第三章 Riemannian（内禀）曲率张量

定义了张量及度量方式之后，进一步研究张量的微分性质，因而引入了导数算符——求导概念的推广。从而可以研究流形上几何对象的微分性质，也得到了关于流形本身的某种内禀的“弯曲”性质的暗示。

流形的内禀“弯曲”性质可以由引入的Riemannian曲率张量及其衍生的一系列量表征，这将会用于描述广义相对论中时空的“弯曲”几何效应。

测地线是三维Euclidean空间中直线概念的推广，将会用于描述相对论中物体的自由运动。

§3.1 导数/Hamiltonian/Nabla算符

2018年6月4日 20:13

类比于三维欧式空间的导数/Hamitonian/Nabla算符，推广至映射∇：$\mathcal{F}_M(k,l)\to\mathcal{F}_M(k,l+1)$（包括标量场即(0,0)型张量场，$\mathcal{F}_M(0,0)\equiv\mathcal{F}_M$）（抽象指标记法常记作$\nabla_a$，以表示它的作用是增加一个下指标）称为流形$M$上的（无挠）导数算符（（torsion-free) derivative operator），若：

1. 线性性：$\nabla_a\left(\alpha T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\beta S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\right)=\alpha\,\nabla_a\left(T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\right)+\beta\,\nabla_a\left(S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\right)$，$\forall T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l},S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\in\mathcal{F}_M(k,l)$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$；
2. Leibnizian律：
   $\nabla_a\left(T^{b_1\cdots b_{k_1}}{}_{c_1\cdots c_{l_1}}S^{d_1\cdots d_{k_2}}{}_{e_1\cdots e_{l_2}}\right)=T^{b_1\cdots b_{k_1}}{}_{c_1\cdots c_{l_1}}\nabla_a\left(S^{d_1\cdots d_{k_2}}{}_{e_1\cdots e_{l_2}}\right)+S^{d_1\cdots d_{k_2}}{}_{e_1\cdots e_{l_2}}\nabla_a\left(T^{b_1\cdots b_{k_1}}{}_{c_1\cdots c_{l_1}}\right)$；
   $\forall T^{b_1\cdots b_{k_1}}{}_{c_1\cdots c_{l_1}}\in\mathcal{F}_M(k_1,l_1)$，$\forall S^{d_1\cdots d_{k_2}}{}_{e_1\cdots e_{l_2}}\in\mathcal{F}_M(k_2,l_2)$；
3. 导数运算与缩并运算次序可以交换：$\nabla\circ\mathrm{C}=\mathrm{C}\circ\nabla$；
4. 矢量性：$v(f)=v^a\nabla_a f$，$\forall f\in\mathcal{F}_M$，$\forall v\in\mathcal{F}_M(0,1)$；
5. 无挠（torsion free）性：$\nabla_a\nabla_b f=\nabla_b\nabla_a f$，$\forall f\in\mathcal{F}_M$。

注：

1. 导数与缩并交换的运算常见并且非常自然，如：$\nabla_a(v^b\omega_b)=v^b\nabla_a(\omega_b)+\omega_b\nabla_a(v^b)$，实质上是：
   $\nabla_a(v^b\omega_b)=\nabla_a[\mathrm{C}(v^b\omega_c)]=\mathrm{C}_2^1(\nabla_a v^b\omega_c)=\mathrm{C}_2^1(v^b\nabla_a\omega_c)+\mathrm{C}_2^1[(\nabla_a v^b)\omega_c]$。
   这种操作如此自然，以至于常常不经意间就使用了，为求严谨特此列出。实质上缩并就是对指定的一上一下两个位置放入对应的基矢和对偶基矢并便利求和，先缩并后求导无非是先指定放入求和后增加一个下位，而先求导后缩并无非是先增加一个下位，再在指定的位置放入求和，并无区别。
2. 矢量性是三维欧式空间性质的自然推广：
   $v(f)=\left(v^\mu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)(f)=v^\mu\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}=\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}f=v^a\nabla_a f$
   这个性质事实上保证了算符∇的“可基底表出性”——矢量性。线性性和Leibnizian律只保证算符具有和导数相似的结构，但是一个简单的偏导数算符也可满足。利用这条性质，由于矢量v本身是可以通过基底表出的，从而保证了∇在某种程度上也是可以由“基底”表出的，也就不仅仅是单纯的某个方向的偏导数算符那样得到一个实数的简单不可被表出结构。
3. $\nabla_a f=(\mathrm{d}f)_a$，$\forall f\in\mathcal{F}_M$；
4. 无挠性的条件实质上表示$(\nabla\nabla f)(u,v)=(\nabla\nabla f)(v,u)$，$\forall u,v\in\mathcal{F}_M(1,0)$，即$\nabla\nabla f$是对称的(0,2)型张量。
5. 满足前四条而不满足第五条的导数算符称为有挠导数算符。而广义相对论只使用无挠导

