Teorema 0.1. *Dado el modelo bpwpm (definición **??**, página **??**) donde se tienen las siguientes distribuciones:*

$$z_i \,|\, \mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}(z_i \,|\, \eta(\mathbf{x}_i), 1) \tag{??}$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_\lambda(\boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}}, \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}), \tag{??}$$

la distribución posterior de $\boldsymbol{\beta}$ dado $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ y $\mathbf{X}$ es conjugada. Es decir:

$$\boldsymbol{\beta} \,|\, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{X} \sim \mathcal{N}_\lambda(\boldsymbol{\beta} \,|\, \mu^*_{\boldsymbol{\beta}}, \Sigma^*_{\boldsymbol{\beta}}), \tag{??}$$

con los parámetros actualizados,

$$\mu^*_{\boldsymbol{\beta}} = \Sigma^*_{\boldsymbol{\beta}} \times (\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{\beta}} \mu_{\boldsymbol{\beta}} + \widetilde{\Psi}(\mathbf{X})^t \mathbf{z})$$
$$\Sigma^*_{\boldsymbol{\beta}} = \left[\Sigma^{-1}_{\boldsymbol{\beta}} + \widetilde{\Psi}(\mathbf{X})^t \widetilde{\Psi}(\mathbf{X})\right]^{-1}.$$

Demostración. Se retoma la derivación comenzada en la página **??**.

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \frac{\pi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \mathbf{X})}{\pi(\mathbf{z})}$$
$$= C\,\pi(\boldsymbol{\beta}) \prod_{i=1}^{n} \phi(z_i|\eta(\mathbf{x}_i), 1),$$

utilizando un argumento de proporcionalidad sobre $\boldsymbol{\beta}$ y expandiendo la función de densidad de una variable aleatoria normal ϕ se tiene:

$$\propto \quad \pi(\boldsymbol{\beta}) \times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_i - \eta(\mathbf{x}_i))^2\right\}$$

sustituyendo la identidad (**??**), $\eta(\mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\beta}^t \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_i(\mathbf{x}_i)$, Q.E.D.