Esercizi I

Paolo Bettelini

Contents

1 Esercizi

1.1 Serie a coefficienti positivi

Esempio Serie telescopica

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

manipoliamo la serie come telescopica

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}}{4n-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{4n+3} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}, \quad b_n = 4n-1\end{aligned}$$

Quindi il risultato è dato da

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1}\right] = \frac{1}{12}$$

Esempio Serie geometrica

Considera

$$x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = a_n$$

manipoliamo la serie come geometrica

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2\cdot 4^{-n}}{9^{-1}\cdot 3^n} \\ &= 18\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

la serie diventa allora

$$\begin{aligned}18\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{12}^n &= 18\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}^n\right) - 1 - \frac{1}{12}\right] \\ &= 18\left[\frac{1}{1-\frac{1}{12}} - 1 - \frac{1}{12}\right] \\ &= \frac{3}{22}\end{aligned}$$

Esempio Termine n-esimo

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16-n^4}{n^2+3}$$

Notiamo che il termine n-esimo non tende a zero, quindi la serie non converge.

Esempio p-q-serie

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

vogliamo confrontarla con una serie nota

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log n)^{-1}}$$

Ignoriamo il $+1$ a denominatore. Questa serie può essere confrontata con una p-q-serie con $p = 1$ e $q = -1$, quindi diverge.

Esempio Test del confronto

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(con il confronto). Chiaramente, $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ e quindi siccome la serie armonica diverge, anche questa diverge.

Esempio Test del confronto asintotico

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n\cos n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4 + n\log n + e^{-n}}$$

Abbiamo il termine

$$a_n = \frac{n^2\left[1 + \frac{\cos n}{n} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}\right]}{n^4\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^4 + \frac{\log n}{n^3} + \frac{e^{-n}}{n^4}\right]} \sim \frac{1}{n^2}$$

con

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}(1+o(1))} \to 1$$

Questo ultimo passaggio è dato dal fato che $\log(1+\varepsilon_n) = \varepsilon(1+o(1))$. Quindi, la serie ha lo steso carattere della p-serie con $p = 2$ che converge.

Esempio Test del rapporto

Considera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

applichiamo il test del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(11\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Quindi, siccome $L < 1$, la serie converge.

Esempio Test della radice ennesima

Considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$$

applichiamo il tst della radice ennesima

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\sqrt{n}}{2}}}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \log n} \to \frac{1}{2}$$

Quindi, siccome $L < 1$, la serie converge.

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n}}{10^{n+2}}$$

La serie è geometrica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n}}{10^{n+2}} &= \frac{1}{100} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{100} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} \right) - 1 - 1 \right] \\
&= \frac{1}{100} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{10}} \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \right) - 1 - 1 \right] \\
&= \frac{37}{400}
\end{aligned}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

Esercizio

Studia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^2 \log n}$$

Esercizio

Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)+1}{3^n+n}$$
Siccome $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$, la serie ha lo stesso carattere di
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n+n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n\left(1+\frac{n}{3^n}\right)} \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$
che converge per gerarchia degli infiniti.

Esercizio

Studia
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
Abbiamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+3n+2)}$$