Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΤΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Έτος
2017-2018

Σπουδαστής
Παπασκαρλάτος Αλέξανδρος (Α.Μ.: 03111097)

Εξάμηνο
10+

Ημερομηνία Υποβολής Αναφοράς
31 Μαΐου 2018

Άσκηση 1

i) Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο.
-Έστω πως το δοθέν G με $\delta(G) > n(k-2)/(k-1)$ είναι (k-1)-χρωματίσιμο.
-Τότε το G είναι (k-1)-μερές.
-Έστω U το πολυπληθέστερο μέρος του G (δηλαδή το μέρος με το μέγιστο αριθμό κορυφών).
-Τότε $|U| \geq n/(k-1)$, άρα $|G-U| \leq n - n/(k-1)$
-Έστω $u \in U$, τότε το $d(u) \leq n - n/(k-1)$, καθώς το u δεν ενώνεται με ακμές με άλλες κορυφές του U.
-Όμως, $\delta(G) \leq d(u) \leq n-n/(k-1) = n(k-2)/(k-1)$.
-Καταλήξαμε σε άτοπο καθώς $\delta(G) > n(k-2)/(k-1)$ από υπόθεση.

Το αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά για τα γραφήματα με $\delta(G) = n(k-2)/(k-1)$.
Πχ το παρακάτω γράφημα με k=3, n=4, $\delta(G)=2 = 4(3-2)/(3-1)$ είναι 2-χρωματίσιμο.

ii)**<u>=></u>**
Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και $\chi(G) \geq 3$.
Θα αποδείξω πως για κάθε $v \in G$, υπάρχουν γειτονικές κορυφές u,w έτσι ώστε dist(v,u) = dist(v,w).

Θα αποδείξω το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο.
-Έστω κορυφή $v \in G$ τέτοια ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές u,w με dist(v,u) = dist(v,w).
-Τότε για κάθε ζεύγος γειτονικών κορυφών u,w στο G ισχύει dist(u,v) = dist(w,v) ± 1. (Αν υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως dist(u,v)>dist(w,v), δεν μπορεί dist(u,v)>dist(w,v)+1 καθώς με P_w το ελάχιστο μονοπάτι από το w στο v, το uP_w θα καταλήγει σε dist(u,v)=dist(w,v)+1 .)
-Σε αυτό το σημείο, θα αποδείξω με απαγωγή σε άτοπο πως το G δεν περιέχει περιττούς κύκλους.
Έστω κύκλος περιττού μήκους 2k+1, $k \in N$, στο G: $a_1 a_2 ... a_{2k+1}$.
Θα ισχύει $dist(a_1,v) \neq dist(a_2,v)$, $dist(a_2,v) \neq dist(a_3,v)$, …, $dist(a_{2k+1},v) \neq dist(a_1,v)$ καθώς (a_1,a_2), (a_2,a_3), …, (a_{2k+1},a_1) ζεύγη γειτονικών κορυφών στο G.
Όμως τότε $dist(a_i,v)=dist(a_{i+2p},v) + 2m$, για κάθε $0 \leq p \leq k$ και για κάποιο ακέραιο m.
Άρα, $dist(a_1 v)=dist(a_{2k+1},v)+2m$ για κάποιο ακέραιο m.
Αδύνατο, καθώς (a_{2k+1},a_1) ζεύγος γειτονικών κορυφών (ως αρχή και τέλος κύκλου), οπότε $dist(a_1,v) = dist(a_{2k+1},v) \pm 1$.
Συνεπώς, δεν υπάρχει περιττός κύκλος στο G.
-Επειδή δεν υπάρχει περιττός κύκλος στο G, το G είναι διμερές, οπότε $\chi(G) \leq 2$. (Στην πραγματικότητα $\chi(G) = 2$, καθώς το G έχει τουλάχιστον μία ακμή.)
-Καταλήξαμε σε άτοπο καθώς $\chi(G) \geq 3$ από υπόθεση.

