



# UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

## Trayectorias de Partículas Cargadas en Campos Electromagnéticos

Simulador web interactivo y validación básica

### Proyecto Final

Curso: Óptica y Electromagnetismo  
Docente: Solano Salinas, Carlos Javier  
Integrantes: Villavicencio Merella, Paolo Alonso  
Salazar Zapata, Alvaro Matias  
Fecha: 26 de noviembre de 2025

*Universidad del Perú, Decana de América*

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>2</b>
<b>2. Abstract</b>	<b>2</b>
<b>3. Introducción</b>	<b>3</b>
3.1. Descripción del problema . . . . .	3
3.2. Planteamiento del proyecto . . . . .	3
3.3. Modelo y método . . . . .	4
<b>4. Objetivos</b>	<b>5</b>
4.1. Objetivo general . . . . .	5
4.2. Objetivos específicos . . . . .	5
<b>5. Marco teórico</b>	<b>6</b>
5.1. Notación y parámetros del modelo . . . . .	6
5.2. Ecuaciones de movimiento: fuerza de Lorentz . . . . .	6
5.3. Casos analíticos de referencia . . . . .	7
5.4. Integración numérica empleada . . . . .	8
5.5. Campos y escenarios del estudio . . . . .	9
5.6. Métricas de validación . . . . .	10
<b>6. Desarrollo del programa</b>	<b>11</b>
6.1. Formulación del modelo . . . . .	11
6.2. Esquema numérico (criterio de avance) . . . . .	12
6.3. Representación del proceso . . . . .	12
6.4. Resumen operativo (reglas de chequeo) . . . . .	13
6.5. Análisis del funcionamiento . . . . .	14
<b>7. Resultados</b>	<b>15</b>
7.1. Campo eléctrico uniforme: tiro parabólico cargado . . . . .	15
7.2. Campo magnético uniforme: órbita circular . . . . .	17
7.3. Campo eléctrico radial: órbitas ligadas . . . . .	19
<b>8. Conclusiones</b>	<b>21</b>
8.1. Conclusiones generales . . . . .	21
8.2. Limitaciones y trabajo futuro . . . . .	22

# 1. Resumen

El movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos es un tema central en la física clásica y aplicada. En este proyecto se desarrolla un simulador interactivo en la web que resuelve numéricamente, mediante el método explícito de Euler (variante Euler–Cromer), la ecuación de movimiento de una partícula cargada en dos dimensiones bajo campos sencillos: un campo eléctrico uniforme, un campo magnético uniforme perpendicular al plano y un campo eléctrico radial. La herramienta permite ajustar en tiempo real los parámetros físicos, desplazar la vista del plano, y visualizar tanto las trayectorias como vectores de velocidad y aceleración, junto con magnitudes como el momento lineal y el trabajo, facilitando la comprensión de la influencia de los campos sobre la dinámica de la partícula.

**Palabras clave:** electromagnetismo, partículas cargadas, simulación numérica, método de Euler, visualización interactiva.

# 2. Abstract

The motion of charged particles in electric and magnetic fields is a central topic in classical and applied physics. This project presents a web-based interactive simulator that numerically solves, via the explicit Euler method (Euler–Cromer variant), the equations of motion of a charged particle in two dimensions under simple field configurations: a uniform electric field, a uniform magnetic field perpendicular to the plane, and a radial electric field. The tool allows real-time adjustment of physical parameters, interactive camera control over the plane, and the visualization of both trajectories and velocity/acceleration vectors, together with quantities such as linear momentum and work, thus helping to understand how the fields influence particle dynamics.

**Keywords:** electromagnetism, charged particles, numerical simulation, Euler method, interactive visualization.

## 3. Introducción

### 3.1. Descripción del problema

El estudio del movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos constituye un tema central en la física clásica y aplicada, con aplicaciones que van desde los tubos de rayos catódicos y espectrómetros de masas hasta los aceleradores de partículas y la física del plasma (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2009). En el régimen no relativista, la dinámica de una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  está gobernada por la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

a partir de la cual se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para la posición y la velocidad de la partícula (Griffiths, 2013). Algunos casos ideales, como los campos uniformes, admiten soluciones analíticas relativamente sencillas, pero la exploración sistemática de configuraciones más generales y el análisis de trayectorias requieren métodos numéricos y herramientas de simulación computacional (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2005).

### 3.2. Planteamiento del proyecto

En este contexto, el presente proyecto se plantea el desarrollo de un simulador interactivo que permita estudiar de manera cualitativa el movimiento de una partícula cargada en dos dimensiones sometida a campos prescritos. Se consideran tres configuraciones representativas que aparecen de forma recurrente en los textos de electromagnetismo: un campo eléctrico uniforme, un campo magnético uniforme perpendicular al plano y un campo eléctrico radial análogo al generado por una carga puntual (Griffiths, 2013; Serway & Jewett, 2008). Estos escenarios se utilizan también como casos de prueba en estudios recientes sobre integración numérica de trayectorias de partículas cargadas (Cristian & Ripperda, 2024).

El simulador se implementa como una aplicación web escrita en JavaScript, utilizando el elemento *canvas* de HTML5 para representar el plano de movimiento. La interfaz permite modificar en tiempo real parámetros como la carga, la masa efectiva, las condiciones iniciales y la intensidad de los campos, así como seleccionar ejemplos predeterminados. El usuario puede controlar la visualización mediante el ajuste del nivel de *zoom*, la longitud de la estela y el desplazamiento de la “cámara” sobre el plano. Además de la trayectoria, se muestran vectores de velocidad y de aceleración/fuerza, junto con magnitudes instantáneas como el momento lineal y el trabajo neto realizado sobre la partícula, siguiendo la filosofía

de simulaciones visuales para la enseñanza de sistemas dinámicos descrita en trabajos como los de Shiffman (2012).

