第七章 广义相对论基础

广义相对论作为Einstein一生最伟大的物理理论，其研究的是日常所见的引力的物理本质，具体来说，研究时空的动力学以及其中的物质关于引力相互作用的动力学。
描述广义相对论的数学必然使用4维语言，在这种视角下，Einstein极富开创性、变革性地将所谓的“引力效应”解释为时空的几何效应，并且获得了极大的成功。广义相对论完美地描述了绝大多数宏观强引力的物理效应，并且开创了宇宙学这一研究领域，确立了整个物理学对于时空的现代观点，将现代物理带入了一个全新的、完全不同的时代。
本章主要讨论了“自由下落无自转观者”的具体意义，详细介绍了广义相对论的几个基本原理，一些重要的引力效应，以及最为重要的假设：Einstein场方程。并且利用一些近似手段分析场方程，得到了一些重要结论，其中就包括所谓的引力波。

§7.1　引力与时空几何
§7.2　弯曲时空中的物理定律
§7.3　Fermi移动与无自转观者
§7.4　任意观者的固有坐标系
§7.5　等效原理与局部惯性系
§7.6　潮汐力与测地偏离方程
§7.7　Einstein场方程
§7.8　线性近似和牛顿极限
§7.9　引力辐射

§7.1 引力与时空几何

2018年8月1日 19:30

Galileo相对性原理要求：力学规律在任何惯性系下都有相同的形式，任何力学实验不能区分惯性系的“绝对运动”状态。
Galileo相对性原理与Newton的绝对时空观结合，就可以得到Galileo变换，也即对任何力学定律都提出了要满足Galileo协变性的要求。Newton在此基础之上发展出了Newton动力学和Newton引力论，它们都符合Galileo协变性。

在以Maxwell电磁理论为标志的电磁学发展之后，发现其不具有Galileo协变性，也即不能纳入Galileo相对性原理。狭义相对论对该原理进一步拓展得到狭义相对性原理：物理学规律在任何惯性系下都有相同的形式。结合光速不变原理，可以得到Lorentz变换，也即对任何物理定律都提出了要满足Lorentz协变性的要求。Maxwell电磁理论天生具有Lorentz协变性；经过适当改造，动力学理论也可以被纳入狭义相对论的框架。

然而考虑传统的Newton引力论，其基本方程——Poisson方程：$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$只具有Galileo协变性而不具有Lorentz协变性。另一方面，Newton引力论深刻地依赖于Newton的绝对时空观念，与狭义相对论思想严重违背。并且经过许多尝试，始终无法将其改造为狭义相对论框架内的有效引力理论。

Einstein在某些观念和现象（尤其是引力的普适性（universality）和Mach原理）的启发下另辟蹊径，认为所谓的3维“引力”效应很可能来自于4维时空的几何结构。尤其是引力的普适性，它指出：

1. 任何物体在引力场中都受到引力；
2. 引力场中的两个物体，无论其物质和组分有何不同，只要其初始位置和速度相同，且不受其他的力，则其之后任何时刻的位置和速度都相同。

这可以被定量地表述为对Newton力学不加研究的“质量”概念的深入思考：
根据物体参与万有引力相互作用的强度而定义其“引力质量（荷）” m_G（严格来说，又可分为反映物体激发的引力场的强度的“主动引力质量”和绝对物体在给定外引力场中受力大小的“被动引力质量”），根据物体在动力学中表现的惯性而定义其“惯性质量” m_I。引力的普适性是基于这样的严格实验结果：
对任何物体，总有$m_G/m_I = C$（常数），进一步，可以通过调整系数而总有$m_G = m_I$。
这在Newton力学中是作为实验事实，进而成为理论体系的公理而被承认的。

Einstein突破性地提出了如上的$m_G = m_I$是可以被作为结论而被证明的，这就需要将引力效应归结为时空的几何特性，进而给出广义相对论理论。现在给出广义相对论的几个基本假设。

1. 3维可见中的引力本质上是4维时空的弯曲。当观测到“引力”效应时，说明背景时空不

再是4维Minkowski时空$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$，而是某种弯曲时空$(M, g_{ab})$，其中$M$是4维连通流形，$g_{ab}$是某种具有洛伦兹号差的弯曲度规场。正是这种弯曲时空的几何结构给出了“引力”效应。

2. 不存在“3维引力”对应的4力。当既存在其他4力F^a又存在“引力”时，运动方程为：
   $F^a = U^b \nabla_b P^a$。
   可以看出，其他4力对物体运动方程的影响在于等式左边的F^a；而“引力”的影响在于等式右边的∇_b，它是与弯曲时空(M, g_{ab})的度规g_{ab}相适配的导数算符，反映了时空的几何结构。即通过改变时空几何性质来影响物体的运动。
3. 广义相对论中除了“引力”外不受其他力的质点称为自由质点。自由质点的世界线是其所在时空的测地线，即其运动方程为：
   $U^b \nabla_b P^a = m U^b \nabla_b U^a = 0$。
4. 时空的弯曲情况受到物质分布的影响，具体由Einstein场方程描述。

可以证明，在引力足够弱、质点速度足够低时，广义相对论的结论可以退化到Newton引力论，即Newton引力论可以看作是广义相对论的弱场低速近似理论。然而，两者看待物体运动的观念却有根本性的差别：例如Newton力学中认为在引力场中自由下落的物体具有3加速度（因而不是自由的），而广义相对论却认为此时的质点是自由质点，不具有4加速；类似地，Newton力学认为在引力场中受到其他力而保持静止的质点不具有3加速，处于惯性状态，但是广义相对论却认为其具有4加速，世界线不是测地线。

§7.2 弯曲时空中的物理定律

2018年8月1日　　22:49

广义相对论框架对物理定律的要求有了进一步发展，得到广义相对性原理：物理学规律在任何惯性参考系下都有相同的形式。这就得到了对物理定律的数学形式的广义协变性（principle of general covariance）要求。它的原始形式由Einstein提出，要求：物理定律的数学表达式在任何坐标变换下保持不变。

一个比较现代的、借助抽象指标思想的表达是：物理定律的数学表达式中只允许出现两类物理量：一是除背景时空外所研究的物理客体的动力学量；二是反映背景时空性质的几何量，但是仅限于时空度规及其直接派生量。
注：物理客体的动力学量，例如质点的4动量P^a，电磁场张量F_{ab}等等。至于所谓“时空度规及其直接派生量”，包括度规g_{ab}，与之适配的导数算符∇_a，以及∇_a的$R_{abc}{}^d$、R_{ab}、R等。其重点在于“直接”，即不依赖于某些人为选取之后才能得到的量。核心思想就是排除掉一切与时空内禀几何性质无关的人为因素，例如某坐标系的普通导数算符，某人为指定的矢量场，或坐标系依赖的张量场（Christoffel符号）等，否则意味着某坐标系具有与众不同的地位，这正是与广义相对性原理相悖的。

弯曲时空的物理定律至少应当满足两个要求：
1. 满足广义协变性；
2. 在时空度规g_{ab}等于Minkowski度规η_{ab}时，应当能够回到狭义相对论的相应定律。

根据如上要求，狭义相对论中一些基础性的结论可以直接自然地过渡到广义相对论。一般而言，做法只是将η_{ab}、∂_a等几何量分别替换为g_{ab}、∇_a及对应量，称为最小替换法则。利用此可得：
1. 质点和光子的世界线分别为类时和类光曲线；
2. 质点固有时等于其世界线长；
3. 质点4速U^a是其世界线的单位切矢；
4. 质点4动量$P^a \coloneqq mU^a$；
5. 质点相对于瞬时观者(p, Z^a)的能量$E \coloneqq -P^a Z^a$；
6. 电磁场仍由2形式场——电磁场张量F_{ab}表述；
7. 质点的4加速$A^a \coloneqq U^b \nabla_b U^a$；
8. 质点的4力$F^a \coloneqq U^b \nabla_b P^a$等等。
9. 弯曲时空的Maxwell方程组：$\begin{cases} \nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \end{cases}$
10. 利用外微分算符，上述方程组也可表示为：$\begin{cases} \mathrm{d} * \boldsymbol{F} = 4\pi * \boldsymbol{J} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0 \end{cases}$
11. 电磁场的能动张量：

$$T_{ab}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd}\right)$$

12. 电磁场与物质场的守恒方程：$\nabla^a T_{ab}=-F_{bc}J^c$。

然而，并非直接利用此法则就可导出正确的结论。例如：
根据$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=0$，至少可以局域地引入电磁4势$\boldsymbol{A}$，其正确的运动方程应为：
$\nabla^a\nabla_a A_b-R_b{}^d A_d=-4\pi J_b$。
这就是弯曲时空的Riemann-Sommerfeld方程，也是Maxwell方程组最简洁的形式。它与对结论直接使用上述法则得到的结果不同，关键在于一旦涉及到高阶导数就会存在导数算符的非对易性，从而导致上述差异。

§7.3 Fermi移动与无自转观者

2018年7月31日 5:37

为讨论“无自转观者”的自转标准，需要定义在观者世界线$G(\tau)$上的一个“无转动空间矢量场”X^a。为描述X^a沿$G(\tau)$的移动性质，Fermi、Walker提出Fermi-Walker导数的概念：
设$G(\tau)$是时空(M,g_{ab})的类时线，参数τ为固有时，$\mathcal{F}_G(k,l)$代表沿$G(\tau)$的光滑(k,l)型张量场的集合。映射$\mathrm{D_F}/\mathrm{d}\tau$称为$G(\tau)$上的Fermi-Walker导数算符，简称Fermi导数算符，若它满足：

