

Precorso

Paolo Bettelini

Contents

1	Connettori logici	3
2	Teoria ingenua degli insiemi	3
2.1	Operazioni tra insiemi	4
2.2	Proprietà delle operazioni fra insiemi	6
2.3	Corrispondenze e funzioni	7
3	Equazioni	10
3.1	Legge di cancellazione	10
3.2	Polinomi	10
3.3	Moltiplicazione fra polinomi	11
3.4	Divisione fra polinomi	11
3.5	Equazioni algebriche	12
3.6	Soluzioni di equazioni polinomiali semplici	13
4	Disequazioni	14
5	Potenze di numeri	15
5.1	Potenze di numeri reali con esponenti interi	15
5.2	Radicali	15
5.3	Potenze di numeri reali con esponenti razionali positivi	16
5.4	Potenze di numeri reali con esponenti reali	17
6	Disequazioni son valore assoluto	18
7	Logaritmi	18
8	Sistemi lineari	20
9	Goniometria	23
9.1	Angoli associati	25
9.2	Angoli complementari	25
9.3	Equazioni e disequazioni goniometriche	27
9.4	Equazioni omogenee	30
10	Disequazioni goniometriche	33
11	Trigonometria	34
12	Geometria anlitica	37
12.1	Operazioni tra punti	37
12.2	Retta nel piano	37
12.3	Fasci di rette	39
12.4	Circonferenze	41
12.5	Recipoca posizione fra retta e circonferenza	41

12.6 Coniche	44
13 Combinatoria	51

1 Connettori logici

Definizione Proposizione

Una *proposizione* è un'espressione che può essere vera o falsa.

Definizione Connettore logico e

Date due proposizioni P e Q , $P \wedge Q$, è un'altra proposizione vera solamente se P è vera e Q è vera.

\wedge	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	falso
vero	falso	falso
vero	vero	vero

Definizione Connettore logico oppure

Date due proposizioni P e Q , $P \vee Q$, è un'altra proposizione vera se P è vera oppure Q è vera (o entrambe sono vere).

\vee	falso	vero
falso	falso	falso
falso	vero	vero
vero	falso	vero
vero	vero	vero

2 Teoria ingenua degli insiemi

Definizione Insieme ingenuo

Un *insieme* è una collezione di oggetti di qualunque tipo, detti *elementi dell'insieme*. Diciamo che un elemento a appartiene ad un insieme A con $a \in A$, mentre $a \notin A$ se non appartiene.

Esempio Insieme

$$A = \{3, 5, -3, \sqrt{5}, \phi\}$$

dove ϕ è una funzione.

È importante notare che l'ordine degli elementi non ha importanza. Un insieme può contenere tra i suoi elementi anche altri insiemi.

Un insieme viene spesso descritto per mezzo di una proprietà comune dei suoi elementi, piuttosto che per elencazione estensiva.

Esempio Insieme costruito per proprietà

$$D = \{n \mid n = m^2 - 1, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

In generale, può essere difficile determinare se un elemento appartiene ad un certo insieme o meno. Per esempio, non è sempre facile determinarne se un grande numero appartiene all'insieme di tutti i

numeri primi. In alcuni casi, è difficile addirittura stabilire se un insieme contenga elementi, o quanti ne contenga. Tuttavia, questa difficoltà non implica che l'insieme non sia ben definito.

Definizione Sottoinsieme

Dati due insiemi A e B , diciamo che A è un *sottoinsieme* di B , se ogni elemento di A è un elemento di B .

$$A \subseteq B \iff B \supseteq A \iff \forall a \in A, a \in B$$

In caso contrario, diciamo che $A \not\subseteq B$ oppure $B \not\supseteq A$

Esempio Sottoinsieme

$$\{1, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \{ \text{insieme dei numeri dispari} \}$$

$$\{1, 3, 5, 8, 11\} \not\subseteq \{ \text{insieme dei numeri dispari} \}$$

Definizione Sottoinsieme proprio o stretto

Dati due insiemi A e B , diciamo che A è un *sottoinsieme proprio* di B , se ogni elemento di A è un elemento di B ma $A \neq B$.

$$A \subset B \iff B \supset A \iff \forall a \in A, a \in B \wedge A \neq B$$

In caso contrario, diciamo che $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

Esempio Sottoinsieme proprio

$$\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 4, 5\}$$

Alcuni insiemi convenzionali sono:

- **Insieme dei numeri naturali:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;
- **Insieme dei numeri interi:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- **Insieme dei numeri razionali:** $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$;
- **Insieme dei numeri reali:** \mathbb{R} ;
- **Insieme dei numeri complessi:** $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

2.1 Operazioni tra insiemi

Definizione Intersezione

Dati degli insiemi A e B , l'*intersezione* di A e B è data da gli insiemi che stanno sia in A che in B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Definizione Unione

Dati degli insiemi A e B , l'*unione* di A e B è data da gli insiemi che stanno o in A o in B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Definizione Differenza

Dati degli insiemi A e B , la *differenza* di A e B è data da gli insiemi che stanno in A ma non in B

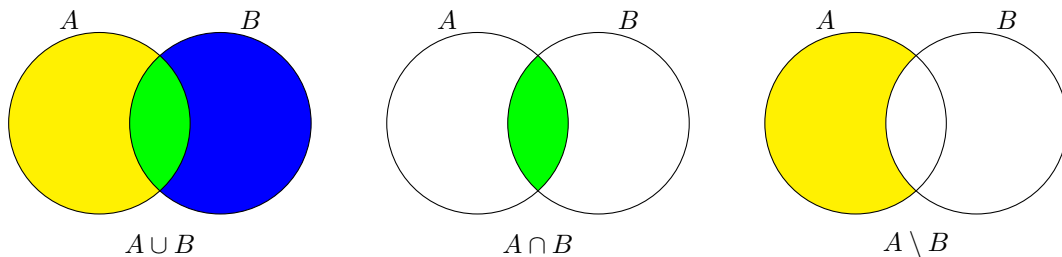
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Esempio Intersezione

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{\text{insieme dei numeri primi}\} = \{1, 9\}$$

$$\{\text{insieme dei numeri primi}\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{\text{insieme dei numeri primi} > 13\}$$

Nota che, convenzionalmente, nella definizione dei numeri primi il numero 1 è escluso.



Il disegno suggerisce la seguente proposizione

Proposition

Dati due insiemi A e B

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

Si può dimostrare separatamente che ogni elemento del primo insieme appartiene al secondo e viceversa. Prendiamo quindi $x \in A$, bisogna mostrare che $x \in A \setminus B$ oppure $x \in A \cap B$, siccome si tratta di una intersezione fra due insiemi. Abbiamo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni deve essere vera:

1. $x \in A \wedge x \notin B$
2. $x \in A \wedge x \in B$

Se $x \in B$, allora $x \in A \cap B$. Se $x \notin B$, allora $x \in A \setminus B$. Di conseguenza, almeno una delle due è vera.

Viceversa, sia $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Abbiamo quindi che almeno una delle seguenti proposizioni è vera

1. $x \in A \wedge x \notin B$ quindi $x \in A \setminus B$
2. $x \in A \wedge x \in B$ quindi $x \in A \cap B$

Se la prima è vera, entrambi $x \in A$ e $x \notin B$ sono vere (in particolare, $x \in A$ è vera). Se la seconda è vera, entrambe $x \in A$ e $x \in B$ sono vere (in particolare, $x \in A$ è vera). In ogni caso, $x \in A$ è vera.

2.2 Proprietà delle operazioni fra insiemi

Proposition

Dati tre insiemi A , B e C

- **Intersezione commutativa:** $A \cap B = B \cap A$
- **Unione commutativa:** $A \cup B = B \cup A$
- **Intersezione associativa:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Unione associativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Di conseguenza, $A \cap B \cap C$ e $A \cup B \cup C$ non sono ambigue.

Data una famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ dove I è un insieme di indici, è possibile eseguire l'unione e intersezioni

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

e

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

ossia rispettivamente l'insieme che contiene tutti gli elementi di tutti gli insiemi A_i e quello che tutti gli insiemi A_i hanno in comune.

Proposition

Dati due insiemi A e B

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Chiaramente, nessun elemento soddisfa la condizione data, in quanto un elemento dovrebbe sia appartenere ad A e non appartenere ad A , e sia appartenente a B che non appartenente a B .

Definizione Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B , il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle coppie ordinate

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Esempio Prodotto cartesiano

Dati $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ abbiamo

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Questa operazione non è commutativa, in quanto le coppie ordinate di $A \times B$ e $B \times A$ hanno le coppie di elementi scambiate.

Definizione Prodotto cartesiano generalizzato

Dati degli insiemi A_1, A_2, \dots, A_n , il loro *prodotto cartesiano* è dato dall'insieme delle n-uple

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \cdots a_n \in A_n\}$$

Chiaramente, per ogni insieme A , $A \times \emptyset = \emptyset$

2.3 Corrispondenze e funzioni

Definizione Corrispondenza

Dati due insiemi A e B , una *corrispondenza* \sim fra A e B è una legge che lega gli elementi di A e B

$$\sim \subseteq A \times B$$

Diciamo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ se la tupla (a, b) è in \sim .

Definizione Operatore divisione

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, possiamo mettere in relazione m e n , dicendo che m divide n , scrivendo $m \mid n$.

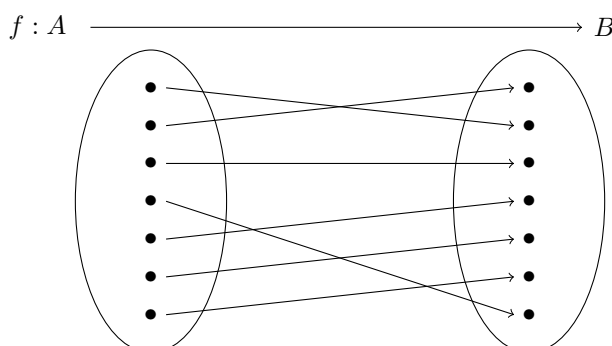
La divisione fra interi induce una corrispondenza $\sim \subseteq \mathbb{N}^2$ dove $x \sim y \iff x \mid y$. Alcuni elementi di questa corrispondenza sono $(1, 2), (1, 100), (2, 50), (50, 250)$. Possiamo anche scrivere $50 \sim 250$ oppure $50 \not\sim 251$.

Definizione Funzione

Dati due insiemi A e B , una *funzione* ϕ da A a B , scritta $\phi: A \rightarrow B$ è una corrispondenza da A a B in cui per ogni tupla (a, b) , non vi sono altre tuple (a, c) dove $c \neq b$, e per ogni $a \in A$ vi è una corrispondenza (a, b) .

$$\phi \subseteq A \times B$$

L'insieme A è detto *dominio*, mentre l'insieme B è detto *codominio*.



Ogni funzione deve avere una (sola) freccia che parte da ogni punto.

In parole povere ciò significa che una funzione deve associare ogni elemento di A ad un elemento di B , ma solo ed unicamente uno. Elementi di A diversi possono essere in relazione con lo stesso elemento di B .

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{Z}$ data da $a \sim b \iff b^2 = a$ è una funzione.

$$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

La corrispondenza opposta $a \sim b \iff a^2 = b$ non è una funzione perché non tutti gli elementi hanno una corrispondenza.

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{R}$ a $B = \mathbb{R}^+$ data da $a \sim b \iff a = b^2$ è una funzione, ma non l'inverso.

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Esempio Funzione

La corrispondenza da $A = \mathbb{R}^+$ a $B = \mathbb{R}^+$ data da $a \sim b \iff a = b^2$ è una funzione, e pure il suo inverso da B ad A .

$$\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Definizione Funzione identica

Dato un insieme A , una funzione

$$\phi: A \rightarrow A$$

è detta *identica* I_A , se ogni elemento viene relazionato con sè stesso.

Definizione Suriettività

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è detta *suriettiva* se per ogni elemento $b \in B$, esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Definizione Iniettività

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è detta *iniettiva* se per ogni elemento $b \in B$, esiste al massimo un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Definizione Iniettività

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è detta *biettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Una funzione biettiva è quindi una corrispondenza dove ogni elemento viene relazionato con solo un elemento. Ogni funzione biettiva è sempre reversibile.