### 3.3. Modelo y método

El modelo físico se basa en la formulación clásica de la fuerza de Lorentz para una partícula cargada en presencia de campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  (Griffiths, 2013). Se considera un movimiento bidimensional en el plano  $xy$ , con

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)),$$

y un campo magnético uniforme perpendicular al plano,  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ , mientras que el campo eléctrico se restringe a componentes en el plano,  $\mathbf{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ . Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de movimiento se reducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v_x(t)$  y  $v_y(t)$ , en el que la relación carga-masa  $q/m$  aparece como parámetro de control fundamental (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2009).

Para resolver numéricamente este sistema se adopta un esquema explícito de primer orden del tipo Euler-Cromer, ampliamente utilizado en simulaciones sencillas de sistemas mecánicos por su simplicidad y su buen comportamiento cualitativo en movimientos orbitales (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2005; Shiffman, 2012). En cada paso de integración se calcula la aceleración a partir de la fuerza de Lorentz, se actualiza primero la velocidad

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{r}_n) + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_n)),$$

y a continuación se actualiza la posición utilizando la velocidad ya corregida,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+1}.$$

Se emplea un paso de tiempo fijo  $\Delta t$  y varios subpasos numéricos por cuadro de animación, lo que mejora la estabilidad de la integración y produce trayectorias suaves en pantalla. A partir de la velocidad se calcula también la energía cinética  $K(t)$ , de modo que el simulador puede mostrar en tiempo real el momento lineal, el módulo de la aceleración y una estimación del trabajo  $W \approx K(t) - K(0)$ , conectando directamente la implementación computacional con las magnitudes físicas discutidas en el marco teórico.

## 4. Objetivos

### 4.1. Objetivo general

Desarrollar una aplicación web interactiva que simule y visualice la dinámica de una partícula cargada bajo campos eléctricos y magnéticos sencillos, utilizando un método explícito de primer orden (Euler–Cromer), de forma que se puedan explorar cualitativamente las trayectorias y algunas magnitudes asociadas (momento, aceleración, trabajo) al variar los parámetros físicos del sistema.

### 4.2. Objetivos específicos

**OE1. Modelo y casos de estudio.** Formular las EDOs no relativistas con fuerza de Lorentz para una partícula cargada en dos dimensiones y configurar tres escenarios de interés: (i) campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ , (ii) campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  perpendicular al plano y (iii) campo eléctrico radial análogo al de una carga puntual, con regularización numérica cerca del origen. Considerar la relación carga–masa  $q/m$  como parámetro de control.

**OE2. Implementación y visualización.** Implementar el integrador Euler–Cromer en JavaScript y construir una interfaz basada en *canvas* que muestre la trayectoria  $x$ – $y$ , una grilla con ejes y zoom, una representación cualitativa de los campos y los vectores instantáneos de velocidad y aceleración/fuerza. Incluir controles interactivos para ajustar los parámetros físicos, la longitud de la estela, el nivel de *zoom*, el desplazamiento de cámara y un tiempo opcional de pausa automática, junto con un panel que muestre tiempo, momento, aceleración y trabajo estimado.

**OE3. Verificación cualitativa.** Comprobar en campo eléctrico uniforme que la trayectoria es cualitativamente parabólica y, en campo magnético uniforme, que se obtienen órbitas aproximadamente circulares cuyo sentido de giro depende del signo de  $qB_z$ . Utilizar las magnitudes mostradas (rapidez, trabajo) para observar la conservación aproximada de la energía cinética en el caso puramente magnético y su variación cuando actúa un campo eléctrico.

**OE4. Exploración paramétrica.** Realizar una exploración paramétrica básica (2–3 configuraciones por caso) para ilustrar cómo la variación de  $q/m$ , la intensidad de los campos, la velocidad inicial y el tipo de campo modifica la forma de la trayectoria, destacando órbitas cerradas y trayectorias de escape en el campo radial y cambios de radio y curvatura en los casos uniformes.

## 5. Marco teórico

### 5.1. Notación y parámetros del modelo

Se considera una partícula puntual de carga  $q$  y masa  $m$ , que se mueve en el plano  $xy$  bajo la acción de campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  prescritos. La posición y la velocidad se representan como

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_x(t), v_y(t)).$$

Se trabaja en el régimen no relativista, es decir, con velocidades muy inferiores a la de la luz, de modo que la mecánica de Newton resulta adecuada (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2009).

Los campos se suponen estacionarios y conocidos explícitamente en el espacio,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , sin dependencia temporal. La componente magnética se restringe a una dirección perpendicular al plano,

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z),$$

mientras que el campo eléctrico se considera contenido en el plano,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x(x, y), E_y(x, y)).$$

En este esquema, la relación carga-masa  $q/m$  aparece como parámetro de control fundamental que determina la respuesta dinámica de la partícula a los campos aplicados (Serway & Jewett, 2008; Griffiths, 2013).

En la implementación numérica se introduce un paso de tiempo  $\Delta t$  y un índice discreto  $n$ , de manera que  $t_n = n \Delta t$ ,  $\mathbf{r}_n \approx \mathbf{r}(t_n)$  y  $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}(t_n)$ . A partir de la velocidad se definen también el momento lineal  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  y la energía cinética

$$K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2,$$

magnitudes que se utilizarán más adelante como métricas para analizar la simulación (Young & Freedman, 2009).