1. 线性性；
2. Leibniz律；
3. 与缩并可交换顺序；
4. $\dfrac{\mathrm{D_F}f}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}$，$\forall f\in\mathcal{F}_G(0,0)$
5. $\dfrac{\mathrm{D_F}v^a}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau}+\left(A^aZ^b-Z^aA^b\right)v_b$，$\forall v^a\in\mathcal{F}_G(1,0)$

其中$Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$是观者$G(\tau)$的4速，$A^a=Z^b\nabla_b Z^a$代表观者4加速，$\nabla_b$是与度规适配的导数算符（$\nabla_b g_{ac}=0$），$\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}\tau$是沿曲线的协变导数$Z^b\nabla_b v^a$的另一记号。
注：第5条给出了矢量场的Fermi导数表达式，与其他性质结合便可推广至一般张量场。

Fermi导数有如下性质：

1. 若$G(\tau)$是测地线，则$\mathrm{D_F}v^a/\mathrm{d}\tau=\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}\tau$。
2. $\mathrm{D_F}Z^a/\mathrm{d}\tau=0$。
3. 若w^a是$G(\tau)$上的空间矢量场（对$G(\tau)$上各点$w^aZ_a=0$），则$\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau=h^a{}_b\left(\mathrm{D}w^b/\mathrm{d}\tau\right)$，其中$h_{ab}=g_{ab}+Z_aZ_b$是空间诱导度规，$h^a{}_b=g^{ac}h_{cb}$是$G(\tau)$上各点的投影映射。
4. 空间矢量场的Fermi导数仍为空间矢量场：$\left(\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau\right)Z_a=\mathrm{D_F}\left(w^aZ_a\right)/\mathrm{d}\tau=0$。
5. $\mathrm{D_F}g_{ab}/\mathrm{d}\tau=0$。也可等价表述为：
   $\dfrac{\mathrm{D_F}\left(g_{ab}u^av^b\right)}{\mathrm{d}\tau}=g_{ab}u^a\dfrac{\mathrm{D_F}v^b}{\mathrm{d}\tau}+g_{ab}v^b\dfrac{\mathrm{D_F}u^a}{\mathrm{d}\tau}$，$\forall u^a,v^b\in\mathcal{F}_G(1,0)$

称矢量场v^a是沿$G(\tau)$Fermi-Walker移动（Fermi-Walker transported，费移）的，若：
$\dfrac{\mathrm{D_F}v^a}{\mathrm{d}\tau}=0$
注：

1. Fermi导数性质1表明沿测地线的费移就是平移；
2. 性质2表明$G(\tau)$的4速Z^a总是沿$G(\tau)$费移的；
3. 类似于“平移保内积”，费移也保内积，即
   $\dfrac{\mathrm{D_F}u^a}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{D_F}v^b}{\mathrm{d}\tau}=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{D_F}\left(g_{ab}u^av^b\right)}{\mathrm{d}\tau}=0$

$p\in G(\tau)$及$v^a\in V_p$决定唯一的沿$G(\tau)$费移的矢量场。
注：

1. 由Z^a总沿$G(\tau)$费移及费移保内积可知，由空间矢量$v^a\in W_p$决定的矢量场为空间矢量

场；

2. 由$p \in G(\tau)$的正交归一4标架的每一基矢决定一个沿$G(\tau)$费移的矢量场，且由费移保内积可知这4个矢量场在线上每一点正交归一。可见p点一个正交归一4标架决定了$G(\tau)$上唯一的正交归一费移4标架场，其第零基矢场就是$G(\tau)$的切矢场Z^a。

首先考虑3维空间之中矢量转动的描述。设矢量$\vec{w}$绕其起点o有空间转动，则存在$\vec{\omega}(t)$使得：

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}(t) \times \vec{w}(t) \neq 0$$

其中$\vec{\omega}(t)$称为$\vec{w}(t)$的瞬时转动角速度。注意到

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{w} \cdot \vec{w}\right)}{\mathrm{d}t} = 2\vec{w} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{w}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\vec{w} \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{w}\right) = 0$$

即转动保矢量长度。上述在Minkowski时空的Cardesian系中用4维语言表述为

$$\frac{\mathrm{d}\,w^i(t)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j w^k$$

于是在相对o点静止的惯性系$\{t, x^i\}$看来，$t = \tau$，w^a成为该系中过o点的惯性观者G世界线$G(\tau)$上的空间矢量场。于是就有狭义相对论的转动推广：Minkowski时空中类时测地线$G(\tau)$上的空间矢量场$w^a(\tau)$称为空间转动的，若$G(\tau)$上存在空间矢量场$\omega^a(\tau)$使得：

$$\frac{\mathrm{d}\,w^i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j w^k$$

且称空间转动绕着ω^a方向。取$G(\tau)$的3标架$\left\{\left(e_i\right)^a\right\}$使得$\left(e_k\right)^a$平行于$\omega^a$，则只有$\omega^k$分量不为零。

对$G(\tau)$上任一点p，用W_p的诱导度规h_{ab}得到角速度1形式$\omega_a = h_{ab}\omega^b$，取其对偶微分形式得到角速度2形式$\Omega_{ab} = (*\,\omega)_{ab} = \omega^c\varepsilon_{abc}$，则空间转动方程可改写为：

$$\frac{\mathrm{d}\,w^i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -\Omega^{ij}w_j$$

称空间转动是在$i \sim j$面内的，若在$G(\tau)$的3标架场$\left\{\left(e_i\right)^a\right\}$下，$\Omega_{ab}$只有$\Omega_{ij}$、$\Omega_{ji}$分量不为零。利用角速度2形式的转动描述相比于角速度矢量更方便于推广至4维情况。

推广至任意时空任意类时线上的任意矢量场的任意（不限于空间）转动：

设$G(\tau)$是$\left(M, g_{ab}\right)$中的任一观者的类时世界线，v^a是线上的矢量场（不一定是空间矢量场）。若$G(\tau)$上存在2形式场Ω_{ab}使得：

$$\frac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau} = -\Omega^{ab}v_b$$

就称v^a有以Ω_{ab}为角速度的时空转动，或称其时空转动角速度2形式为Ω_{ab}。

矢量场v^a无时空转动，若：

$$\frac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

即矢量场沿线无时空转动对应于矢量场沿线平移。

设$G(\tau)$上的矢量场u^a、v^a有相同的时空转动，则$v^a u_a$在$G(\tau)$上为常数（即保内积）。

证：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}(v^a u_a) = u_a \frac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau} + v_a \frac{\mathrm{D}u^a}{\mathrm{d}\tau} = u_a(-\Omega^{ab} v_b) + v_a(-\Omega^{ab} u_b) = -2\Omega^{[ab]} u_{(a} v_{b)} = 0$$

即证。

可见时空转动保矢量长度。反之，也可证明：沿线长度不变的矢量场必有时空转动。其中沿线平移的特例可看作是时空转动角速度为零。

注：对任意3维矢量$\vec{w}$，其角速度$\vec{\omega}$都存在某种“规范自由性”，即$\vec{\omega}' = \vec{\omega} + \beta \vec{w}$，$\forall \beta \in \mathbb{R}$与$\vec{\omega}$对矢量转动造成的效果相同。形式上可以将$\beta \vec{w}$部分的角速度看作是绕自身的转动。同样，角速度2形式Ω_{ab}也具有规范自由性，例如对任意满足$\Lambda^{ab} w_b = 0$的Λ^{ab}，$\Omega'_{ab} = \Omega_{ab} \Lambda^{ab}$与$\Omega_{ab}$对$w^a$造成的时空转动效应相同。一般描述某一转动，只需选取具有代表性的一个角速度即可，例如沿线平移等价于角速度为零，就暗含了这种规范选取。具体来说：

选取$G(\tau)$上的正交归一4标架场使得$(e_0)^a = Z^a$，$(e_1)^a = \alpha w^a$（α为归一化系数）。则要求$\Lambda^{ab}(e^1)_b = 0$，即$0 = \Lambda^{ab}(e^1)_b = \Lambda^{\mu\nu}(e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^1)_b = \Lambda^{\mu 1}(e_\mu)^a = \Lambda^{01}(e_0)^a + \Lambda^{21}(e_2)^a + \Lambda^{31}(e_3)^a$，故$\Lambda^{01} = \Lambda^{21} = \Lambda^{31} = 0$，这就是对$\Lambda^{ab}$唯一的限制，而$\Lambda^{02}$、$\Lambda^{03}$、$\Lambda^{23}$均无限制，因此$\Omega_{ab}$的规范自由性实质上就是$\Omega_{02}$、$\Omega_{03}$、$\Omega_{23}$的任意选取，也即$w^a$在满足上述选取方式的4标架的$0 \sim 2$面、$0 \sim 3$面、$2 \sim 3$面内的转动实质上都是“绕其自身的转动”。

考虑任意运动观者的世界线，其Z^a总是沿$G(\tau)$费移（而非平移），因而当$G(\tau)$不是测地线时$\mathrm{D}Z^a/\mathrm{d}\tau \neq 0$，存在时空转动。其时空转动角速度2形式$\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$，其中$A^a$是观者4加速。

