第五章 微分形式及其积分

微分形式是一种抽象的、具有特殊对称性的一类对偶矢量，它是微分几何以及后面引入其他几何结构的重要方法，也可以借助微分形式的运算极大简化地表示各种微积分运算。
通过微分形式可以定义流形上的积分，进一步得到两大重要定理：Stokes定理和Gauss定理。
对偶微分形式反映了微分形式之间深刻的对称性，对于研究具有对偶、对称性质的物理现象，如电磁现象，具有重要作用。

§5.1 微分形式

2018年6月14日 5:30

矢量空间V上的全反称的$(0,l)$型张量$\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{[a_1\cdots a_l]}$，称为$V$上的一个$l$次形式（$l$-form，简称$l$形式），有时简记为$\boldsymbol{\omega}$。

V上的全体l形式的集合记为$\Lambda(l)$，$\omega_a\in\Lambda(1)=V^*$，$\omega\in\Lambda(0)=\mathbb{R}$。

有结论：

1. l形式$\omega_{a_1\cdots a_l}$在任意基底下的分量$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$有$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$。
2. 若∃基底使得$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$，则$\omega_{a_1\cdots a_l}$是$l$形式。
3. l形式$\omega_{a_1\cdots a_l}=(-1)^{\tau(\pi)}\omega_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$，其中$\pi$表示正整数组$(1,2,\cdots,l)$的一种排列，$\pi(n)$为这个排列的第$n$个数字，$\tau(\pi)$为排列的逆序数，逆序数为奇数的排列称为奇排列，否则为偶排列。）
4. 对任意基底，l形式的分量$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=(-1)^{\tau(\pi)}\omega_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(l)}}$。
5. 对n维线性空间V上的l形式，若$n<l$，则易证$\forall\omega_{a_1\cdots a_l}\in\Lambda(l)$，$\omega_{a_1\cdots a_l}=0$，$\Lambda(l)=\{0\}$。
6. 由全反称性质可知，所有$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$中，凡有重复具体指标者都为零。

$\dim\mathcal{T}_V(0,l)=n^l$，可以证明$\Lambda(l)$是$\mathcal{T}_V(0,l)$的线性子空间。为求$\Lambda(l)$的维数，进行如下定义：

设$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\mu}$分别是l形式和m形式，其楔形积（wedge product，楔积）定义为如下的$l+m$形式：

$$(\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m}\coloneqq\frac{(l+m)!}{l!\,m!}\omega_{[a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m]}$$

或者等价定义楔积为满足上式的映射∧： $\Lambda(l)\times\Lambda(l)\to\Lambda(m+l)$。

楔积也可记作$\omega_{a_1\cdots a_l}\wedge\mu_{b_1\cdots b_m}$，简记作$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}$。

楔积本质上是两步操作：先进行张量积，再进行全反称化。

楔积满足：

1. 结合律$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\nu}=(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu})\wedge\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\nu})$；
2. 分配律$\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\nu}$；
3. 但通常不满足交换律：$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu}=(-1)^{lm}\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}$。

设$\dim V=\dim V^*=n$，即$\dim\mathcal{T}_V(0,l)=n^l$，则

$$\dim\Lambda(l)=\frac{n!}{l!\,(n-1)!}=\mathrm{C}_n^l,\quad l\le n$$

证：若$\dim V=\dim V^*=n$，则存在n元对偶基底$\{(e^n)_a\}$，使得$\forall\omega_{a_1\cdots a_l}\in\Lambda(l)$：

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l},$$

注意到：

1. $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$中出现重复具体指标者为零；
2. $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=(-1)^{\tau(\pi)}\omega_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(l)}}$；

3. 每个对偶基矢$(e^{\mu})_a$也是一个1形式。

因此将上式（本质上是求和式）之中存在重复指标的排除，剩余的就是C_n^l组，每组的具体指标序列都是同一组l个正整数的一个排列。而每组对应的基矢都是同一组不重复的l个基矢$(e^{\mu_1})_{a_1},\cdots,(e^{\mu_l})_{a_l}$。对每一组进行改写：

设该组涉及到的具体指标为正整数组$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l)$，$\pi$表示$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l)$的一种排列，$\pi(n)$为这个排列的第$n$个数字，$\tau(\pi)$为排列的逆序数，则该组全体的和为：

$$\left(\sum_{\pi}\omega_{\pi(1)\cdots\pi(l)}\right)(e^{\mu_1})_{a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l}=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\left[\left(\sum_{\pi}(-1)^{\tau(\pi)}\right)\left(e^{\pi(1)}\right)_{a_1}\cdots\left(e^{\pi(l)}\right)_{a_l}\right]$$

$$=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\left[\sum_{\pi}(-1)^{\tau(\pi)}\left(e^{\pi(1)}\right)_{a_1}\cdots\left(e^{\pi(l)}\right)_{a_l}\right]=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{[a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l]}$$

$$=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\frac{1}{l!}\frac{(1+\cdots+1)!}{1!\cdots1!}(e^{\mu_1})_{[a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l]}=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$$

