UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Trayectorias de Partículas Cargadas en Campos Electromagnéticos

Simulador web interactivo y validación básica

Proyecto Final

Curso:	Óptica y Electromagnetismo
Docente:	Solano Salinas, Carlos Javier
Integrantes:	Paolo Villavicencio Álvaro Salazar
Fecha:	23 de noviembre de 2025

Universidad del Perú, Decana de América

Índice

1. Resumen

El movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos es un tema importante en la física clásica y aplicada. En este proyecto se desarrolla un simulador interactivo en la web que resuelve numéricamente, mediante el método explícito de Euler, la ecuación de movimiento de una partícula cargada en dos dimensiones bajo campos sencillos: un campo eléctrico uniforme, un campo magnético uniforme perpendicular al plano y un campo eléctrico radial. La herramienta permite ajustar en tiempo real los parámetros físicos y visualizar de forma cualitativa las trayectorias resultantes, facilitando la comprensión de la influencia de los campos sobre la dinámica de la partícula.

Palabras clave: electromagnetismo, partículas cargadas, simulación numérica, método de Euler, visualización interactiva.

2. Abstract

The motion of charged particles in electric and magnetic fields is a central topic in classical and applied physics. This project presents a web-based interactive simulator that numerically solves, via the explicit Euler method, the equations of motion of a charged particle in two dimensions under simple field configurations: a uniform electric field, a uniform magnetic field perpendicular to the plane, and a radial electric field. The tool allows real-time adjustment of physical parameters and provides a qualitative visualization of the resulting trajectories, helping to understand how the fields influence particle dynamics.

Keywords: electromagnetism, charged particles, numerical simulation, Euler method, interactive visualization.

3. Introducción

3.1. Descripción del problema

El movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos es un tema central en la física clásica y moderna, con aplicaciones que van desde los tubos de rayos catódicos hasta los aceleradores de partículas y los dispositivos de imagen médica (Serway & Jewett, 2010; Young & Freedman, 2014). En el régimen no relativista, la dinámica de una partícula de carga q y masa m está dada por la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\Big(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\Big),$$

a partir de la cual se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para la posición y la velocidad de la partícula (Griffiths, 2013). Aunque ciertos casos ideales, como los campos uniformes, admiten soluciones analíticas relativamente sencillas, la exploración de configuraciones más generales suele requerir métodos numéricos y herramientas de simulación.

3.2. Planteamiento del proyecto

Frente a este contexto, el presente proyecto se plantea como el desarrollo de un simulador interactivo que permita visualizar de manera cualitativa la trayectoria de una partícula cargada sometida a campos prescritos. El enfoque se restringe a un modelo bidimensional en el plano (x, y), considerando tres configuraciones representativas: un campo eléctrico uniforme, un campo magnético uniforme perpendicular al plano y un campo eléctrico radial análogo al generado por una carga puntual. Este tipo de escenarios se utilizan de forma habitual como casos de prueba para métodos numéricos aplicados a partículas cargadas (Griffiths, 2013; Cristian & Ripperda, 2024).

El simulador se implementa como una aplicación web escrita en JavaScript, utilizando el elemento *canvas* de HTML5 para la representación gráfica. La interfaz permite modificar en tiempo real parámetros como la carga, la masa efectiva, las condiciones iniciales y la intensidad de los campos, siguiendo la filosofía de simulaciones visuales para la enseñanza de la física y de los sistemas dinámicos (Shiffman, 2012).

3.3. Modelo y método

El modelo físico se basa en la formulación clásica de la fuerza de Lorentz para una partícula cargada en presencia de campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ (Griffiths, 2013). Al particularizar a un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ y a campos eléctricos que dependen a lo más de la posición en el plano, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para las componentes $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ y $v_y(t)$. La relación carga–masa q/m aparece como parámetro clave que controla la sensibilidad de la trayectoria frente a los campos aplicados.