<=

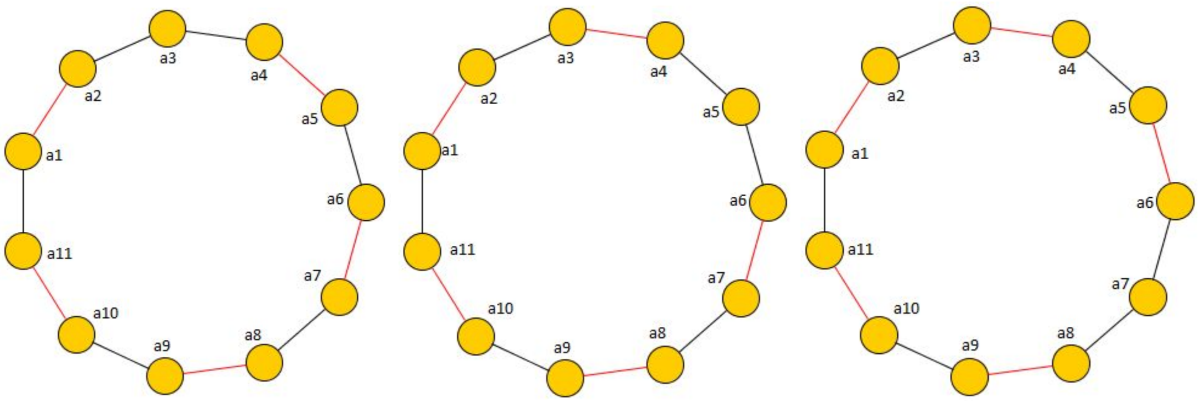
Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και για κάθε $v \in G$ υπάρχουν γειτονικές κορυφές u,w τέτοιες ώστε dist(v,u)=dist(v,w).
Θα αποδείξω πως $\chi(G) \geq 3$.

Επειδή το G έχει τουλάχιστον μία ακμή, προφανώς $\chi(G) \geq 2$.
Λοιπόν, προκειμένου να αποδείξω πως $\chi(G) \geq 3$, αρκεί να αποδείξω πως $\chi(G) \neq 2$.
Θα το αποδείξω με απαγωγή σε άτοπο.
-Έστω το δοθέν G έχει $\chi(G) = 2$.
-Τότε το G είναι 2-χρωματίσιμο, άρα είναι διμερές.
-Έστω κορυφή $v \in G$ και γειτονικές κορυφές u,w τέτοιες ώστε dist(v,u) = dist(v,w) (υπάρχουν από υπόθεση).
-Επειδή το G διμερές, οι u,w ως γειτονικές θα ανήκουν σε διαφορετικά μέρη.
Έστω $u \in U$, $w \in W$.
-Επειδή το G διμερές, η κορυφή v θα ανήκει σε ένα από τα δύο μέρη του G (U ή W).
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε πως $v \in U$.
-Τότε, όμως dist(u,v) = 2k και dist(w,v) = 2k ± 1 , για κάποιο $k \in N$.
-Συνεπώς, dist(v,u) ≠ dist(v,w) . Δηλαδή δεν υπάρχει ζεύγος γειτονικών κορυφών u,w τέτοιες ώστε dist(v,u) = dist(v,w).
-Καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς υπάρχουν τέτοιες κορυφές από υπόθεση.

Άσκηση 2

Θα αποδείξουμε πως το γράφημα $G \equiv C_{2k+1}$, είναι matching graph M(G) του εαυτού του, δηλαδή του C_{2k+1} .
Κάθε μέγιστο ταίριασμα του G έχει μ(G)=k. (Προκύπτει εναλλάσσοντας ακμές στον περιττό κύκλο.)
Κάθε μέγιστο ταίριασμα του G αφήνει ακριβώς μια κορυφή ακόρεστη. Μπορούμε να διακρίνουμε το κάθε ταίριασμα ανάλογα με το ποια κορυφή αφήνει ακόρεστη.
Ονομάζουμε διαδοχικά τις κορυφές $a_1,a_2,\ldots,a_{2k+1}$ στον περιττό κύκλο.
Ονομάζουμε μοναδικό μέγιστο ταίριασμα M_i το μέγιστο ταίριασμα που αφήνει M_i-ακόρεστη την κορυφή a_i .

