

1η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Παρασκευή 30 Μαρτίου 2018 (σε μορφή pdf μέσω του mycourses). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλευέστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών είναι γραφικές. Στην περίπτωση γραφικής ακολουθίας βαθμών να δοθεί απλό γράφημα που την υλοποιεί.
 - i. 4, 4, 3, 2, 1
 - ii. 4, 3, 2, 1
 - iii. 7, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2
 - iv. 7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1
 - v. 7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1
 - vi. Εάν x ακέραιος με $0 \leq x \leq 5$, για ποιες τιμές του x η ακολουθία 5, 5, 3, 2, 1, x είναι γραφική;
- (2) i. Έστω ένα πλέγμα $R_{p,q}$, με $p, q \geq 1$.
 - i.α'. Δείξτε ότι το $R_{p,q}$ είναι διμερές γράφημα.
 - i.β'. Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή για το k έτσι ώστε το $R_{p,q}$ να περιέχει το C_k ως επαγόμενο υπογράφημα.
 ii. Έστω απλά γραφήματα G και H . Με $G * H$ συμβολίζουμε την σύνδεση των G, H και με $G \times H$ το γινόμενο τους. Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε
 - ii.α'. το γράφημα $G * H$ να είναι διμερές.
 - ii.β'. το γράφημα $G \times H$ να είναι διμερές.
- (3) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G το οποίο δεν είναι κανονικό (δηλαδή υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με διαφορετικό βαθμό). Αν το G έχει n κορυφές και $m = rn/2$ ακμές, όπου r ακέραιος με $1 \leq r \leq n - 2$, να δειχθεί ότι $\Delta(G) - \delta(G) \geq 2$.
- (4) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και $m > \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ακμές. Να δειχθεί ότι το G περιέχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο.
- (5) Κατασκευάστε ένα απλό συνεκτικό κυβικό γράφημα (3-κανονικό) με 10 κορυφές το οποίο να περιέχει (τουλάχιστον) ένα k -κύκλο για κάθε k με $3 \leq k \leq 10$. Μπορεί ένα τέτοιο γράφημα να έχει ακριβώς έναν k -κύκλο για κάθε k με $3 \leq k \leq 10$;
- (6) Ένα απλό συνεκτικό γράφημα G λέγεται **αυτοσυμπληρωματικό** αν το G είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του γράφημα \bar{G} . Για παράδειγμα το P_4 και το C_5 είναι αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα.
 - i. Έστω G_1 και G_2 δύο αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα, όπου το G_2 έχει άρτιο πλήθος κορυφών n_2 . Έστω G το γράφημα που προκύπτει από τα G_1 και G_2 ενώνοντας κάθε κορυφή του G_2 με βαθμό λιγότερο από $n_2/2$ με κάθε κορυφή του G_1 . Δείξτε ότι το G είναι αυτοσυμπληρωματικό.
 - ii. Δείξτε ότι υπάρχει κανονικό αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 5^n κορυφές για κάθε $n \geq 1$.
 - iii. Δείξτε ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με n κορυφές για κάθε $n \equiv 0 \pmod{4}$ ή $n \equiv 1 \pmod{4}$.

- (7) Ένα **τουρνουά (tournament)** είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές $(u, v), (v, u)$ ανήκει στο E .
- Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο n υπάρχει τουρνουά με n κορυφές στο οποίο όλοι οι προς-τα-έξω βαθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και όλοι οι προς- τα-μέσα βαθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.
 - Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με n κορυφές υπάρχει μια **κορυφή-βασίλεις**, δηλαδή μια κορυφή u από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.
 - Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ακέραιο θετικό αριθμό $n \geq 5$ υπάρχει τουρνουά με n κορυφές έτσι ώστε κάθε κορυφή να είναι βασίλεις.
- (8) Έστω θετικοί ακέραιοι a, b με $a \leq b \leq 2a$. Δείξτε ότι υπάρχει απλό συνεκτικό γράφημα G με $rad(G) = a$ και $diam(G) = b$.
- (9) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G . Ναδειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
- Αν $u, v, w \in V(G)$ με $(u, v) \notin E(G)$ και $(v, w) \notin E(G)$, τότε $(u, w) \notin E(G)$.
 - Το G είναι το πλήρες k -μερές γράφημα για κάποιο $k \geq 2$.
- (10) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και $k(G) \geq 1$. Ναδειχθεί ότι $n \geq k(G)(diam(G)-1)+2$.
-

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής "ΕπίθετοΌνομα" όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr, επιλέγοντας «Εργασίες» από το μενού «Εργαλεία».