证：$-\tilde{\Omega}^{ab} Z_b = -(A^a Z^b - Z^a A^b) Z_b = A^a = \mathrm{D}Z^a/\mathrm{d}\tau$，即证。

由$\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$可知它在观者4标架内的空间分量$\tilde{\Omega}_{ij}$均为零，故$Z^a$的时空转动发生在$Z^a \sim A^a$面内。这样的时空转动就称为伪转动（pseudo-rotation）。$\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$说明观者世界线$G(\tau)$偏离测地线的根本原因是其$Z^a$在$Z^a \sim A^a$面发生伪转动。反之，只有空间分量的时空转动$\tilde{\Omega}_{ab}$称为（纯）空间转动，简称转动。

观者4速Z^a的“伪转动”与惯性系之间的坐标变换“伪转动”之间具有深刻联系。某一惯性系中的观者4速发生pseudo-rotation而进入另一惯性系的后果就是两系之间的坐标变换由boost联系。空间转动亦同理。

由于$G(\tau)$上任一空间矢量场w^a必与Z^a正交，因此当Z^a发生伪转动$\tilde{\Omega}_{ab}$必然迫使也w^a发生这样一个伪转动。而设w^a总的时空转动为Ω_{ab}，则其除去Z^a带来的伪转动效果后得到的$\hat{\Omega}_{ab} = \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$必为纯空间转动。

证：选正交归一4标架场使得$(e_0)^a = Z^a$，$(e_1)^a = \alpha w^a$（α为归一化系数），由

$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}(Z^a w_a) = w_a \frac{\mathrm{D}Z^a}{\mathrm{d}\tau} + Z_a \frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau} = -w_a \tilde{\Omega}^{ab} Z_b - Z_a \Omega^{ab} w_b = (\tilde{\Omega}^{ab} - \Omega^{ab}) Z_a w_b$$
$$= (\tilde{\Omega}^{ab} - \Omega^{ab})(e^0)_a (e^1)_b \alpha^{-1} = (\tilde{\Omega}^{01} - \Omega^{01})\alpha^{-1}$$

得$\tilde{\Omega}^{01} - \Omega^{01}$。利用规范自由性可选$\tilde{\Omega}^{02} - \Omega^{02}$、$\tilde{\Omega}^{03} - \Omega^{03}$。注意到$\tilde{\Omega}^{ij} = 0$，便知$\hat{\Omega}_{ab} = \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab} = \Omega_{ij}(e^i)_a (e^j)_b$是纯空间转动。

观者世界线$G(\tau)$上的矢量场w^a无空间转动的充要条件是其沿线费移$\mathrm{D_F} w^a/\mathrm{d}\tau = 0$。

证：$-\hat{\Omega}^{ab}w_b = \mathrm{D}w^a/\mathrm{d}\tau + \tilde{\Omega}^{ab}w_b = \mathrm{D}w^a/\mathrm{d}\tau + \left(A^a Z^b - Z^a A^b\right)w_b = \mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau$。

反之，设w^a有空间转动，则利用$\hat{\Omega}_{ab}$在3维空间之中的对偶形式ω^c可得：
$\hat{\Omega}_{ab} = \omega^c \varepsilon_{cab}$；
可以将$\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = -\hat{\Omega}^{ab}w_b$改写为：$\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = -\varepsilon^a{}_{bc}w^b\omega^c$。
或者利用(M, g_{ab})的度规g_{ab}写成：$g_{ab}\,\mathrm{D_F}w^a/\mathrm{d}\tau = -\varepsilon_{abcd}Z^b w^c \omega^d$。
这样的ω^a称为w^a的空间转动角速度矢量。非费移的空间矢量场有非零的空间转动角速度。

$G(\tau)$上任一正交归一的空间3标架场中的3个基矢场具有相同的空间转动角速度2形式$\hat{\Omega}_{ab}$。
注：这可以从3标架的基矢处处保持互相正交的角度来简单理解。这个$\hat{\Omega}_{ab}$就被称为3标架场$\left\{(e_i)^a\right\}$的空间转动角速度2形式，其对偶的矢量ω^a称为其空间转动角速度矢量。在某些情况下，例如3标架中的某两个基矢$(e_1)^a$、$(e_2)^a$绕着另一基矢$(e_3)^a$转动时，看似$(e_1)^a$、$(e_2)^a$与$(e_3)^a$的角速度不相同，但是借助角速度的规范自由性可以使得它们取到相同的角速度。因此当某一基矢（在某一规范下）并不沿线转动时，不代表其他两基矢也不转动。

一般地，在谈及观者的时候，总会需要明确其世界线，即类时曲线$G(\tau)$。此时需要考虑的只有其4加速A^a，或其4速Z^a的伪转动$\tilde{\Omega}_{ab}$，它描述观者的轨道运动。但是在另一些情况下，往往还需要明确其是否具有自转，这就需要研究其空间3标架的空间转动ω^a或$\hat{\Omega}_{ab}$。此时描述一个观者的性质就需要明确要素对(A^a, ω^a)或$\left(\tilde{\Omega}_{ab}, \hat{\Omega}_{ab}\right)$。例如弯曲时空$(M, g_{ab})$中最简单的一类观者：自由下落（$A^a = 0$，因而$\tilde{\Omega}_{ab} = 0$）的无自转（$\omega^a = 0$，因而$\hat{\Omega}_{ab} = 0$）观者。

§7.4 任意观者的固有坐标系

2018年8月15日　22:30

对任意观者$G(\tau)$，他可以有任意4加速$\hat{A}^a$，其空间3标架也可以不沿线费移，而是具有某空间转动角速度ω^a。两者都是空间矢量，即$\omega^a Z_a = 0$，$\hat{A}^a Z_a = 0$。在观者世界线上的任一点p，都有其切空间V_p的与$Z^a|_p$正交的子空间W_p，p点与W_p中每一空间矢量都能决定唯一的一条测地线μ，且它是类空的。取其参数为线长参数s，即切矢$T^a = (\partial/\partial s)^a$为单位切矢。且其与观者世界线于$p$点正交，即$T^a \in W_p$。
可以证明，总存在$G(\tau)$的邻域U，使得$\forall q \in U$，总存在唯一的上述类空测地线$\mu(s)$过q，记其与观者世界线的正交点为p。由于$T^a|_{p,\mu(s)} \in W_p \subset V_p$，记为$w^a$，故其在$p$点的观者正交归一3标架$\{(e_i)^a\}$下的分量为$w^i$。利用上述概念可以为$\forall q \in U$定义一个四元数组$(t, x^i)$，其中$t(q) \coloneqq \tau_p$，$x^i(q) \coloneqq s_q w^i$，其中$\tau_p$是$p$点在世界线$G(\tau)$上的固有时，$s_q$是$q$点在$\mu(s)$上的参数，即$p$、$q$之间的测地线长。数组$(t, x^i)$就被称为点在$G(\tau)$的邻域$U$上的固有（proper）坐标，据此可以在$U$上建立起一个坐标系$\{t, x^i\}$，称为观者$G(\tau)$的固有坐标系。

固有坐标系在$\forall p \in G(\tau)$的坐标基矢$\left(\partial/\partial x^i\right)^a$正是$G(\tau)$在该点的正交归一4标架基矢$\left(e_\mu\right)^a$。因而该点的度规$g_{ab}\big|_p$在固有坐标系的分量$g_{\mu\nu}\Big|_p = \eta_{\mu\nu}$。
由此可见，固有坐标系是观者4标架在其世界线附近的延拓。作为特例，Minkoeski时空中任一Lorentz坐标系都可看作该系任一x^0坐标线的固有坐标系，只不过其固有坐标域U可以取为全时空。
时空度规g_{ab}在$G(\tau)$的固有坐标系的Christoffel符在$G(\tau)$上取如下值：
$\Gamma^0{}_{00} = \Gamma^\sigma{}_{ij} = 0$，$\Gamma^0{}_{0i} = \Gamma^0{}_{i0} = \Gamma^i{}_{00} = \hat{A}_i$，$\Gamma^i{}_{0j} = \Gamma^i{}_{j0} = -\omega^k \varepsilon_{0kij}$，
$\sigma = 0,1,2,3$，$i, j, k = 1,2,3$。

固有坐标线可以使得观者不仅能直接观测与自己世界线相交的质点，还能在一定程度上观测其世界线附近一个足够小的邻域内的质点。

利用固有坐标系可以定义质点的3速和3加速。设$\{t, x^i\}$是$G(\tau)$的固有坐标系，被观测质点的世界线（至少一段L）在其固有坐标域U内，则质点在$p \in L$处相对观者的3速和3加速分别定义为：
$$u^a \coloneqq \frac{\mathrm{d}\, x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$
$$a^a \coloneqq \frac{\mathrm{d}^2\, x^i(t)}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$
其中$x^i(t)$是质点世界线L在固有坐标系内以t为参数的参数式。
注：若p是L与$G(\tau)$的交点，则该处3速按已有定义为：
$$u^a \coloneqq \frac{h^a{}_b U^b}{\gamma} = -\frac{h^a{}_b U^b}{U^c Z_c}$$
这与上述适用于全固有坐标域中的定义等价。下面证明：

设τ_L是L的线长参数，则其4速U^a可用固有坐标基矢展开为：

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_L}\right)^a = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_L}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau_L}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

