第二章 流形和张量场

物理学上常常需要表征连续的背景空间，诸如牛顿力学和经典电动力学研究$\mathbb{R}^3$中的物体和场对时间的演化，理论力学和统计物理常常用到系统位形所在的相空间，狭义相对论的时空背景是$\mathbb{R}^4$，广义相对论的时空也是连续的四维空间。微分流形就用来表征带有微分结构的各种“连续空间”。

给定流形之后，需要描述和研究它上面的各种对象和物理量，因此引入坐标系和各型的张量。某一点处的张量是三维Euclidean空间中标量和矢量的推广，并且其分量满足一定的坐标变换关系。

进一步在流形上引入度量——度规张量，它在流形的几何性质上起着决定性的作用。

§2.1 微分流形

2018年5月7日 22:15

n维拓扑流形（topology manifold）：拓扑空间$(M,\mathcal{T})$为n维拓扑流形，若：

1. 拓扑空间$(M,\mathcal{T})$是T_2（Hausdorff性）且C_2（第二可数性，具有可数拓扑基）的；
2. 存在M的开覆盖$\{O_\alpha\}$：$M=\cup_\alpha O_\alpha$，对$\forall O_\alpha$，$\exists$同胚ψ_α：$O_\alpha\to V_\alpha$（V_α是$\mathbb{R}^n$用通常拓扑衡量的开子集）；

注：通常所称的流形都是指边界点集为空的流形。边界点集不为空的流形特成为带边流形。

n维（光滑）微分流形（differentiable manifold）：拓扑空间$(M,\mathcal{T})$为n维微分流形，若存在M的开覆盖$\{O_\alpha\}$：$M=\cup_\alpha O_\alpha$，且满足：

1. 拓扑空间$(M,\mathcal{T})$是T_2（Hausdorff性）且C_2（第二可数性，具有可数拓扑基）的；
2. 对$\forall O_\alpha$，$\exists$同胚ψ_α：$O_\alpha\to V_\alpha$（V_α是$\mathbb{R}^n$用通常拓扑衡量的开子集）；
3. （相容性条件）若$O_\alpha\cap O_\beta\neq\emptyset$，则复合映射$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$是$\mathbf{C}^\infty$光滑（无穷阶连续可导）的。

注：相容性条件相当于是在拓扑流形上附加微分结构（differentiable structure）。即将同胚于$\mathbb{R}^n$的局部光滑拼接。

可见，n维微分流形之中的每一个点都会通过同胚获得至少一个n元自然坐标：

$\forall p\in M$，$\exists O_\alpha$，s.t.$p\in O_\alpha$，则$\psi_\alpha(p)\in\mathbb{R}^n$。$(O_\alpha,\psi_\alpha)$构成一个局域坐标系（coordinate system）或图（chart），坐标域为O_α。

存在全局坐标系的流形称为平凡（trivial）流形。但多数情况下只有局域坐标系。

若$O_\alpha\cap O_\beta\neq\emptyset$，对$\forall p\in O_\alpha\cap O_\beta$，分别存在两个坐标$\{x^\nu\}$、$\{x'^\mu\}$，则相容性条件给出了一个$n$元$n$维向量值函数$\phi^\mu$，且是光滑的，使得：

$x'^1=\phi^1(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n),\cdots,x'^n=\phi^n(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n)$，形式上可以写为：

$$x'^\mu=\left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p x^\nu$$

称为坐标变换。其中x'^μ是两系坐标变换函数$x'^\mu(x^\nu)$。不妨记坐标变换矩阵为$S^\mu{}_\nu$，则$x'^\mu=S^\mu{}_\nu x^\nu$。

图册（atlas）：所有互相相容的一组坐标系的集合：$\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$。

一个图册代表一种微分结构，将拓扑空间定义为了一种微分流形。不同图册可以不相容，代表不同微分结构，将同一个拓扑空间定义成了不同的微分流形。

设微分流形M、M'及其图册$\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$、$\left\{\left(O'_\beta,\psi'_\beta\right)\right\}$，维数分别为$n$、$n'$，存在映射关系$f$：$M\to M'$：

$\forall p\in M$，任取$\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$，s.t. $p\in O_\alpha$，任取$\left\{\left(O'_\beta,\psi'_\beta\right)\right\}$，s.t.$f(p)\in O'_\beta$，则$\psi'_\beta\circ f\circ\psi_\alpha^{-1}$是从$\psi_\alpha(O_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^{n'}$的$n$元$n'$维向量值函数。

$f: M \to M'$是$\mathbf{C}^r$的，若$\forall p \in M$，$\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$是$\mathbf{C}^r$的。

微分流形M和M'是互相微分同胚的（diffeomorphic to each other），若$\exists f: M \to M'$，满足：

1. f是一一到上的；
2. f和f^{-1}都是$\mathbf{C}^\infty$光滑（无穷阶连续可导）的。

这样的f称为$M \to M'$的微分同胚映射，简称微分同胚（diffeomorphism）。
显然要求两者的维数$n = n'$相等。
微分同胚是微分流形之间映射的最强条件，两个互相微分同胚的流形可认为相等。

$f: M \to \mathbb{R}$称为M上的函数（function），或M上的标量场（scalar field）。若f是$\mathbf{C}^\infty$的，则称为M上的光滑函数。
M上的全体光滑函数的集合记为$\mathcal{F}_M$。
需要注意f的自变量是$\forall p \in M$，与坐标无关，是不坐标依赖的。
若f与任意一个(O, ψ)结合可以得到n元函数$F = f \circ \psi^{-1} = F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
F随着(O, ψ)选取的不同而不同，是坐标依赖的。

§2.2 切矢和切矢场

2018年5月16日　　11:09

矢量（vector）：映射v：$\mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$称为点$p \in M$处的一个矢量，若$\forall f$，$g \in \mathcal{F}_M$，$\alpha$，$\beta \in \mathbb{R}$，有：

1. 线性性：$v(\alpha f + \beta g) = \alpha\, v(f) + \beta\, v(g)$；
2. Leibniz律：$v(fg) = f|_p\, v(g) + g|_p\, v(f)$。

其中fg也是M上的函数，且$fg|_p = f|_p g|_p$。

要确定在p点的矢量，只需要确定一种映射使得$\forall f \in \mathcal{F}_M$都对应于实数。这种映射可以指定的方式很多，因此$p$点有无限多中方法来定义矢量。其中一种方式为：
设坐标系(O, ψ)，则M上的任一光滑函数f与之结合得到n元函数$F = f \circ \psi^{-1} = F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，则借此可给$\forall p \in O$确定$n$个矢量$X_\mu$，$\mu = 1,2,3,\cdots,n$，它们作用于$\forall f \in \mathcal{F}_M$的结果是实数：

$$X_\mu(f) \coloneqq \left.\frac{\partial F(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}\right|_p = \left.\frac{\partial (f \circ \psi)(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}\right|_p$$

简写为：

$$X_\mu(f) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p$$

n维微分流形M中p点所有矢量的集合构成n维矢量空间（vector space）V_p，即$\dim V_p = \dim M = n$。
定义运算：

1. 加法（addition）：$(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$；$\forall f \in \mathcal{F}_M$，$v_1, v_2 \in V_p$；
2. 数乘（scalar multiplication）：$(\alpha v)(f) = \alpha\, v(f)$；$\forall f \in \mathcal{F}_M$，$v \in V_p$，$\alpha \in \mathbb{R}$；
3. 定义零元$\underline{0} \in V_p$，$\underline{0}(f) = 0$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$；

则$\forall v \in V_p$，有$v = v^\mu X_\mu$，其中$v^\mu = v(x^\mu)$。
$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$是$V_p$的一个基底（basis），特别称为坐标基底（coordinate basis），每个X_μ称为一个坐标基矢（coordinate basis vector），系数v^μ称为v的坐标分量（coordinate components）。

设p在两坐标系$\{x^\nu\}$和$\{x'^\mu\}$的坐标域的交集中，$x'^\mu = S^\mu{}_\nu x^\nu$，$v \in V_p$，$v^\nu$和$v'^\mu$分别是$v$在两系的分量，则有分量变换关系：

$$v'^\mu = \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p v^\nu = S^\mu{}_\nu v^\nu$$

称为矢量分量随坐标的变换式。其中x'^μ是两系坐标变换函数$x'^\mu(x^\nu)$。
可见，矢量分量变换随坐标变换是协变的。
另一方面，设两坐标系$\{x^\nu\}$、$\{x'^\mu\}$分别有基底$\{e_\nu\}$、$\{e'_\mu\}$，基底变换为$e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$，则
$v = v'^\mu e'_\mu = v^\nu e_\nu = v'^\mu A^\nu{}_\mu e_\nu$