Definizione Funzione inversa

Data una funzione $\phi: A \rightarrow B$ biettiva, è possibile definire la *funzione inversa* $\phi^{-1}: B \rightarrow A$, che è data alla corrispondenza con gli elementi delle coppie ordinate invertite.

Definizione Composizione di funzioni

Dati tre insiemi A , B e C e le funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, dove f è suriettiva, la *composizione* di f e g è una funzione data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proposition Composizione di funzione e inversa

Data una funzione $\phi: A \rightarrow B$ e la sua inversa $\phi^{-1}: B \rightarrow A$ abbiamo che

$$\phi \circ \phi^{-1} = I_B$$

$$\phi^{-1} \circ \phi = I_A$$

Esempio Surriettività e iniettività

La funzione $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ data da $y = x^2$ è suriettiva ma non iniettiva.

Esempio Surriettività e iniettività

La funzione $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ data da $y = x^2$ è iniettiva ma non suriettiva.

Esempio Biettività

La funzione $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ data da $y = x^2$ è iniettiva e suriettiva, quindi biettiva.

3 Equazioni

3.1 Legge di cancellazione

Teorema Legge di cancellazione

Dati $a, c, b \in \mathbb{R}$,

$$ac = bc \iff a = b$$

purché $c \neq 0$

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ potrebbe introdurre delle nuove soluzioni (come quando $h(x) = 0$) oppure perdere delle soluzioni.

Per semplificare $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ è necessario prima cercare le soluzioni di $h(x) = 0$. Successivamente, cercare le soluzioni di $f(x) = g(x)$. Le soluzioni sono l'unione degli insiemi soluzioni di così trovate.

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f^2(x) = g^2(x)$ è possibile, ma potrebbe introdurre nuove soluzioni (che vanno testate nell'equazione originale). Invece, non possiamo ricavare le soluzioni di $f(x) = g(x)$ da $f^2(x) = g^2(x)$.

Il passaggio da $f(x) = g(x)$ a $f^3(x) = g^3(x)$ è possibile in quanto il cubo è una funzione iniettiva.

Teorema

Data una equazione $f(x) = g(x)$, le sue soluzioni sono equivalenti a $f^n(x) = g^n(x)$ se n è dispari. Nel caso n fosse pari, l'equazione $f^n(x) = g^n(x)$ può essere ridotta a $f(x) = g(x)$ e $f(x) = -g(x)$.

3.2 Polinomi

Definizione Polinomio \mathbb{R}

Un *polinomio* a coefficienti in \mathbb{R} è un'espressione del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

dove i *coefficienti* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Un polinomio p definisce una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} ponendo $\alpha \rightarrow a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$.

Definizione Grado di un polinomio

Dato un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, il *grado* del polinomio, denotato $\deg p(x)$, è il massimo indice i tale che $a_i \neq 0$. Il coefficiente a_i viene chiamato *coefficiente direttivo*.

Il polinomio nullo $p = 0$ non ha quindi un grado. Tuttavia, a volte si dice che il polinomio nullo abbia grado $-\infty$ oppure -1 .

I polinomi di grado 0 sono quindi della forma $p(x) = a$ per $a \neq 0$.

Esempio Grado di polinomio

Il grado del polinomio $3 + 2x + 0x^2 - 4x^3 + 0x^4$ è 3.

3.3 Moltiplicazione fra polinomi

I polinomi si possono sommare e moltiplicare secondo le usuali regole.

Teorema Moltiplicazione di polinomi

Dati i polinomi

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

Il loro prodotto è dato da

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^n c_i$$

dove

$$c_i = \sum_{h=0}^i a_h b_{i-h}$$

le operazioni tra polinomi si comportano bene rispetto alla valutazione. Se $p(x)+q(x) = h(x)$ e $p(x)q(x) = k(x)$, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $p(\alpha) + q(\alpha) = h(\alpha)$ e $p(\alpha)q(\alpha) = k(\alpha)$.

3.4 Divisione fra polinomi

Proposition Divisione fra polinomi

Dati due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ con $g(x) \neq 0$. Allora, esistono e sono univocamente determinati due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

con $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Proof Esistenza del quoziente e resto

Poniamo dei valori iniziali a $q(x)$ e $r(x)$ ponendo $q_0(x) = 0$ e $r_0 = f(x)$ (affinché l'equazione rimanga soddisfatta).

Se fosse $r_0(x) = 0$ o $\deg r_0(x) < \deg g(x)$ (cioè se il dividendo è il polinomio nullo o ha il grado minore del divisore, ho già finito). Altrimenti, abbiamo la situazione in cui $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ e $a_m \neq 0$ e $m \leq n$.

A questo punto aggiustiamo il quoziente, ponendo quindi

$$q_1(x) = q_0(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

e trovo

$$\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - q_1(x)g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_0 + \dots + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b_mx^m \right) \\ &= a_nx^n - a_nx^n + \dots \end{aligned}$$

E quindi rimangono solamente termini di grado minore di n . Dunque $r_1(x) = 0$ oppure $r_1(x)$ ha grado minore di $r_0(x) = f(x)$ (cioè il grado è diminuito).

Se $r_1(x) = 0$ o $\deg r_1(x) < \deg g(x)$ ho finito. Se $\deg r_1(x) \geq \deg g(x) = m$ si ripete il ragionamento. Eventualmente verranno trovati resti di gradi via via più piccoli (o addirittura resto nullo). Il processo termina quando il resto è nullo $r_k(x) = 0$ o il suo grado è minore del grado del quoziente $g(x)$. Il quoziente e il resto sono quindi $q_k(x)$ e $r_k(x)$.

Proof Unicità del quoziente e resto

Supponiamo che $f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$ con $r(x) = 0$ o $\deg r(x) < \deg g(x)$ e $r'(x) = 0$ o $\deg r'(x) < \deg g(x)$.

Partendo da $g(x)q(x) - g(x)q'(x) = r'(x) - r(x)$, giungiamo a $q(x)(q(x) - q'(x)) = r'(x) - r(x)$. Per la dimostrazione supponiamo che quoziente e resto non siano unici, quindi che $q(x) \neq q'(x)$ oppure $q(x) - q'(x) \neq 0$, il primo membro avrebbe grado almeno n . Il secondo membro è nullo o ha grado minore di n . Questa è una contraddizione, confutando quindi la supposizione. Il quoziente è quindi unico e, naturalmente, anche il resto.

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{Divisore } g(x) \\
 \text{Dividendo } f(x) & \text{Quoziente } q(x) \\
 \hline
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 \hline
 & \text{Resto } r(x)
 \end{array}$$

Esempio Divisione polinomi

Prendiamo $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $g(x) = 2x^3 + 2$. Allora $f(x) = g(x)(2x^2 + \frac{3}{2}) + (-2x^2 - x - 2)$

3.5 Equazioni algebriche

Definizione Equazione algebrica

Un'equazione *algebrica* è una equazione del tipo $f(x) = 0$ dove $f(x)$ è un polinomio non-nullo.

Il grado di una equazione algebrica è il grado del polinomio.

Teorema Teorema del resto

Dato un polinomio $p(x)$ e un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, la divisione di $p(x)$ per $x - \alpha$ ha resto $p(\alpha)$.

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + p(\alpha)$$

Proof Teorema del resto

Dividendo $p(x)$ per $x - \alpha$ troviamo che $f(x)$ è uguale a

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$$

dove $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg x - \alpha = 1$. Quindi $r(x)$ è costante. Abbiamo allora $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$ e quindi

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$$

e quindi $r(x) = p(\alpha)$.

Corollario

Il valore α è soluzione di $f(x) = 0$ se e solo se $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ per qualche $q(x)$.

Corollario Numero di soluzioni di equazione algebriche

Se $f(x) = 0$ è un'equazione algebrica di grado n , allora ha al massimo n soluzioni distinte.

Proof Numero di soluzioni di equazione algebriche

Siano a_1, a_2, \dots, a_t soluzioni distinte di $f(x) = 0$ dove $f(x)$ non è nullo. Dobbiamo dimostrare che $t < n$. Per il teorema del resto $f(x) = (x - a_1)q_1(x)$ per qualche polinomio $q_1(x)$. Lo stesso vale per a_2, a_3, \dots . Sostituendo otteniamo quindi $0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)q_1(a_2)$. Poiché $a_1 \neq a_2$, abbiamo allora (per il principio di annullamento) che $q_1(a_2) = 0$. Per il teorema del resto $q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)$ per qualche $q_2(x)$, e quindi $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$. Per induzione, giungiamo a $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_t)q_t(x)$ e confrontando i gradi troviamo che $t \leq n$.

3.6 Soluzioni di equazioni polinomiali semplici

L'equazione di primo grado $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ ha un'unica soluzione data da $x = -\frac{b}{a}$.

L'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$ ha

$$\begin{cases} 0 & \Delta < 0 \\ 1 & \Delta = 0 \\ 2 & \Delta > 0 \end{cases}$$

soluzioni date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A partire dalle equazioni di secondo grado, non esiste una formula risolutiva.

Esempio

La seguente equazione non è algebrica, in quanto gli oggetti non sono polinomi, ma potremo ricondurla ad una tale equazione.

$$-\frac{x}{4-x^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2+4x+4}$$

Bisogna innanzitutto verificare per quali valori di x le funzioni coinvolte sono definite. In questo caso, quando il denominatore è diverso da zero.

$$4-x^2 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \wedge x^2+4x+4 \neq 0$$

per cui $x \neq 2 \wedge x \neq -2$.

$$-\frac{x}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

La moltiplicazione per $(2-x)(2+x)^2$ rischia di introdurre le soluzioni $x = 2$ e $x = -2$.

$$\begin{aligned} -x(2+x) &= -(2+x)^2 - 2(2-x) \\ -2x - x^2 &= -4 - 4x - x^2 - 4 + 2x \\ 0 &= -8 \end{aligned}$$

E quindi non abbiamo nessuna soluzione. Se ci fossero state delle soluzioni, avremmo dovuto scartare i valori 2 e -2 per le condizioni di esistenza.

4 Disequazioni

Definizione Disequazione

Una *disequazione* è una funzione del tipo $f(x) \neq g(x)$, $f(x) > g(x)$ oppure $f(x) \geq g(x)$ dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni reali.

Come si comportano le operazioni in \mathbb{R} rispetto all'ordinamento?

Proposition

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned}a \leq b &\iff a + c \leq b + c \\a \leq b &\iff ac \leq bc, \quad c > 0\end{aligned}$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \neq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

Le condizioni di esistenza sono $x \neq 2 \wedge x \neq 0$. Risolviamo l'equazione associata

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

e troviamo le soluzioni $x = 1$ e $x = -4$. Per cui, le soluzioni della disequazione sono

$$\{x \mid x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4\}$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-2} \leq \frac{2}{2x-x^2} - \frac{3}{x}$$

In questo caso **non** è possibile moltiplicare per $x(x-2)$ perché questo assume valori non sempre positivi. Si procede per

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2} - \frac{2}{2x-x^2} + \frac{3}{x} &\leq 0 \\ \frac{x^2 + 2 + 3(x-2)}{x(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{x(x-2)} &\leq 0\end{aligned}$$

Sappiamo che $x^2 + 3x - 4$ si annulla per $x = 1$ e $x = -4$, e per il teorema del resto abbiamo che $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$.

$$\frac{(x-1)(x+4)}{x(x-2)} \leq 0$$

Dallo studio dei segni di $x-1$, $x+4$, x e $x-2$ possiamo determinare il segno dell'intera funzione nei vari intervalli. Giungiamo quindi alla soluzione

$$x \in [-4; 0) \cup [1; 2)$$

5 Potenze di numeri

5.1 Potenze di numeri reali con esponenti interi

Definizione Potenza intera su numero reale

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, il valore a^n viene definito con la seguente ricorrenza:

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a^{n-1} & n > 0 \\ \frac{1}{a^n} & n < 0 \end{cases}$$

per $a \neq 0 \wedge n \neq 0$.

È convenzionalmente possibile anche definire $0^0 = 1$. Mediante queste definizioni è possibile dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

Proposition Proprietà potenze

Dato $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}^+$,

1. $a^n a^m = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

5.2 Radicali

Proposition Esistenza radicale

Dato $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}^+$, esiste un unico $\beta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\beta^n = \alpha$$

Nel caso n sia pari, $(-\beta)^n = \alpha$.

