第四章 Lie导数、Killing场和超曲面

现在需要研究在坐标变换下定义在流形上（而非仅仅某点）的各种几何结构的变换规律。为便于研究，将再同一流形上的坐标变换从另一个角度看作是在等度规流形之间的特殊微分同胚映射——等度规映射，并从这个观点出发研究几何结构在此微分同胚下的变换，由此引出了Lie导数、Killing场等重要的特殊概念。
超曲面是流形上又一个特殊且常用的几何结构。

§4.1 流形间的映射

2018年6月10日　3:37

设流形M、N（维数可以不同），映射ϕ：$M \to N$是光滑映射，则可以自然诱导出一系列如下映射：

拉回（pull back）映射：ϕ^*：$\mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_M$定义为：$\left(\phi^* f\right)\big|_p \coloneqq f\big|_{\phi(p)}$，$\forall f \in \mathcal{F}_N$，$p \in M$，即$\phi^* f = f \circ \phi$。
有性质：

1. 线性性：$\phi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\, \phi^*(f) + \beta\, \phi^*(g)$，$\forall f, g \in \mathcal{F}_N$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$；
2. $\phi^*(fg) = \phi^*(f)\, \phi^*(g)$，$\forall f, g \in \mathcal{F}_N$。

推前（push forward）映射：ϕ_*：$V_p \to V_{\phi(p)}$定义为：$\left(\phi_* v\right)(f) \coloneqq v\left(\phi^* f\right)$，$\forall f \in \mathcal{F}_N$，$p \in M$，$v \in V_p$。
这样的映射结果满足矢量的定义。推前映射也被称为切映射。
有性质：线性性：$\phi_*\left(\alpha v^a + \beta v^b\right) = \alpha\, \phi_*\left(v^b\right) + \beta\, \phi_*\left(v^b\right)$，$\forall v^a, v^b \in V_p$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$；

设$C(t)$是M中的曲线，T^a是曲线在$C(t_0)$点的切矢，则$\phi_*(T^a) \in V_{\phi(C(t_0))}$是曲线$\phi(C(t))$在$\phi\left(C(t_0)\right)$点的切矢。

拉回映射可按如下方式延拓至ϕ^*： $\mathcal{F}_N(0,l) \to \mathcal{F}_M(0,l)$：
$\left(\phi^* T\right)_{a_1 \cdots a_l}\Big|_p \left(v_1\right)^{a_1} \cdots \left(v_l\right)^{a_l} \coloneqq T_{a_1 \cdots a_l}\Big|_{\phi(p)} \left(\phi_* v_1\right)^{a_1} \cdots \left(\phi_* v_l\right)^{a_l}$，$\forall T_{a_1 \cdots a_l} \in \mathcal{F}_N(0,l)$，$p \in M$，$v_1 \cdots v_l \in V_p$。

推前映射可按如下方式延拓至ϕ_*： $\mathcal{T}_{V_p}(k,0) \to \mathcal{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$：
$\left(\phi_* T\right)^{a_1 \cdots a_k} \left(\omega^1\right)_{a_1} \cdots \left(\omega^k\right)_{a_k} \coloneqq T^{a_1 \cdots a_k} \left(\phi^* \omega^1\right)_{a_1} \left(\phi^* \omega^k\right)_{a_k}$，$\forall T^{a_1 \cdots a_k} \in \mathcal{F}_{V_p}(k,0)$，$p \in M$，$\omega^1 \cdots \omega^k \in V^*_{\phi(p)}$；
其中$\left(\phi^* \omega\right)_a$定义为：$\left(\phi^* \omega\right)_a v^a = \omega_a \left(\phi_* v\right)^a$，$\forall v^a \in V_p$。

注意到ϕ^*是作用于流形上的张量场的，能将场映射为同型场；而ϕ_*只是对于M中的任一点p定义的，只能将一点的张量映射为其像点的同型张量。
由于只要求ϕ是光滑映射而非一一到上，则其逆映射不保证一一到上甚至存在，因此不能将ϕ_*延拓为场变为场的映射。

若要求ϕ为微分同胚，即其正逆双映射均存在且光滑且一一到上，则ϕ_*可以延拓为$\mathcal{F}_M(k,0)$到$\mathcal{F}_N(k,0)$的映射。进一步，由于ϕ^{-1}存在且光滑，因此其拉回映射${\phi^{-1}}^*$把$\mathcal{F}_M(0,l)$映到$\mathcal{F}_M(0,l)$，这可以看作是ϕ的某种“推前映射”。
即此时分别将拉回映射和推前映射推广为：