得$v'^{\mu}=\left(A^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}$
可见，矢量分量变换随基底变换是逆变的。
因此，矢量又常常被称为逆变矢量。

设$I\subset\mathbb{R}$，则$\mathbf{C}^r$类映射C：$I\to M$称为上的$\mathbf{C}^r$曲线。
$\forall t\in I$有唯一$C(t)\in M$对应，t称为曲线的参数（parameter）。$C[I]\subset M$称为曲线的像。

曲线C'：$I'\to M$称为C的重参数化（reparametrization）（直观上像$C[I]$与$C'[I']$重合），若∃到上映射α：$I\to I'$使得
1. $C=C'\circ\alpha$;
2. α有处处非零导数。

设坐标系(O,ψ)，则$\psi\circ C$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$相当于$n$个一元函数$x^{\mu}=x^{\mu}(t)$，称为曲线的参数方程。
O的子集$\left\{p\in O\,\middle|\,x^1(t)=\text{常数},\cdots,x^{\mu-1}(t)=\text{常数},x^{\mu+1}(t)=\text{常数},\cdots,x^n(t)=\text{常数}\right\}$称为$x^{\mu}$坐标线（coordinate line）。

设$C(t)$是流形M上的$\mathbf{C}^1$曲线，则曲线在$C(t_0)$点的切矢$T(t_0)$是$C(t_0)$点的矢量，它对$f\in\mathcal{F}_M$的作用定义为：
$$T(t_0)(f)\coloneqq\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C)}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(C(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$
标量场f：$M\to\mathbb{R}$与C结合成以t为自变量的一元函数$(f\circ C)(t_0)=f\big(C(t_0)\big)\in\mathbb{R}$。也可记为：
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{C(t_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$
因此，之前定义的在p点的坐标基矢X_{μ}就是过p点x^{μ}坐标线的切矢：
$$X_{\mu}=\left.\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right|_{p}$$
且
$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right|_{p}(f)=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}}\right|_{p}$$

设曲线$C(t)$参数式为$x^{\mu}=x^{\mu}(t)$，则其上任一点切矢在该坐标系下的坐标分量是相应参数式对t的导数：
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\,x^{\mu}(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

矢量$u,v\in V_p$是互相平行的（parallel），若∃$\alpha\in\mathbb{R}$，使得$v=\alpha u$。
设曲线C'：$I'\to M$是C：$I\to M$的重参数化，且到上映射α：$I\to I'$，则两曲线在任一像点切矢有关系（平行）：
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\,\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t'}$$
只相差一个$\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$。

则由上面的讨论可知，$\forall p \in M$，若指定任意曲线使得$p = C(t_0)$，则必$\exists v \in V_p$使得v是曲线在$C(t_0)$点的切矢。同样，$\forall v \in V_p$，都必定是（很多）曲线在p点的切矢，例如以$x^\mu(t) = x^\mu|_t + v^\mu t$为参数式的曲线，其中$v^\mu$是$v$在该坐标系下的分量。
因此p点的矢量v又被称为切矢量（tangent vector），V_p称为p点的切空间（tangent space）。

设$A \subset M$，则对$\forall p \in A$指定一个矢量，形成定义在A上的矢量场（vector field）。

设v是M上的一个矢量场，f是M上的一个函数（标量场），则v在M任一点p的值$v|_p$将f在该点的值$f|_p$映射为实数$v|_p(f)$，整体形成一个M上的函数（标量场）$v(f)$。因此矢量场v可以视作把函数（标量场）f映射到函数（标量场）$v(f)$的映射。
M上的一个矢量场v是$\mathbf{C}^\infty$的，若v作用于$\mathbf{C}^\infty$函数为$\mathbf{C}^\infty$函数，即$v(f) \in \mathcal{F}_M$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$。
矢量场v是$\mathbf{C}^\infty$（或$\mathbf{C}^\mathrm{r}$）的，则它的分量v^μ也是$\mathbf{C}^\infty$（或$\mathbf{C}^\mathrm{r}$）的。

两个光滑矢量场u、v的对易子（commutator）$[u,v]$是一个光滑矢量场，定义为：
$$[u,v]\Big|_p(f) \coloneqq u\Big|_p\big(v(f)\big) - v\Big|_p\big(u(f)\big)$$
容易证明，任意坐标系有：
$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = 0$$
即任一坐标系的任意两个基矢场都对易。
反之，若$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$是点$p \in M$的邻域$N$上的$n$个处处线性无关的$\mathbf{C}^\infty$矢量场，且$\left[X_\mu, X_\nu\right] = 0$，$\mu, \nu = 1,2,\cdots,n$
则必存在坐标系$\{x^\mu\}$，其坐标域$O \subset N$，且在坐标域上$X_\mu = \partial/\partial x^\mu$，$\mu = 1,2,\cdots,n$。

曲线$C(t)$叫矢量场v的积分曲线（integral curve），若其上每点的切矢等于该点矢量场的值。
设v是M上的一个光滑矢量场，则任一点$p \in M$必有v唯一的（不可延拓）积分曲线经过。

一个群（group）是一个集合G配以运算“群乘法”：$G \times G \to G$，元素g_1、g_2的结果为$g_1 g_2$，且映射满足条件：

1. （结合律）$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$，$\forall g_1, g_2, g_3 \in G$；
2. $\exists$唯一恒等元（identity element）$e \in G$，$eg = ge = g$，$\forall g \in G$；
3. $\forall g \in G$，$\exists$唯一逆元（inverse element）g^{-1}，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$；

$\mathbf{C}^\infty$映射ϕ：$\mathbb{R} \times M \to M$形成$M$上的无数个单参微分同胚群（one-parameter group of diffeomorphisms）$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$，也称映射$\phi$：$\mathbb{R} \times M \to M$是$M$上的一个单参微分同胚群，若：

1. $\forall t \in \mathbb{R}$，ϕ_t：$M \to M$是微分同胚；
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}$，$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$。

容易验证$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$以映射复合为群乘法构成群，恒等元就是$M$到$M$的恒等映射$\phi_0$；且$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$，$\forall t \in \mathbb{R}$。
$\forall p \in M$，有ϕ_p：$\mathbb{R} \to M$。则有关系：
$\phi_p(g) = \phi(t, p) = \phi_t(p)$，$\forall t \in \mathbb{R}$，$p \in M$。

单参微分同胚群的每一个群元ϕ_t都是M上的一个（微分同胚的）点变换。因此群在物理上可以方便地表示、研究对称变换和对称性。

设ϕ：$\mathbb{R} \times M \to M$是$M$上的一个单参微分同胚群，则$\forall p \in M$，$\phi_p$：$\mathbb{R} \to M$是过$p$点的一条光滑曲线，并令此处的$t = 0$，即$\phi_p(0) = p$，称为这个单参微分同胚群过$p$点的轨道（orbit）。轨道从另一个角度可以被理解为：单参微分同胚群$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$中的每一个群元作用于$p$的像点构成的集合，构成一条曲线。把这条曲线在$\phi_p(0)$处的切矢记为$v|_p$，则形成$M$上的一个光滑矢量场。
即M上的一个单参微分同胚群给出M上的一个光滑矢量场。

相反，$\forall p_0 \in M$，总可以找到含p_0的开邻域U以及含0的开区间$I \subset \mathbb{R}$，使得ϕ：$I \times U \to M$有意义，且对$\forall t \in I$，ϕ_t：$U \to M$将p_0映射到过p_0的积分曲线上参数相差t的点。且ϕ：$I \times U \to M$有性质：
1. $\forall t \in I$，ϕ_t：$U \to \phi_t[U]$是一个微分同胚；
2. 若$t, s, t + s \in \mathbb{R}$，则$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$。

（上述定义的原因是防止认为挖去上的某些点，使得积分曲线在某些参数处的像点不存在。）
这样的$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$称为$p_0$点的单参微分同胚局部群，或单参微分同胚族。

矢量场称为完备的，若它的每条（不可延拓）积分曲线的参数范围都是$\mathbb{R}$。
即M上每个完备的光滑矢量场可以给出M上一个单参微分同胚群。

§2.3 对偶矢量场

2018年5月21日　20:54

设V是$\mathbb{R}$上有限维线性空间。线性映射$\omega: V\to\mathbb{R}$称为V上的对偶矢量（dual vector）。全体ω组成的集合称为V的对偶空间（dual space）V^*。
定义运算：

