

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Άσκηση 1. (α) Έστω η μετάθεση της S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & a & 3 & 7 & 4 & b \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν τα a, b ώστε η σ να είναι άρτια.

(β) Έστω η μετάθεση της S_7 :

$$\tau = (1, 2)(4, 5, 6, 3)(3, 7)(5, 6, 3, 4).$$

(i) Να αναλυθεί η τ σε γινόμενο ξένων κύκλων και σε γινόμενο αντιμεταθέσεων.

(ii) Να βρεθεί η τάξη των τ και τ^2 .

(iii) Να βρεθεί η τ^{-1} .

Άσκηση 2. Εφαρμόσατε το Θεώρημα Cayley για τις ομάδες \mathbb{Z}_8 , $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, D_4 και Q_8 (τα quaternions).

Άσκηση 3. (α) Να δοθεί ένα στοιχείο της S_9 τάξης 20.

(β) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει στοιχείο της S_9 τάξης 18.

Άσκηση 4. Έστω $n \geq 3$. Ναδειχθεί ότι η εναλλάσσουσα υποομάδα A_n των άρτιων μεταθέσεων της S_n παράγεται από τα ζεύγη αντιμεταθέσεων, δηλαδή από μεταθέσεις της μορφής $(i, j)(k, l)$ όπου $1 \leq i < j \leq n$ και $1 \leq k < l \leq n$. Στην συνέχεια ναδειχθεί ότι η A_n παράγεται από τους 3-κύκλους.

Άσκηση 5. (α) Έστω G, G' ομάδες με $|G| = 40$ και $|G'| = 28$ και έστω $f : G \rightarrow G'$ ομομορφισμός. Να βρεθούν οι δυνατές τάξεις για τον πυρήνα και για την εικόνα του f .

(β) Να κατασκευασθεί ένας μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα \mathbb{Z}_{40} στην ομάδα \mathbb{Z}_{28} .

Άσκηση 6. Βρείτε όλες τις μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες G τέτοιες ώστε $|G| \leq 30$ και $g^{12} = 1$ για κάθε $g \in G$.

Άσκηση 7. α) Δείξτε ότι ο 12 δεν διαιρεί τον αριθμό 7^{402} .

β) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 3^{111} δια 7.

Παράδοση: Τετάρτη 22 Ιανουαρίου 2020 (δεν θα δοθεί παράταση)

Σ. Λαμπροπούλου