Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ροή Μ, 7ο εξάμηνο

Άλγεβρα και Εφαρμογές

Πρώτη σειρά ασκήσεων

Σπουδαστής
Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος (Α.Μ.: 03111097)

Ημερομηνία Παράδοσης: 20 Νοεμβρίου 2019

Για λόγους συνέπειας, υποβάλλω τις ασκήσεις τυπωμένες στη θυρίδα και, επιπλέον, στο mycourses σε ηλεκτρονική μορφή.

Άσκηση 1

(i). Το S = {a, b} έχει ακριβώς 2 στοιχεία.
Συνεπώς, μπορούμε να δημιουργήσουμε ακριβώς $2^2 = 4$ διατεταγμένα ζεύγη.
Κάθε ζεύγος (x,y) αντιστοιχεί σε πράξη $(x * y)$ για δοθείσα διμελή σχέση $*$.
Έστω $z = x * y$, τότε $z \in S = \{a, b\}$, δηλαδή για το αποτέλεσμα της πράξης υπάρχουν ακριβώς 2 "ενδεχόμενα".
Μια διμελής σχέση * ορίζεται έγκυρα και μονοσήμαντα από τα 4 αποτελέσματα που παράγονται, ένα για το κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(a * a,\ a * b,\ b * a,\ b * b)$.

Επομένως, μπορούν να ορισθούν ακριβώς 2^4 = 16 διμελείς πράξεις στο S.

Παραθέτουμε τους πίνακες για την κάθε διμελή σχέση.
Ο αριθμός στο πάνω αριστερά κελί του πίνακα είναι απλά το "index" της εκάστοτε σχέσης, ώστε να μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτή.

1	**a**	**b**
a	a	a
b	a	a

2	**a**	**b**
a	a	a
b	a	b

3	**a**	**b**
a	a	a
b	b	a

4	**a**	**b**
a	a	a
b	b	b

5	**a**	**b**
a	a	b
b	a	a

6	**a**	**b**
a	a	b
b	a	b

7	**a**	**b**
a	a	b
b	b	a

8	**a**	**b**
a	a	b
b	b	b

9	**a**	**b**
a	b	a
b	a	a

10	**a**	**b**
a	b	a
b	a	b

11	**a**	**b**
a	b	a
b	b	a

12	**a**	**b**
a	b	a
b	b	b

13	**a**	**b**
a	b	b
b	a	a

14	**a**	**b**
a	b	b
b	a	b

15	**a**	**b**
a	b	b
b	b	a

16	**a**	**b**
a	b	b
b	b	b

(ii). Θυμίζουμε πως αν τηρείται η προσεταιριστικότητα,
τότε $\forall$ x,y,z $\in$ S, ισχύει $x * (y * z) = (x * y) * z$
Κοιτάζοντας τους πίνακες, παρατηρούμε πως η προσεταιριστικότητα ισχύει για τις σχέσεις
1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 16.
Αντίθετα δεν ισχύει για τις:
3, καθώς $b * (a * b) = b * a = b$, ενώ $(b * a) * b = b * b = a$
5, καθώς $b * (a * b) = b * b = a$, ενώ $(b * a) * b = a * b = b$
9, καθώς $a * (a * b) = a * a = b$, ενώ $(a * a) * b = b * b = a$
11, καθώς $a * (b * a) = a * b = a$, ενώ $(a * b) * a = a * a = b$
12, καθώς $a * (b * a) = a * b = a$, ενώ $(a * b) * a = a * a = b$
13, καθώς $a * (b * a) = a * a = b$, ενώ $(a * b) * a = b * a = a$
14, καθώς $a * (b * a) = a * a = b$, ενώ $(a * b) * a = b * a = a$
15, καθώς $a * (b * b) = a * a = b$, ενώ $(a * b) * b = b * b = a$

Επομένως, συνολικά υπάρχουν 8 προσεταιριστικές διμελείς σχέσεις στο S.
Πρόκειται για τις {1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 16}.

(iii). Θυμίζουμε πως αν διαθέτουμε ουδέτερο στοιχείο e $\in$ S,
τότε $\forall$ x $\in$ S, ισχύει $e * x = x * e = x$.
Παρατηρούμε πως ουδέτερο στοιχείο έχουν οι εξής σχέσεις:
2 (το b), 7 (το a), 8 (το a), 10 (το b).
Αντίθετα, δεν ισχύει για τις:
1, καθώς $a * b = a$, άρα $a \neq e$, και $b * b = a$, άρα $b \neq e$
4, καθώς $a * b = a$, άρα $a \neq e$, και $b * a = b$, άρα $b \neq e$
6, καθώς $b * a = a$, άρα $a \neq e$, και $a * b = b$, άρα $b \neq e$
16, καθώς $a * a = b$, άρα $a \neq e$, και $b * a = b$, άρα $b \neq e$

Επομένως, 4 εκ των προηγούμενων έχουν ουδέτερο στοιχείο.
Πρόκειται για τις {2, 7, 8, 10}

(iv). Καθώς για τις διμελείς σχέσεις {2, 7, 8, 10} διαθέτουμε προσεταιριστικότητα και ουδέτερο στοιχείο, για να εφοδιάζει κάποια εξ αυτών το S με δομή ομάδας, πρέπει και αρκεί για κάθε στοιχείο να υπάρχει αντίστροφο.
Θυμίζουμε πως το x $\in$ S έχει αντίστροφο x’ $\in$ S, ανν $x * x' = x' * x = e$

Παρατηρούμε πως οι εξής σχέσεις έχουν αντίστροφο για κάθε στοιχείο:
7 (a’ = a, b’ = b), 10 (a’ = a, b’ = b)
Αντίθετα, η ιδιότητα δεν ισχύει για τις:
2, καθώς $e \equiv b$, $a * a = a$, άρα $a' \neq a$, και $a * b = a$, άρα $a' \neq b$
8, καθώς $e \equiv a$, $b * a = b$, άρα $b' \neq a$, και $b * b = b$, άρα $b' \neq b$

Επομένως, 2 διμελείς σχέσεις εφοδιάζουν το S με δομή ομάδας.
Πρόκειται για τις {7, 10}.

