ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

***Άσκηση* 1.** Έστω το σύνολο $S = \{a, b\}$.
(i) Πόσες διμελείς πράξεις μπορούν να ορισθούν στο S;
(ii) Πόσες από αυτές είναι προσεταιριστικές;
(iii) Πόσες από αυτές έχουν επιπλέον ουδέτερο στοιχείο;
(iv) Πόσες από αυτές εφοδιάζουν το S με δομή ομάδας;

***Άσκηση* 2.** Έστω το σύνολο $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ εφοδιασμένο με την πράξη: $a * b = a + b + ab$.
(i) Δείξτε ότι η $*$ ορίζει μία διμελή πράξη στο S και ότι $(S, *)$ αποτελεί ομάδα.
(ii) Βρείτε στην S τη λύση:
  (a) Της εξίσωσης $1 * x * 2 = 23$
  (b) Του συστήματος $\begin{cases} (x+1) * (y-1) = x * y \\ (x-2) * (y+2) = x * (y+1) \end{cases}$

***Άσκηση* 3.** Έστω το σύνολο G των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ και $ad - bc \neq 0$. Να αποδείξετε ότι το $(G, \cdot)$ με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό των πινάκων είναι ομάδα τάξης 6. Βρείτε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G. Με ποιά γνωστή ομάδα είναι η G ισομορφική;

***Άσκηση* 4.** Αν G είναι μια ομάδα τέτοια ώστε $(ab)^2 = a^2b^2$ για κάθε $a, b \in G$, να δείξετε ότι η G είναι αβελιανή.

***Άσκηση* 5.** Έστω $(G, *)$ ομάδα. Δείξτε ότι:
(i) Αν όλα τα στοιχεία της είναι τάξης 2, τότε η ομάδα είναι αντιμεταθετική.
(ii) Αν η G είναι μη τετριμμένη πεπερασμένη και άρτιας τάξης, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο της τάξης 2.

***Άσκηση* 6.** Έστω G ομάδα και έστω $a, b \in G$. Δείξτε ότι τα στοιχεία ab και ba έχουν την ίδια τάξη. (*Υπόδειξη*: $ba = a^{-1}(ab)a$.)

***Άσκηση* 7.** Έστω G ομάδα και έστω $a, b \in G$. Δείξτε ότι αν το στοιχείο a έχει τάξη 5 και $a^3b = ba^3$, τότε $ab = ba$.

***Άσκηση* 8.** Έστω το σύνολο $\mathbb{C}^* = \{a + bi \in \mathbb{C} : \ |a| + |b| \neq 0\}$ εφοδιασμένο με τον συνήθη πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών και έστω $\mathcal{U} = \{a + bi \in \mathbb{C}^* : \ a^2 + b^2 = 1\}$. Να αποδείξετε ότι το $\mathcal{U}$ είναι υποομάδα της $\mathbb{C}^*$.

Άσκηση 9. (i) Βρείτε την ομάδα $(D, \circ)$ των συμμετριών του κύκλου.
(ii) Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα $(D_n, \circ)$ είναι υποομάδα της $(D, \circ)$.
(iii) Θυμηθείτε ότι η υποομάδα των στροφών $(\Sigma_n, \circ)$ της $(D_n, \circ)$ είναι ισομορφική με την ομάδα $(\mathcal{U}_n, \cdot)$ και ότι $(\mathcal{U}_n, \cdot) \leq (\mathcal{U}, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Συσχετίστε την ομάδα $(D, \circ)$ με την ομάδα $(\mathcal{U}, \cdot)$.

Άσκηση 10. (i) Έστω $(G, *)$ αντιμεταθετική ομάδα. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$T = \{\tau \in G \mid \mathrm{ord}(\tau) < +\infty\}$$

είναι υποομάδα της G (η υποομάδα *στρέψης* της G).
(ii) Βρείτε την υποομάδα στρέψης της πολλαπλασιαστικής ομάδας του τριγωνομετρικού κύκλου $(\mathcal{U}, \cdot)$.

Άσκηση 11. Βρείτε την ομάδα των συμμετριών:
(i) Του τετραέδρου.
(ii) Του κύβου.
(iii) Της σφαίρας ακτίνας 1 στον $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 12. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα. Το σύνολο $Z(G) = \{z \in G \,|\, zg = gz \ \forall\ g \in G\}$ λέγεται *κέντρο* της G.
(i) Δείξτε ότι το $Z(G)$ είναι υποομάδα της G.
(ii) Βρείτε το κέντρο της διεδρικής ομάδας D_4.

Παράδοση: 20/11/2019

Οι διδάσκοντες