Se n è pari, i valori per beta possono essere due.

Definizione Radicale

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, il valore positivo β tale che $\beta^n = \alpha$ viene denotato $\sqrt[n]{\alpha}$. Questo valore è definito per

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\alpha} \geq 0 & n \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{R} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Proposition Proprietà dei radicali

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$$

qualunque siano m, n se $\alpha \geq 0$, mentre solo se m e n sono entrambi dispari se $\alpha < 0$.

Definizione Valore assoluto

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, il *valore assoluto* è dato da

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

Proposition Radicale di quadrato

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

Proposition Semplificazione dei radicali

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, m, k \in \mathbb{N}^+$, l'espressione

$$\sqrt[kn]{\alpha^{km}} = \begin{cases} \sqrt[n]{|\alpha|^m} & k \text{ pari} \\ \sqrt[n]{\alpha^m} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

5.3 Potenze di numeri reali con esponenti razionali positivi

Definizione Potenza razionale positiva su numero reale

Dato $a \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Q}$ con $q = \frac{m}{n}$ dove $m, n \in \mathbb{N}^+$, il valore a^q viene definito nella seguente maniera:

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

per $a \neq 0 \wedge q \neq 0$.

Il motivo per cui la potenza razionale non è definita per una base negativa in quando il valore cambia se la frazione dell'esponente viene espressa in un altro modo. Per esempio $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$. Considerando solo gli esponenti ridotti ai minimi termini, cadrebbero le proprietà delle potenze.

Esercizio Radicali

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 + a^4}}{\sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} + \frac{a \sqrt[12]{1+a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^{-1}$$

Gli argomenti di radicali con esponenti dispari, non danno problemi. Gli argomenti di radicali con esponenti pari, devono essere non negativi. Dunque abbiamo queste condizioni

$$a \geq 0 \wedge \frac{1+a}{a} \geq 0 \wedge 1+a \geq 0$$

Inoltre, i divisori devono essere diversi da 0.

$$\sqrt{a} \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge \sqrt[4]{\frac{1+a}{a}} \neq 0 \wedge \sqrt[4]{a} \neq 0$$

Le prime condizioni possono essere semplificate a $a \geq 0$ Le seconde condizioni assieme alle prime possono essere ricondotte a $a > 0$. Semplificando l'espressione otteniamo

$$2\sqrt[4]{a^3} \sqrt[12]{1+a}$$

5.4 Potenze di numeri reali con esponenti reali

Proprietà dei numeri reali Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali tale che:

- per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$, si ha $x < y$.
- per ogni $k > 0$ esiste $x \in A$ e $y \in B$ tale che $d(x, y) < k$, cioè $y - x < k$.

Allora, esiste un unico numero reale tale che $x \leq r \leq y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$.

Definizione Potenza reale su numero reale

Dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$. Per caso il caso $\alpha > 1$. Si può dimostrare che se $p < q$ sono due razionali, allora $\alpha^p < \alpha^q$. Allora, considerando i due insiemi

$$A = \{\alpha^p \mid p \in \mathbb{Q}, p < r\}$$

e

$$B = \{\alpha^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < r\}$$

ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B . Inoltre, si può dimostrare che A e B sono due insiemi che soddisfano anche la seconda richiesta proprietà di prima, cioè la vicinanza arbitraria. Dunque, esiste un unico reale s tale che $x \leq s \leq y$ per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$. Poniamo allora

$$\alpha^r = s$$

La definizione per $\alpha = 1$ è data da $\alpha^r = 1$.

La definizione per $\alpha < 1$ è analoga (con ordinamento scambiato).

La definizione è ben posta e si può dimostrare che in questo modo le proprietà delle potenze si estendono.

Proposition Proprietà potenze reali

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a > 0 \wedge r, s \in \mathbb{R}$$

$$(ab)^r = a^r b^r, \quad a, b \geq 0$$

Inoltre,

$$a^r < a^s \iff a > 1 \wedge r < s$$

$$a^r > a^s \iff 0 < a < 1 \wedge r < s$$

Tra gli esponenziali, di particolare importanza, è quello di base numero di Eulero e , un numero definito per procedimento di limite.

6 Disequazioni con valore assoluto

Supponiamo di avere una disequazione $k \geq |g(x)|$ con $k \geq 0$, allora $-k \leq g(x) \leq k$. Nel caso in cui $k < 0$, la disequazione non avrebbe soluzioni.

Se, al posto di k , avessimo una funzione, come in

$$f(x) \geq |g(x)|$$

si potrebbe comunque studiare il segno di $f(x)$ per verificare quando è positivo. Tuttavia, ciò non è strettamente necessario. Possiamo considerare il valore assoluto come $|a| = \max a, -a$. Allora, $f(x) \geq |g(x)|$ è equivalente a $f(x) \geq \max g(x), -g(x)$ e quindi $-f(x) \leq g(x) \leq f(x)$. Analogamente, lo stesso ragionamento vale per $f(x) \leq |g(x)|$, il che è equivalente a $g(x) \leq -f(x) \vee g(x) \geq f(x)$.

7 Logaritmi

L'esponenziale è definito per basi $a > 0$. Assume, al variare di x , tutti i valori reali positivi se $x \neq 1$.

Definizione Logaritmi

La soluzione dell'equazione

$$a^x = b$$

con $b > 0$ e $a > 0 \wedge a \neq 1$, è pari al *logaritmo* di b in base a

$$x = \log_a(b)$$

Le proprietà dei logaritmi sono analoghe a quelle degli esponenti.

Proposition Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Il passaggio da moltiplicazione e somma di logaritmi, potrebbe non avere senso nella seconda forma. E.g. $\ln(x(x-1))$ non si può riscrivere come $\ln(x) + \ln(x-1)$ perché, se sono positivi quando moltiplicati, non è detto che lo siano separatamente.

Se abbiamo $\log_2(x^2)$, possiamo riscriverlo come $2 \log_2 |x|$.

Esercizio Logaritmi

$\log_2(x) + \log_3(x-1)$ è definito per $x > 1$. Per portare tutto in base 2 è necessario eseguire la seguente operazione

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2(x-1) &= \log_2 x + \log_2(x-1)^{\log_3(2)} \\ &= \log_2(x(x-1)^{\log_3(2)}) \end{aligned}$$

Esercizio

L'equazione

$$3^{x+1} = 5$$

ha soluzione $x = 1 \log_3(5)$.

Esercizio

L'equazione

$$\log(x-1) + \log(2x+1) = 2\log(x+1)$$

ha condizioni iniziali $x > 1$.

$$\begin{aligned}\log(x-2)(2x-1) &= \log(x+1)^2 \\ &= (x-1)(2x-1) = (x+1)^2 \\ &= x^2 - 5x = 0\end{aligned}$$

che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = 5$. Di queste solo $x = 5$ è compatibile con la condizione di esistenza.

8 Sistemi lineari

Definizione Sistema lineare

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ e x_j sono incognite.

Le soluzioni di un tale sistema sono n-uple.

Esempio Sistema equazioni

$$\begin{cases} 2x - 3y + \sqrt{3} - 7w = 2 \\ x + 0y + 4z - 11w = 1 \end{cases}$$

In questo caso le soluzioni sono quaterne.

Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x = z \\ 5y = -7 \\ 3z = 4\pi \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{4\pi}{3})$.

Esempio Sistema equazioni

Un sistema lineare con forma

$$\begin{cases} 3x + 5w = 2 \\ 2y = \sqrt{5} \\ 3z - 2w = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

si può risolvere trattando w come un parametro, e trovare le soluzioni accordatamente. La soluzione è $(x, y, z, w) = (\frac{2-5w}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}-2w}{3}, w)$, ossia un insieme infinito di soluzioni, in funzione di w (parametro libero).

Le trasformazioni lecite su un sistema sono quelle reversibili:

- riordinare l'ordine delle equazioni;
- moltiplicare un'equazione per una costante non nulla;
- sostituire a un'equazione la somma tra quella equazione e k volte un'altra.

Esempio Trasformazioni sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 2x - 3z - w = 5 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

È possibile sommare alla seconda equazione 3 volte la prima, si trova

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 11x + 6y - 12z + 20w = 11 \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

In questo modo ho ottenuto un altro sistema equivalente ma non mi sono avvicinato alla soluzione. Avrei potuto generalmente sommare alla seconda equazione k volte la prima, e notare che con $k = -\frac{2}{3}$ si ottiene del progresso.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ 0x - \frac{4}{3}y - \frac{14}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ 6y - z = 3w = 2 \end{cases}$$

Così facendo, nella terza equazione l'incognita x non compare. Adesso, è possibile usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 7w = 2 \\ -\frac{4}{3}y - \frac{19}{3}z - \frac{17}{3}w = \frac{11}{3} \\ \frac{59}{2}z - \frac{45}{2}w = \frac{35}{2} \end{cases}$$

Trattando w come un parametro libero, dall'ultima equazione calcoliamo z in funzione di w , dalla seconda calcolo y in funzione di z e infine x in funzione di w .

Esempio

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 2x + y - w = 3 \\ 3x + 2y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$$

Non è possibile utilizzare la prima equazione per eliminare la x , ma è possibile utilizzare la seconda per eliminarla dalle altre. Sottraiamo quindi 2 volte la seconda dalla terza, 3 volte la seconda dalla quarta.

$$\begin{cases} 3y - 2z - 5w = 1 \\ x - y + z + 3w = 2 \\ 3y - 2z - 7w = -1 \\ 5y - 12w = -6 \end{cases}$$

Vi è il rischio che un'incognita eliminata venga reintrodotta quando si prova ad eliminarne una seconda. Per evitare il problema, dopo aver utilizzato una equazione una certa equazione per eliminare una certa incognita, è cosa furba portare tale equazione in testa al sistema, e successivamente continuo lavorando sulle successive.

Esercizio Sistema senza soluzioni

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 7y - 4y + 13z = 6 \end{cases}$$

Usiamo la prima equazione per eliminare la x dalle successive

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ \frac{26}{3}y + \frac{4}{3}z = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Usiamo la seconda equazione per eliminare la y dalla successiva.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 1 \\ -\frac{13}{5}y + \frac{2}{3}z = \frac{10}{3} \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Di conseguenza, il sistema *non* ha soluzioni in quanto l'ultima equazione non è mai soddisfatta.

Nel caso ottenessimo un'equazione del tipo $0x + 0y + 0z + \dots = 0$, ossia un'identità, essa può essere scartata in quanto non contiene nessuna informazione necessaria.

9 Goniometria

Per introdurre le funzioni goniometriche è comodo impostare come sistema di riferimento il piano cartesiano:

- un punto fissato O , detto *origine*;
- due rette ortogonali tra loro e passanti per O , dette *assi*;
- due punti U_1 e U_2 , sugli stessi assi, posti alla stessa distanza non nulla da O , detti *punti unitari*.

Fatto ciò, posso assegnare ad ogni punto P del piano una coppia di reali x_p, y_p detti *coordinate* del punto P . Per trovare x_p considero la proiezione ortogonale di P sull'asse che contiene U_1 , trovando un certo punto H . Si considera il rapporto tra le lunghezze del segmento \overline{OH} e la lunghezza del segmento $\overline{OU_1}$. Poniamo poi

$$x_p = \begin{cases} \frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{se } H \text{ e } U_1 \text{ stanno sulla stessa semiretta di origine } O \\ -\frac{\overline{OH}}{\overline{OU_1}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analogamente, per y_p vale lo stesso. Definiamo le seguenti linee:

- la retta OU_1 è detta asse delle x o asse delle ascisse;
- la retta OU_2 è detta asse delle y o asse delle ordinate.

Se P e Q sono due punti diversi, almeno una delle due proiezioni e quindi P e Q hanno almeno una coordinata diversa; in altri termini la coppia (x_p, y_p) individua P . Viceversa, data una coppia di numeri reali (x, y) si trova un unico punto che ha esattamente (x, y) come coordinate. Dunque, possiamo identificare il piano con l'insieme delle coppie ordinate dei numeri reali \mathbb{R}^2 .