Para resolver numéricamente este sistema se adopta el método explícito de Euler, que aproxima la solución actualizando la velocidad y la posición con base en la aceleración evaluada en el instante previo. Este esquema, de primer orden, puede escribirse de manera genérica como

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n),$$

y constituye el caso más sencillo dentro de los métodos de un paso para ecuaciones diferenciales ordinarias (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2013). En la implementación se utiliza un paso de tiempo fijo y varios subpasos por cuadro de animación, lo que permite obtener trayectorias estables y visualmente coherentes pese a la simplicidad del integrador. Este compromiso entre precisión numérica y claridad computacional resulta adecuado para el objetivo principal del trabajo, que es ofrecer una herramienta didáctica accesible más que un código de alta precisión.

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

Desarrollar una aplicación web interactiva que simule y visualice la dinámica de una partícula cargada bajo campos eléctricos y magnéticos sencillos, utilizando el método explícito de Euler, de forma que se puedan explorar cualitativamente las trayectorias al variar los parámetros físicos del sistema.

4.2. Objetivos específicos

OE1. Modelo y casos de estudio. Formular las EDOs no relativistas con fuerza de Lorentz para una partícula cargada en dos dimensiones y configurar tres escenarios de interés: (i) campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$, (ii) campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ perpendicular al plano y (iii) campo eléctrico radial análogo al de una carga puntual (con regularización numérica cerca del origen). Incluir explícitamente la relación carga–masa q/m como parámetro de control.

OE2. Implementación y visualización. Implementar el integrador explícito de Euler en JavaScript y construir una interfaz gráfica basada en *canvas* que permita representar: (i) la trayectoria x–y de la partícula, (ii) una grilla y ejes de referencia y (iii) una representación cualitativa de los campos (flechas, líneas radiales, símbolos de campo magnético). Incorporar controles interactivos para ajustar carga, masa efectiva, condiciones iniciales, intensidad de los campos y nivel de *zoom*.

OE3. Verificación cualitativa. En los casos de campo uniforme, comprobar de manera cualitativa que las trayectorias obtenidas son coherentes con las soluciones analíticas esperadas: curvas parabólicas para campo eléctrico uniforme y órbitas aproximadamente circulares para campo magnético uniforme, incluyendo el cambio de sentido de giro según el signo de qB_z. Observar además la conservación aproximada de la rapidez en el caso puramente magnético.

OE4. Exploración paramétrica. Realizar una exploración paramétrica básica (2–3 configuraciones representativas por caso) para ilustrar cómo la variación de parámetros como q/m, la intensidad de los campos o la velocidad inicial modifica la forma de la trayectoria, destacando la aparición de órbitas cerradas y trayectorias de escape en el campo radial, así como cambios de radio y curvatura en los casos uniformes.

5. Marco teórico

5.1. Notación y parámetros del modelo

Se considera una partícula puntual de carga q y masa m, moviéndose en el plano xy bajo la acción de campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ prescritos. La posición y la velocidad se representan como

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_x(t), v_y(t)).$$

En todo momento se asume el régimen no relativista, es decir, $|\mathbf{v}| \ll c$, de modo que la dinámica clásica de Newton es una aproximación adecuada (Serway & Jewett, 2010; Young & Freedman, 2014).

Los campos se consideran conocidos explícitamente en el espacio y el tiempo. En este trabajo se restringen a configuraciones estacionarias $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ que no dependen del tiempo, lo que simplifica el análisis (Griffiths, 2013). La relación carga–masa q/m aparece como parámetro adimensional clave que controla la respuesta de la partícula frente a los campos aplicados.

Para la integración numérica se introducen el paso de tiempo Δt y un índice discreto n, de manera que $t_n = n\,\Delta t$, $\mathbf{r}_n \approx \mathbf{r}(t_n)$ y $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}(t_n)$. Estos parámetros discretos se utilizan tanto en el análisis numérico como en la implementación computacional (Chapra & Canale, 2007).