1. 加法：$(\omega_1+\omega_2)(v)=\omega_1(v)+\omega_2(v)$；$\forall v\in V_p$，$\omega_1,\omega_2\in V^*$；
2. 数乘：$(\alpha\omega)(v)=\alpha\,\omega(v)$；$\forall v\in\mathcal{F}_M$，$\omega\in V^*$，$\alpha\in\mathbb{R}$；
3. 定义零元$\underline{0}\in V^*$，$\underline{0}(v)=0$，$\forall v\in V_p$；

设$\{e_n\}$是V的一组基矢，则定义V^*中的n个元素$e^{1^*},e^{2^*},\cdots,e^{n^*}$，满足：$e^{\mu^*}(e_\nu)=\delta_\nu^\mu$，$\mu,\nu=1,2,\cdots,n$。
则可证明，$e^{1^*},e^{2^*},\cdots,e^{n^*}$线性无关，且对$V^*$中任一元素$\omega$，有$\omega=\omega_\mu e^{\mu^*}$（两边都是映射），其中$\omega_\mu=\omega\left(e_\mu\right)$。
则$\{e^{n^*}\}$是V^*的一组基底，称为$\{e_n\}$的对偶基底（dual basis）。
由是可知$\dim V=\dim V^*$。

两个线性空间称为同构的（isomorphic），若两者之间存在一一到上的线性映射（称作同构映射）。两线性空间同构的充要条件是维数相同。
由于维数相同，故两个线性空间天然同构，例如选定了$\{e_n\}$及其对偶基底$\{e^{n^*}\}$之后，按照$e_\mu\mapsto e^{\mu^*}$来定义的线性映射就是一个同构映射。但是由于$\{e_n\}$选取的任意性，V与V^*之间不存在自然的（特殊的、与众不同的）同构映射。

对于V^*，也存在它的对偶空间，记为V^{**}。
而V^{**}与V之间存在自然的同构映射，定义如下：
对于$\forall v\in V$，定义它的像$v^{**}\in V^{**}$，$v^{**}(\omega)=\omega(v)$，$\forall\omega\in V^*$。可以证明，这是一个同构映射。
因此，可以将V^{**}与V视为同一空间。也因此，无需再讨论更高次的对偶空间。

若线性空间V中有一基底变换：$e'_\mu=A^\nu{}_\mu e_\nu$，其中$A^\nu{}_\mu$是e'_μ用原$\{e_n\}$展开的第ν系数分量。那么将每一个$A^\nu{}_\mu$排列在一个n阶方阵的μ行ν列处，得到变换矩阵A（非退化方阵）。
注：$A^\nu{}_\mu$形式的写法本质上相当于$A_{\nu\mu}$，因此特意将指标的左右区分，上下位置只是为了便于表示求和。同理，$\left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu$相当于$\left(A^{-T}\right)_{\nu\mu}$。
则相应的对偶基底变换为：$e'^{\mu^*}=\left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu^*}$（两边都是映射），其中$A^{-T}$表示$A$的转置矩阵的逆矩阵。证：

$$\left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu^*}(e'_\alpha)=\left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu^*}\left(A^\beta{}_\alpha e_\beta\right)=A^\beta{}_\alpha\left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu^*}\left(e_\beta\right)=A^\beta{}_\alpha\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\beta$$
$$=A^\beta{}_\alpha\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\beta=\left(A^{-1}A\right)^\mu{}_\alpha=\delta^\mu{}_\alpha=e'^{\mu^*}(e'_\alpha)$$

对于流形M，$\forall p \in M$有切空间V_p，故也有V_p^*。在流形M（或$A \subset M$）上每一点p指定一个对偶矢量，就得到M（或A）上的一个对偶矢量场。
M上的对偶矢量场ω是光滑的，若对于$\forall$光滑矢量场v，$\omega(v) \in \mathcal{F}_M$。

对$\forall f \in \mathcal{F}_M$，定义一个对偶矢量场（dual vector field），记为$\mathrm{d}f$，且：$\mathrm{d}f\big|_p(v) \coloneqq v(f)$。
易证，这个对偶矢量场满足微分运算的Leibniz律：$\mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f$。
（事实上，近代微分几何已经对函数的微分赋予了如下理解：
设(O, ψ)是n维流形M的一个坐标系，坐标域为O，则对于$\forall f \in \mathcal{F}_M$，可以诱导出一个$n$元函数$F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$。设$p \in O$，则函数在该点的微分需要说明“函数沿着某个方向走了多远，其增量为多少”。既然p点有无数的矢量v，代表了“从p出发向某个方向走多远”的所有可能情况，那么给定任意一个v，就能相应把$\mathrm{d}f\big|_p(v)$定义为一个实数，再要求$\mathrm{d}f\big|_p$是线性的，就能代表函数在v所代表的方向和距离上的增量（微分）。于是$\mathrm{d}f\big|_p$就是V_p的一个对偶矢量，$\mathrm{d}f$是O上的一个对偶矢量场。）

设(O, ψ)是坐标系，第μ个坐标x^μ可以看作是O上的函数，于是$\mathrm{d}x^\mu$是O上的一个特殊的对偶矢量场。$p \in O$，V_p的第ν个坐标基矢是$\partial/\partial x^\nu$，则由$\mathrm{d}f$的定义式可知在p点，
$$\mathrm{d}x^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu) = \delta^\mu_\nu$$
因而$\{\mathrm{d}x^\mu\}$是坐标基底$\{\partial/\partial x^\nu\}$的对偶坐标基底（dual coordinate basis）。
因此$\mathrm{d}x^\mu$是O上的第μ个对偶坐标基矢（dual coordinate vector）场，$\{\mathrm{d}x^\mu\}$是上的一个对偶坐标基底场。
上任一对偶矢量ω可借对偶坐标基底$\{\mathrm{d}x^\mu\}$展开：
有$\omega = \omega_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$，其中$\omega_\mu = \omega(\partial/\partial x^\mu)$。系数$\omega_\mu$称为$\omega$的坐标分量。

设(O, ψ)是坐标系，$f \in \mathcal{F}_O$，诱导出n元函数$F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$简写为$f(x)$，则对任一对偶矢量场，有（下式两边都是对偶矢量场）：
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu$$

设p在两坐标系$\{x^\nu\}$和$\{x'^\mu\}$的坐标域的交集中，坐标变换为$x'^\mu = S^\mu{}_\nu x^\nu$，$\omega \in V_p^*$，$\omega_\nu$和$\omega'_\mu$分别是$\omega$在两系的分量，则有坐标变换关系：
$$\omega'_\mu = \left.\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right|_p \omega_\nu = \left(S^{-1}\right)^\nu{}_\mu \omega_\nu$$
称为对偶矢量分量随坐标的变换式。其中x^ν是两系坐标逆变换函数$x^\nu(x'^\mu)$。
可见，对偶矢量分量变换随坐标变换是逆变的。
另一方面，设两坐标系$\{x^\nu\}$、$\{x'^\mu\}$分别有基底$\{e_\nu\}$、$\{e'_\mu\}$，基底变换为$e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$，则有对偶基底$\{e^{\nu*}\}$、$\{e'^{\mu*}\}$，对偶基底变换为$e'^{\mu*} = \left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu*}$，则
$$\omega = \omega'_\mu e'^{\mu*} = \omega_\nu e^{\nu*} = \omega'_\mu \left(A^{-T}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu*}$$
得$\omega'_\mu = \left(A^T\right)_\mu{}^\nu \omega_\nu$
可见，对偶矢量分量变换随基底变换是协变的。
因此，对偶矢量又常常被称为协变矢量。

§2.4 张量场

2018年4月20日　　16:59

线性空间V上的(k,l)型张量（tensor of type (k,l)）是定义在矢量空间V及其对偶空间V^*的Cartesian积$V^{*k}\times V^l$上的一类多重线性映射T：$V^{*k}\times V^l\to\mathbb{R}$。所有$V$上的$(k,l)$型张量构成空间$\mathcal{T}_V(k,l)$。定义运算：

1. $(T_1+T_2)(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)=T_1(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)+T_2(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)$；$\forall v_i\in V_p$，$i=1,2,\cdots,k$，$\forall\omega_j\in V^*$，$j=1,2,\cdots,l$，$\forall T_1,T_2\in\mathcal{T}_V(k,l)$；
2. $(\alpha T)(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)=\alpha\,T(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)$；$\forall v_i\in V_p$，$i=1,2,\cdots,k$，$\forall\omega_j\in V^*$，$j=1,2,\cdots,l$，$\forall T\in\mathcal{T}_V(k,l)$，$\forall\alpha\in\mathbb{R}$；
3. 定义零元$\underline{0}\in V^*$，$\underline{0}(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)=0$，$\forall v_i\in V_p$，$i=1,2,\cdots,k$，$\forall\omega_j\in V^*$，$j=1,2,\cdots,l$。