### 5.2. Ecuaciones de movimiento: fuerza de Lorentz

La dinámica de la partícula viene dada por la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

donde la fuerza total es la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Al combinar ambas expresiones se obtiene

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})),$$

lo que define un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{v}(t)$  (Griffiths, 2013).

Con la elección  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ , el producto vectorial se reduce a

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B_z, -v_x B_z, 0),$$

de modo que las ecuaciones para las componentes en el plano quedan

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} (E_x(x, y) + v_y B_z), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} (E_y(x, y) - v_x B_z), \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y. \end{aligned}$$

Este sistema constituye la base del modelo que se integrará numéricamente en los distintos escenarios de campo.

### 5.3. Casos analíticos de referencia

Algunas configuraciones de campo admiten soluciones analíticas sencillas y sirven como referencia para interpretar las trayectorias obtenidas numéricamente (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2009).

#### Campo eléctrico uniforme

Si el campo eléctrico es uniforme,

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y), \quad \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

la aceleración de la partícula es constante:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E}.$$



Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m} \mathbf{E} t, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E} t^2,\end{aligned}$$

lo que implica que la trayectoria en el plano es una curva parabólica.

### Campo magnético uniforme

Para un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  y ausencia de campo eléctrico,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad. En consecuencia, la rapidez  $|\mathbf{v}|$  y la energía cinética  $K$  se conservan, y la partícula describe un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$  (Griffiths, 2013).

Definiendo  $v_\perp$  como la componente de la velocidad perpendicular al campo, el radio de la órbita (radio de Larmor) y la frecuencia ciclotrón son

$$r_L = \frac{mv_\perp}{|qB_z|}, \quad \omega_c = \frac{|qB_z|}{m},$$

y el período es  $T_c = 2\pi/\omega_c$ . En el simulador, que opera en dos dimensiones, se observa directamente la proyección circular de este movimiento.

### Campo eléctrico radial

En el caso de una carga puntual fija, el campo eléctrico en el vacío viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e Q \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Este campo deriva de un potencial central y conduce a órbitas cerradas (elípticas) o a trayectorias de dispersión dependiendo de la energía mecánica total (Serway & Jewett, 2008; Griffiths, 2013). Aunque el análisis analítico completo requiere un tratamiento más detallado de la mecánica de dos cuerpos, estas soluciones sirven como guía cualitativa para interpretar las órbitas numéricas en el campo radial implementado en el simulador.

## 5.4. Integración numérica empleada

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias descrito no siempre admite soluciones exactas en forma cerrada, especialmente cuando los campos presentan dependencias espaciales no triviales. En tales casos se recurre a métodos numéricos de integración temporal (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2005).

Entre los métodos explícitos de un paso, el método de Euler constituye el esquema más sencillo. Para un problema de valores iniciales

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

el método de Euler estándar aproxima la solución mediante

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n),$$

con un error global de orden  $O(\Delta t)$  (Chapra & Canale, 2007).

En el simulador se utiliza la variante conocida como método de Euler–Cromer o semi-implícito, frecuente en simulaciones de sistemas oscilatorios y orbitales por su mejor comportamiento energético (Troyer, 2005; Shiffman, 2012). Aplicado al sistema de la partícula cargada, con  $\mathbf{y} = (x, y, v_x, v_y)$ , el esquema se escribe como

$$\begin{aligned} v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \Delta t \frac{q}{m} (E_x(x_n, y_n) + v_{y,n} B_z), \\ v_{y,n+1} &= v_{y,n} + \Delta t \frac{q}{m} (E_y(x_n, y_n) - v_{x,n} B_z), \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_{x,n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t v_{y,n+1}. \end{aligned}$$

Este esquematiza el procedimiento que se implementa en el programa: primero se actualiza la velocidad con la aceleración calculada a partir de la fuerza de Lorentz y, a continuación, se actualiza la posición usando la velocidad ya corregida. Se emplea un paso de tiempo fijo  $\Delta t$  y varios subpasos numéricos por cuadro de animación, lo que mejora la estabilidad y produce trayectorias suaves en pantalla, adecuadas para el propósito didáctico del proyecto (Cristian & Ripperda, 2024).

## 5.5. Campos y escenarios del estudio

Se consideran tres configuraciones de campo que sirven como casos de estudio representativos (Griffiths, 2013; Cristian & Ripperda, 2024):

### 1. Campo eléctrico uniforme.

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y), \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Los parámetros  $E_x$  y  $E_y$  se ajustan desde la interfaz y permiten reproducir, por ejemplo, un “tiro parabólico” cargado en distintas direcciones.

## 2. Campo magnético uniforme perpendicular.

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, B_z).$$

Esta configuración genera órbitas aproximadamente circulares cuya curvatura y sentido de giro dependen de  $q/m$  y del signo de  $B_z$ .

## 3. Campo eléctrico radial.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx kQ \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + \varepsilon)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

El término  $\varepsilon > 0$  se introduce como parámetro de regularización numérica para evitar la singularidad en  $r = 0$ . Esta configuración permite estudiar tanto órbitas ligadas alrededor del origen como trayectorias de escape, según las condiciones iniciales y el signo efectivo de  $kQ$ .

Estas tres situaciones capturan comportamientos cualitativamente distintos y proporcionan un banco de pruebas adecuado para el simulador desarrollado.