<u>Άσκηση 2</u>

$S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ και $a * b = a + b + ab$

(i). Η $*$ είναι προφανώς καλά ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Για να δείξουμε πως η $*$ ορίζει μια διμελή πράξη στο S, αρκεί να δείξουμε πως διατηρείται η κλειστότητα,
δηλαδή πως για a, b $\in$ S, ισχύει $a * b \in S$. Αρκεί να δείξουμε πως $a * b \neq -1$.
<u>Block άτοπο: Έστω a, b $\in$ S και $a * b = -1$</u>

- $a * b = -1 \Rightarrow a + b + ab = -1 \Rightarrow a (1 + b) + (1 + b) = 0 \Rightarrow (a + 1) (b + 1) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow a = -1 \lor b = -1$
- Όμως, a,b $\in$ S, άρα $a \neq -1 \land b \neq -1$

<u>Άτοπο</u>
Επομένως, η $*$ είναι μια διμελής πράξη στο S.

Θδο (S, $*$) αποτελεί ομάδα.

1. **Η $*$ είναι διμελής πράξη στο S.**
2. **Η $*$ είναι προσεταιριστική.**
   Για a,b,c $\in$ S, έχουμε
   - $a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a (b + c + bc) =$
     $= a + b + c + ab + bc + ca + abc$
   - $(a * b) * c = (a + b + ab) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab) c =$
     $= a + b + c + ab + bc + ca + abc$
   - Άρα, $a * (b * c) = (a * b) * c$
3. **Το S περιέχει ταυτοτικό στοιχείο. Πρόκειται για το $e \equiv 0 \in S$.**
   - $a * 0 = a + 0 + 0 = a$
   - $0 * a = 0 + a + 0 = a$
4. **Κάθε a $\in$ S διαθέτει αντίστροφο. Πρόκειται για το $a' = -a / (a+1)$**
   - $a \in S \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow a + 1 \neq 0$, άρα το $a' = -a / (a+1)$ είναι καλά ορισμένο στο $\mathbb{R}$.
   - <u>Block άτοπο: Έστω το $a' = -a / (a+1) \notin S$.</u>
     - Καθώς το $a' \in \mathbb{R}$, προκύπτει πως $a' = -1$
     - $-a / (a + 1) = -1 \Rightarrow -a = -a -1 \Rightarrow 0 = -1$

     <u>Άτοπο</u>
     Επομένως, $a' \in S$.
   - $a * a' = a + a' + a a' = a + (-a / (a+1)) + a (-a / (a+1)) =$
     $= a + (a + 1) (-a / (a+1)) = a - a = 0 \equiv e$

     Όμοια, $a' * a = 0 \equiv e$

Επομένως, η (S, $*$) αποτελεί ομάδα

(ii).

(a). $1 * x * 2 = 23$

Είναι,

$1 * x * 2 = (1 * x) * 2 = (1 + x + x) * 2 = (1 + 2x) * 2 = 1 + 2x + 2 + 2(1 + 2x) =$

$= 3 + 2x + 2 + 4x = 6x + 5$

Άρα, $1 * x * 2 = 23 \Leftrightarrow 6x + 5 = 23 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$

(b).

$$\begin{cases} (x+1) * (y-1) = x * y \\ (x-2) * (y+2) = x * (y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1) * (y-1) = x * y \\ (x-2) * (y+2) = x * (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + y - 1 + (x + 1)(y - 1) = x + y + xy \\ x - 2 + y + 2 + (x - 2)(y+2) = x + y + 1 + x(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - x + y - 1 = xy \\ xy + 2x - 2y - 4 = 1 + xy + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 4 = 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ -y - 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 6 - 1 = 0 \\ y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -6 \end{cases}$$

Άσκηση 3

Έστω το σύνολο G των πινάκων της μορφής

[a b]
[c d] , όπου $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ και $ad - bc \neq 0$.

Για κάθε τέτοιο πίνακα, είναι $ad - bc \neq 0 \Rightarrow$

$(ad = 0 \wedge bc = 1) \vee (ad = 1 \wedge bc = 0) \Rightarrow$

$((a = 0 \vee d = 0) \wedge b = c = 1) \vee (a=d=1 \wedge (b =0 \vee c = 0))$

Από τα άνωθι, προκύπτει πως το G έχει ακριβώς 6 στοιχεία.
Πρόκειται για τους εξής πίνακες.

