora il termine non tende a zero e la serie non converge. Applichiamo il teorema di Dirichlet con $b_n = \sin n$ e $a_n = \frac{1}{n^p}$. Per applicare il teorema bisogna verificare che la successione $\{b_n\}$ ha somme parziali limitate. Allora,

$$B_N = \sum_{k=1}^N \sin k$$

che è limitato se la consideriamo come serie geometrica con l'identità di Eulero.

13 Successioni, sottosuccessioni e topologia

Definizione Sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in \mathbb{N} . La successione $\{x_{n_k}\}$ viene detta *sottosuccessione* di $\{x_n\}$.

Teorema Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

Sia $\{x_n\}$ una successione e sia $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente in \mathbb{N} . Sono equivalenti

1. $\{x_n\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$;
2. per ogni successione $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$;
3. da ogni sotto successione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ si può generare una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$.

Notiamo che in generale se esiste una successione $\{x_{n_k}\}$ che tende a λ , niente si può dire di $\{x_n\}$. Per esempio $x_{2k} = (-1)^{2k} \rightarrow 1$ ma la successione non ammette limite.

Proof Relazione tra limite di una successione e di una sottosuccessione

1. **(1) \implies (2):** dimostriamo che il primo punto implica il secondo. Supponiamo che $x_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Per definizione di limite per ogni intorno I di λ di raggio $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in I$. Sia ora $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione. Poiché n_k è strettamente crescente $\forall k, n_k \geq k$. Quindi se $k \geq N$, $n_k \geq N$ da cui $x_{n_k} \in I$ e per definizione $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$ con $k \rightarrow \infty$.
2. **(2) \implies (3):** il secondo punto implica il terzo: se $x_{n_k} \rightarrow \lambda$ per quanto appena visto ogni sua sottosuccessione tende a λ e quindi il punto vale.
3. **(3) \implies (1):** dimostriamo ora che il terzo punto implica il primo. Se per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ tale che $\{x_{n_{k_j}}\} \rightarrow \lambda$ abbiamo $\{x_n\} \rightarrow \lambda$. Dimostriamo la contronominale. Dimostriamo quindi che se $\{x_n\}$ non tende a λ , allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che nessuna sua sottosuccessione tende a λ . Il fatto che $\{x_n\}$ non tenda a λ , per negazione della definizione è $\exists I_0(\lambda), \forall N \exists n \geq N$ tale che $x_n \notin I_0$. Costruiamo tale sottosuccessione. Scegliamo $N = 1$. Per il primo punto, $\exists n_1 \geq 1 \mid x_{n_1} \notin I_0$. Sia poi $N = n_1 + 1$. Per il primo punto, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 \mid x_{n_2} \notin I_0$. Iterando il procedimento si ottiene una successione n_k tale che $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ e $x_{n_k} \notin I_0$ per tutte le k . Poiché $\{x_{n_k}\} \notin I_0$, nessuna sua sottosuccessione può tendere a I_0 .

Corollario

Sia $\{x_n\}$ una successione. Allora:

1. se $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k}$ non ha limite, allora $\{x_n\}$ non ha limite;
2. se $\exists \{x_{n_k}\}$ e $\{x_{n_j}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow \lambda$ e $\{x_{n_j}\} \rightarrow \mu$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\{x_n\}$ non ha limite;
3. se $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ tendono allo stesso limite λ , allora $\{x_n\} \rightarrow \lambda$ (o suddividendo in qualsiasi altra partizione disgiunta).

Teorema Punti di chiusura e successioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Sono equivalenti:
 - (a) x_0 è punto di accumulazione per E ;
 - (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \rightarrow x_0$;
2. Sono equivalenti:
 - (a) $x_0 \in \bar{E}$;
 - (b) $\exists \{x_n\} \subseteq E$ tale che $x_n \rightarrow x_0$.

Proof

1. **(1.a) \implies (1.b)**: supponiamo che x_0 sia di accumulazione. Per definizione $\forall I$ intorno di x_0 , esiste $x \in I \cap E$ con $x \neq x_0$. In particolare,

$$\forall I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right), \exists x_n \neq x_0 \mid x_n \in E \cap I_n$$

cioè $x_n \in E$ e $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ che per il teorema dei carabinieri converge a x_0 .

