

# 第六章 狭义相对论

狭义相对论是Einstein于1905年提出的开创性动力学理论，继古典物理时代以来首次提出了关于时间和空间的变革性观点，并且成功将Maxwell电磁理论与动力学相容，成功描述了宏观物体在高速运动情形下的物理，并且对微观粒子高速运动的动力学理论有着极为重要的铺垫和启发意义。

利用4维几何语言对狭义相对论进行重新表述，有助于提高对于相对论中许多概念方法的认识，清晰理解各类典型效应，也能极大帮助整理理论思想和抓住理论本质。

其中涉及到关于连续介质、理想流体、电磁场等的内容，对于广义相对论的部分有重要作用。本章最后给出了一个关于Lorentz变换的特别推导过程，从中可以清晰看出它与Galileo变换之间的联系，以及经典力学和相对论力学之间的重要区别。

§6.1 4维表述基础

§6.2 经典引力论和相对论的时空结构

§6.3 典型效应分析

§6.4 质点运动学和动力学

§6.5 连续介质的能动张量

§6.6 理想流体动力学

§6.7 电动力学

附 Lorentz变换的一种推导方式

# §6.1 4维表述基础

2018年7月23日 5:32

将时间的一点和空间的一点结合得到的时空点称为一个事件 (event)，全部事件的集合叫做时空 (space-time)。时空的数学描述是一个4维流形 (并配以适当的附加结构)。

相对论研究的基本对象是粒子 (particle)，它是一种抽象化模型，可以分为两类：有质量的粒子，相当于牛顿力学的质点；无质量的粒子，为方便统称为光子 (photon)。

一个粒子的全部历史是一系列的事件 (时空点)，它们在4维时空中组成一条曲线，称为粒子的世界线 (world line)。

## 6.1.1 狭义相对论的背景时空

物理上看，任一事件 $p$ 都可用某惯性坐标系的坐标来表达。考虑 $\mathbb{R}^4$ 中邻近的两点，表示物理上的两个相邻事件。若如下借任一惯性坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 定义它们的时空元间隔： $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  (采用几何单位制， $c = 1$ )，则不难证明它在Lorentzian变换下保持形式不变，即 $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ 。

而数学上4维Minkowski空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的线元在Lorentzian坐标系下的分量表示为 $ds^2 = -d(x^0)^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2$ ，且在各Lorentzian系下保持形式不变，因此可以认为物理上的元间隔对应于数学上的Minkowski线元，物理上的惯性坐标系对应于数学上的Lorentzian坐标系，狭义相对论的背景时空对应于Minkowski空间，因而 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 又被称为Minkowski时空。发生在Minkowski时空的物理现象和过程属于狭义相对论的研究范围。狭义相对论的背景时空是平直的。

借助惯性坐标系可以定义任何粒子的速率。设 $L$ 为世界线， $p, q$ 为 $L$ 上两邻点， $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ 和 $(t_2, x_2, y_2, z_2)$ 分别为 $p, q$ 在某一惯性坐标系下的坐标表示，则

$$u := \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

于是可知世界线 $L$ 在之间的线元为 $ds^2 = -(1 - u^2) dt^2$ 。这表明狭义相对论关于粒子速率：

1. 光子对于任意惯性系的速率 $u = 1 \Leftrightarrow$ 光子的世界线是类光曲线 ( $ds^2 = 0$ )；
2. 质点对于任意惯性系的速率 $u < 1 \Leftrightarrow$ 质点的世界线是类时曲线 ( $ds^2 < 0$ )。

这是纯粹从时空几何出发的性质，不依赖于速率的定义。一个粒子就相当于4维时空中的一条类时或类光的世界线。

## 6.1.2 参考系与坐标系

进行物理观测的主体叫观测者 (observer)，通常简化为质点。

观者只能最位于自己世界线上的事件进行直接观测，对其他事件的观测称为间接观测。为对全时空（或其开子集）内的事件都进行直接观测，考虑在每一点都假设存在一个观者。这种无数观者的集合 $\mathcal{R}$ 称为一个参考系 (reference frame)，若它满足：时空（或其开子集）的任一点都有且仅有 $\mathcal{R}$ 内一个观者的世界线经过。即：参考系是类时曲线束（可以互不平行）。

在所有观者之中存在一类特殊的“自由的”观者：惯性观者 (inertial observer)。根据狭义相对性原理，这些惯性观者之间是平权的。

惯性观者在所在的惯性坐标系内 $u = 0$ ，因而其世界线就是惯性系内的一条 $t$ 坐标线。设 $\partial_a$ 是坐标系的普通导数算符，则 $\partial_a(\partial/\partial t)^b = 0$ ，故 $(\partial/\partial t)^a \partial_a(\partial/\partial t)^b = 0$ 。注意到惯性坐标系是 Lorentzian 坐标系，可知 $\partial_a$ 是与 $\eta_{ab}$ 适配的导数算符，因而 $(\partial/\partial t)^a \partial_a(\partial/\partial t)^b = 0$ 就是测地线方程，可见任一惯性观者的世界线都是 Minkowski 空间的类时测地线。反之，给定 Minkowski 空间的任一类时测地线，都可找到 Lorentzian 坐标系使其称为该系的 $t$ 坐标线。

既然 Lorentzian 坐标系的每一 $t$ 坐标线都是一个惯性观者，那么改系的全体 $t$ 坐标线就组成一个惯性参考系，而该坐标系称为该惯性参考系内的一个惯性坐标系。惯性系的定义域是整个 $\mathbb{R}^4$ ，因此又称为整体惯性系。

属于同一惯性系的所有惯性观者的世界线是平行测地线，不同惯性系的惯性观者的世界线不平行。惯性系是平行类时测地线束；质点的运动是“自由的”或“做惯性运动的”，若其世界线为类时测地线。

4维 Minkowski 空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的 Lorentzian 坐标系之间的坐标变换对应于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的等度规映射。任一等度规映射可由若干基本的等度规映射复合而成，而基本等度规映射分为“分立的”（反射、反演）和“连续的”（平移、空间转动、伪转动），例：

1. 平移： $\{t' = t + a, x' = x, y' = y, z' = z\}$ 在物理上就相当于将惯性系 $\mathcal{R}$ 内所有观者的标准钟初值设定增加 $a$ ；
2. 伪转动 $\{t' = \gamma(t - vx), x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z\}$  ( $v$ 为正的常参数) 在物理上对应于两惯性系 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 之间的 Lorentzian 变换，两者空间坐标轴对应同向， $\mathcal{R}'$ 系相对于 $\mathcal{R}$ 系以速率 $v$ 沿 $x$ 轴正向匀速运动，两者空间坐标系重合的瞬间定为 $t' = t = 0$ 时刻。

同一参考系内可以有許多不同的坐标系。例如平移和空间转动只是改变的事件点的坐标值，并没有改变其中的观者（类时曲线束）的组成；而由一个伪转动联系的两个惯性坐标系必然分属两个惯性参考系，因为它们的 $t$ 坐标线不同。

### 6.1.3 固有时与坐标时

假定为了观测，每个观者都携带一个走时标准的钟，叫标准钟（standard clock），其记录的时间称为该观者的固有时（proper time）。推而广之，可认为任一质点都有其自己的固有时。

一个钟称为标准钟或理想钟（ideal clock），若它在自己世界线上任两点 $p$ 、 $q$ 的读数 $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 之差等于这两点间的世界线长，即：

$$\tau_1 - \tau_2 = \int_q^p \sqrt{-ds^2}$$

注：

1. 若不取 $c = 1$ ，则右边要除以 $c$ 。
2. 这只是对钟走时率（rate）的要求，而并未对其示数的初值设定（setting）做出要求。

今后谈及世界线，默认以标准钟读数 $\tau$ 作为线参数，因而其切矢模总为 $c$ 。从而观者就是一条有单位切矢（几何单位制）的类时曲线。

光子的世界线长总为0，没有固有时的概念，也不能作为观者。

设 $x^0$ 是坐标系的类时坐标（即 $\eta_{ab}(\partial/\partial x^0)^a(\partial/\partial x^0)^b < 0$ ）， $x^1, x^2, x^3$ 是类空坐标，则坐标域内任一点 $p$ 的类时坐标 $x^0$ 称为该事件在坐标系内的坐标时（coordinate time）。惯性系的坐标时叫惯性坐标时，其定义域为全 $\mathbb{R}^4$ 。

注：固有时只针对世界线上的某一点而言，不可脱离世界线而谈及某事件的固有时；而某事件只要在某坐标系的坐标域内，就可谈及它的坐标时。

观者在选定了固有时的零点之后，便形成了一个自身的坐标系：在这个坐标系内，观者的世界线是一条 $t$ 坐标线，而剩余的空间坐标可在空间中任意选取。这个坐标系就是参考系的一个坐标系。

在同一惯性参考系内的各观者为了能够给出统一协调的参考系时间，需要对钟的初值进行同步，称为惯性系内的钟同步（clock synchronization）操作，真空中两两观者之间可以采用如下方法：观者 $G$ 在某一时刻向观者 $G'$ 发光（事件 $p$ ），当光线到达 $G'$ 后又反射回 $G$ （事件 $q$ ）。 $G'$ 在接收到光的瞬间将自己的标准钟调整为零点，而 $G$ 只需将自己世界线上 $p$ 、 $q$ 的中点设为标准钟零点即可。

设 $L(\tau)$ 是某质点的世界线， $\tau$ 为固有时， $t$ 为惯性系 $\mathcal{R}$ 的坐标时，则：

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

记为 $\gamma_u$ 或 $\gamma$ 。特殊地，若 $L(\tau)$ 就是惯性系内的一条 $t$ 坐标线，即其相对于惯性系静止， $u = 0$ ，

可知 $dt = d\tau$ ，即惯性观者在本坐标系内的坐标时等于自己的固有时。

## 6.1.4 时空图

时空图用来描绘粒子在时空之中的运动情况。先选取一个惯性参考系 $\mathcal{R}$ 作为基准，以竖直向上方向为其 $t$ 轴，水平方向为空间轴，则粒子的运动就可以由时空图中的曲线来表示。特别地：

1. 任一曲线在任一点处方向只能从斜于 $t-x$ 平分线方向到竖直方向，或者恒为 $45^\circ$ 。
2. 直线代表测地线，斜于 $t-x$ 平分线方向的直线都表示惯性观者。
3.  $t-x$ 平分线方向（即斜率为 $1/c = 1$ ）的直线代表类光测地线，表示光子的运动。
4. 所有竖直方向的直线都是 $t$ 坐标线，即该惯性系内的惯性观者，相对于该系静止。

在以惯性系 $\mathcal{R}$ 为基准的时空图中可以表示其他惯性系 $\mathcal{R}'$ 的坐标轴（以 $t-x$ 平面内为例）：

1.  $t-x$ 平面内过原点倾斜的直线代表相对于本系沿 $x$ 轴正向匀速运动，且 $x' = 0$ 的另一惯性观者，这就是 $\mathcal{R}$ 为基准的时空图中表示的 $t'$ 轴（满足 $x' = 0$ 的惯性观者也就是 $t'$ 轴）。且若其方程为 $t = x/v$ ，则该惯性观者（也即惯性系 $\mathcal{R}'$ ）的速率为 $v$ ；
2.  $t = x/v$ 是在 $x' = \gamma(x - vt)$ 中代入 $t'$ 轴的条件 $x' = 0$ 得到。若在 $t' = \gamma(t - vx)$ 中代入 $t' = 0$ （ $x'$ 轴的条件），得到 $t = vx$ ，这就是时空图中表示的 $x'$ 轴，它与 $t'$ 轴关于 $t-x$ 平分线对称。
3.  $y'$ 轴、 $z'$ 轴与 $y$ 轴、 $z$ 轴重合。

注：尽管这样的表示看似倾斜，但若是按照Minkowski度规衡量， $x'$ 轴与 $t'$ 轴仍是正交的。

设惯性系 $\mathcal{R}$ 中，点 $p = (t, x, y, z)$ ，则与 $O = (0,0,0,0)$ 连线与 $Op$ 等长的点 $(t', x', y', z')$ 满足 $-t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = Op$ （常数），这是一组双曲线（面），称为校准曲面（线），其每一支上的点到 $O$ 的距离在Minkowski度规衡量下均相等。