因此将每一组再加起来，得到：

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum_{\mathrm{C}_n^l}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$$

其中$\{(e^n)_a\}$是任一n元对偶基底，求和指标C_n^l代表对n元正整数组$(1,2,\cdots,n)$的任何l元选择进行求和。$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$是$\omega_{a_1\cdots a_l}$在相应选择的基矢构成的子基底下的分量，即$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{a_1\cdots a_l}\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\left(e_{\mu_l}\right)^{a_l}$。

上式也可写成：

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\frac{1}{l!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$$

求和按照求和约定表述。则此时的求和项一共有n元正整数组$(1,2,\cdots,n)$的l元排列数$\mathrm{A}_n^l=n!/(n-1)!$。实际上仍然可以分为C_n^l组，每组内共$l!$项，且均相等。

若对流形M（或$A\subset M$）上任一点p指定一个V_p上的l形式，就得到M（或A）上的一个l形式场，简称M（或A）上的一个l形式。1形式场和0形式场分别是对偶矢量场和标量场。M上光滑的l形式场称为l次微分形式场（differential l-form），也简称作l形式场或l形式。

设(O,ψ)为坐标系，则O上的l形式场可以用对偶坐标基底场$\{(\mathrm{d}x^{\mu})_a\}$逐点线性表出：

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum_{\mathrm{C}_n^l}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}$$

其中

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{a_1\cdots a_l}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)^{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}}\right)^{a_l}$$

是O上的函数。一个重要的特例是的情况$l=n$的情况，此时$\mathrm{C}_n^l=\mathrm{C}_n^n=1$，

$$\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{1\cdots n}\left(\mathrm{d}x^1\right)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^n)_{a_l};$$

简写为$\boldsymbol{\omega}=\omega_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$。

上式也可理解为n维流形M上任一点p的所有n形式的集合是1维矢量空间，只有一个基矢，取作$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\big|_p$，每一点$\boldsymbol{\omega}|_p$的展开系数为$\omega_{1\cdots n}$，是坐标域上$n$元函数$\omega_{1\cdots n}\left(x^1,\cdots,x^n\right)$。

以$\Lambda_M(l)$代表M上全体l形式场的集合。

流形M上的外微分算符（exterior differentiation operator）是一个映射d：$\Lambda_M(l) \to \Lambda_M(l+1)$，定义为：

$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} \coloneqq (l+1)\,\nabla_{[b}\,\omega_{a_1\cdots a_l]}$；

其中∇_b可以为任一导数算符（因由$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$可以证明对任意∇_a和$\tilde{\nabla}_a$都有$\nabla_{[b}\,\omega_{a_1\cdots a_l]} = \tilde{\nabla}_{[b}\,\omega_{a_1\cdots a_l]}$），可见在定义外微分之前无须提前指定导数算符（以及其他任何附加结构，如度规）。

例：曾经定义的对偶矢量场$(\mathrm{d}f)_b = \nabla_b\,f$，就是$f \in \Lambda_M(0)$的外微分。

l形式场$\boldsymbol{\omega}$用对偶坐标基底展开的形式便于计算$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$。若：

$$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_{\mathrm{C}_n^l} \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}$$

则：

$$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} = \sum_{\mathrm{C}_n^l} \left(\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)_b \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}$$

定理：$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$。

证：$[\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)]_{cba_1\cdots a_l} = (l+2)(l+1)\,\partial_{[c}\,\partial_{[b}\,\omega_{a_1\cdots a_l]]} = (l+2)(l+1)\,\partial_{[[c}\,\partial_{b]}\,\omega_{a_1\cdots a_l]} = 0$

设$\boldsymbol{\omega}$为M上的l形式场，$\boldsymbol{\omega}$叫闭的（closed），若$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$。$\boldsymbol{\omega}$叫恰当的（exacted），若存在$l-1$形式场$\boldsymbol{\mu}$使得$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$。

若$\boldsymbol{\omega}$是恰当的，则$\boldsymbol{\omega}$一定是闭的。然而逆命题成立还需对流形提出一定要求。平凡流形$\mathbb{R}^n$满足这些要求，而流形一定是局域平凡的，因此$\boldsymbol{\omega}$至少是局域闭的。即对M上任一点p，必有p的邻域N，在其内存在$l-1$形式场$\boldsymbol{\mu}$使得$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$。