其中$(\partial/\partial t)^a$就是Z^a，空间投影为零；而$\left(\partial/\partial x^i\right)^a$本就是空间矢量，投影为自身。因此

$$h^a{}_b U^b = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau_L}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

而在固有坐标系中，$\gamma = -Z^a U_a$可以写成另一形式：

$$\gamma = -g_{ab} Z^a U^b\Big|_p = -g_{\mu\nu} Z^\mu U^\nu\Big|_p = -\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu U^\nu\Bigg|_p = -\eta_{00}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^0 U^0\Bigg|_p = U^0\Big|_p = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_L}\Bigg|_p$$

从而显然可见两者定义等价。

设观者G的4加速为$\hat{A}^a$，自转（即其3标架的空间转动）角速度为ω^a，被观测质点L是自由质点，与G的世界线交于p点，L在p点相对于观者的3速为u^a，则在p点相对于观者的3加速为：

$$a^a = \frac{\mathrm{d}^2\, x^i(t)}{\mathrm{d}t^2}\left(e_i\right)^a = -\hat{A}^a + 2\left(\hat{A}_b u^b\right)u^a - 2\hat{\varepsilon}^a{}_{bc}\omega^b u^c$$

其中$\left\{\left(e_i\right)^a\right\}$是观者在$p$点的正交归一空间3标架，$\hat{\varepsilon}_{abc} = Z^d \varepsilon_{dabc}$，$Z^d$是观者在$p$点的4速，$\varepsilon_{dabc}$是与时空度规$g_{ab}$适配的体元。对上式的理解可从以下几个角度来看：

1. 若G为自由下落无自转观者（对Minkowski时空来说就是惯性观者），$\hat{A}^a = \omega^a = 0$。则易知自由粒子相对于自由观者的3加速$a^a = 0$，这反映了惯性观者之间不存在3加速的事实。
2. 若G的世界线不是测地线，无自转，即$\hat{A}^a \neq 0$，$\omega^a = 0$。则$a^a = -\hat{A}^a + 2\left(\hat{A}_b u^b\right)u^a$。右边第一项正是经典力学中所谓的惯性加速度（此处不包括Coriolis加速度），严格来说经典的惯性加速度$a^a = -\hat{A}^a$只成立于瞬时静止参考系，或弯曲时空中与质点瞬时相对静止的自由下落观者。第二项：$2\left(\hat{A}_b u^b\right)u^a$则是惯性加速度的相对论修正，即在相对质点存在运动的观者看来存在这一修正项。
3. 若G的世界线是测地线，有自转，即$\hat{A}^a = 0$，$\omega^a \neq 0$。则$a^a = -2\hat{\varepsilon}^a{}_{bc}\omega^b u^c = \vec{u} \times \vec{\omega}$，正是经典力学中所谓的Coriolis加速度，它在相对论中仍保持相同的形式，因而非惯性观者观测到的Coriolis力起源于观者的自转。
4. 若G的世界线不是测地线，且有自转，即$\hat{A}^a \neq 0$，$\omega^a \neq 0$。则观者既能观测到惯性力，又能观测到Coriolis力的存在。

注：通常文献将Coriolis力也归为“惯性力”范畴。事实上无论是因观者的非惯性轨道运动还是观者的自转，Coriolis力和惯性力都是在相应的非惯性系中为了形式地保持惯性系中的动力学定律而人为引入的假想力（fictitious force）。但是不可否认的是，两者的来源仍有本质区别：狭义的惯性力来源于观者世界线对测地线的偏离，或者说其4标架的伪转动$\tilde{\Omega}_{ab}$（$\hat{A}^a$），需要有外力来维持观者的这一非惯性轨道运动；而Coriolis力则来源于观者的自转，或称其空间3标架的纯空间转动$\hat{\Omega}_{ab}$（ω^a），原则上这是不需要外力来维持的。甚至也有观点认为，对于抽象化的观者来说，自转并不是非惯性运动（传统上均匀刚体的稳定匀速自转也可视作整体惯性运动），因而这些观点将Coriolis力与狭义的惯性力区分开来。

§7.5 等效原理与局部惯性系

2018年8月16日 8:30

自由下落的无自转观者的固有坐标系被称为局部惯性系或局部Lorentz系（Local Lorentz system，Local Lorentz frame），将会看到，它与Minkowski时空的整体惯性（Lorentz）系具有一定程度上的联系。另一方面，尽管实际的背景时空几乎处处存在曲率（不存在严格的Minkowski时空区域），但是在远离各天体的近似平直时空中，仍可在足够小的区域内近似地建立惯性（Lorentz）坐标系。

等效原理是联系弯曲与平直时空、“引力”效应与3加速效应的重要原理，在建立广义相对论、将物理定律向弯曲时空推广时起到关键的启发作用。它的通常表述涉及如下的两组参考系：

1. 引力场中的局部惯性系与（近似）平直时空的惯性系；
2. 引力场中空间静止的局部参考系与（近似）平直时空具有3加速的参考系；

弱等效原理（weak equivalence principle，WEP）：以上每组参考系间力学定律形式相同。

Einstein等效原理（Einstein equivalence principle，EEP）：推广至任何物理定律形式相同。

进一步还有强等效原理（strong equivalence principle，SEP），相较于WEP和EEP只考虑系统所处的外引力场，SEP还考虑了系统中物体所激发的自引力场，即所谓“自引力系统”。

不同版本的等效原理对众多的、包括广义相对论的不同引力理论具有一定程度的筛选作用。弱等效原理经过了长时间无数实验的检验，一般而言任何理论都应该满足。而若Einstein等效原理成立，则只有度规理论（要求时空具有度规，自由粒子的世界线是该度规的测地线等等）的引力理论才可能正确。进一步，目前的一个主流猜想（conjecture）认为，只有广义相对论才满足强等效原理。

WEP本质上就是对实验结果$m_G = m_I$进行抽象化得到的原理。下面着重讨论EEP。

设$G(\tau)$是弯曲时空的自由下落无自转观者，$g_{\mu\nu}$是度规g_{ab}在$G(\tau)$的固有坐标系的分量，$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$是与g_{ab}适配的导数算符∇_a在该系的Christoffel符号。则在观者的世界线上：

$g_{\mu\nu}\big|_p = \eta_{\mu\nu}$，$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\big|_p = 0$，$\sigma,\mu,\nu = 0,1,2,3$，$\forall p \in G(\tau)$。

这表明，自由下落无自转观者的固有坐标系是一类特殊参考系，通过这样的选取可以在世界线上消除$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$，从而在世界线上协变导数∇_a与普通导数∂_a（形式上）没有区别。这样，用g_{ab}、∇_a表述的物理定律就能回到用η_{ab}、∂_a表述的狭义相对论中平直时空整体惯性坐标系下形式。

但是需要注意的是，这个结论仅仅能够保证严格成立在世界线的某一点上。具体来说，若是$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = 0$竟然在$p$的某个邻域$U$上成立，则在$U$中任一点$q$的时空曲率$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma\big|_q = \left(-2\,\partial_{[\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^\lambda{}_{\rho[\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu]\lambda}\right)\Big|_q = 0$，从而得出时空必须为平直的结论。因此，对于一般的弯

曲时空，$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=0$仅仅在观者的世界线上才成立，从而对于一个占据了一定的空间区域的参考系来说，物理定律的上述形式对应并不是严格成立的。局部惯性系至多能消除观者世界线（测地线）上的$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$（这一坐标系依赖量），却不能消除时空真实存在的曲率。
然而，对于一般的非极端引力情况，时空曲率总是一个适当的有限值。这样只要世界线的时空邻域取的足够小，时空弯曲的效应就不甚明显，从而可以认为在这个小邻域中时空是近似平直的，$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=0$、$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$近似成立。
因而可以说：物理定律在局部惯性坐标系的形式与在平直时空整体惯性坐标系的形式相同。
这也就是Einstein等效原理的一个表述。
除此之外，只要一个坐标系的Christoffel符在其坐标域中的某点p为零$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\big|_{p}=0$，就可以将这个坐标系称为$p$点的局部惯性系或局部Lorentz系。

§7.6 潮汐力与测地偏离方程

2018年8月18日 23:30

在实际的观测中，虽然可以按照等效原理认为物理定律在局部惯性坐标系与在平直时空整体惯性坐标系的形式相同，但是严格来说，一旦偏离了自由下落无自转观者的世界线（测地线），总有$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \neq 0$。这说明在占据一定时空区域的参考系看来，其中各点的引力效应总有细微差异，从而不可能完全与平直时空的惯性系等效。这相当于说，一旦偏离了观者的世界线（测地线），质点的运动就会产生一个相比于观者运动额外的动力学效应，称为潮汐加速度（tide accelerate），与之相应的引力效应称为潮汐力（tide force）。它本质上反映的是真实引力场的非匀强性。

首先考虑Newton引力论对潮汐加速度的描述。可以建立3维空间的Cardesian坐标系，设引力场中两自由下落的邻近质点a、b相对于该系原点o位矢分别为$\vec{r}(t)$、$\vec{r}(t)+\vec{\lambda}(t)$，以$a$为基准，则$b$相对于$a$的位矢为$\vec{\lambda}(t)$，潮汐加速度就是$\mathrm{d}^2\vec{\lambda}/\mathrm{d}t^2$。设引力场由引力势描述，则两质点运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(x^i+\lambda^i\right)}{\mathrm{d}t^2} = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}+\vec{\lambda}}$$

