Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Ροή Λ, 8ο εξάμηνο

Εαρινό Εξάμηνο 2018 - 2019

Συστήματα και Τεχνολογίες Γνώσης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

<u>Ονοματεπώνυμο</u>
Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος

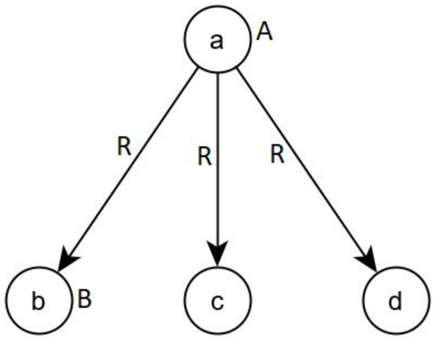
<u>Α.Μ.</u>
03111097

<u>Ημερομηνία Υποβολής</u>: 24 Μαΐου 2019

<u>Ερώτημα 1</u>

1.
(α’)
$A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.\neg A \sqcap \geq 3R$

Μοντέλο $\mathcal{I}$:
$\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d\}$
$A^{\mathcal{I}} = \{a\}$
$B^{\mathcal{I}} = \{b\}$
$R^{\mathcal{I}} = \{(a,b), (a,c), (a,d)\}$



(β’)
$\exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(C \sqcup B)$ μβτ. $\mathcal{T} = \{B \sqsubseteq D, \exists R.(D \sqcup C) \sqsubseteq \forall R.\neg A\}$

Δεν υπάρχει μοντέλο.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $P \equiv \exists R.A \sqcap \exists R.B \sqcap \forall R.(C \sqcup B)$
Έστω ερμηνεία $<\Delta^{\mathcal{I}}, \mathcal{I}>$ τ.ω. $p \in P^{\mathcal{I}}$.

Τότε με βάση τη σημασιολογία του τελεστή $\sqcap$ θα ισχύει ότι :
$p \in (\exists R.A)^{\mathcal{I}}$ (1)
$p \in (\exists R.B)^{\mathcal{I}}$ (2)
$p \in (\forall R.(C \sqcup B))^{\mathcal{I}}$ (3)

Επίσης, σύμφωνα με το T_{box} έχουμε :
$x \in B^{\mathcal{I}} \Rightarrow x \in D^{\mathcal{I}}$ (4)
$x \in (\exists R.(D \sqcup C))^{\mathcal{I}} \Rightarrow x \in (\forall R.\neg A)^{\mathcal{I}}$ (5)

Η σχέση (5) υποδηλώνει πως αν ένα άτομο έχει R-παιδί κατηγορίας D ή C, τότε όλα τα R-παιδιά του είναι ¬ A, δηλαδή δεν έχει κανένα παιδί κατηγορίας A.

Από (1), αναγκαία υπάρχει a τ.ω. R(p, a) και $a \in A^{\mathcal{I}}$ (6)
Από (2), αναγκαία υπάρχει b τ.ω. R(p, b) και $b \in B^{\mathcal{I}}$ (7)
Από (4), (7), εφόσον το $b \in B^{I}$, ισχύει πως $b \in D^{\mathcal{I}}$ (8)
Από (7), (8), το p έχει R-παιδί κατηγορίας D (9)
Από (5), (9), εφόσον το p έχει R-παιδί κατηγορίας D,
άρα και $(D \sqcup C)$, το x δεν έχει R-παιδιά κατηγορίας A (10)

Από (6), (10), καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς το p έχει R-παιδί κατηγορίας A (το a), αλλά ταυτόχρονα δεν έχει κανένα παιδί κατηγορίας A.

2.

(α’)

$D \sqcap B \sqsubseteq A$ μβτ. $\mathcal{T} = \{B \sqsubseteq A \sqcup C,\ D \sqsubseteq \neg C\}$

Έστω μια ερμηνεία $<\Delta^{I}, I>$ του T_{box}.

Από το T_{box}, έχουμε τα εξής :

$x \in B^{I} \Rightarrow x \in (A \sqcup C)^{I} \Rightarrow x \in A^{I}$ ή $x \in C^{I}$ (1)

$x \in D^{I} \Rightarrow x \in (\neg C)^{I} \Rightarrow x \notin C^{I}$ (2)

Η υπαγωγή θα ισχύει ανν για κάθε δυνατό μοντέλο $<\Delta^{I}, I>$ του T_{box}, ισχύει :

$x \in (D \sqcap B)^{I} \Rightarrow x \in A^{I}$

Έστω ένα τέτοιο μοντέλο και έστω $p \in (B \sqcap D)^{I}$.