数算符。

∇_a的作用有局域性，即在某点处的作用结果只与该点附近的小邻域内的情况有关。换句话说，即便T只是定义在流形M的某个有限子集$N \subset M$内，总可以找到许多定义在整个流形M上的$\bar{T}$，若满足$p \in N$，$T|_N = \bar{T}\big|_N$，则$\nabla_a T\big|_p \neq \nabla_a \bar{T}\big|_p$。

任一流形都存在满足上述定义的导数算符，而且很多。
由$\nabla_a f = (\mathrm{d}f)_a$可知，任意两个算符作用在同一个函数上，结果都相同（该函数诱导的对偶矢量场）。因此算符的不同只体现在对非零阶张量的作用上。
先考虑对$(0,1)$型对偶矢量场的作用。设在点$p \in M$给定一个对偶矢量μ_b，考虑上任意两个对偶矢量场ω_b和ω_b'，满足$\omega_b\big|_p = \omega_b'\big|_p = \mu_b$（$\omega_b$和$\omega_b'$称为$\mu_b$在$M$上的延拓），则对一个导数算符$\nabla_a$来说，一般$\nabla_a \omega_b\big|_p \neq \nabla_a \omega_b'\big|_p$。
然而对于M上任意两个导数算符∇_a和$\tilde{\nabla}_a$，只要$\omega_b\big|_p = \omega_b'\big|_p$，就有$\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\,\omega_b\right]\big|_p = \left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\,\omega_b'\right]\big|_p$。
要证上式，即证$\left[\nabla_a(\omega_b - \omega_b')\right]\big|_p = \left[\tilde{\nabla}_a(\omega_b - \omega_b')\right]\big|_p$。记$\Omega_b = \omega_b - \omega_b'$，选取坐标系$\{x^\mu\}$使其坐标域含$p$，则$\omega_b\big|_p = \omega_b'\big|_p$导致$\Omega_\mu(p) = 0$，其中$\Omega_\mu$是$\Omega_b$的坐标分量。于是：
$\left[\nabla_a(\omega_b - \omega_b')\right]\big|_p = (\nabla_a \Omega_b)\big|_p = \left\{\nabla_a\left[\Omega_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_b\right]\right\}\Big|_p = \Omega_\mu(p)\left[\nabla_a (\mathrm{d}x^\mu)_b\right]\big|_p + \left[(\mathrm{d}x^\mu)_b \nabla_a \Omega_\mu\right]\Big|_p = \left[(\mathrm{d}x^\mu)_b \nabla_a \Omega_\mu\right]\Big|_p$。
同理$\left[\tilde{\nabla}_a(\omega_b - \omega_b')\right]\big|_p = \left[(\mathrm{d}x^\mu)_b \tilde{\nabla}_a \Omega_\mu\right]\Big|_p$。由于$\Omega_\mu$是个标量场，故两边相等。

