Formulario di FISICA 2

Elementi di Calcolo vettoriale

1) Prodotto scalare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{x} B_{x} + A_{y} B_{y} + A_{z} B_{z}$$

2) Prodotto vettoriale

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

3)
$$\nabla U = \operatorname{grad} U = \left(\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}\right)$$

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{s}$$

FLUSSO: $f_s(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$

dove: E campo di flusso,

S = nS in cui:

S è la superficie elem. attraversata dal flusso \mathbf{n} è la direzione normale alla superficie S

In generale:
$$f_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

4) Divergenza di v:
$$div \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Campo solenoidale se $div \mathbf{v} = \mathbf{0}$, TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\mathbf{f}_{S}(\mathbf{v}) = \int_{S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V} div \ \mathbf{v} dV$$

dove: V è il volume racchiuso dalla superficie S

5) ROTAZIONE (O ROTORE) DI V:

$$rot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{v}, \text{ se } rot \mathbf{v} = 0$$
 si dice "campo irrotazionale "

TEOREMA DI STOKES

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} rot \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

6) Operatore di Laplace (o Laplaciano):

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In un **CAMPO CONSERVATIVO** si ha:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \implies \mathbf{v} = \nabla U ,$$

Se il campo è solenoidale e conservativo:

$$div \mathbf{v} = div \nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = 0$$

Alcune proprietà: div ROTORE

$$\begin{array}{l} div \ rot \ \mathbf{v} = 0 \ e \ poiche \\ div \ \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow div \ rot \ \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0 \ \text{sempre}$$

LEGGE DI COULOMB

$$\mathbf{F} = k \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{1}{4p\mathbf{e}_0} \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{u}_r$$



dove: $\mathbf{e}_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

	21					
Tab 1.1	Carica (C)	Massa (Kg)				
Elettrone <i>e</i>	$-1.6022 \cdot 10^{-19}$	$9.1094 \cdot 10^{-31}$				
Protone <i>p</i>	$+1.6022 \cdot 10^{-19}$	$1.6726 \cdot 10^{-27}$				
Neutrone <i>n</i>	0	$1.6749 \cdot 10^{-27}$				

Campo elettrostatico E

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}$$

Densità di carica:

a) Spaziale
$$dq = \mathbf{r}(x', y', z')d\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{dq}{d\mathbf{t}}$$

dove: ρ è la *densità spaziale di carica*, $d\mathbf{t} = dx'dy'dz'$ è il volume elementare di carica dq.

In tal caso:

$$q = \int_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{r}(x', y', z') d\mathbf{t}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0} \int_t \frac{\boldsymbol{r}d\boldsymbol{t}}{r^2} \mathbf{u} = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0} \int_t \frac{\boldsymbol{r}(x, y, z) dx dy dz}{r^2} \mathbf{u}$$

b) Superficiale
$$dq = \mathbf{s}(x', y', z')d\Sigma \Rightarrow \mathbf{s} = \frac{dq}{d\Sigma}$$
,

dove: **s** è la densità superficiale di carica,

 $d\Sigma = dx'dy'$ è l'area della superficie infinitesima di carica dq.

$$q = \int_{\Sigma} \mathbf{s}(x', y', z') d\Sigma$$

In tal caso:
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0} \int_{\Sigma} \frac{\boldsymbol{s} \, d\Sigma}{r^2} \mathbf{u}$$

c) Lineare
$$dq = \mathbf{I}(x', y', z')dl \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{dq}{dl}$$
,

dove: *l* è la *densità lineare di carica*, *dl* è il tratto infinitesimo di linea.

$$q = \int_{\Sigma} \boldsymbol{l}(x', y', z') dl$$

In tal caso: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\mathbf{p}\mathbf{e}_0} \int_{l} \frac{\mathbf{I} \, dl}{r^2} \mathbf{u}$

In caso di distribuzioni uniformi di carica

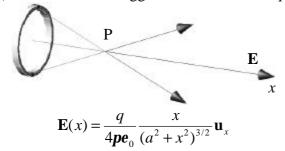
$$q = rt$$
, $q = s\Sigma$, $q = 11$.

Alcuni esempi immediati:

1) Disco sottile di raggio di raggio R e di carica

uniforme
$$q$$
: $\mathbf{E}(x) = \pm \frac{q}{2\mathbf{p}\mathbf{e}_0 R^2} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x$

2) Anello sottile di raggio a e di carica unif. q



- 3) Piani paralleli, indefiniti, uniformemente carichi con densità superficiale uno $+\mathbf{s}$ l'altro $-\mathbf{s}$ posti risp. a distanza dall'origine x_1 e x_2 tali che $x_1 < x_2$.
 - All'interno dei 2 piani, ossia per $x_1 < x < x_2$ si ha: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{e}_0} \mathbf{u}_x$
 - All'esterno, $x < x_1$ opp. $X > x_2 \Rightarrow E = 0$

Lavoro della forza elettrica.