利用V和V^{**}的自然同构关系，可以看出：
矢量空间V是$(1,0)$型张量空间$\mathcal{T}_V(1,0)$，$\forall v\in V$是一个$(1,0)$型张量，借助v自然同构于v^{**}，将$\forall\omega\in V^*$映射到$v(\omega)=v^{**}(\omega)=\omega(v)$。
对偶空间V^*是$(0,1)$型张量空间$\mathcal{T}_V(0,1)$，$\forall\omega\in V^*$是一个$(0,1)$型张量，将$\forall v\in V$映射到$\omega(v)$。
利用以上结论，以$(1,1)$型张量$T\in\mathcal{T}_V(1,1)$为例，有三种等价看法：

1. 看作双线性映射T：$V^*\times V\to\mathbb{R}$：对于$\forall v\in V$，$\omega\in V^*$，T可以将ω，v映射为$T(\omega;v)\in\mathbb{R}$
2. 看作线性映射T：$V^*\to V^*$：对于$\forall\omega\in V^*$，T可以将ω映射为$T(\omega;\cdot)\in V^*$；
3. 看作线性映射T：$V\to V$：对于$\forall v\in V$，T可以将v映射为$T(\cdot;v)\in V$。

V上的(k,l)型张量T和(k',l')型张量T'的张量积（tensor product）$T\otimes T'$是一个$(k+k',l+l')$型张量，定义如下：
$T\otimes T'\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,\omega^{k+1},\cdots,\omega^{k+k'};v_1,\cdots,v_l,v_{l+1},\cdots,v_{l+l'}\right)$
$\coloneqq T(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)\,T'\left(\omega^{k+1},\cdots,\omega^{k+k'};v_{l+1},\cdots,v_{l+l'}\right)$
$\forall v_1,\cdots,v_{l+l'}\in V$，$\forall\omega^1,\cdots,\omega^{k+k'}\in V^*$。
易证$\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_l\in\mathcal{T}_V(k,l)$，$\omega^1,\cdots,\omega^k\in V^*$，$v_1,\cdots,v_l\in V$（可重复）。

若$\dim V=\dim V^*=\dim M=n$，则存在n元基底$\{e_n\}$和n元对偶基底$\{e^{n*}\}$，使得$\forall T\in\mathcal{T}_V(k,l)$：
$T(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)=T\left(\omega^1_\mu e^{\mu*},\cdots,\omega^k_\nu e^{\nu*};v_1^\lambda e_\lambda,\cdots,v_l^\sigma e_\sigma\right)$
$=\omega^1_\mu\cdots\omega^k_\nu v_1^\lambda\cdots v_l^\sigma\,T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)$
$=\omega^1(e_\mu)\cdots\omega^k(e_\nu)\,v_1\left(e^{\lambda*}\right)\cdots v_l(e^{\sigma*})\,T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)$
$=e_\mu(\omega^1)\cdots e_\nu(\omega^k)\,e^{\lambda*}(v_1)\cdots e^{\sigma*}(v_l)\,T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)$
$=T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)\left(e_\mu\otimes\cdots\otimes e_\nu\otimes e^{\lambda*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma*}\right)(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)$
$\forall v_1,\cdots,v_l\in V$，$\forall\omega^1,\cdots,\omega^k\in V^*$。

即$T(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)=$
$T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)\left(e_\mu\otimes\cdots\otimes e_\nu\otimes e^{\lambda^*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma*}\right)(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)$
简写为张量等式：$T=T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}e_\mu\otimes\cdots\otimes e_\nu\otimes e^{\lambda^*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma*}$
其中$\left\{e_1\otimes\cdots\otimes e_k\otimes e^{1^*}\otimes\cdots\otimes e^{l^*}\right\}$，$e_1,\cdots,e_k\in\{e_n\}$，$e^{1^*},\cdots,e^{l^*}\in\{e^{n*}\}$（即$k$个$\{e_n\}$中元素与$l$个$\{e^{n*}\}$中元素（可重复）作$k+l$元张量积，共有$n^{k+l}$种组合情况）构成$\mathcal{T}_V(k,l)$的$n^{k+l}$元基底。
$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}=T(e^{\mu*},\cdots,e^{\nu*};e_\lambda,\cdots,e_\sigma)$称为$T$在基底$\left\{e_\mu\otimes\cdots\otimes e_\nu\otimes e^{\lambda^*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma*}\right\}$下的分量。

故$\dim\mathcal{T}_V(k,l)=n^{k+l}$。

将T的各个分量$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}$按照指标在不同方向上顺序排放，得到高阶张量类似于高维矩阵的表达方式。
以$\forall T\in\mathcal{T}_V(1,1)$为例，在两个基底$\left\{e_\mu\otimes e^{\nu^*}\right\}$和$\left\{e_1\otimes e^{l^*}\right\}$下的分量之间存在关系：
分量可以排列成矩阵T'、T。设基底之间的变换为：$e'_\nu=A^\sigma{}_\nu e_\sigma$，$e'^{\mu^*}=\left(A^{-T}\right)_\lambda{}^\mu e^{\lambda^*}$，则：
$T'^\mu{}_\nu=T\left(e'^{\mu^*};e'_\nu\right)=T\left(\left(A^{-T}\right)_\lambda{}^\mu e^{\lambda^*};A^\sigma{}_\nu e_\sigma\right)=\left(A^{-T}\right)_\lambda{}^\mu A^\sigma{}_\nu T\left(e^{\lambda^*};e_\sigma\right)=\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\lambda A^\sigma{}_\nu T^\lambda{}_\sigma$
$=\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\lambda T^\lambda{}_\sigma A^\sigma{}_\nu=\left(A^{-1}TA\right)^\mu{}_\nu$
即$T'=A^{-1}TA$，结论：张量经坐标变换前后分量排成的张量阵是相似的。
易证，两者迹$T^\rho{}_\rho=\sum_{\mu=1}^n T^\mu{}_\mu$相等：
$T'^\mu{}_\mu\coloneqq\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\lambda T^\lambda{}_\sigma A^\sigma{}_\mu=A^\sigma{}_\mu\left(A^{-1}\right)^\mu{}_\lambda T^\lambda{}_\sigma=\delta^\lambda{}_\sigma T^\sigma{}_\lambda=T^\lambda{}_\lambda$
定义为$(1,1)$型张量的缩并（contract）：$\mathrm{C}T=T^\mu{}_\mu=T\left(e^{\mu*};e_\mu\right)$。

对一般的张量$T\in\mathcal{T}_V(k,l)$的第i上标（$i\le k$）与第j下标（$j\le l$）的缩并（contract）定义为：
$\mathrm{C}^i_j T\coloneqq T\left(\cdot,\cdots,\cdot,e^{\mu*},\cdot,\cdots,\cdot;\cdot,\cdots,\cdot,e_\mu,\cdot,\cdots,\cdot\right)\in\mathcal{T}_V(k-1,l-1)$，
其中$e^{\mu*}$、e_μ分别是T作用的第i对偶矢量和第j矢量（要对μ求和：$\mathrm{C}^i_j T=\sum_{\mu=1}^n T\left(\cdot,\cdots,e^{\mu*},\cdots,\cdot;\cdot,\cdots,e_\mu,\cdots,\cdot\right)$）。
易见(k,l)型张量的任一缩并都是$(k-1,l-1)$型张量。

先求由一阶张量参与的张量积再做缩并的运算，可以看作是张量对一阶张量（矢量或对偶矢量）的作用。例如：

1. $\mathrm{C}(v\otimes\omega)=\omega_\mu v^\mu=\omega(v)=v(\omega)$，$\forall v\in V$，$\forall\omega\in V^*$；
2. $\mathrm{C}^1_2(T\otimes v)=T(\cdot;v)$，$\forall v\in V$，$\forall T\in\mathcal{T}_V(1,1)$；
3. $\mathrm{C}^2_2(T\otimes\omega)=T(\cdot,\omega;\cdot)$，$\forall\omega\in V^*$，$\forall T\in\mathcal{T}_V(2,1)$。

