

# Fisica I

Paolo Bettelini

## Contents

1	Introduzione	1
2	Vettori spostamento	1
3	Sistemi di coordinate	1
4	Cinematica	3
5	Leggi orarie	3
6	Moto arbitrario	4
7	Relatività	5
8	Esercizi	9
9	Dinamica	12

## 1 Introduzione

## 2 Vettori spostamento

- vettore spostamento: direzione, verso, lunghezza;
- somma di vettori;
- moltiplicazione con scalare reale  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ;
- modulo di un vettore;

**Proposition** Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma vettoriale

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

## 3 Sistemi di coordinate

Il punto di origine è il posto in cui viene posizionato l'osservatore. I sistemi di coordinate trattati sono esclusivamente cartesiani e con basi ortogonali. L'osservatore ha i versori delle direzioni.

Si possono quindi individuare le componenti di un vettore lungo le sue direzioni, ossia le proiezioni ortogonali del vettore lungo gli assi cartesiani. Di conseguenza, le coordinate di un vettore hanno senso solamente rispetto ad una base.

**Definizione Prodotto scalare**

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un numero reale (in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ )

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo  $\theta$  fra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Chiaramente il prodotto scalare è commutativo.

**Proposition Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma**

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

**Proposition Prodotto vettoriale con componenti**

TODO....

Da qui possiamo notare che il prodotto scalare ha lo stesso risultato per ogni base ortonormata.

**Definizione Prodotto vettoriale**

Il prodotto scalare fra due vettori risulta in un vettore (in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ )

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Dato l'angolo  $\theta$  fra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , il risultato è un vettore con modulo

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a||b| \sin \theta$$

e direzione normale al piano formato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Convenzionalmente, il verso del vettore normale è scelto secondo la regola della mano destra.

**Proposition Proprietà del prodotto vettoriale**

1.  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ ;
2.  $(\gamma \vec{a}) \wedge \vec{b} = \gamma(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

Consideriamo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , allora

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

Sapendo che

$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$$

Possiamo eseguire il prodotto esplicitamente

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x b_y \hat{z} + a_x b_z (-\hat{y}) + a_y b_x (\hat{z}) + a_y b_z \hat{x} + a_z b_x \hat{y} + a_z b_y (-\hat{x}) \\ &= [a_y b_z - a_z b_y] \hat{x} + [a_z b_x - a_x b_z] \hat{y} + [a_x b_y - a_y b_x] \hat{z} \end{aligned}$$

## 4 Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che descrive il moto di un punto materiale. Per descrivere il moto di un oggetto è necessario procurarsi un sistema di riferimento. Scegliamo quindi un'origine e una base ortonormata.

### Definizione Posizione

La *posizione* di un punto è rappresentata unicamente da un vettore  $\vec{r}(t)$ , che mostra lo spostamento fra l'origine e la sua posizione  $P(t)$  in un determinato istante di tempo.

Se vogliamo considerare la posizione solo nella direzione  $x$  possiamo calcolare

$$\hat{x}(t) = \vec{x}\vec{r}(t)$$

In generale

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\vec{r}(t) + \hat{y}\vec{r}(t) + \hat{z}\vec{r}(t)$$

La relazione fra due osservatori diversi è data da  $\vec{R} + \vec{r}'(t) = \vec{r}(t)$ .

La velocità è quindi relativa a due posizioni  $P(t)$  e  $P(t + \Delta t)$ . Lo spostamento è  $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{s}(t)$ .

### Definizione Velocità

La *velocità* di un punto rappresenta lo spostamento che il punto materiale percorre in un unità di tempo  $\vec{v}(t)$ . Allora la velocità è definita come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Il vettore della velocità si orienta verso la tangente della curva (cioè nella direzione in cui si sta spostando). Chiaramente la derivata può essere separata nelle componenti

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

dove possiamo anche dire che

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

### Definizione Accelerazione

L'*accelerazione* di un punto rappresenta il cambiamento istantaneo della velocità

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

## 5 Leggi orarie

### Proposition Caduta da una altezza

Il tempo di caduta di un oggetto da un'altezza  $h$ , soggetto a gravità costante  $g$  è dato da

$$t_{\text{caduta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con velocità

$$-\sqrt{2gh}$$

## 6 Moto arbitrario

Consideriamo un moto arbitrario  $\vec{r}(t)$ . Questo vettore punta sempre alla posizione dell'oggetto. La sua velocità  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  è un vettore sempre nella direzione della traiettoria. Definiamo allora il versore tangente

$$\hat{T}(t)v(t) = \vec{v}(t)$$

Abbiamo allora che

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left( v(t)\hat{T}(t) \right) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = a_t(t)\hat{T}(t) + v(t)\frac{d\hat{T}(t)}{dt}$$

La prima componente,  $\frac{dv(t)}{dt}\hat{T}$ , è chiamata *accelerazione tangenziale* mentre il secondo *accelerazione centripeta* (entrambi sono perpendicolari fra di loro).