虽然$\nabla_a \omega_b\big|_p$、$\tilde{\nabla}_a \omega_b\big|_p$都依赖于$\omega_b$在一个邻域内的具体情况，然而$\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\,\omega_b\right]\big|_p$只依赖于$\omega_b$在一个点的值。这说明$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$把在$p$点的一个对偶矢量$\mu_b$，无论选择如何延拓$\omega_b$，都唯一地变为$p$点的一个$(0,2)$型张量。所以$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$在$p$点对应一个$(1,2)$型张量$C^c{}_{ab}\big|_p$，满足$\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\,\omega_b\right]\big|_p = \Gamma^c{}_{ab}\omega_c\big|_p$。由于$p$点可任选，所以$M$上的两个导数算符$\nabla_a$和$\tilde{\nabla}_a$对$\omega_b$作用的差别体现为一个$(0,2)$型张量场$C^c{}_{ab}$，即：
$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c$，$\forall \omega_b \in \mathcal{F}_M(0,1)$。

导数算符的无挠性导致了张量场$C^c{}_{ab}$的如下对称性：
$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$。
证：令$\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$，$f \in \mathcal{F}_M$，则$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - \Gamma^c{}_{ab} \nabla_c f$。交换指标，得$\nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - C^c{}_{ba} \nabla_c f$，利用无挠性条件，可得$C^c{}_{ab} \nabla_c f = C^c{}_{ba} \nabla_c f$。记$T^c{}_{ab} = C^c{}_{ba} - C^c{}_{ba}$，则$T^c{}_{ab} \nabla_c f = 0$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$，则$T^c{}_{ab}$在任一基底的分量$T^\sigma{}_{\mu\nu} = T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b$，由于$T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c = T^c{}_{ab} \nabla_c x^\sigma = 0$（$x^\sigma$看作一个$f$），故$T^\sigma{}_{\mu\nu} = 0$，即$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$

另外，$\nabla_a v^b = \tilde{\nabla}_a v^b + C^b{}_{ac} v^c$，$\forall v^b \in \mathcal{F}_M(1,0)$。
证：$\forall \omega_b \in \mathcal{F}_M(0,1)$，$\nabla_a(\omega_b v^b) = \omega_b \nabla_a v^b + v^b \nabla_a \omega_b = \omega_b \nabla_a v^b + v^b \tilde{\nabla}_a \omega_b - v^b C^c{}_{ab}\omega_c$
另一方面，$\tilde{\nabla}_a(\omega_b v^b) = \omega_b \tilde{\nabla}_a v^b + v^b \tilde{\nabla}_a \omega_b$，而$\omega_b v^b$为标量场，有$\tilde{\nabla}_a(\omega_b v^b) = \nabla_a(\omega_b v^b)$，即可得证。

进一步，导数算符∇_a和$\widetilde{\nabla}_a$作用于任一(k,l)型张量$T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$，有：

$$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} = \widetilde{\nabla}_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \sum_{1\le i\le k} C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1\cdots d\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} - \sum_{1\le j\le l} C^d{}_{ac_j} T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots d\cdots c_l}, \ \forall T \in \mathcal{F}_M(k,l)$$

差别表现为$C^c{}_{ab}$参与缩并运算的$k+l$项，其中与上指标缩并的项前面为正号，与下指标缩并的项前面为负号。

以上说明， 任意两个导数算符∇_a和$\widetilde{\nabla}_a$的差别仅仅体现在一个$(0,2)$型张量场$C^c{}_{ab}$上，反之，任一给定一个导数算符$\widetilde{\nabla}_a$和光滑$(0,2)$型张量场$C^c{}_{ab}$，也能得到一个复合定义的导数算符∇_a。可见流形上只要有一个导数算符，就会有很多导数算符。选定导数算符（附加结构）后的流形记作(M,∇_a)。

设M的坐标系$\{x^\mu\}$及其坐标基底和对偶坐标基底$\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$、$\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$，则在其坐标域$O$上定义映射：

$$\partial_a: \ \mathcal{F}_O(k,l) \to \mathcal{F}_O(k,l+1)$$

$$\partial_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} \coloneqq (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}\right)^{b_k} (\mathrm{d}x^{\sigma_1})_{c_1} \cdots (\mathrm{d}x^{\sigma_l})_{c_l} \frac{\partial\left(T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}\right)}{\partial x^\mu}$$

