Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

## ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**<u>Έτος</u>**
2017-2018

**<u>Σπουδαστής</u>**
Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος (Α.Μ.: 03111097)

**<u>Εξάμηνο</u>**
10+

**<u>Ημερομηνία Υποβολής Αναφοράς</u>**
10 Μαΐου 2018

## Άσκηση 1

Έστω απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές τ.ω. για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u, v να ισχύει $d(u)+d(v) \geq n$.
Θα αποδείξουμε ότι το G είναι 2-συνεκτικό.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.

α. Το G είναι πλήρες.
Τότε το G είναι προφανώς 2-συνεκτικό.

β. Το G δεν είναι πλήρες.
Τότε για κάθε ζεύγος μη γειτνιάζοντων κορυφών, ισχύει $d(u)+d(v) \geq n$.
Θα αποδείξουμε πως για κάθε ζεύγος κορυφών $u,v \in V(G)$ υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια που συνδέουν τις u,v.

βi. Έστω u, v μη γειτνιάζοντες. Η καθεμία από τις κορυφές u, v μπορεί να έχει το πολύ n-2 ακμές προς τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος.
Όμως, $d(u)+d(v) \geq n$ (από υπόθεση) που σημαίνει πως οι u,v αθροιστικά έχουν τουλάχιστον n ακμές προς τις υπόλοιπες κορυφές.

Εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερώνα, προκύπτει πως οι u, v έχουν τουλάχιστον 2 κοινούς γείτονες, έστω $x,y \in V(G)$.
Συνεπώς, οι u, v συνδέονται με τα μονοπάτια P1=(u,x,v) και P2=(u,y,v).

βii. Έστω u,v γειτνιάζοντες. Τουλάχιστον μία εκ των κορυφών u,v έχει ένα ακόμη γείτονα.
(Διαφορετικά, αν d(u)=1 και d(v)=1 και $(u,v) \in E(G)$, δε θα υπήρχε μονοπάτι από τις κορυφές αυτές προς τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος. Όμως, τότε οι u,v δε γειτνιάζουν με τις υπόλοιπες κορυφές και αποδείξαμε ήδη πως υπάρχουν 2 μονοπάτια ανάμεσα σε οποιεσδήποτε μη γειτνιάζοντες κορυφές του G. Καταλήγουμε σε άτοπο.)

Έστω $x \in V(G)$ και $(u,x) \in E(G)$, δηλαδή η x είναι γείτονας της u.
Τότε, είτε $(v,x) \in E(G)$, δηλαδή η x είναι γείτονας της v, οπότε έχουμε τα μονοπάτια P1=(u,v) και P2=(u,x,v)
ή η x δε γειτνιάζει με τη v, οπότε υπάρχουν 2 μονοπάτια από τη x στη v (όπως αποδείξαμε παραπάνω) ένα εκ των οποίων σίγουρα δεν περνάει από τη u. Οπότε έχουμε τα μονοπάτια P1=(u,v) και P2=(u,x,...,v).

Βλέπουμε πως σε κάθε περίπτωση υπάρχουν 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα σε 2 τυχαίες κορυφές του G, άρα το G είναι 2-συνεκτικό.

## <u>Άσκηση 2</u>

Έστω υπερκύβος $Q_n$ με $n \geq 2$.
Ορίζουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων n διαστάσεων.
Τότε, κάθε κορυφή $u \in Q_n$ έχει συντεταγμένες $(u_1, u_2,...,u_n)$, όπου $u_i = 0$ ή $u_i = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Κάθε κορυφή u ενώνεται με μια κορυφή v ανν διαφέρουν σε ακριβώς μία από τις συντεταγμένες τους.
Προκύπτει πως για κάθε κορυφή $u \in Q_n$ , ισχύει $d(u) = n$, οπότε προφανώς $\delta(Q_n) = n$.
Επίσης, ισχύει πως $k(Q_n) \leq \lambda(Q_n) \leq \delta(Q_n)$ .
Θα αποδείξουμε πως για κάθε ζεύγος κορυφών $u,v \in V(Q_n)$ υπάρχουν n εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια που τις συνδέουν.

<u>Διακρίνω δύο περιπτώσεις:</u>

<u>α. Οι u, v δεν έχουν καμία κοινή συντεταγμένη.</u>

Δηλαδή $u = (u_1, u_2,...,u_n)$ και $v = (v_1, v_2,...,v_n) = (u_1', u_2',...,u_n')$

Τότε κατασκευάζουμε τα αντίστοιχα μονοπάτια ως εξής:
Για κάθε i, $1 \leq i \leq n$ και $0 \leq j \leq n-1$ δημιουργούμε μονοπάτι $P_i$ .
Σε κάθε j βήμα του $P_i$ συμπληρώνουμε τη συντεταγμένη $u_{i+j}$ .