(In realtà, non è strettamente necessario considerare tutte le coppie di numeri reali per soddisfare gli assiomi euclidei)

Supponiamo di avere una semiretta s uscente dall'origine. È possibile associare un angolo θ fra la semiretta e l'ascisse. Chiaramente, lo stesso angolo può assumere anche i valori $\theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$ oppure, l'angolo inverso, $2\pi - \theta$. Quindi, abbiamo infiniti angoli che quantificano la stessa ampiezza di semiretta.

Questo sistema, detto *radiante* prende come riferimento il valore 2π per quantificare un giro completo attorno all'origine. Una semiretta con ampiezza 1 radiante, forma un arco di lunghezza dell'arco stesso.

Esiste anche il sistema sessagesimale dove un angolo giro equivale a 360° . La conversione da radianti x e x° è data da

$$x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} x$$

Definizione Funzione seno

Dato un angolo θ , la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza θ . Consideriamo il punto P come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore $\sin \theta$ rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di P sulle ascisse.

Definizione Funzione coseno

Dato un angolo θ , la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e una semiretta di lunghezza 1 che si estende dall'origine alla circonferenza con ampiezza θ . Consideriamo il punto P come il punto di intersezione fra la semiretta e la circonferenza. Il valore $\cos \theta$ rappresenta la distanza fra l'origine e il punto della proiezione di P sulle ordinate.

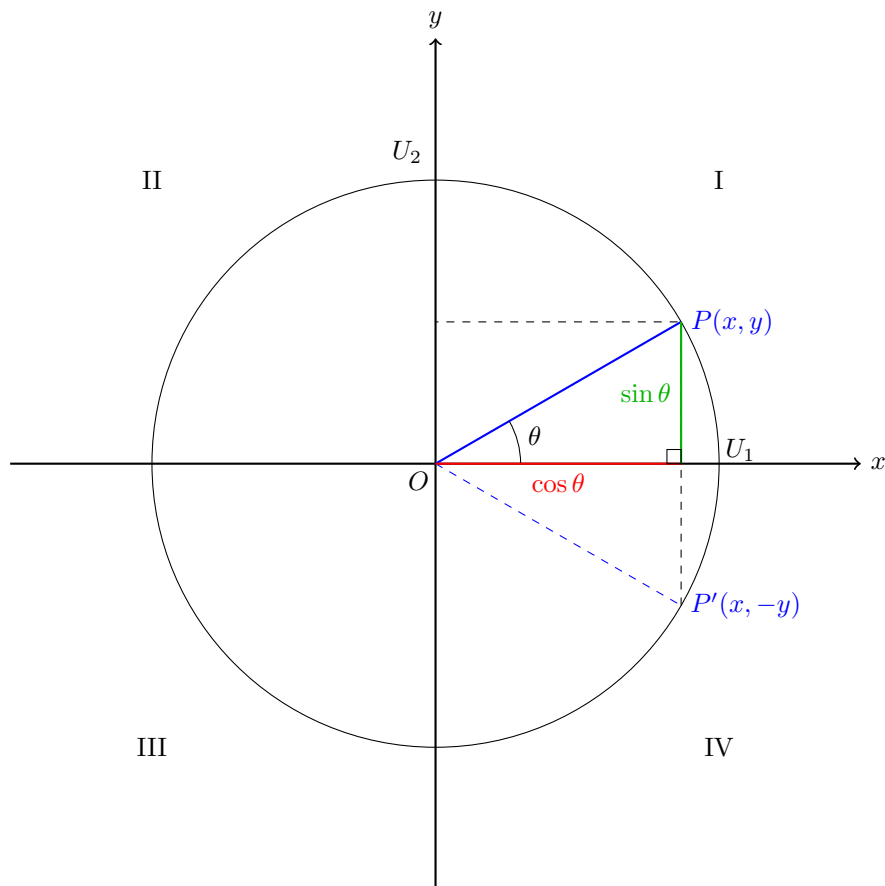
Definizione Funzione tangente

Dato un angolo θ , la *tangente* è definita come

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

quando $\cos \theta \neq 0$.

Il coseno è pari a zero solo quando $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{N}$.



Notiamo che il punto P , che sta sulla circonferenza, dista 1 dall'origine, e forma un triangolo rettangolo in $(0, P_y)$. Per il teorema di pitagora, abbiamo allora la seguente proposizione:

Proposition Relazione pitagorica

Dato un $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Da questa proposizione possiamo anche chiaramente vedere che

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

e

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—
$\frac{3\pi}{2}$	—1	0	—
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche con un periodo di 2π . La funzione coseno possiede la medesima forma del seno ma è spostata di $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos \theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

La funzione tangente è anch'essa periodica ma ha un periodo di π .

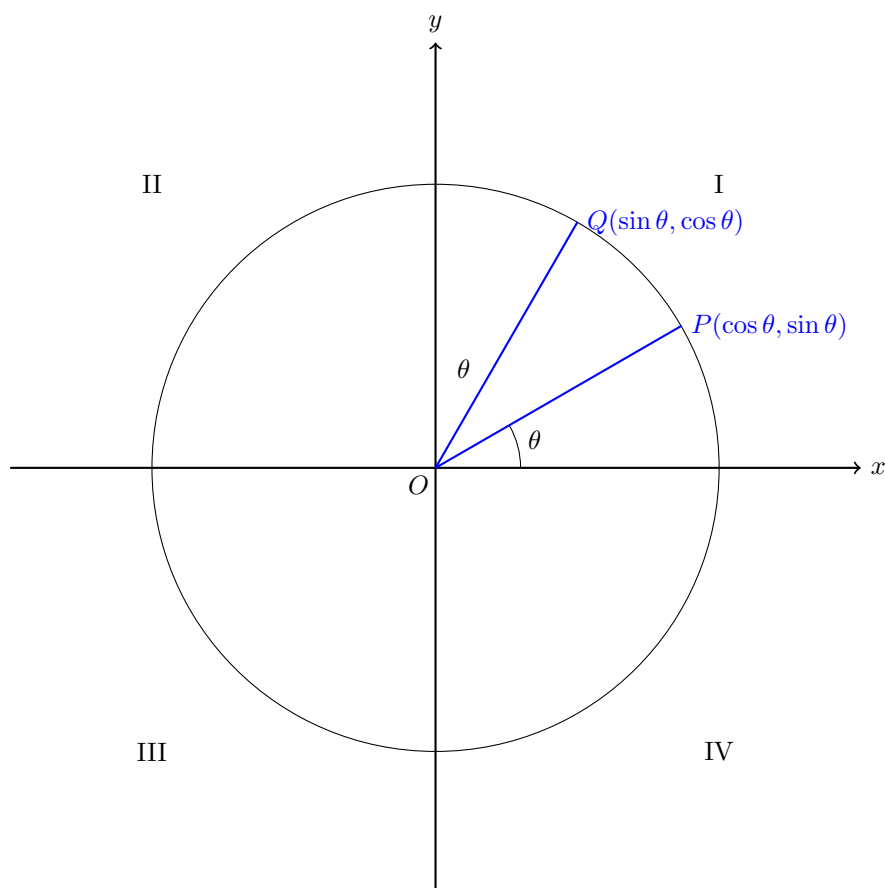
9.1 Angoli associati

Gli angoli associati ad α sono quindi $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$.

$f(\alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$

9.2 Angoli complementari

Due angoli la cui somma è un angolo retto sono detti complementari.



Dunque, i lati sono ordinatamente congruenti. Le coordinate di P e Q sono allora le stesse ma scambiate.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Proposition Formule di addizione

Dati due angoli α e β .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

e

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Proposition Disparità del seno

Dato un angolo α

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

Proposition Parità del coseno

Dato un angolo α

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Proposition Tangente di somma di angoli

Dati due angoli α e β .

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

9.3 Equazioni e disequazioni goniometriche**Esercizio**

Risolvere l'equazione

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

La soluzione più ovviamente è quella di $\theta = \frac{\pi}{6}$. Mediante gli angoli associati, troviamo anche $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. A queste soluzioni di base, vanno aggiunti degli giri completi del cerchio trigonometrico, quindi multipli interi di $2k\pi$. Le soluzioni sono quindi

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

e

$$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

dove $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

Questa equazione non ha chiaramente soluzioni in quando l'immagine del seno è $[-1; 1]$.

Per invertire la funzione del seno è necessario che renderla biettivo. Tuttavia, siccome la funzione è periodica e in un periodo assume tutti i valori in $[-1; 1]$ una volta sola, possiamo restringere il suo dominio e codominio

Definizione Inverso del seno

La funzione inversa del seno è definita come l'inverso del seno con il dominio e codominio ristretto

$$\arcsin \theta: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$$

tale che $\arcsin(\sin \theta) = \theta$.

Definizione Inverso del coseno

La funzione inversa del coseno è definita come l'inverso del coseno con il dominio e codominio ristretto

$$\arccos \theta: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$$

tale che $\arccos(\cos \theta) = \theta$.

Definizione Inverso della tangente

La funzione inversa della tangente è definita come

$$\arctan \theta: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

tale che $\arctan(\tan \theta) = \theta$.

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$\sin \theta = \frac{3}{4}$$

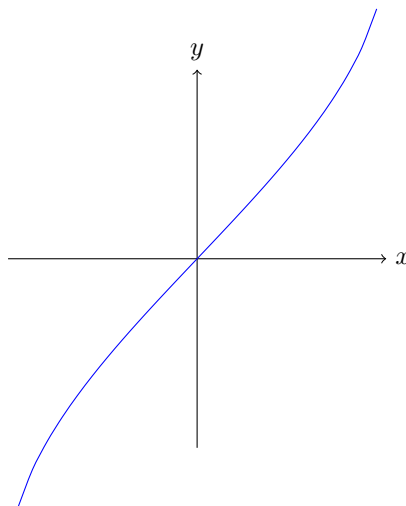
è evidente che esista un angolo $\alpha = \arcsin(\frac{3}{4})$ nel primo quadrante che soddisfi l'equazione, in quando il valore $\frac{3}{4}$ è compreso in $[0; 1]$. Le soluzioni sono quindi

$$\theta = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi$$

e

$$\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi$$

dove $k \in \mathbb{Z}$.



In generale, l'equazione $\sin \theta = c$ e $\cos \theta = c$ hanno soluzioni se $|c| \leq 1$ e sono

$$\theta = \arcsin c + 2k\pi$$

e

$$\theta = \pi - \arcsin c + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso in cui $c = 1$ le due famiglie di soluzioni coincidono.

L'equazione $\tan \theta = c$ ha sempre soluzioni

$$\theta = \arctan c + k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

$$\sin\left(3x + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poniamo $t = 3x + \frac{3}{4}\pi$ e risolviamo quindi $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siccome $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, troviamo quindi immediatamente la soluzione

$$t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

e

$$t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$. Ma $3x + \frac{4}{3}\pi = t$, quindi le equazioni diventano

$$3x + \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

e

$$3x + \frac{4}{3}\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$. Isolando la x giungiamo quindi alle soluzioni

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

e

$$x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

È importante notare che il termine $2k\pi$ va anch'esso diviso, in quanto deve coincidere con il periodo della funzione originale.

In generale, l'equazione $\sin(cx + h)$ con $c \neq 0$, non ha periodo $T = 2\pi$, bensì $T = \frac{2\pi}{c}$. Infatti,

$$\sin\left(c\left(x + \frac{2\pi}{c}\right) + h\right) = \sin(cx + 2\pi + h) = \sin(cx + h)$$

e analogamente per \cos e \tan .

9.4 Equazioni omogenee

Esercizio

$$3 \sin x - \cos x = 0$$

Iniziamo notando che se fosse $\cos x = 0$, l'equazione si ridurrebbe a $\sin(x) = 0$, ma non c'è nessun angolo x tale che $\cos x = \sin x = 0$. Possiamo quindi supporre che $\cos x \neq 0$ e dividere per $\cos x$. Otteniamo quindi

$$3 \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$
$$3 \tan x - 1 = 0$$

Siamo ora ridotti al primo grado e otteniamo

$$c = \arctan \frac{1}{3} + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - \frac{3}{4} \cos^2 x = 0$$

Possiamo dividere per $\cos^2 x$ in quando $\cos x$ non accetterebbe soluzioni.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cos^2 x}{4 \cos^2 x} = 0$$

e quindi

$$\tan^2 x - \tan x - \frac{3}{4} = 0$$

Se poniamo $t = \tan x$ troviamo una equazione di secondo grado della forma

$$t^2 - t - \frac{3}{4}$$

e quindi

$$t_{1,2} = \frac{3}{2} \text{ e } -\frac{1}{2}$$

Risostituendo troviamo allora

$$x = \arctan \frac{3}{2} + k\pi$$

e

$$x = \arctan \left(-\frac{1}{2} \right) + k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 2$$

Usando la relazione Pitagorica

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 2 (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Analogamente alla precedente dividiamo per $\cos x$

$$2 \tan^2 x - \tan x + 1 = 0$$

che dà

$$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$$

che non ha soluzioni reali.

