

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Πέμπτη 10 Μαΐου 2018 (σε μορφή pdf μέσω του mycourses). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλευέστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Έστω απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές, τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u, v να ισχύει $d(u) + d(v) \geq n$. Ναδειχθεί ότι το G είναι 2-συνεκτικό.
- (2) Ναδειχθεί ότι για τον υπερκύβο Q_n ισχύει $k(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ για κάθε $n \geq 2$.
- (3) Έστω απλό 3-συνεκτικό γράφημα G . Ναδειχθεί ότι για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(G)$ υπάρχουν δύο ξένα (ως προς τις κορυφές και τις ακμές) μονοπάτια από την u στην v με διαφορετικό μήκος.
- (4) Έστω γράφημα G και κορυφή $u \in V(G)$. Λέμε ότι ένα σκελετικό δένδρο T του G **διατηρεί τις αποστάσεις από την κορυφή u** αν ισχύει $d_T(u, v) = d_G(u, v)$ για κάθε κορυφή $v \in V(G)$ (όπου $d(u, v)$ είναι η απόσταση μεταξύ των κορυφών u και v). Για κάθε $n \geq 4$ να βρείτε συνεκτικό γράφημα G , το οποίο δεν είναι δένδρο, και για το οποίο υπάρχουν κορυφές u, v έτσι ώστε κάθε σκελετικό δένδρο του G που διατηρεί τις αποστάσεις από την κορυφή u να διατηρεί τις αποστάσεις και από την κορυφή v .
- (5) Έστω συνεκτικό γράφημα G και σκελετικό δένδρο T του G . Με $\ell(T)$ συμβολίζουμε το πλήθος των φύλλων του T (δηλαδή των κορυφών βαθμού 1). Δείξτε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων r και t με $2 \leq r \leq t$ υπάρχει συνεκτικό γράφημα G έτσι ώστε

$$\min \{ \ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G \} = r \text{ και}$$

$$\max \{ \ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G \} = t$$
- (6) Δείξτε ότι αν ένα γράφημα με $n \geq 6$ κορυφές περιέχει περίπατο Euler από την κορυφή u στην κορυφή v έτσι ώστε $d(u) - d(v) \geq n - 2$, τότε το n είναι άρτιος αριθμός.
- (7) i. Κάθε γράφημα Euler με περιττό πλήθος κορυφών περιέχει τουλάχιστον τρεις κορυφές ίδιου βαθμού.

- ii. Δείξτε ότι για κάθε περιττό ακέραιο αριθμό $n \geq 3$ υπάρχει ακριβώς ένα γράφημα Euler με n κορυφές στο οποίο: υπάρχουν ακριβώς τρεις κορυφές ίδιου βαθμού, και το πολύ δύο κορυφές κάθε άλλου βαθμού.
- (8) i. Έστω συνεκτικό γράφημα G με $n = 2k + 1$ κορυφές ($k \geq 2$), εκ των οποίων $k + 1$ κορυφές έχουν βαθμό 2 και δεν είναι γειτονικές ανά δύο μεταξύ τους, και οι υπόλοιπες k κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 3. Δείξτε ότι το G δεν είναι Hamiltonian.
- ii. Κατασκευάστε Hamiltonian γράφημα G με $n = 2k$ κορυφές για κάθε $k \geq 2$, στο οποίο k κορυφές έχουν βαθμό 2 και δεν είναι γειτονικές ανά δύο μεταξύ τους, και οι υπόλοιπες k κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 3.
- (9) Έστω G διμερές γράφημα με σύνολα διαμέρισης U και W έτσι ώστε $|U| = |W| = k \geq 2$. Δείξτε ότι αν $d(v) > k/2$ για κάθε κορυφή u του G , τότε το G είναι Hamiltonian.
- (10) Έστω δένδρο T με $n \geq 4$ κορυφές. Με \overline{T} συμβολίζουμε το συμπληρωματικό του γράφημα. Να δειχθεί ότι
- αν υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 2 στο T , τότε το \overline{T} δεν είναι γράφημα Euler.
 - αν το T δεν είναι το $K_{1,n-1}$, τότε το \overline{T} περιέχει Hamilton μονοπάτι.

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής "ΕπίθετοΌνομα" όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr, επιλέγοντας «Εργασίες» από το μενού «Εργαλεία».