Έτσι, στο πρώτο βήμα του $P_i$ συμπληρώνουμε τη συντεταγμένη $u_i$ , στο δεύτερο τη $u_{i+1}$ κοκ.
Οπότε προκύπτει $P_i$ : $(u_1 ,..., u_i',...,u_n)$, $(u_1 ,..., u_i', u_{i+1}',...,u_n)$,..., $(u_1', u_2',...,u_n')$.

Τα n μονοπάτια που προκύπτουν είναι εσωτερικώς διακεκριμένα.

<u>β. Οι u, v έχουν τουλάχιστον μία κοινή συντεταγμένη.</u>

<u>Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο μέγεθος n του υπερκύβου $Q_n$.</u>

<u>Βάση</u>
Για n=2, για τυχαίες κορυφές $u, v \in Q_2$ υπάρχουν 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια που τις συνδέουν. (Το αποδεικνύουμε εξαντλητικά)

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>
Έστω για $|Q_n| = n$, για τυχαίες κορυφές u,v υπάρχουν n εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια που τις συνδέουν.

<u>Επαγωγικό Βήμα</u>
Έστω δύο κορυφές $u,v \in V(Q_{n+1})$ οι οποίες έχουν τουλάχιστον μια κοινή συντεταγμένη (από υπόθεση).
Έστω $u_x$ μία κοινή τους συντεταγμένη.
Τότε ορίζουμε τα σύνολα W που περιέχει όλες τις κορυφές w του υπερκύβου με $w_x = u_x$
και Z που περιέχει όλες τις κορυφές z του υπερκύβου με $z_x = u_x'$ .

Προφανώς $u,v \in W$.
Για τις κορυφές του W, μπορούμε να αγνοήσουμε τη συντεταγμένη $w_x$ καθώς είναι κοινή για όλες τις κορυφές του συνόλου. Έτσι, προκύπτει πεδίο n συντεταγμένων, δηλαδή υπερκύβος τάξης n.

Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν n εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια από το u στο v.

Επιπλέον, δημιουργούμε ακόμη ένα μονοπάτι μέσω του συνόλου Z.
Συγκεκριμένα, θεωρούμε πρώτη εσωτερική κορυφή του μονοπατιού $P_Z$ την κορυφή z = ($u_1$ ,..., $u_x$',...,$u_n$) και τελευταία την z' = ($v_1$,..., $u_X$',...,$v_n$). (Το μονοπάτι διατηρεί σταθερή τη συντεταγμένη $z_x$ = $u_x$' ). Πάλι από επαγωγική υπόθεση υπάρχουν n εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια που συνδέουν τις κορυφές αυτές, αλλά μας αρκεί ένα.
Προφανώς, (u,z) $\in$ E($Q_{n+1}$) και (z',v) $\in$ E($Q_{n+1}$). Άρα, έχουμε το μονοπάτι $P_z$ : (u,z,...,z',v).

Οπότε, συνολικά ο υπερκύβος $Q_{n+1}$ έχει n+1 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

---*Τέλος επαγωγής*---

Από τα παραπάνω αποδεικνύεται πως για την τάξη n, ο υπερκύβος $Q_n$ είναι τουλάχιστον n-συνεκτικός, δηλαδή k($Q_n$) ≥ n.
Επίσης, δείξαμε στην αρχή πως k($Q_n$) ≤ λ($Q_n$) ≤ δ($Q_n$) = n.

Τελικά, k($Q_n$) = λ($Q_n$) = n για κάθε n ≥ 2.

## <u>**Άσκηση 3**</u>

<u>Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο.</u>

- Έστω ένα απλό 3-συνεκτικό γράφημα G, τέτοιο ώστε για κάποιο ζεύγος κορυφών u,v $\in$ V(G) να μην υπάρχουν δύο εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια από τη u στη v με διαφορετικό μήκος.

- Έστω $P_1$(u,v), $P_2$(u,v), $P_3$(u,v) 3 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια από τη u στη v.

- Τα $P_1$, $P_2$, $P_3$ έχουν όλα k ενδιάμεσες κορυφές από υπόθεση. Είναι k > 0 καθώς δε γίνεται σε απλό γράφημα τα u, v να συνδέονται άμεσα με 3 ακμές.

- Για οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών w,z $\in$ V(G) υπάρχει μονοπάτι από τη w στη z το οποίο δεν περνάει ούτε από την u, ούτε από τη v. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχουν 3 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια από την w στη z.

- Επιλέγουμε τυχαία κορυφή x $\in$ $P_1$ και φτιάχνουμε μονοπάτι P(x,y) προς τυχαία κορυφή y $\in$ $P_2$ τέτοιο ώστε να μην περνάει από τη u ή τη v.

