Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Ροή Λ, 7ο εξάμηνο

Χειμερινό Εξάμηνο 2018 - 2019

Τεχνητή Νοημοσύνη

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο
Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος

Α.Μ.
03111097

Ημερομηνία Υποβολής: 15 Ιανουαρίου 2019

<u>Άσκηση 2.1</u>

Ακολουθούμε τα βήματα όπως περιγράφονται στις διαφάνειες του μαθήματος.

1. $p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \wedge (s \Rightarrow t))))$

<u>(Βήμα 1)</u> $\neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \wedge (\neg s \vee t))))$

<u>(Βήμα 2)</u> $\neg p \vee (q \wedge \neg (r \wedge (\neg s \vee t)))$

$\neg p \vee (q \wedge (\neg r \vee (\neg (\neg s \vee t))))$

$\neg p \vee (q \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg t)))$

<u>(Βήμα 3)</u> $\neg p \vee (q \wedge ((\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg t)))$

$\neg p \vee (q \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg t))$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee (\neg r \vee \neg t))$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg t)$

<u>Λοιπόν, έχουμε CNF:</u> $\{ [\neg p, q], [\neg p, \neg r, s], [\neg p, \neg r, \neg t] \}$

2. $\exists x. \forall y. \exists z.(A(x, y, z) \wedge \neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w.(C(x, w, z) \vee K(y))))$

<u>(Βήμα 1)</u>

$\exists x. \forall y. \exists z.(\neg (A(x, y, z) \wedge \neg B(z)) \vee (\neg(\forall w.(C(x, w, z) \vee K(y)))))$

<u>(Βήμα 2)</u>

$\exists x. \forall y. \exists z.((\neg A(x, y, z) \vee B(z)) \vee (\exists w. \neg (C(x, w, z) \vee K(y))))$

$\exists x. \forall y. \exists z.((\neg A(x, y, z) \vee B(z)) \vee (\exists w. (\neg C(x, w, z) \wedge \neg K(y))))$

<u>(Βήμα 4)</u>

$\exists x. \forall y. \exists z.((\neg A(x, y, z) \vee B(z)) \vee (\neg C(x, f_1(y), z) \wedge \neg K(y)))$

$\exists x. \forall y.((\neg A(x, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y))) \vee (\neg C(x, f_1(y), f_2(y)) \wedge \neg K(y)))$

$\forall y.((\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y))) \vee (\neg C(a_1, f_1(y), f_2(y)) \wedge \neg K(y)))$

<u>(Βήμα 5)</u>

$(\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y))) \vee (\neg C(a_1, f_1(y), f_2(y)) \wedge \neg K(y))$

<u>(Βήμα 6)</u>

$((\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y))) \vee (\neg C(a_1, f_1(y), f_2(y))) \wedge ((\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y))) \vee \neg K(y))$

$(\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y)) \vee \neg C(a_1, f_1(y), f_2(y))) \wedge (\neg A(a_1, y, f_2(y)) \vee B(f_2(y)) \vee \neg K(y))$

<u>Λοιπόν, έχουμε CNF:</u>

$\{ [\neg A(a_1,y,f_2(y)) , B(f_2(y)) , \neg C(a_1, f_1(y), f_2(y))] , [\neg A(a_1, y, f_2(y)) , B(f_2(y)) , \neg K(y)] \}$

<u>Άσκηση 2.2</u>

1. $p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \land (s \Rightarrow t))))$
CNF: { [¬ p, q], [¬ p, ¬ r, s], [¬ p, ¬ r, ¬ t] }

Για το μοντέλο αρκεί να ικανοποιείται κάθε clause της CNF (αρκεί $p \to F$).
Για το μη μοντέλο αρκεί να μην ικανοποιείται έστω ένα clause (αρκεί $p \to T$, $q \to F$).