§5.2 流形上的积分

2018年6月14日　　5:31

n维流形M称为可定向的（orientable），若其上存在至少$\mathbf{C}^0$且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\varepsilon}$。
若在n维可定向流形M上选定一个$\mathbf{C}^0$且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\varepsilon}$，则称M是（已）定向的，也$\boldsymbol{\varepsilon}$用指代这个定向。设$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$是两个$\mathbf{C}^0$且处处非零的$n$形式场，若存在处处为正的函数$f$使得$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = f\boldsymbol{\varepsilon}_2$，则称$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$给出的是$M$的同一个定向。
注：由于n维流形M上任一点的所有n形式的集合是1维矢量空间，因此对于任意两个n形式场$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$必有$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = f\boldsymbol{\varepsilon}_2$。若$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$处处非零，则$f$处处非零；若$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$是$\mathbf{C}^0$的，则$f$是$\mathbf{C}^0$的。对连通流形来说，处处非零且$\mathbf{C}^0$的函数只能处处为正或为负，可见连通流形只有两种定向。

M上选定以$\boldsymbol{\varepsilon}$为代表的定向后，开域$O \subset M$上的基底场$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$叫做以$\boldsymbol{\varepsilon}$衡量为右手的（right handed），若$O$上存在处处为正（否则称为左手的（left handed））的函数h使得$\boldsymbol{\varepsilon} = h\left(e^1\right)_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left(e^n\right)_{a_n}$，其中$\{(e^\mu)_a\}$是$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$的对偶基底。一个坐标系称为右（左）手系，若其坐标基底是右（左）手的。

设(O,ψ)为n维定向流形M上的右手坐标系，$\boldsymbol{\omega}$是开子集$G \subset O$上的连续n形式场，且可以在对偶坐标基矢的楔积下表为$\boldsymbol{\omega} = \omega_{1\cdots n}\left(x^1,\cdots,x^n\right)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$，则$\boldsymbol{\omega}$在$G$上的积分（integral）定义为：

$$\int_G \boldsymbol{\omega} \coloneqq \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}\left(x^1,\cdots,x^n\right)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

即其表出系数函数在$\mathbb{R}$的开子集$\psi[G]$上的简单n重积分。
注：

1. 还应说明上述定义的积分不依赖于坐标系。设(O,ψ)、(O',ψ')分别为为两右手坐标系，$G \subset O \cap O'$，则
   $\boldsymbol{\omega} = \omega_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \omega'_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x'^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'^n$。令：
   $$\int_G \boldsymbol{\omega} \coloneqq \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n\,,\quad \int_G' \boldsymbol{\omega} \coloneqq \int_{\psi'[G]} \omega'_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x'^1 \cdots \mathrm{d}x'^n$$
   易知
   $$\omega'_{1\cdots n} = \omega_{1\cdots n}\det\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right]$$
   其中$\det\left[\partial x^\mu/\partial x'^\nu\right]$是这个坐标变换的Jacobian行列式。则：
   $$\int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{\psi'[G]} \omega_{1\cdots n}\det\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right]\mathrm{d}x'^1 \cdots \mathrm{d}x'^n = \int_{\psi'[G]} \omega'_{1\cdots n}\,\mathrm{d}x'^1 \cdots \mathrm{d}x'^n$$
2. (O,ψ)若为左手坐标系，则应定义为：
   $$\int_G \boldsymbol{\omega} \coloneqq -\int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}\left(x^1,\cdots,x^n\right)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$
3. 如上述方法定义的积分是依赖于流形定向的，若定向改变，则积分变号。
4. 该定义仅仅定义了坐标域内开子集的积分，全流形上的积分可以由局部积分“拼接”而成。

对于嵌入ϕ：$S \to M$，可以将$\phi[S] \subset M$上的l形式场分为“切于$\phi[S]$”和“不切于$\phi[S]$”两类，而对于$\phi[S]$有意义的只是切于的一类，即定义在逐点q的W^q而非V^q上的l形式场。

设$\mu_{a_1 \cdots a_l}$是l维子流形$\phi[S] \subset M$上的l形式场。流形$\phi[S]$上的l形式场$\tilde{\mu}_{a_1 \cdots a_l}$称为$\mu_{a_1 \cdots a_l}$在$\phi[S]$上的限制，若

$\tilde{\mu}_{a_1 \cdots a_l}\big|_q (w_1)^{a_1} \cdots (w_l)^{a_l} = \mu_{a_1 \cdots a_l}\big|_q (w_1)^{a_1} \cdots (w_l)^{a_l}$，$\forall q \in \phi[S]$，$(w_1)^{a_1}, \cdots, (w_l)^{a_l} \in W^q$。