- Ακολουθούμε τη διαδρομή από την x στην y μέσω του P(x,y).
Έστω w η τελευταία κορυφή στο $P_1$ πριν βρούμε την πρώτη κορυφή z $\in$ $P_2$ ή z $\in$ $P_3$ .
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε πως z $\in$ $P_2$ .
Τότε, υπάρχει μονοπάτι P(w,z) το οποίο δεν περιέχει στο ενδιάμεσο καμία κορυφή που να ανήκει στα $P_1$, $P_2$, $P_3$ (ούτε και τις κορυφές u,v). Έστω ότι το P(w,z) περιέχει c ενδιάμεσες κορυφές (οι οποίες ανήκουν μεν στο G, αλλά σε κανένα από τα $P_1$, $P_2$, $P_3$ ).

- Έστω ότι το μονοπάτι $P_1(u,w)$ περιέχει a ενδιάμεσες κορυφές. Τότε, το μονοπάτι $P_1(w,v)$ θα περιέχει k-a-1 ενδιάμεσες κορυφές (δε μετράμε την w καθώς θεωρείται άκρο στα μονοπάτια αυτής της πρότασης).

- Όμοια, έστω ότι το μονοπάτι $P_2(u,z)$ περιέχει b ενδιάμεσες κορυφές. Τότε, το μονοπάτι $P_2(z,v)$ θα περιέχει k-b-1 ενδιάμεσες κορυφές.

- Το μονοπάτι $P_4(u,v) = P_1(u,w) \circ P(w,z) \circ P_2(z,v)$ θα περιέχει (a) + (c) + (k - b - 1) + 2 = a+c+k-b+1 ενδιάμεσες κορυφές (το “+2” προέκυψε γιατί μετράμε και τις κορυφές w,z).

- Το μονοπάτι $P_4(u,v)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένο με το $P_3(u,v)$ συνεπώς, από υπόθεση, έχουν ίσο πλήθος ενδιάμεσων κορυφών, δηλαδή a+c+k-b+1 = k ⇔ a+c-b+1 = 0   (1).

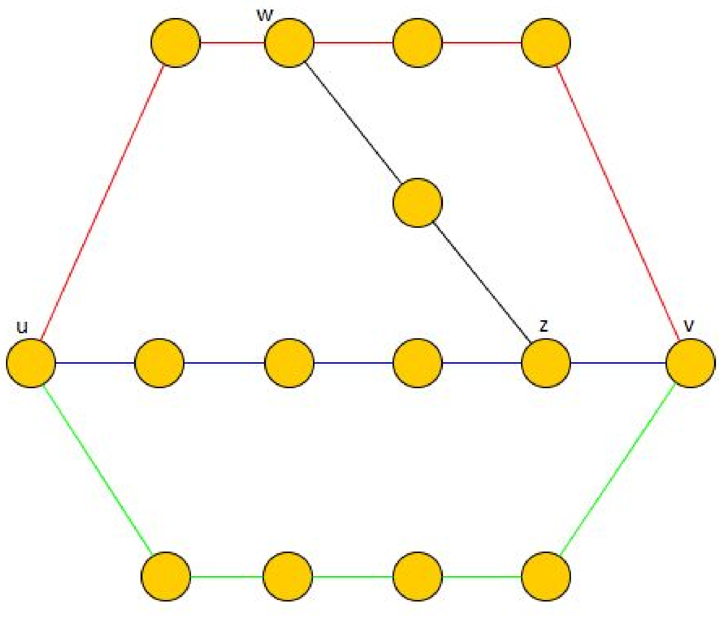
- Όμοια, το μονοπάτι $P_5(u,v) = P_2(u,z) \circ P(z,w) \circ P_1(w,v)$ θα περιέχει (b) + (c) + (k - a - 1) + 2 = b+c+k-a+1 ενδιάμεσες κορυφές.

- Το μονοπάτι $P_5(u,v)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένο με το $P_3(u,v)$ συνεπώς, από υπόθεση, έχουν ίσο πλήθος ενδιάμεσων κορυφών, δηλαδή b+c+k-a+1 = k ⇔ b+c-a+1= 0    (2).

- Αθροίζοντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει (a+c-b+1) + (b+c-a+1) = 0 ⇔ c + 1 = 0, που είναι αδύνατο καθώς c ≥ 0.

- Καταλήξαμε σε άτοπο.

Ένα παράδειγμα των παραπάνω είναι το κάτωθι γράφημα.




Το $P_1$ παρουσιάζεται με κόκκινο χρώμα, το $P_2$ με μπλε, το $P_3$ με πράσινο και το P(w,z) με μαύρο.
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι k = 4, a = 1, b = 3, c = 1.
Βλέπουμε πως το μονοπάτι $P_4(u,v) = P_1(u,w) \circ P(w,z) \circ P_2(z,v)$ έχει 4 ενδιάμεσες κορυφές, το $P_5(u,v) = P_2(u,z) \circ P(z,w) \circ P_1(w,v)$ έχει 8 ενδιάμεσες κορυφές και το $P_3$ 4 ενδιάμεσες κορυφές.