Μοντέλο { $p \to F$, $q \to F$, $r \to F$, $t \to F$ }
Μη μοντέλο { $p \to T$, $q \to F$, $r \to F$, $s \to F$ }

2. $\exists x. \forall y. \exists z.(A(x, y, z) \land \neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w.(C(x, w, z) \lor K(y))))$

<u>Ερμηνεία I (μοντέλο)</u>
Δ = {a}
A = Ø
B = Ø
C = Ø
K = Ø

Επειδή το A δεν μπορεί να πάρει ποτέ αληθή τιμή, η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι πάντα False, συνεπώς η έκφραση είναι πάντα True.
Δίνουμε στο Δ ένα στοιχείο, για να μην υπάρχει πρόβλημα με το “∃” και το κενό σύνολο καθώς $\nexists x \in \varnothing$.

<u>Ερμηνεία I’ (μη μοντέλο)</u>
Δ = {a}
A = {(a,a,a)}
B = Ø
C = Ø
K = {(a)}

Επειδή το Δ έχει μόνο ένα στοιχείο, μόνο αυτό μπορούμε να επιλέξουμε ως μεταβλητή για τις A, B, C, K.
Συνεπώς, τα A και K θα είναι κατα αυτήν την έννοια πάντα True (για όλες τις δυνατές τιμές των x, y, z, w) και τα B και C θα είναι πάντα False.
Οπότε η σχέση γίνεται ουσιαστικά: $(T \land \neg F \Rightarrow \neg (F \lor T)) \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$, δηλαδή πάντα False.

<u>Άσκηση 2.3</u>

Για τους κάτωθι συμβολισμούς, όταν γράφουμε “x/y”, θα εννοούμε πως το x αντικαθίσταται από το y, όχι το αντίστροφο.

1. {p(z, f(g(a)), p(x, f(w))}

Εννοποιήτρια αντικατάσταση : { x/z , w/g(a) }

2. {q(v, h(c), t), q(g(y), z, g(a)), q(w, u, w)}

Εννοποιήτρια αντικατάσταση : { y/a , v/g(a) , w/g(a) , t/g(a) , z/h(c) , u/h(c) }

3. {r(f(x), g(t)), r(f(z), b)}

Δεν υπάρχει ενοποιητής, καθώς το b είναι σταθερά και το g(t) συνάρτηση.

4. {p(f(u), g(f(a), t)), p(f(b), g(x, y)), p(w, g(z, h(v)))}

Εννοποιήτρια αντικατάσταση : { u/b , w/f(b) , x/f(a), z/f(a) , t/h(v) , y/h(v) }

5. {q(f(a), x), p(z, c)}

Δεν υπάρχει ενοποιητής, καθώς p ≠ q.

Άσκηση 2.4

Καταρχάς, μετατρέπουμε τα πάντα σε CNF.

Γνώση K =
{$\forall x. \exists y.(A(x) \Rightarrow R(x, y) \wedge C(y))$,
$\forall x. \exists y.(B(x) \Rightarrow S(y, x) \wedge D(y))$,
$\forall x.(D(x) \Rightarrow A(x)$,
$\forall x. \forall y.(S(x, y) \Rightarrow T(y, x)$}

<u>$\forall x. \exists y.(A(x) \Rightarrow R(x, y) \wedge C(y))$</u>
$\forall x. \exists y.(\neg A(x) \vee (R(x,y) \wedge C(y)) \rightarrow \quad (\neg A(x) \vee R(x,f_1(x))) \wedge (\neg A(x) \vee C(f_1(x)))$

<u>$\forall x. \exists y.(B(x) \Rightarrow S(y, x) \wedge D(y))$</u>
$\forall x. \exists y.(\neg B(x) \vee (S(y, x) \wedge D(y))) \rightarrow \quad (\neg B(x) \vee S(f_2(x),x)) \wedge (\neg B(x) \vee D(f_2(x)))$

<u>$\forall x.(D(x) \Rightarrow A(x)$</u>
$\forall x. (\neg D(x) \vee A(x)) \quad \rightarrow \quad \neg D(x) \vee A(x)$