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η ονομασία (και η διαδικασία που θα περιγραφεί παρακάτω), παραθέτουμε ένα παράδειγμα.
Πχ για 2k+1=11, τα μέγιστα ταιριάσματα M_3 , M_5 , M_7 είναι τα κάτωθι.



Επειδή υπάρχουν 2k+1 κορυφές (άρα 2k+1 ενδεχόμενες ακόρεστες κορυφές), προκύπτει $1 \le i \le 2k+1$, δηλαδή 2k+1 μέγιστα ταιριάσματα.

Έστω ένα M_i . Το M_i διαφέρει κατά μία ακμή από τα M_{i+2} και M_{i-2} (και μόνο με αυτά). (Φυσικά, όσον αφορά το i θεωρούμε πως κινούμαστε κυκλικά στο διάστημα 1,2k+1 με την έννοια πως για $i = 2k+1 +1 \rightarrow i = 1$.).
Πράγματι, σε ένα M_i εναλλάσσονται οι ακμές του κύκλου (πχ $(a_1,a_2) \in M_i$, $(a_2,a_3) \notin M_i$,...) εκτός από ένα σημείο $(a_{i-1},a_i) \notin M_i$ και $(a_i,a_{i+1}) \notin M_i$.
(Σημείωση: για το M_i ισχύει $(a_{i-2},a_{i-1}) \in M_i$ και $(a_{i+1},a_{i+2}) \in M_i$.)
Συνεπώς, προκειμένου να έχουμε ταίριασμα που να διαφέρει μονάχα σε μια ακμή με το M_i , παίρνουμε:
είτε το M_{i-2} , όπου $(a_{i-2},a_{i-1}) \notin M_{i-2}$ και $(a_{i-1},a_i) \in M_{i-2}$ και κατά τα άλλα όμοιο με το M_i ,
ή το M_{i+2} , όπου $(a_i,a_{i+1}) \in M_{i+2}$ και $(a_{i+1},a_{i+2}) \notin M_{i+2}$ και κατά τα άλλα όμοιο με το M_i .

(Ως παράδειγμα παρουσιάζεται το παραπάνω σχήμα για i-2=3, i=5, i+2=7.)

Συνεπώς, όσον αφορά το matching graph προκύπτει ο κύκλος:
$M_1M_3...M_{2k+1}M_2M_4...M_{2k}M_1$ δηλαδή ένας περιττός κύκλος μήκους 2k+1.

<u>Άσκηση 3</u>

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και m ακμές.

i. Ισχύει $m > \alpha'(G)\, \Delta(G) \Leftrightarrow \Delta(G) < m/\alpha'(G)$.

-Έστω το G νόμιμα k-χρωματίσιμο ως προς τις ακμές.
Έστω ένας τέτοιος k-χρωματισμός $C = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$
Προφανώς οι ακμές της κάθε τέτοιας ομάδας E_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
-Συνεπώς, για κάθε $1 \le i \le k$, $|E_i| \le \alpha'(G)$. Άρα $|E_1| + |E_2| + \ldots + |E_\kappa| \le k\, \alpha'(G)$.
-Επίσης, προφανώς $|E_1| + |E_2| + \ldots + |E_\kappa| = m$.
Επομένως, $m \le k\, \alpha'(G) \Leftrightarrow k \ge m/\alpha'(G) > \Delta(G)$ από υπόθεση.
-Άρα υποχρεωτικά $k > \Delta(G)$ και επειδή σε κάθε γράφημα $\chi'(G)=\Delta(G)$ ή $\chi'(G)=\Delta(G)+1$, προκύπτει $\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

ii. Ισχύει $m > [n/2]\, \Delta(G)$.