## 5.6. Métricas de validación

En simulación numérica es habitual comparar los resultados con propiedades analíticas o principios de conservación para evaluar la calidad del método empleado (Chapra & Canale, 2007; Cristian & Ripperda, 2024). En el contexto de partículas cargadas, resultan especialmente útiles las siguientes magnitudes:

- **Momento lineal y rapidez.** El momento lineal  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  y la rapidez  $|\mathbf{v}|$  se calculan en cada instante a partir de la velocidad numérica. En el caso de campo magnético uniforme y ausencia de campo eléctrico, la teoría predice que  $|\mathbf{v}|$  y, por tanto,  $|\mathbf{p}|$  deben permanecer constantes (Griffiths, 2013). Cualquier variación apreciable de estas magnitudes a lo largo del tiempo se puede interpretar como un indicador de error numérico.
- **Energía cinética y trabajo.** La energía cinética se evalúa como  $K(t) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2$ . En presencia de campos eléctricos, el teorema trabajo–energía establece que el trabajo realizado por las fuerzas eléctricas es igual a la variación de energía cinética,  $W \approx K(t) - K(0)$  (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2009). En el simulador se estima este trabajo a partir de la diferencia entre la energía cinética instantánea y la inicial. En el caso puramente magnético, se espera que  $W$  permanezca cercano a cero, mientras que en presencia de campo eléctrico debe reflejarse un cambio apreciable en  $K(t)$ .

- **Comportamiento cualitativo de las trayectorias.** En el campo eléctrico uniforme se verifica visualmente la forma parabólica de las trayectorias; en el campo magnético uniforme, la aparición de órbitas casi circulares con sentido de giro dependiente del signo de  $qB_z$ ; y en el campo radial, la presencia de órbitas ligadas o trayectorias de escape, en acuerdo con las predicciones de la mecánica en potenciales centrales (Serway & Jewett, 2008; Griffiths, 2013).

En la versión actual del proyecto, estas métricas se emplean principalmente de forma cualitativa, a través de la visualización en pantalla de las magnitudes  $t$ ,  $|\mathbf{p}|$ ,  $|\mathbf{a}|$  y  $W$ , pero proporcionan la base para futuros estudios de error cuantitativo.

## 6. Desarrollo del programa

### 6.1. Formulación del modelo

A partir del marco teórico, el estado dinámico del sistema se representa en el programa mediante un vector

$$\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)),$$

que en la implementación se modela como un objeto `particle` con los campos  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{vx}$ ,  $\mathbf{vy}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{m}$ . Este objeto concentra la información de posición, velocidad, carga y masa efectiva de la partícula.

Los parámetros de los campos se agrupan en un segundo objeto `fieldConfig`, que contiene, según el caso, las componentes del campo eléctrico uniforme  $(E_x, E_y)$ , la componente magnética  $B_z$  o el parámetro efectivo  $kQ$  del campo radial. De esta manera se separa la definición del modelo físico (parámetros de campos y relación carga–masa) de la lógica numérica de integración y de la visualización.

En el plano cartesiano  $xy$  se toma el origen en  $(0, 0)$ . En el lienzo gráfico (*canvas*) este origen se coloca inicialmente en el centro, y se introduce una transformación que combina una traslación (*pan*) y un factor de escala (*zoom*). El usuario puede modificar el *zoom* mediante un control numérico y desplazar la “cámara” arrastrando con el ratón o con gestos táctiles, sin que esto altere el modelo físico.

Adicionalmente, se mantiene una lista `history` con un número limitado de posiciones pasadas de la partícula, que se utiliza para dibujar la estela de la trayectoria. En la fase de inicialización se calcula también la energía cinética inicial de la partícula y se almacena en `particle`, lo que permitirá estimar más adelante el trabajo neto realizado por los campos.

## 6.2. Esquema numérico (criterio de avance)

Para avanzar la solución en el tiempo se emplea el esquema explícito de primer orden de tipo Euler–Cromer, tal como se describe en la Sección 5.4. En cada paso se evalúa la aceleración a partir de la fuerza de Lorentz y se actualiza primero la velocidad y luego la posición:

$$\begin{aligned}v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \Delta t \frac{q}{m} (E_x(x_n, y_n) + v_{y,n} B_z), \\v_{y,n+1} &= v_{y,n} + \Delta t \frac{q}{m} (E_y(x_n, y_n) - v_{x,n} B_z), \\x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_{x,n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \Delta t v_{y,n+1}.\end{aligned}$$

Este integrador sigue siendo de primer orden, pero presenta un mejor comportamiento cualitativo que el Euler explícito estándar en movimientos orbitales, lo que lo hace adecuado para este tipo de simulaciones sencillas (Chapra & Canale, 2007; Troyer, 2005; Shiffman, 2012).

Se utiliza un paso de tiempo fijo  $\Delta t$  y, por motivos de estabilidad y suavidad visual, se realizan varios subpasos numéricos por cada cuadro de animación. El tiempo de simulación se acumula en una variable `simulationTime`. A partir de ella se implementa una pausa automática: si el usuario introduce un valor objetivo  $t_{\text{pausa}}$  y se cumple  $t \geq t_{\text{pausa}}$ , el programa detiene la integración y congela la trayectoria para su análisis.

En el caso del campo eléctrico radial se añade un término de regularización  $\varepsilon > 0$  en el denominador  $r^2 + \varepsilon$ , evitando así la singularidad en el origen y manteniendo acotada la aceleración cuando la partícula pasa cerca de  $(0, 0)$  (Cristian & Ripperda, 2024).