惯性参考系 $\mathcal{R}$ 中与所有观者的世界线正交的三维超平面 $\Sigma_t$ 上各点有相同的 $t$ 坐标，称为 $\mathcal{R}$ 系的一个同时面，表示在 $t$ 时刻的全空间。易见Minkowski线元 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 在其上诱导出的线元 $d\hat{s}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 为Euclidean线元。可见惯性系 $\mathcal{R}$ 在任意时刻的空间是3维Euclidean空间。若讨论另一惯性系 $\mathcal{R}'$ ，则由于两系观者世界线不平行，两者的同时面也不同，由此产生了同时的相对性。

## §6.2 经典引力论和相对论的时空结构

2018年7月24日 21:57

广义相对论研究存在引力时的时空结构与物理学，其背景时空是任意4维连通流形 $M$ 配以弯曲度规场 $g_{ab}$ 。而狭义相对论研究引力可以忽略时的物理学，其背景时空是平直的4维Minkowski空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 。

Newton引力论认为，空间的引力场可以由引力势 $\phi$ 描述，它与质量密度 $\rho$ 存在关系：

Poisson方程： $\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$ 。

除了引力外不受力的质点叫做自由质点。单位质量的自由质点遵循运动方程：

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3$$

其中 $t$ 是Newton绝对时间， $x^i$ 是质点的空间Galileo坐标，即数学上的Cardesian坐标。

Cartan等对以上事实用四维几何语言重新进行了表述，要点如下。

Newton引力论的背景时空称为Newton时空，是一个流形 $\mathbb{R}^4$ 上附加如下内禀结构：

1. 存在一个称为绝对时间（absolute time）的、满足适当条件的光滑函数 $t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ；
2.  $\mathbb{R}^4$ 上存在导数算符 $\nabla_a$ ，它在满足 $x^0 = t$ 的某特定坐标系 $\{x^\mu\}$ 下的Christoffel符号满足：

$$\Gamma^i_{00} = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3$$

其中为 $\mathbb{R}^4$ 上某函数 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ，其余 $\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = 0$ 。

绝对时间的存在使得Newton时空流形 $\mathbb{R}^4$ 有一种绝对的“分层（stratification）结构”， $\forall p \in \mathbb{R}^4$ ，存在一个等 $t$ 超曲面 $\Sigma_t$ 使得 $p \in \Sigma_t$ ，代表 $t$ 时刻的全空间，称为一个绝对同时面（absolute simultaneity surface）。事件 $p$ 、 $q$ 称为同时的，若 $t(p) = t(q)$ 。

设 $\gamma(\lambda)$ 是Newton时空中的任一测地线， $\lambda$ 为仿射参数，则其在满足前述条件的坐标系 $\{x^\mu\}$ 下的参数表达式 $x^\mu(\lambda)$ 服从方程组：

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

令 $\mu = 0$ ，则由 $\Gamma^0_{\nu\sigma} = 0$ （ $\nu, \sigma = 0, 1, 2, 3$ ）可知

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} = \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} = 0$$

即 $t = \alpha\lambda + \beta$ ， $\alpha, \beta$ 是常数。

这表明绝对时间 $t$ 可以充当任一 $\alpha \neq 0$ 的测地线的仿射参数。

令 $\mu = i$ ，可得

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

因此只要将 $f$ 解释为引力势 $\phi$ ，把 $x^i$ 解释为Galileo坐标，则Newton时空中以绝对时间 $t$ 为仿射参数的测地线就是自由质点的世界线。

利用给出的Christoffel符分量可以求出Riemannian曲率张量和Ricci张量：

$$R_{0i0}{}^j = -R_{i00}{}^j = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$R_{00} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i{}^2} = \nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

剩余 $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = 0$ ,  $R_{\mu\nu} = 0$ 。

这表明Newton时空并不平直。然而， $\nabla_a$ 在绝对同时面上诱导出的导数算符 $\hat{\nabla}_a$ 却是平直的  
( $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , 其相应的三维Riemannian曲率张量为零)。

这也能从另一方面看出：当 $t = \alpha\lambda + \beta$ 中 $\alpha = 0$ 时，测地线 $\gamma(\lambda)$ 仅在 $t = \beta$ 的绝对同时面 $\Sigma_\beta$ 内。  
由 $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ ,  $t = \beta$ 得 $x^i(\lambda) = \alpha^i\lambda + \beta^i$ ,  $\alpha^i, \beta^i$ 是常数。这是线性方程组，因此只要将 $x^i$ 解释为  
 $\Sigma_\beta$ 的Cardesian坐标，则 $\Sigma_\beta$ 上的测地线为直线。

事实上，只要用 $x^i$ 按照下式定义 $\Sigma_\beta$ 上的Euclidean度规： $\delta_{ab} = \delta_{ij}(dx^i)_a(dx^j)_b$ ，则三维 $\{x^i\}$   
系的普通导数算符 $\partial_a$ 自然适配，其在 $\{x^i\}$ 系的Christoffel符自然为零，即 $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ ,  $i, j, k =$   
 $1, 2, 3$ 。所以 $\partial_a$ 正是 $\nabla_a$ 在 $\Sigma_\beta$ 上诱导的 $\hat{\nabla}_a$ 。

可见每一绝对同时面 $\Sigma_t$ 是一个三维Euclidean空间，物理上常用的三维Galileo坐标就是该空间的  
Cardesian坐标。

然而，无法对Newton时空流形 $\mathbb{R}^4$ 赋予一个整体的、与 $\nabla_a$ 适配的度规。只要存在引力，能找  
到的“度规”必然是退化的。

Newton时空存在绝对时间和绝对同时面的性质与传统牛顿引力论的假设是相符的。同一 $\Sigma_t$ 上  
的事件是同时异地的，不同 $\Sigma_t$ 上的事件发生时间不同，且同时性是绝对的，与参考系选取无  
关。

给定事件 $p \in \mathbb{R}^4$ ，总可以将 $\mathbb{R}^4 / \{p\}$ 写成三个无交子集之并，即 $\mathbb{R}^4 / \{p\} = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ ：

$M_1 := \{q \in \mathbb{R}^4 / \{p\} | \text{存在先经历} q \text{后经历} p \text{的观者}\}$ ；

$M_2 := \{q \in \mathbb{R}^4 / \{p\} | \text{存在先经历} p \text{后经历} q \text{的观者}\}$ ；

$M_3 := \{q \in \mathbb{R}^4 / \{p\} | \text{不存在既经历} p \text{又经历} q \text{的观者}\}$ ；

非相对论物理默认 $M_3$ 就是点 $p$ 所在的绝对同时面 $\Sigma_t$ ，该面将整个 $\mathbb{R}^4$ 分为“上下”两部分，分别  
对应于 $M_2$ 、 $M_1$ ，分别称为事件 $p$ 的“未来”和“过去”。

而狭义相对论中，由于观者世界线为类时曲线， $M_2$ 和 $M_1$ 分别是事件 $p$ 的未来光锥面和过去光  
锥面（类光超曲面）所包围的、不含边界的 $\mathbb{R}^4$ 的子集，剩余部分包括边界都属于 $M_3$ ，是最大的  
部分。

设 $q \in M_2$ ，则从 $p$ 到 $q$ 的测地线在 $p$ 点的切矢 $T^a$ 必为类时矢量。同理，若 $q' \in M_1$ ，则从 $p$ 到 $q'$ 的  
测地线在 $p$ 点的切矢 $T'^a$ 也必为类时矢量。 $T^a$ 和 $T'^a$ 分别称为在 $p$ 点指向未来（future  
directed）的类时矢量和在 $p$ 点指向过去（past directed）的类时矢量。类似可以定义指向未  
来和过去的类光矢量。

## §6.3 典型效应分析

2018年6月14日 5:35

### 6.3.1 “尺缩效应”

尽管三维语言看来一个理想化的物理“尺子”是一维的，然而在四维语境里它其实是一个二维对象：尺子上各点世界线组成的一个二维“世界面”。而在此语境下，一个惯性系 $\mathcal{R}$ 在某时刻 $t$ 测得的“尺长”的真实含义其实是该系在该时刻 $t$ 的同时面 $\Sigma_t$ 与尺子世界面的交线。注意此时讨论该交线的线长并不会产生“闵氏线长”与“欧式线长”之间的歧义，因为同时面上的点之间自然有 $\Delta t = 0$ ，此时的四维闵氏线长与三维欧式线长是相同的。

下面讨论在一个相对于尺子长度方向运动的参考系中测得其长度与静长之间的关系。设定两个惯性系 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{R}'$ ，尺子相对于 $\mathcal{R}$ 系静止。于是两系分别测得的尺长（欧式线长，同时也是闵氏线长）在以 $\mathcal{R}$ 系为基准的时空图中就十分明晰，如图6-14，分别是线段 $l_{oa}$ 、 $l_{ob}$ 。注意到闵氏线长与坐标系无关，于是只需在同一惯性系（不妨取 $\mathcal{R}$ 系相应的坐标系 $\{t, x, y, z\}$ ）中计算即可。

显然有： $l_{oa} = \sqrt{x_a^2 - 0} = x_a$ ， $l_{ob} = \sqrt{x_b^2 - t_b^2}$ ，又 $x_a = x_b$ ， $t_b = vx_b$ （ $x'$ 轴方程为 $t = vx$ ），代入即得： $l_{ob} = \gamma^{-1}x_b = \gamma^{-1}x_a = \gamma^{-1}l_{oa}$ 。此即“尺缩效应”中的定量关系。

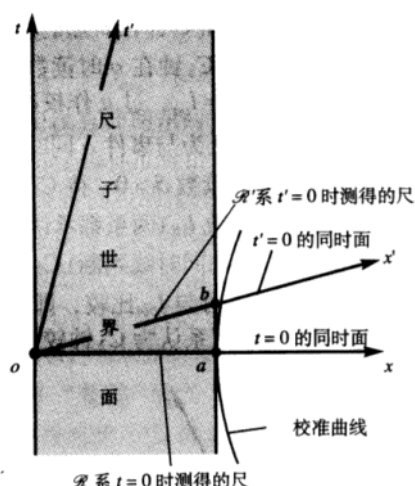


图 6-14 尺子世界面是绝对的，直线段  $oa$  和  $ob$  分别是惯性系 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 在 $t=0$ 和 $t'=0$ 时测得的1维尺

### 6.3.2 “钟慢效应”

考虑先惯性系 $\mathcal{R}$ 的两个标准钟 $C_1$ 、 $C_2$ 和惯性系 $\mathcal{R}'$ 的一个标准钟 $C'$ 。

从系 $\mathcal{R}$ 看来，设事件 $o$ ： $C'$ 与 $C_1$ 重合，并在此时将钟调零；事件 $b$ ： $C'$ 与 $C_2$ 重合。在时空图中显见，钟 $C'$ 在 $b$ 点的读数为世界线长 $l_{ob}$ 。 $C_1$ 与 $C_2$ 同属系 $\mathcal{R}$ ，既然钟 $C_1$ 在 $o$ 点的读数为零，则钟 $C_2$ 在 $c$ 点的读数也应为零。故钟 $C_2$ 在 $b$ 点的读数为世界线长 $l_{cb} = l_{oa}$ 。由 $l_{ob} < l_{oa}$ ，因此 $\mathcal{R}$ 系认为



动钟 $C'$ 较慢。

反之，系认为与事件 $o$ 同时的是事件 $d$ 而非事件 $c$ ，既然 $C_2$ 在 $c$ 点指零，那么在 $d$ 点就必有读数 $\delta > 0$ 。故此虽然在 $b$ 点 $C'$ 的度数小于 $C_2$ （这在两系都是认同的），但并不能说明从 $d$ 点到 $b$ 点 $C'$ 较慢。易知 $l_{ob} > l_{oe} = l_{db}$ ，故 $\mathcal{R}'$ 系也认为动钟（只不过换成 $C_2$ ）较慢。