5.2. Ecuaciones de movimiento: fuerza de Lorentz

La ecuación de movimiento de una partícula cargada en presencia de campos eléctricos y magnéticos viene dada por la segunda ley de Newton

$$m\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

donde la fuerza total es la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\Big(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\Big).$$

Al combinar ambas expresiones se obtiene

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\Big(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\Big),$$

lo que define un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ (Griffiths, 2013).

En el simulador se adopta un campo magnético uniforme perpendicular al plano,

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z),$$

y campos eléctricos contenidos en el plano,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Big(E_x(x, y),\ E_y(x, y)\Big).$$

Con esta elección, el producto cruz se reduce a

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B_z,\ -v_x B_z,\ 0),$$

de modo que las ecuaciones para las componentes se escriben como

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m}\Big(E_x(x, y) + v_y B_z\Big), \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m}\Big(E_y(x, y) - v_x B_z\Big), \\
\frac{dx}{dt} &= v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y.
\end{aligned}$$

Este sistema es la base del modelo que se integra numéricamente en la aplicación.

5.3. Casos analíticos de referencia

Algunas configuraciones de campo admiten soluciones analíticas sencillas y se emplean como referencia para interpretar las trayectorias numéricas (Serway & Jewett, 2010; Young & Freedman, 2014).

Campo eléctrico uniforme

Si el campo eléctrico es uniforme,

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

la aceleración de la partícula es constante:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E}.$$

Integrando se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m}\mathbf{E}\,t,$$
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\frac{q}{m}\mathbf{E}\,t^2,$$

de donde se concluye que la trayectoria en el plano es parabólica.

Campo magnético uniforme

Para un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ y ausencia de campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, la fuerza de Lorentz es siempre perpendicular a la velocidad. En consecuencia, la rapidez $|\mathbf{v}|$ se conserva y la partícula describe un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular a $\mathbf{B}$ (Griffiths, 2013).

Definiendo la velocidad perpendicular $v_\perp$ al campo, se tiene

$$r_L = \frac{m v_\perp}{|qB_z|},$$

que se conoce como radio de Larmor, y la frecuencia ciclotrón

$$\omega_c = \frac{|qB_z|}{m}, \qquad T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{|qB_z|},$$

donde T_c es el período del movimiento circular (Serway & Jewett, 2010). En el simulador, al trabajar en dos dimensiones, se observa directamente la proyección circular de este movimiento.

Campo eléctrico radial

En el caso de una carga puntual fija, el campo eléctrico en el espacio libre viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = kQ\,\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

donde $r = |\mathbf{r}|$ y $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Este campo es un ejemplo de *potencial central* y conduce a órbitas cerradas (elípticas) o a trayectorias de dispersión dependiendo de la energía mecánica total (Serway & Jewett, 2010). Aunque el análisis analítico completo requiere técnicas de mecánica clásica de dos cuerpos, estas soluciones sirven como guía cualitativa para interpretar las órbitas numéricas en el campo radial implementado en el simulador.

5.4. Integración numérica empleada

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias descrito anteriormente no siempre admite soluciones exactas en forma cerrada, especialmente cuando los campos presentan dependencias espaciales no triviales. En estos casos se recurre a métodos numéricos de integración temporal (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2013).

Entre los métodos de un paso, el más simple es el método explícito de Euler. Dado un problema de valores iniciales

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

la aproximación de Euler se escribe como

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n),$$

donde Δt es el paso de integración. Este esquema presenta un error local de orden $O(\Delta t^2)$ y un error global de orden $O(\Delta t)$, por lo que se clasifica como método de primer orden (Chapra & Canale, 2007).