Τότε από τη σημασιολογία των τελεστών $\in$ και $\sqcap$ προκύπτει ότι $p \in B^{I}$ και $p \in D^{I}$.

Από (2), εφόσον $p \in D^{I}$, προκύπτει πως $p \notin C^{I}$. (3)

Από (1), εφόσον $p \in B^{I}$, προκύπτει πως $p \in A^{I}$ ή $x \in C^{I}$. (4)

Από (3), (4), προκύπτει πως $p \in A^{I}$.

Συνεπώς, η υπαγωγή ισχύει : $D \sqcap B \sqsubseteq A$.

(β’)

$C \sqsubseteq \neg C_1 \sqcup C_2$ μβτ. $\mathcal{T} = \{C \sqsubseteq \exists R.(A \sqcap \exists R.B),\ \exists R.B \sqsubseteq D,$

$\exists R.(A \sqcap D) \sqsubseteq \neg (C_1 \sqcap C_2)\ \}$

Η υπαγωγή δεν ισχύει.

Ως απόδειξη, αρκεί να παρουσιάσουμε μια ερμηνεία-μοντέλο του T_{box} αντιπαράδειγμα, όπου δηλαδή δε θα ισχύει το $C \sqsubseteq \neg C_1 \sqcup C_2$.

$\Delta^{I} = \{a, b, c\}$

$A^{I} = \{a\}$

$B^{I} = \{b\}$

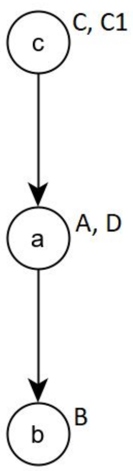
$C^{I} = \{c\}$

$C_1^{I} = \{c\}$

$C_2^{I} = \varnothing$

$D^{I} = \{a\}$

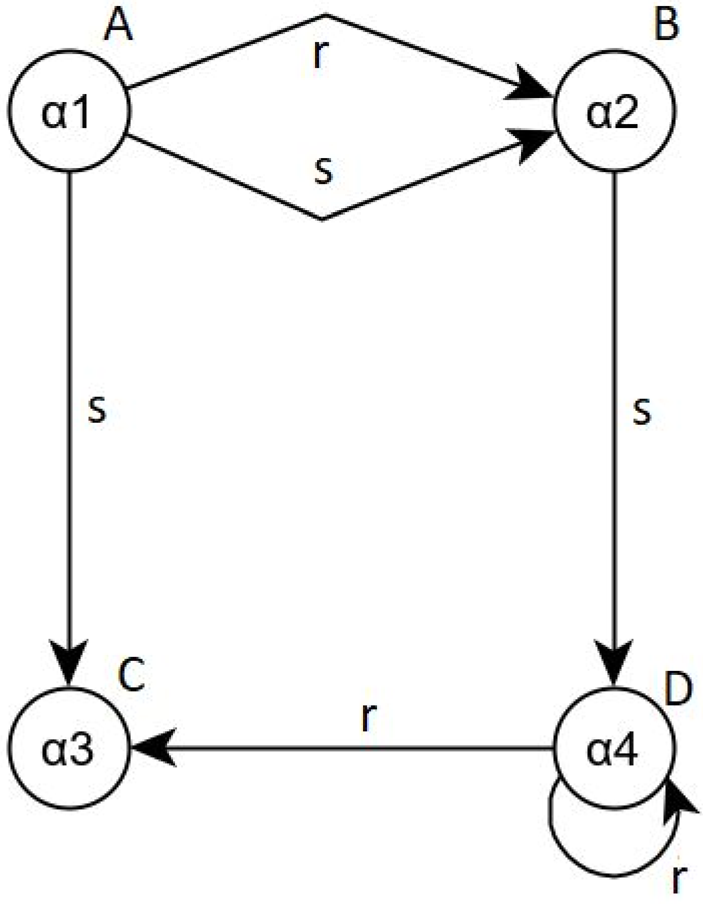
$R^{I} = \{(c, a), (a, b)\}$



Πράγματι, ικανοποιούνται όλοι οι κανόνες του T_{box}, αλλά ενώ $c \in C^{I}$, ταυτόχρονα ισχύει πως $c \in C_1^{I}$ και $c \notin C_2^{I}$, δηλαδή $c \notin (\neg C_1 \sqcup C_2)^{I}$ και άρα $C \not\sqsubseteq \neg C_1 \sqcup C_2$.