注意到 $x_b = vt_b$ ，不难导出 $\mathcal{R}$ 系测得的动、静钟所走时间的定量关系为： $l_{ob} = \gamma^{-1}l_{oa}$ 。换句话说，对给定的两个事件之间的时间计时，动钟测得的结果会比静钟小，从而说明动钟较慢。也可以换成常用描述方法：动钟测得某段时间为 $l_{ob}$ ，在静系（从而是相对于“动钟”运动的惯性系）中测得该段时间为 $l_{oa} = \gamma l_{ob}$ ——时间“膨胀”了。

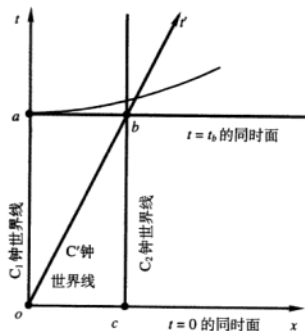


图 6-15  $\mathcal{R}$  系的钟根据同时面  $t = t_b$  和  $t = 0$  认为  $C'$  钟较慢

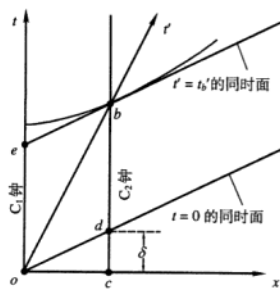


图 6-16  $\mathcal{R}'$  系的钟根据同时面  $t' = t'_b$  和  $t' = 0$  认为  $C_2$  钟较慢

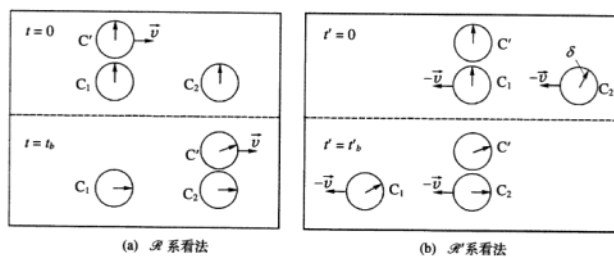


图 6-17 惯性系  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{R}'$  的 3 维看法

## 6.3.2 “钟慢效应”

## §6.4 质点运动学和动力学

2018年7月25日 17:28

首先给出狭义相对论在3维语言表述下的各个重要物理量及其关系（采用几何单位制）：

质点的3速： $\vec{u} := d\vec{r}/dt$ ，其中位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ；

质点的3加速： $\vec{a} := d\vec{u}/dt$ ；

质点的3动量： $\vec{p} := \gamma m \vec{u}$ ，其中 $\gamma = \gamma_u = (1 - u^2)^{-1/2}$ ， $u = |\vec{u}|$ ；

质点的能量： $E := \gamma m$ ；

质点所受的3力： $\vec{f} := d\vec{p}/dt$ ；

3力的功率与受力质点能量的关系： $\vec{f} \cdot \vec{u} = dE/dt$ ；

带点质点在电磁场中受到的3力（Lorentz力）： $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ 。

注：以上除了质量 $m$ 、电荷量 $q$ 与观者无关，其余都是相对于某惯性系 $\{t, x, y, z\}$ 而言的。相对论常常提及“守恒量”与“不变量”。守恒量（conserved quantity）是指在物理过程中不随时间变化的量；不变量（invariant）是指不随参考系、坐标系等人为因素而变化的量。例如能量是守恒量而非不变量，质量是不变量而非守恒量，电荷量既是守恒量又是不变量。

质点的4维速度（4速，4-velocity） $U^a$ 是质点世界线（以固有时 $\tau$ 为参数）的切矢：

$$U^a := \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a$$

由于世界线切矢一定是类时的，又由于以线长为参数的曲线切矢有单位长，故

$$U^a U_a = \eta_{ab} U^a U^b = -1。$$

注：4速 $U^a$ 在世界线外无意义。

为观测质点的运动，需要指定任一参考系 $\mathcal{R}$ 。观者对发生在子集世界线上的事件的观测，称为直接观测，或称当时当地观测（local measurement），是最简单直接的。为实现对任意事件的观测都是直接观测，只需选取本参考系内世界线经过该事件的观者进行观测。因此，若观测质点在某一时空点 $p$ 处的状态，只需选取一个观者 $G$ ，其世界线与质点的世界线相交于点 $p$ ，不妨设观者 $G$ 在此处的4速为 $Z^a$ 。

进一步地，关心观者对某一特定事件 $p$ 的观测，只需要考虑观者在此处的4速，即观者世界线在此处的切矢 $Z^a$ 即可。为此抽象出瞬时观者（instantaneous observer）的概念：某一时空点 $p$ 以及该点处的一个指向未来的类时单位矢量 $Z^a$ 的结合 $(p, Z^a)$ 。

作为观者 $G$ ，具有自身所处时空位置 $p$ 处的空间方向观念，这应当是一个三维的概念。所有空间概念都是 $p \in \mathbb{R}^4$ 的矢量，它们的集合 $W_p$ 是 $p$ 处切空间 $V_p$ 的三维子集。又由于观者 $G$ 所在参考系的同时面总与观者世界线正交，自然地，在某一时空位置 $p$ ，观者 $G$ 的任何空间矢量都与自身世界线正交，也即与其切矢——4速 $Z^a$ 正交。即：

$$W_p := \{w^a \in V_p | \eta_{ab} w^a Z^b = 0\}.$$

称 $\forall w^a \in W_p$ 是对观者 $G$ 而言的空间矢量 (spatial vector)。它一定是类空矢量, 这时一个相对概念 (取决于观者的4速 $Z^a$ )。

由于 $Z^a$ 就是 $W_p$ 的单位法矢, 因此 $p$ 点的 $\eta_{ab}$ 在诱导的度规是 $h_{ab} = \eta_{ab} + Z_a Z_b$ 。又由 $h^a_b = \delta^a_b + Z^a Z_b$ 是 $V_p$ 到 $W_p$ 的投影映射, 可知 $h^a_b v^b \in W_p$ 就是 $v^b \in V_p$ 在 $W_p$ 上的投影。

现在设质点世界线 $L(\tau)$ 和观者世界线 $G$ 交于点 $p$ , 考虑观者对质点的观测问题, 即质点在 $p$ 点相对于 $G$ 的3速。先考虑简单情况: 观者和质点都做惯性运动, 世界线都是测地线。令 $Z^a$ 、 $U^a$ 分别为观者和质点在 $p$ 点的4速, 在观者所在的参考系 $\{x^\mu\} = \{t, x^i\}$ 看来:

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a = \frac{dx^\mu}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{dx^i}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

而 $G$ 本身为坐标系的 $t$ 坐标线, 故:

$$Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$$

$U^a d\tau$ 也是与 $U^a$ 同向、不是单位长的矢量:

$$U^a d\tau = dt \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = Z^a dt + dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

考虑世界线上的一个从固有时 $\tau$ 到 $\tau + d\tau$ 的无限小过程 $pq$ :  $p = L(\tau) \rightarrow q = L(\tau + d\tau)$ 。这一过程的世界线长即为 $U^a d\tau$ 。对观者 $G$ 而言, 经历的坐标时间为 $|Z^a dt| = \sqrt{|Z^a Z_a (dt)^2|} = dt$ , 空间位移为 $(\partial/\partial x^i)^a dx^i$ 。

则质点相对于 $G$ 的3速 (也称 $G$ 测得质点的3速) 定义为:

$$u^a := \frac{(\partial/\partial x^i)^a dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \frac{dx^i/d\tau}{dt/d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

而 $(\partial/\partial x^i)^a dx^i/d\tau$ 正是 $U^a$ 在 $W_p$ 上的空间投影 $h^a_b U^b$ , 且 $\gamma = dt/d\tau$ , 故3速也可表为:

$$u^a := \frac{h^a_b U^b}{\gamma}$$

上面引入的 $\gamma = dt/d\tau$ 也可表为 $\gamma = -U^a Z_a$ 。

证:  $-U^a Z_a = -\eta_{ab} U^a Z^a = -\eta_{\mu\nu} U^\mu Z^\nu$ , 而 $Z^a$ 只有 $Z^0$ 分量是非零的, 且 $\eta_{ab}$ 只有对角元 (即相同具体指标元) 是非零的, 故 $-U^a Z_a = -\eta_{00} U^0 Z^0 = U^0 = dt/d\tau$ 即证。则:

$$u^a := \frac{h^a_b U^b}{\gamma} = -\frac{h^a_b U^b}{U^c Z_c}$$

注:

1. 显见, 这样定义的3速 $u^a$ 是观者 $G$ 在点 $p$ 的空间矢量, 与直观感觉相符。
2. 设 $\mathcal{R}$ 是惯性观者 $G$ 所在的惯性系, 则 $u^a$ 也称质点在 $p$ 的坐标时刻相对于惯性系 $\mathcal{R}$ 的3速。设 $\{t, x^i\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中任一惯性坐标系, 则 $u^a$ 在该系坐标分量为 $u^i = dx^i/dt$ , 与3维语言的定义相符。
3. 上述讨论可见, 最终对3速的定义不需借助坐标系来刻画, 而仅仅只依赖于所选观者。

进一步, 只依赖于观者在 $p$ 的坐标时刻这一瞬时的4速 $Z^a$ , 也即瞬时观者 $(p, Z^a)$ 。

上述3速的定义只依赖于任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 和质点世界线在 $p$ 附近的小邻域。根据这一思想, 可以将3速定义推广为观者和质点世界线不是测地线的情况。

设 $L(\tau)$ 为任意质点的世界线,  $p \in L(\tau)$ , 则质点相对于任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 的3速为:

$$u^a := \frac{h^a_b U^b}{\gamma} = -\frac{h^a_b U^b}{U^c Z_c}$$

其中 $h_{ab} = \eta_{ab} + Z_a Z_b$ 。

3速矢量的长度 $u = \sqrt{u^a u_a}$ 称为质点对瞬时观者的3速率, 其中 $u_a := \eta_{ab} u^b = h_{ab} u^b$ 。

注: 设 $G$ 是由 $(p, Z^a)$ 决定的测地线, 则上式也是质点相对于 $G$ 所在惯性系 $\mathcal{R}$ 的3速率。

不妨考虑任意类时、类光、类空曲线 $L$ 对惯性观者 $G$ 按照上述定义的矢量 $u^a$ , 对类时和类空曲线, 选取线长 $\tau$ 为参数; 对类光曲线,  $\tau$ 为任意参数, 且令其 $U^a = (\partial/\partial\tau)^a$ , 则:

$$u^2 = h_{ab} u^a u^b = \frac{h_{ab} (h^a_c U^c) (h^b_d U^d)}{\gamma^2} = \frac{h_{cd} U^c U^d}{\gamma^2} = \frac{\eta_{cd} U^c U^d + Z_c U^c Z_d U^d}{\gamma^2} = 1 + \frac{\eta_{cd} U^c U^d}{\gamma^2}$$

上式表明,  $u < 1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d < 0$ ,  $u = 1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d = 0$ ,  $u > 1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d > 0$ , 可见相对论要求的“质点世界线为类时曲线”等价于“质点的3速为亚光速”。

若瞬时观者 $(p, Z^a)$ 恰好与被观测质点世界线 $L(\tau)$ 相切于 $p$ 点, 则 $(p, Z^a)$ 称为该质点 $L$ 在 $p$ 的瞬时静止观者(在观者看来, 质点在 $p$ 的坐标时刻瞬时静止),  $(p, Z^a)$ 决定的测地线 $G$ 称为 $L$ 在 $p$ 的瞬时静止惯性观者,  $G$ 所在的惯性参考系称为 $L$ 在 $p$ 的瞬时静止惯性参考系, 其中的任一惯性坐标系称为 $L$ 在 $p$ 的瞬时静止惯性坐标系。

质点的4速可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3+1分解:  $U^a = \gamma(Z^a + u^a)$ 。

证: 由 $u^a$ 的定义式可知 $\gamma u^a = h^a_b U^b = (\delta^a_b + Z^a Z_b) U^b = U^a - \gamma Z^a$ 。

注:

1. 质点的4速是绝对的, 但是这种分解却是相对的(依赖于观者或参考系)。
2. 时间分量的大小为 $\gamma$ , 单位矢量 $Z^a$ 表示方向。
3. 取惯性系 $\{t, x^i\}$ , 可知 $\gamma u^a$ 是 $U^a$ 在观者看来的空间分量,  $\gamma Z^a$ 是时间分量。从而上式也可表为 $U^a = \gamma(1, u^a)$ , 这与狭义相对论的结论 $U^\mu = \gamma(c, \vec{u})$ (国际单位制)一致。

设质点的质量为 $m$ , 4速为 $U^a$ , 则其4动量(4-momentum)定义为:  $P^a := mU^a$ 。

质点的4动量也可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3+1分解:  $P^a = m\gamma(Z^a + u^a) = EZ^a + p^a$ 。

其中 $E$ 为质点的能量,  $p^a$ 为3动量, 相当于 $P^\mu = (E, \vec{p})$ 。这表明能量 $E$ 和3动量 $p^a$ 分别是4动量 $P^a$ 相对于观者的时间和空间分量。同样地, 4动量是绝对的, 但是这种能量和3动量的分解是相对的。

用 $Z^a$ 缩并上式, 得到能量也可表为:  $E = -P^a Z_a$ , 这是观者观测到的能量。

$P^a P_a = (EZ^a + p^a)(EZ_a + p_a) = -E^2 + p^2$ , 另一方面 $P^a P_a = m^2 U^a U_a = -m^2$ , 故:

狭义相对论的质量-能量-动量关系式:  $E^2 = m^2 + p^2$ 。

4动量满足4动量守恒定律。

质点的4加速 (4-acceleration) 定义为:  $A^a := U^b \partial_b U^a$ , 也就是3速 $U^a$ 沿世界线的导数。

其中 $\partial_b$ 是与 $\eta_{ab}$ 适配的导数算符。注:

1. 4加速是绝对的。
2.  $A^a = 0 \Leftrightarrow U^b \partial_b U^a = 0$ , 即质点的世界线是测地线, 质点做惯性运动。

质点世界线上各点的4加速与4速正交, 即 $A^a U_a = \eta_{ab} A^a U^b = 0$ 。

证:  $A^a U_a = U_a U^b \partial_b U^a = \frac{1}{2} U^b \partial_b (U^a U_a) = 0$ 。

这暗示质点的4加速只改变4速的“方向”而不改变大小。详见下一章关于时空转动的讨论。

取某惯性坐标系 $\{x^\mu\}$ 得到的4速和4加速的分量。 $A^\mu = (dx^\mu)_a A^a$ , 而 $\partial_b (dx^\mu)_a = 0$ , 故

$A^\mu = (dx^\mu)_a A^a = (dx^\mu)_a U^b \partial_b U^a = U^b \partial_b (U^a (dx^\mu)_a) = U^b \partial_b U^\mu$ , 再结合 $U^b = (\partial/\partial\tau)^b$ 和导数算符定义性质的第四条 (注意到 $U^\mu$ 是一个函数), 得到:

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

即4加速在惯性系的分量 $A^\mu$ 等于4速在该系对应的分量 $U^\mu$ 对固有时 $\tau$ 的导数。

注: 这是惯性系的分量的关系, 而非绝对的4矢量的关系。

现在想要借助4加速定义3加速, 要相对复杂, 因为至少涉及两点之间3速的变化, 就不能仅仅用一个观者在某点的观测。常见且方便的是相对于某惯性系的3加速。质点 $L(\tau)$ 相对于某惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 的3加速定义为:

$$a^a := \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a$$

其中 $x^i = x^i(t)$ 是参数式 $x^i = x^i(\tau)$ 与 $t = t(\tau)$ 结合而得的函数 (以 $t$ 为参数的参数式)。

易见, 其坐标分量为 $a^i = d^2 x^i / dt^2 = du^i / dt$ , 与三维语言的定义一致。

质点的4加速 $A^a$ 在惯性系 $\mathcal{R}$ 的分量为:  $A^0 = \gamma^4 \vec{u} \cdot \vec{a}$ ,  $A^i = \gamma^2 a^i + \gamma^4 (\vec{u} \cdot \vec{a}) u^i$ 。

证: 4加速 $A^a$ 在 $\mathcal{R}$ 系的坐标分量 $A^\mu = dU^\mu / d\tau = \gamma dU^\mu / dt$ 。而 $U^0 = \gamma$ ,  $U^i = \gamma u^i$ , 因而

$A^0 = \gamma d\gamma / dt$ ,  $A^i = \gamma d(\gamma u^i) / dt = \gamma^2 du^i / dt + \gamma u^i d\gamma / dt = \gamma^2 a^i + \gamma u^i d\gamma / dt$ ,

再由 $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$ 得 $d\gamma / dt = \gamma^3 u du / dt = \gamma^3 \vec{u} \cdot \vec{a}$ , 即证。

注: 自由质点的4加速 $A^a = 0$ , 可见它对于任一惯性系的3加速 $a^a = 0$ 。

对于瞬时静止惯性系来说, 质点的4加速等于其相对于瞬时静止惯性系的3加速。

显然, 对于瞬时静止惯性系, 其时间方向与质点世界线相切, 因而与世界线正交的4加速的方向就是其空间方向。只需将 $\vec{u} = 0$ 代入 $A^a$ 的分量表达式即证。

质点的4力 (4-force) 定义为:  $F^a := U^b \partial_b P^a$ 。

取某惯性坐标系 $\{x^\mu\}$ , 则4力的分量 (类似于4加速):

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}$$

则其各分量：

$$\begin{aligned} 1. F^i &= \frac{dP^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{d\tau} = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma f^i \\ 2. F^0 &= \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{dE}{d\tau} = \gamma \frac{dE}{dt} = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

这也就相当于4力借某瞬时观者所做的3 + 1分解： $F^\mu = \gamma (\vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f})$ 。

注：目前位置仅限于讨论运动过程中质点的质量 $m$ （即静能量）保持不变的情况（即 $dm/d\tau = 0$ ）。这种情况下，有 $F^a = U^b \partial_b (mU^a) = mA^a$ 。

但是一般而言，有可能 $dm/d\tau \neq 0$ ，例如电流的热效应导致导线内能升高，此时：

1. 动能应直接定义为总能与静能之差： $E_k := E - m = \gamma m - m = (\gamma - 1)m$ 。
2.  $\vec{f} \cdot \vec{u}$ 不再等于总能的变化率 $dE/dt$ ，也不等于动能的变化率 $dE_k/dt$ ，而是总能变化率减去静能变化率：  

$$\vec{f} \cdot \vec{u} = \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\gamma} \frac{dm}{dt}$$
3.  $F^i = \gamma f^i$ ,  $F^0 = \gamma dE/dt = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u} + dm/dt$ 。

在有些情况下，仅仅用一个坐标系来观测可能会有所不便。为便于观测，引入标架（frame）的概念，也就是所谓非坐标基底，它不是某坐标系的坐标基矢。

3维标架场是观者世界线上的3个两两正交归一的空间矢量场 $\{(e_i)^a, i = 1, 2, 3\}$ ，“空间”意味着它们在每一点的值（矢量）都与观者4速 $Z^a$ 正交。每一点的值（也就是3个正交归一的空间矢量）就构成观者在该点的一个3标架。事实上3标架的3个方向是观者在每一时刻任意选定的。

连同 $(e_0)^a = Z^a$ ，观者世界线上就有4个正交归一矢量场 $\{(e_\mu)^a = (e_0)^a = Z^a, (e_i)^a, i = 1, 2, 3\}$ ，构成观者的4维标架（tetrad）场，默认为右手标架场。观者在世界线上每一点都有一组4维基矢，一般而言，它们不属于同一坐标系，而可以看作随着观者的任意运动而灵活变化的基矢。

这样，为瞬时观者除了 $(e_0)^a = Z^a$ ，也可附加3标架，成为 $(p, (e_\mu)^a)$ 。

给定一个参考系后，全时空（或其开子集）任一点都有唯一的一条观者世界线经过，从而全时空（或其开子集）上就有一个4标架场，每一点都有一个4标架。

进一步，惯性观者的准确定义应当是：做惯性运动的、无自转的观者。“做惯性运动”是对观者世界线提出的要求，而“无自转”就是对观者的4标架的要求，直观地希望观者在世界线上各点的3维标架的空间方向不变。

## §6.5 连续介质的能动张量

2018年7月26日 9:30

讨论连续分布的介质时，主要关心统计意义上的平均效应，具体反映为介质中每一点的能量密度、动量密度、能流密度、动量流密度。其中：设宏观体元 $V$ 内物质的质量为 $m$ ，它相对于某惯性系的3速为 $\vec{u}$ ，则其3动量为 $\vec{p} = \gamma m \vec{u} = (E/c^2)\vec{u}$ ，则其3动量密度为 $\vec{p}/V = (E/c^2)\vec{u}/V$ ，而其能流密度正是 $E\vec{u}/V$ ，即连续介质的3动量密度与能流密度之间存在关系：  
3动量密度 $= \frac{1}{c^2}$ 能流密度，若采用几何单位制则两者相等。

任何物质场都有其能量动量张量（energy-momentum tensor） $T_{ab}$ ，它就是上述各个3维密度的统一、抽象化的4维表述，满足性质：

1. 对称性： $T_{ab} = T_{ba}$ ；
2. 任何封闭（与外界无相互作用）的物质场，其能动张量满足 $\partial^a T_{ab} = \eta^{ac} \partial_c T_{ab} = 0$ 。
3. 对任一带标架的瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$ ，某一点的能动张量 $T_{ab}$ 有分量：
  - a.  $\mu = T_{ab} Z^a Z^b = T_{00}$ 是该观者测得该点的能流密度；
  - b.  $w_i = -T_{ab} Z^a (e_i)^b = -T_{0i}$ 是该观者测得该点的3动量密度（能流密度）的第 $i$ 分量；
  - c.  $T_{ab} (e_i)^a (e_j)^b = T_{ij}$ 是该观者测得该点的应力（stress）张量的第 $ij$ 分量；

从而能量动量张量 $T_{ab}$ 可以表为该标架下的 $4 \times 4$ 分量矩阵：

$$\begin{bmatrix} \mu & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ -w_1 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -w_2 & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -w_3 & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

注：应力张量，又称胁强张量，描述介质内部某点的应力状态，即在任意法向的面元上负向侧物质对正向侧物质的作用力除以面元面积。沿某方向的应力，指的是研究以某方向为法向的面元上的应力，但是其应力（矢量）方向不一定沿着该方向。选定任意惯性坐标系，其空间的三个正交归一的主方向矢量为 $\{\vec{e}_i\}$ ，则某点任一方向 $\vec{n}$ 的应力 $\vec{\pi}_n := \frac{\vec{f}}{S}$ 都可以分解为沿着三个空间方向 $\vec{e}_i$ 的应力： $\vec{\pi}_n = \vec{\pi}_1 \cos\langle\vec{e}_1, \vec{n}\rangle + \vec{\pi}_2 \cos\langle\vec{e}_2, \vec{n}\rangle + \vec{\pi}_3 \cos\langle\vec{e}_3, \vec{n}\rangle$ ，而 $\vec{\pi}_1$ 、 $\vec{\pi}_2$ 、 $\vec{\pi}_3$ 又都可沿着三个方向求分量： $\{\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}; \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}; \pi_{31}, \pi_{32}, \pi_{33}\}$ ，这组数就是应力张量在该坐标系下的

分量，也可表为矩阵形式 $\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix}$ ，任一方向 $\vec{n}$ 的应力 $\vec{\pi}_n$ 在方向 $\vec{e}_j$ 上的分量为：

$$\sum_{i=1}^3 (\pi_{ij} \cos\langle\vec{e}_i, \vec{n}\rangle)$$

当坐标系改变的时候，三个矢量 $\vec{\pi}_1$ 、 $\vec{\pi}_2$ 、 $\vec{\pi}_3$ 随之变为新矢量 $\vec{\pi}'_1$ 、 $\vec{\pi}'_2$ 、 $\vec{\pi}'_3$ ，其在新系的分量也

随之变化 $\begin{bmatrix} \pi'_{11} & \pi'_{12} & \pi'_{13} \\ \pi'_{21} & \pi'_{22} & \pi'_{23} \\ \pi'_{31} & \pi'_{32} & \pi'_{33} \end{bmatrix}$ 。可以证明，分量之间满足张量变换律。