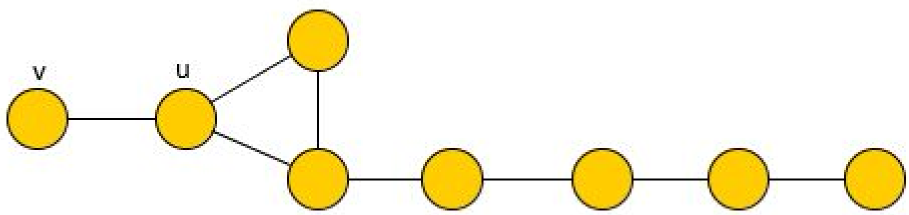
## Άσκηση 4

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο συνεκτικό γράφημα πληρώντας δύο προϋποθέσεις.
1. Το γράφημα G να περιέχει κύκλο (ώστε να μην είναι δέντρο).
2. Να υπάρχουν κορυφές u,v $\in$ V(G) με (u,v) $\in$ E(G) και d(v)=1, δηλαδή η κορυφή v να έχει μοναδικό γείτονα τη u.

Τότε για κάθε άλλη κορυφή w $\in$ V(G) θα ισχύει dist(v,w) = dist(u,w) + 1, καθώς κάθε μονοπάτι από τη v στην w θα περνάει αναγκαία από τη u. Αυτή η σχέση θα ισχύει και σε κάθε σκελετικό δέντρο του G καθώς αυτά παράγονται απλά διαγράφοντας ακμές κατάλληλα.
Συνεπώς, ακολουθώντας αυτούς τους κανόνες κάθε σκελετικό δέντρο του G που διατηρεί τις αποστάσεις του από την u, θα διατηρεί τις αποστάσεις του και από τη v.

Εάν θέλουμε συγκεκριμένη κατασκευή για γράφημα G με n κορυφές, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:
i. Φτιάχνουμε κύκλο με 3 κορυφές.
ii. Σε μία (u) εκ των κορυφών συνδέουμε μια επιπλέον κορυφή (v).
iii. Σε μία άλλη εκ των κορυφών του κύκλου συνδέουμε το ένα άκρο μονοπατιού $P_{n-4}$ .

Πχ για n=8, έχουμε το κάτωθι γράφημα

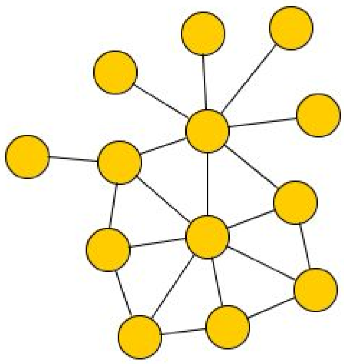
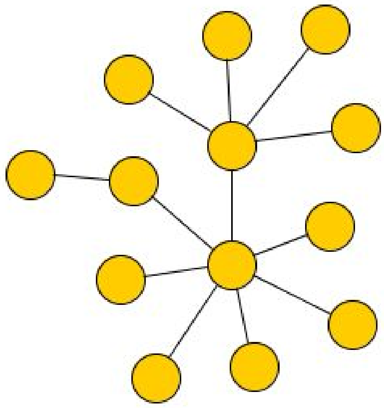
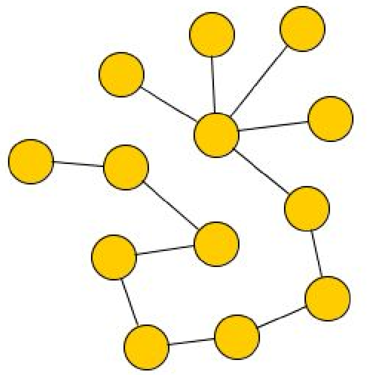



## Άσκηση 5

Κατασκευάζουμε γράφημα ακολουθώντας τα εξής βήματα.
i. Φτιάχνουμε κύκλο με t+2-r κορυφές. Σημειώνουμε πως πρέπει $t+2-r \geq 3 \Leftrightarrow t \geq r+1$. (Εάν τυχόν t=r, απλά φτιάχνουμε ένα δέντρο με t=r φύλλα).
ii. Προσθέτουμε κορυφή c και τη συνδέουμε με όλες τις κορυφές του κύκλου.
iii. Σε μία από τις κορυφές του κύκλου, συνδέουμε μία νέα κορυφή u.
iv. Σε μία άλλη από τις κορυφές του κύκλου συνδέουμε r-1 νέες κορυφές.

Το διάγραμμα που προκύπτει είναι το ζητούμενο.