$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Θδο (G, **·** **) αποτελεί ομάδα.**

1. **Η · είναι διμελής πράξη στο G.**
   Η · είναι διμελής πράξη στο σύνολο των 2x2 πινάκων, οπότε αρκεί νδο το G είναι κλειστό ως προς την · .
   Έστω $X, Y \in G$.
   - $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$
   - $Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $eh - gh \neq 0$
   - $XY = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
   - Είναι $(ae + bg) (cf + dh) - (af + bh) (ce + dg)$
     $= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg$
     $=eh (ad - bc) - gf (ad - bc) = (eh - gf) (ad - bc) \neq 0$,
     καθώς $ad - bc \neq 0 \wedge eh - gh \neq 0$

   Επομένως, $XY \in G$.

2. **Η · είναι προσεταιριστική στο G** καθώς είναι προσεταιριστική στο υπερσύνολο, το σύνολο όλων των 2x2 πινάκων.
3. **Η G περιέχει ταυτοτικό στοιχείο.** Πρόκειται για το $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M_3$
   - $\forall\ X \in G$, ισχύει $X I = I X = X$

4. **Κάθε X ϵ G, έχει αντίστροφο X^{-1} ϵ G.**
   - Έστω $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$

     Το X' θα είναι $X' = 1/(ad - bc) \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
   - Είναι ad - bc ≠ 0, οπότε ο X' είναι καλά ορισμένος στο σύνολο των 2x2 πινάκων.
   - Για το X', είναι $(da)/(ad - bc)^2 - (cb)(ad - bc)^2 = (ad - bc) / (ad - bc)^2 = 1 / (ad - bc)$, Όπου 1/(ad - bc) ≠ 0 καλά ορισμένο, καθώς ad - bc ≠ 0
   - $X X' = 1/(ad - bc) \begin{bmatrix} ad + b(-c) & a(-b) + ba \\ cd + d(-c) & c(-b) + da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Επομένως, η G αποτελεί ομάδα.

Επιπλέον, καθώς το G, όπως προείπαμε, περιέχει ακριβώς 6 στοιχεία, η (G, ·) είναι ομάδα τάξης 6.

Σημειώνουμε πως όλες οι παραπάνω συνθήκες, θα μπορούσαν να αποδειχτούν απλά παραθέτοντας τον πλήρη πολλαπλασιαστικό πίνακα της G, ο οποίος ζητείται όπως και να ‘χει και τον παρουσιάζουμε παρακάτω.

Πρόκειται για τον κάτωθι.

	M3	**M6**	**M2**	**M4**	**M5**	**M1**
M3	M3	M6	M2	M4	M5	M1
M6	M6	M2	M3	M1	M4	M5
M2	M2	M3	M6	M5	M1	M4
M4	M4	M5	M1	M3	M6	M2
M5	M5	M1	M4	M2	M3	M6
M1	M1	M4	M5	M6	M2	M3

Τοποθετήσαμε τα στοιχεία με αυτή τη σειρά στον πίνακα πολλαπλασιασμού, προκειμένου να φανεί καλύτερα **ο ισομορφισμός της G με την $S_3 = D_3$** .

Παραθέτω τον πίνακα της D_3 κάτωθι.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Ο ισομορφισμός των G, D_3 είναι ο εξής:

$M_3 \sim \rho_0$, $M_6 \sim \rho_1$, $M_2 \sim \rho_2$, $M_4 \sim \mu_1$, $M_5 \sim \mu_2$, $M_1 \sim \mu_3$

<u>Άσκηση 4</u>

$\forall$ a,b $\in$ G, ισχύει $(ab)^2 = a^2b^2$

$\forall$ a, b $\in$ G, $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow ab\,ab = aa\,bb \Rightarrow$ (από ν.δ.) $ba = ab$

Επομένως, η ομάδα είναι αβελιανή.

<u>Άσκηση 5</u>

(i). Όλα τα στοιχεία της ομάδας $(G, *)$ είναι τάξης 2.

Τότε, $\forall$ a,b $\in$ G, ισχύει πως $(a * b) \in G$ (από κλειστότητα της $*$ στο G).
Είναι, $a^2 = e$, $b^2 = e$, $(a * b)^2 = e$.
Λοιπόν, $\forall$ a,b $\in$ G, ισχύει **$(a * b)^2 = a^2\, b^2$**

Επομένως, σύμφωνα και με όσα αποδείξαμε στην άσκηση (4), η ομάδα είναι αβελιανή.

(ii). Η ομάδα $(G, *)$ είναι μη τετριμμένη πεπερασμένη και άρτιας τάξης.

Η G είναι ομάδα, άρα η G περιέχει ταυτοτικό στοιχείο e και κάθε $a \in G$ έχει μοναδικό αντίστροφο $a' \in G$.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη αντιστρόφων στοιχείων του G, (a, a’), όπου $a \neq a'$.
Προφανώς, έχουμε συμπεριλάβει άρτιο πλήθος στοιχείων του G.

Επομένως, καθώς η ομάδα G είναι άρτιας τάξης, δηλαδή περιέχει συνολικά άρτιο πλήθος στοιχείων, προκύπτει πως υπάρχει άρτιο πλήθος στοιχείων x όπου $x = x'$, δηλαδή $x * x = e$.

Ένα τέτοιο στοιχείο είναι προφανώς το ουδέτερο e (τάξης 1), καθώς $e * e = e$, άρα $e = e'$.
Συνεπώς, εξαιρώντας το e, υπάρχει περιττό πλήθος στοιχείων b όπου $b = b'$, δηλαδή $b \cdot b = e$.
Καθώς, το μοναδικό στοιχείο τάξης 1 είναι το e, τα προαναφερθέντα στοιχεία b είναι τάξης 2.