另一方面，设 $\{(e^\mu)_a\}$ 为 $\{(e_\mu)^a\}$ 的对偶基底，考虑 $T_{ab}$ 的空间部分：空间张量 $\hat{T}_{ab} =$

$T_{ij}(e^i)_a (e^j)_b$ 的物理意义。 $T_{ij}$ 表示以 $(e_i)^a$ 为法向的单位面积面元 $\Delta S$ 上负向侧物质对正向侧物质的作用力的 $j$ 分量，即 $\hat{T}_{ab}(e_i)^a$ 的 $j$ 分量表示 $\Delta S$ 上两侧物质作用力的 $j$ 分量，故 $\hat{T}_{ab}(e_i)^a$ 表示以

$(e_i)^a$ 为法向的单位面积面元 $\Delta S$ 上两侧物质的作用力。而作用力也就是3动量的变化率，因此单位面积面元上的作用力 $\hat{T}_{ab}(e_i)^a$ 正是该面元上的3动量流密度。对任意法向 $(e_i)^a$ 的面元，其3动量流密度是 $\hat{T}_{ab}(e_i)^a$ ，因此 $\hat{T}_{ab} = T_{ij}(e^i)_a(e^j)_b$ ， $i, j = 1, 2, 3$ 称为3动量流密度张量。

能量密度标量 $\mu$ 、能流密度/3动量密度矢量 $w_i$ 、3动量流密度张量 $\hat{T}_{ab}$ 都是观者依赖的。

定义： $W^a := -T^a_b Z^b = -\eta^{ac} T_{cb} Z^b$ 为任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 测得的4动量密度。

$W^a$ 可借任一瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$ 做3 + 1分解： $W^a = \mu Z^a + w^a$ ，分量为能量和3动量密度。

其中3动量密度矢量 $w^a = w^i(e_i)^a$ 是观者的空间矢量。

证： $W^a$ 在标架上的分量为： $W^0 = W^a(e^0)_a = -T^a_b Z^b(-Z_a) = T_{ab} Z^a Z^b = \mu$ ；

$W^i = W^a(e^i)_a = -T^a_b Z^b(e^i)_a = -T_{ab} Z^b(e_i)^a = w^i$ 。

注：与 $P^a = EZ^a + p^a$ 不同， $P^a$ 是绝对的，而 $W^a$ 是观者依赖的。

$\partial^a T_{ab} = 0 \Rightarrow$ 能量守恒。

证：取观者所在惯性系 $\mathcal{R}$ 的一个惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ ， $Z^a = (\partial/\partial t)^a$ ，则

$\partial_a W^a = \partial_a(-T^a_b Z^b) = -Z^b \partial^a T_{ab} - T^a_b \partial_a Z^b$ ，而 $\partial^a T_{ab} = 0$ ， $\partial_a Z^b = \partial_a(\partial/\partial t)^b = 0$ ，

故 $\partial_a W^a = 0$ ，即

$$0 = \partial_\mu W^\mu = \partial_0 W^0 + \partial_i W^i = \partial_0 \mu + \partial_i w^i = \frac{\partial}{\partial t} \mu + \vec{\nabla} \cdot \vec{w}$$

这正是关于孤立体系能量的连续性方程，则可推出能量守恒。

$\partial^a T_{ab} = 0$ 还可推出3动量守恒和（结合 $T_{ab} = T_{ba}$ ）角动量守恒，因此又被称为守恒方程。



## §6.6 理想流体动力学

2018年7月27日 5:36

理想流体 (perfect fluid) 是一种特殊的连续介质 (物质场), 其能动张量满足:

$$T_{ab} = \mu U_a U_b + p(\eta_{ab} + U_a U_b) = (\mu + p)U_a U_b + p\eta_{ab},$$

其中  $\mu$ 、 $p$  是函数 (标量场),  $U^a$  是类时4矢量场, 满足  $U^a U_a = -1$ , 称为理想流体的4速场。

理想流体是连续介质, 可以看作是许多的宏观足够小, 足以近似为质点, 但微观又足够大, 足以保持其对大量微观粒子的离散效应做统计平均得到的“连续性”的单元——流体质元组成, 上述4速场  $U^a$  在每一点  $p$  的值  $U^a|_p$  就是世界线经过该点的流体质元在该点的4速。它们的世界线就是4速场的积分曲线, 充满了整个流体时空而又互不相交, 因而整个流体可以看作是一个参考系, 也就是以  $U^a$  为全体观者4速场的参考系, 称为共动参考系。

设瞬时观者  $(p, (e_\mu)^a)$  的4速  $Z^a = (e_0)^a = U^a|_p$ , 则  $(p, U^a|_p)$  相对于某流体质元相对静止, 称为瞬时静止观者 (rest observer), 也称瞬时随动观者或共动观者 (comoving observer)。这种意义下可以认为每个流体质元就是一个共动观者。

理想流体质元的概念与实际流体分子相去甚远, 它是一种统计平均模型, 反映某种意义上的“宏观”性质, 而非微观粒子之间的复杂碰撞、作用关系。

对共动观者  $(p, (e_0)^a = U^a|_p, (e_i)^a)$ , 对能动张量的观测得到各个分量:

$$1. T_{00} = T_{ab}(e_0)^a (e_0)^b = (\mu + p)U_a U_b U^a U^b + p\eta_{ab}U^a U^b = (\mu + p) - p = \mu;$$

可见  $\mu$  正是共动观者测得的能量密度, 称为固有能量密度。

$$2. T_{ij} = T_{ab}(e_i)^a (e_j)^b = p\eta_{ab}(e_i)^a (e_j)^b = \delta_{ab}p;$$

可见共动观者测得的3动量流密度张量 (3维应力张量) 的矩阵形式为: 
$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix},$$

显见, 在理想流体内部的任一面元上只有正向压强而没有切向应力, 而且由  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = p$  和观者3标架选取的任意性, 可知压强是各向同性的,  $p$  正是这个压强的大小。

$$3. T_{0i} = T_{ab}(e_0)^a (e_i)^b = 0;$$

可见流体内部不存在宏观的能量流动和动量, 这说明了它无热传导、不可压缩。

观者测得的能动张量  $T_{ab}$  可以整体表为矩阵形式: 
$$\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix};$$

其中只有压强而没有切应力 (无黏性)、无热传导、不可压缩都是传统理想流体的性质。

Newton力学的理想流体遵循两个重要方程, 即质量密度连续性方程 (质量守恒):

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{u}) = 0$$

和描述3速时间变化率的Euler方程：

$$-\vec{\nabla} p = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]$$

这在狭义相对论理想流体力学得到推广。

设理想流体是孤立体系，则  $0 = \partial^a T_{ab} = U_a U_b \partial^a (\mu + p) + (\mu + p) U_b \partial^a U_a + (\mu + p) U_a \partial^a U_b + \eta_{ab} \partial^a p$ ,

即：  $0 = U^a U_b \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (U_b \partial_a U^a + U^a \partial_a U_b) + \partial_b p$ ;

这是一个下指标为b的4矢方程。

1. 求其时间分量，用  $U^b$  缩并，得：

$$0 = -U^a \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (-\partial_a U^a + U^b U^a \partial_a U_b) + U^b \partial_b p;$$

$$\text{注意到 } U^b U^a \partial_a U_b = \frac{1}{2} U^a \partial_a (U^b U_b) = 0,$$

$$\text{则得到式 (1) : } U^a \partial_a \mu + (\mu + p) \partial_a U^a = 0.$$

2. 求其空间分量，用投影映射  $h_c^b = \delta_c^b + U_c U^b$  缩并，

$$\text{得： } 0 = U^a U_c \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (U_c \partial_a U^a + U^a \partial_a U_c) + \partial_c p$$

$$-U^a U_c \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (-U_c \partial_a U^a + U_c U^b U^a \partial_a U_b) + U_c U^b \partial_b p;$$

$$\text{则得到式 (2) : } (\mu + p) U^a \partial_a U_c + \partial_c p + U_c U^b \partial_b p = 0.$$

这两个时间、空间分量方程 (1)、(2) 就是相对论性理想流体的运动方程。

考虑简单情况：若理想流体的压强  $p$  为零，称为尘埃 (dust)，则其 (2) 式退化为：

$U^a \partial_a U_c = 0$ ，是测地线方程，即尘埃的世界线为类时测地线。

考虑两式的非相对论近似极限。任取惯性系  $\{t, x^i\}$  并对  $U^a$  做  $3+1$  分解 ( $\gamma \cong 1$ )：

$$U^a = \gamma (Z^a + u^a) \cong \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a$$

考虑到非相对论近似下存在关系：  $p \ll \mu$ ，则 (1)：

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a \right) \partial_a \mu + \mu \partial_a \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \partial_a \mu + u^a \partial_a \mu + \mu \partial_a u^a = 0$$

得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu + \partial_a (\mu u^a) = 0$$

这也就是质量密度连续性方程 (质量守恒)。

用  $(\partial/\partial x^i)^c$  与 (2) 缩并，取近似极限可以得到：

$$\mu \left[ \frac{\partial}{\partial t} u_i + u^a \partial_a u_i \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0$$

这也就是Euler方程。

## §6.7 电动力学

2018年7月27日 5:36

### 6.6.1 电磁场和4电流密度

Maxwell的电磁理论具有先天的Lorentzian协变性，因此与狭义相对论天然相容。

4维表述下，电磁场由 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的2形式场（反称性）——电磁场张量 $F_{ab}$ 描述。

任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 测得的电场矢量 $E^a$ 和磁场矢量 $B^a$ 定义为：

$$E_a := F_{ab} Z^b, \quad B_a := - * F_{ab} Z^b, \quad (E^a := \eta^{ab} E_b, \quad B^a := \eta^{ab} B_b)。$$

其中 $* F_{ab}$ 是 $F_{ab}$ 的对偶微分形式，也是2形式场。

$E^a$ 、 $B^a$ 是瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$ 的空间矢量，且

$$E_1 = F_{10}, \quad E_2 = F_{20}, \quad E_3 = F_{30}, \quad B_1 = F_{23}, \quad B_2 = F_{31}, \quad B_3 = F_{12}。$$

证：由于 $F_{ab} = F_{[ab]}$ ， $* F_{ab} = * F_{[ab]}$ ， $Z^a Z^b = Z^{(a} Z^{b)}$ ，故：

$E_a Z^a = F_{ab} Z^b Z^a = 0$ ， $B_a Z^a = - * F_{ab} Z^b Z^a = 0$ ，可见 $E^a$ 、 $B^a$ 是瞬时观者的空间矢量。

$$E_i = E_a (e_i)^a = F_{ab} Z^b (e_i)^a = F_{ab} (e_0)^b (e_i)^a = F_{i0}；$$

从而 $E_1 = F_{10}$ ， $E_2 = F_{20}$ ， $E_3 = F_{30}$ 。

$$B_i = B_a (e_i)^a = - * F_{ab} (e_0)^b (e_i)^a = - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} F^{cd} (e_0)^b (e_i)^a = - \frac{1}{2} \varepsilon_{0icd} F^{cd} = - \frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} F^{jk}$$

从而 $B_1 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = F^{23} = F_{23}$ ，同理 $B_2 = F_{31}$ ， $B_3 = F_{12}$ 。

$$\text{即 } F_{ab} \text{ 在任一观者的4标架 } (e_\mu)^a \text{ 的分量矩阵形式为： } (F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

设惯性系 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 之间存在Lorentz变换： $t' = \gamma(t - vx)$ ， $x' = \gamma(x - vt)$ ， $y' = y$ ， $z' = z$ ，则

两者对同一电磁场 $F_{ab}$ 测得的 $(\vec{E}, \vec{B})$ 、 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 有联系：

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2)；$$

$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \gamma(B_2 + vE_3), \quad B'_3 = \gamma(B_3 - vE_2)。$$