第二式展开得

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(x^i+\lambda^i\right)}{\mathrm{d}t^2} \cong -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}} - \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_{\vec{r}}\lambda^j$$

两式相减即得Newton引力论中潮汐加速度的表达式：

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda^i}{\mathrm{d}t^2} = -\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\,\partial x^j}\right|_{\vec{r}}\lambda^j,\ \ i=1,2,3$$

不难看出，上述形式的潮汐加速度是关于空间点$\vec{r}$和相对位矢$\vec{\lambda}$的函数，而事实上其核心$\left.\left(\partial^2\phi/\partial x^i\,\partial x^j\right)\right|_{\vec{r}}$只与空间某处$\vec{r}$局域的引力场有关，而不涉及处于该处具体的物体，反映的是该点局域的引力场性质。

下面从广义相对论的角度来分析潮汐力。首先考虑对时空某个开域U中的一群自由下落质点的描述。它们可以抽象为U中的一个测地线汇（线汇congruence of curves，是一族曲线，对$\forall p\in U$有该族唯一的曲线经过），物理上对应于一个自由下落参考系。测地线汇充满的4维时空邻域，而选取一条横向曲线$\mu_0(s)$（横向是指其任一点的切矢都不是在该点相交的测地线的切矢，s是线长参数）就可以挑选出它的一个子集，其中每一测地线都与$\mu_0(s)$相交。这些测地线$\gamma(\tau)$都可以用它们与$\mu_0(s)$相交的交点处的s参数值来标记：$\gamma_s(\tau)$。设定各$\gamma_s(\tau)$的固有时τ初值在与$\mu_0(s)$的交点处，其切矢场$Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$是$U$上的类时矢量场，可以给出一个单参微分同胚（局部）群$\{\phi_\tau\}$。则不同的τ值对应的群元ϕ_τ将$\mu_0(s)$映射为不同的曲线，记作$\mu_\tau(s)$。所有的

$\mu_\tau(s)$构成U的一个子集$\mathcal{S}$，其上每点都由二元数组(τ, s)唯一确定，因而$\mathcal{S}$是一个2维子流形。$\mathcal{S}$上的每一测地线都可由s标记，组成测地线汇的一个子集，称为一个单参测地线族$\{\gamma_s(\tau)\}$。这种意义上，也可说给定一条横向曲线$\mu_0(s)$就能挑出一个单参测地线族$\{\gamma_s(\tau)\}$，该族铺成了一个2维子流形$\mathcal{S}$。对每条曲线$\mu_\tau(s)$，令$\eta^a = (\partial/\partial s)^a$，则$Z^a$、$\eta^a$构成$\mathcal{S}$的一组坐标基矢场，因而对易，即：

$0 = [Z, \eta]^a = Z^b \nabla_b \eta^a - \eta^b \nabla_b Z^a$。

其中∇_a可为任一导数算符。选取其与度规g_{ab}适配，则：

$$Z^b \nabla_b(\eta^a Z_a) = \eta_a Z^b \nabla_b(Z^a) + Z_a Z^b \nabla_b(\eta^a) = Z_a \eta^b \nabla_b Z^a = \frac{1}{2}\eta^b \nabla_b(Z^a Z_a) = 0$$

即Z^a、η^a的内积沿着任一测地线的导数为零，因此内积不变。因此只需要在选取第一条横向曲线$\mu_0(s)$的时候，将之选为与所有相交测地线$\gamma_s(\tau)$都正交，即可保证任一$\mu_\tau(s)$与所有测地线$\gamma_s(\tau)$正交，从而对$\forall p \in \mathcal{S}$，该点的$\eta^a$总是过该点的测地线观者在该点的空间矢量（$Z^a \eta_a = 0$），不妨记作$w^a$。

有了以上基础，就可以具体分析潮汐效应。选取某一测地线$\gamma_0(\tau)$作为基准观者（fiducial observer），则与之标记值相差小量Δs的测地线$\gamma_{\Delta s}(\tau)$就可看作与之临近的另一质点。其相对位矢定义为：$\lambda^a \coloneqq \Delta s\, w^a$，显然是基准观者的空间矢量（$Z_a \lambda^a = 0$），表示基准观者（质点）与被观测质点间的空间距离。则$\tilde{u}^a \coloneqq Z^b \nabla_b \lambda^a$就是被观测质点相对于基准观者的3速（容易证明它是基准观者的空间矢量：$Z_a(Z^b \nabla_b \lambda^a) = Z^b \nabla_b(Z_a \lambda^a) - \lambda^a Z^b \nabla_b Z^a = 0$），$\tilde{a}^a \coloneqq Z^c \nabla_c \tilde{u}^a = Z^c \nabla_c(Z^b \nabla_b \lambda^a)$就是被观测质点相对于基准观者的3加速，也是基准观者的空间矢量。

我们希望找到一个类似于Newton力学中$(\partial^2 \phi / \partial x^i\, \partial x^j)|_{\vec{r}}$这样直接反映时空某点性质（而不依赖于具体的对象，例如Δs）的量。由于$\lambda^a \coloneqq \Delta s\, w^a$，$\tilde{u}^a \coloneqq \Delta s\, Z^b \nabla_b w^a$，$\tilde{a}^a \coloneqq \Delta s\, Z^c \nabla_c(Z^b \nabla_b w^a)$，因此我们特别地定义：

分离矢量（separation vector）w^a，起着测地线族之间空间位置的量度作用；

分离速度$u^a \coloneqq Z^b \nabla_b w^a$，量度族中测地线相对于基准观者的空间距离分开的速度；

潮汐加速度$a^a \coloneqq Z^c \nabla_c(Z^b \nabla_b w^a)$，量度族中测地线相对于基准观者的的加速度（偏离）；

任一单参类时测地线族内任一基准测地线$\gamma_0(\tau)$测得的潮汐加速度为：

$a^a = -R_{bcd}{}^a Z^b w^c Z^d$;

称为测地偏离方程（geodesic deviation equation），直接反映时空某处潮汐加速度a^d与该处的时空曲率张量$R_{bcd}{}^a$之间的关系。

注：

1. 足以此处定义的“潮汐加速度”a^a与Newton力学中同名概念的差别：此处的潮汐加速度仅仅反映时空某点的弯曲性质而不依赖具体对象，它只与时空某处的曲率$R_{bcd}{}^a$，以及一个空间的（方向、长度的）量度w^c相关。而Newton力学中的潮汐加速度则与具体的$\vec{\lambda}$有关，真正与之类似的是$(\partial^2 \phi / \partial x^i\, \partial x^j)|_{\vec{r}}$。
2. 测地偏离方程描述两条相邻（“无限临近”）的测地线之间的相对加速度。两条测地线当然存在分离（$w^a \neq 0$，separation），这个分离可能还有一阶变化速度（$u^a \neq 0$），但是只有在该点时空存在曲率的时候才有可能会发生二阶变化，也就是偏离（$a^a \neq 0$，deviation）。

3. 对平直时空，$R_{bcd}{}^{a}=0$，因此初始平行（即初始相对3速为零：$u^a|_{\tau=0}=0$）的两测地线必定永远平行；但是即使是处处存在曲率的时空，也有可能对某些测地线族来说，经计算得到零的偏离。准确的说法应当是，对于曲率张量非零的弯曲时空，总存在单参测地线族，存在测地偏离。因此，存在曲率张量的一个等价表述就是存在初始平行而后来不平行的测地线。
4. Christoffel符号与参考系相关，通过选取局部惯性系就可以在自由下落无自转观者的世界线上消除，然而曲率作为张量却是不可消除的，因此潮汐加速度不可能通过选取参考系消除，只要参考系占据一定的时空区域，这个效应就总能被观测到。
5. 对于一般的非类时的测地线族，也存在测地偏离。这时只需选取τ为测地线的仿射参数λ即可，$\mu_0(s)$也不必与测地线正交。更近一步，即使流形不存在度规，只需要给定导数算符即可讨论测地线，虽然此时正交概念根本无意义，但仍有测地偏离方程：
   $a^a=-R_{bcd}{}^{a}T^b\eta^cT^d$;
   其中$R_{bcd}{}^{a}$是曲率张量，T^a是基准测地线$\gamma_0(\lambda)$的切矢，$\eta^a=(\partial/\partial s)^a$是$\gamma_0(\lambda)$上的分离矢量，$a^a\coloneqq Z^c\,\nabla_c\big(Z^b\,\nabla_b\,\eta^a\big)$。
6. 一般测地线族的测地偏离方程$a^a=-R_{bcd}{}^{a}T^b\eta^cT^d$的一个解$\eta^a$称为所论测地线$\gamma_0(\lambda)$上的一个Jacobi场。若$\gamma_0(\lambda)$上存在一个不为零的Jacobi场，其在线上不同的两点p、q处为零，则称p、q两点为共轭的（conjugate），或称p、q为$\gamma_0(\lambda)$上的一对共轭点（conjugate points）。
   这一概念的意义在于说明，存在从p到q的，与γ“无限邻近”而又不同的测地线γ'。准确来说， 存在从p到q的单参测地线族，其中一条是γ。
   但是这仅仅是一个充分而非必要条件，例如p、q两点共轭却不一定存在与γ“无限邻近”而又不同的测地线γ'。另一方面，所谓“无限邻近”也是重要的条件。p、q两点之间存在不同于γ的γ'，并不能说明两点共轭。只有确实存在“无限邻近”的测地线得到共轭的结论。