Επειδή το 0 είναι άρτιος αριθμός και όχι περιττός, συμπεραίνουμε πως υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο στοιχείο b, δηλαδή τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 2.

Άσκηση 6

Έστω το (ab) έχει πεπερασμένη τάξη, έστω r.
Τότε, $(ab)^r = e$

Είναι $ba = (a' a)\, ba = a' (ab)\, a$
Οπότε, $(ba)^r = (a' (ab)\, a)^r = a' (ab)\, a\ \ a' (ab)\, a\ \ \ldots\ a' (ab)\, a = a' (ab)^r a = a' e\, a = a' a = e$
Άρα, η τάξη του ba είναι πεπερασμένη και είναι το πολύ r.
Έστω λοιπόν η τάξη του ba είναι $d \leq r$.
Τότε, όμοια με πριν, δείχνουμε ότι $(ab)^d = e$.
Άρα, η τάξη του ab είναι το πολύ d.
Οπότε, $d \leq r \wedge r \leq d$, άρα $r = d$.
Επομένως, αν το ab έχει πεπερασμένη τάξη, τότε και το ba έχει πεπερασμένη τάξη ίση με την τάξη του ab.

Προφανώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει πως αν το ba έχει πεπερασμένη τάξη, τότε και το ab έχει πεπερασμένη τάξη ίση με την τάξη του ba.

Από τα παραπάνω, επιπλέον προκύπτει πως το ab έχει άπειρη τάξη αν και μόνο αν, το ba έχει άπειρη τάξη.

Τελικά, τα στοιχεία ab και ba έχουν ίδια τάξη σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 7

$a, b \in G$, όπου G ομάδα. $a^5 = e$ και $a^3b = ba^3$

$ab = a^5\, ab = a^3\, a^3b = a^3\, ba^3 = ba^3\, a^3 = ba\, a^5 = ba$

<u>Άσκηση 8</u>

$\mathbb{C}^* = \{a + bi \in \mathbb{C} : |a| + |b| \neq 0\}$
$\mathcal{U} = \{a + bi \in \mathbb{C}^* : a^2 + b^2 = 1\}$

Καταρχάς, αποδεικνύουμε τυπικά πως η ($\mathbb{C}^*$, ·) είναι ομάδα.

1. **Η · είναι διμελής πράξη στο $\mathbb{C}^*$.**
   Η · είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{C}$, οπότε αρκεί να δείξουμε πως για $x, y \in \mathbb{C}^*$, ισχύει $xy \in \mathbb{C}^*$.
   Block άτοπο: Έστω $x,y \in \mathbb{C}^*$ και $xy \notin \mathbb{C}^*$.
   - Είναι $x = a + bi$, $|a| + |b| \neq 0$
   - Είναι $y = c + di$, $|c| + |d| \neq 0$
   - $xy = (a + bi) (c + di) = ac + cbi + adi - bd = (ac - bd) + (cb + ad)i$
   - Είναι $xy \notin \mathbb{C}^*$, άρα $|ac - bd| + |cb + ad| = 0 \Rightarrow$
     $ac - bd = 0 \quad \wedge \quad cb + ad = 0 \quad \Rightarrow \quad (1)$

     $ac = bd \quad \wedge \quad a (cb + ad) = 0 \quad \Rightarrow$
     $ac = bd \quad \wedge \quad ac\, b + a\, ad = 0 \quad \Rightarrow$
     $bd\, b + a\, ad = 0 \quad \Rightarrow \quad d (a^2 + b^2) = 0 \quad \Rightarrow$
     $d = 0 \quad \vee \quad a^2 + b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad \vee \quad |a| = |b| = 0 \quad \Rightarrow$
     $d = 0$, καθώς $x \in \mathbb{C}^*$ οπότε $|a| + |b| \neq 0$

     $(1), d = 0 \quad \Rightarrow \quad ac = cb = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \vee \quad a = b = 0 \quad \Rightarrow$
     $c = 0$, καθώς $x \in \mathbb{C}^*$ οπότε $|a| + |b| \neq 0$
   - Άρα $c = d = 0 \Rightarrow |c| + |d| = 0$

   <u>Άτοπο</u>, καθώς $y = c + di \in \mathbb{C}^*$.
   Επομένως, η · είναι διμελής πράξη στο $\mathbb{C}^*$.

2. **Η προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού ισχύει στο $\mathbb{C}^*$, καθώς ισχύει στο υπερσύνολο $\mathbb{C}$.**
3. **Το $\mathbb{C}^*$ περιέχει ταυτοτικό στοιχείο. Πρόκειται για το $e \equiv 1 \in \mathbb{C}^*$.**
   Για $x \in \mathbb{C}^*$, είναι $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
4. **Κάθε $x = a + bi \in \mathbb{C}^*$, διαθέτει αντίστροφο. Πρόκειται για το $x' = 1 / x$.**
   - Είναι $|a| + |b| \neq 0$, άρα $x \neq 0$, οπότε το $x' = 1 / x$ είναι καλά ορισμένο στο $\mathbb{C}$.
   - $x' = 1 / x = 1 / (a + bi) = (a - bi) / (a^2 + b^2)$
     <u>Block άτοπο: Έστω $x' \notin \mathbb{C}^*$</u>
     - $|a / (a^2 + b^2)| + |b / (a^2 + b^2)| = 0 \Rightarrow |a| + |b| = 0$

     <u>Άτοπο</u>, καθώς $x \in \mathbb{C}^*$, άρα $|a| + |b| \neq 0$
     Επομένως, $x' \in \mathbb{C}^*$.
   - Είναι $x \cdot 1/x = 1 \equiv e$.