## 6.3. Representación del proceso

El programa sigue la estructura típica de una simulación interactiva: inicialización, integración y dibujo en pantalla (Shiffman, 2012):

1. **Configuración inicial.** El usuario selecciona el tipo de campo (eléctrico uniforme, magnético uniforme o radial) y, opcionalmente, un ejemplo preconfigurado. A continuación introduce los valores de carga, masa efectiva, posición y velocidad iniciales, así como los parámetros del campo. Estos datos se leen desde los controles de la interfaz y se almacenan en `particle` y `fieldConfig`. En esta fase se calcula y guarda la energía cinética inicial.

2. **Preajustes (*presets*).** Para cada tipo de campo se disponen configuraciones pre-determinadas que reproducen casos de interés (tiro parabólico, órbita circular en campo magnético, órbita ligada y trayectoria de escape en el campo radial). Al elegir un *preset*, el programa actualiza automáticamente los parámetros, facilitando la reproducción de los ejemplos analíticos estudiados en la sección de Resultados.
3. **Bucle de animación.** Una función de animación, disparada mediante `requestAnimationFrame`, ejecuta en cada cuadro varios pasos de integración de Euler–Cromer con paso  $\Delta t$ . En cada subpaso se actualizan la posición, la velocidad y el tiempo de simulación, y se comprueba si se ha alcanzado el tiempo de pausa automática. Si es así, la simulación se detiene y se mantiene el estado actual para su inspección.
4. **Dibujo y visualización.** Después de la integración, se limpia el lienzo y se aplican las transformaciones de cámara (traslación al centro más el *pan* acumulado y escalado por el *zoom*). En este sistema de coordenadas se dibujan:
  - una grilla y ejes cartesianos con espaciado adaptativo y etiquetas numéricas;
  - una representación cualitativa del campo elegido (flechas para  $\mathbf{E}$ , símbolos para  $\mathbf{B}$ , líneas radiales para el campo central);
  - la trayectoria, a partir de los puntos almacenados en `history`, y la partícula en su posición actual;
  - los vectores instantáneos de velocidad y de aceleración/fuerza, representados como flechas de distinto color ancladas en la partícula, junto con una pequeña leyenda en la esquina del lienzo que identifica cada color.
5. **Panel de magnitudes.** Finalmente, se dibuja sobre el lienzo un panel con el tiempo de simulación  $t$ , el módulo del momento lineal  $|\mathbf{p}| = m|\mathbf{v}|$ , el módulo de la aceleración  $|\mathbf{a}|$  y una estimación del trabajo  $W \approx K(t) - K(0)$ , calculados a partir del estado numérico actual. Estas cantidades se actualizan en cada cuadro y permiten relacionar la evolución de la trayectoria con los conceptos de energía y conservación discutidos en el marco teórico.

## 6.4. Resumen operativo (reglas de chequeo)

Desde el punto de vista del usuario, el funcionamiento del programa puede resumirse en las siguientes reglas:

- Seleccionar el tipo de campo y, si se desea, un ejemplo predefinido; ajustar carga, masa, condiciones iniciales y parámetros del campo.

- Fijar el nivel de *zoom* y la longitud de la estela para encuadrar adecuadamente la trayectoria; utilizar el ratón (o gestos táctiles) para desplazar la vista y el botón de recentrado para devolver el origen al centro del lienzo.
- Introducir un tiempo de pausa automática si se quiere que la simulación se detenga en un instante concreto (por ejemplo, una vuelta de la órbita) y, si no, dejar este campo vacío.
- Observar la forma cualitativa de la trayectoria para verificar que coincide con lo esperado teóricamente en cada caso: parábola en campo eléctrico uniforme, órbita casi circular en campo magnético uniforme, órbitas ligadas o trayectorias de escape en el campo radial.
- Consultar el panel de magnitudes para comprobar, por ejemplo, que la rapidez y el momento se mantienen casi constantes en el caso puramente magnético, mientras que el trabajo estimado y la energía cinética cambian cuando actúa un campo eléctrico.

## 6.5. Análisis del funcionamiento

El comportamiento del programa refleja el compromiso entre simplicidad numérica y calidad visual buscado en el proyecto. El uso de un método de primer orden tipo Euler–Cromer, combinado con pasos de integración pequeños y subpasos por cuadro, proporciona trayectorias suficientemente suaves y estables para el rango de parámetros considerado. La separación entre modelo físico, integración y dibujo, junto con la interfaz interactiva, facilita la exploración en tiempo real de distintos escenarios y apoya la comprensión cualitativa del movimiento de partículas cargadas (Shiffman, 2012).

Las magnitudes mostradas en pantalla (tiempo, momento, aceleración y trabajo estimado) permiten realizar comprobaciones cualitativas de las propiedades de conservación: en campo magnético uniforme, la rapidez se mantiene aproximadamente constante y el trabajo calculado es cercano a cero; en presencia de campo eléctrico, se observa la variación de la energía cinética en concordancia con el teorema trabajo–energía (Serway & Jewett, 2008; Griffiths, 2013).

No obstante, el enfoque presenta limitaciones claras: el modelo es bidimensional y no relativista, los campos se consideran prescritos y el integrador es de primer orden, sin control de error adaptativo ni técnicas de conservación de invariantes. Estas restricciones pueden dar lugar a errores cuantitativos si se incrementa en exceso el paso de integración o se usan campos demasiado intensos. Aun así, para el objetivo del trabajo —visualizar de forma interactiva la influencia de campos sencillos sobre la dinámica de una partícula cargada— el desempeño del programa es satisfactorio y deja abierta la posibilidad de

incorporar, en trabajos futuros, métodos de orden superior y geometrías de campo más complejas (Chapra & Canale, 2007; Cristian & Ripperda, 2024).