Ερώτημα 2

$\Delta^{I} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$
$A^{I} = \{\alpha_1\}$
$B^{I} = \{\alpha_2\}$
$C^{I} = \{\alpha_3\}$
$D^{I} = \{\alpha_4\}$
$r^{I} = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_4, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_4)\}$
$s^{I} = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4)\}$



i. $(\forall\ s.\ \forall\ r.\ \bot)^{I} = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$
Σημείωση : Για τα α_3, α_4 ισχύει "τετριμμένα" καθώς δεν έχουν s-παιδιά.

ii. $(\exists\ s.\ (D \sqcup \exists\ r^{-}.\ C)\ )^{I} = \{\alpha_2\}$

iii. $(\exists\ r.\ \exists\ s^{-}.\ \exists\ r\ )^{I} = \{\alpha_1, \alpha_4\}$

iv. $(\forall\ r^{-}.\ \bot \sqcap (A \sqcup C)\ )^{I} = \{\alpha_1\}$

Ερώτημα 3

$C_1 \equiv \forall r. A \sqcap C \sqcap \forall r. \forall r. E \sqcap \forall r. B \sqcap E \sqcap \forall r. (A \sqcap B) \sqcap \forall r. \forall r. \forall s. D$
$C_2 \equiv \forall r. \forall r. E \sqcap \forall r. \forall r. \forall s. (D \sqcap A) \sqcap E$

Εκτελούμε τον αλγόριθμο δομικής επαγωγής FL_0 για να ελέγξουμε αν ισχύει $C_1 \sqsubseteq C_2$.

Μετατρέπουμε τις C_1, C_2 σε κανονική μορφή.

$C_1 \equiv E \sqcap C \sqcap \forall r. (A \sqcap B) \sqcap \forall r. \forall r. E \sqcap \forall r. \forall r. \forall s. D$
$\equiv E \sqcap C \sqcap \forall r. ((A \sqcap B) \sqcap \forall r. (E \sqcap \forall s. D))$

$C_2 \equiv \forall r. \forall r. E \sqcap \forall r. \forall r. \forall s. (D \sqcap A) \sqcap E$
$\equiv E \sqcap \forall r. (\forall r. (E \sqcap \forall s. (D \sqcap A)))$

i.
$NC_1 = \{E, C\}$
$NC_2 = \{E\}$
$RC_1 = \{r\}$
$RC_2 = \{r\}$

ii.
$X = A \sqcap B \sqcap \forall r. (E \sqcap \forall s. D)$
$Y = E \sqcap \forall r. (\forall r. (E \sqcap \forall s. (D \sqcap A)))$
$NC_1 = \{A, B\}$
$NC_2 = \varnothing$
$RC_1 = \{r\}$
$RC_2 = \{r\}$

iii.
$X = E \sqcap \forall s. D$
$Y = E \sqcap \forall s. (D \sqcap A)$
$NC_1 = \{E\}$
$NC_2 = \{E\}$
$RC_1 = \{s\}$
$RC_2 = \{s\}$

iv.
$X = D$
$Y = D \sqcap A$
$NC_1 = \{D\}$
$NC_2 = \{D, A\}$
$RC_1 = \varnothing$
$RC_2 = \varnothing$

Εδώ, στο βήμα (iv), βλέπουμε πως το $A \in NC_2$, αλλά $A \notin NC_1$.
Συνεπώς, δεν ισχύει η ζητούμενη υπαγωγή, δηλαδή $C_1 \not\sqsubseteq C_2$.

Ερώτημα 4

Δοθέντα

Έννοιες : Άνθρωπος

Ρόλους : έχειΣύζυγο, έχειΠαιδί, έχειΑδερφό

Ορίζουμε τις εξής βοηθητικές έννοιες και ρόλους :

έχειΕγγόνι ≡ έχειΠαιδί ∘ έχειΠαιδί

ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια ≡ ≥ 4 έχειΕγγόνι ⊓ ≤ 4 έχειΕγγόνι
ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ≡ ∃ έχειΑδελφό.T ⊓ ≤ 1 έχειΑδελφό.T
Ανύπαντρος ≡ ∀ έχειΣύζυγο. ⊥
Γονιός ≡ ∃ έχειΠαιδί.T

ΜοναδικόςΑδελφόςΑνύπαντρουΓονιούΜεΤέσσεραΕγγόνια ≡
έχειΑδελφο ¯ . (ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ⊓ Γονιός ⊓ ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια)