ϕ^*： $\mathcal{F}_N(k,l) \to \mathcal{F}_M(k,l)$：
$(\phi^* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\Big|_p (v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}$
$= T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\Big|_{\phi(p)} (\phi_* v_1)^{b_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l}(\phi_* \omega^1)_{a_1}(\phi_* \omega^k)_{a_k}$
$\forall T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \in \mathcal{F}_N(k,l)$，$p\in M$，$v_1\cdots v_l \in V_p$，$\omega^1\cdots\omega^k \in V_p^*$。

ϕ_*： $\mathcal{F}_M(k,l) \to \mathcal{F}_N(k,l)$：
$(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\Big|_q (v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}$
$= T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\Big|_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* v_1)^{b_1}\cdots(\phi^* v_l)^{a_l}(\phi^* \omega^1)_{a_1}(\phi^* \omega^k)_{a_k}$
$\forall T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \in \mathcal{F}_M(k,l)$，$q\in N$，$v_1\cdots v_l \in V_q$，$\omega^1\cdots\omega^k \in V_q^*$。
推广后的拉回映射和推前映射仍为线性映射，且为互逆映射。

设ϕ：$M\to N$是微分同胚，$p\in M$，$\{x^\mu\}$、$\{y^\mu\}$分别是两流形的局部坐标，两坐标域O_1、O_2满足$p\in O_1$，$\phi(p)\in O_2$，于是$p\in\phi^{-1}[O_2]$。则对于$\forall q\in\phi^{-1}[O_2]$，可以利用微分同胚$\phi$自然诱导出一个新的坐标系$\{x'^\mu\}$：
$x'^\mu(q) = y^\mu(\phi(q))$。
可见微分同胚在$O_1\cap\phi^{-1}[O_2]$上自然诱导出一个坐标变换：$x^\mu \mapsto x'^\mu$。可以证明：
$$\phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\Bigg|_p\right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a\Bigg|_{\phi(p)}，\quad \phi_*\left[(\mathrm{d}x'^\mu)_a\big|_p\right] = (\mathrm{d}y^\mu)_a\big|_{\phi(p)}$$
对于微分同胚，存在两种等价看法：

1. 主动看法（active viewpoint）：微分同胚的确将某一个流形上的点p和张量T映射到了另一个流形上的点p和张量$\phi_* T$。
2. 被动看法（passive viewpoint）：由于我们已经知道，互相微分同胚的两个流形可以认为是等同的，因而微分同胚映射ϕ的实质只是一个坐标变换$x^\mu \mapsto x'^\mu$。

以上两种看法的等价性体现为如下定理：
$$(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_p，\ \forall T\in\mathcal{F}_M(k,l)$$
即等式左边是主动观点下，新点处的新张量在旧坐标系下的分量，等于等式右边的被动观点下，旧点处的旧张量在新坐标系下的分量。

关于上述映射，还有如下定理（注意以下各张量的所属空间的下标）：
设ϕ：$M\to N$是光滑映射，则$\phi^*(TT') = \phi^*(T)\,\phi^*(T')$，$\forall T\in\mathcal{F}_N(0,l)$，$\forall T'\in\mathcal{F}_N(0,l')$。

设ϕ：$M\to N$是光滑映射，则$\phi_*(TT') = \phi_*(T)\,\phi_*(T')$，$\forall T\in\mathcal{T}_{V_p}(k,0)$，$\forall T'\in\mathcal{T}_{V_p}(k',0)$。

设ϕ：$M\to N$是光滑映射，则$\phi^*(TT') = \phi^*(T)\,\phi^*(T')$，$\forall T\in\mathcal{F}_N(k,l)$，$\forall T'\in\mathcal{F}_N(k',l')$。

设ϕ：$M\to N$是光滑映射，则$\phi_*(TT') = \phi_*(T)\,\phi_*(T')$，$\forall T\in\mathcal{F}_M(k,l)$，$\forall T'\in\mathcal{F}_M(k',l')$。