Esercizio

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

Vogliamo semplificare utilizzando la formula della somma di due angoli. Poniamo

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = c \sin(\alpha + x)$$

e vogliamo trovare c e α tale che l'eguaglianza rimanga, in quanto $c \sin(\alpha + x) = 1$. Sviluppiamo il secondo membro

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = c \sin \alpha \cos x + c \cos \alpha \sin x$$

e uguagliamo i coefficienti

$$\begin{cases} \sqrt{3} = c \sin \alpha \\ -1 = c \cos \alpha \end{cases}$$

Ma

$$\frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

cioè

$$\tan \alpha = -\sqrt{3}$$

Siccome sappiamo che esiste un tale angolo, ossia $-\frac{\pi}{3}$. Sostituisco nel sistema e trovo

$$\begin{cases} \sqrt{3} = c \sin -\frac{\pi}{3} \\ -1 = c \cos -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \sqrt{3} = c \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ -1 = \frac{c}{2} \end{cases}$$

da cui $c = 2$. Dunque, $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e $-2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, giungendo quindi alla soluzione

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

e

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = 1$$

può essere risolta similmente all'ultima. Prima sviluppo

$$\cos x \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

Sviluppando mi riconduco a un'espressione del tipo

$$A \cos x + B \sin x = 1$$

Esercizio

$$2 \cos^2\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = \cos 2x$$

$$2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(-x) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(-x)\right)^2 = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$(-\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

che ha soluzioni $\sin x = 0 \vee \sin x = \cos x$ Ricaviamo quindi

$$x = 2k\pi$$

e

$$x = \pi + 2k\pi$$

che si può scrivere semplicemente $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, mentre $\sin x - \cos x = 0$ è omogenea e ha soluzioni $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

10 Disequazioni goniometriche

Esempio

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

Dal cerchio trigonometrico possiamo notare che

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio

$$\sin x \leq \frac{1}{2}$$

Dal cerchio trigonometrico possiamo notare che

$$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio

$$\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 6 \sin x - 1$$

Le condizioni iniziali sono $\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 0$ ossia $\sin x \leq \frac{5}{2}$ che è sempre soddisfatta. Distinguiamo il caso

1. Se $6 \sin x - 1 < 0$ la disequazione è sempre soddisfatta. Ma se $6 \sin x - 1 < 0$ è equivalente a $\sin x < \frac{1}{6}$;
2. Se $6 \sin x - 1 \geq 0$ la disequazione equivale a $5 - 2 \sin x \geq 36 \sin^2 x - 12 \sin x + 1$ cioè $36 \sin^2 x - 10 \sin x - 4 \leq 0$. Per comodità poniamo $t = \sin x$ e otteniamo

$$18t^2 - 5t - 2 \leq 0$$

che ha come soluzioni $t_1 = \frac{1}{2}$ e $t_2 = -\frac{2}{9}$. Pertanto $18t^2 - 5t - 2 = 18(t - \frac{1}{2})(t + \frac{2}{9})$, che dalla tabella dei segni ha soluzioni per $-\frac{2}{9} \leq t \leq \frac{1}{2}$ cioè $-\frac{2}{9} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

Notiamo che se $\sin x \geq \frac{1}{6}$, ovviamente $\sin x \geq -\frac{2}{9}$ quindi per $\sin x \geq \frac{1}{6}$ è sufficiente imporre che $\sin x \leq \frac{1}{2}$. Possiamo dire che

$$\begin{cases} \sin x \in (-\infty; \frac{1}{6}) & \sin x < \frac{1}{6} \\ \sin x \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{2}] & \sin x \geq \frac{1}{6} \wedge \sin x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Basta dunque imporre la condizione $\sin x \leq \frac{1}{2}$ che abbiamo già studiato.

11 Trigonometria

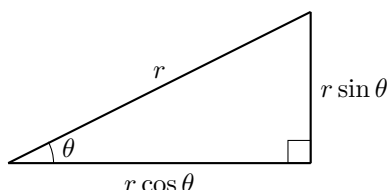
Ricordiamo che in geometria euclidea esistono 3 criteri di congruenza per i triangoli:

- due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso;
- due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli adiacenti;
- due triangoli sono congruenti se hanno tutti e 3 i lati congruenti.

In realtà, la medesima definizione funziona anche se due angoli sono congruenti e un lato, in quanto il terzo lato è anche congruente.

La triplette di congruenza fra due lati e un angoli non funziona.

la trigonometria permette di adoperare questi criteri per lo studio computazionale dei triangoli. Per cui, calcolare alcuni dati in un triangoli a partire da informazioni note.



Questo triangolo può essere considerato come formato dall'esposizione di un angolo θ sul cerchio trigonometrico. In questo caso, il raggio è di valore r invece di 1, ma possiamo considerarlo 1 e alla fine scalarlo per r .

Teorema Teorema delle proiezioni

Consideriamo un triangolo con vertici A , B e C , lati a , b e c e gli angoli interni α , β e γ . Allora

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Proof Teorema delle proiezioni

Sia H la proiezione del vertice C sul lato opposto, suddividendo quindi il triangolo ABC in due triangoli rettangoli in H , tale che H cade all'interno del triangolo. Abbiamo che $\overline{AH} = b \cos \alpha$ e $\overline{BH} = a \cos \beta$. Ora, $c = \overline{AH} + \overline{BH} = a \cos \beta + b \cos \alpha$. Nel caso in cui H non dovesse cadere all'interno del triangolo, la dimostrazione è analoga ma $\overline{HB} = a \cos \beta$ e $\overline{AH} = b \cos(\pi - \alpha)$, trovando infine la medesima formula.

Teorema Teorema del coseno o di Pitagora generalizzato

Consideriamo un triangolo con lati a , b e c e gli angoli interni α , β e γ . Allora,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Possiamo vedere $-2ab \cos \gamma$ come un termine correttivo per quando il triangolo non è retto.

Proof Teorema del coseno o di Pitagora generalizzato

Dal teorema delle proiezioni sappiamo che

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Moltiplicando per c troviamo

$$c^2 = ab \cos \beta + bc \cos \alpha$$

In maniera analoga, abbiamo che $a^2 = ba \cos \gamma + ca \cos \beta$ e $b^2 = bc \cos \alpha + ab \cos \gamma$. Dunque,

$$a^2 + b^2 = ba \cos \gamma + ca \cos \beta + bc \cos \alpha + ab \cos \gamma \text{ ma } ca \cos \beta + bc \cos \alpha = c^2, \text{ e quindi}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Teorema Teorema del seno

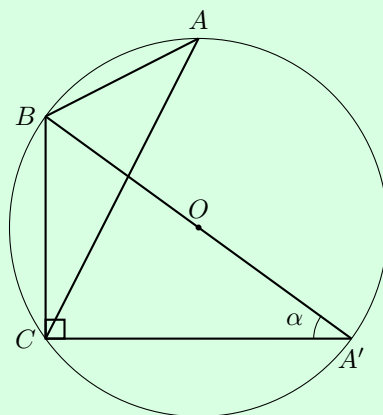
Consideriamo un triangolo con lati a , b e c e gli angoli interni α , β e γ . Allora,

$$\frac{\sin a}{\alpha} = \frac{\sin b}{\beta} = \frac{\sin c}{\gamma} = d$$

dove d è il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Proof Teorema del seno

Tracciando la circonferenza circoscritta al triangolo



Chiamiamo A' l'estremo di questo diametro diverso da B . Considero il triangolo $A'BC$. Il lato $A'B$ è un diametro, quindi di lunghezza d . L'angolo in A' è un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco di BAC . Dunque, l'angolo $BAC = \alpha$. Inoltre, $A'BC$ è rettangolo in C . Ma allora $\overline{BC} = \overline{BA'} \sin \alpha$ cioè $a = d \sin \alpha$ da cui $\frac{a}{\sin \alpha} = d$. Analogamente si trovano gli altri rapporti.

Esercizio Trovare gli angoli del triangolo ABC di cui sono noti i lati $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{6}$ e $c = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

Usando il teorema di Pitagora generalizzato otteniamo

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3})^2 &= (2\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2(2\sqrt{6})(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos \alpha \\12 &= 24 + 18 + 6 + 12\sqrt{3} - (24\sqrt{3} + 24) \cos \alpha \\0 &= 36 + 12\sqrt{3} - 24(\sqrt{3} + 1) \cos \alpha \\\cos \alpha &= \frac{12(3 + \sqrt{3})}{24(\sqrt{3} + 1)} \\&= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Sappiamo che esiste un unico angolo nell'intervallo $0 < \alpha < \pi$ tale che $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ossia $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Analogamente si trova β , per cui

$$\begin{aligned}24 &= 12 + 24 + 12\sqrt{3} - 2(2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos \beta \\\cos \beta (12\sqrt{6} + 12\sqrt{2}) &= 12(1 + \sqrt{3}) \\\cos \beta &= \frac{12(1 + \sqrt{3})}{12(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

e quindi $\beta = \frac{\pi}{4}$. Infine, $\gamma = \pi - \beta - \alpha = \frac{7}{12}\pi$.

Dopo aver trovato α , avremmo potuto anche usare il teorema del seno. È importante notare che conoscere il cos di un angolo interno, allora si conosce l'angolo, mentre se si conosce il sin di un angolo interno, allora vi sono in generale due possibili angoli. Di conseguenza, è a volte meglio sfruttare il teorema del coseno piuttosto che quello del seno.

Esercizio Siano noti di un triangolo $a = 2$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$

I dati non sono sufficienti per determinare il triangolo in maniera univoca. Utilizzando il teorema del seno abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\4 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sin \gamma}\end{aligned}$$

e quindi $\sin \gamma = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Notiamo che $-1 \leq \sin \gamma \leq 1$, quindi esistono due possibili valori per γ .

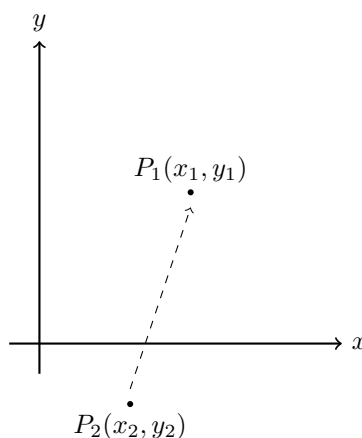
$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) \quad \gamma_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

In questo caso entrambi sono accettabili perché vi sono due triangoli possibili.

12 Geometria analitica

12.1 Operazioni tra punti

Siano dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.



Definizione Distanza fra punti in \mathbb{R}^2

La *distanza* fra $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è sufficiente utilizzare il teorema di Pitagora

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Definizione Punto medio in \mathbb{R}^2

Il *punto medio* fra $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è sufficiente fare la media delle coordinate

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Definizione Punto simmetrico in \mathbb{R}^2

Il *punto simmetrico* di $P_1 = (x_1, y_1)$ rispetto a $P_2 = (x_2, y_2)$ è il punto S tale che S sia il punto medio fra P_1 e P_2 .

12.2 Retta nel piano

I punti di una retta sono tutti e soli quelli che soddisfano un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\neg(a \neq 0 \wedge b \neq 0)$.

Se $b \neq 0$, si può considerare l'equazione ottenuta da

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Tuttavia, questa espressione non rappresenta le rette per le quali $b = 0$, ossia le rette verticali.

Se $a = 0$, l'equazione si riduce a $bx + c = 0$ con $b \neq 0$. Dunque, ottengo i punti del piano la cui seconda coordinata è $-\frac{c}{b}$ (costante), ossia una retta parallela all'asse delle ascisse.

