Probabilidad

Gianpaolo Luciano Rivera 135491

2016

1. Principios de Probabilidad

1.1. Axiomas

1.2. Probabilidad Total y Bayes

- **Probabilidad Total**: Si tenemos una partición sobre el espacio muestral $A_1, \ldots, A_n$ y sea B un evento cualquiera entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A)$$

. En palabras, significa puedo ponderar mi evento B siempre la ocurrencia de mis particiones.

- **Teorema de Bayes**:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A)}$$

Usado en un contexto de *Estadistica Bayesiana* nuestras probabilidades se convierten en funciones:

$$f(\theta|\underline{X}) = \frac{f(\underline{X}|\theta))f(\theta)}{\int_{\Theta} f(\underline{X}|\tilde{\theta}))f(\tilde{\theta})\, d\tilde{\theta}}$$

2. Esperanza

2.1. Propiedades

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b$
- Si X y Y son v.a. independientes $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[\sum_i X_i] = \sum_i E[X_i]$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$

3. Varianza

3.1. Propiedades

- $\operatorname{Var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{Var}[aX + b] = a^2 \operatorname{Var}[X]$
- $\operatorname{Var}[\sum_i X_i] = \sum_i \sum_j \operatorname{Cov}[X_i, X_j] = \sum_i \operatorname{Var}[X_i] + 2\sum_{i,j\ i\neq j} \operatorname{Cov}[X_i, X_j]$
- $\operatorname{Var}[X] = E[\operatorname{Var}[X|Y]] + \operatorname{Var}[E[X|Y]]$
- Si X y Y son v.a. independientes $\Rightarrow \operatorname{Var}[XY] = \mathbb{E}[X]^2 \operatorname{Var}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2 \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[X]\operatorname{Var}[Y]$

4. Covarianza

4.1. Propiedades

- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$
- $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - E[X]E[Y]$
- Si X y Y son v.a. independientes $\Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0$

5. Probabilidad Condicional

- **Densidad Condicional**:

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

6. Transformaciones y relaciones entre V.A.

6.1. Variables Aleatorias Discretas

6.2. Bernoulli

- $X_i \sim \text{Be}(p) \Rightarrow Y = \sum_i^n X_i \sim \text{Bi}(n, p)$

6.3. Binomial

- $X \sim \text{Bi}(n, p)$ y $Y \sim \text{Bi}(m, p)$ independientes $\Rightarrow X + Y \sim \text{Bi}(n + m, p)$

6.3.1. Poisson

- Sean $X_i \sim \text{Po}(\lambda_i)$ independientes $\Rightarrow\ Z = \sum_i^n \sim \text{Po}(\sum_i \lambda_i)$
- Si $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$ y $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$. Dado $X_1 + X_2 = k \Rightarrow X_1 \sim \text{Bi}(k, \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2))$

6.4. Variables Aleatorias continuas

6.4.1. Uniforme

- $X \sim \text{U}(0, 1) \iff Y = a + (b - a)X \sim (a, b)$
- La parte fraccionaria de la suma de n uniformes $(0, 1)$ independientes, también es uniforme $(0, 1)$.

6.4.2. Distribución Exponencial

- Sea X distribuida exponencial con *parámetro de media* λ. Entonces su densidad es: $f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ con valor esperado $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- Sea X distribuida exponencial con *parámetro de intensidad* λ. Entonces su densidad es: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con valor esperado $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n \sim \Gamma(n, \lambda)$

7. Teoremas de Convergencia

7.1. Ley de los grandes números

- **Ley débil**: Sea $X_i \quad i = 1, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias *independientes* tal que: $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ para toda i. Entonces el promedio $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ converge en probabilidad a μ. Ie. $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1$$

- **Ley fuerte**: Sea $X_i \quad i = 1, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias *independientes e idénticamente distribuidas* con valor esperado μ, entonces:

$$P\left(\lim_{n \leftarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

8. Otros

- Funciones de probabilidad: $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
  - $\mathrm{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$
  - $\mathrm{probit}(p) = \Phi^{-1}(p)$