此后谈及在子流形上的积分，都是指限制在子流形上的积分，即：

$$\int_{\phi[S]} \boldsymbol{\mu} \equiv \int_{\phi[S]} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}$$

§5.3 Stokes定理

2018年6月14日 5:31

$\mathbb{R}^{n-} \coloneqq \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^1 \le 0\}$是一个$n$维带边流形。其中$x^1 = 0$的所有点组成的集合称为$\mathbb{R}^{n-}$的边界，本身是一个$n-1$维（正常的）流形。
注：带边流形不是流形。
n维带边流形（manifold with boundary）N的定义与n维流形相仿，只不过将局部同胚映射的陪集取为$\mathbb{R}^{n-}$的开子集。N中全体被映射到$x^1 = 0$的点组成的集合称为N的边界，记作∂N，是一个$n-1$维流形。
而其内部$\mathrm{i}(N) \coloneqq N - \partial N$仍是一个$n$维流形。
将一个n维流形并上一个$n-1$维流形，就得到一个n维带边流形：$N = \mathrm{i}(N) \cup \partial N$。

Stokes定理：设n维定向流形M的紧致子集N是个n维带边流形，$\boldsymbol{\omega}$是M上的至少为$\mathbf{C}^1$的$n-1$形式场，则
$$\int_{\mathrm{i}(N)} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \boldsymbol{\omega}$$

把M的定向$\boldsymbol{\varepsilon}$限制在N上就得到N的定向，仍记作$\boldsymbol{\varepsilon}$。它在N的边界∂N（作为M的一个超曲面）上自然诱导出一个定向$\bar{\varepsilon}_{a_1 \cdots a_{n-1}}$，记作$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$。它满足：若坐标系$\{x^1, \cdots, x^n\}$在$\boldsymbol{\varepsilon}$衡量下为右手系，则在$x^1 = 0$的$\partial N$上，坐标系$\{x^2, \cdots, x^n\}$以$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$衡量也为右手系。

§5.4 体元

2018年6月14日　5:31

n维可定向流形M上的任一个C^0且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\varepsilon}$称为一个体元（volume element）。
注：借助n形式场定义的连通流形的定向只有两个，而任意两个不同的、满足上述条件的n形式场都是不同的体元。

对于没有附加度规结构的流形，对体元的选取没有更多要求。然而对于给定了度规的流形，则存在选取特定体元的自然方法：
对于指定了任意度规g_{ab}的n维可定向流形M，设$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$为任一体元，则$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}=g^{a_1b_1}\cdots g^{a_nb_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}$有意义，且$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$是标量场，可借任一基底计算。
现选取一正交归一基底$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$，$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$在其对偶基底下展开分量为$\varepsilon_{1\cdots n}$，$g_{ab}$在其下展开分量之中$-1$的个数为$s$，例如正定度规$s=0$，Lorentzian度规$s=1$。则：
$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=(-1)^s n!\left(\varepsilon_{1\cdots n}\right)^2$。
所谓自然方法，是指选取$\left(\varepsilon_{1\cdots n}\right)^2=1$，即$\varepsilon_{1\cdots n}=\pm1$。
这相当于要求：$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=(-1)^s n!$
即$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\pm\left(e^1\right)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(e^n\right)_{a_n}$（仅对正交归一基）。
满足上式的体元称为与度规适配的体元。注意，它仅仅能把体元确定到相差一个符号的程度。
加上“与定向相容”的条件才能唯一确定，上式中的正负号分别对应右手系和左手系。
这样的体元称为适配体元，对于给定了度规和选定了定向的流形来说，是唯一确定的。

对任意带正定度规δ_{ab}的n维定向流形N，$\boldsymbol{\varepsilon}$是适配体元，若$\int_N \boldsymbol{\varepsilon}$存在，则称它为$N$的（用$\delta_{ab}$衡量的）$n$维体积。

体元在正交归一基底下分量表达为$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\pm\left(e^1\right)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(e^n\right)_{a_n}$，而对于一般基底则有：
设$\boldsymbol{\varepsilon}$为适配体元，$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$和$\left\{\left(e^\mu\right)_a\right\}$分别为任意的基底及其对偶基底，$g$是$g_{ab}$在此基底下分量组成的矩阵，$|\det g|$为其行列式的绝对值，正负号分别对应右（左）手系，则：
$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\pm\sqrt{|\det g|}\left(e^1\right)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(e^n\right)_{a_n}$。