换句话说，T对ω或v的作用就是T先与ω或v做张量积，再缩并。
同时，对两个张量先做张量积再缩并的操作，也常常称为缩并。

也可以反过来看，张量对矢量/对偶矢量的作用，可以看作是先求张量积，再缩并。

在流形M任一点p的的切空间V_p上的全体(k,l)型张量集合自然记为$\mathcal{T}_{V_p}(k,l)$。若选取坐标系$\{x^\mu\}$使坐标域含p，则可用坐标基底$\{\partial/\partial x^\mu\}$及其对偶坐标基底$\{\mathrm{d}x^\mu\}$表示张量：
$T=T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\otimes\cdots\otimes\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\otimes\mathrm{d}x^\lambda\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^\sigma$

其中

$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}=T\left(\mathrm{d}x^{\mu},\cdots,\mathrm{d}x^{\nu};\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\right)$

若在M（或$A\subset M$）上每一点p指定一个(k,l)型张量，则形成M（或$A\subset M$）上的一个(k,l)型张量场。M上的张量场T是光滑的，若对于$\forall$光滑矢量场$v_1,\cdots,v_l\in V$，和$\forall$光滑对偶矢量场$\omega^1,\cdots,\omega^k\in V^*$，有$T(\omega^1,\cdots,\omega^k;v_1,\cdots,v_l)\in\mathcal{F}_M$。
M上全体光滑(k,l)型张量场T的集合记作$\mathcal{F}_M(k,l)$。
标量场（函数）可以看作是$(0,0)$型张量场，故$\mathcal{F}_M(0,0)=\mathcal{F}_M$。

设p在两坐标系$\{x^{\nu}\}$和$\{x'^{\mu}\}$的坐标域的交集中，坐标变换为$x'^{\mu}=S^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$，$V_p$上的$(k,l)$型张量在两坐标系中的分量分别为$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$、$T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$，则有变换关系（张量变换律）：

$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=\left.\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\right|_p\cdots\left.\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\lambda_k}}\right|_p\left.\frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\nu_1}}\right|_p\cdots\left.\frac{\partial x'^{\sigma_l}}{\partial x^{\nu_l}}\right|_p T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$

$=S^{\mu_1}{}_{\lambda_1}S^{\mu_1}{}_{\lambda_k}\left(S^{-1}\right)^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\left(S^{-1}\right)^{\sigma_l}{}_{\nu_1}T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$

称为张量分量随坐标的变换式。其中x'^{μ}是两系坐标变换函数$x'^{\mu}(x^{\lambda})$，x^{σ}是两系坐标逆变换函数$x^{\sigma}(x'^{\nu})$。
可见，张量分量上指标变换随坐标变换是协变的，分量下指标变换随坐标变换是逆变的。
另一方面，设两坐标系$\{x^{\lambda}\}$、$\{x'^{\mu}\}$分别有基底$\{e_{\lambda}\}$、$\{e'_{\mu}\}$，基底变换为$e'_{\mu}=A^{\lambda}{}_{\mu}e_{\lambda}$，则有对偶基底$\{e^{\sigma*}\}$、$\{e'^{\nu*}\}$，对偶基底变换为$e'^{\nu*}=\left(A^{-T}\right)_{\sigma}{}^{\nu}e^{\sigma*}$，则

$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}e_{\mu}\otimes\cdots\otimes e_{\nu}\otimes e^{\lambda^*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma^*}$

$T=T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}e'_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e'_{\mu_k}\otimes e'^{\nu_1*}\otimes\cdots\otimes e'^{\nu_l*}$

$=T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_k}\otimes e^{\sigma_1*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma_l*}$

$=T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}A^{\lambda_1}{}_{\mu_1}A^{\lambda_k}{}_{\mu_k}\left(A^{-T}\right)_{\sigma_1}{}^{\nu_1}\left(A^{-T}\right)_{\sigma_1}{}^{\nu_l}e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_k}\otimes e^{\sigma_1*}\otimes\cdots\otimes e^{\sigma_1*}$

得$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=\left(A^{-1}\right)^{\mu_1}{}_{\lambda_1}\left(A^{-1}\right)^{\mu_k}{}_{\lambda_k}\left(A^{T}\right)_{\nu_1}{}^{\sigma_1}\left(A^{T}\right)_{\nu_l}{}^{\sigma_1}T^{\lambda_1\cdots\lambda_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$

可见，张量分量上指标变换随基底变换是逆变的，分量下指标变换随基底变换是协变的。
因此，张量分量的上指标和下指标又常分别被称为逆变指标和协变指标，分量只有上/下指标的张量常常被称为逆变/协变张量，分量分别被称为逆变/协变分量，分量上下指标都有的称为混合张量，分量称为混合分量。

若取坐标基底$\{\partial/\partial x^{\lambda}\}$、$\{\partial/\partial x'^{\mu}\}$及其对偶坐标基底$\{\mathrm{d}x^{\sigma}\}$、$\{\mathrm{d}x'^{\nu}\}$，易证：

$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}=\left.\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\right|_p\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}=\left(S^{-1}\right)^{\lambda}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$

$\mathrm{d}x'^{\nu}=\left.\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right|_p\mathrm{d}x^{\sigma}=S^{\nu}{}_{\sigma}\mathrm{d}x^{\sigma}$

可见，坐标基底随着坐标变换是逆变的，类似这样的基底称为逆变基底，$A^{\lambda}{}_{\mu}=\left(S^{-1}\right)^{\lambda}{}_{\mu}$，$e'_{\mu}=\left(S^{-1}\right)^{\lambda}{}_{\mu}e_{\lambda}$；
对偶坐标基底随着坐标变换是协变的，类似这样的基底称为协变基底，$\left(A^{-T}\right)_{\sigma}{}^{\nu}=S^{\nu}{}_{\sigma}$，$e'^{\nu*}=S^{\nu}{}_{\sigma}e^{\sigma*}$。
在协变基底下的分量/指标为协变分量/指标，在逆变基底下的分量/指标为逆变分量/指标。

§2.5 度规张量场

2018年5月28日 23:09

矢量空间V上的一个度规（metric）g是一个对称的、非退化的（non-degenerate）$(0,2)$型张量。

1. 对称性：$g(u,v)=g(v,u)$，$\forall u,v\in V$；
2. 非退化性：$g(u,v)\,,\forall u\in V\Rightarrow v=\underline{0}\in V$。

注1：若g非退化，则它在V的任一基底$\{e_n\}$下的分量$g_{\mu\nu}$排成的矩阵也是非退化（行列式不为零）的。反之，若有基底使得的g分量矩阵非退化，则g非退化。
注2：$g(u,v)$可以为负，且$g(u,u)=0$不意味着$u=0$。

两矢量$u,v\in V$在度规g下的内积为：$g(u,v)$
$v\in V$的长度（length）/大小（magnitude）/模定义为：$|v|\coloneqq\sqrt{|g(v,v)|}$。
矢量$u,v\in V$是互相正交的（orthogonal），若$g(u,v)=0$。
V的基底$\{e_n\}$是正交归一的（orthonormal），若$\{e_n\}$的任二基矢互相正交且$g\left(e_\mu,e_\mu\right)=\pm1$。
易见，在正交归一基底下的分量满足：

$$g_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ \pm1 & \mu=\nu\end{cases}$$

排成的矩阵为对角矩阵，且对角元均为±1。

任何带度规的矢量空间都有正交归一基底，且度规写成对角矩阵形式时对角元$+1$和-1的个数与所选正交归一基底无关。
用正交归一基底写成对角矩阵后，对角元全为$+1$的度规称为正定的（positive definite）或Riemannian的，全为-1的叫负定的（negative definite），其他称为不定的（indefinite）。只有一个对角元为-1的不定度规叫Lorentzian的。
对角元之和叫度规的号差（signature）。
注：关于Lorentzian度规，上述定义反映的是一种习惯，按照定义4维Lorentzian度规的对角元为$(-1,1,1,1)$，号差为$+2$。同时也有另一种习惯，此时四维Lorentzian度规对角元为$(1,-1,-1,-1)$，号差为-2。两者本质上相同。

带洛伦兹度规的矢量空间的元素可以分为三类：

1. 类空（space-like）矢量，若$g(v,v)>0$；
2. 类时（time-like）矢量，若$g(v,v)<0$；
3. 类光（light-like）矢量，若$g(v,v)=0$（也称为零模矢量null vector）。

注：若使用号差为-2的Lorentzian度规，则上述定义正好相反。

度规是一个$(0,2)$型张量，即$V\times V\to\mathbb{R}$的双线性映射。同时也可看作是将$\forall v\in V$映射为$g(v,\cdot)\in V^*$的$V\to V^*$的线性映射。可以证明，这是一个同构映射。因此，在选定度规之后，可