Per studiare il significato di tale termine, cominciamo partendo dall'identità  $\hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t) = 1$ . Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t) \right) &= 0 \\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \cdot \hat{T}(t) + \hat{T}(t) \cdot \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0 \\ \hat{T}(t) \cdot \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dall'analisi differenziale troviamo che

$$\left| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dl}{\Delta t}$$

e l'arco di circonferenza

$$s = R d\theta$$

dove  $R$  è la lunghezza della retta fino al punto di rotazione (raggio di curvatura, ossia il raggio del cerchio osculatore). Mettendo assieme queste due informazioni troviamo che

$$\left| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{S}{\Delta t} \frac{1}{R} \right] = \frac{v}{R}$$

Adesso possiamo scrivere

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

e quindi  $\frac{dv}{dt}$  è la componente tangenziale e  $\frac{v^2}{R}$  quella centripeta. Notiamo che l'accelerazione centripeta è più piccola più il cerchio è grande, quindi nulla quando andiamo dritti.

Nel caso specifico del moto circolare,

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} = \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

con  $\omega = \frac{v}{R}$ .

## 7 Relatività

### Esercizio Moto di precessione

Consider  $\vec{a}(t)$  and  $\vec{w}$  fixed with the condition that

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{a}$$

We first note that  $|\vec{a}(t)|$  is constant. We have that

$$\frac{d}{dt}|\vec{a}(t)|^2 = \frac{d}{dt}\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \vec{a} = 2\vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{a}) = 0$$

We define our cartesian system with the condition that  $\hat{z}$  has the direction direction and length as  $\vec{w}$ , thus  $\vec{w} = w\hat{z}$ . As a second fact we have that  $a_z$  is independent of time. Indeed,

$$\frac{da_z}{dt} = \frac{d\vec{a} \cdot \hat{z}}{dt} = \hat{z} \frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{z} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{a}) = 0$$

so it is constant. Geometrically,  $\vec{a}$  creates a cone. Now,  $\vec{a}_\perp^2 = a^2 - a_z^2$  which is independent of  $t$ , and  $a_x = a_\perp \cos \phi$  where  $\phi$  is the angle between  $\hat{x}$  and the projection  $a_\perp$  (on the  $xy$  plane).

$$\begin{cases} a_x(t) = a_\perp \cos \phi(t) \\ a_y(t) = a_\perp \sin \phi(t) \\ a_z \end{cases}$$

We now have

$$\begin{aligned} \frac{da_x}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_x = -\omega a_y \\ \frac{da_y}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_y = \omega a_x \\ \frac{da_z}{dt} &= (\vec{w} \wedge \vec{a})_z = 0 \end{aligned}$$

We can substitute the parametrization

$$\begin{aligned} \frac{da_x}{dt} &= -\omega a_y \implies a_\perp (-\sin(\phi(t))) \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\omega a_\perp \sin \phi(t) \\ \frac{da_y}{dt} &= \omega a_x \implies a_\perp \cos(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt} = \omega a_\perp \cos \phi(t) \\ \frac{da_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

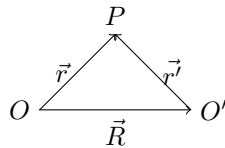
We note that simplifying these equations yields the same equation

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

for  $a_\perp \neq 0$ , which is obvious given the relation that we had established. Thus, the final solution is  $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$ . In conclusion,

$$\begin{cases} a_x = a_\perp \cos(\omega t + \phi_0) \\ a_y = a_\perp \sin(\omega t + \phi_0) \\ a_z = a_z \end{cases}$$

Vogliamo mettere in relazione la descrizione del moto di un punto materiale con le osservazioni fatte da due osservatori  $O$  e  $O'$ . Definiamo  $\vec{r}(t)$  come l'osservazione di  $O$  e  $\vec{r}'(t)$  come quella di  $O'$ . Definiamo anche  $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$ .