 $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$

 $dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = q_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \quad \text{dove } l_1 \text{ è una curva}$ $W_1 = \int_L dW = q_0 \int_L \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$

Il campo elettrico è conservativo, pertanto:

$$W_{i,f} = \frac{q_0 q}{4 p e_0} \frac{1}{r_i} - \frac{q_0 q}{4 p e_0} \frac{1}{r_f}$$

Principio di conservazione dell'energia:

$$\Delta E_c + \Delta E_n = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q_0V_A - q_0V_B = U_A - U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q_0 E(z_B - z_A)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q_0 \frac{q}{4\mathbf{p}\mathbf{e}_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_c = (E_c)_f - (E_c)_i = q_0 \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Energia Potenziale e LAVORO

$$U_f - U_i = -q_0 \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

 $V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$, dove V si dice potenziale elettrico. In forma locale: dU = qdV

Definisco "Potenziale rispetto all'infinito di un punto distante r":

$$V_r = V(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\mathbf{p}\mathbf{e}_0 r} \implies U(r) = \frac{q_0 q}{4\mathbf{p}\mathbf{e}_0 r}$$

Potenziale di un dipolo elettrico

$$V(P) = \frac{q}{4pe_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + q$$

$$dove: r_1 = d(P, q); r_2 = d(P, q) - q$$

$$r_2$$

Teorema di STOKES in un campo elettrico

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} rot \ \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

Dato che **E** è conservativo la $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$,

ovvero
$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Segue pertanto: $\nabla \times \mathring{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$

Legge di GAUSS:
$$f_s(\mathbf{E}) = \frac{1}{e_0} q_{\text{interne}}$$

In forma differenziale: $div \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0}$

CONDUTTORI.

Nei conduttori metallici le cariche sono libere di muoversi e si dispongono all'esterno.

- □ All'interno E=0
- ☐ Il conduttore è tutto allo stesso potenziale la superficie esterna è una sup. equipotenziale

Quindi: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}_0} \mathbf{u}_n$ dove \mathbf{u}_n è perpendicolare alla

superficie e *diretto all'esterno* se la densità è positiva, *entrante* se negativa.

Potenziale:
$$V(P) = \frac{1}{4pe_0} \int_q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4pe_0} \int_{\Sigma} \frac{s d\Sigma}{r}$$

Capacità di un conduttore: $C = \frac{q}{V}$

CONDENSATORI.

- **Sferico:** $C = 4pe_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 R_1}$
- R

dq

• Cilindrico: $C = \frac{2\mathbf{p}\mathbf{e}_0 d}{\ln(R_2/R_1)}$

d è la sovrapposizione dei 2 cilindri concentrici

• Piano: $C = e_0 \frac{S}{h}$

dove h è la distanza tra le 2 armature

CONDENSATORI IN PARALLELO

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

CONDENSATORI IN SERIE

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Energia Elettrostatica.

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{V}{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_0E^2Sh$$

Densità di energia elettrostatica

$$u_e = \frac{U}{Sh} = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_0 E^2$$

CORRENTE ELETTRICA.

Intensità di corrente $i = \frac{dq}{dt}$

In condizioni stazionarie $i = \frac{q}{t}$

Si può anche osservare che:

 $i=\int_s \mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}$ dove \mathbf{J} è il campo di flusso della corrente, s è la superficie della sezione di filo In condizioni di S=cost, J=cost si ha che i=JS, e inoltre: $J=e\cdot n\cdot v_d$ dove n è il numero delle cariche sollecitate dal campo

Equazione di continuità in regime stazionario: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

Legge di OHM $V=R\cdot i$

RESISTENZA:
$$R = \frac{h}{S} r[\Omega]$$

Resistività
$$r = \frac{RS}{h} [\Omega \cdot m]$$

Dove: h è la lunghezza del filo S è la sezione del filo

Potenza
$$P = Ri^2 = r \frac{h}{s} i^2 [W]$$

Energia dissipata nel tempo t

$$W = Pt = Ri^2t$$

Dipendenza della resistività dalla temperatura

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{20}(1 + \boldsymbol{a}\Delta t)$$

dove \mathbf{r}_{20} è la resistività del conduttore a 20°C $\Delta t = t - 20$ °C diff. di temperatura $\mathbf{a} \begin{bmatrix} {}^{\circ}C^{-1} \end{bmatrix}$ è il coefficiente termico di resistività

Resistenza o resistori in serie

$$R_{eq} = R1 + R2$$

Potenza: $P = P_1 + P_2 = R_1 i^2 + R_2 i^2$

Resistenza o resistori in parallelo

$$\frac{1}{R_{ea}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Potenza:
$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = \frac{V^2}{R_1} + \frac{V^2}{R_2} = V^2 \frac{1}{R_{eq}}$$

MATERIALE	$r_{20}[\Omega \cdot m]$	Coeff. $a \lceil {}^{\circ}C^{-1} \rceil$
	20 2	
Argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
Oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
Alluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Zinco	5.92 · 10 ⁻⁸	$4.2 \cdot 10^{-3}$
Nichel	6.84 · 10 ⁻⁸	$6.9 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
Platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	3.9 · 10 ⁻³
Stagno	11.0 · 10 ⁻⁸	4.7 · 10 ⁻³
Niobio	$12.5 \cdot 10^{-8}$	
Piombo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
Mercurio	98.4 · 10 ⁻⁸	
Carbonio(grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
Germanio	0.46	-48 · 10 ⁻³
Silicio	$2.30 \cdot 10^{3}$	-75 · 10 ⁻³
Acqua	$2 \cdot 10^5$	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
Zolfo	$2 \cdot 10^{15}$	
Quarzo fuso	$10^{16} \div 10^{17}$	