<u>$\forall x. \forall y.(S(x, y) \Rightarrow T(y, x)$</u>
$\forall x. \forall y.(\neg S(x,y) \vee T(y,x)) \quad \rightarrow \quad \neg S(x,y) \vee T(y,x)$

<u>K σε CNF :</u>
$\{ [\neg A(x_1), R(x_1,f_1(x_1))], [\neg A(x_1), C(f_1(x_1))], [\neg B(x_2), S(f_2(x_2),x_2)], [\neg B(x_2), D(f_2(x_2))],$
$[\neg D(x_3), A(x_3)], [\neg S(x_4,y), T(y,x_4)] \}$

<u>**Φόρμουλα F : $\exists y. \exists z.(Q(x) \Leftarrow T(x, y) \wedge R(y, z) \wedge C(z))$**</u>
$Q(x) \vee \neg (T(x,a_1) \wedge R(a_1,a_2) \wedge C(a_2)) \quad \rightarrow \quad Q(x) \vee \neg T(x,a_1) \vee \neg R(a_1,a_2) \vee \neg C(a_2)$

<u>F σε CNF:</u> $\{ [Q(x), \neg T(x,a_1), \neg R(a_1,a_2), \neg C(a_2)] \}$

<u>**Ζητούμενο p: $Q(x) \Leftarrow B(x)$**</u>
$Q(x) \vee \neg B(x)$

Και το ¬p, αντίθετο του ζητουμένου: **¬ <u>($Q(x) \Leftarrow B(x)$)</u>**
$\neg (Q(x) \vee \neg B(x)) \quad \rightarrow \quad \neg Q(x) \wedge B(x)$

<u>p σε CNF:</u> $\{ [\neg Q(x)], [B(x)] \}$

Για K,F,¬p έχουμε {

$[\neg A(x_1), R(x_1,f_1(x_1))]$, (1)

$[\neg A(x_1), C(f_1(x_1))]$,, (2)

$[\neg B(x_2), S(f_2(x_2),x_2)]$, (3)

$[\neg B(x_2), D(f_2(x_2))]$, (4)

$[\neg D(x_3), A(x_3)]$, (5)

$[\neg S(x_4,y), T(y,x_4)]$, (6)

$[Q(x_5), \neg T(x_5,a_1), \neg R(a_1,a_2), \neg C(a_1)]$ (7)

$[\neg Q(x_6)]$, (8)

$[B(x_6)]$ (9)

}

Κάνουμε ενοποιήσεις

(3),(9) → $\{[\neg B(x_2), S(f_2(x_2),x_2)], [B(x_6)]\}$, με $\{x_6/x_2\}$,
παράγουμε $[S(f_2(x_2),x_2)]$ (10)

(4),(9) → $\{[\neg B(x_2), D(f_2(x_2))],[B(x_6)]\}$, με $\{x_6/x_2\}$,
παράγουμε $[D(f_2(x_2))]$ (11)

(4),(5) → $\{[\neg B(x_2), D(f_2(x_2))],[\neg D(x_3), A(x_3)]\}$, με $\{x_3/f(x_2)\}$,
παράγουμε $[A(x_2), \neg B(x_2)]$ (12)

(7),(8) → $\{[Q(x_5), \neg T(x_5,a_1), \neg R(a_1,a_2), \neg C(a_1)], [\neg Q(x_6)]\}$ με $\{x_6/x_5\}$
παράγω την $[\neg T(x_5,a_1), \neg R(a_1,a_2), \neg C(a_1)]$ (13)

(5),(11) → $\{[\neg D(x_3), A(x_3)], [D(f_2(x_2))]\}$ με $\{x_3/f_2(x_2)\}$
παράγω $[A(f_2(x_2))]$ (14)

(6),(10) → $\{[\neg S(x_4,y), T(y,x_4)], [S(f_2(x_2),x_2)]\}$ με $\{x_4/f_2(x_2), y/x_2\}$
παράγω $[T(x_2,f_2(x_2))]$ (15)

Συνεχίζουμε ούτω καθ’ εξής με τις ενοποιήσεις κάνοντας όσες είναι δυνατές.