Definiamo gli assi  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  per l'osservatore  $O$  e  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  e  $\hat{u}_3$  per  $O'$ . Chiaramente, questi versori sono dipendenti dal tempo per l'osservatore che non le usa (a meno che i due osservatori non coincidano). Dato questo sistema, abbiamo allora

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \hat{u}_i(t)$$

Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i(t)}{dt} \hat{u}_i(t) + \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} x'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i(t)}{dt} \hat{u}_i(t) + \sum_{i=1}^3 \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} x'_i(t) \end{aligned}$$

The first term

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i(t)}{dt} \hat{u}_i(t) = \vec{v}'(t)$$

is what  $O'$  perceives as the velocity,  $\vec{v}'(t)$ . Il termine dice di quanto cambiano le coordinate nel sistema di riferimento di  $O'$ , ossia la sua velocità. Il secondo termine

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} x'_i(t)$$

compensa il primo. Abbiamo quindi che

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'(t) + \sum_{i=1}^3 \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} x'_i(t)$$

### Teorema

Esiste un vettore  $\vec{\omega}(t)$  tale che

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{u}_i$$

Ciò vorrebbe dire che la terna di assi sta precedendo attorno alla direzione di  $\vec{\omega}$ . Tutte e 3 i versori stanno ruotando attorno allo stesso asse (infatti, non vi è l'indice  $i$  nel termine  $\vec{\omega}$ ). Tuttavia, il vettore  $\vec{\omega}$  stesso non è costante. Per dimostrare ciò, dobbiamo dare la forma di  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j \wedge \frac{d\hat{u}_j}{dt}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{u}_i \\
&= \vec{V} + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'(t)
\end{aligned}$$

Verifichiamo che la forma di  $\vec{\omega}$  soddisfi la condizione data, quindi

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x &= \omega_y u_i^z - \omega_z u_i^y \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left\{ u_i^z \left[ u_j^x \frac{du_j^x}{dt} - u_j^y \frac{du_j^z}{dt} \right] - u_i^y \left[ u_j^x \frac{du_j^y}{dt} - u_j^z \frac{du_j^x}{dt} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{du_j^x}{dt} [u_i^z u_j^z + u_i^y u_j^y] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{du_j^x}{dt} [\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j - u_i^x u_j^x] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{du_j^x}{dt} [\delta_{i,j} - u_i^x u_j^x] - \frac{du_j^y}{dt} u_i^y u_j^x - \frac{du_j^z}{dt} u_i^z u_j^x \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{du_j^x}{dt} \delta_{i,j} - u_j^x \left[ u_i^x \frac{du_j^x}{dt} + \frac{du_j^y}{dt} u_i^y + \frac{du_j^z}{dt} u_i^z \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^x \left[ u_i^x \frac{du_j^x}{dt} + \frac{du_j^y}{dt} u_i^y + \frac{du_j^z}{dt} u_i^z \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^x \left[ \hat{u}_i \cdot \frac{d\hat{u}_j}{dt} \right]
\end{aligned}$$

Siccome

$$0 = \frac{\hat{u}_i}{dt} \cdot \hat{u}_j + \hat{u}_i \frac{\hat{u}_j}{dt}$$

Allora

$$\hat{u}_i \frac{\hat{u}_j}{dt} = -\frac{\hat{u}_i}{dt} \cdot \hat{u}_j$$

e quindi

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x &= \omega_y u_i^z - \omega_z u_i^y \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^x \left[ \hat{u}_j \cdot \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du_i^x}{dt} \\
&= \frac{du_i^x}{dt}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_x = \frac{du_i^x}{dt} \quad (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_y = \frac{du_i^y}{dt} \quad (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i)_z = \frac{du_i^z}{dt}$$

Tornando alla velocità,

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' + \sum_{i=1}^3 x'_i (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{u}_i \\
&= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'
\end{aligned}$$

Troviamo ora la medesima relazione per l'accelerazione. Siccome

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{u}_i + \frac{dx'_i}{dt} \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right] \\
&= \vec{a}' + \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \frac{d\hat{u}_i}{dt} \\
&= \vec{a}' + \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} (\vec{\omega} \wedge \hat{u}_i) \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{u}_i \\
&= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'
\end{aligned}$$

Possiamo trovare la velocità

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{A} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt} \\
&= \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')
\end{aligned}$$

L'ultimo termine  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$  è l'accelerazione centrifuga. Il termine  $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$  è l'accelerazione di Coriolis.