得到一个V和V^*之间的自然同构，借此将V与V^*自然认同。

M上的对称的、处处非退化的$(0,2)$型张量场，称为度规张量场。
设$C(t)$是M上的任一$\mathbf{C}^1$曲线，$T = \partial/\partial t$是其切矢，则$|T| \coloneqq \sqrt{|g(T,T)|}$。
于是在该点附近的元线长定义为：$\mathrm{d}l \coloneqq |T|\,\mathrm{d}t \coloneqq \sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t$
于是$C(t)$线长定义为：
$$l \coloneqq \int |T|\,\mathrm{d}t \coloneqq \int \sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t$$
对于有Lorentzian度规场的流形，若$\mathbf{C}^1$曲线$C(t)$在M各点的切矢都类空，则称曲线$C(t)$是类空曲线，类似定义类时曲线和类光曲线（类光曲线的线长恒为零）。对于切矢在三种类型之间变化的曲线，线长没有定义。
曲线的线长与其参数化无关，即曲线重参数化不改变线长。
线长也与坐标系无关，但是若曲线处于坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内，则线长可以由坐标表示。由$T = \partial/\partial t$，得
$$g(T,T) = g\left(T^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = T^\mu T^\nu\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$$
由曲线上任一点切矢在坐标系下的坐标分量是相应参数式对参数的导数（即$T^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$），得
$$g(T,T) = T^\mu T^\nu\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\, g_{\mu\nu}$$
于是元线长为$\mathrm{d}l = \sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t = \sqrt{|g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu|}$
引入线元（line element）：$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$，是坐标微分（对偶坐标基矢）的二次型。
则线长：
$$l = \int \sqrt{|\mathrm{d}s^2|}$$
由于线元包含在所涉及的坐标系下的全部分量，故给定线元即给定了度规场。

关于式$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$，平时习惯上，将其理解为某一元线段的线长表达式，将$\mathrm{d}l$、$\mathrm{d}x^\mu$、$\mathrm{d}x^\nu$理解为某些小量。但准确来说，因$\mathrm{d}x^\mu$、$\mathrm{d}x^\nu$都是对偶矢量，故而$\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$实际上只能应当是张量积$\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$。而这样右边就成为了度规张量$g$在基底$\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$下的展开式$g = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$。另一方面，尽管有习惯上的理解，但是在微分几何里找不到对$\mathrm{d}s^2$的准确定义解释。事实上，$\mathrm{d}s^2$正是度规张量g的另一记号。
由于$\mathrm{d}l^2$在近似理解之中，可以看作是元线段长度的平方，而$\mathrm{d}s^2$不过是$\mathrm{d}l^2$或$-\mathrm{d}l^2$的代号，因此习惯理解如此广泛。若要坚持微分几何的概念，则标准写法应为：
$$l = \int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$

设曲线C：$I \to M$是类空或类时曲线，则线上任一点的切矢长度$|T|$是参数t的函数$|T|(t)$。任一指定线上某点$C(t_0)$为起点，则介于$C(t)$与$C(t_0)$之间的线长也可以表示为为t的函数：

$$l(t)=\int_{t_0}^{t}|T|(t')\,\mathrm{d}t'$$

从而l也可充当该线的参数，称为线长参数。由$\mathrm{d}l=\sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t$可知，以线长为参数的曲线切矢满足$\sqrt{|g(T,T)|}\,\mathrm{d}t=1$，即处处具有单位长度。

设流形M上给定度规场g，则(M,g)叫做广义Riemannian空间。若g正定，则叫Riemannian空间；若g为Lorentzian，则叫pseudo-Riemann（伪黎曼）空间，也就是物理上的时空。

设$\{x^\mu\}$是$\mathbb{R}^n$的自然坐标，在$\mathbb{R}^n$上定义度规张量场为：$\delta\coloneqq\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu$，其中$\delta_{\mu\nu}$为Kronecker函数：

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ +1 & \mu=\nu\end{cases}$$

则$(\mathbb{R}^n,\delta)$称为n维Euclidean空间，δ称为Euclidean度规。

Euclidean空间是最简单的一种Riemannian空间。

在Euclid空间中，线元表达式为$\mathrm{d}s^2=\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$，对于$n$维Euclid空间即$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\left(x^1\right)^2+\mathrm{d}\left(x^2\right)^2+\cdots+\mathrm{d}(x^n)^2$。

由定义可知，易见：

$$\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\mathrm{d}x^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta=\delta_{\alpha\beta}$$

即自然坐标基底用Euclid度规衡量是正交归一的。也可以直接利用$(0,2)$型张量的分量的定义表述为：自然坐标都满足下式（正交归一）：

$$\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\alpha\beta}$$

但是满足上式的不一定都是自然坐标。例如，利用自然坐标$\{x^\mu\}$通过$x'^\mu=x^\mu+a^\mu$（其中a^μ代表一系列常数$a^1,a^2,\cdots$）导出的坐标$\{x'^\mu\}$，其基底$\{\partial/\partial x'^\mu\}$也满足。进一步，显然，基于自然坐标通过以下三种方式定义的新坐标系都满足：

1. 平移（translation）：$x'^\mu=x^\mu+a^\mu$；
2. 转动（rotation）（以二维为例）：$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha$，$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$；
3. 反射（reflection）（沿某一x^k方向）：$x'^k=-x^k$，$x'^{\mu\neq k}=x^{\mu\neq k}$。

n维Euclidean空间中满足$\delta\left(\partial/\partial x^\alpha,\partial/\partial x^\beta\right)=\delta_{\alpha\beta}$的坐标系都被称为Descartesian/Cartesian坐标系。2维Euclidean空间中Cartesian系之间的坐标变换关系只可能是上述三种，或它们的复合。在Euclidean度规衡量下正交归一的都是Cartesian系。

注意，Euclidean度规δ只有在Cartesian系下的分量才是Kronecker函数$\delta_{\mu\nu}$，在非Cartesian系下的分量不是Kronecker函数$\delta_{\mu\nu}$，为表区分一般不写为$\delta_{\mu\nu}$。

Euclidean空间非Cartesian系的例子：极坐标系。以二维极坐标系$\{r,\varphi\}$为例，其坐标基底应为$\{\partial/\partial r,\partial/\partial\varphi\}$，但是在Euclidean度规下并不正交归一，关键在于$\partial/\partial\varphi$不归一：$\delta(\partial/\partial\varphi,\partial/\partial\varphi)=r^2\neq1$。

因此实际上经常使用的极坐标基底是$\left\{\hat{e}_r,\hat{e}_\varphi\right\}$，其中$\hat{e}_\varphi=r^{-1}\,\partial/\partial\varphi$是将$\partial/\partial\varphi$归一化的结果。

设$\{x^\mu\}$是$\mathbb{R}^n$的自然坐标，在$\mathbb{R}^n$上定义度规张量场为：$\eta \coloneqq \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$，其中$n$维$\eta_{\mu\nu}$满足：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ -1 & \mu = \nu = 0 \\ +1 & \mu = \nu = 1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$$

则$(\mathbb{R}^n,\eta)$称为n维Minkowski/pseudo-Euclidean空间，η称为Minkowski度规。
Minkowski/pseudo-Euclidean空间是最简单的pseudo-Riemannian空间。
在Minkowski空间中，线元表达式为$\mathrm{d}s^2 = \delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$，对于$n$维Minkowski空间即$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}(x^0)^2 + \mathrm{d}(x^1)^2 + \mathrm{d}(x^2)^2 + \cdots + \mathrm{d}(x^{n-1})^2$。
自然也有：

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = \eta_{\alpha\beta}$$

可见自然坐标基底在Minkowski度规衡量下也是正交归一的。同样满足上式的不一定只有自然坐标，也有以下三种变换：

1. 平移：$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$；
2. 伪转动（boost）（以二维坐标$\{t,x\}$为例）：$t' = t\cosh\lambda + x\sinh\lambda$，$x' = t\sinh\lambda + x\cosh\lambda$；
3. 反射（沿某一x^k方向）：$x'^k = -x^k$，$x'^{\mu\neq k} = x^{\mu\neq k}$。

注：boost伪转动坐标变换就是所谓的Lorentzian变换（将在“Killing矢量场”节证明）。
n维Minkowski空间中满足$\eta(\partial/\partial x^\alpha,\partial/\partial x^\beta) = \eta_{\alpha\beta}$的坐标系都被称为Lorentzian/pseudo-Cartesian坐标系。
类似的，2维Minkowski空间中Lorentzian系之间的坐标变换关系只可能是上述三种，或它们的复合。在Minkowski度规衡量下正交归一的都是Lorentzian系。Minkowski度规η只有在Lorentzian系下的分量才是被定义的$\eta_{\mu\nu}$，在非Lorentzian系下的分量不是被定义的$\eta_{\mu\nu}$，为表区分一般不写为$\eta_{\mu\nu}$。