Aplicado al sistema de la partícula cargada, con $\mathbf{y} = (x, y, v_x, v_y)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \Delta t\, \frac{q}{m}\Big(E_x(x_n, y_n) + v_{y,n}B_z\Big), \\
v_{y,n+1} &= v_{y,n} + \Delta t\, \frac{q}{m}\Big(E_y(x_n, y_n) - v_{x,n}B_z\Big), \\
x_{n+1} &= x_n + \Delta t\, v_{x,n}, \\
y_{n+1} &= y_n + \Delta t\, v_{y,n}.
\end{aligned}$$

Aunque existen métodos de orden superior, como Runge–Kutta de cuarto orden, el método de Euler resulta especialmente adecuado cuando el objetivo principal es obtener una visualización cualitativa de las trayectorias y mantener la implementación lo más simple y transparente posible (Shiffman, 2012). En la aplicación desarrollada se utiliza un paso de tiempo fijo y varios subpasos por cuadro de animación para mejorar la estabilidad visual de las trayectorias.

5.5. Campos y escenarios del estudio

En este trabajo se consideran tres configuraciones de campo que sirven como casos de estudio representativos (Griffiths, 2013; Cristian & Ripperda, 2024):

1. **Campo eléctrico uniforme.**

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Los parámetros E_x y E_y se controlan desde la interfaz y permiten reproducir, por ejemplo, un "tiro parabólico" cargado en distintas direcciones.

2. **Campo magnético uniforme perpendicular.**

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{B} = (0, 0, B_z).$$

Esta configuración genera órbitas aproximadamente circulares cuya curvatura y sentido de giro dependen de q/m y del signo de B_z.

3. **Campo eléctrico radial.**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Para evitar la singularidad en $r = 0$ se introduce en la práctica una regularización numérica reemplazando r^2 por $r^2 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ pequeño. Esta configuración permite estudiar órbitas cerradas alrededor del origen o trayectorias de escape, según las condiciones iniciales.

Estas tres situaciones capturan comportamientos cualitativamente distintos y proporcionan un banco de pruebas adecuado para el simulador.

5.6. Métricas de validación

En un enfoque puramente numérico, es habitual comparar las trayectorias simuladas con resultados analíticos o propiedades de conservación para evaluar la calidad del método empleado (Chapra & Canale, 2007; Cristian & Ripperda, 2024). Algunas métricas típicas en el contexto de partículas cargadas son:

- **Conservación de la rapidez en campo magnético uniforme.** En ausencia de campo eléctrico, la fuerza magnética no realiza trabajo y la energía cinética

$$K = \tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$$

debería permanecer constante (Griffiths, 2013). Cualquier variación significativa de $|\mathbf{v}|$ a lo largo del tiempo indica error numérico.

- **Radio y período de la órbita en campo magnético uniforme.** Para una órbita casi circular se pueden estimar un radio numérico R_{num} y un período T_{num} a partir de la trayectoria y compararlos con los valores teóricos $R = r_L$ y T_c. A partir de ello se definen errores relativos como

$$e_R = \frac{|R_{\text{num}} - R|}{R}, \qquad e_T = \frac{|T_{\text{num}} - T_c|}{T_c}.$$

- **Comportamiento cualitativo en el campo radial.** En el campo radial, la clasificación de las trayectorias en órbitas cerradas o de escape proporciona una verificación cualitativa frente a las predicciones de la mecánica clásica de potenciales centrales (Serway & Jewett, 2010).

En la implementación actual, el simulador se orienta principalmente a la visualización cualitativa, por lo que estas métricas se consideran como criterios de referencia más que como cálculos automatizados. No obstante, pueden estimarse a partir de las trayectorias generadas y servir de base para futuras extensiones centradas en la validación cuantitativa.

6. Desarrollo del programa

6.1. Formulación del modelo

A partir del marco teórico, el estado dinámico del sistema se representa en el programa mediante un vector de estado

$$\mathbf{y}(t) = \Big(x(t),\, y(t),\, v_x(t),\, v_y(t)\Big),$$

que se almacena en una estructura de datos única. En la implementación concreta se utiliza un objeto `particle` con los campos `x`, `y`, `vx`, `vy`, `q` y `m`, que concentran la posición, velocidad, carga y masa efectiva de la partícula.