其中$T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$是在此系下的分量$T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$，注意，分量是坐标的函数。
这个导数算符从定义起就依赖于坐标系，且只在该系的坐标域上有定义，称为该坐标系的普通导数（ordinary derivative）算符。它本质上就是普通的偏微分算符。
记$\partial_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l} = \frac{\partial\left(T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}\right)}{\partial x^\mu}$，则张量$\partial_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$的坐标分量就是$\partial_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$，即$T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$的偏导数——张量场普通导数的坐标分量，等于该张量场的坐标分量对坐标的偏导数。
由此可见：

1. 该系任意坐标基矢和对偶坐标基矢的普通导数为零：
   $\partial_a(\partial/\partial x^\mu)^b = \partial_a(\mathrm{d}x^\mu)_b = 0$;
2. ∂_a满足比无挠导数算符定义的无挠性条件强得多的性质：
   $\partial_a\partial_b T^{\cdots}{}_{\cdots} = \partial_b\partial_a T^{\cdots}{}_{\cdots}$，或$\partial_{[a}\partial_{b]} T^{\cdots}{}_{\cdots} = 0$，其中$T^{\cdots}{}_{\cdots}$是任意型张量场。

另一方面，导数算符之中与坐标系或其他人为因素无关的导数算符称为协变导数（convariant derivative）算符，常常就以∇_a表示。
两者差别在于，普通导数算符是依赖于给定坐标系的，因而不同坐标系的普通导数算符作用于同一个张量场得到的新张量场是不同的，也是坐标系依赖的，仅仅在给定的坐标系下有意义，因而其分量也就不能在不同坐标系下变换，因为对应于某一坐标系的张量场在其他坐标系下的分量没有意义。
另一方面，我们仍然希望一个非坐标系依赖的张量场的“导数”仍是一个非坐标系依赖的张量场，因而提出协变导数算符的概念，其与坐标系无关，因而协变导数算符作用于任一张量场得到的新张量场也是非坐标系依赖的。这一，可以将协变导数算符看作是在将三维欧氏空间的导数算符推广至任一流形的过程之中，对普通偏微分算符作出的一种修正。

设∂_a是(M,∇_a)上任给的坐标系的普通导数算符，则体现∇_a与∂_a差别的张量场（即修正量）$C^c{}_{ab}$记为$\Gamma^c{}_{ab}$，称为∇_a在该坐标系的Christoffel symbol：$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c$，$\forall\omega_b \in \mathcal{F}_M(0,1)$。
Christoffel符号反映了在给定的坐标系下，协变导数对于普通偏微分的修正。
注意：虽然Christoffel符号是一个张量场，但是对它进行随坐标系的变换是没有意义的。事实上，虽然对一个确定的张量场来说，在不同坐标系下分量展开，并且相互之间进行坐标变换是完全可以做到的，但是因为Christoffel符是依据给定的坐标系和∂_a确定的，不同的坐标系下的张量场$\Gamma^c{}_{ab}$不同，因而$\Gamma^c{}_{ab}$是坐标依赖的张量场，随着坐标系的给定而确定唯一适用于此坐标系的张量场$\Gamma^c{}_{ab}$及分量$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$，某一坐标系下确定的$\Gamma^c{}_{ab}$及其分量值$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$对其他的坐标系没有意义。因此，由于不同坐标系下的不同张量场$\Gamma^c{}_{ab}$的分量的坐标变换没有意义，更不用提满足张量变换律，也有的文献认为不同坐标系下的分量（其实就是一堆数）$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$不构成张量，并不矛盾。