特别地，一般还会常用一个坐标变换称为反演（inversion）：$x'^\mu = -x^\mu$。
与反射不同，n维空间之中的反射是相对于一个$n-1$维的“面”对称，而反演是相对于一个点对称。但事实上反演并非是独立的，它可以表示为其他三种变换的特例或复合，例如Euclidean空间中的转动令$\alpha = \pi$，或Minkowski空间中的n次不同方向反射的复合。

§2.6 抽象指标记号

2018年6月2日 4:57

Penrose首创抽象指标记号（the abstract index notation），用于方便地表示张量及其运算。

1. (k,l)型张量用一个带有k个拉丁字母上标、l个拉丁字母下标的字母表示：$T^{a\cdots d}{}_{e\cdots h}$。
   注意不同于张量的分量$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}$表示一个实数，其中的希腊字母上下指标表示基底的次序，因而对于一个给定的$T^{\mu\cdots\nu}{}_{\lambda\cdots\sigma}$，$\mu,\cdots,\nu,\lambda,\cdots,\sigma$均是确定的正整数，例如某个分量就是$T^{12}{}_{3}$，因而被称为具体指标。而抽象指标$a,\cdots,d,e,\cdots,h$（暂时）仅仅是表示张量的类型的一个标记，用以占据一个作用对象的位置，因而并不对应于某具体的数字。
   正是由于抽象指标只标记类型，没有具体的值，所以$T^{ab}{}_{c}$和$T^{de}{}_{f}$表示同一个张量T，v^a和v^b代表同一个矢量v。
   但是张量等式仍要注意抽象指标左右平衡，如$w^a=u^a+\alpha v^a$或$w^b=u^b+\alpha v^b$，但不能$w^a=u^b+\alpha v^a$。

   特殊地，为了区分四维和三维的张量分量具体指标，对于三维Riemannian空间，具体指标可以用从i开始的若干拉丁字母$i,j,k\cdots$（都取1,2,3）来表示。
2. 上下指标若有重复，则暗示对这两个指标所标记的位置进行缩并，如：
   $T^a{}_a=\mathrm{C}\,T=T^\mu{}_\mu=T\left(e^{\mu*};e_\mu\right)$；$T^{ab}{}_a=\mathrm{C}_1^1\,T=T\left(e^{\mu*},\cdot;e_\mu\right)$；$T^{ab}{}_b=\mathrm{C}_1^2\,T=T\left(\cdot,e^{\mu*};e_\mu\right)$；
3. 省略张量积记号：设$T\in\mathcal{T}_V(2,1)$，$S\in\mathcal{T}_V(1,1)$，则$T\otimes S$可以被表示为$T^{ab}{}_cS^e{}_f$。
   注意：通常不用抽象指标表示的张量积运算不具有交换律：$\mu\otimes\omega(u,v)=\mu(u)\,\omega(v)\neq\omega(u)\,\mu(v)=\omega\otimes\mu(u,v)$，即$\mu\otimes\omega\neq\omega\otimes\mu$，但是借助抽象指标的一种表达，看似是交换了位置，但实质上并非交换律，如下。
   利用结论：张量对矢量/对偶矢量的作用，可以看作是先求张量积，再缩并。因此，将“作用”写成张量积的形式，再利用抽象指标，刻意把映射与其作用的对象写成用同样字母表示的成对指标，即可表示“作用”。例如$\omega\otimes\mu(u,v)$既可以写成$\omega_a\mu_bu^av^b$，也能写成$\mu_b\omega_au^av^b$，都表示$\omega_au^a\mu_bv^b=\omega(u)\,\mu(v)=\omega\otimes\mu(u,v)$。那么$\omega_a\mu_b=\mu_b\omega_a$。
   也即，代表张量的字母带着自己的抽象指标可以（形式上）交换位置。张量积真正的不可交换律体现为$\omega_a\mu_b\neq\mu_a\omega_b$。
   从这个角度我们可以从另一个角度给抽象指标一个意义：一个张量整体的所有抽象指标，表示张量按照顺序的所有作用对象的位置，甚至作用对象本身。例如$T^{ab}{}_a$，代表上1与下的对象相同；$\omega_a\mu_b=\mu_b\omega_a$，$a$、$b$分别代表作用对象的$a$位对象和$b$位对象，因而抽象指标随着张量一起交换位置，本质上分别作用的对象没有变。而$\omega_a\mu_b\neq\mu_a\omega_b$，张量分别作用的对象也随之发生了变化，自然不相等。
4. 涉及张量的分量时，指标仍使用希腊字母，表示具体指标。两套指标可以一起用，例如：

$T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma} e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *}$改写为$T^{ab}{}_c = T^{\mu\nu}{}_{\sigma} (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\sigma)_c$，
其中$(e^\sigma)_c$的下标c已经表明它是对偶矢量，无需再用$*$写成$(e^{\sigma *})_c$。
$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T(e^{\mu *}, e^{\nu *}; e_\sigma)$改写为$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T^{ab}{}_c (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e_\sigma)^c$。

抽象指标与具体指标也可以混合使用。例如：设$T \in \mathcal{T}_V(0,2)$，则T用抽象指标表示为T_{ab}。令e_μ为某基底的第μ基矢，则$T(\cdot; e_\mu) = \mathrm{C}_2^1(T \otimes e_\mu)$。而$T \otimes e_\mu$用抽象指标应该记作$T_{ab}(e_\mu)^c$，则加上缩并后应该记为$T(\cdot; e_\mu) = \mathrm{C}_2^1(T \otimes e_\mu) = T_{ab}(e_\mu)^b$。也可简记为$T_{a\mu}$。这里具体指标的抽象指标混合使用了。对于它的理解，不妨认为$T_{a1}, T_{a2}, \cdots, T_{an}$是$n$个对偶矢量，$T_{a\mu}$是其中的第$\mu$对偶矢量。其他具体指标和抽象指标的混合使用也可类比理解，希腊字母的具体指标表示次序或具体正整数，拉丁字母的抽象指标表示类型。

5. 我们已经知道，对于(1,1)型张量$T^a{}_b$，可以看作是线性映射$T^a{}_b$：$V^* \to V^*$，也可以看作线性映射$T^a{}_b$：$V \to V$。也就是说，$T^a{}_b$作用于矢量仍然得到矢量$T^a{}_b u^b = v^a \in V$，作用于对偶矢量仍然得到对偶矢量$T^a{}_b \omega_a = \mu_b \in V^*$。这一点用抽象指标就显得十分明显：$T^a{}_b u^b$、$T^a{}_b \omega_a$很明显体现了矢量类型。

   特别关注V上的恒等映射$\delta^a{}_b$：$V \to V$：$\delta^a{}_b v^b = v^a$。容易证明它也是V^*上的恒等映射$\delta^a{}_b$：$V^* \to V^*$：$\delta^a{}_b \omega_a = \omega_b$。进一步说，它与任何资料缩并的结果都得到那个张量本身，仅仅将上标b换成a，或下标a换成b：$\delta^a{}_b T^{\cdots b \cdots}{}_{\cdots} = T^{\cdots a \cdots}{}_{\cdots}$，$\delta^a{}_b T^{\cdots}{}_{\cdots a \cdots} = T^{\cdots}{}_{\cdots b \cdots}$。显然，$\delta^a{}_b$是一个(1,1)型张量。容易证明，$\delta^a{}_b$在一组基底$\{(e_\mu)^a\}$及其对偶基底$\{(e^\nu)_b\}$下的分量恰为Kronecker函数：$\delta^\mu{}_\nu = \delta^a{}_b (e^\mu)_a (e_\nu)^b$。