设任一时空点 $p$ 的任两瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$ 、 $(p, (e'_\mu)^a)$ ，若其满足 $(e'_2)^a = (e_2)^a$ ， $(e'_3)^a = (e_3)^a$ ，则测得的 $(\vec{E}, \vec{B})$ 、 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 也满足上述关系，其中 $\gamma = -(e_0)^a (e_0)_a = -Z^a Z_a$ 。

电磁场源是电荷和电流。连续分布的电荷和电流场可以看作是大量带电质点组成的尘埃。为简化问题，不妨假定所有带电质点都同属一类，其电荷为 $e$ 。以 $U^a$ 代表这一带电尘埃的4速场。

取瞬时共动观者 $(p, U^a)$ ，设其局部同时面（即与 $U^a$ 正交的3维空间面元）中的小体积 $V_0$ 内测得带点质点数为 $N$ ，则 $\eta_0 = N/V_0$ 就是共动观者测得的质点数密度，称为固有数密度。从而 $\rho_0 = e\eta_0 = eN/V_0$ 就是共动观者测得的电荷密度，称为固有电荷密度。

若取 $p$ 点的任一瞬时非共动观者 $(p, Z^a)$ ，则其认为上述 $N$ 个质点在其局部同时面所占据的体积为 $V = V_0/\gamma$ （尺缩效应），其中 $\gamma = -Z^a U_a$ 。所以其测得质点数密度为 $\eta = N/V = \gamma N/V_0 = \gamma\eta_0$ ，由于电荷量是不变量，因此其测得电荷密度为 $\rho = \gamma\rho_0$ 。

任一瞬时非共动观者 $(p, Z^a)$ 测得的3电流密度为： $j^a := \rho u^a$ ，共动观者测得为零。

带电粒子流的4电流密度（4-current destiny）定义为： $J^a := \rho_0 U^a$ 。

4电流密度可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3+1分解： $J^a = \rho Z^a + j^a$ 。

证： $J^a = \rho_0 U^a = \rho_0 \gamma (Z^a + u^a) = \rho Z^a + j^a$ 。可见瞬时观者测得的电荷密度 $\rho$ 和3电流密度分别是4电流密度的时间分量 $J^0$ 和空间投影 $h^a_b J^b$ 。上式也可表为： $\rho = -Z_a J^a$ ， $j^i = J^i$ 。

3维语言的电荷连续性方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

其4维形式显然为 $\partial_a J^a = 0$ 。这就是4维语言表述的电荷守恒定律。

## 6.6.2 物质场对电磁场的作用——Maxwell方程组

Maxwell方程组就是描述电场 $E^a$ 和磁场 $B^a$ 的运动方程。其4维表述：

$$\begin{cases} \partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \\ \partial_{[a} F_{bc]} = 0 \end{cases}, \text{ 也就是电磁场张量 } F_{ab} \text{ 服从的方程。}$$

注：（1）已经包含了电荷守恒方程： $\partial^b J_b = -\frac{1}{4\pi} \partial^b \partial^a F_{ab} = -\frac{1}{4\pi} \partial^{(b} \partial^{a)} F_{[ab]} = 0$ 。

利用外微分算符，上述方程组也可表示为：

$$\begin{cases} d * F = 4\pi * J \\ dF = 0 \end{cases}$$

其中 $*F$ 是2形式 $F$ 的对偶微分2形式， $*J$ 是1形式 $J$ 的对偶微分形式，是3形式。

第二式易证： $dF = 3 \partial_{[a} F_{bc]} = 0$ 。

而 $(d * F)_{fab} = \frac{1}{2} d_f \varepsilon_{abcd} F^{cd} = \frac{3}{2} \partial_{[f} (\varepsilon_{ab]cd} F^{cd})$ 。与 $\varepsilon^{efab}$ 缩并得 $\varepsilon^{efab} (d * F)_{fab} = \frac{3}{2} \varepsilon^{efab} \varepsilon_{cdab} \partial_f F^{cd} = -\frac{3}{2} \times 4 \delta_c^e \delta_a^f \partial_f F^{cd} = -6 \partial_f F^{ef} = 6 \partial_f F^{fe}$ 。此式再与 $\varepsilon_{egcd}$ 缩并得 $-(d * F)_{gcd} = \varepsilon_{egcd} \partial_f F^{fe}$ 。由定义式 $*J_{gcd} = J^e \varepsilon_{egcd}$ 可得， $d * F = 4\pi * J$ 。

对任一惯性系 $\{t, x^i\}$ ，可从上式推出三维形式的Maxwell方程组（几何高斯单位制）：

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

证：设 $\delta_{ab}$ 是 $\eta_{ab}$ 在所选惯性系的等 $t$ 面上的诱导度规， $\hat{\partial}_a$ 、 $\partial_a$ 分别代表与 $\delta_{ab}$ 、 $\eta_{ab}$ 适配的导数

算符, 令  $Z^a = (\partial/\partial t)^a$ 。注意到  $E^a$  是空间矢量, 即  $E_0 = 0$ , 则:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \hat{\partial}^a E_a = \partial E_i / \partial x^i = \partial^a E_a = \partial^a (F_{ab} Z^b) = Z^b \partial^a F_{ab} = -4\pi Z^b J_b = 4\pi \rho。$$

设  $\varepsilon_{abcd}$  是与  $\eta_{ab}$  相适配的体元,  $\hat{\varepsilon}_{abc}$  是等  $t$  面上与  $\delta_{ab}$  相适配的体元, 则:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \delta_{cd} (\vec{\nabla} \times \vec{E})^d = \delta_{cd} \hat{\varepsilon}^{abd} \hat{\partial}_a E_b = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \hat{\partial}_a E_b, \text{ 其中:}$$

$$\hat{\partial}_a E_b = (dx^i)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_i E_j = (dx^i)_a (dx^j)_b \partial_i E_j, \text{ 而 } E_0 = 0, \text{ 则:}$$

$$\partial_a E_b = (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \partial_\mu E_\nu = (dx^\mu)_a (dx^j)_b \partial_\mu E_j = (dx^0)_a (dx^j)_b \partial_0 E_j + (dx^i)_a (dx^j)_b \partial_i E_j,$$

容易看出,  $\partial_a E_b$  在等  $t$  面上的投影 (投影后  $(dx^0)_a$  为零,  $(dx^i)_a$  不变)  $h^d_a h^e_b \partial_d E_e = \hat{\partial}_a E_b$ ,

$$\text{则 (注意到 } \hat{\varepsilon}^{ab}_c \text{ 投影不变) } (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \hat{\varepsilon}^{ab}_c h^d_a h^e_b \partial_d E_e = (\hat{\varepsilon}^{ab}_c h^d_a h^e_b) \partial_d E_e = \hat{\varepsilon}^{de}_c \partial_d E_e$$

$$\text{即 } (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_a E_b = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_a (F_{be} Z^e) = Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_a F_{be},$$

$$\text{利用 } \partial_{[a} F_{bc]} = 0 \text{ 的轮换和 } F_{be} \text{ 的反称性: } (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}_c (\partial_e F_{ab} + \partial_b F_{ea})$$

$$\text{而 } -Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_b F_{ea} = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_b (-F_{ea} Z^e) = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_b (F_{ae} Z^e) = \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_b E_a = -\hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_a E_b$$

$$\text{从而 } 2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}_c \partial_e F_{ab}。$$

而  $\hat{\varepsilon}_{abc} = Z^d \varepsilon_{dabc} = Z^d \varepsilon_{abdc}$  (最后一步利用两次指标交换), 故

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -\frac{1}{2} Z^e Z^d \varepsilon^{ab}_{dc} \partial_e F_{ab} = -\frac{1}{2} Z^e \partial_e (\varepsilon^{ab}_{dc} F_{ab} Z^d) = -\frac{1}{2} Z^e \partial_e (2 * F_{dc} Z^d) = -Z^e \partial_e B_c$$

$$\text{于是 } (\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = (\partial/\partial x^i)^c (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c - Z^e \partial_e B_i = \partial B_i / \partial t$$

$$\text{因此 } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t。$$

关于磁场的两式类似可证。

### 6.6.3 电磁场对物质场的作用——4维Lorentz力

在任一瞬时观者  $(p, Z^a)$  看来, 3速为  $u^a$ , 电荷量为  $q$  的带电粒子在电磁场  $(E^a, B^a)$  中运动会受到

电磁场施加的3维Lorentz力  $f^a = q(E^a + Z^d \varepsilon_{dabc} u^b B^c)$ , 其中  $\varepsilon_{dabc}$  是与  $\eta_{ab}$  适配的体元。写

成3维矢量形式就是  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ 。与3力定义  $\vec{f} := d\vec{p}/dt$  结合, 就得到粒子在场中的运动

方程:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

该式天生具有Lorentz协变性。

任一瞬时观者  $(p, Z^a)$  测得的3维Lorentz力对电荷电流体系的:

$$1. \text{ 3功率密度定义为: } w = j^b E_a;$$

$$2. \text{ 3维Lorentz力密度定义为: } \zeta^a = \rho E^a + Z^d \varepsilon_{dabc} j^b B^c。$$

其中  $\varepsilon_{dabc}$  是与  $\eta_{ab}$  适配的体元,  $Z^d \varepsilon_d^{abc} = \varepsilon_0^{abc}$ 。

注: 用3维语言表述也就是:  $w = \vec{j} \cdot \vec{E}$ ,  $\vec{\zeta} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$ 。

设质点带电荷 $q$ ，4速为 $U^a$ ，4动量为 $P^a$ ，则电磁场 $F_{ab}$ 对它的4维Lorentz力为：

$$F^a = qF^a{}_b U^b = q\eta^{ac} F_{cb} U^b,$$

因而只受电磁力的质点的4维运动方程为： $qF^a{}_b U^b = U^b \partial_b P^a$ 。

证：只需证明对任一瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$ ， $K^a$ 的分量满足： $F^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}$ ， $F^i = \gamma f^i$ 。

$$F^a = qF^a{}_b U^b = \gamma qF^a{}_b (Z^b + u^b) = \gamma q(E^a + F^a{}_b u^b), \text{ 故 } F_i = \gamma q(E_i + F_{ij}u^j).$$

另一方面，利用 $F_{ca} = -F_{ac}$ ， $Z^a Z_a = -1$ ， $u^a Z_a = 0$ 可得：

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{B})_c &= \hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a B_b = \hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a (-*F_{bd} Z^d) = \hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{bd}{}^{ef} F_{ef} Z^d \right) \\ &= -\frac{1}{2} u^a \hat{\varepsilon}_{cab} \varepsilon^{bdef} F_{ef} Z_d = -\frac{1}{2} u^a Z^g \varepsilon_{gcab} \varepsilon^{bdef} F_{ef} Z_d = -\frac{1}{2} (-3!) u^a Z^g \delta^{[d}{}_g \delta^e{}_c \delta^{f]}{}_a F_{ef} Z_d \\ &= -3 u^a Z^g Z_{[g} F_{ca]} = F_{ca} u^a - Z^c u^a E_a \\ \text{即 } (\vec{u} \times \vec{B})_i &= (e_i)^c (\vec{u} \times \vec{B})_c = F_{ij} u^j, \text{ 结合 } F_i = \gamma q(E_i + F_{ij}u^j) \text{ 立即可得 } F^i = \gamma f^i. \\ \text{而 } F^0 &= (e^0)_a F^a = \gamma q(e^0)_a (E^a + F^a{}_b u^b) = -\gamma q(e_0)^a F_{ab} u^b = -\gamma q F_{0i} u^i = \gamma q E_i u^i = \\ &\gamma q \left( E_i + (\vec{u} \times \vec{B})_i \right) u^i = \gamma f_i u^i = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}. \text{ 即证。} \end{aligned}$$

考虑到形式上 $F^a = qF^a{}_b U^b = \rho_0 V_0 F^a{}_b U^b = V_0 F^a{}_b J^b$ ，则：

电磁场对电荷电流体系的4维Lorentz力密度定义为： $\kappa^a = F^a{}_b J^b$ 。

$\kappa^a$ 可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3+1分解： $\kappa^a = wZ^a + \zeta^a$ 。