Los parámetros de los campos se agrupan en un segundo objeto `fieldConfig`, que contiene, según el caso, las componentes del campo eléctrico uniforme (E_x, E_y), la componente magnética B_z o el parámetro efectivo kQ del campo radial. De esta manera se separa la definición del modelo físico (parámetros de campos y relación carga–masa) de la lógica numérica de integración.

En cuanto al sistema de referencia, se adopta un plano cartesiano xy con origen en el centro del lienzo de dibujo (*canvas*). Las unidades de longitud y tiempo se manejan de forma adimensional: el usuario controla escalas de visualización (factor de *zoom*) y el tamaño del paso temporal, mientras que las magnitudes físicas se introducen de forma relativa. Este enfoque es habitual en simulaciones didácticas, donde interesa la forma de las trayectorias más que la reproducción de unidades físicas absolutas (Shiffman, 2012).

6.2. Esquema numérico (criterio de avance)

Para avanzar la solución en el tiempo se emplea el método explícito de Euler descrito en la Sección 5.4 del marco teórico. En cada paso se evalúa la aceleración a partir de la fuerza de Lorentz y se actualizan primero las velocidades y luego las posiciones:

$$\begin{aligned}
v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \Delta t\, \frac{q}{m}\Big(E_x(x_n, y_n) + v_{y,n} B_z\Big), \\
v_{y,n+1} &= v_{y,n} + \Delta t\, \frac{q}{m}\Big(E_y(x_n, y_n) - v_{x,n} B_z\Big), \\
x_{n+1} &= x_n + \Delta t\, v_{x,n}, \\
y_{n+1} &= y_n + \Delta t\, v_{y,n}.
\end{aligned}$$

En la aplicación, el paso de integración Δt se fija a un valor pequeño constante y, por motivos de estabilidad y suavidad visual, se realizan varios subpasos numéricos por cada cuadro de animación. Este criterio permite reducir los errores acumulados propios del método de primer orden sin complicar el integrador (Chapra & Canale, 2007).

Como prevención numérica adicional, en el caso del campo radial se introduce un parámetro de regularización ε en el denominador $r^2 + \varepsilon$, evitando así divisiones por cero cuando la partícula pasa muy cerca del origen.

6.3. Representación del proceso

El programa se estructura siguiendo el ciclo típico de una simulación interactiva: inicialización, integración y visualización. El flujo general es el siguiente:

1. **Configuración inicial.** El usuario selecciona el tipo de campo (eléctrico uniforme, magnético uniforme o radial) y asigna valores iniciales a la carga, masa efectiva, posición y velocidad de la partícula, así como a los parámetros del campo. Estos datos se leen desde los controles de la interfaz y se almacenan en `particle` y `fieldConfig`.

2. **Bucle de animación.** Una función de animación, disparada mediante `requestAnimationFrame`, ejecuta en cada cuadro varios pasos de integración de Euler con paso Δt. Tras cada bloque de pasos, el estado actualizado se guarda en una lista de puntos históricos que define la traza de la partícula.

3. **Dibujo y visualización.** Sobre el lienzo *canvas* se dibujan, en orden, (i) una grilla y ejes de referencia, (ii) una representación esquemática del campo (flechas para $\mathbf{E}$, círculos con punto o cruz para $\mathbf{B}$, líneas radiales para el campo central) y (iii) la trayectoria y la posición actual de la partícula. El factor de escala (*zoom*) se implementa mediante transformaciones del sistema de coordenadas del lienzo.

4. **Interacción en tiempo real.** El usuario puede pausar y reiniciar la simulación, cambiar parámetros y seleccionar preajustes (*presets*) que cargan automáticamente configuraciones de interés, como el tiro parabólico o la órbita circular. Estos cambios se reflejan de inmediato en la siguiente iteración del bucle de animación.