## 8 Esercizi

**Esercizio** Un corpo viene lasciato cadere da una certa altezza con velocità iniziale nulla: quanto tempo  $t$  si deve attendere perché a parte da quell'istante il corpo percorra uno spazio di  $s = 20m$  nel tempo  $\tau = 1s$

La funzione di caduta è data da  $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned}20 &= \int_t^{t+1} v_0 + ax \, dx \\20 &= \frac{1}{2}a(t+1)^2 - \frac{1}{2}at^2 \\40 &= a(t+1)^2 - at^2 \\40 &= a(t^2 + 2t + 1) - at^2 \\40 &= at^2 + 2at + a - at^2 \\40 &= 2at + a \\40 - a &= 2at \\t &= \frac{40 - a}{2a}\end{aligned}$$

**Esercizio** Il moto nel piano  $x, y$  di una particella è definito da

$$\begin{cases} x = \alpha t^2 + \beta t \\ y = \alpha t^2 - \beta t \end{cases}$$

Con  $\alpha = 0.1m/s^2$  e  $\beta = 1m/s$ . Si calcolino i moduli della velocità e dell'accelerazione all'istante  $\tau = 10s$

Calcoliamo le velocità

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t + \beta \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2\alpha t - \beta \end{cases}$$

e le accelerazioni

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\alpha \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2\alpha \end{cases}$$

Il modulo della velocità è pari a

$$\begin{aligned}|v| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\alpha^2 t^2 + 4\alpha\beta t + \beta^2 + 4\alpha^2 t^2 - 4\alpha\beta t + \beta^2} \\ &= \sqrt{8\alpha^2 t^2 + 2\beta^2}\end{aligned}$$

Il modulo della accelerazione è pari a

$$|a| = \sqrt{8}\alpha$$

**Esercizio** Un'automobile in moto con velocità di modulo  $v_0$  comincia a frenare e, muovendosi di moto rettilineo, si arresta in uno spazio  $l$ . Si determini l'accelerazione scalare media di frenamento nei tre casi seguenti:

1. l'accelerazione scalare ha valore  $A$  costante nel tempo: Abbiamo che  $v = v_0 + At$  e  $s = v_0 t + \frac{1}{2}At^2$ . Chiamiamo allora  $t^*$  il tempo per cui  $v = 0$ . Allora  $v_0 + At^* = 0 \implies t^* = -\frac{v_0}{A}$ .

Sostituiamo  $t^*$  nell'accelerazione media

$$a_m = \frac{v - v_0}{-t^*} = \frac{v_0}{-t^*} = A$$

2. l'accelerazione dipende dalla velocità scalare con la legge:  $a = b(v + v_0)$ . Dobbiamo trovare

$$\frac{dv}{dt} = b(v + v_0)$$

quindi

$$v = ce^{\xi t} + V \quad \frac{dv}{dt} = c\xi e^{\xi t} + V$$

con  $V = -v_0$ ,  $\xi = b$  e  $c$  libera. Siccome  $v(0) = v_0$  allora  $c = 2v_0$  e quindi  $v(t) = v_0(2e^{bt} - 1)$ . Per calcolare la posizione integriamo nuovamente

$$\frac{ds}{dt} = v_0(2e^{bt} - 1)$$

e allora

$$s(t) = \frac{2v_0}{b}e^{bt} - v_0t + s_0$$

Siccome  $s(0) = 0 = -\frac{2v_0}{b}$ , troviamo

$$s(t) = \frac{2v_0}{b}(e^{bt} - 1) - v_0t$$

Per il tempo di arresto abbiamo che  $v_0(2e^{bt} - 1) = 0$  e quindi  $t^* = -\frac{\ln 2}{b}$ . Quindi

$$l = s(t^*) = \frac{v_0}{b}(\ln 2 - 1)$$

$$b = \frac{v_0}{l}(\ln 2 - 1)$$

Quindi l'accelerazione media è data da

$$a_m = \frac{-v_0}{t^*} = \frac{v_0^2 \ln 2 - 1}{t \ln 2}$$

3. l'accelerazione varia linearmente nel tempo  $a = \gamma t$ : Integrando dobbiamo trovare