一般记$\partial_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$在坐标系下的分量，即$\partial_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$为$T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l,\ \mu}$。
有的文献出于类似的原因，也认为张量场$\partial_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$的分量$T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l,\ \mu}$不构成张量。
设矢量场v^b，由于∂_a是坐标系依赖的，故$\partial_a v^b$也是坐标依赖的张量场。在对应坐标系展开：
$$\partial_a v^b = (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b v^\nu{}_{,\ \mu}$$
$$v^\nu{}_{,\ \mu} = \partial_a v^b (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$
设对偶矢量场ω_b，由于∂_a是坐标系依赖的，故$\partial_a \omega_b$也是坐标依赖的张量场。在对应坐标系展开：
$$\partial_a \omega_b = (\mathrm{d}x^\mu)_a (\mathrm{d}x^\nu)_b \omega_{\nu,\ \mu}$$
$$\omega_{\nu,\ \mu} = \partial_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b$$
另外，$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$则是与坐标系无关的张量，它在坐标系中的分量常记为$T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l;\ \mu}$，满足张量变换律。有的文献出于类似的原因，张量场的协变导数的分量也被称为张量（指其分量）的协变导数。
设矢量场v^b，将协变导数在对应坐标系展开：
$$\nabla_a v^b = (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b v^\nu{}_{;\ \mu}$$
$$v^\nu{}_{;\ \mu} = \nabla_a v^b (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$
设对偶矢量场ω_b，由于∂_a是坐标系依赖的，故$\partial_a \omega_b$也是坐标依赖的张量场。在对应坐标系展开：
$$\nabla_a \omega_b = (\mathrm{d}x^\mu)_a (\mathrm{d}x^\nu)_b \omega_{\nu;\ \mu}$$
$$\omega_{\nu;\ \mu} = \nabla_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b$$
由：
$$v^\nu{}_{;\ \mu} = \nabla_a v^b (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \left(\partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac} v^c\right)(\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$
$$= \partial_a v^b (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a + \Gamma^b{}_{ac} v^c (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = v^\nu{}_{,\ \mu} + \Gamma^b{}_{ac}(\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a v^c$$
$$= v^\nu{}_{,\ \mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} v^\sigma$$

同理：

$$\omega_{\nu;\ \mu} = \nabla_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b = \left(\partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b$$

$$= \partial_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b = \omega_{\nu,\ \mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma$$

即存在关系：

$v^\nu{}_{;\ \mu} = v^\nu{}_{,\ \mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma$，$\omega_{\nu;\ \mu} = \omega_{\nu,\ \mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma$。

更进一步，

$$T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l;\ \mu} = T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l,\ \mu} + \sum_{1\le i\le k}\Gamma^{\nu_i}{}_{\mu\lambda}T^{\nu_1\cdots\lambda\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l} - \sum_{1\le j\le l}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma_j}T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\sigma_1\cdots\lambda\cdots\sigma_l},$$

条件“导数运算与缩并运算次序可以交换：$\nabla\circ C = C\circ\nabla$”等价于：$\nabla_a \delta^b{}_c = 0$，其中$\delta^b{}_c$看作$(1,1)$型张量场，其在每点$p\in M$处的定义为：$\delta^b{}_c v^c = v^b$，$\forall v^b \in \mathcal{F}_M(1,0)$。

流形上的矢量场对易子$[u,v]^a$定义不需要由附加结构，但是利用导数算符，可以更清晰的表示而不需要借助f：

$[u,v]^a \coloneqq u^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b u^a$，其中$\nabla_b$是任一无挠导数算符。

证：$\forall f\in\mathcal{F}_M$，$[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f)) = u^b\nabla_b(v^a\nabla_a f) - v^b\nabla_b(u^a\nabla_a f) = u^b(\nabla_b v^a)\nabla_a f + v^a u^b\nabla_b\nabla_a f - v^b(\nabla_b u^a)\nabla_a f - u^a v^b\nabla_b\nabla_a f = (u^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b u^a)\nabla_a f$。

任取一坐标系$\{x^\mu\}$的普通导数算符∂_b代替上式的导数算符∇_b，则有

$[u,v]^\mu = (\mathrm{d}x^\mu)_a[u,v]^a = u^\nu\partial_\nu v^\mu - v^\nu\partial_\nu u^\mu$。

§3.2 矢量场沿曲线的导数和平移

2018年6月4日　　20:46

借助如下概念：
设f是沿着曲线$C(t)$定义的标量场，则f是沿曲线不变的，若：$T(f)=T^b\nabla_b f=0$。其中，$T^b=(\partial/\partial t)^b$是曲线的切矢。
可以进行如下推广：
设v^a是沿着曲线$C(t)$定义的矢量场，则v^a是沿曲线不变的，称为v^a是沿曲线平移的（parallelly transported alone $C(t)$），若有：$T^b\nabla_b v^a=0$，称为平移方程。其中，$T^b=(\partial/\partial t)^b$是曲线的切矢。