2. **(1.b) \implies (1.a)**: supponiamo che

$$\exists \{x_n\} \subseteq E \mid \forall n, x_n \neq x_0 \wedge x_n \rightarrow x_0$$

Allora per ogni intorno I di x_0 , esiste N tale che $\forall n \geq N, x_n \in (I \cap E) \setminus \{x_0\}$ e per definizione x_0 è di accumulazione.

3. **(2.a) \implies (2.b)**: Siccome $x_0 \in \overline{E}$ si presentano due casi:
 - (a) $x_0 \in E$: basta porre $\forall n, x_n = x_0$ e $\{x_n\} \subseteq E$ quindi $x_0 \rightarrow x_0$;
 - (b) $x_0 \notin E$: ciò implica che $x_0 \in E'$ e per il primo punto $\exists \{x_0\} \subseteq E$ tale che $\forall n, x_n \neq x_0$ e $x_n \rightarrow x_0$.
4. **(2.b) \implies (2.a)**: esercizio.

Teorema Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $\lambda = \inf E$ e $\mu = \sup E$. Allora, esistono successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$ tale che $\{x_n\} \rightarrow \lambda^+$ e $\{y_n\} \rightarrow \mu^-$.

Proof Sup e inf fanno parte della chiusura (se limitati)

Senza perdita di generalità, consideriamo il caso dell'inf. Dobbiamo considerare due casi distinti:

1. $\lambda > -\infty$: per definizione di $\lambda = \inf E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \mid \lambda \leq x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ si trova quindi $x_n \in E$ tale che $\lambda \leq x_n < \lambda + \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, $x_n \rightarrow \lambda^+$.

2. $\lambda = -\infty$: per definizione E non è limitato inferiormente. Quindi, $\forall n, -n$ non è minorante e per tanto $\forall n, \exists x_n \in E$ con $x_n < -n$. Allora, chiaramente $x_n \rightarrow -\infty$ per confronto.

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato sup (e inferiormente). Allora:

1. $\sup E = \mu \in \overline{E}$ e $\inf E = \lambda \in \overline{E}$;
2. se E è limitato superiormente (o inferiormente), allora E ammette massimo (o minimo).

Teorema Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{x_n\}$ una successione limitata in \mathbb{R} . Allora, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proof Dimostrazione 1

Si danno due casi:

1. $\{x_n\}$ assume infinite volte lo stesso valore x_0 . Allora $\{n_k\}$ è la successione tale che $x_{n_k} = x_0$ banalmente $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$.
2. $\{x_n\}$ non assume infinite volte lo stesso valore, quindi assume infiniti valori distinti. Poiché $\{x_n\}$ è limitata esiste un intervallo $I_0 = [a; b]$ tale che $x_n \in I_0$. Consideriamo il punto

medio $m_0 = \frac{a+b}{2}$ e i due sottointervalli $[a; m_0]$ e $[m_0; b]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori. Scegliamo allora quest'ultimo come $I_1 = [a_0, b_0]$ e iteriamo. Consideriamo quindi gli intervalli I_n dove chiaramente

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ and } l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n) = \frac{1}{2^n}l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

e costruiamo la sottosuccessione nella seguente maniera: sia n_1 il primo n tale che $x_n \in T_1$. Consideriamo I_2 che contiene infiniti valori della successione. Allora n_2 è il primo $n > n_1$ tale che $x_{n_2} \in I_2$, e così via. Allora la sottosuccessione converge per l'assioma di continuità. Dato $\varepsilon > 0$ si scelga j tale che $\frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e si conclude che $\forall k \geq j, |x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^j} \leq \varepsilon$ e per definizione $x_{n_k} \rightarrow x_0$.

Lemma Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Allora da tale successione si può estrarre una sottosuccessione monotona.

Proof Dimostrazione 2

Per il lemma di Polya, da $\{x_n\}$ estraggo una sottosuccessione monotona $\{x_{n_k}\}$ che quindi ha limite λ . Poiché $\{x_{n_k}\}$ è limitata, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof Lemma di Polya

Sia $\{x_n\}$ una qualunque successione reale e sia $S = \{n \mid \forall m \geq n, x_m \geq x_n\}$ un insieme di indici. Si presentano due casi mutualmente esclusivi

1. S è infinito. Allora S ha forma $\{n_1, n_2, \dots\}$. Per definizione di S , per ogni k abbiamo $\forall m \geq n, x_{n_k} \leq x_m$. In particolare $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ e $\{x_{n_k}\}$ è monotona crescente.
2. S è finito (eventualmente vuoto) esiste una N tale che $\forall n \geq N, n \notin S$. Sia $n_1 = N \notin S$ per definizione di S esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} < x_{n_1}$ con $n_2 \notin S$ per definizione $\exists n_3 < n_2$ tale che $x_{n_3} < x_{n_2}$. Iterando troviamo una sottosuccessione x_{n_k} strettamente decrescente.