I Dielettrici

- 1) Costante dielettrica assoluta $e = ke_0$ dove k è la costante dielettrica relativa;
- 2) Suscettività elettrica c = k 1
- 3) Momento di dipolo o *polarizzazione*

dielettrica
$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = a\mathbf{E}$$
. Si dicono

dielettrici lineari quelli in cui vale:

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_0 (\mathbf{k} - 1) \mathbf{E} = \mathbf{e}_0 \mathbf{c} \mathbf{E}$$

4) Il campo elettrico risultante*:
$$\mathbf{E}_{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{k}}$$

Densità spaziale di carica: $\mathbf{r}_P = \frac{dq_P}{d\mathbf{t}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

Legge di Gauss per i materiali dielettrici

1) Induzione dielettrica $\mathbf{D} = \mathbf{e}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$;

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{r}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u_n} d \Sigma = q$$

3) D è solenoidale, non è conservativo;

4) Nei dielettrici lineari risulta:

$$\mathbf{P} = \frac{k-1}{k}\mathbf{D} = \frac{c}{c+1}\mathbf{D}$$

Magnetismo

Legge di Coulomb per l'interazione magnetica

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
 dove: $\frac{m1, m2}{k_m \text{ cost. magnetica}}$

Il campo magnetico si indica con ${\bf B}$, la sua unità di misura è il Tesla (T); altre unità di misura sono:

il Gauss (G): $1G = 10 \, mT$;

il Weber (Wb): $1Wb = 1Tm^2 = 1Vs$

Nel M. il flusso è sempre $\oint {\bf B} \cdot {\bf u_n} d \; \Sigma = 0$

e quindi... $div\mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ il campo magnetico è solenoidale.

Forza di Lorentz

 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ la velocità cambia direzione ma non cambia in modulo. L'unica accelerazione possibile è quella centripeta.

Moto di q in un campo uniforme B

$$\begin{cases} F = qvB \\ F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow \mathbf{w} = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \end{cases}$$

Da cui il periodo
$$T = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}} = \frac{2\mathbf{p}m}{qB}$$

N.B.: -q negativa... ω concorde a **B** +q positiva... ω discorde a **B**

II legge di Laplace

Se considero il moto di 1 elettrone all'interno di un conduttore $\mathbf{F_i} = -e\mathbf{v_d} \times \mathbf{B}$, per N elettroni presenti dentro il volume elementare Σds

$$d\mathbf{F} = N\mathbf{F_i} = (n\Sigma ds)\mathbf{F_i}$$
 dove n: densità elettroni
 $d\mathbf{F} = -(\Sigma ds)ne\mathbf{v_d} \times \mathbf{B}$ ma $\mathbf{j} = n(-e)\mathbf{v_d}$
 $d\mathbf{F} = \Sigma ds\mathbf{j} \times \mathbf{B}$

Nel caso di un filo conduttore si ha $\mathbf{i} = \Sigma \mathbf{j}$

$$d\mathbf{F} = ds \, \mathbf{i} \times \mathbf{B} = i \, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$
,

in quanto **i** e *d***s** sono concordi

Lungo un tratto di filo AB: i = costante

$$\mathbf{F} = i \int_{A}^{B} d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

Conduttore rettilineo l e campo costante B

$$\mathbf{F} = i \int_{A}^{B} d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$
$$F = i l B \sin \mathbf{J}$$

Momento meccanico su una spira

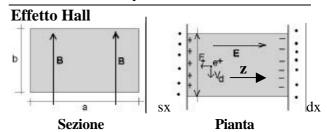
$$M = iSB \sin \boldsymbol{J} \ (*)$$

dove S = ab = area racchiusa dalla spira

Def.: Momento magnetico della spira $\mathbf{m} = iS\mathbf{u}_{\mathbf{n}}$

Pertanto (*) diventa: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ ovvero

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$



Sia dato un conduttore di sezione rettangolare a·b. Si voglia determinare il n° dei portatori di carica positivi. La densità di corrente vale:

$$j = \frac{i}{ab} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} = ne\mathbf{v}_{\mathbf{d}}$$

La forza di Lorentz agente su ogni elettrone è:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v_d} \times \mathbf{B}$$

Su ogni e agisce una forza *non elettrostatica* che origina un campo elettromotore E_H

$$E_{+} = E_{HALL} = \frac{F}{e} = \mathbf{v_d} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{B}$$

la cui direzione e verso è la stessa della F_+ D'altra parte si origina un campo \mathbf{E} , dovuto alla concentrazione di cariche positive sul lato sx e negative sul lato dx del conduttore. Pertanto in equilibrio: $\mathbf{E}+\mathbf{E_H}=\mathbf{0}$. La tensione di Hall, ossia la d.d.p. tra 2 punti P, Q delle facce laterali, sarà:

$$V_H = \mathbf{e}_H = \int_{P}^{Q} \mathbf{E}_H \cdot d\mathbf{z} = \mathbf{E}_H \cdot \mathbf{PQ} = E_H a$$

ossia

$$V_{HALL} = E_H a = a \, v_d B = \frac{aj}{ne} B = \frac{iB}{neb} = \frac{Ba}{ne} \frac{V_A - V_B}{d}$$

l'ultima uguaglianza si ottiene ponendo

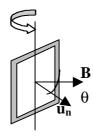
$$i = \frac{V_A - V_B}{R}$$
, e $R = r \frac{d}{\Sigma} = r \frac{d}{ab}$

da cui il numero dei portatori di carica positivi è

$$n = \frac{jaB}{eV_H} = \frac{iaB}{eSV_H}$$

Al solito vale i = jS, dove S = ab.