设曲线$C(t)$位于坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内，曲线参数式为$x^\mu(t)$，若沿着曲线定义的矢量场v^a满足：

$$T^b\nabla_b v^a=T^b\left(\partial_b v^a+\Gamma^a{}_{bc}v^c\right)=T^b\left[(\mathrm{d}x^\nu)_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\partial_\nu v^\mu+\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\Gamma^\mu{}_{bc}v^c\right]$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left[T^\nu\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma\right]=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left[\frac{\mathrm{d}\,x^\nu(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma\right]$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left[\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma\right]$$

则矢量场v^a是沿曲线$C(t)$平移的，即$T^b\nabla_b v^a=0$，等价于如下的平移方程的坐标分量形式：

$$\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma=0$$

在曲线上的任一点指定一个矢量v^a，则可以唯一地确定一个沿曲线平移的矢量场。

任取上的两点p，$q\in M$，分别存在两点上的切空间V_p、V_q，按照定义两者之间并无关系，因而也就不可能在$v^a\in V_p$和$v'^a\in V_q$之间产生联系。但是若在M上附加导数算符∇_a，则可以定义V_p到V_q的曲线依赖的映射：对$\forall v^a\in V_p$，再选取一条经过两点的曲线。则可以唯一确定一个沿曲线平移的矢量场，将其在q点的值$v'^a\in V_q$定为v^a在该映射下的像。虽然这个映射是曲线依赖的，随着曲线选取的不同，映射也随之改变，但是毕竟导数算符∇_a产生了在两点处矢量的一个关系，因而∇_a也被称为联络（connection）。给定了联络∇_a的流形(M,∇_a)称为仿射联络空间（affine connection space）
在给定坐标系下，某一协变导数算符唯一决定于Christoffel符号，此时Christoffel符号又被称为联络系数。

若流形M上给定了度规g_{ab}，设u^a、v^a为两沿曲线$C(t)$平移的矢量场，则可以附加一个有用的要求：在每一点处两矢量场的值的内积$u^a v_a=g_{ab}u^a v^b$不变，即$u^a v_a$在$C(t)$上是常数（常标量场），也即：

$$0=T^c\nabla_c\left(u^a v_a\right)=T^c\nabla_c\left(g_{ab}u^a v^b\right)=g_{ab}u^a T^c\nabla_c v^b+g_{ab}v^b T^c\nabla_c u^a+u^a v^b T^c\nabla_c g_{ab}$$
$$=u^a v^b T^c\nabla_c g_{ab}$$

由u^a、v^a以及曲线$C(t)$（从而该曲线的切矢T^c）选取的任意性，上述要求等价于$\nabla_c g_{ab}=0$。

进一步，流形M上给定了度规g_{bc}后，满足$\nabla_a g_{bc}=0$的导数算符是唯一的：
设$\tilde{\nabla}_a$为任一导数算符，欲求适当的$C^c{}_{ab}$使得与其决定的∇_c满足$\nabla_a g_{bc}=0$。则
$\nabla_a g_{bc}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}-C^d{}_{ab}g_{dc}-C^d{}_{ac}g_{bd}=0$，即
$C^d{}_{ab}g_{dc}+C^d{}_{ac}g_{bd}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}$；同理：
$C^d{}_{ba}g_{dc}+C^d{}_{bc}g_{ad}=\tilde{\nabla}_b g_{ac}$；
$C^d{}_{ca}g_{db}+C^d{}_{cb}g_{ad}=\tilde{\nabla}_c g_{ab}$。
利用g_{dc}和$C^d{}_{ab}$的两个下标均是对称的，即$C^d{}_{ab}g_{dc}=C^d{}_{ba}g_{dc}$等关系，加减相消得：
$2C^d{}_{ab}g_{dc}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}+\tilde{\nabla}_b g_{ac}-\tilde{\nabla}_c g_{ab}$，替换成常见的$C^c{}_{ab}$并整理，得：
$$C^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\tilde{\nabla}_a g_{bd}+\tilde{\nabla}_b g_{ad}-\tilde{\nabla}_d g_{ab}\right)$$
由此说明满足$\nabla_a g_{bc}=0$的导数算符必定是唯一的，因假设若除了∇_a，还有∇'_a也满足$\nabla'_a g_{bc}=0$，则反映这两者差别的$C^c{}_{ab}$必为零。