§7.7 Einstein场方程

2018年8月20日 19:56

物质分布产生“引力”效应，而广义相对论已经认为“引力”的实质是时空弯曲，因而很自然地认为时空的弯曲要受到物质分布的影响。而物质分布由物质场的能量动量张量T_{ab}描述，时空弯曲由度规g_{ab}及其衍生量Riemann曲率张量${R_{abc}}^{d}$、Ricci张量R_{ab}和曲率标量R等描述，因此广义相对论的基本方程应当是一个将时空曲率与物质场能动张量联系的方程。

可以从对比已有的Newton引力论与广义相对论关于潮汐加速度的观点入手考虑。在弱场低速近似下，广义相对论的结论应当回到Newton引力论的形式。设$\{x^i\}$为3维Euclidean空间的Cardesian系，设被观测质点相对于基准观者的位矢为w^a，则Newton引力论的潮汐加速度：

$$a^a = a^a \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \frac{\mathrm{d}^2 w^i}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a w^i \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a w^c \partial_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$$
$$= -w^c \partial_c \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right] = -w^c \partial_c \partial^a \phi$$

对比广义相对论给出的潮汐加速度表达式，不难看出，希望存在这样的弱场低速近似对应：
${R_{bcd}}^{a} Z^b Z^d \leftrightarrow \partial_c \partial^a \phi$。
上下指标缩并后，对比Poisson方程$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$，得到：
${R_{bad}}^{a} Z^b Z^d \leftrightarrow \partial_a \partial^a \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi\rho = 4\pi T_{bd} Z^b Z^d$。即希望在弱场低速近似下有：
$R_{ab} Z^a Z^b = 4\pi T_{ab} Z^a Z^b$。
满足上式最简单的假设就是：$R_{ab} = 4\pi T_{ab}$。这也是Einstein最早假设并发表的形式。然而这个方程却存在物理上不可接受的后果。具体来说：能动张量T_{ab}满足：$\nabla^a T_{ab} = 0$，从而该方程使得$\nabla^a R_{ab} = 0$，而根据Riemann曲率张量满足的Bianchi恒等式，$\nabla_{[a} {R_{bc]d}}^{e} = 0$，缩并得$\nabla_{[a} {R_{bc]d}}^{a} = 0$，即：
$0 = \nabla_a {R_{bcd}}^{a} + \nabla_c {R_{abd}}^{a} + \nabla_b {R_{cad}}^{a} = \nabla_a {R_{bcd}}^{a} - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd}$；
上升指标d并与b缩并得：$0 = \nabla_a {R_c}^{a} - \nabla_c R + \nabla_b {R_c}^{b} = 2\nabla_a {R_c}^{a} - \nabla_c R$。
所以该方程实质上要求了$\nabla_c R = 0$。然而$R_{ab} = 4\pi T_{ab}$缩并得$R = 4\pi T$，故$\nabla_c T = 0$。物质场能动张量的迹处处为常数，这是不可接受的。以理想流体为例，$T = {T_a}^{a} = (\rho + p) U_a U^a + p g_{ab} g^{ab} = -\rho + 3p$。在低速近似下有$\rho \gg p$，因而$T \cong -\rho$。$\nabla_c T = 0$意味着理想流体必须处处密度相同，这显然是不可能的。

问题出在$\nabla^a T_{ab} = 0$而$\nabla^a R_{ab}$不应为零。若能找出一个由度规和曲率派生的(0,2)型对称张量，其满足协变导数为零，且最终方程还满足$R_{ab} Z^a Z^b = 4\pi T_{ab} Z^a Z^b$，就很可能得到最终的场方程。
仍从Bianchi恒等式的推论获得启发，既然要求$\nabla^a R_{ab} \neq 0$，而：

$$0 = 2\nabla_a {R_b}^{a} - \nabla_b R = 2\nabla^a R_{ab} - g_{ab} \nabla^a R = 2\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R\right)$$

因此定义Einstein张量为：

$$G_{ab} \coloneqq R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$$

自然满足$\nabla^a G_{ab}=0$。给出假定的场方程如下：
$$G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi T_{ab}$$
可以得到：

1. 由于$\nabla^a G_{ab}=0$，其自然与$\nabla^a T_{ab}=0$相容；这包含了物质运动的大量信息，例如对于尘埃，以及推广到自引力足够小、可以忽略的物体，其质点世界线都是测地线。
2. 根据该方程，
   $$8\pi T=8\pi T_a{}^a=R_a{}^a-\frac{1}{2}g_{ab}g^{ab}R=R-2R=-R$$
   因此$R=-8\pi T$。代回原式，
   $$R_{ab}=8\pi T_{ab}+\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi\left(T_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}T\right)$$
   从而在$T\cong-\rho$近似下，
   $$R_{ab}Z^aZ^b=8\pi\left(T_{ab}Z^aZ^b+\frac{1}{2}g_{ab}Z^aZ^b\rho\right)=8\pi\left(\rho-\frac{1}{2}\rho\right)=4\pi\rho=4\pi T_{bd}Z^bZ^d$$
   得到希望满足的方程。

于是，就将最后被称为Einstein场方程的：（Einstein equation）
$$R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi T_{ab}$$
作为描述时空曲率与物质场关系的基本方程。事实上它是广义相对论的一个基本假设。

Minkowski时空的时空曲率处处$R_{abc}{}^d=0$，因此$G_{ab}=0$，严格按照Einstein场方程来说，必然要求$T_{ab}=0$，即不存在物质场。然而作为狭义相对论的背景时空，这样的要求显然不成立。事实上狭义相对论是忽略了物质之间的引力，即只研究引力作用十分微弱时的物理，此时时空近似平直，就按照Minkowski时空来处理。

更一般地说，$T_{ab}=0$是一类重要情况，此时的场方程
$$R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R=0$$
称为真空Einstein场方程或无源Einstein场方程。
真空Einstein场方程在具体求解的时候，需要选定坐标系写出其分量方程。Ricci张量的分量$R_{\mu\nu}$可由度规分量$g_{\mu\nu}$及其偏导数（直至二阶）表出，且依赖关系是高度非线性的（对$g_{\mu\nu}$的二阶导数线性依赖，对一阶导数二次依赖，还含有其逆$g^{\mu\nu}$），而$R=R_\mu{}^\mu=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$更是高度非线性的，因此分量方程组就是一个高度非线性二阶偏微分方程组。其一个解就是一个度规，度规解g_{ab}称为真空度规。
需要注意的是，Minkowski度规自然是它的解，但是方程的解还可能是弯曲度规，例如星球外部附近的时空可以由Schwarzschild度规描述。
不难证明$T_{ab}=0$时有曲率标量$R=0$，因此真空Einstein场方程化为$R_{ab}=0$，即Ricci张量为零。因此真空度规g_{ab}的Riemann张量等于其Weyl张量，一般非零。注意此时的时空称为是“Ricci平”的，却不一定是平直的。
从这个角度就可看出之前提到的所谓Riemann曲率张量的“有迹部分”（由Ricci张量代表）与“无迹部分”Weyl张量的区别。这个所谓的“迹”正是反映该处的时空究竟是存在由引力

场源物质直接产生的曲率部分，还是由别处的物质产生的弯曲在此处的自然延展。

$T_{ab} \neq 0$的情况称为有源Einstein场方程，其解一定是弯曲度规。然而不可能简单认为一边的T_{ab}为已知量，因为T_{ab}的定义也是依赖度规g_{ab}的，甚至在不明确g_{ab}的时候连4速场U^a（因需要满足类时归一条件）也是无从明确的。因此未知的待求量g_{ab}同时出现在两边，只能是将描述物质场的量（如U^a、ρ等）与g_{ab}同时作为未知量联立求解。

Einstein场方程的非线性性导致了叠加原理不成立，也进一步使得方程的复杂性大大提高。

注：二维广义Riemannian空间的曲率张量只有$N = n^2(n^2-1)/12 = 1$个独立分量，它就是二维曲面的Gauss曲率。因此可证，二维广义Riemannian空间的Einstein张量始终为零。

§7.8 线性近似和牛顿极限

2018年8月22日 19:57

7.8.1 线性近似（线性引力论，linearized theory of gravity）

Einstein场方程的非线性性给求解方程带来了很大的困难。所幸大多数情况下引力场很弱，这时可以通过弱场线性近似将方程变为线性的。

所谓弱场，即认为时空度规g_{ab}接近Minkowski度规η_{ab}而只差一个度规小量γ_{ab}：

$g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$；

其中γ_{ab}可以看作是对η_{ab}的一个微扰。在这个视角下，时空总体上仍看作是Minkowski时空，只不过固有地附加了一个对称的(0,2)型张量场γ_{ab}（看作某种物理场，类似于电磁场F_{ab}）。γ_{ab}是“小量”的意思在于说明，其在η_{ab}的某个Lorentz系下的分量$\left|\gamma_{\mu\nu}\right|\ll 1$。这种情况下，升降指标一律使用$\eta_{ab}$和$\eta^{ab}$，只有$g^{ab}$作为例外，是$g_{ab}$的逆而非$\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$。不难得出，