证： $\kappa^a$ 在观者4标架 $(e_\mu)^a$ 标架上的分量为：

$$\kappa^0 = \kappa^a (e^0)_a = F^a{}_b J^b (-Z_a) = -F_{ab} J^b Z^a = -\rho F_{ab} Z^a Z^b - F_{ab} Z^a j^b = j^b E_a;$$

$$\kappa^i = \kappa^a (e^i)_a = F^a{}_b J^b (e^i)_a = F_{ib} (\rho Z^b + j^b) = \rho E^i + \hat{\varepsilon}_{jk}{}^i j^j B^k;$$

$$\text{而 } \hat{\varepsilon}_{abc} = Z^d \varepsilon_{dabc}, \quad Z^d \varepsilon_{dabc} = \varepsilon_{0bc}{}^a, \text{ 故: } \kappa^i = \rho E^i + \hat{\varepsilon}_{jk}{}^i j^j B^k = \hat{\varepsilon}_{0jk}{}^i j^j B^k.$$

其时间分量 $\kappa^0 = j^b E_a = \vec{j} \cdot \vec{E} = w$ 是3维Lorentz力的功率密度，而空间矢量：

$$\hat{\kappa}^a = \kappa^i (e_i)^a = \rho E^a + Z^d \varepsilon_{dabc} j^b B^c = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \text{ 正是3维Lorentz力密度。}$$

## 6.6.4 电磁场的能动张量

电磁场的能动张量 $T_{ab}$ 为：

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{cd} F^{cd} \right)$$

还可将之表示为更对称的形式：

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} (F_{ac} F_b{}^c + *F_{ac} *F_b{}^c)$$

其中 $*F_{ac} = (*F)_{ac}$ 是 $F_{ac}$ 的对偶形式， $*F_b{}^c = \eta^{ac} *F_{ba}$ 。

选定任一惯性系后，可以得到电磁场的：

能量密度标量：

$$\mu = T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$$

能流密度/3动量密度矢量 (Poynting矢量) :

$$\vec{w} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$w_i = -T_{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i, \quad i = 1, 2, 3$$

3动量流密度张量, 其分量如下:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \delta_{ij}$$

关于电磁场需要注意, 其能动张量满足  $\partial^a T_{ab} = 0$  当且仅当  $J^a = 0$ , 即无源电磁场, 才服从电磁场的能量守恒、3动量守恒和角动量守恒。否则, 有源电磁场会和场源物质 (电荷) 相互作用, 从而交换能量、3动量和角动量, 自然单纯的电磁场也就不满足守恒律。

当然, 将电磁场和物质场视作整体, 仍服从守恒律。事实上, 结合电磁场与物质场有守恒方程:

$$\partial^a T_{ab} = -F_{bc} J^c.$$

该式在惯性系中的时间分量反映能量守恒, 空间分量反映3动量守恒。

## 6.6.5 电磁4势及其运动方程, 电磁波

由于  $F = F_{ab}$  是2形式, 故4维Maxwell方程组的第二式可改写为:  $dF = 3 \partial_{[a} F_{bc]} = 0$ , 即  $F$  是闭的。又由背景流形是  $\mathbb{R}^4$ , 可知其是恰当的。即  $\mathbb{R}^4$  上存在1形式场  $A_a$ , 使得  $F = dA = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ 。

满足  $F = dA$  的  $A_a$  叫电磁场  $F_{ab}$  的4势 (4-potential)。

电磁场的4势存在规范自由性, 即给定  $F$ , 并不能确定唯一的  $A$ : 设  $A$  是  $F$  的一个4势,  $\chi$  是  $\mathbb{R}^4$  上任一  $C^2$  函数, 则由于  $d d\chi = 0$ , 故而  $\tilde{A} = A + d\chi$  也是  $F$  的4势。

$\partial^a A_a = 0$  称为Lorenz规范 (Lorenz Gauge) 条件, 它给出了期望4势满足的某种条件, 这样的4势一定存在, 因为若  $\partial^a A_a \neq 0$ , 则为了找到  $\tilde{A} = A + d\chi$  满足条件, 只需寻找  $\chi$  使得

$\partial^a \partial_a \chi = -\partial^a A_a$ , 即:

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -\partial^a A_a$$

满足这样的非零解  $\chi$  很多。

注: 此Lorenz是丹麦物理学家Ludwig Lorenz, 而非荷兰物理学家Hendrik Lorentz, 尽管Lorenz规范具有天然的Lorentz协变性。

$A_a$  在任一惯性系  $\{t, x^i\}$  可以借对偶坐标基矢展开为时间和空间分量:  $A_a = -\phi(dt)_a + a_a$ 。

其中  $\phi$ 、 $a_a$  分别满足  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ 、 $\vec{E} = \vec{\nabla} \phi - \partial \vec{a} / \partial t$ , 即分别是电磁场  $F$  的标势和3矢势。

借由4势, 可以重新表述Maxwell方程组。第二式已被  $F = dA$  自动满足, 而第一式:

$$-4\pi J_b = \partial^a F_{ab} = \partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = \partial^a \partial_a A_b - \partial_b \partial^a A_a.$$

采取Lorenz规范，Maxwell方程组可以被表述为最简洁的形式：

$$\square^2 A_b = \partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b.$$

称为Riemann-Sommerfeld方程，对应于3维语言中关于 $\phi$ 和 $\vec{a}$ 的d'Alembert方程。这和Newton引力论中的Poisson方程有类似的形式。其中 $\square^2 = \partial^a \partial_a$ 是d'Alembert算符，又称波动算符，形如 $\square^2 T = 0$ 的方程称为波动方程。

对于无源电磁场 $J_b = 0$ ，自然得到波动方程 $\square^2 A_b = \partial^a \partial_a A_b = 0$ 。

波动方程 $\partial^a \partial_a A_b = 0$ 有形如 $A_b = C_b \cos \theta$ 的波动解，其中 $\theta$ 是实标量场，称为相位

(phase)； $C^b$ 是非零常（ $\partial_a C^b = 0$ ）矢量场，称为偏振矢量（polarization vector）。代入波动方程得：

$$\cos \theta (\partial^a \theta) (\partial_a \theta) + \sin \theta (\partial^a \partial_a \theta) = 0,$$

可见，满足：

$$1. (\partial^a \theta) (\partial_a \theta) = 0$$

$$2. \partial^a \partial_a \theta = 0$$

的 $A_b = C_b \cos \theta$ 是波动方程 $\partial^a \partial_a A_b = 0$ 的解。

令 $K^a = \partial^a \theta$ ，则 $K_a = \partial_a \theta$ 。显然 $K_a$ 是超曲面：等 $\theta = C$ 面 $S_C := \{p \in \mathbb{R}^4 | \theta|_p = C \text{ (常数)}\}$ 的法余矢场，从而 $K^a$ 是法矢场。另一方面，两者正交： $K^a K_a = 0$ ，说明 $K^a$ 是类光矢量场，故 $S_C$ 是类光超曲面，其每一点 $p$ 的法矢 $K^a|_p$ 切于其自身。

另一方面， $K^a K_a = 0$ 还导致 $0 = \partial_b (K^a K_a) = 2K^a \partial_b K_a = 2K^a \partial_b \partial_a \theta = 2K^a \partial_a \partial_b \theta = 2K^a \partial_a K_b$ ，可见 $K^a$ 的积分曲线是 $S_C$ 内的类光测地线。另外， $\partial^a \partial_a \theta = 0$ 可知 $\partial^a K_a = 0$ 。

取任一惯性系 $\{t, x^i\}$ ，则： $K_a = \partial_a \theta = (d\theta)_a$ 可用对偶坐标基底展开： $(d\theta)_a = K_\mu (dx^\mu)_a$ 。讨论一最简单情况： $K^a$ 为常矢量场（ $\partial_a K^b = 0$ ），则 $K_\mu$ 为常数，对上式积分得： $\theta = K_\mu x^\mu = K_0 t + K_i x^i$ 。

而 $\{t, x^i\}$ 借对 $K^a$ 做3+1分解，得：

$$K^a = K^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + K^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a = \omega \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + k^a$$

$$\text{则 } \theta = \eta_{00} \omega t + \eta_{ii} k^i x^i = -\omega t + k_i x^i,$$

则满足波动方程 $\partial^a \partial_a A_b = 0$ 的波动解可表为： $A_b = C_b \cos(-\omega t + k_i x^i)$ 。4势可表为这样形式的电磁场称为单色平面电磁波（monochromatic plane wave），偏振矢量 $C^b$ 表示其振幅， $\omega$ 称为它的角频率， $k^a$ 称为它的3维波矢量。 $K^a$ 定义为它的4波矢。

注：“单色”指其频率单一，即唯一的 $\omega$ ；“平面”指在任一时刻，其波阵面（相位相同的点的集合）是平面。这容易证明： $k_i x^i = \theta + \omega t$ （常数），显然满足的坐标点 $(x, y, z)$ 构成一个平面。这个平面的法矢就是3波矢 $k^a$ 。

设 $\Sigma_0$ 为惯性系 $\{t, x^i\}$ 在坐标时刻 $t_0$ 时的同时面，则 $S_0 = S_C \cap \Sigma_0$ 上的 $\theta$ 为常数，显然就是该波的波阵面。特殊情况，即当 $K^a$ 为常矢量场时， $S_C$ 是3维平面（类光超曲面）， $S_0$ 就是2维平面，印证了此时的电磁波是平面波。一般而言， $S_C$ 是同一波阵面 $S_0$ 的世界面，其与每一个 $\Sigma_t$ 的交面就是 $t$ 时刻的波阵面。对每一给定的 $\theta$ 值，方程 $\theta = -\omega t + k_i x^i$ 给出不同的超曲面 $S_\theta$ ，称为该相



位 $\theta$ 的4维波阵面。

由于 $S_C$ 的类光法矢 $K^a$ 的积分曲线是其内的类光测地线，故其在 $\Sigma_0$ 上的投影，即3维波矢量 $k^a$ 的积分曲线与 $S_0$ 正交，定义为3维空间中的光线。 $K^a$ 的积分曲线则定义为4维时空中的光线。4维光线也就是“光子”的世界线（具体见后）。

$S_C$ 在两个时刻 $t_0$ 、 $t_1$ 分别与 $\Sigma_0$ 、 $\Sigma_1$ 交得两个波阵面 $S_0$ 、 $S_1$ 。由于其为类光超曲面，设 $k^a$ 的积分曲线在 $S_0$ 、 $S_1$ 之间的长度为 $d$ ，则易证 $d/(t_1 - t_0) = 1$ ，即波速为光速。

给定单色平面电磁波后，其4波矢 $K^a$ 自然随之确定，是 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的一常类光矢量场。但其角频率 $\omega$ 和3波矢 $k^a$ 是观者依赖的。 $K^a$ 可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3 + 1分解： $K^a = \omega Z^a + k^a$ 。其中 $\omega = -K^a Z_a$ ，和 $k^a$ 分别是观者所测得电磁波的角频率和3波矢。

由 $K^a K_a = 0$ 易知 $\omega^2 = k^a k_a = k^2$ ，则该波相速度 $\omega/k = 1$ 是光速是 $K^a K_a = 0$ 的直接推论。

在一般情况下，并不总能得到严格的单色平面电磁波（满足 $\partial_a C^b = 0$ 、 $\partial_a K^b = 0$ ），但若是相比于相位 $\theta$ 对时空点的变化程度， $C^a$ 、 $K^a$ 要小很多，则总可以找到一定尺度的局域，当 $\theta$ 变化很多时 $C^a$ 、 $K^a$ 的变化仍不甚明显，在其内近似认为是单色平面电磁波，这样的电磁波称为局域单色平面波。

上述对单色平面电磁波的研究方法本质上属于几何光学。进一步，若考虑一定程度的量子化理论，即用光子描述电磁波，则局域单色平面波可看作大量光子组成的光子流，它们有近似相同的 $C^a$ 、 $K^a$ 。

光子的4动量被定义为： $P^a := \hbar K^a$ ，其中 $\hbar = h/2\pi$ 是约化Planck常量。

规定光子的世界线是这样的测地线，其仿射参数 $\beta$ 满足： $P^a = (\partial/\partial\beta)^a$ 。于是由于 $\hbar K^a = (\partial/\partial\beta)^a$ ，故光子世界线重合于 $K^a$ 的积分曲线。