Επομένως, η ($\mathbb{C}^*$, ·) είναι ομάδα.

Τώρα, θδο πως η $\mathcal{U}$ είναι υποομάδα της $\mathbb{C}^*$.
Καταρχάς, εξ ορισμού είναι υποσύνολο της $\mathbb{C}^*$.

1. **Η $\mathcal{U}$ είναι κλειστή ως προς την · .**
   Για x, y $\in \mathcal{U}$,
   - Είναι $x = a + bi$, $a^2 + b^2 = 1$
   - Είναι $y = c + di$, $c^2 + d^2 = 1$
   - $xy = (a + bi)(c + di) = ac + cbi + adi - bd = (ac - bd) + (cb + ad)i$
   - Είναι $(ac - bd)^2 + (cb + ad)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 + a^2d^2 + 2abcd$
     $= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1$

   Επομένως, $xy \in \mathcal{U}$.
2. **Το ταυτοτικό στοιχείο e ≡ 1 ανήκει στην $\mathcal{U}$.**
   $e = 1 + 0i$ και $1^2 + 0^2 = 1$, άρα $e \in \mathcal{U}$.
3. **Για κάθε $x \in \mathcal{U}$, ισχύει $x^{-1} \in \mathcal{U}$.**
   Είναι $x = a + bi$, $a^2 + b^2 = 1$
   Και $x' = 1/x = (a - bi) / (a^2 + b^2) = (a - bi)$, $a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = 1$
   Οπότε, $x' \in \mathcal{U}$.

Επομένως, τελικά $\mathcal{U} \leq \mathbb{C}^*$.

Άσκηση 9

(i). Η ομάδα (D, ο) των συμμετριών του κύκλου αποτελείται από όλες τις δυνατές μεταθέσεις που διατηρούν το σχήμα του κύκλου.
Συγκεκριμένα, πρόκειται για όλες τις δυνατές μεταθέσεις που προκύπτουν αν περιστρέψουμε τον κύκλο κατά κάθε δυνατή γωνία (από 0 εώς 2π) και αν ανακλάσουμε τον κύκλο ως προς κάθε ευθεία που διέρχεται από το (0,0).

(Είναι διαισθητικά η D_n για $n \to \infty$.)

Η D είναι ισομορφική με την O(2), δηλαδή την ομάδα των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$, καθώς ο κύκλος διαθέτει “τέλεια συμμετρία” στο $\mathbb{R}^2$.
O(2) = {ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$} = {στροφές του $\mathbb{R}^2$} ∪ {ανακλάσεις του $\mathbb{R}^2$}

(ii). Έστω κανονικό πολύγωνο με n γωνίες. Το πολύγωνο αυτό μπορεί να εγγραφεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.
Έστω ότι υλοποιούμε κατάλληλη περιστροφή ή ανάκλαση ώστε να διατηρήσουμε τη συμμετρία του πολυγώνου. Τότε, με την ίδια περιστροφή ή ανάκλαση διατηρείται η ισομετρία του κύκλου.

Η διεδρική ομάδα (D_n, ο) αντιστοιχεί σε όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ που υλοποιούν τις συμμετρίες του n-γώνου.
Όμως, η (D, ο) αντιστοιχεί σε όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ που υλοποιούν τις συμμετρίες του κύκλου, δηλαδή όλες τις ισομετρίες.

Επομένως, $D_n \subset D$ και επειδή και τα 2 είναι ομάδες, προκύπτει $D_n \leq D$.

(iii). Η υποομάδα των στροφών της (D, ο), έστω $\Sigma \leq D$, είναι ισομορφική με τη ($\mathcal{U}$, ·).

Πράγματι, κάθε στοιχείο της Σ, δηλαδή κάθε περιστροφή του κύκλου, μπορεί να ορισθεί από μια γωνία, την γωνία περιστροφής w από τον άξονα x’x. Ονομάζουμε κάθε στοιχείο του Σ, ως r_w .

Είναι $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\} = \{e^{w\,i} \mid w \in [0, 2\pi)\}$

Απεικονίζω κάθε στοιχείο $r_w \in \Sigma$ στο $e^{w\,i} \in \mathcal{U}$ και αντίστροφα, δηλαδή ορίζω μια μονοσήμαντη απεικόνιση από το Σ στο $\mathcal{U}$.

Είναι $\forall\ r_a, r_b \in \Sigma$, ισχύει $r_a \circ r_b = r_{a+b}$, καθώς οι r_a και r_b μπορούν να νοηθούν ως διαδοχικές περιστροφές του κύκλου κατά γωνίες a,b

Είναι $\forall\ e^{a\,i}, e^{b\,i} \in \mathcal{U}$, ισχύει $e^{a\,i}\, e^{b\,i} = e^{(a+b)\,i}$

Συνεπώς, η διμελής σχέση της αντίστοιχης ομάδας, διατηρεί την απεικόνιση.
Επομένως, η (Σ, ο) είναι ισομορφική με την ($\mathcal{U}$, ·).

Άσκηση 10

(i). Έστω $(G, *)$ αντιμεταθετική ομάδα και υποσύνολο $T = \{\tau \in G \mid ord(\tau) < +\infty\}$

Θδο $T \leq G$.