Πχ για r=5, t=10

*Αρχικό γράφημα G* *Σκελετικό με t=10 φύλλα* *Σκελετικό με r=5 φύλλα*

<u>Σημειώσεις για την κατασκευή:</u>
- Το αρχικό γράφημα έχει r κορυφές με μοναδιαίο βαθμό, συνεπώς κάθε σκελετικό δένδρο θα έχει τουλάχιστον r φύλλα.
- Από γράφημα που κατασκευάστηκε όπως περιγράψαμε, δεν μπορεί να προκύψει σκελετικό δένδρο με περισσότερα από t φύλλα. Συγκεκριμένα, στο σκελετικό με το μέγιστο αριθμό φύλλων, όλες οι κορυφές εκτός από 3 είναι φύλλα. Οι δύο δεν μπορούν να γίνουν φύλλα γιατί στο αρχικό G συνδέονται με κορυφές μοναδιαίου βαθμού και η κορυφή c στο “κέντρο” του αρχικού κύκλου συνεχίζει να συνδέεται με τις άλλες του κύκλου προκειμένου να τους επιτρέψει να γίνουν φύλλα (διατηρώντας πάντα τη συνεκτικότητα).

## <u>Άσκηση 6</u>

Στο γράφημα G με n κορυφές υπάρχει περίπατος Euler από την κορυφή u στη v, οπότε ισχύει πως d(u) περιττός και d(v) περιττός.

Από υπόθεση $d(u) - d(v) \geq n - 2 \Leftrightarrow d(u) \geq n - 2 + d(v)$.

Όμως, όπως σε όλα τα απλά γραφήματα, ισχύει $d(u) \leq n -1$.
Άρα $n -1 \geq n-2 + d(v) \Leftrightarrow 1 \geq d(v)$ (και προφανώς $d(v) \geq 1$, αφού υπάρχει μονοπάτι προς τη v, δηλαδή δεν είναι απομονωμένη με $d(u) = 0$ ). Συνεπώς, $d(v) = 1$

Λοιπόν, $n -1 \geq d(u) \geq n - 2 + d(v) \Leftrightarrow n -1 \geq d(u) \geq n - 1 \Leftrightarrow d(u) = n - 1$

Όμως, όπως προαναφέραμε $d(u) = n -1$ περιττός, οπότε n άρτιος.

## <u>Άσκηση 7</u>

Καθ’ υπόδειξη του διδάσκοντα, ασχολούμαστε μόνο με συνεκτικά γραφήματα σε ασκήσεις με Euler περιηγήσεις, δηλαδή δεν επιτρέπουμε απομονωμένες κορυφές (κορυφές με μηδενικό βαθμό).

**7i.** ‘Εστω G γράφημα Euler με 2k+1 κορυφές.
Για καθεμία από τις 2k+1 κορυφή $u \in V(G)$ ισχύει πως $d(u) \leq 2k$ και $d(u)$ άρτιος.

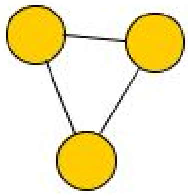
Προφανώς, υπάρχουν k αριθμοί i με $0 < i \leq 2k$, άρα k “επιλογές” για το βαθμό κάθε κορυφής και 2k+1 κορυφές.
Εφαρμόζοντας δύο φορές την αρχή του περιστερώνα βλέπουμε πως θα υπάρχει τουλάχιστον ένας βαθμός που θα επαναλαμβάνεται 3 φορές, δηλαδή το γράφημα θα περιέχει τουλάχιστον 3 κορυφές ίδιου βαθμού.

(Σημειώνουμε πως ακόμα και αν επιτρέψουμε απομονωμένες κορυφές, προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα, καθώς αν υπάρχει κορυφή u με $d(u) = 0$, δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή v με $d(v) = 2k$ )

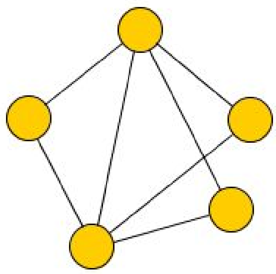
**7ii.** <u>Καταρχάς, θα αποδείξουμε την ύπαρξη του ζητούμενου γραφήματος G κατασκευάζοντας το επαγωγικά ως προς το $n = |V(G)|$.</u>

<u>Βάση</u>

Βάση 1: n = 3
γραφική ακολουθία s=(2,2,2)



Βάση 2: n = 5
γραφική ακολουθία s=(4,4,2,2,2)

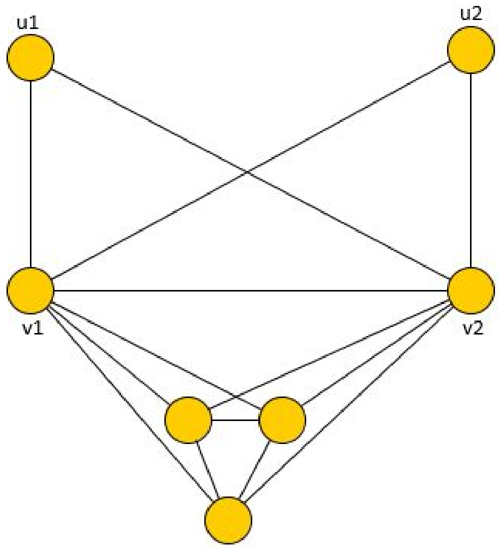


Εάν αγνοήσουμε γραφήματα με κορυφές μηδενικού βαθμού, τα παραπάνω γραφήματα είναι μοναδικά.