设ϕ：$M\to N$是微分同胚，则ϕ^*、ϕ_*与缩并可交换顺序。

§4.2 Lie导数

2018年6月10日 16:49

给定流形M上的一个矢量场v^a，可以诱导出一个单参微分同胚群ϕ，其任一群元ϕ_t是M上的微分同胚，则对$\forall T^{\cdots}{}_{\cdots} \in \mathcal{F}_M(k,l)$，有$\phi_t^* T^{\cdots}{}_{\cdots} \in \mathcal{F}_M(k,l)$，这两个张量场在某点的值之差是该点的张量。

由此定义：

$$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} := \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}}{t}$$

称为张量场$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$沿着矢量场$v$的Lie导数（Lie derivative）。

$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$仍是$M$上的一个$(k,l)$型张量场，且

$$\left(\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\right)\Big|_p = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\right)\Big|_p - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\Big|_p}{t}，\ \forall p \in M$$

因为v是线性映射，故$\mathcal{L}_v$也是线性映射，且满足导数的线性性和Leibnizian律。

$\mathcal{L}_v$可以与缩并交换顺序。

$\mathcal{L}_v f = v(f)$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$。

对于M上的任一矢量场v^a，可以选取一个坐标系$\{x^\mu\}$，且要求其x^1坐标线就是矢量场v^a的积分曲线。其余的坐标线则可以相当任意地选取，只需要满足在某一点处各个坐标线的切矢不平行即可。称这样形成的坐标系为矢量场v^a的适配坐标系（adapted coordinate system）。

换句话说，矢量场v^a就是其适配坐标系的第一坐标基矢场，或第一坐标线的切矢场，即$v^a = (\partial/\partial x^1)^a$。

则$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$在矢量场$v^a$的适配坐标系下的分量满足：

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}$$

注：只对第一坐标的偏导数。

证：

$$\left(\mathcal{L}_v T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)\Big|_p = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\phi_t^* T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)\Big|_p - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_p}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\phi_{-t*} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)\Big|_p - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_p}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_q - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_p}{t}$$

而由于在过的积分曲线即x^1坐标线上，故$x^1(q) = x^1(p) + t$，$x^n(q) = x^n(p)$（$n \geq 2$）。又由ϕ_{-t}诱导出的坐标变换满足：$x'^n(q) = x^n(p)$（$n \geq 1$），即$x'^1(q) = x^1(q) - t$，$x'^n(q) = x^n(p)$（$n \geq 1$）。故

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_q = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdots\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} T^{\rho_1\cdots\rho_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}\right]\Bigg|_q = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\Big|_q$$

则

$$\left(\mathcal{L}_v T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)\Big|_p = \lim_{t\to 0}\frac{T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_q - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_p}{t}$$
$$= \lim_{\Delta x^1\to 0}\frac{T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_q - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_p}{\Delta x^1} = \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}\bigg|_p$$

即证。

Lie导数与协变导数存在关系：

$\mathcal{L}_v u^a = [v,u]^a = v^b \nabla_b u^a - u^b \nabla_b v^a$，$\forall v^a, u^a \in \mathcal{F}(0,1)$。其中$\nabla_b$是任一无挠导数算符。

证：在适配坐标系下，不妨取普通导数算符，则对易子与Lie导数两者分量相等，即证：

$[v,u]^\mu = (\mathrm{d}x^\mu)_a [v,u]^a = (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a\right) = v^b \partial_b u^\mu = \partial u^\mu / \partial x^1 = \left(\mathcal{L}_v u\right)^\mu$。

类似地，$\mathcal{L}_v \omega_a = v^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a v^b$，$\forall v^a \in \mathcal{F}(0,1)$，$\omega_b \in \mathcal{F}(1,0)$。

进一步，对$\forall v^a \in \mathcal{F}(0,1)$，$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \in \mathcal{F}_M(k,l)$，有

$$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - \sum_{1\le i\le k} T^{a_1\cdots c\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{1\le j\le l} T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots c\cdots b_l} \nabla_{b_j} v^c$$

结果表现为，第一项是张量沿着矢量场v^a求导，之后共$k+l$项，其中张量上指标参与缩并的前面为负号，下指标参与缩并的前面为正号。

§4.3 Killing矢量场

2018年6月11日　　1:08

若在M上给定度规场g_{ab}，则可以进一步要求微分同胚具有某种性质：
微分同胚ϕ：$M \to M$称为等度规映射，简称等度规（isometry），若$\phi^* g_{ab} = g_{ab}$。
易见为ϕ等度规映射，当且仅当ϕ^{-1}为等度规映射。