Θυμίζουμε πως $f_1 \neq f_2$ και πως όταν ενοποιούμε, στην ενοποιήτρια αντικατάσταση με x/y το x πρέπει να είναι μεταβλητή (ενώ το y μπορεί να είναι μεταβλητή, σταθερά ή συνάρτηση).

Παρατηρούμε πως δεν καταλήγουμεσε αντίφαση, οπότε δεν ισχύει το ζητούμενο
$K, F \models Q(x) \Leftarrow B(x)$.

Άσκηση 2.5

Στα κάτωθι σημειώνουμε πως όπου αναφέρεται η λέξη “άλλη” σχετικά με δύο χώρες x,y (πχ μια χώρα x συνορεύει με μια άλλη χώρα y), θα θεωρούμε πως απαιτείται να είναι διαφορετικές χώρες, δηλαδή $x \neq y \to \neg (x = y)$.

1. Καμία χώρα δεν συνορεύει με τον εαυτό της.

$\forall$ x. (Χώρα(x) $\Rightarrow \neg$ συνορεύειΜε(x,x))

2. Όλες οι χώρες συνορεύουν με τουλάχιστον μία άλλη χώρα.
- Για κάθε χώρα x, υπάρχει άλλη χώρα y η οποία συνορεύει με τη x.
- Για κάθε χώρα x, υπάρχει χώρα y, διαφορετική από τη x, η οποία συνορεύει με τη x.

$\forall$ x. (Χώρα(x) $\Rightarrow$ $\exists$ y.(Χώρα(y) $\wedge$ $\neg$ (y=x) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,y))

3. Μερικές χώρες συνορεύουν με περισσότερες από τρεις άλλες χώρες
- Υπάρχει χώρα x, που συνορεύει με τουλάχιστον 4 άλλες χώρες.
- Υπάρχει χώρα x, για την οποία υπάρχουν 4 διαφορετικές χώρες που συνορεύουν με τη x.

$\exists$ x. (Χώρα(x) $\wedge$ $\exists$ y. $\exists$ z. $\exists$ w. $\exists$ t. (Χώρα(y) $\wedge$ Χώρα(z) $\wedge$ Χώρα(w) $\wedge$ Χώρα(t) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,y) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,z) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,w) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,t) $\wedge$ $\neg$(x=y) $\wedge$ $\neg$(x=z) $\wedge$ $\neg$(x=w) $\wedge$ $\neg$(x=t) $\wedge$ $\neg$(y=z) $\wedge$ $\neg$(y=w) $\wedge$ $\neg$(y=t) $\wedge$ $\neg$(z=w) $\wedge$ $\neg$(z=t) $\wedge$ $\neg$(w=t))))

4. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο χώρες που συνορεύουν μόνο μεταξύ τους.
- Υπάρχουν χώρες x και y, τέτοιες ώστε οι x,y να συνορεύουν μόνο μεταξύ τους.
- Υπάρχουν χώρες x και y, τέτοιες ώστε η x να συνορεύει με την y και η y με την x, και καμία άλλη χώρα να μη συνορεύει με την y, ούτε τη x. (Παραδέχομαι πως το να αναφέρω ξεχωριστά πως και η y συνορεύει με τη x ίσως είναι μικρός πλεονασμός καθώς πρόκειται για διαισθητικά συμμετρική σχέση, αλλά αυτό περιγράφει καλύτερα τη φράση “μεταξύ τους”.)