-Έστω $\alpha'(G)$ το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων ακμών του G.
Κάθε τέτοια ακμή κορεννύει δύο κορυφές προσπίπτοντας σε αυτές και οι κορυφές είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους (αφού οι ακμές είναι ανεξάρτητες).
Προκύπτει $\alpha'(G) \le [n/2] \Leftrightarrow \alpha'(G)\, \Delta(G) \le [n/2]\, \Delta(G) < m$ από υπόθεση.
-Συνεπώς, από το προηγούμενο ερώτημα (3i), προκύπτει πως $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Άσκηση 4

Σύμφωνα με το θεώρημα Kuratowski ένα γράφημα G είναι επίπεδο ανν κανένα υπογράφημά του δεν είναι ομοιομορφικό με το K_5 ή το $K_{3,3}$.
Ένα υπογράφημα προκύπτει με διαγραφή ακμών ή κορυφών του G.
Επίσης, δύο γραφήματα είναι ομοιομορφικά ανν το ένα μπορεί να παραχθεί από το άλλο με υποδιαιρέσεις ακμών ή συμπτύξεις κορυφών.

Έστω ότι το γράφημα G έχει k κύκλους. Παρατηρούμε πως με καμία από τις παραπάνω διεργασίες, δεν μπορούν να παραχθούν επιπλέον κύκλοι, δηλαδή δεν είναι εφικτό να αυξηθεί το πλήθος των κύκλων.
Επομένως, προκειμένου να αποδείξουμε πως ένα γράφημα G είναι επίπεδο αρκεί να αποδείξουμε πως το G περιέχει λιγότερους κύκλους από το K_5 και το $K_{3,3}$.

Από συνδυαστική, προκύπτει πως το K_5 έχει συνολικά 37 κύκλους (10 3-κύκλοι, 15 4-κύκλοι και 12 5-κύκλοι).
Επίσης, αντίστοιχα το $K_{3,3}$ έχει 15 κύκλους (9 4-κύκλοι και 6 6-κύκλοι).

Καταλήξαμε σε θεώρημα: Εάν ένα γράφημα G περιέχει το πολύ 14 κύκλους (όχι απαραίτητα ανεξάρτητους, απλά διαφορετικούς), τότε το G είναι επίπεδο.

i. Έστω δένδρο T με $n \geq 3$ κορυφές και $e_1,e_2,e_3 \in E(T')$.

Προσθέτοντας k ακμές σε ένα ακυκλικό γράφημα, μπορούν να προκύψουν μέχρι 2^k-1 κύκλοι.

Το $G = T + e_1 + e_2 + e_3$ έχει το πολύ 7 κύκλους καθώς το T ως δένδρο είναι ακυκλικό. Συνεπώς το G είναι επίπεδο.

ii. Έστω δένδρο T με $n \geq 5$ κορυφές και $e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 \in E(T')$.
Επίσης, έστω ότι το $G = T + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ δεν περιέχει υποδιαίρεση του $K_{3,3}$.

Προκειμένου το G να μην είναι επίπεδο θα πρέπει να περιέχει υποδιαίρεση του K_5.
Επομένως, προκειμένου να αποδείξουμε πως το G είναι επίπεδο, αρκεί να αποδείξουμε πως το G δεν έχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_5.

Αντίστοιχα με πριν, προκύπτει πως το G έχει το πολύ 31 κύκλους, άρα δεν περιέχει υποδιαίρεση του K_5.
Συνεπώς, το G είναι επίπεδο.

Άσκηση 5

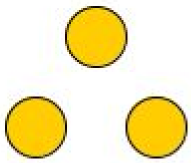
i. Το C_n’ έχει n κορυφές (όσες και το C_n) και $m = n(n-3)/2$ ακμές (καθώς το C_n έχει n ακμές).