对于给定了度规g_{bc}的流形(M,g_{bc})，满足$\nabla_a g_{bc}=0$的唯一的∇_a称为与度规g_{bc}适配的导数算符，或者将这一特殊的联络称为Levi-Civita connection。流形实质上就成为(M,g_{bc},∇_a)。

进一步，上述讨论给出了与度规相适配的协变导数算符在任一坐标系下的Christoffel符号及其分量：
$$\Gamma^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)$$
$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\ \mu}+g_{\mu\rho,\ \nu}-g_{\mu\nu,\ \rho}\right)$$
证：
$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x^\sigma)_c\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b g^{cd}\left(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)$$
$$=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho}+\partial_\nu g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\ \mu}+g_{\mu\rho,\ \nu}-g_{\mu\nu,\ \rho}\right)$$

Euclidean空间的Cartesian坐标系、Minkowski空间的Lorentzian坐标系的Christoffel符都为零。

为定义矢量场的导数，先研究三维Euclidean空间。
Euclidean空间p点的矢量$\tilde{v}$称为是q点的矢量v平移到p的结果， 若两者在同一Cartesian系下的分量相等（注：对某一Cartesian系平移，则对任意Cartesian系都是平移）。
Euclidean空间中定义在曲线$C(t)$上的矢量场v沿曲线的导数定义为：
$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_p\coloneqq\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{v}|_p-v|_p}{\Delta t}$$
其中$\tilde{v}|_p$是把p的邻点q处的矢量$v|_q$平移至p点的结果，$\Delta t=t(p)-t(q)$。其i第分量为：
$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_p\right)^i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{v}^i\big|_p-v^i\big|_p}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v^i\big|_q-v^i\big|_p}{\Delta t}=\left.\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\right|_p$$
而设$T^b=(\partial/\partial t)^b$是曲线的切矢，$\partial_a$是Cartesian系的普通导数算符，则

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = T(v^i) = T^b\,\partial_b\,v^i = T^b\,\partial_b\left[(\mathrm{d}x^i)_a v^a\right] = (\mathrm{d}x^i)_a T^b\,\partial_b\,v^a = (\mathrm{d}x^i)_a (T^b\,\partial_b\,v^a)$$
$$= (T^b\,\partial_b\,v^a)^i$$
故$T^b\,\partial_b\,v^a = \mathrm{d}v^a/\mathrm{d}t$

推广至带任意∇_a的任意流形M上，将$T^b\,\partial_b\,v^a$定义为矢量场v^a沿曲线$C(t)$的导数，记作：$\mathrm{D}v^a/\mathrm{d}t = T^b\,\partial_b\,v^a$。

对于任意(M,∇_a)，v^a是曲线$C(t)$上的矢量场，$T^b = (\partial/\partial t)^b$是的切矢，$p$、$q$是$C(t)$上的邻点，则必有：

$$T^b\,\partial_b\,v^a\Big|_p \coloneqq \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{v}^a|_p - v^a|_p}{\Delta t}$$

其中$\tilde{v}^a|_p$是把p的邻点q处的矢量$v^a|_p$平移至p点的结果，$\Delta t = t(p) - t(q)$。

§3.3 测地线

2018年6月4日　20:47

(M,∇_a)上的曲线$\gamma(t)$叫做测地线（geodesic），若其切矢T^a满足沿曲线的导数$T^b\nabla_b T^a=0$。

1. 测地线的充要条件是其切矢沿曲线是平移的。
2. 测地线上切矢的平移方程$T^b\nabla_b T^a=0$称为测地线方程。
3. 设流形M上有度规g_{ab}，则(M,g_{ab})的测地线是(M,∇_a)的测地线，其中∇_a是与g_{ab}适配的导数算符。

设测地线$\gamma(t)$处于某坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内，则：

$$\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu T^\sigma=0,\quad \mu=1,2,\cdots,n$$