Este diseño modular permite mantener separadas la física (cálculo de campos y aceleraciones), la integración numérica (actualización del estado) y la visualización, siguiendo las recomendaciones habituales en simulación interactiva (Shiffman, 2012).

6.4. Resumen operativo (reglas de chequeo)

Desde el punto de vista del usuario, el funcionamiento del programa puede resumirse en las siguientes reglas operativas:

- Seleccionar un caso de estudio (campo eléctrico uniforme, campo magnético uniforme o campo radial) y, opcionalmente, un preajuste que fija valores ilustrativos de los parámetros.
- Ajustar, si se desea, la carga q, la masa efectiva m, las condiciones iniciales y la intensidad de los campos, verificando cómo cambian la curvatura y forma de la trayectoria.
- Utilizar el control de *zoom* para encuadrar la región de interés y el parámetro de longitud de traza para decidir cuánto historial de la trayectoria se muestra en pantalla.
- Comprobar cualitativamente que la trayectoria observada es consistente con la teoría: parábolas en campo eléctrico uniforme, órbitas aproximadamente circulares con rapidez casi constante en campo magnético uniforme y órbitas cerradas o trayectorias de escape en el campo radial.

Estas “reglas de chequeo” sirven como guía práctica para la exploración de parámetros y para conectar las visualizaciones con los resultados analíticos de referencia.

6.5. Análisis del funcionamiento

El comportamiento del programa refleja el compromiso entre simplicidad numérica y calidad visual buscado en el diseño. El método de Euler, acompañado de pasos de integración pequeños y múltiples subpasos por cuadro, produce trayectorias suaves y estables para los rangos de parámetros considerados. La respuesta de la interfaz es inmediata, lo que favorece la experimentación en tiempo real y el uso didáctico del simulador.

No obstante, el enfoque presenta limitaciones claras: el modelo es estrictamente bidimensional y no relativista, el integrador es de primer orden y no se aplica ningún esquema avanzado de conservación de energía ni de corrección de errores. Estas restricciones pueden conducir a desviaciones cuantitativas apreciables si se utilizan pasos de tiempo demasiado grandes o campos muy intensos. Pese a ello, para el objetivo del proyecto —visualizar de forma cualitativa la influencia de los campos sobre la dinámica de una partícula cargada— el desempeño del programa es satisfactorio y sienta una base sólida para futuras mejoras, como la incorporación de métodos de orden superior o de geometrías de campo más complejas (Cristian & Ripperda, 2024).

7. Resultados

En esta sección se presentan algunos casos de prueba que ilustran el funcionamiento del simulador. Para cada configuración de campo se plantea primero un ejemplo analítico sencillo y, a continuación, se comenta la trayectoria obtenida numéricamente al reproducir los mismos parámetros en la aplicación web.

7.1. Campo eléctrico uniforme: tiro parabólico cargado

Ejemplo analítico

Considérese una partícula con relación carga–masa $q/m = 1$ en un campo eléctrico uniforme

$$\mathbf{E} = (0, E_0), \qquad E_0 = 1,$$

sin campo magnético y con condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_{0x} = 1, \quad v_y(0) = 0.$$

La aceleración es constante,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E} = (0, E_0),$$

por lo que las soluciones analíticas vienen dadas por

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} = 1, & v_y(t) &= E_0 t, \\ x(t) &= v_{0x}\, t = t, & y(t) &= \tfrac{1}{2} E_0 t^2 = \tfrac{1}{2} t^2. \end{aligned}$$

La trayectoria en el plano (x, y) es por tanto una parábola abierta.

Simulación numérica

Al introducir estos mismos valores en el simulador (tipo de campo: *eléctrico uniforme*, $E_x = 0$, $E_y = 1$, $q/m = 1$, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = 1$, $v_{0y} = 0$), la trayectoria numérica reproducida en la pantalla presenta la forma parabólica esperada. Para pasos de integración Δt pequeños, la curva simulada es prácticamente indistinguible de la solución analítica y permite visualizar de forma inmediata cómo el campo eléctrico acelera a la partícula en la dirección vertical, manteniendo constante la componente horizontal de la velocidad.