1. **Το T είναι κλειστό ως προς την $*$.**
   Έστω $a, b \in T$.
   - Από τον ορισμό του T, τα a,b έχουν πεπερασμένη ομάδα, έστω r και d αντίστοιχα.
   - Είναι $a^r = e$, $b^d = e$.
   - Καθώς η G είναι αντιμεταθετική, ισχύει $(a * b)^{rd} = a^{rd}\, b^{rd} = e^d\, e^r = e$
   - Άρα το $a * b$ έχει πεπερασμένη τάξη, το πολύ ίση με rd.
   - Από τον ορισμό του T, προκύπτει $a * b \in T$.
2. **Το ταυτοτικό στοιχείο e ανήκει στην T.**
   Το e έχει τάξη $1 < +\infty$.
   Συνεπώς, από τον ορισμό της T, προκύπτει $e \in T$.
3. **Για κάθε $a \in T$, ισχύει $a' \in T$, όπου a, a' αντίστροφα.**
   Το a έχει πεπερασμένη τάξη, έστω r.
   Αν $a \equiv e$, τότε $r = 1$ και το $e' = e$ ανήκει στην T.
   Αν $a \not\equiv e$, τότε $r \geq 2$ και $a^r = e \Rightarrow a\, a^{r-1} = e \Rightarrow a' = a^{r-1}$.
   Το $a' = a^{r-1} \in T$, καθώς το $a \in T$ και το T είναι κλειστό ως προς την $*$.

Επομένως, $T \leq G$. Το T είναι η υποομάδα στρέψης της G.

(ii). $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$

Έστω $x = |x|\, e^{iw} \in \mathcal{U}$ (*εδώ προφανώς με "e" αναφερόμαστε στον αριθμό euler)

- $|x| = 1$ (και όχι στο ταυτοτικό στοιχείο*)
- $x = e^{iw}$

Το $(\mathcal{U}, \cdot)$ έχει ταυτοτικό στοιχείο το 1.

$T = \{\tau \in \mathcal{U} \mid ord(\tau) < +\infty\}$
Το $T \leq \mathcal{U}$ έχει ταυτοτικό στοιχείο το 1.
Έστω, $x \in T \leq \mathcal{U}$.

- Από τον ορισμό του T, το x έχει πεπερασμένη τάξη, έστω $r \in \mathbb{N}$.
- Είναι $x^r = 1 \Rightarrow e^{i w r} = 1 \Rightarrow i\, w\, r = 2k\pi i \Rightarrow w = 2\, k\, \pi / r$, $k \in \mathbb{N}$
- Οπότε, $x = e^{i\, 2k\pi / r}$.

Συνεπώς, $\mathbf{T = \{e^{i\, 2k\pi / r} \mid k, r \in \mathbb{N}\}}$

Άσκηση 11

(i). Έστω ένα τετράεδρο με ονοματισμένες τις κορυφές, έστω 1, 2, 3, 4.
Έστω αρχικά, έχουμε τη διάταξη (1 2 3 4).
Περιστρέφοντας το στερεό γύρω από το ύψος της κορυφής 1, προκύπτουν διαδοχικά οι διατάξεις:
(1 2 3 4), (1 4 2 3), (1 3 4 2) και έπειτα επιστρέφουμε στην αρχική (1 2 3 4).

Ας ανακλάσουμε τώρα το στερεό ως προς το επίπεδο που ορίζεται από το ύψος της κορυφής 1 και την ακμή (1,3). Προκύπτει η διάταξη (1 4 3 2). Περιστρέφοντας διαδοχικά το στερεό γύρω από το ύψος της κορυφής 1, προκύπτουν διαδοχικά οι διατάξεις:
(1 4 3 2), (1 2 4 3), (1 3 2 4) και έπειτα επιστρέφουμε στην αρχική (1 4 3 2)

Από τα παραπάνω, βλέπουμε πως έχουμε 6 ξεχωριστές συμμετρίες του τετραέδρου, όπου η κορυφή 1 βρίσκεται στην πρώτη θέση.

Στη συνέχεια, περιστρέφοντας κατάλληλα το τετράεδρο μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιαδήποτε κορυφή στην πρώτη θέση.
Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία και χωρίς βλάβη της γενικότητας, προκύπτουν 6 συμμετρίες όπου η κορυφή 2 βρίσκεται στην πρώτη θέση, 6 για την κορυφή 3 και 6 για την κορυφή 4.
Συνεπώς, έχουμε συνολικά 24 διαφορετικές συμμετρίες.

Επειδή οι δυνατές μεταθέσεις 4 στοιχείων είναι 4! = 24 (και δεν μπορούμε να έχουμε περισσότερες συμμετρίες από μεταθέσεις), προκύπτει πως η ομάδα των συμμετριών του τετραέδρου είναι η S_4.

(ii). Έστω ένας κύβος με ονοματισμένες τις έδρες του, έστω Α, Β, Γ, Α', Β', Γ', όπου μια έδρα Χ' βρίσκεται αντίθετα από τη Χ, και ονοματισμένες τις κορυφές του, έστω 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Έστω η έδρα Α έχει κορυφές τις 1, 2, 3, 4.

Για λόγους βολικότητας, όταν αναφέρομαι σε διάταξη XYZX'Y'Z', θα εννοώ τη διάταξη όπου η έδρα X θα είναι πάνω, η Y αριστερά, η Z μπροστά, κοκ για τις υπόλοιπες.
Όταν γράφω διάταξη YZY'Z', θα εννοώ τη διάταξη όπου η έδρα Y είναι αριστερά, η Z μπροστά κοκ για τις Y', Z', ενώ η πάνω και κάτω έδρες θα προκύπτουν από τα συμφραζόμενα.

