Formulario Cálculo I

Gianpaolo Luciano Rivera

22 de mayo de 2018

1. Números Reales $\mathbb{R}$

Los números reales pueden ser representados en una recta infinita hacia ambos lados. Algunos teoremas.

- Los reales $\mathbb{R}$ son densos (al igual que los racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{Q}'$)
- **Axioma de Arquímedes**: No existe número más grande y siempre hay un natural mayor. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que: $x < n$. Por lo tanto tenemos la siguiente consecuencia.
- **Propiedad de Arquímedes**: Siempre hay un número entre cero y tu número $0 < z \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que: $0 < 1/n < z$

Valor Absoluto: $|x - y|$, es la distancia entre x y y en la recta numérica, sin importar que estos sean positivos o negativos. Cuando solo tenemos un número adentro $|x|$ este se refiere a la distancia de ese número contra el cero.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Propiedades:

- $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $|-a| = |a|$
- $|a|^2 = a^2$
- $|ab| = |ab|$
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
- Desigualdad del Triangulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| - |b|$
- Si $|a| \leq \delta \Rightarrow -\delta \leq a \leq \delta$
- Si $|a| \geq \delta \Rightarrow a \leq -\delta$, ó, $a \geq \delta$

2. Funciones

Una función es una *regla* que relaciona todos los elementos de tu *dominio* (de forma única) contra los elementos de un *contradominio*. A los elementos a los que si tocamos en el contradominio se le llama *rango*. Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Propiedades:

- **Paridad**: f(x) = f(-x)
- **Imparidad**: f(-x) = -f(x)

- **Inyectividad**: $\forall a, b \in \mathrm{Dom}_f$, si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
- **Suprayectividad**: $\mathrm{Rango}_f = \mathrm{CD}_f$
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad \mathrm{Dom}_{f+g} = \mathrm{Dom}_f \ \cap \mathrm{Dom}_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \mathrm{Dom}_{fg} = \mathrm{Dom}_f \cap \mathrm{Dom}_g$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad \mathrm{Dom}_{f/g} = \mathrm{Dom}_f \cap \mathrm{Dom}_g - \{x|g(x) = 0\}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \mathrm{Dom}_{g\circ f} = \{x|x \in \mathrm{Dom}_f \text{ y } f(x) \in \mathrm{Dom}_g\}$

3. Límites y Continuidad

El límite cuando x tiende a x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ es ver que comportamiento tiene una función cuando nos acercamos lo suficiente a cierto punto. Definiciones y propiedades:

- **Definición Formal de Límite** Si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$ con $x \in \mathrm{Dom}_f \ \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe $\iff$ los dos límites laterales exiten y son iguales $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$
- **Continuidad**: Sea f una función definida en algún intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, decimos que $f(x)$ es *continua* $\iff$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Es decir, el límite por ambos lados existe y es lo mismo que evaluar la función en ese punto.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe y $\lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces:
  - El límite de la suma/resta existe y es igual a la suma/resta de estos. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
  - El límite de la multiplicación existe y es igual a la multiplicación de estos. $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x)$
  - Si además $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ entonces, el límite de la división existe y es igual a la división de los límites. $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)/\lim_{x\to x_0} g(x)$
- Si límite de $f(x)$ es un número no negativo, ie: $[0, \infty)$ y n es par positivo (2,4,6,...), entonces: $\lim x \to x_0 \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim x \to x_0 f(x)}$
- Si límite de $f(x)$ existe y n es impar positivo (3,5,7,...), entonces: $\lim x \to x_0 \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim x \to x_0 f(x)}$
- Si g es una función *continua* y el límite de $f(x)$ existe y pertenece al dominio de g, entonces, $\lim x \to x_0 g(f(x)) = g(\lim x \to x_0 f(x))$

  Algunos teoremas que se demuestran sobre continuidad:

  - La suma/resta de funciones continuas es continua.
  - La multiplicación de continuas es continua.
  - Si f y g son continuas en x_0 y $g(x) \neq 0$ entonces, f/g es continua.
  - Toda función polinomial es continua en cada real.
  - Toda función racional es una función continua excepto en los números que sean raices del denominador.
  - Sea f continua en x_0 y que g continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

  Teorema del Sandwich Supongamos que f, g, h son funciones definidas en alguna vecindad de x_0 (pero no necesariamente en x_0. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en dada vecindad y $lim_{x\to x_0} f(x) = lim_{x\to x_0} h(x) = l$, entonces el límite de g existe y es el mismo $lim_{x\to x_0} g(x) = l$. El resultado más imporante del TS. es el siguiente límite trigonometrico:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

Teorema de Bolsano o Teorema del Valor Intermedio: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o viceversa), entonces: $\exists\, c \in (a, b)$ tal que, $f(c) = 0$. Es decir, si tu función es continua y en algún punto va por arriba del eje x pero en otro punto va por abajo, entonces lo debe de cruzar en algún punto. Nota: puede cruzar en más de un punto en ese intervalo. Sirve para encontrar cruces entre funciones definiendo $h = f - g$ y encontrando sus raices o para encontrar **puntos fijos**. Un punto fijo es tal que $f(c) = c$.