## 7. Resultados

En esta sección se presentamos algunos casos de prueba que muestran el funcionamiento del simulador. Para cada configuración de campo se plantea primero un ejemplo analítico sencillo y, a continuación, se comenta la trayectoria obtenida numéricamente al reproducir los mismos parámetros en la aplicación web. En todos los casos se aprovechan las herramientas interactivas del programa (preajustes, control de cámara, panel de magnitudes) para apoyar la interpretación cualitativa de los resultados.

### 7.1. Campo eléctrico uniforme: tiro parabólico cargado

#### Ejemplo analítico

Considérese una partícula con relación carga-masa  $q/m = 1$  en un campo eléctrico uniforme

$$\mathbf{E} = (0, -2) \text{ N/C},$$

sin campo magnético y con condiciones iniciales

$$x(0) = -10, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_{x0} = 5, \quad v_y(0) = v_{y0} = 10.$$

La aceleración es constante,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E} = (0, -2),$$

de modo que

$$a_x = 0, \quad a_y = -2 \text{ m/s}^2.$$

Las soluciones analíticas para la velocidad y la posición vienen dadas por

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} = 5, & v_y(t) &= v_{y0} + a_y t = 10 - 2t, \\ x(t) &= x_0 + v_{x0} t = -10 + 5t, & y(t) &= y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 10t - t^2. \end{aligned}$$

La trayectoria en el plano  $(x, y)$  es por tanto una parábola abierta.

En particular, para  $t = 2,0$  s se obtiene

$$v_x(2) = 5 \text{ m/s}, \quad v_y(2) = 10 - 2 \cdot 2 = 6 \text{ m/s},$$



de donde la rapidez

$$|\mathbf{v}(2)| = \sqrt{5^2 + 6^2} \approx 7,8 \text{ m/s},$$

y el momento lineal

$$|\mathbf{p}(2)| = m|\mathbf{v}(2)| \approx 7,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

La energía cinética inicial es

$$K(0) = \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 10^2) = 62,5 \text{ J},$$

mientras que en  $t = 2,0 \text{ s}$  resulta

$$K(2) = \frac{1}{2}m(5^2 + 6^2) = 30,5 \text{ J},$$

por lo que la variación de energía cinética es

$$\Delta K = K(2) - K(0) = -32,0 \text{ J},$$

en acuerdo con el trabajo negativo realizado por el campo eléctrico. Estos valores son coherentes con los que muestra el simulador en el panel de magnitudes para el mismo conjunto de parámetros.

### Simulación numérica

Al introducir estos mismos valores en el simulador (tipo de campo: *eléctrico uniforme*,  $E_x = 0$ ,  $E_y = -2$ ,  $q = 1$ ,  $m = 1$ ,  $x_0 = -10$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 5$ ,  $v_{y0} = 10$ ), mediante el preajuste correspondiente de la interfaz, la trayectoria numérica reproduce la curva parabólica esperada.

Desde el punto de vista mecánico, la aceleración es constante y viene dada por

$$a_y = \frac{q}{m}E_y = -2 \text{ m/s}^2, \quad a_x = 0.$$

Tras un intervalo de  $t = 2,0 \text{ s}$  se tiene

$$v_x(t) = 5 \text{ m/s}, \quad v_y(t) = 10 - 2t = 6 \text{ m/s},$$

de donde resulta una rapidez

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5^2 + 6^2} \approx 7,8 \text{ m/s},$$

y un momento lineal

$$|\mathbf{p}(t)| = m|\mathbf{v}(t)| \approx 7,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

La energía cinética inicial es

$$K(0) = \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 10^2) = 62,5 \text{ J},$$

mientras que en  $t = 2,0 \text{ s}$  se obtiene

$$K(t) = \frac{1}{2}m(5^2 + 6^2) = 30,5 \text{ J},$$

por lo que la variación de energía cinética es

$$W \approx K(t) - K(0) = -32,0 \text{ J},$$

en acuerdo con el trabajo negativo realizado por el campo eléctrico. En la simulación, el panel de magnitudes muestra en ese instante valores numéricos muy próximos a

$$t \approx 2,0 \text{ s}, \quad |\mathbf{p}| \approx 7,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad |\mathbf{a}| \approx 2,0 \text{ m/s}^2, \quad W \approx -32 \text{ J},$$

coincidiendo con las estimaciones analíticas dentro del error esperado del método numérico.

## 7.2. Campo magnético uniforme: órbita circular

### Ejemplo analítico

Se considera un campo magnético uniforme perpendicular al plano,

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z), \quad B_z = 1,$$

sin campo eléctrico,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , y una partícula con relación carga-masa  $q/m = 1$  que parte de

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -5, \quad v_x(0) = v_0 = 5, \quad v_y(0) = 0.$$

En estas condiciones, la fuerza de Lorentz es puramente magnética,

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

de módulo

$$|\mathbf{F}_B| = |q| |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = qvB = 5,$$

y siempre perpendicular a la velocidad. La aceleración centrípeta tiene, por tanto, módulo

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{F}_B|}{m} = 5 \text{ m/s}^2,$$

y la rapidez se mantiene constante,

$$|\mathbf{v}(t)| = v_0 = 5 \text{ m/s}.$$

El movimiento corresponde a una órbita circular uniforme en el plano perpendicular a  $\mathbf{B}$ . El radio de Larmor y la frecuencia ciclotrón son

$$r_L = \frac{mv_0}{|qB_z|} = 5, \quad \omega_c = \frac{|qB_z|}{m} = 1,$$

por lo que una parametrización compatible con las condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} x(t) &= r_L \sin(\omega_c t), \\ y(t) &= y_c + r_L \cos(\omega_c t), \end{aligned}$$

con centro de la órbita en  $y_c = -10$ . Nótese que

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -10 + 5 = -5, \quad \dot{x}(0) = r_L \omega_c = 5, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

como se requería.