Έστω πως έχουμε τη διάταξη ΑΒΓΑ'Β'Γ', άρα έχουμε την έδρα Α στην πάνω θέση.
Τότε, θα έχουμε ακριβώς μια επιλογή για το ποια έδρα θα είναι στην κάτω θέση. Θα είναι η Α'.
Με αυτά τα δεδομένα, θα έχουμε 4 αποδεκτές διατάξεις για τις υπόλοιπες έδρες,
έστω ΒΓΒ'Γ', Γ'ΒΓΒ', Β'Γ'ΒΓ, ΓΒ'Γ'Β (θυμίζω XYX'Y' σημαίνει X αριστερά, Y μπροστά, κοκ).
Η κάθε τέτοια διάταξη προκύπτει από μία περιστροφή γύρω από τον άξονα που περνάει από τα κέντρα των πλευρών Α, Α'.
Αυτές είναι όλες οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου για τις οποίες η πλευρά Α βρίσκεται πάνω.
Θέτοντας την καθεμία από τις 6 διαφορετικές έδρες πάνω και κάνοντας την αντίστοιχη διαδικασία, προκύπτουν 4 διατάξεις για την κάθε περίπτωση, οπότε έχουμε συνολικά $6 \cdot 4 = 24$ περιστροφικές συμμετρίες.

Στη συνέχεια ανακλάμε το στερεό ως προς το επίπεδο που περνάει από το κέντρο του κύβου και είναι παράλληλο στις Γ, Γ'. Τότε, η Α θα εξακολουθήσει να είναι πάνω και η Α' κάτω. Επίσης, οι Β, Β' δε θα αλλάξουν θέση, αλλά οι Γ, Γ' θα ανταλλάξουν θέσεις.
Τώρα, περιστρέφουμε και πάλι το στερεό γύρω από άξονα που περνάει από τα κέντρα των πλευρών Α, Α'.
Για τις υπόλοιπες έδρες, προκύπτουν οι διατάξεις:
ΒΓ'Β'Γ, ΓΒΓ'Β', Β'ΓΒΓ', Γ'Β'ΓΒ.

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε τα εξής.

- Οποιοσδήποτε ισομετρικός μετασχηματισμός, θα διατηρήσει τις έδρες αυτούσιες και, επιπλέον, οι αντίθετες έδρες θα εξακολουθούν να είναι αντίθετες και μετά το μετασχηματισμό.
- Κάθε περιστροφή θα διατηρεί τη σχετική θέση των εδρών. Κάθε ανάκλαση μπορεί να ανταλλάσσει μία (ή περισσότερες) πλευρές με την αντίθετή της.
- Έστω έχω τη διάταξη ΑΒΓΑ'Β'Γ' . Θυμίζω πως Α πάνω, Β αριστερά, Γ μπροστά.
  Έστω ανταλλάσσω τις Β, Β' και τις Γ, Γ'. Τότε, προκύπτει ΑΒ'Γ'Α'ΒΓ. Όμως, σε αυτή τη διάταξη μπορούμε να φτάσουμε εκκινώντας από την ΑΒΓΑ'Β'Γ' και περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα που περνάει από τα κέντρα των Α, Α' :
  ΑΒΓΑ'Β'Γ' → ΑΓ'ΒΑ'ΓΒ' → ΑΒ'Γ'Α'ΒΓ

Λοιπόν, προκύπτει πως αν με μία ή πολλαπλές ανακλάσεις ανταλλαχθεί άρτιο πλήθος εδρών, τότε θα μπορούσαμε να φτάσουμε στην ίδια τελική διάταξη απλά με περιστροφές.
Επίσης, αν με μία ή περισσότερες ανακλάσεις ανταλλαχθεί περιττό πλήθος εδρών, τότε θα μπορούσαμε να φτάσουμε στην τελική διάταξη με μία ανάκλαση και στη συνέχεια απλά περιστροφές.

Στη συνέχεια, θεωρούμε και πάλι την αρχική διάταξη ΑΒΓΑ'Β'Γ', άρα Α πάνω.
Ανακλάμε το στερεό ως προς το επίπεδο που περνάει από το κέντρο του κύβου και είναι παράλληλο στις Γ, Γ'. Τότε, η Α θα εξακολουθήσει να είναι πάνω και η Α' κάτω. Επίσης, οι Β, Β' δε θα αλλάξουν θέση, αλλά οι Γ, Γ' θα ανταλλάξουν θέσεις.
Τώρα, περιστρέφουμε και πάλι το στερεό γύρω από άξονα που περνάει από τα κέντρα των πλευρών Α, Α'.
Για τις υπόλοιπες έδρες, προκύπτουν οι διατάξεις:
ΒΓ'Β'Γ, ΓΒΓ'Β', Β'ΓΒΓ', Γ'Β'ΓΒ.

Θέτοντας την καθεμία από τις 6 διαφορετικές έδρες πάνω και κάνοντας την αντίστοιχη διαδικασία, προκύπτουν 4 διατάξεις για την κάθε περίπτωση, οπότε έχουμε συνολικά $6 \cdot 4 = 24$ ανακλαστικές συμμετρίες.

Επομένως, έχουμε συνολικά 48 συμμετρίες για τον κύβο.