7.2. Campo magnético uniforme: órbita circular

Ejemplo analítico

Ahora se considera un campo magnético uniforme perpendicular al plano,

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z), \qquad B_z = 1,$$

sin campo eléctrico, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, y una partícula con $q/m = 1$ que parte del origen con velocidad inicial

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0 = 1, \quad v_y(0) = 0.$$

En este caso, la rapidez se conserva y la partícula describe un movimiento circular uniforme de radio de Larmor

$$r_L = \frac{mv_0}{|qB_z|} = 1,$$

y frecuencia ciclotrón

$$\omega_c = \frac{|qB_z|}{m} = 1.$$

Una parametrización conveniente de la órbita en el plano es

$$\begin{aligned} x(t) &= r_L \sin(\omega_c t), \\ y(t) &= r_L \Big(1 - \cos(\omega_c t)\Big), \end{aligned}$$

que corresponde a una circunferencia de radio r_L recorrida en sentido horario o antihorario según el signo de qB_z.

Simulación numérica

En la aplicación se selecciona el tipo de campo *magnético uniforme*, con $B_z = 1$, $E_x = E_y = 0$ y los mismos valores iniciales de q/m y de velocidad. La trayectoria numérica que dibuja el simulador es una curva aproximadamente circular, con radio cercano a la unidad y rapidez casi constante a lo largo del tiempo.

El sentido de giro cambia automáticamente al invertir el signo de la carga q o del campo B_z, lo que coincide con la dependencia de la fuerza de Lorentz respecto al producto $q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Estas observaciones se utilizan en la exposición para relacionar directamente las expresiones teóricas con el comportamiento visible en la pantalla.

7.3. Campo eléctrico radial: órbitas ligadas y trayectorias de escape

Descripción cualitativa

En el caso radial se emplea un campo eléctrico del tipo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ\,\frac{\mathbf{r}}{(r^2+\varepsilon)^{3/2}},$$

con kQ controlado por el usuario y un parámetro $\varepsilon > 0$ pequeño que regulariza la singularidad en el origen. A diferencia de los casos uniformes, la solución analítica completa del movimiento en este potencial central es más complicada y no se desarrolla en detalle; sin embargo, la mecánica clásica predice la existencia de órbitas cerradas (similares a elipses) para energías ligadas y trayectorias de escape para energías positivas.

Simulación numérica

En el simulador se exploran configuraciones típicas, por ejemplo:

- Valores de $kQ > 0$ y condiciones iniciales con velocidad moderada, que producen órbitas cerradas alrededor del origen.
- Valores de kQ fijos y velocidades iniciales crecientes, para observar la transición entre órbitas ligadas y trayectorias de escape.

Las trayectorias generadas permiten ilustrar en la práctica conceptos como captura, dispersión y dependencia de la órbita respecto de las condiciones iniciales. Aunque no se realiza una comparación cuantitativa con soluciones analíticas, el comportamiento global es coherente con el de una partícula en un potencial central atractivo o repulsivo.

7.4. Síntesis de los resultados

En conjunto, los ejemplos muestran que el simulador reproduce de manera cualitativa los comportamientos esperados para una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos simples. En el caso de campos uniformes, las trayectorias se ajustan bien a las soluciones analíticas parabólicas y circulares, mientras que el campo radial permite explorar numéricamente órbitas ligadas y trayectorias de escape. Estos resultados respaldan el uso de la herramienta como apoyo visual en la exposición y en la discusión en pizarra de los ejemplos analíticos.