流形上的光滑矢量场可以给出一个单参微分同胚群ϕ，其任一群元ϕ_t是M上的微分同胚。若其每个群元都是等度规映射，则群成为单参等度规群。
(M, g_{ab})上的光滑矢量场ξ^a成为Killing矢量场，若其给出的单参微分同胚（局部）群是单参等度规（局部）群。
等价地，ξ^a为Killing矢量场，若$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$。

ξ^a为Killing矢量场的充要条件是满足如下Killing方程：
$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$（或等价于$\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0$，或$\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a} \xi_{b]}$）；
其中$\xi_b = g_{ab}\xi^a$，∇_a是与度规项适配的导数算符$\nabla_a g_{bc} = 0$。

若存在坐标系$\{x^\mu\}$使得g_{ab}的全部分量满足$\partial g_{\mu\nu}/\partial x^1 = 0$，则$\left(\partial/\partial x^1\right)^a$是坐标域上的Killing矢量场。

若ξ^a为Killing矢量场，T^a为某测地线的切矢，则两者缩并的结果$T^b \xi_b$沿着测地线的导数$T^a \nabla_a\left(T^b \xi_b\right) = 0$。

(M, g_{ab})上所有Killing矢量场ξ^a的集合$\mathcal{K}$为一线性空间，即对$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\xi^a, \eta^a \in \mathcal{K}$，有$\alpha\xi^a + \beta\eta^a \in \mathcal{K}$仍是Killing矢量场。
(M, g_{ab})上最多有$n(n+1)/2$个独立的Killing矢量场（$n = \dim M$），即
$\dim \mathcal{K} \le \dfrac{n(n+1)}{2}$
等度规映射可以看作是某种对称变换，因此一个Killing矢量场反映了(M, g_{ab})的一个对称性。
具有$n(n+1)/2$个独立的Killing矢量场的广义Riemannian空间(M, g_{ab})称为最高对称性空间。

原则上想要找到(M, g_{ab})上全体的Killing矢量场，即等价于寻找全部的独立Killing矢量场，需要求解Killing方程， 这是比较麻烦的。但对于一些特殊形况，存在简单方法。

1. 2维Euclidean空间$(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$。
   采用Cartesian坐标系$\{x, y\}$，线元（即度规）可表示为$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$，易见Euclidean度规$\delta_{ab}$在此系下分量全为常数，故$(\partial/\partial x)^a$、$\left(\partial/\partial y\right)^a$均为Killing矢量场。
   采用平面极坐标，$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$，可见$\delta_{ab}$在此系下分量全与$\varphi$无关，且$\left(\partial/\partial\varphi\right)^a$用已知的两个Killing矢量场展开方式为$\left(\partial/\partial\varphi\right)^a = -y(\partial/\partial x)^a + x\left(\partial/\partial y\right)^a$，系数不是常

数，说明与前两者独立，故$(\partial/\partial\varphi)^a$也是Killing矢量场。而显然分量与$r$有关。

现在得到三个独立的Killing矢量场，分别代表了2维Euclidean度规δ_{ab}的沿着x、y方向的平移不变性（从而其线性组合仍为Killing矢量场表示沿着任一方向的平移不变性），与旋转不变性，$(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$达到最高对称性：

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a$。

2. 3维Euclidean空间$(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$。

   不难证明，一共有六个独立的Killing矢量场分别代表了3维Euclidean度规δ_{ab}的沿着x、y、z方向的平移不变性（从而其线性组合仍为Killing矢量场表示沿着任一方向的平移不变性），与绕着x、y、z轴的旋转不变性（从而其线性组合仍为Killing矢量场表示绕任一轴向的平移不变性），$(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$达到最高对称性：

   $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$、$-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$、$-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$、$-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a+z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$。

3. 2维Minkowski空间$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$。

   采用Lorentzian坐标系$\{t,x\}$，$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2$，容易得到Minkowski度规$\eta_{ab}$在两个方向的平移不变性，即$(\partial/\partial x)^a$、$(\partial/\partial t)^a$为Killing矢量场。

   现在按照如下定义坐标系$\{\psi,\eta\}$：$x=\psi\cosh\eta$，$t=\psi\sinh\eta$，$0<\psi+\infty$，$-\infty<\eta<+\infty$。则Minkowski线元（即Minkowski度规η_{ab}）可表示为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\psi^2-\psi^2\,\mathrm{d}\eta^2$，表明$\eta_{ab}$在新坐标系的全体分量与$\eta$无关，且$(\partial/\partial\eta)^a=t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$，与前两个Killing场独立。