设∇_b和$\boldsymbol{\varepsilon}$分别是(M,g_{ab})中与度规相适配的导数算符和适配体元，则$\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=0$。
证：$(-1)^s n!=\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$，两边用导数算符作用，$0=\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}+\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon^{a_1\cdots a_n}$，而$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\left(g_{a_1c_1}\cdots g_{a_nc_n}\varepsilon^{c_1\cdots c_n}\right)=\varepsilon^{a_1\cdots a_n}g_{a_1c_1}\cdots g_{a_nc_n}\nabla_b\,\varepsilon^{c_1\cdots c_n}=\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon^{a_1\cdots a_n}$，
故$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\nabla_b\,\varepsilon^{a_1\cdots a_n}=0$。
于是它对M上的任一矢量场v^b做缩并，$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}v^b\,\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=0$。而$v^b\,\nabla_b\,\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$缩并后留下了$n$个全反称的指标，仍是一个$n$形式场，那么与适配体元$\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$只差一个函数乘子$h$，即

$v^b \nabla_b \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = h\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$，则$h\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$。而$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n! \neq 0$，说明$h = 0$，即$v^b \nabla_b \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$，$\forall v^b \in \mathcal{T}_M(1,0)$，则必有$\nabla_b \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$。

由引理：$\delta^{[a_1}{}_{a_1} \cdots \delta^{a_j}{}_{a_j} \delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}} \cdots \delta^{a_n]}{}_{b_n} = \frac{(n-j)!j!}{n!} \delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}} \cdots \delta^{a_n]}{}_{b_n}$

可证如下的一般性定理：

1. $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n} = (-1)^s n! \delta^{[a_1}{}_{b_1} \cdots \delta^{a_n]}{}_{b_n}$；
2. $\varepsilon^{a_1\cdots a_j a_{j+1}\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_j b_{j+1}\cdots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}} \cdots \delta^{a_n]}{}_{b_n}$

§5.5 函数在流形上的积分，Gauss定理

2018年6月14日 5:31

设$\boldsymbol{\varepsilon}$为流形M上任一体元，f为M上的任意$\mathbf{C}^0$函数，则f在M上的积分定义为n形式场$f\boldsymbol{\varepsilon}$在$M$上的积分：

$$\int_M f \coloneqq \int_M f\boldsymbol{\varepsilon}$$

这样定义的函数积分与体元的选取有关。而若是给定了度规，则规定总是选取适配体元来定义函数积分。此时$f\boldsymbol{\varepsilon}$在坐标系$(O,\psi)=\{x^\mu\}$的对偶坐标基底（不一定正交归一）下展开表达式为：

$$f\boldsymbol{\varepsilon}=\pm\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(x^1,\cdots,x^n\right)\sqrt{\left|\det g\right|}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n,$$

其中$\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(x^1,\cdots,x^n\right)$是函数$f$与坐标系结合产生的$n$元函数。即（右手系下）：

$$\int_M f\coloneqq\int_M f\boldsymbol{\varepsilon}=\int_{\psi[G]}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(x^1,\cdots,x^n\right)\sqrt{\left|\det g\right|}\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

设M是n维定向流形，N是M中的n维紧致带边嵌入子流形，g_{ab}是M上的度规，∇_b和$\boldsymbol{\varepsilon}$分别是适配导数算符和适配体元，v^b是M上的$\mathbf{C}^1$矢量场，则：

$$\int_{\mathrm{i}(N)}\left(\nabla_b v^b\right)\boldsymbol{\varepsilon}=\int_{\partial N}v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$$

证：记$\boldsymbol{\omega}=v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，则$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=n\nabla_{[c}v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]}$，是一个$n$形式场，则根据结论，它与体元只差一个函数乘子：$n\nabla_{[c}v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]}=h\varepsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$，两边以$\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}$进行缩并作用，得$n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}=h(-1)^s n!$，这个过程等号左边利用了抽象指标括号的传染性将反称括号移至上标，而$\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}$本就是全反称的，因此反称括号被省略掉了。根据结论，$h(-1)^s n!=n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}=n\varepsilon^{a_1\cdots a_{n-1}c}\varepsilon_{a_1\cdots a_{n-1}b}\nabla_c v^b=n(-1)^s(n-1)!\,\delta^c{}_b\nabla_c v^b=(-1)^s n!\,\nabla_b v^b$，则得$h=\nabla_b v^b$，从而$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\left(\nabla_b v^b\right)\boldsymbol{\varepsilon}$，由Stokes定理可知等式成立。

考虑∂N（只考虑∂N不是类光超曲面的情形），有归一化法矢$n^a n_a=\pm1$，则N（M）上的度规g_{ab}在上诱导出一个度规$h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$。则∂N的体元$\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$满足：

1. 与诱导定向$\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$相容；
2. 与诱导度规$h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$适配；