Se $b = 0$, analogamente a prima, abbiamo una retta parallela all'asse delle ordinate.

In generale, una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è equivalente a $a\xi x + b\xi y + c\xi = 0$ per $\xi \neq 0$.

Le rette possono essere incidenti, parallele distinte o parallele coincidenti. Questi tre casi possono essere distinti semplicemente contando i punti in comune. I punti in comune sono quelli che soddisfano

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Per contare le soluzioni usiamo il metodo dell'eliminazione, supponiamo $a_1 \neq 0$ e usiamo la prima equazione per eliminare la x dalla seconda. Sapendo che $x_1 = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ 0x + \left(b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1\right)y + \left(c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1\right) = 0 \end{cases}$$

Ogni (eventuale) soluzione in y della seconda equazione, mi darà una soluzione del sistema.

- se $b_1 - \frac{a_2}{a_1}b_1 \neq 0$, allora ho un'unica soluzione e le rette sono incidenti;
- se $b_1 - \frac{a_2}{a_1}b_1 = 0$, la seconda equazione non è di primo grado, ottenendo due possibilità:
 - se $c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1 = 0$ si ha un'identità, quindi infinite soluzioni;
 - se $c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1 \neq 0$ si ha un'equazione senza soluzioni.

Il termine $b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1 = 0$ se è solo se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ cioè se e solo se $a_1b_2 = a_2b_1$. Analogamente, $c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1 = 0$ se e solo se $a_1c_2 = a_2c_1$. Ora $a_1b_2 = a_2b_1$ se e solo se $(a_1, b_1) \propto (a_2, b_2)$ (dimostrazione banale distinguendo i casi).

In conclusione, due rette sono:

- incidenti solo e solo se $(a_1, b_1) \not\propto (a_2, b_2)$;
- parallele se e solo se $(a_1, b_1) \propto (a_2, b_2)$, in questo caso sono
 - parallele coincidenti se $(a_1, b_1, c_1) \propto (a_2, b_2, c_2)$;
 - parallele distinte se $(a_1, b_1, c_1) \not\propto (a_2, b_2, c_2)$;

Queste condizioni valgono anche nel caso $a_1 = 0$.

Proposition

Con $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

con eliminazione

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= 0 \end{aligned}$$

Una possibile soluzione per a e b è data da $a = y_2 - y_1$ e $b = x_1 - x_2$ (a e b non sono entrambi nulli perché $P_1 \neq P_2$). Troviamo poi $c = -ax_1 - by_1 = -(y_2 - y_1)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$. Dunque la retta ha equazione

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

La forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

non funziona sempre se $x_2 = x_1$ oppure $y_2 = y_1$.

Esercizio Data la retta $r: 3x + 2y - 1 = 0$ e il punto $P = (1, 4)$, determinare:

1. **proiezione ortogonale H di P su r :** Bisogna trovare una retta s passante per P e ortogonale a r . Questa retta ha equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b non entrambi nulli. È necessario imporre la condizione di ortogonalità, ossia che la somma dei prodotti dei coefficienti si annulli

$$3a + 2b = 0$$

mentre il passaggio per P si vincola dicendo che l'equazione risulta soddisfatta per P

$$a + 4b + c = 0$$

Abbiamo quindi il sistema dato, in cui è evidente che abbiamo infinite soluzioni.

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}b \\ c = -\frac{10}{3}b \end{cases}$$

Scelgo quindi un valore per $b \neq 0$ come $b = 3$ e risolvo $s: -2x + 3y - 10 = 0$ Per trovare H pongo a sistema le equazioni

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ -2x + 3y - 10 = 0 \end{cases}$$

Da cui segue $y = \frac{32}{13}$ e $x = -\frac{51}{39}$, quindi $H = (x, y)$.

2. **la distanza di P da r :** La distanza minima si ottiene quando $d(P, r)$ è minima, quindi $d(P, H)$.

$$d(P, H) = \sqrt{\left(1 + \frac{51}{39}\right)^2 + \left(4 - \frac{32}{13}\right)^2}$$

3. **il punto simmetrico di P rispetto a r :** è necessario che H sia il punto medio fra P e il simmetrico Q .

$$\frac{x+1}{2} = -\frac{51}{39} \quad \frac{y+4}{2} = \frac{32}{13}$$

e quindi otteniamo $Q = \left(-\frac{141}{39}, \frac{32}{13}\right)$.

12.3 Fasci di rette

Definizione Fascio di rette parallele fra loro

Data una retta r , il *fascio di rette parallele* generate da r è la famiglia di rette parallele a r .

Se $r: ax + by + c = 0$, sappiamo che una retta $s: a'x + b'y + c' = 0$ è parallela ad r se e solo se $(a', b') \propto (a, b)$. La generica retta parallela a r si può allora scrivere

$$kax + kby + kc = 0$$

dove $k \in \mathbb{R}^*$ e a, b sono fissi. Dividendo questa equazione per k si può scrivere come

$$ax + by + \frac{c}{k} = 0$$

Cambiando la variabile $h = \frac{c}{k}$, otteniamo che le rette di fascio generate da r hanno equazione

$$ax + by + h = 0$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Definizione Fascio di rette generato da due rette incidenti

Data due rette incidenti r e s , il *fascio di rette incidenti* generate da r e s è la famiglia di rette passanti per il punto P di intersezione fra r e s , che viene denominato *sostegno* o *centro del fascio*.

Date $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ incidenti, cioè $(a_1, b_1) \not\propto (a_2, b_2)$. Consideriamo la famiglia di equazioni della forma

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

al variare di $h, k \in \mathbb{R}$. Scartiamo il caso $h = 0 \vee k = 0$ in quando non descrive una retta. Possiamo riscriverla come

$$(ha_1 + ka_2)x + (hb_1 + kb_2)y + (hc_1 + kc_2) = 0$$

È evidente che l'equazione rappresenti una retta se e solo se almeno uno tra $ha_1 + ka_2$, $hb_1 + kb_2$ non è nullo. Bisogna quindi escludere i valori per cui

$$\begin{cases} ha_1 + ka_2 = 0 \\ hb_1 + kb_2 = 0 \end{cases}$$

Siccome $(a_1, b_1) \not\propto (a_2, b_2)$, se ci fosse una soluzione al sistema con h, k non entrambi nulli, avremmo allora (per esempio con $k \neq 0$) $a_2 = -\frac{h}{k}a_1$ e $b_2 = -\frac{h}{k}b_1$ e la coppia (a_2, b_2) sarebbe allora proporzionale alla coppia (a_1, b_1) . Pertanto se h e k non sono ambo nulli, l'equazione

$$h(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

rappresenta una retta. Notiamo che tutte le rette di tale equazione passano per il punto $P = (x_0, y_0)$ in quanto sostituendo troviamo $h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0$. Dobbiamo tuttavia dimostrare che queste rette siano tutte le rette del fascio. Prendiamo quindi una retta t qualsiasi passante per P . Prendo ora un punto $Q = (x', y') \neq P$ facente parte della retta t . In particolare, questo punto sta al massimo su r o s , ma non entrambe (perché è diverso da P). Per mostrare che t faccia parte della famiglia precedentemente trovata basta provare che una di tali rette passi per il punto Q . Infatti, tale retta passa anche per P . Per trovare questa retta imponiamo $h(a_1x' + b_1y' + c_1) + k(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0$. Una possibile soluzione è $h = a_2x' + b_2y' + c_2$ e $k = -(a_1x' + b_1y' + c_1)$. Per dimostrare che questa è una retta, notiamo che h si annulla se $Q \in s$, mentre k se $Q \in r$, e quindi non possono essere entrambi nulli in contemporanea. La famiglia può quindi essere scritta come

$$a_1x + b_1y + c_1 + \frac{k}{h}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

e quindi

$$a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

per qualche t .

Importante: In questo ultimo passaggio si perdono le rette $k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ che in realtà è solo la retta s . Nonostante ciò questa forma può essere comunque utile.

Esercizio Date le rette $r: 5x - 3y + 1 = 0$ e $s: 4x - y + 7 = 0$ trovare la retta passante per $P = (2, 1)$ e per il punto Q intersezione fra r ed s

Consideriamo il fascio di rette generato da r e s

$$h(5x - 3y + 1) + k(4x - y + 7) = 0$$

con $(h, k) \neq (0, 0)$. Imponiamo il passaggio per P

$$8h + 14k = 0$$

Prendo una soluzione non banale come per esempio $h = 7$ e $k = -4$ e trovo la retta $19x - 17y - 21 = 0$.

12.4 Circonferenze

Definizione Circonferenza

Dato un punto O nel piano e un numero $r > 0$, la *circonferenza* di *origine* O e *raggio* è il luogo dei punti distanti r da C .

Un punto $P = (x, y)$ da parte di una circonferenza di raggio r e centro $C = (x_0, y_0)$ se e solo se $d(P, C) = r$. Una circonferenza può quindi essere descritta come

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

oppure

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

che è equivalente a

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - c = 0$$

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c > 0$, allora l'equazione esprime una circonferenza.

Vi è una circonferenza passante per 3 punti se essi sono distinti e non allineati. Dati 2 punti non allineati o un punto ci sono infiniti cerchi.

12.5 Reciproca posizione fra retta e circonferenza

Una retta può intersecare un cerchio in:

- **2 punti:** retta secante;
- **1 punti:** retta tangente;
- **0 punti:** retta esterna.

Questi casi possono essere distinti confrontando la distanza dal centro alla retta con il raggio della circonferenza, oppure posso mettere a sistema (di secondo grado) l'equazione della retta con quella della circonferenza e studiare il numero di soluzioni.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases}$$

e trovare una risolvente di secondo grado, il cui discriminante Δ mi permette di capire in quale caso siamo.

Esercizio Sia $\gamma: x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$ e $r: 2x - 5y + 1 = 0$. Trovare la posizione reciproca

Mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente (in un'unica incognita)

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}y \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}y\right)^2 + y^2 - 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}y\right) + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}y \\ \frac{29}{4}y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{15}{4} = 0 \end{cases}$$

E quindi $\Delta = \frac{81}{4} + 29 \cdot \frac{15}{4} > 0$, per cui la retta è secante.

Esercizio Siano dati la circonferenza $\gamma: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ e il punto $P = (3, 1)$, trovare le tangenti a γ passanti per P

Se il punto è esterno alla circonferenza abbiamo due tangenti distinte. Se il punto sta sulla circonferenza, abbiamo 1 sola tangente distinta, mentre se il punto sta all'interno non ne abbiamo nessuna. Possiamo considerare la generica retta passante per P , ossia le rette del fascio di sostegno P . Mi servono due rette incidenti in P , di cui le più banali sono $x - 3 = 0$ e $y - 1 = 0$. Il fascio è quindi dato da

$$h(x - 3) + k(y - 1) = 0$$

con $(h, k) \neq (0, 0)$. Mettiamo a sistema con γ

$$\begin{cases} h(x - 3) + k(y - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Siccome h e k possono essere zero, ma non contemporaneamente, bisogna distinguere i casi in cui $k = 0$ e $h = 0$. Alternativamente, si può utilizzare la forma ridotta (cioè incompleta) del fascio di rette, il quale esclude una retta che è potenzialmente una soluzione. Questa alternativa è più semplice in quanto abbiamo un'incognita sola, ma dobbiamo ricordarci di controllare singolarmente la retta esclusa.

$$\begin{cases} x - 3 + t(y - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

La retta esclusa è $y - 1 = 0$. Otteniamo allora

$$\begin{cases} x = 3 - ty + t \\ (t^2 + 1)^2 y^2 + (-2t^2 - 8t - 4)y + (t^2 + 8t + 17) = 0 \end{cases}$$

Il discriminante della risolvente è $\Delta = 4(2t^2 + 8t - 13)$. Le rette sono tangenti quando il discriminante è zero, per cui $t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{168}}{4}$. Abbiamo trovato 2 soluzioni, quindi ho 2 tangenti. La retta che avevo scartato non è quindi soluzione e non va controllata, in quanto posso avere al massimo 2 tangenti.