$g^{ab}=\eta^{ab}-\gamma^{ab}$。

故此$g^{ab}g_{bc}=\eta^{ab}\eta_{bc}+\eta^{ab}\gamma_{bc}-\eta_{bc}\gamma^{ab}-\gamma^{ab}\gamma_{bc}=\delta^a{}_c-\gamma^{ab}\gamma_{bc}$（$\gamma$的二次项，是二阶小量）。设$\partial_a$和$\nabla_a$分别是与$\eta_{ab}$、$g_{ab}$适配的导数算符，其Christoffel符号：

$\Gamma^c{}_{ab}=\dfrac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)$

代入并略去高阶小量得Christoffel符号的一阶近似：

$\Gamma^{(1)c}{}_{ab}=\dfrac{1}{2}\eta^{cd}\left(\partial_a\gamma_{bd}+\partial_b\gamma_{ad}-\partial_d\gamma_{ab}\right)$

其本身就是一阶小。因此可以得到g_{ab}的曲率张量的一阶近似（线性Riemann张量）：

$R^{(1)}_{abcd}=\partial_d\,\partial_{[a}\gamma_{c]b}-2\,\partial_b\,\partial_{[a}\gamma_{c]d}$。

利用η^{cd}缩并后可得g_{ab}的Ricci张量的一阶近似（线性Ricci张量）：

$R^{(1)}_{ab}=\partial^c\,\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\dfrac{1}{2}\partial^c\,\partial_c\,\gamma_{ab}-\dfrac{1}{2}\partial_a\,\partial_b\,\gamma$

其中$\gamma=\gamma^a{}_a=\eta^{ab}\gamma_{ab}$。

从而曲率标量的一阶近似（线性曲率标量）：

$R^{(1)}=\partial^c\,\partial^d\,\gamma_{cd}-\partial^c\,\partial_c\,\gamma$。

由此易得Einstein张量的一阶近似（线性Einstein张量）：

$G^{(1)}_{ab}=R^{(1)}_{ab}-\dfrac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)}=\partial^c\,\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\dfrac{1}{2}\partial^c\,\partial_c\,\gamma_{ab}-\dfrac{1}{2}\partial_a\,\partial_b\,\gamma-\dfrac{1}{2}\eta_{ab}\left(\partial^c\,\partial^d\,\gamma_{cd}-\partial^c\,\partial_c\,\gamma\right)$

从而得到线性Einstein场方程（linearized Einstein equation）：

$\partial^c\,\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\dfrac{1}{2}\partial^c\,\partial_c\,\gamma_{ab}-\dfrac{1}{2}\partial_a\,\partial_b\,\gamma-\dfrac{1}{2}\eta_{ab}\left(\partial^c\,\partial^d\,\gamma_{cd}-\partial^c\,\partial_c\,\gamma\right)=8\pi T_{ab}$

令$\overline{\gamma}_{ab}=\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$，则方程可以化简为：

$\partial^c\,\partial_{(a}\overline{\gamma}_{b)c}-\dfrac{1}{2}\partial^c\,\partial_c\,\overline{\gamma}_{ab}-\dfrac{1}{2}\eta_{ab}\,\partial^c\,\partial^d\,\overline{\gamma}_{cd}=8\pi T_{ab}$

用$\partial^b=\eta^{bc}\,\partial_c$作用于方程左边得到零，因此方程自然保证$\partial^a\,T_{ab}=0$，即在线性引力论中能动张量的4散度为零，这意味着线性引力论中同样成立能量、动量、角动量等守恒。

线性引力论中存在规范自由性。设ξ^a为任一无限小矢量场（其分量ξ^μ足够小，以至于自乘积以及与$\gamma_{\alpha\beta}$的乘积都是二阶小量），不难验证，γ_{ab}的变换：

$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_b \xi_a + \partial_a \xi_b$；

被称为线性引力论的规范变换，因为$\eta_{ab} + \gamma_{ab}$和$\eta_{ab} + \gamma'_{ab}$有相同的$R^{(1)}_{abcd}$，从而有相同的$R^{(1)}_{ab}$和$G^{(1)}_{ab}$，因此若γ_{ab}为方程的解，则γ'_{ab}也是。

注：上述描述为主动语言，另外也有被动语言的提法，即对原有坐标的无限小坐标变换：$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$，其中$\xi^\mu(x)$是四个无限小函数。

条件：$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0$称为线性引力论的Lorenz规范。类似于电磁4势的规范条件，线性引力论的规范条件也是必定可以被满足的。这一规范使得线性Einstein方程化为：

$\Box^2 \bar{\gamma}_{ab} = \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}$。

7.8.2 Newton极限

在一般的情况下，常常可以对广义相对论做弱场低速条件的限制。具体来说，弱场条件指存在η_{ab}使得真实的弯曲度规可以看作是对η_{ab}的一个微扰，只差一个小量：$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$，其中$\left|\gamma_{\mu\nu}\right| \ll 1$，而低速条件则是指存在$\eta_{ab}$的惯性坐标系，其中所研究物体的3速率都远小于光速。具体来说，存在这样的极限近似：

1. 存在η_{ab}，使得$\gamma_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$为小量；
2. 存在η_{ab}的惯性坐标系$\{t, x^i\}$，满足：
    a. 物质场的能动张量在该系可以近似表为：$T_{ab} \cong \rho(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b$，即物质只有能量（质量）密度足够明显，动量密度及能流密度均因3速过小而可忽略，3维应力相较于质量密度也可忽略。这样真正对引力场有足够贡献的只有质量密度。
    b. 场源物质低速运动导致时空几何变化缓慢，$\partial\bar{\gamma}_{\mu\nu}/\partial t$可以忽略。
    c. 场源物质低速运动导致其4速接近观者4速：$U^a \cong Z^a$。

Lorenz规范下的线性Einstein场方程在弱场低速近似下可如下化简：

$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \partial^0 \partial_0 \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial^i \partial_i \bar{\gamma}_{\mu\nu} \cong \partial^i \partial_i \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \nabla^2 \bar{\gamma}_{\mu\nu}$（利用了条件b），从而得到方程组：

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{\gamma}_{00} = -16\rho \\ \nabla^2 \bar{\gamma}_{0i} = 0 \\ \nabla^2 \bar{\gamma}_{ij} = 0 \end{cases}$$

想要使得后两式在无限远处表现良好的唯一解就是$\bar{\gamma}_{0i}$和$\bar{\gamma}_{ij}$均为常数，而借助规范变换又可取为零。所以$\bar{\gamma}_{ab}$的唯一非零分量就是$\bar{\gamma}_{00}$，满足$\nabla^2 \bar{\gamma}_{00} = -16\rho$。令$\phi = -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00}$，就有：

$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$，

即Newton引力论的Poisson方程，其中ϕ解释为Newton引力势。

利用上述结论，$\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b = -4\phi(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b$，于是$\bar{\gamma} = \eta^{ab}\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}\eta^{ab}(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b = -\bar{\gamma}_{00} = 4\phi$。而由$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$得$\gamma = \eta^{ab}\gamma_{ab} = \eta^{ab}\bar{\gamma}_{ab} +$

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{\gamma}$$

于是$\gamma_{ab} = -\phi\left[4(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + 2\eta_{ab}\right]$。

在以上基础就可导出质点在弱场低速极限下的运动方程。设质点除引力外不受力，则其世界线应为测地线。在η_{ab}的惯性系中的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

条件$U^a \cong Z^a$保证了固有时和坐标时的关系：$\tau \cong t$，以及$u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t \cong 0$，故$U^\nu = \mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}t$的值近似取$(1,0,0,0)$，于是测地线方程就近似化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma^\mu{}_{00}$$

利用式$\Gamma^{(1)c}{}_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{cd}\left(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}\right)$可近似求得：

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{00}\left(\gamma_{00,\,0} + \gamma_{00,\,0} - \gamma_{00,\,0}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t} \cong 0$$

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{ij}\left(\gamma_{j0,\,0} + \gamma_{0j,\,0} - \gamma_{00,\,j}\right) \cong -\frac{1}{2}\delta^{ij}\gamma_{00,\,j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}，\ i = 1,2,3$$

故近似后的测地线方程在$\mu = 0$时给出恒等式，在$\mu = 1,2,3$时给出：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}$$

又由$\gamma_{00} = \bar{\gamma}_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}\bar{\gamma} = -4\phi + 2\phi = -2\phi$，则得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}，\ i = 1,2,3$$

正是Newton引力论中的运动方程，又可写为：$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi$。

质点运动方程：$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi$与Poisson方程：$\nabla^2\phi = 4\pi\rho$同为Newton引力论的基本方程，均可由广义相对论在弱场低速近似下得到。可见广义相对论在弱场低速极限下回到Newton引力论，该极限又称Newton极限。

由

$$\phi = -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00} = -\frac{1}{2}\gamma_{00}$$

得$g_{00} = \eta_{00} + \gamma_{00} = -(1 + 2\phi)$，或

$$\phi = -\frac{1}{2}(1 + g_{00})$$

这反映了Newton近似下度规分量g_{00}同Newton引力势的密切关系。

§7.9 引力辐射

2018年8月23日 21:27

Einstein场方程存在波动解，其传播速度为光速，且确实从波源系统携带了能量、动量。这样的波动称为称为引力波。可以在线性引力论近似下做简要讨论。线性Einstein场方程：$\Box^2 \bar{\gamma}_{ab} = \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}$，其中$\bar{\gamma}_{ab}$满足Lorenz规范条件：$\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$。