8. Conclusiones

8.1. Conclusiones generales

En este trabajo se desarrolló un simulador interactivo para el estudio del movimiento de una partícula cargada sometida a campos eléctricos y magnéticos sencillos. A partir de la fuerza de Lorentz y de un modelo bidimensional no relativista, se formularon las ecuaciones diferenciales de primer orden para la posición y la velocidad, y se integraron numéricamente mediante el método explícito de Euler.

La aplicación web implementada en JavaScript, utilizando el elemento *canvas* de HTML5, permite ajustar en tiempo real parámetros como la relación carga–masa, las condiciones iniciales y la intensidad de los campos. Los tres escenarios considerados —campo eléctrico uniforme, campo magnético uniforme perpendicular al plano y campo eléctrico radial— muestran trayectorias cualitativamente coherentes con las predicciones analíticas: curvas parabólicas en el caso eléctrico, órbitas aproximadamente circulares en el caso magnético y órbitas ligadas o trayectorias de escape en el campo radial, según las condiciones iniciales.

Estos resultados indican que, aun empleando un integrador de primer orden, el simulador es capaz de capturar los rasgos esenciales de la dinámica de una partícula cargada y constituye una herramienta útil para apoyar la comprensión de los conceptos tratados en los cursos de electromagnetismo y métodos numéricos.

8.2. Limitaciones y trabajo futuro

El enfoque adoptado presenta limitaciones claras. El modelo considera únicamente un movimiento no relativista en dos dimensiones, con campos prescritos y sin retroacción de la partícula sobre ellos. El método de Euler introduce errores acumulativos que pueden volverse apreciables para pasos de tiempo grandes o campos muy intensos, y no se implementan esquemas específicos de conservación de energía ni algoritmos de integración especializados para partículas cargadas.

Como líneas de trabajo futuro se plantea la incorporación de métodos numéricos de orden superior o integradores geométricos que mejoren la conservación de invariantes, la extensión del modelo a tres dimensiones y la inclusión de campos más realistas, tales como configuraciones dipolares o superposiciones de campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo. Asimismo, sería interesante añadir mediciones automáticas de magnitudes como el radio de órbita, el período o la energía cinética, así como opciones para exportar datos numéricos y capturas de las trayectorias.

En conjunto, el proyecto demuestra que es posible implementar con relativa simplicidad un simulador interactivo de partículas cargadas en el navegador, combinando fundamentos de electromagnetismo, métodos numéricos básicos y programación, y abre la puerta a desarrollos más avanzados tanto en el ámbito docente como en el de la exploración computacional de sistemas dinámicos.

Referencias

[1] Cristian, A., & Ripperda, B. (2024). Simulating charged particles in electromagnetic fields. *Journal of Student Research, 13*(2), 1–13. https://doi.org/10.47611/jsrhs.v13i2.6536

[2] Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Pearson / Cambridge University Press. https://assets.cambridge.org/97811084/20419/frontmatter/9781108420419_frontmatter.pdf

[3] Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna* (7. a ed.). Cengage Learning. https://www2.fisica.unlp.edu.ar/materias/fisgenI/T/Libros/Serway-7Ed.pdf

[4] Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics* (12th ed.). Pearson. https://books.google.com/books?id=fv1bIkvb-20C

[5] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros* (5. a ed.). McGraw–Hill. https://archive.org/details/isbn_9780070740105

[6] Shiffman, D. (2012). *The Nature of Code: Simulating Natural Systems with Processing*. The Nature of Code / No Starch Press. https://natureofcode.com/

[7] Schroeder, W., Martin, K., & Lorensen, B. (2006). *The Visualization Toolkit: An Object-Oriented Approach to 3D Graphics* (4th ed.).Kitware. https://raw.githubusercontent.com/lorensen/VTKExamples/master/src/VTKBookLaTeX/VTKTextBook.pdf

[8] Troyer, M. (2005). *Computational Physics*. Lecture notes, ETH Zürich. https://archiv.ifb.ethz.ch/education/IntroductionComPhys/2010HS/ScriptTroyer.pdf