Για να είναι ένα γράφημα επίπεδο, αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη είναι να ισχύει:
$m \leq 3n - 6$
$\Leftrightarrow (n^2-3n)/2 \leq 3n - 6 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 12 \leq 0$, κι επειδή $n \in N$, πρέπει $n \leq 7$.
Συνεπώς, για $n > 7$ το C_n’ δεν είναι επίπεδο.

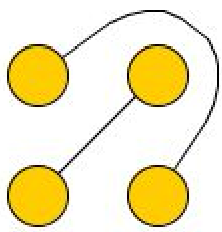
Μένει να ελέγξουμε για n = 3,...,7

Σημείωση: Τα C_3’, C_4’, C_5’ είναι σίγουρα επίπεδα ως γνήσια υπογραφήματα του K_5. Πάντως τα σχεδιάζουμε για λόγους πληρότητας.

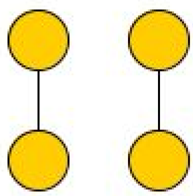
Το C_3’ είναι επίπεδο:



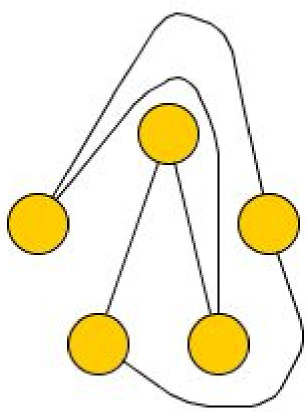
Το C_4’ είναι επίπεδο:



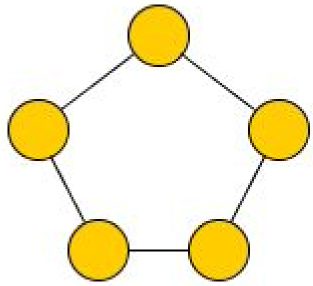
≡



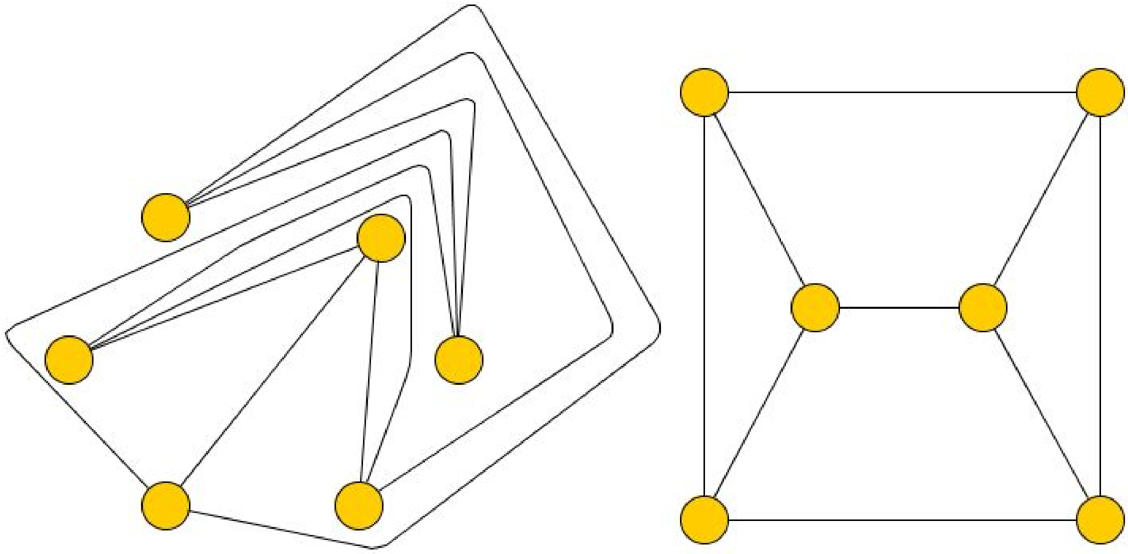
Το C_5’ είναι επίπεδο:



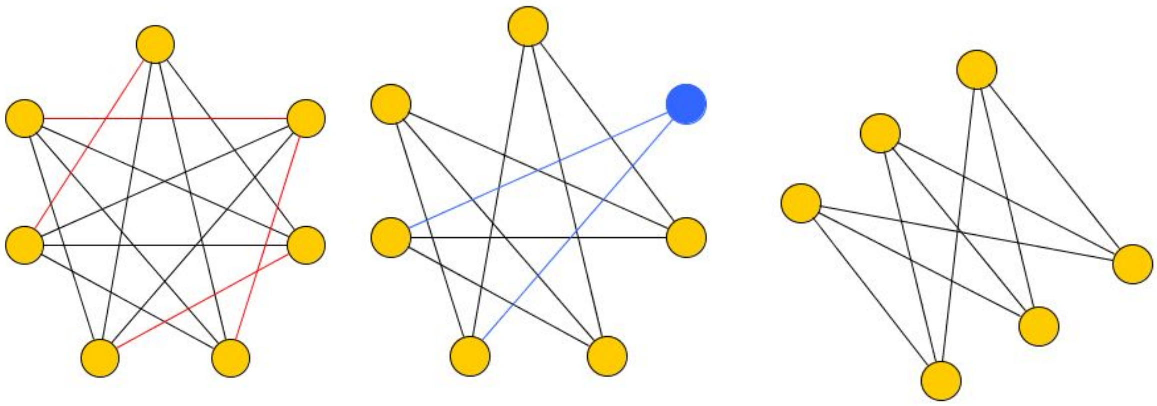
≡



Το C_6' είναι επίπεδο:



Το C_7' δεν είναι επίπεδο. Πράγματι μπορούμε με διαγραφή 4 ακμών και σύμπτυξη μιας κορυφής να φτάσουμε στο $K_{3,3}$, οπότε από θεώρημα Kuratowski, το C_7' δεν είναι επίπεδο. Η διαδικασία παρουσιάζεται παρακάτω.



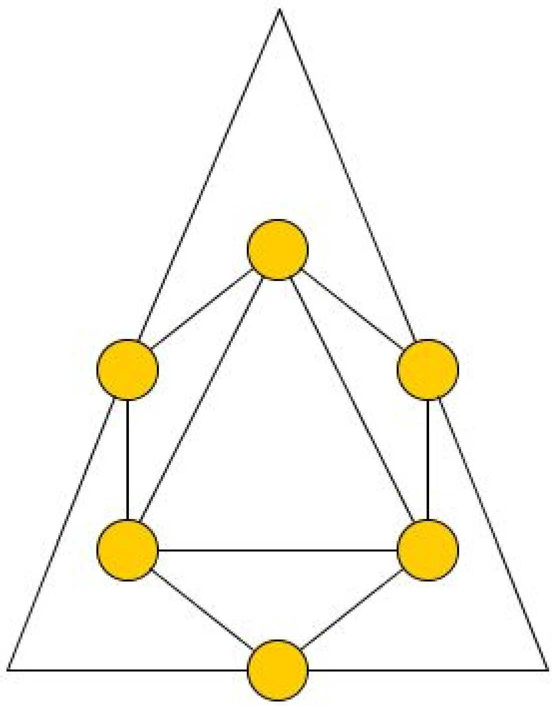
Τελικά, προκύπτει πως C_n' είναι επίπεδο ανν $3 \leq n \leq 6$.

ii. Το τετράγωνο H ενός γραφήματος G προκύπτει εάν στο εν λόγω γράφημα G ενώσουμε με ακμές όλα τα ζεύγη κορυφών u,v ϵ G, όπου $dist_G(u,v) \leq 2$

