Teoremas de Polinomios

Santiago Alonso

Junio 2018

- **Teorema del Residuo**: Sea cualquier polinomio $p(x)$, cuando se divide entre entre $(x-a)$ entonces, el residuo es $p(a)$. Por lo tanto, para que $(x-a)$ sea *factor*, necesitamos que $p(a)=0$. Además, se dice que a es un *cero* o una *raíz del polinomio*.

- **Teorema del factor**: Si $(x-a)$ es factor de $p(x)$ entonces podemos reescribir:

$$p(x) = (x-a)q(x)$$

  Con $q(x)$ otro polinomio de un grado menor que $p(x)$. Además, los ceros de $q(x)$ serán también ceros de $p(x)$

- **Teorema de Raíces Racionales**. Sea:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^3 + a_1 x + a_0$$

  Cualquier polinomio. Si este tiene *raíces racionales* es decir, raíces de la forma c/d entonces c es un factor de a_0 y d es un factor de a_n. Es decir:

$$a = \frac{c}{d} = \frac{\text{fact}(a_0)}{\text{fact}(a_n)}$$

- **Teorema de las Raíces Complejas**: Si $p(x)$ es cualquier polinomio con *coeficientes reales*. Es decir, todas las a_i son números normales. Y el número complejo $a = c + di$ una raíz compleja de $p(x)$, es decir $p(a) = 0$ entonces, el conjugado de $\hat{a}$ igual a $\hat{a} = c - di$ también es raíz.

- **Teorema del Valor Intermedio**: Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Sea a un punto tal que $p(a) > 0$ y un punto b tal que $p(b) < c$. Entonces existe un punto c entre a y b que es una raiz. Es decir: $p(c) = 0$. Esto sigue porque los polinomios son continuos y si encontramos un punto donde la gráfica va, *por arriba del eje x* y otro donde va *por abajo*, podemos concluir que en al menos un punto lo está cruzando. El argumento funciona igual si va de abajo para arriba.

- **Teorema de Cotas Máximas** Sea $p(x)$ un polinomio. Todos los zeros reales de este, se encuentran en el intervalo $(-M, M)$ donde M es igual a :

$$M = 1 + \frac{\text{máx}\,\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}}{|a_n|}$$

  Es decir, si existen raíces reales, podemos *acotar el intervalo* donde todos se encuentran. Solo basta tomar en valor absoluto el mayor de los coeficientes que no sean el principal (ie a_n), y dividirlo entre el valor absoluto de a_n, y sumarle 1. Ese número llamado M, marca una cota superior e inferior para encontrar rápidamente todas las posibles raíces.

- **Teorema de Cotas Inferiores y Superiores** Más que un teorema, es una regla para ir descartando posibles raices. Son dos; para las **cotas superiores**, tomas un número positivo $a > 0$, si haces división sintética, todos los *resultados* tienen signos positivos, entonces a es una cota superior para todas las raices. Por el contrario si $a < 0$ y al aplicar división sintética los signos se alternan, entonces a es una cota inferior. En caso de que tengamos ceros en la división estos se pueden obviar y usar como *comodines*, ie: no importan.