6. 取度规$g_{ab} \in \mathcal{T}_V(0,2)$，则对于$\forall v \in V$，$g(\cdot, v) \in V^*$，即$g$可以看作是$V \to V^*$的一个线性映射。进一步，它是一一到上的，即$g$是一个$V$和$V^*$之间的同构，记作$\mu$：$\mu(u) = g(u, v)$，$\forall u \in V$，就是和$v$唯一对应的对偶矢量。这样，只要$V$上存在度规结构，就能天生建立起和$V^*$之间的逐点对应，从而将之天然认同。
   因此，虽然矢量和对偶矢量的数学建构完全不同，但是在存在度规的广义Riemannian空间上，可以认为它们所代表的物理量是完全相同对等的。
   由于$g(\cdot, v) = \mathrm{C}_2^1(g \otimes v) = g_{ab} v^b \in V^*$与$v^a$这样的唯一对应，且具有相同物理含义，不妨将$g_{ab} v^b$记为$v_a$。即$v_a = g_{ab} v^b$。
   同构映射g：$V \to V^*$必存在逆映射g^{-1}：$V^* \to V$，作为张量，是(2,0)型，记作g^{ab}。则同样，对于$\forall \omega \in V^*$，有唯一的矢量与之认同，记作$\omega^a = g^{ab} \omega_b$。
   则自然的结论：$\omega^a = g^{ab} \omega_b = g^{ab} g_{bc} \omega^c$，得到$g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c$为恒等映射。其实这是$g^{ab}$作为$g_{ab}$逆映射的必然。
   以上可以看出，度规g_{ab}及g^{ab}可以用于对任意张量做上升、下降指标的操作。如$T_{ab} = g_{ac} T^c{}_b$。其背后的数学实质是度规g对T作用，即求张量积再缩并：$g(\cdot, e_\mu) \otimes T(e^{\mu *}; \cdot)$。另一方面，这种升降指标的操作也说明了，若赋予了相同的度规，阶数（$k + l$）相同（意味着可以有通过限次升降指标实现转化）的张量空间之间，也是天然同构的。特别是由于在赋予了度规之后，矢量和对偶矢量不再区分，因而张量的上下指标也不再区分。因此同阶张量所表达的物理量，也可以被认为是全同的。

   现在考虑g_{ab}与g^{ab}在选定基底下的分量之间的关系。

$g_{ab}g^{bc}=g_{\mu\nu}(e^{\mu})_a(e^{\nu})_b g^{\lambda\sigma}(e_{\lambda})^b(e_{\sigma})^c=g_{\mu\nu}(e^{\mu})_a g^{\lambda\sigma}(e_{\sigma})^c\delta^{\nu}{}_{\lambda}=g_{\mu\nu}(e^{\mu})_a g^{\nu\sigma}(e_{\sigma})^c$
$=g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}(e^{\mu})_a(e_{\sigma})^c$
而$g_{ab}g^{bc}=\delta^c{}_a=\delta^{\sigma}{}_{\mu}(e_{\sigma})^c(e^{\mu})_a$，故$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}=\delta^{\mu}{}_{\sigma}$。

分量$g_{\mu\nu}$与$g^{\mu\nu}$也可以实现对张量分量的升降指标的作用：
$g_{\mu\nu}v^{\nu}=g_{ab}(e_{\mu})^a(e_{\nu})^b v^{\nu}=g_{ab}(e_{\mu})^a v^b=v_a(e_{\mu})^a=v_{\mu}$。

记度规作用于坐标基底得到$(\partial/\partial x^{\mu})_a=g_{ab}(\partial/\partial x^{\mu})^b$为一对偶矢量，则在对偶坐标基底下展开，有：
$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_a=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^b=g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\nu})_a$
同理
$(\mathrm{d}x^{\mu})^a=g^{ab}(\mathrm{d}x^{\mu})_b=g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)^a$
但是，若$g_{ab}=\delta_{ab}$，且取坐标系为Cartesian系，则：
$\delta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^b=\delta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\nu})_a=(\mathrm{d}x^{\nu})_a$
$\delta^{ab}(\mathrm{d}x^{\mu})_b=\delta^{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)^a$
若$g_{ab}=\eta_{ab}$，且取坐标系为Lorentzian系，则：
$\eta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^{0}}\right)^b=-(\mathrm{d}x^{0})_a$
$\eta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right)^b=(\mathrm{d}x^{i})_a$
$\eta^{ab}(\mathrm{d}x^{0})_b=-\left(\frac{\partial}{\partial x^{0}}\right)^a$
$\eta^{ab}(\mathrm{d}x^{i})_b=\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right)^a$
其中$i=1,2,3$。

张量的抽象上指标和抽象下指标也类比于具体指标，常被称为逆变指标（contravariant index）和协变指标（covariant index），取其随基底变换的方式之义，也是由于抽象指标与分量的具体指标都能以相同的方式表示张量的类型。只有上/下抽象指标的张量称为逆变/协变张量。上下抽象指标都有的称为混合张量。矢量又被称为逆变张量，对偶矢量又被称为协变矢量。

$(0,2)$型张量的对称性可以定义为：张量$T\in\mathcal{T}_V(0,2)$是对称的（symmetric），若$T(u,v)=T(v,u)$，$\forall u,v\in V$。
由于$T(u,v)=T_{ab}u^a v^b$，$T(v,u)=T_{ab}v^a u^b=T_{ba}u^a v^b$，则对称性可以用抽象指标表示为$T_{ab}=T_{ba}$。$T_{ab}$与$T_{ab}$本来表示同一个张量，但是只有在张量对称时，才能以$T_{ab}=T_{ba}$表示。可见抽象指标在写等式时比独立表示张量时要更加小心。

同理，$(1,1)$型张量既可以表示为$T^a{}_b$，也可以表示为$T_b{}^a$，但是只有在通过g_{ca}降指标后得到$T_{cb}=g_{ca}T^a{}_b$和$T_{bc}=g_{ca}T_b{}^a$后得到的$(0,2)$型张量是对称的，才能写成$T^a{}_b=T_b{}^a$。

$(0,2)$型张量的对称部分$T_{(ab)}$和反称部分$T_{[ab]}$分别定义为：

$$T_{(ab)}\coloneqq\frac{1}{2}\left(T_{ab}+T_{ba}\right)$$

$$T_{[ab]}\coloneqq\frac{1}{2}\left(T_{ab}-T_{ba}\right)$$

一般地，$(0,l)$型张量的对称部分$T_{(ab)}$和反称部分$T_{[ab]}$分别定义为：

$$T_{(a_1a_2\cdots a_l)}=\frac{1}{l!}\sum_{\pi}T_{a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}\cdots a_{\pi(l)}}$$

$$T_{[a_1a_2\cdots a_l]}=\frac{1}{l!}\sum_{\pi}(-1)^{\tau(\pi)}T_{a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}\cdots a_{\pi(l)}}$$

（其中π表示正整数组$(1,2,\cdots,l)$的一种排列，$\pi(n)$为这个排列的第n个数字，$\tau(\pi)$为排列的逆序数，逆序数为奇数的排列称为奇排列，否则为偶排列。）

张量$T\in\mathcal{T}_V(0,l)$是全对称的，若$T_{a_1a_2\cdots a_l}=T_{(a_1a_2\cdots a_l)}$；是全反称的，若$T_{a_1a_2\cdots a_l}=T_{[a_1a_2\cdots a_l]}$。

若$T_{a_1a_2\cdots a_l}$是全对称的，则$T_{a_1a_2\cdots a_l}=T_{a_{\pi_1}a_{\pi_2}\cdots a_{\pi_l}}$（展开式中的任一排列都等于自身）；

若$T_{a_1a_2\cdots a_l}$是全反称的，则$T_{a_1a_2\cdots a_l}=(-1)^{\tau(\pi)}T_{a_{\pi_1}a_{\pi_2}\cdots a_{\pi_l}}$（展开式中偶排列项等于自身，奇排列项相反。）

另外，张量的全对/反称性还具有以下性质：

1. 缩并时，对/反称括号具有“传染性”：
   $T_{[a_1a_2\cdots a_l]}S^{a_1a_2\cdots a_l}=T_{[a_1a_2\cdots a_l]}S^{[a_1a_2\cdots a_l]}=T_{a_1a_2\cdots a_l}S^{[a_1a_2\cdots a_l]}$，圆括号亦然。
2. 括号内部的同种括号，可以随意增删：
   $T_{[a_1\cdots a_p\cdots a_q\cdots a_l]}=T_{[a_1\cdots[a_p\cdots a_q]\cdots a_l]}$，圆括号亦然；
3. 括号内部的异种括号，整体为零：
   $T_{[a_1\cdots(a_p\cdots a_q)\cdots a_l]}=0$；
4. 异种括号缩并得0：
   $T_{[a_1a_2\cdots a_l]}S^{(a_1a_2\cdots a_l)}=0$；
5. $T_{a_1a_2\cdots a_l}=T_{(a_1a_2\cdots a_l)}\Rightarrow T_{[a_1a_2\cdots a_l]}=0$；
   $T_{a_1a_2\cdots a_l}=T_{[a_1a_2\cdots a_l]}\Rightarrow T_{(a_1a_2\cdots a_l)}=0$。

对于T的上指标的对称性，也有相似的定义和性质。