Θα κάνω διερεύνηση ανάλογα με την αρτιότητα του πλήθους n των κορυφών στο C_n^2

Θα αποδείξω πως κάθε C_{2k}^2 , k ≥ 2 είναι επίπεδο δείχνοντας μέθοδο κατασκευής έτσι ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται.
Έστω πως θέλουμε να σχεδιάσουμε το C_{2k}^2 , k ≥ 2 (όπου το k σταθερό και δεδομένο).
1. Καταρχάς σχηματίζουμε τον κύκλο C_{2k} : $a_1a_2...a_{2k}$.
2. Στη συνέχεια, για κάθε 0 ≤ i ≤ k ενώνουμε το a_{2i+1} με το a_{2i+3} σχεδιάζοντας την εκάστοτε ακμή εξωτερικά του αρχικού κύκλου C_{2k}.
(Φυσικά, όσον αφορά το i θεωρούμε πως κινούμαστε κυκλικά στο διάστημα 1,2k με την έννοια πως για i = 2k+1 → i = 1 .)
Με αυτόν τον τρόπο, κάθε κορυφή με περιττό δείκτη έχει εκπληρωθεί ως προς τις ακμές.
3. Έπειτα, για κάθε 1 ≤ i ≤ k ενώνουμε το a_{2i} με το a_{2i+2} σχεδιάζοντας την εκάστοτε ακμή εσωτερικά του αρχικού κύκλου C_{2k} .
Με αυτόν τον τρόπο, κάθε κορυφή με άρτιο δείκτη έχει εκπληρωθεί ως προς τις ακμές.

Πχ για n = 2k = 6, έχουμε το παρακάτω γράφημα C_6^2:



Για n = 3, έχουμε το $C_3^2 \equiv C_3$, το οποίο είναι επίπεδο.
Θα αποδείξω επαγωγικά πως κάθε C_{2k+1}^2, k≥ 2 (δηλαδή 2k+1≥5) δεν είναι επίπεδο.

<u>Βάση</u>
Το $C_5^2 \equiv K_5$ δεν είναι επίπεδο.

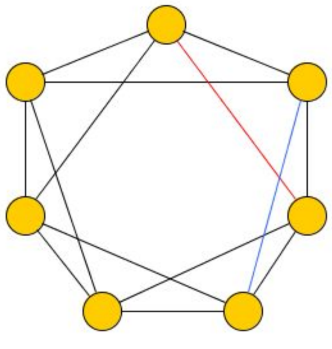
<u>Επαγωγική υπόθεση</u>
Έστω πως το C_{2k+1}^2, k≥ 2 δεν είναι επίπεδο.

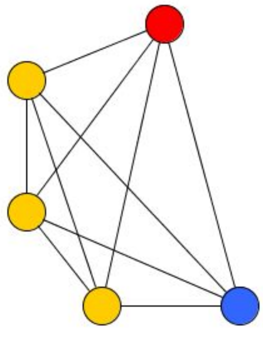
<u>Επαγωγικό βήμα</u>
Εξετάζουμε το C_{2k+3}^2 . Έστω 4 διαδοχικές κορυφές a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} στον αρχικό κύκλο C_{2k+3} , άρα και στο C_{2k+3}^2
.
Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Wagner.
Το θεώρημα Wagner δηλώνει πως ένα γράφημα G είναι επίπεδο ανν δεν έχει ως υποσυστολή το K_5 ή το $K_{3,3}$.
Δηλαδή, ένα γράφημα είναι επίπεδο ανν δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο K_5 ή το $K_{3,3}$ με διαγραφές ακμών, διαγραφές κορυφών και συμπτύξεις ακμών.
Αντιλαμβάνομαι πως το θεώρημα Wagner είναι εκτός ύλης και το παρακάτω ίσως θεωρηθεί άκυρο, αλλά δεν έβρισκα άλλο τρόπο να το αποδείξω.