Il numero dei portatori di carica negativi è uguale a quello dei positivi, per la neutralità globale del sistema.



Campo magnetico prodotto da una corrente

1° legge di Laplace
$$d\mathbf{B} = \frac{\hat{\imath}_0 i}{4\mathbf{p}} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{u_r}}{r^2}$$

Legge di Ampere-Laplace: $\mathbf{B} = \frac{\hat{i}_0 i}{\Delta \mathbf{n}} \oint \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{u_r}}{r^2}$

Campo magnetico prodotto da una carica in moto

Ricordando che: $J = ids = n \cdot q \cdot v_A$

Per un volume elementare: $d\mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}_0}{4\mathbf{p}} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} n d\mathbf{t}$

Per 1 sola carica: $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}_0}{4\mathbf{p}} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$

Da cui posto $c^2 = \frac{1}{\boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{m}_0} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$

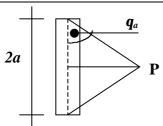
dove c è la velocità della luce $c=3*10^8 m/s$

Circuiti particolari

-Filo rettilineo di lunghezza 2a

$$B = \frac{\grave{t}_{0}i}{2\mathbf{p}R}\cos\mathbf{J}_{a} = \frac{\grave{t}_{0}ia}{2\mathbf{p}R\sqrt{R^{2} + a^{2}}}$$

dove R è la distanza del punto P dall'asse del filo e θ_a l'angolo come in figura:



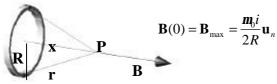
-Filo rettilineo infinito (legge di Biot-Savart)

$$cos \ \theta_a=1 \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\hat{\imath}_0 i}{2 pR} \mathbf{u}_f$$

-Spira circolare

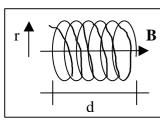
$$\mathbf{B}(x) = \frac{i \, jR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_n = \frac{i \, jR^2}{2r^3} \mathbf{u}_n = \frac{i}{2p} \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

dove: $\mathbf{m} = i\Sigma \mathbf{u}_n = i\mathbf{p}R^2\mathbf{u}_n$ ed $r^2 = x^2 + R^2$



-Solenoide

Detto: N = numero tot. di spiren = N/d densità lineare delle spire



$$B_0 = \mathbf{m}_0 ni \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4r^2}}$$
se d >> r \Rightarrow $B_0 = \mathbf{m}_0 ni$

$$B_0 \text{ al centro del solenoide}$$

-Solenoide toroidale

$$B = \frac{\mathbf{m}_0 N}{2\mathbf{p} R}$$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$

Forza tra 2 conduttori percorsi da corrente -Fili rettilinei paralleli

Correnti equiverse FORZA ATTRATTIVA Correnti discordi FORZA REPULSIVA

$$F_{1,2}=i_2B_1d=\frac{\pmb{m}_0i_1i_2d}{2\pmb{p}\,R}$$
 dove d è la lunghezza di un tratto del filo 2

Per unità di lungh. d=1m: $F_{1,2} = i_2 B_1 = \frac{m_0 i_1 i_2}{2 p R}$

Legge di Ampere

Sia dato un filo circondato da una curva Γchiusa

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \pm \mathbf{m}_0 i$$

Il segno è + se il verso su Γ è concorde con il verso di rotazione della vite dx, il cui verso di avvitamento è quello della corrente i. Viceversa sarà negativo. Se la curva chiusa Γ non circonda il filo allora:



In forma locale si scriverà: $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_{b}\mathbf{j}$

Mutua induzione

Dati 2 circuiti i cui rispettivi flussi magnetici, dovuti al passaggio di corrente risp. i_1 e i_2 , sono concatenati con i circuiti reciproci:

$$\begin{split} & \Phi_{12} = M_{12} i_1 \\ & \Phi_{21} = M_{21} i_2 \end{split} \rangle M_{12} = M_{21} = M \quad \text{coeff. di mutua} \\ & \text{induttanza} \end{split}$$

M dipende da fattori geometrici e dalle proprietà magnetiche del mezzo

Autoinduzione

In tal caso i circuiti sono coincidenti: 1≡2

 $\Phi = Mi$ dove M è il coeff di autoinduzione.

Equazioni di Maxwell per i campi elettrici e magnetici costanti

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0} \qquad (2) \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$(2) \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$(3) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(4) \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_{b} \mathbf{j}$$

Forza elettromotrice del generatore G

$$\boldsymbol{e} = R_{t}i = (R+r)i$$

dove r è la resistenza interna del generatore

$$V_A - V_B = Ri = \mathbf{e} - ri$$

dove A e B sono i poli + e – del generatore G

A circuito aperto $i = 0 \implies V_A - V_B = \mathbf{e}$

A circuito chiuso $i^{-1} 0 \implies V_A - V_B = \mathbf{e} - ri$

Quindi ε è la d.d.p. misurata ai capi del generatore a circuito aperto.