Σημείωση :
Όπως δίνεται η έννοια, η σημασιολογία είναι διφορούμενη.
Παραπάνω ορίζω την έννοια, ως ότι ο Ανύπαντρος Γονιός έχει τα Τέσσερα Εγγόνια.
Αν αντ' αυτού, ζητείται η έννοια που αντιστοιχεί στο ότι ο Μοναδικός Αδελφός έχει τα Τέσσερα Εγγόνια, τότε ο ζητούμενος ορισμός είναι :
ΜοναδικόςΑδελφόςΑνύπαντρουΓονιούΜεΤέσσεραΕγγόνια ≡
έχειΑδελφο ¯ . (ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ⊓ Γονιός) ⊓ ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια

Θεωρούμε ορισμένες τις παραπάνω βοηθητικές έννοιες και ρόλους και ορίζουμε και επιπλέον :

έχειΜηΠαιδί ≡ ¬ έχειΠαιδί
(δηλαδή έχειΜηΠαιδί(a,b) σημαίνει απλά πως το b δεν είναι παιδί του a)

έχειΔιαφορετικόΓονιόΜε ≡ έχειΓονιό ∘ έχειΜηΠαιδί
(δηλαδή έχειΔιαφορετικόΓονιό(a,b) σημαίνει απλά πως ο a έχει κάποιον διαφορετικό γονιό από τον b)

έχειΔιαφορετικόΓονιόΜεΤονΑδερφόΤουΤάδε ≡ έχειΔιαφορετικόΓονιό ∘ έχειΑδελφό
(δηλαδή έχειΔιαφορετικόΓονιόΜεΤονΑδερφόΤουΤάδε(a,b) σημαίνει απλά πως ∃ c, τ.ω. ο a έχει διαφορετικό γονιό από τον c και ο c έχει αδερφό τον b)

ΕτεροθαλήςΑδερφός ≡ ∃ έχειΔιαφορετικόΓονιόΜεΤονΑδερφόΤουΤάδε. Self
(δηλαδή ΕτεροθαλήςΑδερφός(a) σημαίνει απλά πως ∃ b, τ.ω. ο a έχει διαφορετικό γονιό από τον b και ο b έχει αδερφό τον a, άρα οι a, b είναι αδέρφια αλλά έχουν διαφορετικό γονιό)

ΕτεροθαλήςΑδελφόςΧωρίςΠαντρεμέναΕγγόνια ≡
ΕτεροθαλήςΑδελφός ⊓ ∀ έχειΕγγόνι. Ανύπαντρος

Συνολικά η βάση γνώσης έχει τα εξής:

Άνθρωπος
έχειΣύζυγο
έχειΠαιδί
έχειΑδερφό

έχειΕγγόνι ≡ έχειΠαιδί ∘ έχειΠαιδί

ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια ≡ ≥ 4 έχειΕγγόνι ⊓ ≤ 4 έχειΕγγόνι
ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ≡ ∃ έχειΑδελφό.T ⊓ ≤ 1 έχειΑδελφό.T
Ανύπαντρος ≡ ∀ έχειΣύζυγο. ⊥
Γονιός ≡ ∃ έχειΠαιδί.T

ΜοναδικόςΑδελφόςΑνύπαντρουΓονιούΜεΤέσσεραΕγγόνια ≡
έχειΑδελφο ¯ . (ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ⊓ Γονιός ⊓ ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια)

(ή ανάλογα με το τι θέλει να πει ο ποιητής, όπως εξηγώ παραπάνω :
ΜοναδικόςΑδελφόςΑνύπαντρουΓονιούΜεΤέσσεραΕγγόνια ≡
έχειΑδελφο ¯ . (ΈχωνΜοναδικόΑδελφό ⊓ Γονιός) ⊓ ΈχωνΤέσσεραΕγγόνια
)

έχειΜηΠαιδί ≡ ¬ έχειΠαιδί
έχειΔιαφορετικόΓονιόΜε ≡ έχειΓονιό ∘ έχειΜηΠαιδί
έχειΔιαφορετικόΓονιόΜεΤονΑδερφόΤουΤάδε ≡ έχειΔιαφορετικόΓονιό ∘ έχειΑδελφό

ΕτεροθαλήςΑδερφός ≡ ∃ έχειΔιαφορετικόΓονιόΜεΤονΑδερφόΤουΤάδε. Self