Τότε, συμπτύσσοντας τις ακμές (a_i , a_{i+2}) και (a_{i+1} , a_{i+3}) και ονομάζοντας τις προκύπτουσες νέες κορυφές u και v αντίστοιχα, προκύπτει γράφημα C_{2k+1} .
Πράγματι, μειώθηκε το πλήθος των κορυφών κατά 2 και στο κομμάτι όπου κάναμε αλλαγές έγιναν τα εξής:
-Οι a_i , a_{i+2} αντικαταστάθηκαν από την κορυφή u και οι a_{i+1},a_{i+3} από τη v.
-Η u ενώνεται με τις a_{i-1} , a_{i-2} λόγω της πρότερης κορυφής a_i που είχε τέτοιες ακμές και επίσης ενώνεται με τις v, a_{i+4} λόγω της a_{i+2}.
-Αντίστοιχα η v ενώνεται με τις a_{i-1} , u λόγω της a_{i+1} και επίσης με τις a_{i+4} , a_{i+5} , λόγω της a_{i+3} .

Όμως, από επαγωγική υπόθεση το C_{2k+1}^2 δεν είναι επίπεδο.
Συνεπώς, από θεώρημα Wagner, το C_{2k+3}^2 δεν είναι επίπεδο.

Πχ για n=2k+1=7, έχουμε το παρακάτω γράφημα C_7^2 και την εύρεση της υποσυστολής C_5^2 του C_7^2 όπως περιγράφηκε στο επαγωγικό βήμα.





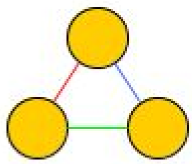
Τελικά, το C_n^2 είναι επίπεδο ανν n = 3 ή n = 2k, k ≥ 2.

Άσκηση 6

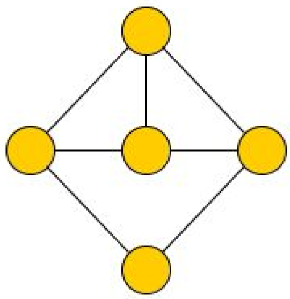
i. Για κάθε $2 \leq k \leq 5$, το γράφημα $K_{1,k}$ είναι επίπεδο ως δένδρο και επιπλέον διμερές οπότε $\chi'(G) = \Delta(G) = k$. Εξάλλου είναι εύκολο να δειχθεί και σχεδιαστικά.

ii. Για κάθε ενδεχόμενο k θα σχεδιάσουμε αντίστοιχο γράφημα
με $\Delta(G) = k$ και $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$

k=2, έχουμε το γράφημα $G \equiv C_3$ με $\Delta(G) = 2$, $\chi'(G) = 3$

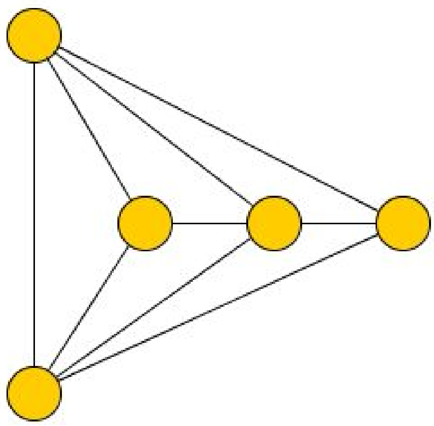


k=3, έχουμε το κάτωθι γράφημα G με n = 5 κορυφές, m = 7 ακμές και $\Delta(G) = 3$.



Είναι $7 > [5/2]*3 = 6 \Leftrightarrow m > [n/2]\ \Delta(G)$, άρα το G είναι overfull και από το ερώτημα (3) προκύπτει πως $\chi'(G) = \Delta(G) + 1 = 4$

k=4, έχουμε το κάτωθι γράφημα G με n = 5 κορυφές, m = 9 ακμές και $\Delta(G) = 4$.



Είναι $9 > [5/2]*4 = 8 \Leftrightarrow m > [n/2]\ \Delta(G)$, άρα το G είναι overfull και από το ερώτημα (3) προκύπτει πως $\chi'(G) = \Delta(G) +1 = 5$