Teorema Equivalenza convergenza e Cauchy

Una successione $\{x_n\}$ reale converge se e solo se è di Cauchy.

Lemma

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in \mathbb{R} . Allora:

1. la successione è limitata;
2. se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$, allora $\{x_n\} \rightarrow L$.

Proof Dimostrazione del lemma

1. Per definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$, esiste N tale che $\forall n, m \geq N$, si ha $|x_n - x_m| < \varepsilon$. In particolare, $\forall n \neq N$ (con $m = N$), si ha che

$$|x_n - x_N| < 1$$

da cui

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1, \quad \forall n \neq N$$

e quindi posto $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$ risulta quindi $\forall n, |x_n| \leq M$ e quindi $\{x_n\}$ è limitata.

2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e supponiamo che esista $\{x_{n_k}\}$ sottosuccessione di $\{x_n\}$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow L$. La tesi è che $x_n \rightarrow L$. Per ipotesi, fissati $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \mid \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$(\{x_n\})$ è di Cauchy

$$\exists K \mid \forall k \geq K, |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$(\{x_{n_k}\} \rightarrow L)$. Sia quindi $n \geq N$ e fissiamo $k \geq \max\{K, N\}$ cosicché $k \geq N \implies n_k \geq k \geq N$. Pertanto, vale $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$. Quindi

$$\forall n \geq N, |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon$$

e quindi per definizione $x_n \rightarrow L$.

Proof Equivalenza convergenza e Cauchy

La successione $\{x_n\}$ è limitata per il lemma. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a $L \in \mathbb{R}$. Per il secondo punto del lemma, $x_n \rightarrow L$ e quindi converge.

La definizione di una successione di Cauchy è la stessa nei complessi e anche quella di convergenza. Vale sempre il medesimo teorema.

In particolare, mostriamo che se è di Cauchy, allora converge. Notiamo che, dato un numero complesso w banalmente

$$\begin{cases} |\Re w| \\ |\Im w| \end{cases} \leq |w| \leq |\Re w| + |\Im w|$$

Mostriamo che $z_n \rightarrow \alpha$ se e solo se $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$. Infatti,

$$\begin{cases} |\Re z_n - \Re \alpha| \\ |\Im z_n - \Im \alpha| \end{cases} \leq |z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha|$$

poiché $z_n \rightarrow \alpha$ se e solo se $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$, le dis di sind ice che se $z_n \rightarrow \alpha$ allora $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$. Viceversa se $\Re z_n \rightarrow \Re \alpha$ e $\Im z_n \rightarrow \Im \alpha$ allora

$$|z_n - \alpha| \leq |\Re z_n - \Re \alpha| + |\Im z_n - \Im \alpha| \rightarrow 0$$

cosicché $|z_n - \alpha| \rightarrow 0$ e $z_n \rightarrow \alpha$. Analogamente, $\{z_n\}$ è di Cauchy se e solo se $\{\Re z_n\}$ e $\{\Im z_n\}$ sono di Cauchy. Siccome entrambe queste successioni sono di Cauchy nei reali, allora convergono. Quindi

$$\Re z_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \wedge \Im z_n \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \implies z_n = \Re z_n + i \Im z_n \rightarrow \alpha + i \beta$$

Anche nei complessi le serie sono analoghe. Una serie converge se se la successione delle sue somme parziali converge. La serie diverge se il suo modulo tende a infinito. Se il limite delle somme parziali non esiste, la serie è oscillante.

La medesima convergenza e successione di Cauchy si estende a tutti gli spazi metrici.

Importante: in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma non necessariamente il contrario.

Per esempio, in $(\mathbb{Q}, |r - s|)$ la successione $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $r_n \rightarrow \sqrt{2}$. Allora, questa successione è di Cauchy nei reali e anche nei razionali, in quanto la metrica è la stessa. Tuttavia, la successione non converge nello spazio metrico dato.

Definizione Spazio metrico completo

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy convergono.