La energía cinética se mantiene constante,

$$K(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 5^2 = 12,5 \text{ J},$$

y el momento lineal tiene módulo

$$|\mathbf{p}(t)| = m|\mathbf{v}(t)| = 5 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

mientras que el trabajo realizado por el campo magnético es nulo en todo instante,  $W = 0$ , ya que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad.

### Simulación numérica

En la aplicación se selecciona el tipo de campo *magnético uniforme* con  $B_z = 1$  y  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , y se adoptan los valores  $q = 1$ ,  $m = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -5$ ,  $v_{x0} = 5$ ,  $v_{y0} = 0$ , tal como establece el preajuste de “círculo perfecto”. La trayectoria numérica que dibuja el

simulador es una curva aproximadamente circular, de radio cercano a  $r_L = 5$ , en buen acuerdo con la expresión analítica anterior.

Al consultar el panel de magnitudes en distintos instantes se observa que la rapidez y el módulo del momento lineal se mantienen prácticamente constantes, con valores próximos a

$$|\mathbf{v}(t)| \approx 5 \text{ m/s}, \quad |\mathbf{p}(t)| \approx 5 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

mientras que la aceleración medida numéricamente se sitúa alrededor de  $|\mathbf{a}(t)| \approx 5 \text{ m/s}^2$ , coherente con la aceleración centrípeta esperada. La estimación del trabajo

$$W \approx K(t) - K(0)$$

permanece muy próxima a cero durante toda la simulación, reflejando que el campo magnético no realiza trabajo sobre la partícula. Pequeñas desviaciones respecto a los valores ideales se atribuyen al error de truncamiento del integrador de Euler–Cromer y al uso de un paso de tiempo finito, pero no alteran el comportamiento cualitativo de la órbita.

### 7.3. Campo eléctrico radial: órbitas ligadas

#### Ejemplo analítico

En el caso radial se considera un campo eléctrico de tipo Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + \varepsilon)^{3/2}},$$

con  $kQ$  constante y un parámetro de regularización  $\varepsilon > 0$  pequeño que evita la singularidad en el origen. Para fijar ideas, se toma  $kQ = -100$  (interacción efectiva atractiva) y se estudia el movimiento de una partícula con

$$q = 1, \quad m = 1,$$

que parte de

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 10, \quad v_x(0) = v_{x0} \approx 3,16, \quad v_y(0) = 0.$$

Suponiendo inicialmente un radio  $r_0 \approx 10 \text{ m}$ , el módulo del campo eléctrico es del orden de

$$|\mathbf{E}| \approx \frac{|kQ|}{r_0^2} \approx \frac{100}{10^2} = 1 \text{ N/C},$$

por lo que la aceleración radial típica es

$$|\mathbf{a}| \approx \frac{q}{m} |\mathbf{E}| \approx 1 \text{ m/s}^2.$$

Si se desea una órbita aproximadamente circular de radio  $r_0$ , la condición de equilibrio centrípeto  $v^2/r_0 \simeq |\mathbf{a}|$  sugiere elegir

$$v = |\mathbf{v}| \approx \sqrt{|\mathbf{a}| r_0} = \sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ m/s},$$

valor que coincide con la rapidez inicial seleccionada. En esta aproximación, la rapidez se mantiene aproximadamente constante y la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5,0 \text{ J},$$

de modo que el momento lineal tiene módulo

$$|\mathbf{p}| = m v \approx 3,16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Al cabo de un intervalo  $t = 2,0 \text{ s}$ , la partícula habrá barrido un cierto ángulo sobre una órbita de radio cercano a 10 m, manteniendo aproximadamente los mismos valores de rapidez, momento y energía cinética; en consecuencia, la variación de energía cinética

$$W \approx K(t) - K(0)$$

permanece próxima a cero, como corresponde a un potencial central conservativo.

### Simulación numérica

En el simulador se reproducen estos parámetros seleccionando el tipo de campo *eléctrico radial*, con

$$q = 1, \quad m = 1, \quad (x_0, y_0) = (0, 10), \quad (v_{x0}, v_{y0}) \approx (3,16, 0), \quad kQ = -100,$$

y fijando una pausa automática en  $t = 2,0 \text{ s}$ . La trayectoria numérica obtenida es una órbita aproximadamente cerrada alrededor del origen, con un radio que oscila en torno a  $r \approx 10 \text{ m}$ , en buen acuerdo con la estimación analítica cualitativa.

Al inspeccionar el panel de magnitudes en el instante  $t \approx 2,0 \text{ s}$  se observan valores

$$|\mathbf{v}(t)| \approx 3,2 \text{ m/s}, \quad |\mathbf{p}(t)| \approx 3,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad |\mathbf{a}(t)| \approx 1,0 \text{ m/s}^2,$$

mientras que la estimación del trabajo

$$W \approx K(t) - K(0)$$

permanece cercana a cero (en valor absoluto, pequeña frente a  $K \approx 5$  J). Estas cifras son consistentes con el cuadro mecánico analítico: la rapidez y la energía cinética se mantienen aproximadamente constantes y el campo radial actúa como un potencial conservativo, de manera que la energía mecánica total no presenta una deriva sistemática apreciable. Las ligeras diferencias entre los valores ideales y los mostrados por la simulación se atribuyen al uso de un paso de integración finito y a la regularización numérica del campo en  $r^2 + \varepsilon$ , pero no alteran el comportamiento cualitativo de las órbitas ligadas.