Θεωρούμε την υποομάδα των συμμετριών (περιστροφικών και ανακλαστικών), όπου η έδρα Α βρίσκεται πάνω. Εφόσον, σε όλες αυτές η έδρα Α βρίσκεται πάνω και η έδρα Α' ορίζεται μονοσήμαντα από την Α, προκύπτει πως αυτή η υποομάδα είναι ισομορφική με την D_4, καθώς αρκούν οι μετασχηματισμοί στο τετράγωνο που αποτελεί την πάνω έδρα για να προκύψουν όλα τα στοιχεία της υποομάδας.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για κάθε επιλογή πάνω έδρας.
Δηλαδή η ομάδα των συμμετριών του κύβου αποτελείται από τις 6 προαναφερθείσες ξένες υποομάδες, όπου η καθεμία εξ αυτών είναι ισομορφική τη D_4, τη διεδρική ομάδα του τετραγώνου.

(iii). Κατ' αντιστοιχία με τον κύκλο στο $\mathbb{R}^2$, για τον οποίο μιλήσαμε στην άσκηση (9), η ομάδα συμμετριών της σφαίρας αποτελείται από όλες τις δυνατές μεταθέσεις που διατηρούν το σχήμα της σφαίρας.
Συγκεκριμένα, πρόκειται για όλες τις δυνατές μεταθέσεις που προκύπτουν αν περιστρέψουμε τον κύκλο κατά κάθε δυνατή γωνία γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνάει από το (0,0,0) και αν ανακλάσουμε τον κύκλο ως προς κάθε ευθεία και επίπεδο που διέρχεται από το (0,0,0).

Η ομάδα των συμμετριών της σφαίρας είναι ισομορφική με την O(3), δηλαδή την ομάδα των ισομετριών του $\mathbb{R}^3$, καθώς η σφαίρα διαθέτει "τέλεια συμμετρία" στο $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 12

Έστω (G, ·) ομάδα.

Το σύνολο Z(G) = {z ∊ G | zg = gz ∀ g ∊ G} λέγεται κέντρο της G.

(i). Θδο Z(G) ≤ G.

Καταρχάς, προφανώς το Z(G) είναι υποσύνολο του G.

1. **Το Z(G) είναι κλειστό ως προς την · .**
   Έστω a, b ∊ Z(G).
   - ∀ g ∊ G, ισχύει ag = ga
   - ∀ g ∊ G, ισχύει bg = gb
   - ∀ g ∊ G, ισχύει (ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab)

   Άρα, ab ∊ Z(G).
2. **Το ταυτοτικό στοιχείο e ανήκει στην Z(G).**
   Είναι ∀ g ∊ G, eg = ge = e .
   Οπότε e ∊ Z(G).
3. **Για κάθε a ∊ Z(G), ισχύει a’ ∊ Z(G) .**
   - ∀ g ∊ G, ισχύει ag = ga ⇒ a’ ag = a’ ga ⇒ g = a’ga
     ⇒ g a’ = a’ga a’ ⇒ ga’ = a’g

   άρα a’ ∊ Z(G)

(ii). Θα βρω το κέντρο της διεδρικής ομάδας D_4.

$D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$

(Θυμίζω πως με τον εναλλακτικό συμβολισμό: $\rho_0 \equiv e$, $\rho_1 \equiv r$, $\rho_2 \equiv r^2$, $\rho_3 \equiv r^3$)

Παρουσιάζουμε τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της D_4:

	ρ_0	**ρ_1**	**ρ_2**	**ρ_3**	**μ_1**	**μ_2**	**δ_1**	**δ_2**
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Από τον πίνακα πολλαπλασιασμού, παρατηρούμε πως η γραμμή ρ_0 είναι ίδια με τη στήλη ρ_0.
Επίσης, η γραμμή ρ_2 είναι ίδια με τη στήλη ρ_2 .

Συνεπώς, $\forall\ g \in D_4$, ισχύει $\rho_0\, g = g\, \rho_0$ και $\rho_2\, g = g\, \rho_2$.

Άρα $\rho_0,\ \rho_2 \in Z(D_4)$.

Σημειώνουμε, πως η σχέση ίσχυε προφανώς για το ρ_0 καθώς πρόκειται για το ταυτοτικό στοιχείο.

Είναι $\mu_1\, \rho_1 = \delta_2 \neq \delta_1 = \rho_1\, \mu_1$, άρα $\rho_1,\ \mu_1 \notin Z(D_4)$
$\mu_2\, \rho_3 = \delta_2 \neq \delta_1 = \rho_3\, \mu_2$, άρα $\rho_3,\ \mu_2 \notin Z(D_4)$
$\delta_1\, \rho_1 = \mu_1 \neq \mu_2 = \rho_1\, \delta_1$, άρα $\delta_1 \notin Z(D_4)$
$\delta_2\, \rho_1 = \mu_2 \neq \mu_1 = \rho_1\, \delta_2$, άρα $\delta_2 \notin Z(D_4)$

Τελικά, $Z(D_4) = \{\rho_0 , \rho_2\} = \{e, r^2\}$

Σημειώνω πως το να καταγράψω ολόκληρο τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της D_4 ήταν κατάτι υπερβολικό.
Στην πράξη αρκούσε απλά να δείξω όλες τις πράξεις για το ρ_2, να αναφέρω πως η σχέση ισχύει για το ταυτοτικό ρ_0 και να παρουσιάσω ένα αντιπαράδειγμα για το καθένα από τα υπόλοιπα.