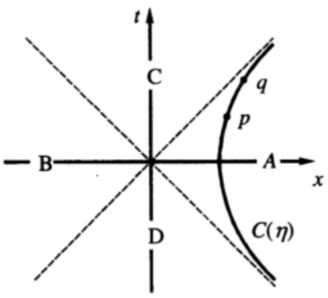

图 4-3　伪转动 Killing 矢量场$(\partial/\partial\eta)^a$在 A，B 区类时，在 C，D 区类空，在两条 45°直线上类光

   如图4-3所示，尽管按照上述定义的坐标系$\{\psi,\eta\}$的坐标域仅仅是上述$x>|t|$的区域A，但是$t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$却在全$t-x$平面上有定义且不难验证它是$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$上的Killing矢量场。它在$A$、$B$区域类时，在$C$、$D$区域类空，在两条斜直线上类光。

   称$t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$为伪转动（boost）Killing矢量场，代表Minkowski度规具有伪转动下的不变性。

   一共得到三个独立的Killing矢量场，分别代表了2维Minkowski度规η_{ab}的沿着t、x方向的平移不变性（从而其线性组合仍为Killing矢量场表示沿着任一方向的平移不变性），与伪转动不变性，$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$达到最高对称性：

   $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$、$t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$。

4. 4维Minkowski空间$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$。

   不难证明，独立的Killing场共10个，分为3组：

a. 4个方向（从而所有方向）的平移（时间平移不变性、空间平移不变性）：
$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$；

b. 3个绕空间轴向（从而绕所有空间轴向）的转动（空间旋转不变性）：
$-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$、$-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$、$-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$；

c. 3个时-空组合平面内（从而时间与所有空间方向组合平面内）的伪转动（Lorentzian变换不变性）：
$t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$t\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$。

之前提到的伪转动坐标变换和伪转动Killing矢量场之间存在如下的直接关系（以2维为例）：
设$\{t,x\}$是2维Minkowski空间$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$的Lorentzian坐标系，等度规映射ϕ_λ：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是由伪转动Killing矢量场$\xi^a=t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$诱导出的单参等度规群的一个群元，则由$\phi_\lambda$诱导的坐标变换$\{t,x\}\mapsto\{t',x'\}$是伪转动坐标变换，也就是Lorentzian变换。
即，伪转动Killing矢量场和伪转动坐标变换分别是同一变换的主动提法与被动提法。
（类似地，Euclidean空间的代表旋转的Killing场和坐标旋转变换也是对同一变换的主动和被动提法。）
证：矢量场$\xi^a=\left(\partial/\partial\eta\right)^a$的积分曲线的参数方程为：
$\frac{\mathrm{d}\,x^\mu(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=\xi^\mu$，$\mu=0,1$
注意到$\xi^a=t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$，则有：
$\mu=0$，$\frac{\mathrm{d}\,t(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=x(\eta)$；
$\mu=1$，$\frac{\mathrm{d}\,x(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=t(\eta)$。
对$\forall p\in\mathbb{R}^2$，设$C(\eta)$是满足$p=C(0)$的ξ^a的积分曲线，则不难证明上述两积分曲线的分量参数式有特解：
$x(\eta)=x_p\cosh\eta+t_p\sinh\eta$，$t(\eta)=x_p\sinh\eta+t_p\cosh\eta$。
设$q=C(\lambda)$是积分曲线上与p相差参数λ的点，即p在ϕ_λ下的像点。则ϕ_λ诱导的坐标变换为：
$x'_p=x_q=x(\lambda)=x_p\cosh\lambda+t_p\sinh\lambda$，$t'_p=t_q=t(\lambda)=x_p\sinh\lambda+t_p\cosh\lambda$。
即$x'=x\cosh\lambda+t\sinh\lambda=\cosh\lambda\,(x+t\tanh\lambda)$，$t'=x\sinh\lambda+t\cosh\lambda=\cosh\lambda\,(t+x\tanh\lambda)$，即得到伪转动坐标变换。
令$\tanh\lambda=v$，$\cosh\lambda=\gamma=1/\sqrt{1-v^2}$（采用几何单位制，光速$c=1$），则得到熟悉的Lorentzian变换：
$x'=\gamma(x+vt)$，$t'=\gamma(t+vx)$。