在电磁辐射中，其电磁4势即使在选定Lorenz规范后，仍具有剩余规范自由性。在此基础上，存在一种重要的、进一步的规范条件，具体来说：

设A_a是满足Lorenz规范$\partial^a A_a = 0$的任一4势，其分量形式$(A_0, \vec{a})$，Σ_0是$t = t_0$的同时面。用χ表达A_a在Lorenz规范下的剩余规范自由性（$\partial^a \partial_a \chi = 0$），对$\chi$的初值$\chi|_{\Sigma_0}$和$\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0}$提出如下要求：

$\nabla^2 \chi|_{\Sigma_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\big|_{\Sigma_0}$；$\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0} = -A_0\big|_{\Sigma_0}$。

这样的条件称为A_a的辐射规范（radiation gauge），它可以唯一地确定一个解χ，且这样选取出来的4势$A'_a = A_a + \partial_a \chi$，满足其在某惯性系中的分量$A'_0$在无源区$(J_a = 0)$为零。证：

由$A'_a = A_a + \partial_a \chi$可知，Lorenz规范和辐射规范导致$A'_0$满足：

1. $\partial^a \partial_a A'_0 = \partial^a \partial_a A_0 + \partial_0 \partial^a \partial_a \chi = \partial^a \partial_a A_0 = -4\pi J_0$，
2. $A'_0\big|_{\Sigma_0} = A_0\big|_{\Sigma_0} + \partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0} = 0$，
3. $\partial A'_0/\partial t\big|_{\Sigma_0} = \partial A_0/\partial t\big|_{\Sigma_0} + \partial^2\chi/\partial t^2\big|_{\Sigma_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}\big|_{\Sigma_0} + \nabla^2 \chi|_{\Sigma_0} = 0$。

注：第三式利用了$0 = \partial^a A_a = -\partial A_0/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$和$0 = \partial^a \partial_a \chi = -\partial^2\chi/\partial t^2 + \nabla^2 \chi$。

在无源区，1化为波动方程$\partial^a \partial_a A'_0 = 0$，而它在2、3给定的初值条件下的唯一解就是$A'_0 = 0$。

在线性引力论中，同样存在对$\bar{\gamma}_{ab}$在Lorenz规范$\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$下剩余规范自由性的辐射规范。对于满足$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}$和$\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$的$\bar{\gamma}_{ab}$，其对应的$\gamma_{ab}$的剩余规范自由性的辐射规范为$\partial^b \partial_b \xi_a = 0$，使得$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_b \xi_a + \partial_a \xi_b$在某惯性系中的分量在无源区$(T_{ab} = 0)$满足：$\gamma' = 0$，$\gamma'_{0i} = 0$，$i = 1,2,3$。具体来说：

设γ_{ab}是满足$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}$和$\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$的任一解，$\Sigma_0$是$t = t_0$的同时面。用$\xi_a = \left(\xi_0, \vec{\xi}\right)$表达$\gamma_{ab}$在Lorenz规范下的剩余规范自由性（$\partial^a \partial_a \xi_a = 0$），对$\xi_a$的初值$\xi_0\big|_{\Sigma_0}$、$\vec{\xi}\big|_{\Sigma_0}$、$\partial\xi_0/\partial t\big|_{\Sigma_0}$和$\partial\xi_i/\partial t\big|_{\Sigma_0}$提出如下要求：

$2\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} - \partial\xi_0/\partial t\right)\Big|_{\Sigma_0} = -\gamma|_{\Sigma_0}$，

$2\left[-\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \left(\partial\vec{\xi}/\partial t\right)\right]\Big|_{\Sigma_0} = -\partial\gamma/\partial t\big|_{\Sigma_0}$，

$\left[\left(\partial\xi_i/\partial t\right) + \left(\partial\xi_0/\partial x^i\right)\right]\big|_{\Sigma_0} = -\gamma_{0i}\big|_{\Sigma_0}$，$i = 1,2,3$

$\left[\nabla^2 \xi_i + \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)\right]\Bigg|_{\Sigma_0} = -\left(\dfrac{\partial\gamma_{0i}}{\partial t}\right)\Bigg|_{\Sigma_0}$，$i = 1,2,3$

令ξ_μ（$\mu = 0,1,2,3$）为方程$\partial^a \partial_a \xi_\mu = 0$在上述四个初始条件下的解，则不难证明，由$\xi_a =$

0，$i = 1,2,3$。
同时，设γ_{ab}是由Lorenz规范和辐射规范共同唯一决定的，由$\gamma = 0$可知$\overline{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab}$，于是Lorenz条件也可写为$\partial^a \gamma_{ab} = 0$，它与$\gamma_{0i} = 0$结合导致$\partial\gamma_{00}/\partial t = 0$，从而线性Einstein场方程在无源区给出：$\nabla^2 \gamma_{00} = 0$。若在全时空都无源，则该方程在无穷远处表现良好的唯一解就是γ_{00}为常数，进一步规范变换可以使得$\gamma_{00} = 0$。
因此，线性引力论的辐射规范中有：$\overline{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab}$，$\gamma = 0$，$\gamma_{0i} = 0$，$\gamma_{00} = 0$。

真空线性Einstein方程$\square^2 \gamma_{ab} = \partial^c \partial_c \gamma_{ab} = 0$是一个波动方程，单色平面波是其最简单的解：
$\gamma_{ab} = H_{ab} \cos\left(K_\mu x^\mu\right)$,
其中H_{ab}是对称常（$\partial_c H_{ab} = 0$）张量场，代表波的振幅，称为偏振张量；K^μ是常矢量场：4波矢K^a的分量，从$\partial^c \partial_c \gamma_{ab} = 0$可得$K_\mu K^\mu = \eta_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0$，即$K^a$是类光矢量场，表明引力波的传播速度也是光速。对$K^a$做$3+1$分解：
$$K^a = \omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + k^a$$
ω和k^a分别解释为它的角频率和3波矢。且由$K_\mu K^\mu = 0$可知：$\omega^2 = k^a k_a = k^2$。

单色平面波解与Lorenz规范条件结合得$H_{\mu\nu} K^\nu = 0$，$\mu = 0,1,2,3$。反映单色平面引力波的4维振幅H_{ab}与时空传播方向K^a正交。在这个意义上，它是某种“4维横波”。

单色平面波解与$\gamma = 0$和$\gamma_{0\nu} = 0$结合则给出$H_{0\nu} = 0$，$\nu = 0,1,2,3$和$H = \eta^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 0$。

由$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$可知H_{ab}至多10个独立分量，但受到4个方程：$H_{\mu\nu} K^\nu = 0$、4个方程：$H_{0\nu} = 0$和1个方程$H = 0$共9个方程的限制，注意到其中$H_{0\nu} K^\nu = 0$与$H_{0\nu} = 0$等价，故这些限制方程中只有8个独立，因此H_{ab}只有2个独立分量，它在物理上代表引力波的两种独立偏振态（偏振模式）。更一般的引力波偏振态都是这两者的组合。

需要注意的是，上述讨论仅仅是在线性近似的前提下作出的。然而在强引力的情况下，就必须考虑方程的非线性性。一个很重要的（区别于线性理论，例如Maxwell电磁理论）效应就是，Maxwell方程的线性性导致了电磁场的叠加原理，从而同一空间之中的两列电磁波互不影响。然而，同一时空中的两列引力波之间就存在相互作用，称为“散射”（或“碰撞”）。

带电粒子做变速运动，就会发射电磁波。对一般的带电体系而言，辐射场的主要贡献来自于电偶极辐射，其次（弱得多）的是磁偶极辐射和电四级辐射。在Newton近似下，引力波与之类似，质点变速运动便会辐射引力波。
引力系统中与电偶极矩对应的是质量偶极矩（mass dipole moment）：
$$\vec{D} \coloneqq \sum_{\text{质点}P} m_P \vec{r}_P$$

其中m_P、$\vec{r}_P$分别是质点P的质量和位矢。电偶极辐射的强度正比于电偶极矩的二阶时间导数的平方，然而在线性引力波中不存在电偶极辐射对应的引力偶极辐射。因为事实上$\vec{D}$的一阶时间导数$\dot{\vec{D}}$正是系统的总动量，故根据动量守恒定律，质量偶极矩的二阶时间导数$\ddot{\vec{D}}=0$，即引力波中不包含质量偶极矩的贡献。

引力系统中与磁偶极矩对应的是：

$$\vec{\mu} \coloneqq \sum_{质点P} \vec{r}_P \times \left(m_P \vec{u}_P\right)$$

其中$\vec{u}_P$是质点P的3速。磁偶极辐射的强度正比于磁偶极矩的二阶时间导数的平方，然而在线性引力波中同样不存在磁偶极辐射对应的引力偶极辐射。因为事实上$\vec{\mu}$正是系统的总角动量，根据角动量守恒定律，自然有$\dot{\vec{\mu}}=0$。

综上，引力波中不包含偶极辐射。事实上，在四级辐射中才会得到非零结果。但是四级辐射的量级要远远小于同等条件下的偶极辐射，这也是通常引力波十分微弱的部分原因。