即$\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=(-1)^{s_h}(n-1)!$。

∂N上满足上述条件的体元$\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$称为诱导体元。设$n^b$是$\partial N$的外向单位法矢，则诱导体元与$N$上的体元有关系：

$$\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$$

Gauss定理：设M是n维定向流形，N是M中的n维紧致带边嵌入子流形，g_{ab}是M上的度规，∇_b和$\boldsymbol{\varepsilon}$分别是适配导数算符和适配体元，$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$是$\partial N$上的诱导体元，$\partial N$的外向法矢$n^a$满足$n^a n_a=\pm1$，$v^a$是$M$上的$\mathbf{C}^1$矢量场，则（下式的$\pm$与$n^a n_a=\pm1$保持一致）：

$$\int_{\mathrm{i}(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

证：记$\boldsymbol{\omega} = v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，只需证$\boldsymbol{\omega}$在$\partial N$上的限制$\widetilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = \pm v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$。两边都是$n-1$维流形$\partial N$上的$n-1$形式场，相差一个函数乘子$K$：$\widetilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$。

先在∂N上选取一组正交归一基底$\left\{(e_{n-1})^a\right\}$，基矢均切于$\partial N$，在其中加入$n^b$作为基矢则得到$N$一点的一个基底$\left\{(e_0)^b = n^b, (e_1)^{a_1}, \cdots, (e_{n-1})^{a_{n-1}}\right\}$，则$n_b = \pm(e^0)_b$。

用$(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}$缩并上式，并考虑到正交归一基底下$\hat{\varepsilon}_{1\cdots n-1} = 1$得右边=

$\pm K v^b (e^0)_b \hat{\varepsilon}_{1\cdots n-1} = \pm K v^0$；

左边= $\widetilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} = \omega_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} =$

$v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} = v^\mu \varepsilon_{\mu 1\cdots n-1} = v^0 \varepsilon_{01\cdots n-1} = v^0$；因此$K=1$。即证。

注：

1. 条件“n^a是∂N的外向单位法矢”若改为“$n^a n_a = +1$时取n^a外向，否则内向”，则
   $$\int_{\mathrm{i}(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$
2. 若∂N为类光超曲面，则Gauss定理仍成立，但$\hat{\varepsilon}$要按照如下定义：
   $$\frac{1}{n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = n_{[a_1}\hat{\varepsilon}_{a_2\cdots a_n]}$$

§5.6 对偶微分形式

2018年6月14日 5:32

以$\Lambda_p(l)$代表点$p\in M$所有l形式的集合，则

$\dim\Lambda_p(l)=\dfrac{n!}{l!\,(n-l)!}=\dim\Lambda_p(n-l)$

若M是带有度规g_{ab}的定向流形，$\boldsymbol{\varepsilon}$是适配体元，则可以定义一个同构映射如下：

$\forall\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(l)$，定义$\boldsymbol{\omega}$的对偶微分形式（dual differential form）$*\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(n-l)$为：

$*\omega_{a_1\cdots a_{n-l}}\coloneqq\dfrac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}$

其中$\omega^{b_1\cdots b_l}=g^{b_1c_1}\cdots g^{b_lc_l}\omega_{c_1\cdots c_l}$。

注：以上定义的$*$称为Hodge star。不难看出：

1. $*:\ \Lambda_M(l)\to\Lambda_M(n-l)$是同构映射；
2. $f\in\Lambda_M(0)$作为零形式场，其对偶形式场按照定义为：$*f_{a_1\cdots a_n}=f\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$，即与度规适配的体元的$f$倍，因此可以说函数的积分定义为其对偶形式场的积分。对上式再取$*$得$*(*f)=\frac{1}{n!}f\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=(-1)^sf$。这可以推广为下述定理。

$**\boldsymbol{\omega}=(-1)^{s+l(n-l)}\boldsymbol{\omega}$，$\forall\boldsymbol{\omega}\in\Lambda_M(l)$。

现在可以用微分几何的观点重新考察三维Euclidean空间$(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$上的矢量代数和矢量场论：