## 8. Conclusiones

### 8.1. Conclusiones generales

En este trabajo se desarrolló un simulador interactivo en la web para el estudio del movimiento de una partícula cargada sometida a campos eléctricos y magnéticos sencillos. A partir de la fuerza de Lorentz y de un modelo bidimensional no relativista, se formularon las ecuaciones diferenciales de primer orden para la posición y la velocidad, y se implementó un esquema numérico de primer orden de tipo Euler–Cromer para integrar la dinámica en el tiempo.

La aplicación permite configurar tres escenarios representativos: un campo eléctrico uniforme, un campo magnético uniforme perpendicular al plano y un campo eléctrico radial análogo al generado por una carga puntual. En todos los casos, las trayectorias obtenidas numéricamente son cualitativamente consistentes con las soluciones analíticas y descripciones teóricas empleadas como referencia. En particular, se observan curvas parabólicas en campo eléctrico uniforme, órbitas aproximadamente circulares en campo magnético uniforme y órbitas ligadas o trayectorias de escape en el campo radial, según las condiciones iniciales y el signo efectivo de la interacción.

La interfaz gráfica, basada en *canvas*, permite modificar en tiempo real los parámetros físicos, controlar el nivel de *zoom* y desplazar la “cámara” sobre el plano, así como visualizar la estela de la trayectoria y los vectores instantáneos de velocidad y aceleración/fuerza. El panel de magnitudes, que muestra el tiempo de simulación, el módulo del momento lineal, el módulo de la aceleración y una estimación del trabajo realizado, refuerza la conexión entre la simulación y los conceptos de energía y conservación estudiados en los cursos de

electromagnetismo y métodos numéricos. En conjunto, el simulador cumple el objetivo de servir como herramienta didáctica para explorar de forma cualitativa la dinámica de una partícula cargada bajo campos prescritos.

## 8.2. Limitaciones y trabajo futuro

El enfoque adoptado presenta, sin embargo, limitaciones claras. El modelo es estrictamente bidimensional y no relativista, los campos se consideran prescritos (no existe retroacción de la partícula sobre ellos) y el integrador es de primer orden, por lo que pueden aparecer errores cuantitativos apreciables si se emplean pasos de integración demasiado grandes o campos muy intensos. Aunque el uso del esquema Euler–Cromer y de varios subpasos por cuadro mejora la estabilidad y el comportamiento cualitativo, no se dispone aún de un estudio sistemático del error numérico ni de técnicas específicas de conservación de invariantes.

En cuanto a la visualización, el simulador se centra en una sola partícula y en configuraciones de campo relativamente simples, sin contemplar interacciones entre múltiples partículas ni geometrías más complejas. Las magnitudes mostradas (momento, aceleración, trabajo estimado) se utilizan principalmente como indicadores cualitativos y no como parte de un análisis cuantitativo detallado.

Como líneas de trabajo futuro se propone la incorporación de métodos de integración de orden superior o integradores geométricos que mejoren la conservación de energía y momento; la extensión del modelo a tres dimensiones y a regímenes donde las correcciones relativistas sean relevantes; la inclusión de campos más realistas, como configuraciones dipolares o combinaciones de campos variables en el tiempo; y la ampliación del conjunto de diagnósticos numéricos, de modo que el panel de magnitudes pueda utilizarse también para estimar errores y comparar de forma más rigurosa los resultados con las predicciones analíticas. Estas mejoras permitirían convertir el simulador en una herramienta aún más completa para la enseñanza y la exploración computacional del movimiento de partículas cargadas.

## Referencias

- [1] Cristian, A., & Ripperda, B. (2024). Simulating charged particles in electromagnetic fields. *Journal of Student Research*, 13(2), 1–13. <https://doi.org/10.47611/jsrhs.v13i2.6536>
- [2] Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Pearson / Cambridge University Press. [https://assets.cambridge.org/97811084/20419/frontmatter/9781108420419\\_frontmatter.pdf](https://assets.cambridge.org/97811084/20419/frontmatter/9781108420419_frontmatter.pdf)
- [3] Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna* (7.ª ed.). Cengage Learning. <https://www2.fisica.unlp.edu.ar/materias/fisgenI/T/Libros/Serway-7Ed.pdf>
- [4] Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics* (12th ed.). Pearson. <https://books.google.com/books?id=fv1bIkvb-20C>
- [5] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros* (5.ª ed.). McGraw–Hill. [https://archive.org/details/isbn\\_9780070740105](https://archive.org/details/isbn_9780070740105)
- [6] Shiffman, D. (2012). *The Nature of Code: Simulating Natural Systems with Processing*. The Nature of Code / No Starch Press. <https://natureofcode.com/>
- [7] Schroeder, W., Martin, K., & Lorensen, B. (2006). *The Visualization Toolkit: An Object-Oriented Approach to 3D Graphics* (4th ed.). Kitware. <https://raw.githubusercontent.com/lorensen/VTKExamples/master/src/VTKBookLaTeX/VTKTextBook.pdf>
- [8] Troyer, M. (2005). *Computational Physics*. Lecture notes, ETH Zürich. <https://archiv.ifb.ethz.ch/education/IntroductionComPhys/2010HS/ScriptTroyer.pdf>