设$\{x^\mu\}$是$(\mathbb{R}^n,\eta_{ab})$的Lorentzian坐标系/$(\mathbb{R}^n,\delta_{ab})$的Cartesian坐标系，则$\{x'^\mu\}$也是$(\mathbb{R}^n,\eta_{ab})$的Lorentzian坐标系/$(\mathbb{R}^n,\delta_{ab})$的Cartesian坐标系的充要条件是它由$\{x^\mu\}$通过等度规映射$\phi_\lambda$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$诱导而来。
等度规映射保持坐标系的Lorentzian / Cartesian性。
可见之前在“度规张量场”节提到的坐标变换，均可由等度规映射诱导而来。

§4.4 超曲面

2018年6月11日 18:54

设流形M、S满足$\dim S \le \dim M = n$。映射ϕ：$S \to M$称为嵌入（imbedding），若ϕ是一一且是$\mathbf{C}^\infty$的，且对$\forall q \in S$，推前映射ϕ_*：$V_q \to V_{\phi(q)}$非退化（non-degenerate），即$\phi_* v^a = 0 \in V_{\phi(q)} \Rightarrow v^a = 0 \in V_q$。
嵌入的上述条件使得S的拓扑的流形结构可自然地被带到$\phi[S]$上，从而使ϕ：$S \to \phi[S]$成为微分同胚映射。

嵌入ϕ：$S \to M$称为M的一个嵌入子流形（imbedded submanifold），简称子流形，也常把映射的像$\phi[S]$称作嵌入子流形。若$\dim S = n - 1$，则$\phi[S] \subset M$称为M的一张超曲面（hypersurface）。

注：嵌入子流形$\phi[S]$上除了通过ϕ从S自然带来的拓扑，还可以由M的拓扑在作为M的子集的$\phi[S]$上诱导出拓扑，两者不一定相同。若进一步要求两者相同，则需要对ϕ：$S \to M$提出更高的要求。满足这一附加要求的嵌入称为正则嵌入。有定理：若M是紧致流形，那么嵌入一定是正则嵌入。之后谈及嵌入子流形，大多谈的是正则嵌入子流形。

设$\phi[S]$是M的嵌入子流形，$q \in \phi[S] \subset M$，则作为M的一点，q点有n维切空间V_q。同时作为$\phi[S]$上的一点，若有$w^a \in V_q$是$\phi[S]$内某曲线的切矢，则w^a称切于$\phi[S]$。全体这样的$w^a \in V_q$构成的集合W_q是V_q的$n-1$维子空间。若将$\phi[S]$视为流形，则W_q也是超曲面在q点的切空间。
在没有指定度规时，不存在正交的概念，因此不能给$\phi[S]$定义法矢（normal vector），但是可以定义法余矢（normal covector）如下（"余矢"即对偶矢量）：
设$\phi[S]$是超曲面，$p \in \phi[S]$。非零对偶矢量$n_a \in V_q^*$称为$\phi[S]$在点p的法余矢，若$n_a w^a = 0$，$\forall w^a \in W_q$。
超曲面$\phi[S]$上任一点必有法余矢。法余矢不唯一，但是同一点的两个法余矢之间只能差一个实数因子。
注：若嵌入子流形不是超曲面，则其法余矢没有这样好的唯一性。

给定任意流形M上的光滑函数f，只要$\mathrm{d}f\big|_{f=c} \neq 0$（即$\nabla_a f\big|_{f=c} \neq 0$），则$f = c$（常数）给出$M$中的一个超曲面。

若$\phi[S]$是由$f = c$（常数）给出的一个超曲面，则面上的$\nabla_a f$是超曲面的法余矢。（$\nabla_a f = \mathrm{d}f$）

若M上指定了度规g_{ab}，容易证明$n^a = g^{ab} n_b \in V_q$与$\phi[S]$上p点所有矢量正交，因此称n^a为$\phi[S]$的法矢。

若g_{ab}为正定度规，则n^a自然不属于W_p，即$n^a \in V_q - W_q$。
但是若g_{ab}为Lorentzian度规，则n^a有可能属于W_q。
$n^a \in W_q$的充要条件是$n^a n_a = 0$。（对于Minkowski度规来说，即当法矢/法余矢为类光矢量时。）
即类光超曲面的法矢也是其切矢，也在其切空间里。