1. 三维Euclidean空间只考虑了标量场和矢量场。1形式场可以利用度规将其同构于矢量场：$\omega^a=\delta^{ab}\omega_a$；2形式场对偶同构于1形式场；3形式场对偶同构于标量场。可见$(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$上的微分形式场都可以用函数和矢量场代替。
2. 考虑矢量点积和叉积。分别记$\vec{A}$、$\vec{B}$为A^a、B^a，则$\vec{A}\cdot\vec{B}$就是A_aB^a。
   令$\omega_{ab}=A_a\wedge B_b=2A_{[a}B_{b]}$，则$*\omega_c=\frac{1}{2}\omega^{ab}\varepsilon_{abc}=\varepsilon_{abc}A^{[a}B^{b]}=\varepsilon_{abc}A^aB^b$。其中$\boldsymbol{\varepsilon}$是Euclidean空间的适配体元。设$\{x,y,z\}$为右手Cartesian系，则其坐标基底正交归一，易知其分量ε_{ijk}就是Levi-Civita记号，即：
   $$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}=\begin{cases}+1 & \mu_1\cdots\mu_n\text{为}1,2,\cdots,n\text{的一个偶排列}\\ -1 & \mu_1\cdots\mu_n\text{为}1,2,\cdots,n\text{的一个奇排列}\\ 0 & \mu_1,\cdots,\mu_n\text{中有元素相等}\end{cases}$$
   于是$*\boldsymbol{\omega}$在该系的第k分量$*\omega_k=\varepsilon_{ijk}A^iB^j$，$k=1,2,3$。右边正是$\vec{A}\times\vec{B}$按照叉乘定义的第$k$分量$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k$，故$\vec{A}\times\vec{B}$就是$*(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})$，其中$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$分别是矢量场$A^a$、$B^a$同构的形式场（事实上已经不必区分）。
3. 考虑矢量场论。事实上$\vec{\nabla}$就是与度规δ_{ab}适配的导数算符∂_a，有如下表示：
   a. $\vec{\nabla}f=\partial_af$；
   b. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\partial_aA^a$；
   c. $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\varepsilon^{abc}\partial_aA_b$；
   d. $\nabla^2f=\partial_a\partial^af$；
   e. $\nabla^2\vec{A}=\partial_a\partial^aA^b$。

4. 三维Euclidean空间中场的梯度、散度、旋度可以用外微分表示为：
   设f和$\vec{A}$是$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$中的函数和矢量场，则
   $\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \mathrm{d} f$，$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = * \,\mathrm{d}(* \boldsymbol{A})$，$\operatorname{crul} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = * \,\mathrm{d} \boldsymbol{A}$；
   $\mathbb{R}^3$是平凡流形导致$\mathbb{R}^3$上的闭形式场必恰当，从而：
   $\operatorname{crul} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow$存在标量场$\phi$使得$\vec{E} = \operatorname{grad} \phi$；
   $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$存在矢量场$\vec{A}$使得$\vec{B} = \operatorname{crul} \vec{A}$。

§5.7 用标架计算曲率张量

2018年6月14日 5:32

前面已经介绍了通过坐标基底来计算Riemann曲率张量$R_{abc}{}^{d}$的方法，其中关键就是先求出导数算符∇_a借助坐标基底场的体现：Christoffel符号$\Gamma^{c}{}_{ab}$。
本节给出的是使用非坐标基底场来计算$R_{abc}{}^{d}$的方法（基底又称标架（frame），4维标架专称tetrad。许多情况下标架专指非坐标基底）。首先也要找出导数算符∇_a借助该标架场的体现。
对给定的∇_a，设$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$是任一标架场（基底场），定义域$U\subset M$，其第$\mu$基矢场$\left(e_\mu\right)^a$沿第$\tau$基矢场$(e_\tau)^a$的导数$(e_\tau)^b\,\nabla_b\left(e_\mu\right)^a$也是$U$上的矢量场，可用标架场$\left\{(e_\sigma)^a\right\}$展开：
$(e_\tau)^b\,\nabla_b\left(e_\mu\right)^a=\gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}(e_\sigma)^a$，
展开系数$\gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}$是一组数，称为联络系数（connection coefficients），可看作∇_a借$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$的体现。特别地，当该任意标架是坐标基底时，联络系数正是Christoffel符号$\Gamma^{c}{}_{ab}$：
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a=\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$$
利用对偶基矢$(e^\nu)_a$缩并可以得到的显式表达：
$\gamma^{\nu}{}_{\mu\tau}=\gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}\delta^{\nu}{}_{\sigma}=\gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}(e^\nu)_a(e_\sigma)^a=(e^\nu)_a(e_\tau)^b\,\nabla_b\left(e_\mu\right)^a$。