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>
Έστω πως για $n \geq 3$ υπάρχει γράφημα με τις ζητούμενες προδιαγραφές.

<u>Επαγωγικό Βήμα</u>
Θα κατασκευάσουμε τέτοιο γράφημα H με n+4 κορυφές.
i. Αρχικά, κατασκευάζουμε τέτοιο γράφημα G με n κορυφές (μπορούμε από επαγωγική υπόθεση).
ii. Στη συνέχεια προσθέτουμε 2 κορυφές $u_1$ , $u_2$ στο γράφημα, αλλά δεν τις συνδέουμε με καμία κορυφή (για την ώρα $d(u_1) = d(u_2) = 0$ )
iii. Τέλος προσθέτουμε 2 κορυφές $v_1$ , $v_2$ στο γράφημα και τις συνδέουμε μεταξύ τους καθώς και καθεμία από αυτές με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος (συμπεριλαβανομένων των $u_1$ , $u_2$ ).

Πχ για n=7 (με το γράφημα για n=3 να φαίνεται παραπάνω)




Το τελικό διάγραμμα θα έχει n+4 κορυφές.
Επίσης, κάθε κορυφή που υπήρχε στο G θα αποκτήσει 2 επιπλέον ακμές (λόγω της σύνδεσής της με τις $v_1$ , $v_2$ ) και
οι νέες κορυφές θα έχουν αντίστοιχους βαθμούς $d(u_1) = d(u_2) = 2$ , καθώς η καθεμία εκ των $u_1$ , $u_2$ συνδέεται μονάχα με τις $v_1$ , $v_2$
και $d(v_1) = d(v_2) = n + 3$ ,καθώς οι $v_1$ , $v_2$ συνδέθηκαν μεταξύ τους (1 ακμή) με τις κορυφές του G (n ακμές) και με τις $u_1$ , $u_2$ (2 ακμές).

Έτσι, εάν η γραφική ακολουθία του G είναι $s_G$ = (n-1, n-1,..., 2, 2) ,
το H θα έχει γραφική ακολουθία $s_H$ = (n+3, n+3, n+1, n+1,..., 4, 4, 2, 2)

Το H τηρεί τις προδιαγραφές.
Συνεπώς με αυτή τη διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιο γράφημα H με |V(H)| = 3 + 4k ή |V(H)| = 5 + 4k, δηλαδή η πρόταση ισχύει για όλα τα περιττά n ≥ 3

*---Τέλος επαγωγής---*

<u>Αποδείξαμε την ύπαρξη οπότε τώρα θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα</u>

Καταρχάς, από αρχή του περιστερώνα (όπως στο ερώτημα 7i ) προκύπτει πως σε κάθε τέτοιο γράφημα υπάρχουν ακριβώς 3 κορυφές ίδιου βαθμού και ακριβώς 2 κορυφές κάθε άλλου άρτιου βαθμού (εκτός του μηδενικού).

Θα καταστρώσουμε ένα είδος “ανάστροφης” επαγωγής.

Τα γραφήματα για n=3 και n=5 είναι μοναδικά (προκύπτει με εξαντλητικό έλεγχο).

Έστω γράφημα H με περιττό n = |V(H)| > 5 .

Το H θα περιέχει υποχρεωτικά δύο κορυφές $v_1$ , $v_2$ βαθμού n-1 και δύο κορυφές $u_1$ , $u_2$ βαθμού 2.
Οι κορυφές $v_1$ , $v_2$ συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες (και μεταξύ τους) και οι κορυφές $u_1$ , $u_2$ συνδέονται μονάχα με τις $v_1$ , $v_2$ .

Έτσι. λόγω γενικότητας οι κορυφές αυτές θα είναι ίδιες σε όλα τα γραφήματα τάξης n (Εννοώντας πως σε δύο γραφήματα τάξης n, οι κορυφές $v_1$ , $v_2$ που συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες είναι ισοδύναμες και οι κορυφές $u_1$ , $u_2$ συνδέονται μόνο με ισοδύναμες κορυφές, άρα είναι και αυτές ισοδύναμες, καθώς δε θα υπάρχει κανένα διακριτικό στοιχείο των κορυφών αυτών ανάμεσα στα δύο γραφήματα).