在Minkowski度规下可以定义：
超曲面是类空的，若其法矢处处类时（$n^a n_a < 0$）；
超曲面是类时的，若其法矢处处类空（$n^a n_a > 0$）；
超曲面是类光的，若其法矢处处类光（$n^a n_a = 0$）。
若$n^a n_a \neq 0$即超曲面非类光，则谈及法矢指的基本都是归一化法矢（$n^a n_a = \pm 1$）。

设$\phi[S]$是流形M中的嵌入子流形（不一定是超曲面），$q \in \phi[S]$，W_q是q点于$\phi[S]$的切空间。W_q的度规h_{ab}叫做是由V_q的度规g_{ab}生出的诱导度规（induced metric），若：$h_{ab} w_1^a w_2^a = g_{ab} w_1^a w_2^a$，$\forall w_1^a, w_2^a \in W_q$。
诱导度规实质上是将V_q上的度规的作用范围限制在W_q上。

当$\phi[S]$为类空或类时（非类光）超曲面时，诱导度规h_{ab}可用其归一化法矢（$n^a n_a = \pm 1$）表为：
$h_{ab} = g_{ab}(1 \mp n^a n_a) = g_{ab} \mp n_a n_b$，（$n^a n_a = 1$时取“$-$”，$n^a n_a = -1$时取“$+$”。）
注：上式在g_{ab}为正定是时也成立，只需将“$\mp$”改为“$-$”。
满足诱导度规定义式的构造方法有很多，但是像上面这样定义的诱导度规有一个好处：理论上对于n维流形M，其上的度规g_{ab}也是n维张量，而h_{ab}只需要是$n-1$维张量，即$h_{ab} \in \mathcal{T}_{W_q}(0,2)$，它不能作用于$V_q - W_q$的元素。但若是能用一个$n$维$(0,2)$型张量$\overline{h}_{ab}$表示$h_{ab}$，计算表达上会有很大方便。上述定义的其实就是一个$V_q$上的$n$维$(0,2)$型张量，即$\overline{h}_{ab} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,2)$，而并不是在$W_q$上的度规张量。
另一方面，可以证明，$\mathcal{T}_{V_q}(0,2)$的子集$\mathcal{S}_{V_q}(0,2) = \left\{T_{ab} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,2) \middle| T_{ab} n^a = 0, T_{ab} n^b = 0\right\}$自然同构于$\mathcal{T}_{V_q}(0,2)$，因而可以自然认同。易见$g_{ab} \notin \mathcal{S}_{V_q}(0,2)$，而$\overline{h}_{ab} \in \mathcal{S}_{V_q}(0,2)$，且$\overline{h}_{ab} w_1^a w_2^a = g_{ab} w_1^a w_2^a$，$\forall w_1^a, w_2^a \in W_q$。还可证明$\mathcal{S}_{V_q}(0,2)$中满足上式的元素只有$\overline{h}_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$一个，因此可以将$n$维张量$\overline{h}_{ab}$与$n-1$维张量$h_{ab}$自然认同。这也就是选择上述定义方式的原因。
以上部分结论可以推广为：$\mathcal{T}_{V_q}(0,l)$的子集$\mathcal{S}_{V_q}(0,l) = \left\{T_{a_1 \cdots a_l} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,l) \middle| T_{a_1 \cdots a_l}\text{的任一下标与}n^a\text{缩并为零}\right\}$自然同构于$\mathcal{T}_{V_q}(0,l)$。这种认同使得可以用前者的元素代替后者的元素从而带来方便。

设$\phi[S]$为类空或类时（非类光）超曲面，$q \in \phi[S]$，定义：
$h^a{}_b = g^{ac} h_{cb} = \delta^a{}_b \mp n^a n_b$，
则$\forall v^a \in V_q$，有$h^a{}_b v^b = v^a \mp n^a (n_b v^b)$，即：
$v^a = h^a{}_b v^b \pm n^a (n_b v^b)$，
上式代表v^a的一种分解，其中$\pm n^a (n_b v^b)$与法矢n^a平行，称为法向分量，$h^a{}_b v^b$与法矢正交

（因为$n^a\left(h^a{}_b v^b\right) = 0$），称为切向分量（切于$\phi[S]$）。因而$h^a{}_b$称为从$V_q$到$W_q$的投影映射（projection map）。

类光超曲面上按照定义的诱导出来的“度规”是退化的，因而类光超曲面上不存在诱导度规。因为类光超曲面的法矢也在其切空间内，因此任一(0,2)型张量作用于这个非零法矢和其他任一非零切矢之上必为零，即退化。