给定μ、ν的值，得到n个实数$\gamma^{\nu}{}_{\mu1},\dots,\gamma^{\nu}{}_{\mu n}$，利用它们定义：
$\left(\omega_\mu{}^\nu\right)_a\coloneqq-\gamma^{\nu}{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$，
这是一组n^2个1形式，称为联络1形式（connection 1-form），其分量为$-\gamma^{\nu}{}_{\mu\tau}$。抽象指标$a$表明它是1形式，具体指标$\mu$、$\nu$则表明某个$\left(\omega_\mu{}^\nu\right)_a$在这一组联络1形式中的编号。简记作$\omega_\mu{}^\nu{}_a$，或$\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$。
代入分量的显式表达得：
$\omega_\mu{}^\nu{}_a=-(e^\nu)_c(e_\tau)^b\,\nabla_b\left(e_\mu\right)^c(e^\tau)_a=-\delta^{b}{}_{a}(e^\nu)_c\,\nabla_b\left(e_\mu\right)^c$
$=-\left(\nabla_b\left((e^\nu)_c\left(e_\mu\right)^c\right)-\left(e_\mu\right)^c\,\nabla_b(e^\nu)_c\right)=-\left(\nabla_b\,\delta^\nu{}_\mu-\left(e_\mu\right)^c\,\nabla_b(e^\nu)_c\right)$
$=\left(e_\mu\right)^c\,\nabla_b(e^\nu)_c$。

令$R_{ab\mu}{}^{\nu}=R_{abc}{}^{d}\left(e_\mu\right)^c(e^\nu)_d$，由$R_{ab\mu}{}^{\nu}=-R_{ba\mu}{}^{\nu}$表明这也是一组$n^2$个2形式，称为曲率2形式，记作$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu$。具体指标$\mu$、$\nu$既是的（标架）分量指标，也是这一组2形式场的编号指标。
对偶基矢$(e^\mu)_a$作为1形式，也可记作$\boldsymbol{e}^\mu$。

Cartan第一结构方程：$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^\nu=-\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu$。
证：$-(e^\mu)_a\wedge\omega_\mu{}^\nu{}_a=-(e^\mu)_a\wedge\left[\left(e_\mu\right)^c\,\nabla_b(e^\nu)_c\right]=-2(e^\mu)_{[a}\left(e_\mu\right)^c\,\nabla_{b]}(e^\nu)_c=$
$-2\delta^{c}{}_{[a}\,\nabla_{b]}(e^\nu)_c=-2\,\nabla_{[a}(e^\nu)_{a]}=(\mathrm{d}e^\nu)_{ab}$。

Cartan第二结构方程：$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu+\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\lambda\wedge\boldsymbol{\omega}_\lambda{}^\nu$。

证：$R_{ab\mu}{}^{\nu}=R_{abc}{}^{d}\left(e_{\mu}\right)^{c}(e^{\nu})_{d}=\left(e_{\mu}\right)^{c}(\nabla_{a}\nabla_{b}-\nabla_{b}\nabla_{a})(e^{\nu})_{c}=2\left(e_{\mu}\right)^{c}\nabla_{[a}\nabla_{b]}(e^{\nu})_{c}$，
而$\left(e_{\mu}\right)^{c}\nabla_{a}\nabla_{b}(e^{\nu})_{c}=\nabla_{a}\left[\left(e_{\mu}\right)^{c}\nabla_{b}(e^{\nu})_{c}\right]-\left[\nabla_{a}\left(e_{\mu}\right)^{c}\right]\nabla_{b}(e^{\nu})_{c}=\nabla_{a}\omega_{\mu}{}^{\nu}{}_{b}-$
$\left[\nabla_{a}\left(e_{\mu}\right)^{d}\right]\delta^{c}{}_{d}\nabla_{b}(e^{\nu})_{c}=\nabla_{a}\omega_{\mu}{}^{\nu}{}_{b}-\left[\nabla_{a}\left(e_{\mu}\right)^{d}\right]\left(e^{\lambda}\right)_{d}\left(e_{\lambda}\right)^{c}\nabla_{b}(e^{\nu})_{c}=\nabla_{a}\omega_{\mu}{}^{\nu}{}_{b}+\omega_{\mu}{}^{\lambda}{}_{a}\omega_{\lambda}{}^{\nu}{}_{b}$，
故$R_{ab\mu}{}^{\nu}=2\left(e_{\mu}\right)^{c}\nabla_{[a}\nabla_{b]}(e^{\nu})_{c}=\left(\mathrm{d}\omega_{\mu}{}^{\nu}\right)_{ab}+\left(\omega_{\mu}{}^{\lambda}\wedge\omega_{\lambda}{}^{\nu}\right)_{ab}$。
注：该式只对无挠联络成立。当∇_{a}有挠时应补一挠率项（见附录I）。

上述方程表明，若要求得$\boldsymbol{R}_{\mu}{}^{\nu}$，只需知道$\boldsymbol{\omega}_{\mu}{}^{\nu}$，对其求外微分和楔积即可。若要进一步得到在所选标架的全部分量，只需求如下缩并：
$R_{\rho\sigma\mu}{}^{\nu}=R_{ab\mu}{}^{\nu}\left(e_{\rho}\right)^{a}\left(e_{\sigma}\right)^{b}$。