Esercizio Determinare la circonferenza che passa per i punti $O = (0, 0)$, $A = (-6, -4)$ e la retta $r: 2x + 3y - 1 = 0$

Possiamo notare che, geometricamente, se la retta passa fra i due punti, non può essere la tangente di nessun cerchio passante per i due punti. Per essere tangente ad r , dovrebbe stare in uno dei due semipiani delimitati da r . Se invece i due punti stanno sullo stesso semipiano, allora dovrebbe essere possibile trovare tale circonferenza. In questo caso. Anche nel caso in cui un punti passi per la retta stessa, allora il punto sarebbe coincidente con il punto di tangenza della retta, e anche in questo caso la circonferenza esisterebbe. Imponiamo il passaggio per O e A alla generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e trovo quindi

$$\begin{cases} 0 = c \\ b = 13 - \frac{3}{2}a \end{cases}$$

Quindi, la generica circonferenza passante per O e A ha equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + \left(13 - \frac{3}{2}a\right)y = 0$$

Imponiamo ora la tangenza alla retta

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + \left(13 - \frac{3}{2}a\right)y = 0 \end{cases}$$

che ci porta a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y \\ \frac{13}{4}y^2 + \left(-\frac{23}{2} - 3a\right)y = 0 \end{cases}$$

Per imporre la tangenza, poniamo il discriminante nullo, quindi

$$\Delta = 9a^2 - \frac{151}{2}a + 129 = 0$$

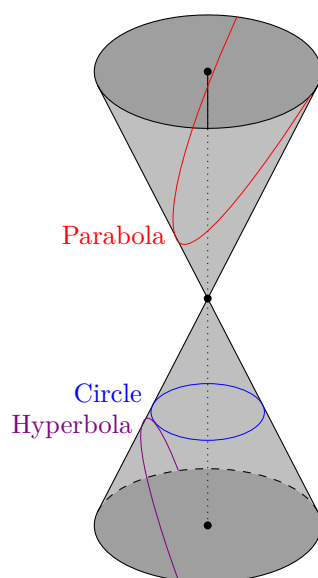
e quindi $a_1 = 6$ e $a_2 = \frac{43}{78}$.

12.6 Coniche

Definizione Coniche

Le *coniche* sono le curve che si ottengono sezionando un cono circolare retto con un piano.

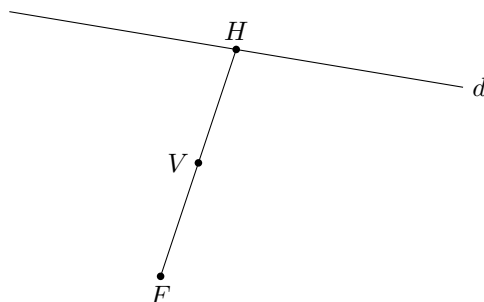
Queste coniche si possono introdurre in maniera differenzia, cioè come luoghi geometrici, ossia sottoinsiemi del piano che soddisfano certe condizioni. Non è semplice stabilire la connessione tra le due definizioni.



Definizione Parabola

Dato un punto F detto *fuoco* e una retta d detta *direttrice* non passante per F , la *parabola* di fuoco F e direttrice d è il luogo dei punti del piano equidistanti da F e d .

Se considero la proiezione H di F su D e incido con V il punto medio di H e F



Chiaramente, abbiamo che $d(P, F) > d(V, F)$, $f(P, d) < d(V, H) = d(V, F)$ e quindi $d(P, F) > d(P, d)$.

Descrizione analitica: si potrebbe prendere un punto $F = (x_f, y_f)$ e una retta $r: ax + by + c = 0$ con $F \notin r$ e imporre una punto generico $P = (x, y)$ tale che $d(P, F) = d(P, d)$. Esiste una formula per calcolare $d(P, d)$ ma è computazionalmente complicata. Consideriamo allora il caso particolare dove la direttrice è parallela a uno degli assi cartesiani, come per esempio quello delle ascisse. Abbiamo quindi $d: y - k = 0$. La condizione $F \notin d$ si esprime quindi semplicemente con $y_f - k \neq 0$ cioè $y_f \neq k$. Prendiamo quindi un punto arbitrario $P = (x, y)$. Abbiamo quindi le condizione

$$d(P, F) = \sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2} \quad \wedge \quad d(P, d) = d(P, H) = |y - k|$$

dove H è la proiezione di P su d . Espandendo il quadrato dell'equaglianza troviamo

$$x^2 - 2x_f + (x_f^2 + y_f^2 - k^2) = 2(y_f - k)y$$

Siccome $y_k - k_f \neq 0$ e quindi $y_k \neq k_f$, possiamo riscrivere l'equazione come

$$y = \frac{1}{2(y_r - k)}x^2 - \frac{x_f}{y_f - k}x + \frac{x_f^2 + y_f^2 - k^2}{2(y_f - k)}$$

che possiamo riscrivere come

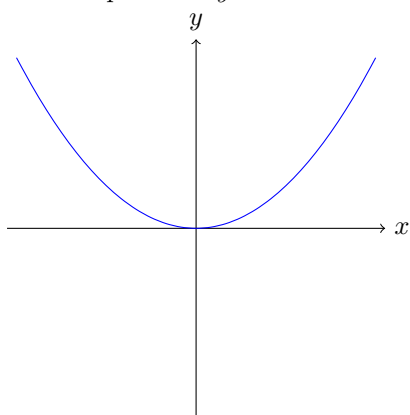
$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Bisognerebbe verificare se ogni equazione di questo tipo rappresenta una parabola, cioè se si può “tornare indietro” con i conti. La risposta è sì, ma i calcoli sono tediosi.

Casi particolari:

Consideriamo la parabola $y = ax^2$.



Nel caso in cui $a < 0$, la parabola avrebbe la stessa forma ma specchiata sull'asse delle ascisse. In ogni caso, l'asse delle ordinate è sempre un asse di simmetria.

Espandendo la funzione $y = ax^2 + bx + c$, si ottiene

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

che può anche essere scritto

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Possiamo dunque notare che se $a > 0$, la parabola sta al di sopra della retta $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, mentre se $a < 0$ sta al di sotto.

Esercizio Data la parabola di equazione $y = -3x^2 - 2x - 5$, trovarne vertice e asse di simmetria

Cominciamo riscrivendo $y = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 5$ cioè $-3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) - 5$. Per $x = \frac{1}{3}$ troviamo $y = -\frac{14}{3}$ e il vertice è allora $V = \left(\frac{1}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ e l'asse di simmetria è la retta $x = \frac{1}{3}$.

Per intersecare una retta con una parabola dobbiamo mettere le due a sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & a \neq 0 \\ hx + ky + l = 0 & (h, k) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di y data la prima equazione nella seconda e troviamo la risolvente

$$hx + k(ax^2 + bx + c) + l = 0$$

ossia $kax^2 + (h + kb)x + kc + l = 0$. Se $k \neq 0$, abbiamo un'equazione di secondo grado. Nel caso in cui $k = 0$, e quindi $h \neq 0$, l'equazione si riduce a $hx + l = 0$ che è di primo grado. Stiamo quindi intersecando con una retta parallela all'asse delle ordinate, e quindi all'asse simmetrica. Dovremmo quindi avere due soluzioni, ma ne troviamo solamente una. È come se la seconda soluzione fosse “scappata ad infinito”. Si potrebbe formalizzare questo concetto (con la geometria proiettiva) dove si aggiungono dei punti all'infinito, che corrispondono alle varie direzioni delle rette.

Esercizio Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y , vertice $V = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$, e tangente alla retta $r: x + y - 2 = 0$

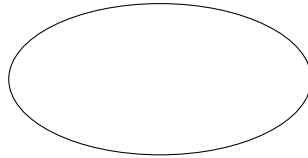
L'equazione è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Sapendo che il vertice è dato, possiamo, mediante il metodo del completamento del quadrato, possiamo dire che $y = a(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$. Imponiamo successivamente la tangenza a r

$$\begin{cases} y = a(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

La risolvente è $x + a(x + \frac{1}{2}) + \frac{9}{4} - 2 = 0$, cioè $ax^2 + (1 + a)x + \frac{1}{4}(1 + a) = 0$. Ponendo il discriminante nullo troviamo $a = -1$. La parabola cercata ha allora equazione $y = -1(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$ cioè $y = -x^2 - x + 2$.

Definizione Ellisse

Dati due punti F_1 e F_2 nel piano e un numero $k > F_1 + F_2$, l'*ellisse* di fuochi F_1 e F_2 e parametro k è il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da F_1 e F_2 è k .



Dalla disuguaglianza triangolare notiamo che $d(P, F_1) + d(P, F_2) \geq d(F_1, F_2)$. Di conseguenza $k < F_1 + F_2$ porta all'insieme vuoto. Notiamo che nel caso in cui $F_1 = F_2$ otteniamo un cerchio.

L'ellisse ha due assi di simmetria: la retta per i 2 fuochi e l'asse del segmento $\overline{F_1 F_2}$.

A differenza della parabola, l'ellisse è una curva limitata. Più precisamente, i due assi intersecano ciascuno in due punti detti vertici (vi sono quindi 4 vertici). Si verifica facilmente che l'ellisse è contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette parallele agli assi e passanti per i vertici.

Descrizione analitica: consideriamo il caso particolare in cui i due fuochi sono su uno degli assi delle coordinate e siano simmetrici rispetto all'origine. Consideriamo quindi $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$. Dunque $k > d(F_1, F_2) = 2|c|$. Sia $P = (x, y)$ un punto arbitrario. Imponiamo allora

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) = k$$

Abbiamo allora

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 0$$

elevando al quadrato troviamo quindi

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= k^2 - 2k\sqrt{(c + x)^2 + y^2} + (c + x)^2 + y^2 \\ 2k\sqrt{(c + x)^2 + y^2} &= k^2 + 4cx \\ 4k^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) &= k^4 + 8ck^2x + 16c^2x^2 \\ (4k^2 - 16c^2)x^2 + 4k^2 + y^2 &= k^4 - 4k^2c^2 \\ \frac{4k^2 - 16c^2}{k^2(k^2 - 4c^2)}x^2 + \frac{4k^2}{k^2(k^2 - 4c^2)}y^2 &= 1 \\ \frac{4}{k^2}x^2 + \frac{4}{k^2 - 4c^2}y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Notiamo che tutti i denominatori sono strettamente positivi. Possiamo quindi riscrivere l'espressione come

$$hx^2 + ly^2 = 1$$

dove $h, l \geq 0$.

Viceversa, un'equazione di questo tipo rappresenta un'ellisse. Chiaramente, se i fuochi sono sull'asse delle ordinate si ottiene un'equazione di questo tipo. Spesso si scrive l'equazione nel seguente modo standard:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Da questa equazione possiamo trovare i vertici intersecandola con gli assi delle coordinate. Sostituendo $x = 0$ troviamo $y = b$ e $y = -b$, quindi i due vertici $V_1 = (0, b)$ e $V_2 = (0, -b)$. Analogamente con $y = 0$ troviamo gli altri due vertici $V_3 = (a, 0)$ e $V_4 = (-a, 0)$.

Gli assi intercettano due segmenti sull'ellisse di lunghezze $2|a|$ e $2|b|$, di cui il più lungo è l'asse focale. Se supponiamo $|a| > |b|$, saranno allora $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$. Ora

$$\begin{aligned} d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) &= d(V_3, F_1) + d(V_3, F_2) \\ 2\sqrt{b^2 + c^2} &= \sqrt{(a - c)^2} + \sqrt{(a + c)^2} \\ 2\sqrt{b^2 + c^2} &= |a - c| + |a + c| \\ 4(b^2 + c^2) &= a^2 - 2ac + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 + 2|a^2 - c^2| \end{aligned}$$

Poiché $|a| > |b|$ ne segue che $|a| > |c|$ cioè $a^2 > c^2$ e otteniamo quindi

$$\begin{aligned} 4b^2 + 4c^2 &= 2a^2 + 2c^2 + 2a^2 - 2c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Dunque i fuochi sono $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ e $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.

Esercizio Data l'ellisse di equazione $2x^2 + 5y^2 = 3$ trovarne vertici e fuochi

Sostituendo $x = 0$ e $y = 0$ troviamo $V_1 = (0, \sqrt{\frac{3}{5}})$, $V_2 = (0, -\sqrt{\frac{3}{5}})$, $V_3 = (\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ e $V_4 = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$.