Διαγράφοντας αυτές τις 4 κορυφές, προκύπτει γράφημα G με n-4 κορυφές.
Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε το n=3 ή n=5, όπου όπως έχουμε ήδη πει, προκύπτει μοναδικό γράφημα.

Ουσιαστικά, δείξαμε πως η κατασκευή που περιγράφηκε νωρίτερα είναι μοναδική και άρα το αντίστοιχο γράφημα που προκύπτει κάθε φορά είναι μοναδικό (εννοώντας προφανώς ισόμορφο με όλα τα υπόλοιπα ίδιας τάξης).

## Άσκηση 8

**8i.** Έστω συνεκτικό γράφημα G με τις προδιαγραφές που δίνονται.
Θεωρούμε το $S \subset G$ που περιέχει τις k κορυφές που έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 2. Προφανώς, είναι $|S| = k$
Τότε όμως, διαγράφοντας τις προαναφερθείσες κορυφές απομένουν μόνο k+1 κορυφές που δε γειτνιάζουν μεταξύ τους ανά δύο.

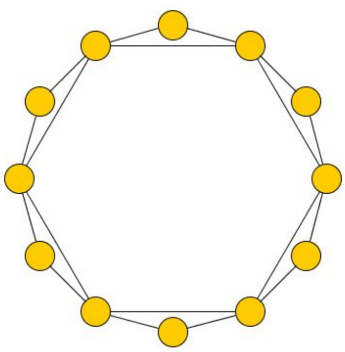
Οπότε $cc(G\text{-}S) = k+1 > k = |S|$ , άρα το G δεν είναι Hamiltonian.

**8ii.** Κατασκευάζουμε γράφημα G με n=2k κορυφές και τις υπόλοιπες προδιαγραφές που δίνονται ως εξής.

> i. Φτιάχνουμε κύκλο με 2k κορυφές, έστω $C_{2k} = (u_1,u_2, \dots u_{2k})$.
> ii. Συνδέουμε κάθε κορυφή με άρτια ετικέτα με την επόμενη κορυφή με άρτια ετικέτα. Δηλαδή, για κάθε i με $1\leq i\leq k$, $(u_{2i},u_{2i+2}) \in E(G)$. (Ουσιαστικά μας ενδιαφέρει να προσθέσουμε ακμές σε κάθε δεύτερη κορυφή, δε μας νοιάζει ο ακριβής τρόπος).

Έτσι προκύπτει γράφημα με k κορυφές που έχουν βαθμό 2 και δε γειτνιάζουν ανά δύο μεταξύ τους και k κορυφές με βαθμό 4.
Από κατασκευή (από το βήμα i), υπάρχει κύκλος $C_{2k} = (u_1,u_2, \dots u_{2k})$ που περνάει από όλες τις κορυφές, άρα το G είναι προφανώς Hamiltonian.

Πχ για n=12 έχουμε το κάτωθι



## <u>**Άσκηση 9**</u>

Έστω G διμερές με σύνολα διαμέρισης U, W τ.ω. $|U|=|W|=k \geq 2$ και για κάθε $u \in V(G)$ ισχύει $d(u) > k/2$ .

<u>Θα αποδείξουμε πως το G είναι Hamiltonian με απαγωγή σε άτοπο.</u>
(Η απόδειξη είναι ίδιας λογικής με την απόδειξη του θεωρήματος 7.2 [Dirac-1952] )

- Έστω G ένα μεγιστοτικό μη-Hamiltonian διμερές γράφημα με τις παραπάνω προδιαγραφές.

- Το G δεν είναι πλήρες διμερές. (Αν ήταν πλήρες διμερές θα υπήρχε σίγουρα κύκλος που περνάει από όλες τις κορυφές εφόσον $|U|=|W|=k \geq 2$ )

- Έστω $u \in U$ και $w \in W$ δύο μη γειτονικές κορυφές του G.

- Το $G \cup (u,w)$ είναι Hamiltonian γιατί το G είναι μεγιστοτικό διμερές μη-Hamiltonian. Θυμίζουμε πως επειδή υπάρχει διμερές γράφημα που είναι Hamiltonian (το πλήρες διμερές), θα υπάρχει σίγουρα μεγιστοτικό μη-Hamiltonian γράφημα που διατηρεί την ιδιότητα του να είναι διμερές.

- Επειδή το G είναι μη-Hamiltonian, κάθε Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u,w)$ περιέχει την ακμή $(u,w)$.

- Έστω $(u = u_1 , w_1 , u_2 , w_2 ,..., u_k , w_k = w)$ ένας Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u,w)$.

- Τότε το G έχει Hamiltonian μονοπάτι P: $( u_1 , w_1 , u_2 , w_2 ,..., u_k , w_k )$ με άκρα τις κορυφές u και w .