Legge di Faraday

Se varia il $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato con un circuito, compare nel circuito una f.e.m. indotta

$$\mathbf{e}_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Se R è la resistenza del circuito

$$i = \frac{\mathbf{e}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

A circuito aperto (R=∞) e quindi se mediante uno strumento viene misurato il voltaggio ossia

$$V = \mathbf{e}_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$
 come nel caso del generatore G

$$\mathbf{e}_i = \oint_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

il segno meno è indice del fatto che ε si oppone alla variazione di flusso.

Se $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} > 0 \Rightarrow \text{cioè } \Phi(\mathbf{B})$ aumenta (avvicinando il

magnete), per cui si origina una e_i , e quindi una corrente autoindotta di verso tale da generare un flusso secondario, che si oppone all'aumento del flusso $\Phi(\mathbf{B})$

Questa è la legge di Lenz.

Distinguiamo i casi per cui $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \neq 0$:

- 1) Il conduttore si muove in una regione dove B è costante;
- B non è costante nel tempo anche se il conduttore è fermo;
- Una qualsiasi combinazione dei 2 casi precedenti.

1) Moto di una spira in B = costante.

Sugli elettroni di conduzione della spira agisce la forza di Lorentz, per cui il campo elettromotore indotto:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Si può mostrare che:

$$\mathbf{e}_i = \oint_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Se ${\bf B}$ è uniforme, oltre che costante nel tempo, il flusso concatenato è costante e $e_i = 0$.

2) B variabile nel tempo.

Ad originare il campo elettromotore non può essere la forza di Lorentz (v=0). Dovrà esserci una forza F indotta che muove gli elettroni di conduzione e genera la corrente indotta. La forza che agisce su una carica -e

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

quindi B variabile da luogo ad E indotto, e poiché

$$\mathbf{e}_i = \oint_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

per il teorema di Stokes

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$
da cui segue:
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Se B=cost. allora $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ e quindi $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ossia \mathbf{E} è

un campo conservativo

Generatore di corrente G

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = B\Sigma \cos \mathbf{q} = B\Sigma \cos \mathbf{w}t$$

$$\mathbf{e}_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \mathbf{w}B\Sigma\sin\mathbf{w}t$$

da cui $\mathbf{e}_{MAX} = \mathbf{w}B\Sigma$

L'intensità sarà:

$$i = \frac{\mathbf{e}_i}{R} = \frac{\mathbf{w}B\Sigma\sin\mathbf{w}t}{R}$$

La potenza elettrica indotta $P = \mathbf{e}_i i = Ri^2 = \frac{\mathbf{e}_i^2}{R}$

В

La potenza meccanica

$$P = M\mathbf{w} = (mB\sin\mathbf{q})\mathbf{w} = i\mathbf{w}B\Sigma\sin\mathbf{w}t = \frac{\mathbf{e}_i^2}{R}$$

Autoinduzione

Quando varia i in un circuito, varia il $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato e quindi compare una f.e.m e_L autoindotta:

$$\mathbf{e}_{L} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(Li)$$

dove: L = coeff. di autoinduzione o induttanza N.B.: L si misura in Henry [H]. In genere L=cost.

$$\mathbf{e}_L = -L \frac{di}{dt}$$
; tale \mathbf{e}_L si oppone alla f.e.m \mathbf{e} del generatore.

Circuiti RL. In tali circuiti sono presenti un resistore R e un'induttanza complessiva L. Supponiamo che si chiuda tale circuito, per la legge di Ohm avremo:

$$\mathbf{e} + \mathbf{e}_L = Ri \Rightarrow \mathbf{e} = L\frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \mathbf{e}dt = Ldi + Ridt$$

(e - Ri)dt = Ldi che separando le variabili e integrando

$$i = \frac{\mathbf{e}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{\mathbf{e}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\mathbf{t}}} \right)$$

dove : $t = \frac{L}{D}$ = costante di tempo del circuito RL

Pertanto:
$$\mathbf{e}_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathbf{e} \ e^{-\frac{t}{t}}$$
 dove $i_L = \frac{\mathbf{e}_L}{R} = -\frac{\mathbf{e}}{R} e^{-\frac{t}{t}}$

Se il circuito è aperto

$$i(t) = \frac{\mathbf{e}}{R} e^{-\frac{t}{t'}} = i_0 e^{-\frac{t}{t'}}$$
 dove $\mathbf{t}' = L/R'$

R' = resistenza del mezzo (es.: aria): R' >> R

$$\boldsymbol{e}_{L}(t) = -L\frac{di}{dt} = -\left(R'\boldsymbol{t}'\right)\frac{\boldsymbol{e}}{R}\left(-\frac{1}{\boldsymbol{t}'}\right)e^{-\frac{t}{t'}} = \left(\frac{R'}{R}\boldsymbol{e}\right)e^{-\frac{t}{t'}}$$

Se t=0 allora
$$\mathbf{e}_L(0) = \frac{R'}{R} \mathbf{e} >> \mathbf{e} \implies \text{d.d.p. elevata} \Rightarrow$$

Scintilla nell'interruttore. Pertanto la corrente $i_L = \frac{e_L}{R!}$ detta extracorrente di apertura.