$\exists$x.$\exists$y.(Χώρα(x) $\wedge$ Χώρα(y) $\wedge$ $\neg$ (x=y) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,y) $\wedge$ συνορεύειΜε(y,x) $\wedge$ $\forall$z.(((Χώρα(z) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,z))$\Rightarrow$(z=y)) $\wedge$ ((Χώρα(z) $\wedge$ συνορεύειΜε(y,z))$\Rightarrow$(z=x))))

5. Μερικές χώρες συνορεύουν μόνο με χώρες που έχουν όλες μεγαλύτερη έκταση από αυτές.
- Υπάρχει χώρα x, τέτοια ώστε, για κάθε χώρα y που συνορεύει με τη x, η y έχει μεγαλύτερη έκταση από την x.

$\exists$x.(Χώρα(x) $\wedge$ $\forall$y.((Χώρα(y) $\wedge$ συνορεύειΜε(x,y))$\Rightarrow$ΜεγαλύτεροΑπό(έκταση(y),έκταση(x))))

Άσκηση 2.6

1. Μετατρέπουμε τις προτάσεις σε ισοδύναμες κανονικές μορφές χωρίς να απαλείψουμε ποσοδείκτες.

ι. $\forall x.(f(x) \Rightarrow g(a)$

$\forall$ x. (¬ f(x) $\vee$ g(a))

ιι. $(\forall x.f(x)) \Rightarrow g(a)$

¬ ($\forall$ x. f(x)) $\vee$ g(a) → ($\exists$ x. ¬ f(x)) $\vee$ g(a) → $\exists$ x. (¬ f(x) $\vee$ g(a))

Διαισθητικά, καταλαβαίνουμε πως η πρώτη ικανοποιείται αν ισχύει η (¬ f(x) $\vee$ g(a)) για κάθε x και η δεύτερη αν υπάρχει τουλάχιστον ένα x για το οποίο ισχύει (¬ f(x) $\vee$ g(a)).
Συνεπώς, αν ικανοποιείται η πρώτη, απαιτείται να ισχύει η (¬ f(x) $\vee$ g(a)) για όλα τα δυνατά x, οπότε σίγουρα ικανοποιείται και η δεύτερη, η οποία να απαιτεί να ισχύει έστω για ένα.
Επομένως δεν υπάρχει μη τετριμμένη ερμηνεία που να πληροί το ζητούμενο.

Εξαιρέσαμε την τετριμμένη περίπτωση όπου το πεδίο ορισμού για το x είναι το κενό.
Σε τέτοια περίπτωση, πράγματι ικανοποιείται η πρώτη ως "κενή αλήθεια" (vacuous truth) και δεν ικανοποιείται η δεύτερη καθώς δεν υπάρχει τέτοιο x, ως άρνηση κενής αλήθειας καθώς
$\exists$ x. (¬ f(x) $\vee$ g(a)) ≡ ¬ $\forall$ x. ¬ (¬ f(x) $\vee$ g(a)) .
Βέβαια, καθώς υπάρχει το g(a), εννοείται πως το a ανήκει στο πεδίο μας, οπότε δεν επιτρέπεται τέτοια περίπτωση όπως και να έχει.

2. Μετατρέπουμε τις προτάσεις σε ισοδύναμες κανονικές μορφές χωρίς να απαλείψουμε ποσοδείκτες.

ι. $\exists x.(f(x) \Rightarrow g(a))$

$\exists$ x. (¬ f(x) $\vee$ g(a))

ιι. $(\exists x.f(x)) \Rightarrow g(a)$

¬ ($\exists$ x.f(x)) $\vee$ g(a) → ($\forall$ x. ¬ f(x)) $\vee$ g(a) → $\forall$ x. (¬ f(x) $\vee$ g(a))

Εδώ έχουμε το ακριβώς αντίστροφο από την περίπτωση (1).
Βλέπουμε πως για το ζητούμενο αρκεί να υπάρχει ένα x για το οποίο ισχύει η (¬ f(x) $\vee$ g(a)) και ένα άλλο x για το οποίο δεν ισχύει.

Μια ερμηνεία I που να πετυχαίνει το ζητούμενο είναι η κάτωθι:

<u>Ερμηνεία I</u>
Δ = {a, b}
f = {a}
g = Ø