

3η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Πέμπτη 31 Μαΐου 2018 (σε μορφή pdf μέσω του mycourses). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλευέστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές.
 - i. Εάν το G είναι k -χρωματίσιμο και $\delta(G) > \frac{k-2}{k-1}n$ (όπου k ακέραιος με $k \geq 2$), να δειχθεί ότι το G δεν είναι $(k-1)$ -χρωματίσιμο (δηλαδή ισχύει $\chi(G) = k$). Ισχύει το αποτέλεσμα για όλα τα γραφήματα με $\delta(G) = \frac{k-2}{k-1}n$?
 - ii. Να δειχθεί ότι το G έχει χρωματικό αριθμό $\chi(G) \geq 3$ αν και μόνο αν για κάθε κορυφή v του G , υπάρχουν γειτονικές κορυφές u, w ($v \neq u \neq w$), έτσι ώστε $\text{dist}_G(v, u) = \text{dist}_G(v, w)$.
- (2) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G . Ορίζουμε ως **matching graph** $M(G)$ του G ένα γράφημα με κορυφές $V(M)$ τα μέγιστα ταιριάσματα του G , και δύο κορυφές M_1 και M_2 του $M(G)$ ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν τα δύο ταιριάσματα διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία ακμή ακριβώς. Να δειχθεί ότι το γράφημα C_{2k+1} , $k \geq 1$, είναι matching graph κάποιου γραφήματος G .
- (3) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και m ακμές.
 - i. Εάν για το G ισχύει ότι $m > \alpha'(G)\Delta(G)$, όπου $\alpha'(G)$ είναι το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων ακμών του G , τότε για τον χρωματικό δείκτη του G ισχύει $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
 - ii. Το G λέγεται **overfull** αν ισχύει $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$. Να δειχθεί ότι αν το G είναι overfull τότε έχει χρωματικό δείκτη $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- (4) Έστω δένδρο T με n κορυφές.
 - i. Εάν $n \geq 3$ και $e_1, e_2, e_3 \in E(\overline{T})$, να δείξετε ότι το γράφημα $G = T + e_1 + e_2 + e_3$ είναι επίπεδο.
 - ii. Εάν $n \geq 5$ και $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in E(\overline{T})$, να δείξετε ότι αν το γράφημα $G = T + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ δεν περιέχει υποδιαίρεση του $K_{3,3}$, τότε το G είναι επίπεδο.
- (5) i. Για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το γράφημα $\overline{C_n}$ είναι επίπεδο?

- ii. Για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το γράφημα C_n^2 δεν είναι επίπεδο, όπου C_n^2 είναι το τετράγωνο του κύκλου C_n ?
- (6) Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο k με $2 \leq k \leq 5$ υπάρχει επίπεδο γράφημα G με μέγιστο βαθμό $\Delta(G) = k$ και
- $\chi'(G) = \Delta(G)$
 - $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
-

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής “ΕπίθετοΌνομα” όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr, επιλέγοντας «Εργασίες» από το μενού «Εργαλεία».