Poiché $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{\frac{3}{5}}$, l'asse focale è l'asse delle ascisse. Sia ora $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, abbiamo che

$$d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = d(V_3, F_1) + d(V_3, F_2)$$

risolvendo questa equazione troviamo $c = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$. I fuochi sono allora $F_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, 0)$ e $F_2 = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0)$.

Se mettiamo a sistema un'ellisse ed una retta, la risolvibile è sempre un'equazione quadratica. In questo caso non abbiamo quindi soluzioni che “scappano ad infinito”.

Definizione Iperbole

Dati due punti distinti F_1 e F_2 e un numero reale $0 < k$, l'*iperbole* di fuochi F_1 e F_2 e parametro k è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k$$

Affinché esista punti che soddisfano questa condizione k deve soddisfare alcune limitazioni. (Notiamo che abbiamo escluso il valore $k = 0$, perché altrimenti avremmo la condizione $d(P, F_1) = d(P, F_2)$, cioè avremmo l'asse del segmento $\overline{F_1 F_2}$). Torniamo alle condizioni da imporre a k . Per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$d(F_1, F_2) \leq d(F_1, P) + d(P, F_2)$$

Tuttavia, questa non ci dice nulla su $d(F_1, P) - d(F_2, P)$. Abbiamo nonostante ciò altre due disuguaglianze triangolari

$$\begin{aligned} d(F_1, P) &\leq d(F_1, F_2) + d(F_2, P) \implies d(F_1, P) - d(F_2, P) \leq d(F_1, F_2) \\ d(F_2, P) &\leq d(F_1, F_2) + d(F_1, P) \implies d(F_2, P) - d(F_1, P) \leq d(F_1, F_2) \end{aligned}$$

Questo ci dice che il valore assoluto di queste distanze è pari a uno dei due valori dati. Pertanto, se affinché esistano punti sull'iperbole, deve essere $k \leq d(F_1, F_2)$ ma escludiamo $k = d(F_1, F_2)$ in quanto non è difficile verificare che in tal caso otterremmo il segmento $\overline{F_1, F_2}$.

Altre proprietà geometriche: come per l'ellisse, la retta passante per i fuochi e l'asse del segmento F_1, F_2 , sono assi di simmetria.

Se Q è il simmetrico di P rispetto all'asse focale si ha $d(P, F_1) = d(Q, F_1)$ e $d(Q, F_2)$ da cui $d(P, F_1) - d(P, F_2) = d(Q, F_1) - d(Q, F_2)$. Se invece R è il simmetrico di P rispetto all'altro asse (segmento F_1, F_2), allora si ha che le due distanze si scambiano fra loro $d(P, F_1) = d(R, F_2)$ e $d(P, F_2) = d(R, F_1)$, da cui segue che la distanza

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(R, F_1) - d(R, F_2)|$$

. Pertanto se P sta sull'iperbole, anche R sta sull'iperbole.

L'asse focale interseca l'iperbole in due punti, detti *vertici*. Se prendo un punto C che sta sul segmento focale $\overline{F_1 F_2}$ a distanza c da F_1 , la sua distanza da F_2 è $d(F_1, F_2) - c$ Dunque

$$|d(C, F_1) - d(C, F_2)| = |2c - d(F_1, F_2)|$$

Affinché C appartenga all'iperbole, dobbiamo avere $|2c - d(F_1, F_2)| = k$, quindi o il valore è k o il suo opposto.

$$c = \frac{k + d(F_1, F_2)}{2} \quad \vee \quad c = \frac{d(F_1, F_2) - k}{2}$$

Questi 2 valori corrispondono a 2 punti. Notiamo che il primo valore è positivo ed è minore di $\frac{d(F_1, F_2) + d(F_1, F_2)}{2} \leq d(F_1, F_2)$, il che ci va bene in quanto è sul segmento focale. Analogamente, si nota che il secondo valore soddisfa le stesse limitazioni, quindi troviamo due punti nel segmento.

L'altro asse non contiene punti dell'iperbole perché i punti su di esso sono tali che $d(F_1, P) = d(F_2, P)$ e quindi $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 0 \neq k$.

Si può verificare facilmente che se considero le rette parallele all'asse non focale e passanti per i vertici, la fascia tra esse comprese non contiene punti dell'iperbole, che è quindi "divisa" in due parti separate, dette *rami* dell'iperbole.

L'iperbole ha due rette che delimitano la zona in cui può essere presente, chiamate *asintoti*.

TODO: Disegno asintoti dell'iperbole.

Descrizione analitica: se volessi rappresentare un'iperbole per mezzo di un'equazione, potrei scegliere un sistema di riferimento cartesiano i cui assi coincidono con gli assi dell'iperbole. Con calcoli simili a quelli usati per l'ellisse, arriviamo ad un'equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oppure

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

con $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Se intersechiamo con l'asse delle ascisse e delle ordinate nel primo caso troviamo $x = a$ e $x = -a$, nel secondo caso non ci sono soluzioni.

Dunque l'asse focale è l'asse delle ascisse e i vertici sono $(a, 0)$, $(-a, 0)$. Analogamente, nel secondo caso l'asse focale è l'asse delle ordinate e i vertici sono $(0, b)$, $(0, -b)$.

Come al solito per intersecare un'iperbole con una retta mettiamo le due a sistema. Nel caso retta-parabola il grado della risolvente può abbassarsi, mentre con retta-ellisse il grado è sempre due. Controlliamo ora il caso retta-iperbole considerando l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che riscriveremo come

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$$

Ora interseco l'iperbole con una retta equazione $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + k = 0$ cioè con una retta che varia in un fascio di rette parallele alla retta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + k = 0 \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} -k \left(-\frac{2}{b}y - k\right) = 1 \\ \frac{x}{a} = -\frac{1}{b} - k \end{cases}$$

Questa risolvente ha grado minore di 2, cioè 1 se $k \neq 0$ e 0 se $k = 0$. Dunque $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ non interseca l'iperbole in alcun punto. Anche qui possiamo dire che i due punti di intersecazione "mancanti" sono "scappati" ad infinito.

Le rette $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ sono quindi gli asintoti dell'iperbole. Si verifica facilmente che se r è una retta non parallela ad uno dei due asintoti, allora la risolvente del sistema è di grado 2.

Abbiamo quindi il grado della risolvente dato da:

$$\begin{cases} 0 & \text{se la retta è un asintoto} \\ 1 & \text{se la retta è parallela e distinta da un asintoto} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio Dato l'iperbole di equazione $3x^2 - 5y^2 = 2$ trovare asintoti e vertici

Decomponiamo la parte di secondo grado dell'equazione

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{5}y)(\sqrt{3}x - \sqrt{5}y) = 2$$

Gli asintoti sono le rette $\sqrt{3}x + \sqrt{5}y = 0$ e $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 0$. Per trovare i vertici intersechiamo con l'asse focale (fra i due assi è quello che dà soluzioni), in questo caso l'asse delle ascisse.

Troviamo quindi la risolvente $3x^2 = 2$ che ha soluzioni $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. I vertici sono dunque $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ e $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

Supponiamo il caso particolare dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

In questo caso, gli asintoti sono $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, e quindi $x + y = 0$ e $x - y = 0$, che sono le bisettrici degli assi coordinati e, in particolare, sono ortogonali. Un'iperbole di questo tipo si dice *equilatera*.

Allora si potrebbe scegliere un sistema di riferimento in cui assi sono gli asintoti (solo se l'iperbole è equilatera). Dai calcoli si arriva a un'equazione molto semplice del tipo $yx = l$ dove $l \neq 0$. Se $l > 0$, l'iperbole vive nel primo e terzo quadrante, mentre se $l < 0$ essa vive nel secondo e nel quarto.

Esercizio Trovare tutte le ellissi i cui assi di simmetria sono gli assi coordinati che siano passanti per il punto $P = (4, -1)$ e tangenti la retta $r: x + 4y - 10 = 0$

L'equazione generica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b \neq 0$, o equivalentemente $hx^2 + ky^2 = 1$ con $h, k > 0$. Imponiamo il passaggio per P , ossia $16h + k = 1$ da cui $k = 1 - 16h$. L'equazione diventa $hx^2 + (1 - 16h)y^2 = 1$. Per imporre la tangenza con r , mettiamo a sistema e richiediamo il discriminante della risolvente nullo

$$\begin{cases} hx^2 + (1 - 16h)y^2 = 1 \\ x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$$

sostituendo la x troviamo la risolvente $h(10 - 4y)^2 + (1 - 16h)y^2 = 1$. Imponendo il discriminante nullo troviamo

$$h = \frac{1}{20} \vee h = \frac{1}{80}$$

Abbiamo quindi le ellissi

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

e

$$\frac{x^2}{80} + \frac{4}{5}y^2 = 1$$

13 Combinatoria

Supponiamo di avere una gara a cui partecipano 35 persone e voler contare quali sono i possibili ordini di arrivo per i primi 3. I possibili primi vincitori sono 35, mentre il secondo va individuato fra i rimanenti 34, e il terzo fra i rimanenti 33. Per cui il numero di possibili combinazioni è $35 \cdot 34 \cdot 33$. Se volessi considerare tutto l'ordine di arrivo, dovrei proseguire con la moltiplicazione, e quindi $35!$ possibili ordinamenti di arrivo al traguardo.

In generale se ho n oggetti e devo sceglierne k dove $k \leq n$ e l'ordine in cui li scelgo ha importanza, allora ho $n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ possibilità.

Nel caso in cui $n = k$ abbiamo $n!$ possibilità (fattoriale).

Una semplice proprietà del fattoriale è che $(n+1)! = n!(n+1)$. Inoltre, il fattoriale viene definito in maniera tale che $0! = 1$. Cosifacendo la relazione precedente funziona.

Vogliamo ora contare il numero di modi per i quali posso scegliere k oggetti tra n in cui l'ordine non ha importanza. Questo valore è dato da

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questo numero è detto coefficiente binomiale.

Supponiamo di dover estrarre 3 numeri scelti da 90. Se contassi l'ordine, avremmo $90 \cdot 89 \cdot 88$ possibilità. Ma la stessa terna può uscire in più modi diversi. Ad esempio, la terna $(5, 28, 72)$ può uscire in $3^2 = 6$ ordini diversi, come tutte le terne.

Alcune relazioni:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

con $0 \leq k \leq n$. Scegliere k oggetti tra n è lo stesso che scegliere gli altri $n-k$, per simmetria.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

per $1 \leq k \leq n-1$. Fisso arbitrariamente un oggetto tra gli n . Tra le $\binom{n}{k}$ possibili scelte di k oggetti, alcune comprenderanno l'oggetto fissato e altre no. Quante comprendono l'oggetto fissato? Ne devo scegliere $k-1$ tra i rimanenti $n-1$, quindi ho

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Quante non comprendono l'oggetto fissato? Ne devo scegliere k fra n

$$\binom{n-1}{k}$$

La somma è quindi chiaramente

$$\binom{n}{k}$$

Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 \dots
 \end{array}$$

Il triangolo di Tartaglia ordina tutti i coefficienti binomiali. Il valore di ogni elemento è pari alla somma dei due elementi sopra di lui, dove gli elementi non presenti sono considerati 0.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 \dots
 \end{array}$$

Questi valori si chiamano coefficienti binomiali in quanto rappresentano i coefficienti delle espansioni di un binomio

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Ogni riga del triangolo rappresenta quindi l'espansione binomiale della potenza pari al livello della riga del triangolo.

In generale bisogna contare quante volte appare $a^k b^{n-k}$. Questo appare se in k degli n fattori, quando sviluppo scelga a (e quindi scelga b negli altri $n - k$ fattori). Devo scegliere k posizioni tra n in cui prendere a : posso farlo esattamente in

$$\binom{n}{k}$$

modi.

Abbiamo visto come ordinare n oggetti si può fare in $n!$ modi diversi. Supponiamo ora di avere n oggetti non tutti diversi, dove vi sono k gruppi di oggetti uguali, ciascuno con a_1, a_2, \dots, a_k elementi. Allora le combinazioni sono

$$\frac{n!}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Il numero di anagrammi di MISSISSIPPI è

$$\frac{11!}{4!2!4!1!} =$$