$P^a$ 可借任一瞬时观者 $(p, Z^a)$ 做3 + 1分解： $P^a = E Z^a + p^a$ ，其中 $E = \hbar\omega$ 和 $p^a = \hbar k^a$ 就分别被定义为光子的能量和3动量。

由 $P^a P_a = K^a K_a = 0$ 易知，对于光子而言， $E^2 = p^a p_a = p^2$ 。结合狭义相对论关于粒子能量、动量、质量的关系 $E^2 = m^2 + p^2$ 考虑，将光子的质量定为零： $m = 0$ 是合理的。

既然 $A_b = C_b \cos(-\omega t + k_i x^i)$ 给出的电磁场的4势按照单色平面波的方程传播，则不难证明相应于某惯性系 $\mathcal{R}$ ，其测得的电场矢量和磁场矢量也以单色平面波方式传播。

将 $A_b = C_b \cos \theta$ 代入 $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ ，注意到 $K_a = \partial_a \theta$ ，有：

$$F_{ab} = (C_a K_b - C_b K_a) \sin \theta = 2C_{[a} K_{b]} \sin \theta。$$

注：采取Lorenz规范， $0 = \partial^a A_a = \partial^a (C_a \cos \theta) = K^a C_a \sin \theta$ ，故 $K^a C_a = 0$ （Lorenz规范的等价表述）。考虑另一偏振矢量： $C'_a = C_a + \alpha K_a$ ，则由 $K^a K_a = 0$ 易见 $F'_{ab} = F_{ab}$ ，因此两偏振矢量之间实是一规范变换，且属于Lorenz规范（易知 $K^a C'_a = 0$ ）。令 $\alpha = -C_0/K_0$ 则有 $C_0 = 0$ ，因此总可选择适当规范使偏振矢量 $C^a$ 成为空间矢量，今后作为默认。

对第零坐标基矢为 $Z^b$ 的惯性系 $\mathcal{R}$ ，测得的：

$$E_a = F_{ab} Z^b = Z^b (C_a K_b - C_b K_a) \sin \theta = -\omega C_a \sin \theta \quad (\text{利用了空间矢量性质 } Z^b C_b = 0)；$$

$$B_a = -*F_{ab} Z^b = -\frac{1}{2} Z^b \varepsilon_{abcd} F^{cd} = \frac{1}{2} \varepsilon_{acd} 2C^{[c} K^{d]} \sin \theta = \varepsilon_{acd} 2C^c K^d \sin \theta，$$

其中 $\varepsilon_{abcd}$ 是与 $\eta_{ab}$ 相适配的体元,  $\varepsilon_{abc}$ 是等 $t$ 面上与 $\delta_{ab}$ 相适配的体元。上面两式也可写成:

$$\vec{E} = -\omega \vec{C} \sin \theta = \omega \vec{C} \sin(\omega t - k_i x^i);$$

$$\vec{B} = \vec{C} \times \vec{k} \sin \theta = \vec{k} \times \vec{C} \sin(\omega t - k_i x^i)。$$

因而存在:  $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$  ( $\hat{k}$ 是 $\vec{k}$ 的单位矢量,  $\hat{k} = \vec{k}/\omega$  ( $\omega/k = 1$ ), 仅代表传播方向)。

因为 $C_0 = 0$ , 故 $K^a C_a = 0$ 等价于 $k^a C_a = 0$ , 可见作为3矢量 $\vec{C}$ 的与 $\vec{k}$ 正交, 而 $\vec{E}$ 与 $\vec{C}$ 平行, 可见 $\vec{E}$ 与传播方向 $\hat{k}$ 垂直, 是横波。 $\vec{B}$ 既与 $\vec{E}$ 又与 $\hat{k}$ 垂直, 也是横波。即 $\vec{B}$ 与 $\vec{E}$ 是同频同相正交的横波。

因 $\vec{C}$ 、 $\vec{k}$ 是常矢量场, 上述形式代表线偏振光。采取复场可以讨论其他偏振类型。

$A_b = C_b \cos \theta = \text{Re}(C_b e^{i\theta})$  ( $\text{Re}$ 表示取实部)。将 $\vec{C}$ 推广为复矢量, 前述关于 $K^a C_a = 0$ 、其为空间矢量、 $\vec{B}$ 与 $\vec{E}$ 是同频同相正交的横波等结论仍然成立。而线偏振波变为椭圆偏振波 (仅以 $\vec{E}$ 为例) :

$$\vec{E} = \text{Re} [i\omega \vec{C} e^{i(-\omega t + k_i x^i)}];$$

$$\text{令 } \vec{\varepsilon} = i\omega \vec{C} e^{ik_i x^i}, \text{ 则 } \vec{E} = \text{Re} [\vec{\varepsilon} e^{-i\omega t}].$$

对惯性系 $\mathcal{R}$ 的任一惯性观者 $G_0$ ,  $\vec{\varepsilon}$ 是固定矢量,  $\vec{E}$ 的末端则随时间画出一个平面闭合曲线。将 $\vec{\varepsilon}$ 表为实部、虚部之和:  $\vec{\varepsilon} = \vec{\mu} + i\vec{\nu}$ , 其中 $\vec{\mu}$ 、 $\vec{\nu}$ 均为实矢量场。利用任一实标量场 $\beta$ 定义实矢量场:

$$\vec{m} = \vec{\mu} \cos \beta + \vec{\nu} \sin \beta, \quad \vec{n} = -\vec{\mu} \sin \beta + \vec{\nu} \cos \beta。 \text{ 则 } \vec{\varepsilon} = (\vec{m} + i\vec{n})e^{i\beta}。$$

$$\text{则给出 } \vec{E} = \vec{m} \cos(\omega t - \beta) + \vec{n} \sin(\omega t - \beta)。$$

引入 $\beta$ 可通过选取之使得 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 正交, 即只需令

$$\tan 2\beta = \frac{2\vec{\mu} \cdot \vec{\nu}}{\mu^2 - \nu^2}$$

根据 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 的正交性, 可如下选取惯性参考系 $\mathcal{R}$ 的坐标系 $\{t, x^i\}$ :

1. 以 $G_0$ 为空间原点;
2.  $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 分别作为两空间坐标基矢的方向, 不妨分别为 $x$ 、 $y$ 方向。

则 $\vec{E}$ 的三个坐标分量分别为:  $E_1 = m \cos(\omega t - \beta)$ ,  $E_2 = n \sin(\omega t - \beta)$ ,  $E_3 = 0$ 。

由此可得:

$$\frac{E_1^2}{m^2} + \frac{E_2^2}{n^2} = 1$$

因此证明了 $\vec{E}$ 的末端随时间在 $x - y$ 平面中画出的是椭圆, 说明此时为椭圆偏振。当 $m = n$ 时退化为圆偏振; 当一者为零时退化为线偏振。

## 6.6.6 光波的Doppler效应

设观者和光源都分别做任意运动 (世界线为任意类时线), 4速分别为 $U^a$ 、 $V^a$ 。某光子的事件“被光源发出”为 $p$ , 事件“被观测到”为 $q$ 。默认此光为局域单色平面波, 设光子4波矢为 $K^a$ 。则光源 $V^a$ 测得角频率为 $\omega = -K^a|_p V_a|_p$ , 接受到时 $U^a$ 测得角频率为 $\omega' = -K^a|_q U_a|_q$ 。

因平直时空存在绝对平移的概念, 因此将上述各矢量统一平移至点 $p$ , 并省略时空点下标。

$K^a = \omega V^a + k^a$ 。  $\gamma = -V^a U_a$ , 则 $U^a = \gamma(V^a + u^a)$ , 其中 $\gamma u^a$ 是 $U^a$ 在 $(p, V^a)$ 的空间投影。

故：

$$\omega' = -(\omega V^a + k^a)\gamma(V^a + u^a), \text{ 即:}$$

狭义相对论Doppler效应： $\omega' = \gamma(\omega - k^a u_a)$ 。

写成标量等式：设 $k^a$ 、 $u^a$ 的夹角为 $\theta$ ，注意到 $\omega/k = 1$ ，则有 $\omega' = \gamma\omega(1 - u \cos \theta)$ 。

红移：观者与光源相背而行， $\theta = 0$ ， $\omega' = \gamma\omega(1 - u) = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\omega < \omega$

蓝移：观者与光源相向而行， $\theta = \pi$ ， $\omega' = \gamma\omega(1 + u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\omega > \omega$

横向Doppler效应：观者与光源横向相对运动， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， $\omega' = \gamma\omega$ 。

# 附 Lorentz变换的一种推导方式

2018年7月30日 5:12

设两惯性系 $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{R}'$ 的 $x$ 轴重合，其余轴向平行， $\mathcal{R}'$ 相对于 $\mathcal{R}$ 的运动速度为沿着 $x$ 轴的匀速 $v$ ， $t = t' = 0$ 时坐标原点重合。坐标变换关系记为

$$\begin{cases} x' = X(x, t) \\ t' = T(x, t) \end{cases}$$

1. 时空均匀性 (homogeneity) 要求这一变换是线性的，因此

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

由于 $x' = 0$ 时 $x = vt$ ，有 $B_v = -vA_v$ 。

2. 空间各向同性 (isotropy) 要求这一变换在 $x \rightarrow -x$ ， $x' \rightarrow -x'$ 时不变，此时 $v \rightarrow -v$ ，因此

$$\begin{cases} A_{-v} = A_v \\ B_{-v} = -B_v \\ C_{-v} = -C_v \\ D_{-v} = D_v \end{cases}$$

3. 狭义相对论基本原理要求 $\mathcal{R}$ 到 $\mathcal{R}'$ 与 $\mathcal{R}'$ 到 $\mathcal{R}$ 的变换形式相同。因此对以上线性变换取逆，得

$$\begin{cases} A_{-v} = \frac{D_v}{A_v D_v - B_v C_v} \\ B_{-v} = \frac{-B_v}{A_v D_v - B_v C_v} \\ C_{-v} = \frac{-C_v}{A_v D_v - B_v C_v} \\ D_{-v} = \frac{A_v}{A_v D_v - B_v C_v} \end{cases}$$

结合2、3可知，

$$D_v = A_v C_v = \frac{A_v^2 - 1}{B_v}$$

整理上述结果，发现只需确定 $A_v$ 即可确定变换的形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v & -vA_v \\ -\frac{A_v^2 - 1}{vA_v} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

4. 两个变换相乘仍是一个变换。考虑另外一个惯性系 $\mathcal{R}''$ 对 $\mathcal{R}'$ 的速度为 $u$ ：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_u & -uA_u \\ -\frac{A_u^2 - 1}{uA_u} & A_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_v & -vA_v \\ -\frac{A_v^2 - 1}{vA_v} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ &= A_u A_v \begin{pmatrix} 1 + u \frac{A_v^2 - 1}{vA_v} & -(u + v) \\ -\frac{A_v^2 - 1}{vA_v} - \frac{A_u^2 - 1}{uA_u} & 1 + v \frac{A_u^2 - 1}{uA_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

它也应该满足3中各个矩阵元的关系，因此有：

$$D_v = A_v \rightarrow 1 + v \frac{A_u^2 - 1}{uA_u} = 1 + u \frac{A_v^2 - 1}{vA_v}$$

由于 $u$ 、 $v$ 是任意的，故等式两边应为常数。记

$$K = \frac{A_v^2 - 1}{v^2 A_v^2}$$

又由于上面的条件还不能保证变换的唯一性（即变换乘上一个常数仍然成立）。为了消除这种任意性，我们规定当 $v = 0$ 时 $A_v = 1$ 。因此：

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}$$

整理上述结果，有

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} & -\frac{v}{\sqrt{1 - Kv^2}} \\ -\frac{Kv}{\sqrt{1 - Kv^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -Kv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

容易看出 $K \geq 0$ 且 $K^{-\frac{1}{2}}$ 有速度量纲。

$K = 0$ 时，变换就是经典的Galileo变换，而 $K > 0$ 时就是Lorentz变换。实验测得：

$$K = \frac{1}{c^2}$$

容易看出，经典 $K = 0$ 就是狭义相对论在 $c \rightarrow \infty$ 时的极限。