4. Derivadas

Definición Formal de Derivada: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in (a, b)$. Decimos que f es *diferenciable* si el siguiente límite existe.

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Una definición alternativa es: $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Y en caso de que exista, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la función f en x_0. Algunos teoremas y propiedades.

- Diferenciabilidad $\Rightarrow$ Continuidad.
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{R}$. Caso particular $n = 1$, $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.
- f, g diferenciables en x_0 y $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- Sea $k \in \mathbb{R}$ una constante. Si $kf(x)$ diferenciables en x_0 entonces $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$. Caso particular $k' = 0$
- **Regla de la multiplicación**: fg diferenciable en x_0 entonces $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- **Regla del Cociente**: Sea $g(x_0) \neq 0$. Entonces f/g es dif. en x_0 y $(f/g)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
- **Regla de la Cadena**. Si f es diferenciables en x_0 y g es diferenciables en $f(x_0)$ entonces, $g \circ f$ es diferenciable en x_0. $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$
- **Derivadas Trigonometricas** $sin'(x) = cos(x)$ y $cos'(x) = -sin(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$
- **Teorema de Lagrange o Teorema del valor Medio**: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe una $c \in (a, b)$ tal que

  $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  .
- **Teorema de Rolle**: (Versión particular del TVM). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe una $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- **Funciones Monótonas** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f'(c) > 0 \quad \forall c \in (a, b)$, nuestra función es estrictamente creciente en este intervalo. Si por el contrario, $f'(c) < 0$ para el mismo intervalo la función es estrictamente decreciente. Si tenemos que $f'(c) \geq 0$ es decir, con posible igualdad, entonces tenemos que es solamente creciente (ya no es estricto).
- **Teorema del Valor Extremo** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces, f adquiere un máximo y un mínimo global en ese intervalo al menos una vez.
- **Máximos y Mínimos locales** Sea x_0 un punto tal que $f'(x_0) = 0$ decimos que x_0 es un *punto crítico*. Si además, $f''(x_0) < 0$ entonces es un mínimo local, por el contrario si $f''(x_0) > 0$ entonces es máximo local. Si $f''(x_0) = 0$ el criterio no es concluyente.

- **Puntos de Inflexión y concavidad** Sea x_0 un punto tal que $f''(x_0) = 0$ decimos que x_0 es un *punto de inflexión*, es decir, donde cambia la concavidad (curvatura) f. Para los puntos donde $f''(x)$ sea positiva decimos que una función es *convexa* en ese intervalo. Por el contrario, si $f''(x) < 0$ decimos que es *concava*

- **Asintotas Oblicuas** Existen en funciones del tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

  donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios tales que, el grado de p sea 1 mas que el grado de q ie $g(p) = g(q) + 1$. Y se encuentran haciendo la división algebráica de los polinomios y posteriormente dejando $p(x) = q(x)Q(x) + r(x)$ entonces: $f(x) = Q(x) + r(x)/q(x)$. Donde nuestra A.O. será $Q(x)$ pues $r(x)/q(x)$ tiende a cero si x tiende a mas o menos infinito.

- **Linealización** $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ para una vecindad de x_0.

5. Integrales

Integral Indefinida o definición formal de Primitiva o Antiderivada: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, decimos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva o antiderivada de f si F es diferenciable en $[a, b]$ y cumple que $F' = f$ en todo el intervalo. Sin embargo, notemos que si F es antiderivada, también lo es $F + c$ con c cualquier constante. Usualmente la denotamos $F(x) = \int f(x)\, dx$. Las reglas de antiderivación son:

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
- $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ para $x \in \mathbb{R}$
- $\int udv = dv - \int vdv$

Integral definida o vista como función de area bajo la curva: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Sea $x \in (a, b]$. Denotamos por $A(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ es el area bajo la gráfica de f entre a y x. Propiedades:

- $A(a) = 0$ es decir: $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si $c \in (a, b)$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Si $m \leq f(x) \leq M \quad \forall xin[a, b]$ con m, M constantes, entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$
- **Teorema del valor medio para integales**. Sea f continua en $[a, b]$ entonce existe una $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$
- **Teorema Fundamental del Cálculo Versión 1**: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa y sea $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función de area definida:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ \int_a^x f(t)dt & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  Entonces, A es diferenciable en $[a, b]$ y $A'(x) = f(x)$ para toda x en el intervalo.

- **Teorema Fundamental del Cálculo Versión 2**: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa y sea F cualquier antiderivada de f. Entonces $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$