Considerazioni ENERGETICHE nei circuiti RL

Poiché
$$e = Ri + L\frac{di}{dt}$$
, Potenza $P = ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$

Lavoro prodotto $eidt = Ri^2 dt + Li \ di$

Possiamo osservare che eidt = edq è il lavoro compiuto dal generatore; il termine Ri^2dt rappresenta il lavoro speso per far circolare la corrente (effetto Joule), mentre Li di il lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione $e_L = -Ldi/dt$ per far aumentare la corrente da i a i+di. Quando la corrente ha raggiunto il valore di regime, il generatore continua a fornire la potenza $ei_{\infty} = Ri_{\infty}^2$ necessaria per mantenere una corrente costante in un circuito resistivo (con resistenza R). Nell'intervallo di tempo in cui la corrente passa da 0 al valore i, il generatore oltre a spendere il lavoro per l'effetto Joule deve spendere contro e_L :

$$W_L = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2$$

che dipende solo dagli stati *iniziale* e *finale*. Possiamo definire l'*energia intrinseca della corrente* $U_L = \frac{1}{2}Li^2$ la cui variazione dà il lavoro fatto dal generatore contro la f.e.m. di autoinduzione. Quando si apre il circuito sul resistore viene speso il lavoro:

$$W_{R} = \int_{0}^{\infty} Ri^{2} dt = R' \frac{\mathbf{e}^{2}}{R^{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-2R't/L} dt = \frac{1}{2} L \frac{\mathbf{e}^{2}}{R^{2}} = \frac{1}{2} Li_{\infty}^{2}$$

Possiamo concludere che l'energia immagazzinata nell'induttanza W_L viene restituita attraverso \mathbf{R} quando si riapre il circuito.

Energia magnetica per un solenoide

$$u_{I} = \frac{1}{2}L'i^{2}$$
 [J/m³]

dove L'=induttanza x unità di volume $L' = \frac{L}{V} = \frac{\mathbf{m}_0 n^2 S d}{V}$

S = sezione del solenoide

d = lunghezza del solenoide

n = n° di spire x unità di volume

$$u_L = \frac{1}{2} \mathbf{m}_0 n^2 i^2 = \frac{1}{2 \mathbf{m}_0} \mathbf{m}_0^2 n^2 i^2 = \frac{B_0^2}{2 \mathbf{m}_0}$$

poiché $B_0 = \mathbf{m}_0 ni$ al centro del solenoide

$$U_L = \int_t \frac{B_0^2}{2\,\mathbf{m}_0} d\mathbf{t}$$

Mutua induzione

Nel caso di circuiti concatenati abbiamo definito

$$M = \frac{\mathbf{f}_{12}}{i_1} = \frac{\mathbf{f}_{21}}{i_2}$$
 come coeff. di mutua induzione.

La \mathbf{e}_{1i} indotta nel circuito 1 dovuta alla variazione di \mathbf{i}_2 e alla conseguente variazione del flusso \mathbf{f}_{21} concatenato

col circuito 1 è
$$\mathbf{e}_{1i} = -\frac{d\mathbf{f}_{21}}{dt} = -M\frac{di_2}{dt}$$

Anche se nel circuito 1 non c'è una f.e.m. propria, compare una i_1 , dovuta alla corrente i_2 che varia nel circuito 2 tramite il termine di accoppiamento M.

Corrente di spostamento:

Legge di Ampere-Maxwell.

In forma locale:
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_0 \mathbf{j}_{tot} = \mathbf{m}_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s)$$

dove $\mathbf{j}_s = \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{densit} \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{i}}$ corrente di spostamento

In forma integrale:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{m}_0 \int_{S} \mathbf{j}_{tot} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{m}_0 \int_{S} \left(\mathbf{j} + \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{m}_0 (\mathbf{i} + \mathbf{i}_s) = \mathbf{m}_0 \mathbf{i}_{tot}$$

dove
$$i_s = \int_{S} \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{f}_S(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Concludendo un campo magnetico variabile nel tempo produce una variazione del campo magnetico e viceversa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \to \mathbf{\mathring{A}} \qquad \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \to \mathbf{B}$$
legge di Faraday legge di Ampere-Maxwell

Equazioni di Maxwell per i campi elettrici e magnetici variabili

(1)
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0}$$
 (2) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

(3)
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
 (4) $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_0 \mathbf{j} + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Ai campi E e B è associata la densità di energia elettromagnetica (J/m^3)

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 E^2 + \frac{1}{2m_0} B^2$$

In assenza di carica r = 0 j = 0 le eq. diventano:

$$(\mathbf{1})\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

(2)
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(3) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(\mathbf{4}) \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Circuiti a corrente alternata $e(t) = e_0 \cos wt$

1. Resistore R

$$i(t) = \frac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{p}} \cos \mathbf{w}t = i_0 \cos \mathbf{w}t$$

$$V_R(t) = Ri(t) = Ri_0 \cos wt = V_{0R} \cos wt$$

La corrente e la f.e.m sono in fase

2. Induttore L

Vale la relazione $\mathbf{e} = R\mathbf{i} + L\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ e poiché R=0 **P**

$$i(t) = i_0 \cos \mathbf{w}t$$
,

$$V_L(t) = L_{\frac{di}{dt}} = -\mathbf{w}Li_0 \sin \mathbf{w}t = \mathbf{w}Li_0 \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{p}/2)$$

La corrente è in ritardo sulla f.e.m $di\pi/2$

Reattanza dell'induttore = ωL

3. Condensatore

$$C = q / \boldsymbol{e}(t) \Rightarrow q(t) = C\boldsymbol{e}_0 \cos \boldsymbol{w}t$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{w}C\mathbf{e}_0 \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{p}/2)$$

la corrente è in anticipo sulla f.e.m.