- Όλοι οι γείτονες των u και w ανήκουν στο P. (Πρόκειται για μονοπάτι Hamilton, οπότε όλες οι κορυφές ανήκουν στο P)

- Υπάρχει κορυφή $w_i$ $i \geq 2$ τ.ω. $(u , w_i ) \in E(G)$ και $(u_i , w )$. Θυμίζουμε πως η $w_i$ είναι η επόμενη της $u_i$ στο μονοπάτι P.
Εάν δεν υπήρχε, τότε για κάθε γείτονα $w_i$ του u θα υπήρχε μια διακριτή κορυφή $u_i$ με την οποία ο w δεν θα ήταν άμεσα συνδεδεμένος. Όμως $d(u) > k/2$ (από υπόθεση), οπότε
ο w έχει βαθμό $d(w) \leq k - d(u) < k -k/2 = k/2$ .
Άτοπο, καθώς από υπόθεση $d(w) > k/2$

- Συνεπώς, ο κύκλος $(u = u_1 , w_1 ,..., u_i , w_k , u_k , w_{k-1} ,...,u_{i+1} w_i , u_1)$ είναι ένας Hamiltonian κύκλος του G.

- Καταλήγουμε σε άτοπο καθώς το G είναι μη-Hamiltonian από υπόθεση.

## Άσκηση 10

**10i.** Έστω δένδρο T με $n \geq 4$ κορυφές και T' το συμπληρωματικό του γράφημα. Έστω ότι το T περιέχει μια κορυφή με βαθμό 2.

Διακρίνουμε δύο περπτώσεις:

α. n περιττός:
Έστω u ένα φύλλο του T (κάθε δένδρο περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα), δηλαδή $d_T(u) = 1$.
Τότε $d_{T'}(u) = (n - 1) - 1 = n - 2$ και επειδή n περιττός, n-2 περιττός.
Οπότε το T' περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή με περιττό βαθμό, άρα δεν είναι Eulerian.

β. n άρτιος:
Έστω $v \in V(T)$ με $d(v) = 2$ (υπάρχει τέτοια κορυφή από υπόθεση).
Τότε $d_{T'}(v) = (n - 1) - 2 = n - 3$ και επειδή n άρτιος, n-3 περιττός.
Οπότε το T' περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή με περιττό βαθμό, άρα δεν είναι Eulerian.

Τελικά, σε κάθε περιπτωση, το T' δεν είναι γράφημα Euler.

**10ii.** Έστω δένδρο T με $n \geq 4$ κορυφές και T' το συμπληρωματικό του γράφημα. Έστω ότι το T δεν είναι το $K_{1,n-1}$ .

Θα αποδείξουμε πως το T' περιέχει Hamilton μονοπάτι με επαγωγή στο n

Βάση
Για n=4, το μόνο δένδρο που δεν είναι το $K_{1,3}$ είναι το $P_4$. Το $P_4$ είναι αυτοσυμπληρωματικό, δηλαδή $P_4' = P_4$. Προφανώς το $P_4$ έχει μονοπάτι Hamilton.

Επαγωγική υπόθεση
Έστω πως για $n \geq 4$, για κάθε δένδρο T τάξης n το οποίο δεν είναι το $K_{1,n-1}$ , το T' περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Επαγωγικό Βήμα
Έστω δένδρο H τάξης n+1 το οποίο δεν είναι το $K_{1,n}$ .

Επιλέγουμε φύλλο u του H τέτοιο ώστε αφαιρώντας το να μην προκύπτει το $K_{1,n-1}$ .
Εάν αφαιρώντας το u προκύπτει το $K_{1,n-1}$ , αυτό σημαίνει πως στο γράφημα H, όλα τα φύλλα συνδέονται άμεσα σε κοινό γονιό εκτός από το u (αν συνδέονταν όλα συμπεριλαμβανομένου του u σε κοινό γονιό, το H θα ήταν το $K_{1,n}$ , το οποίο δεν επιτρέπεται από υπόθεση).
Σε αυτή την περίπτωση, απλώς επιλέγουμε άλλο φύλλο.

Αφαιρούμε το φύλλο u και προκύπτει δένδρο T τάξης n το οποίο δεν ειναι το $K_{1,n-1}$ , συνεπώς από επαγωγική υπόθεση το T' περιέχει μονοπάτι Hamilton $P_T$ με άκρα έστω w,v.

Στο H' υπάρχει το ίδιο μονοπάτι $P_T$ : (w,...,v).
Στο H' η κορυφή u θα έχει βαθμό $d_{H'}(u) = ((n+1) - 1) - d_H(u) = n - 1$ .
Επειδή το H' έχει n+1 κορυφές (άρα n κορυφές αν δε μετρήσουμε το ίδιο το u) και το u έχει n-1 ακμές, από αρχή του περιστερώνα, το u θα γειτνιάζει σίγουρα με ένα εκ των w,v.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε πως το u γειτνιάζει με το w, οπότε το H' θα περιέχει Hamilton μονοπάτι το (u,w,...,v).