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$s(t) = v_0t + \frac{1}{6}\gamma t^3$$

siccome  $s_0 = 0$ . ... Infine,

$$a_m = \frac{2v_0^2}{3l}$$

**Esercizio** Un corpo di piccole dimensioni viene lanciato verticalmente verso l'alto all'istante  $t = 0$ . Nella fase di salita e in quella successiva di discesa, l'oggetto passa dalla quota  $h$ , rispetto alla posizione di lancio, agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , rispettivamente: si dimostri che vale la relazione  $t_1 t_2 = 2h/g$  (no attrito). La legge oraria è data da  $s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ . Dal testo abbiamo  $s(t_1) = s(t_2) = h$  e  $at^2 - 2v_0t + 2h =$

0. Le soluzioni sono

$$t_1 t_2 = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{2h}{g}}$$

e quindi

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

**Esercizio** Un corpo viene lanciato orizzontalmente da altezza  $h_0$  rispetto al suolo, con velocità  $v_0$ . Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli:

1. la componente tangenziale  $a_T$  e quella normale  $a_N$  dell'accelerazione del corpo rispetto alla traiettoria, in un generico punto di altezza  $h$ : abbiamo che  $P_0 = (0, h_0)$  e  $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$ . Allora

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ z = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il vettore tangente è il vettore della velocità. Vogliamo trovare la legge che lega il tempo all'asse  $z$ . Quindi  $\vec{v} = v_0 \hat{x} - \sqrt{2g(h_0 - z)} \hat{z}$  e  $|v| = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - z)}$ . Se consideriamo  $\alpha$  come l'angolo fra il vettore di gravitazione (asse  $x$ ) e il vettore normale,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \hat{x}}{|v|} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - z)}}$$

che dipende da  $z$ . Proiettiamo la gravità sulle componenti, quindi  $a_T = g \sin \alpha$  e  $a_N = g \cos \alpha$ , che si calcola facilmente con la relazione pitagorica del seno e coseno.

2. lo spazio  $s$  percorso dal corpo dall'istante di lancio  $t = 0$  a quello in cui tocca il suolo:

$$\int_0^{\text{gittata}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

## 9 Dinamica

**Principio di relatività:** Non esiste nessun esperimento in grado di decidere se noi siamo in quiete rispetto allo spazio assoluto o ci stiamo muovendo in un moto rettilineo uniforme. Alternativamente, tutte le leggi della fisica sono equivalenti indipendentemente dalla direzione dell'esperimento e dal sistema di riferimento (inerziali).

Il principio della relatività risale a Galileo nel dialogo, 1632.

### Leggi di Newton:

1. un corpo mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non agiscono forze esterne;
2.  $\vec{F} = m\vec{a}$ ;
3. se un corpo 1 esercita una forza  $F_{1,2}$  su un corpo 2, allora il corpo 2 esercita una forza  $F_{2,1} = -F_{1,2}$  sul corpo 1.

La prima è in realtà un caso particolare della seconda.

L'espressione  $\vec{F} = m\vec{a}$  è una relazione fra causa ed effetto. La forza è la causa, che determina direttamente le accelerazioni.

Tuttavia, è necessario prima definire il concetto di massa. Ciò può essere fatto con una serie di esperimenti e osservazioni. Consideriamo due palline attaccate ai capi di una molla:

1.  $\vec{a}_1 \neq 0 \implies \vec{a}_2 \neq 0$ ;
2.  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$  hanno verso opposto;
3. il rapporto

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$$

è indipendente dalla interazione, bensì solamente dalle caratteristiche delle particelle;

4. se i due corpi sono dello stesso materiale, ma di volumi diversi, allora

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{V_2}{V_1}$$

Allora, per ogni coppia di corpi, definiamo

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$$

Dobbiamo quindi scegliere una massa di base sulla quale basare le altre misure. Sperimentalmente, troviamo anche che  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ .

Conservazione della quantità di moto

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

e

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

La derivata della quantità di moto è data da

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_1\vec{Q}_1 + m_2\vec{Q}_2$$

Il vettore della quantità di moto nel tempo, di due moti che interagiscono fra di loro, è sempre il medesimo, e quindi si conserva.