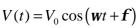
SE
$$i(t) = i_0 \cos \mathbf{w}t$$

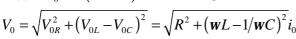
$$V_C(t) = \frac{i_0}{\mathbf{w}C} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{p}/2)$$

Reattanza del condensatore = 1/ωC

Circuito RLC serie

$$i(t) = i_0 \cos \mathbf{w}t$$





 $V_0 = z_0 i_0$ dove z_0 è l'impedenza della serie

$$\tan \mathbf{f} = \frac{\mathbf{w}L - \frac{1}{\mathbf{w}C}}{R} \qquad \text{e} \qquad \cos \mathbf{f} = \frac{V_{0R}}{V_0} = \frac{R}{z_0}$$

Si ricorda che w = 2pn

Definendo:
$$\mathbf{g} = \frac{R}{2L}$$
, $\mathbf{w}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Per tali circuiti vale l'equazione differenziale:

$$\mathbf{e}_0 \cos \mathbf{w}t = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$
 (2)

che nel caso in cui è assente la f.e.m. ($\boldsymbol{e}_0 = 0$)

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$
 (1) a cui è associata l'equazione

 $Ll^2 + Rl + 1/C = 0$ caratteristica soluzioni sono:

$$\mathbf{I} = -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}} = -\mathbf{g} \pm i \sqrt{\mathbf{g}^2 - \mathbf{w}_0^2}$$
se $\mathbf{I}_1 \neq \mathbf{I}_2 \Rightarrow IG_1 = \left\{ Ae^{-l_1t} + Be^{-l_2t} / A, B \in \mathbb{R} \right\}$
se $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 \Rightarrow IG_1 = \left\{ (A + Bt)e^{-l_1t} / A, B \in \mathbb{R} \right\}$
PERTANTO:

Smorzamento forte

$$g^2 > W_0^2 \Rightarrow R^2 > 4L/C$$

$$i(t) = e^{-gt} (Ae^{t\sqrt{g^2 - w_0^2}} + Be^{-t\sqrt{g^2 - w_0^2}})$$

Smorzamento critico

$$g^2 = w_0^2 \implies R^2 = 4L/C \ i(t) = e^{-gt}(A + Bt)$$

Smorzamento debole

$$\mathbf{g}^2 < \mathbf{w}_0^2 \Rightarrow R^2 < 4L/C$$

$$i(t) = De^{-gt} \sin(wt + f), \quad w = \sqrt{w_0^2 - g^2}$$

Resistenza critica $Rc = 2\sqrt{L/C}$

Se invece $\mathbf{e}_0 \neq 0$ la soluzione generale della (2) sarà

$$IG_2 = \{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \overline{y}(t) / c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

se $\mathbf{I} \neq \pm i\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{g} \neq 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{y}}(x) = c_2 \cos \mathbf{w}t : c_2 \in \mathbb{R}$

se
$$\mathbf{I} = \pm i\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \overline{y}(x) = (c_3t + c_4)\cos\mathbf{w}t : c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Potenza nei circuiti RLC serie

Detti
$$V_{\it eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$
 e $i_{\it eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$ si definisce

Potenza media
$$\overline{P} = V_{eff} i_{eff} \cos \mathbf{f} = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \mathbf{f}$$

 $\cos \boldsymbol{f}$ è detto fattore di potenza

Se
$$\cos \mathbf{f} = 1 \Rightarrow \left(\mathbf{w}L - \frac{1}{\mathbf{w}C} \right)^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{w}^2 = \frac{1}{LC}$$

Questo condizione si verifica solo in circuiti prevalentemente resistivi o in condizione di risonanza. In tal caso il carico resistivo:

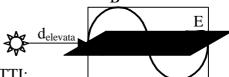
$$\overline{P} = i_{eff} V_{eff} = \frac{1}{2} i_0 V_0$$

Onde piane

$$E(x,t) = E_{\rm m} \sin(kx - \mathbf{w}t)$$

 $B(x,t) = B_{\rm m} \sin(kx - \mathbf{w}t)$

E e B sono in fase e perpendicolari tra loro



 $\mathbf{w} = 2\mathbf{p}\mathbf{n}$ = pulsazione o frequenza angolare

$$k = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} = n^{\circ} \text{ d'onda}$$

 $\frac{\mathbf{w}}{l} = c$ velocità della luce

risulta $\frac{E_m}{B_m} = \frac{\mathbf{w}}{k} = c$ e inoltre $c = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}} = 3.10^8 \, \text{m/s}$

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$
 in modulo $S = \frac{1}{\mathbf{m}} EB [W/m^2]$

poiché $B = E/c = E\sqrt{m_0 e_0}$ risulta...

$$S = \frac{1}{\mathbf{m}_0 c} E^2 = \frac{c}{\mathbf{m}_0} B^2$$

la densità di energia elettrica e magnetica:

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 E^2$$
 $u_B = \frac{1}{2m_0} B^2$ $u_{tot} = u_B + u_E$

 $I = S_{medio} = \frac{1}{m_C} \overline{E}^2 = \frac{1}{2 m_C} E_m^2 =$ L'intensità:

$$=\frac{1}{2\,\mathbf{m}_{0}}E_{m}B_{m}=\frac{1}{\mathbf{m}_{0}}E_{eff}B_{eff}$$

Legge di spostamento di Wien

$$\boldsymbol{I}_{MAX} = 2898 \cdot T^{-1} \boldsymbol{m} m \qquad \text{(T in } ^{\circ} \text{K)}$$

 $\boldsymbol{I}_{M\!A\!X}$ è la lunghezza d'onda a cui si ha il massimo dell'intensità della radiazione emessa

Riflessione e rifrazione

k = *direzione* (d'incidenza, di riflessione,ecc...) La velocità di propagazione nel mezzo:

$$I_{1}\mathbf{n} = \mathbf{V}_{1} \qquad I_{2}\mathbf{n} = \mathbf{V}_{2}$$

$$\mathbf{k}_{1} = \frac{2\mathbf{p}}{I_{1}} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{V}_{1}} \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_{2} = \frac{2\mathbf{p}}{I_{2}} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{V}_{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{I}_{1}}{I_{2}} = \frac{\mathbf{V}_{1}}{\mathbf{V}_{2}} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{k}_{1}}{\mathbf{k}_{2}} = \frac{\mathbf{V}_{2}}{\mathbf{V}_{1}}$$

Def.: si chiama "indice di rifrazione rispetto al

vuoto" – e si indica n – il rapporto
$$n = \frac{C}{V_{mezzo}}$$

I legge: le onde riflesse e trasmesse giacciono nello stesso piano di quello incidente

II legge: $q_i = q_r$

III legge (legge di Snell): $n_1 \sin q_1 = n_2 \sin q_2$

dove:
$$n_1 = \frac{c}{\mathbf{V}_1}$$
 e $n_2 = \frac{c}{\mathbf{V}_2}$

Nel passaggio vuoto-mezzo

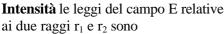
$$\frac{\sin \mathbf{q}_{vuoto}}{\sin \mathbf{q}_2} = \frac{c}{c} \frac{c}{\mathbf{V}_2} = n_2$$

 $n_{acqua}=1.33;$ $n_{aria}\approx 1$

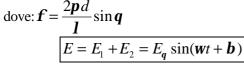
Interferenza

meer ter enza				
MAX	$d\sin \mathbf{q} = m\mathbf{l}$			
MIN	$d\sin \mathbf{q} = (2m+1)\mathbf{I}/2$			

Il passo fra 2 max $\Delta x = \mathbf{1} \frac{L}{d}$



$$E_1 = E_0 \sin wt$$
, $E_2 = E_0 \sin(wt + f)$



dove: $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{f}}{2} = \frac{\mathbf{p}d}{\mathbf{l}} \sin \mathbf{q}$

$$E_{\mathbf{q}} = 2E_0 \cos \mathbf{b} \Rightarrow (E_{\mathbf{q}=0})_{MAX} = 2E_0$$

Poiché
$$I_0 = \frac{1}{2m_0c} E_0^2 \Rightarrow I_{MAX} = \frac{1}{2m_0c} 4E_0^2 = 4I_0$$

(vettore di Poynting)

$$I_{MAX} = 4I_0$$

Inoltre...

$$\frac{I_q}{I_0} = \left(\frac{E_q}{E_0}\right)^2 \Rightarrow I_q = 4I_0 \cos^2 \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
(I_q)_{MAX} = 4I_0 \\
I_q = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\mathbf{p}d}{\mathbf{l}} \sin \mathbf{q}\right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\mathbf{p}dx}{\mathbf{l}L}\right)
\end{cases}$$

NB: nota la lunghezza d'onda nel vuoto I_0 è possibile determinare la lunghezza d'onda nel mezzo $I = \frac{I_0}{I_0}$.

Diffrazione di FRAUNHOFER

	$d\sin \mathbf{q} = m\mathbf{l}$	m=1,2,
MAX	$d\sin\boldsymbol{q} = (2m+1)\boldsymbol{l}/2$	m=1,2,

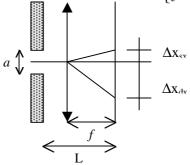
L'intensità delle onde di diffrazione

$$E_q = E_m \frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}} \Rightarrow I_q = I_m \left(\frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^2$$

MIN	$a = m\mathbf{p}$	 m=1,2,
MAX	$\boldsymbol{a} = (2m+1)\boldsymbol{p}/2$	m=1,2,

$$CMQ:: \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{2} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{l}} a \sin \mathbf{q}$$

Geometricamente risulta:
$$\begin{cases} f \tan \mathbf{q}_{sx} = \Delta x_{sx} \\ f \tan \mathbf{q}_{dx} = \Delta x_{dx} \end{cases}$$



Specchi sferici

Equazione degli specchi sferici

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

Lenti sottili

Equazione delle lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$
 dove: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

essendo r₁ e r₂ i raggi di curvatura dei diottri ed n l'indice di rifrazione della lente

L