又设测地线的参数式为$x^\mu(t)$，则$T^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$，有如下测地线方程的坐标分量表达式：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}=0,\quad \mu=1,2,\cdots,n$$

由于Euclidean空间的Cartesian坐标系、Minkowski空间的Lorentzian坐标系的Christoffel符都为零，此时测地线方程成为：$\mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}t^2=0$，其通解必为$t$的线性形式$x^\mu(t)=a^\mu t+b^\mu$，$\mu=1,2,\cdots,n$。即Euclidean / Minkowski空间的测地线在Cartesian / Lorentzian坐标系下的参数式为参数的线性函数。

设$\gamma(t)$是测地线，则其重参数化$\gamma'(t')$的切矢T'^a满足：

$T'^b\nabla_b T'^a=\alpha(t)\,T'^a$，即切矢沿曲线的导数与自身是平行的。其中$\alpha(t)$是曲线上的函数：$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}$

$$\alpha(t)=-\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}$$

证：

$$T^a=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a=\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a=\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^a$$

$$0=T^b\nabla_b T^a=\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^b\nabla_b\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^a\right)=\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^2T'^b\nabla_b T'^a+T'^a\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^b\nabla_b\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)$$

其中

$$T'^a\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}T'^b\nabla_b\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)=T'^a\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)=T'^a\frac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}$$

故

$$T'^b\nabla_b T'^a=-\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2t'}{\mathrm{d}t^2}T'^a$$

这个时候就称参数t'不能使曲线称为测地线。

称能够使得曲线成为测地线的参数叫做该曲线的仿射参数（affine parameter）。

设曲线$\gamma(t)$的切矢T'^a满足$T'^b\nabla_b T'^a=\alpha(t)\,T'^a$，即即切矢沿曲线的导数与自身是平行的，则必定存在参数$t'=t'(t)$，使得$\gamma'(t')$成为测地线。这个过程称为“仿射参数化”。

而满足$T'^b\nabla_b T'^a=\alpha(t)T'^a$的曲线有时也可以称之为“未仿射参数化的测地线”。
设参数t是某一曲线的仿射参数，则该曲线的任一参数t'为其仿射参数的充要条件为$t'=at+b$。

流形M的一点p及该点的一个矢量v^a（$\neq \underline{0}$）唯一决定过该点的一条测地线$\gamma(t)$，满足：
1. $\gamma(0)=p$；
2. $\gamma(t)$在p点的切矢等于v^a。

证：任取一坐标系$\{x^\mu\}$使其坐标域含p，则测地线方程
$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}=0,\quad \mu=1,2,\cdots,n$$
为一组n个关于$x^\mu(t)$的二阶常微分方程，则给定$p\in M$和$v^a\in V_p$，就相对于给定了条件$x^\mu(0)=x^\mu|_p$和$\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t|_0=v^\mu$。因此方程有唯一解。
设零元$\underline{0}\in V_p$，则可以专门定义它决定的“测地线”在流形上的像只是一个点，即点p。

以上关于测地线的讨论进涉及流形上附加导数算符的结构。下面都是考虑附加了度规场g_{ab}（并因此将导数算符唯一选定为与度规相适配的）的流形M。因切矢沿测地线平移，故内积$g_{ab}T^aT^b$为常数，沿测地线不变号。也就表明，在附加Lorentzian度规的流形上的测地线只有类时、类空、类光三种类型（而不会改变性质）。

测地线的线长参数必为仿射参数。
在线长参数下曲线的切矢是归一的。
以仿射参数为参数的测地线线长为常数。

设g_{ab}是M上的Lorentzian度规场，p，$q\in M$，则p、q两点间的光滑类空/类时曲线为测地线当且仅当其局部的线长为极值。
注：
1. 上定理对正定度规也成立，即测地线的线长总是取极值。
2. 将线长l认为是关于两定端点之间所有可能的曲线的泛函，则l取极值的充要条件是变分为零$\delta l=0$。

证：以类空曲线为例。任意$p=C(t_1)$、$q=C(t_2)$两点间的任一曲线$C(t)$的线长l可由坐标参数式$x^\mu(t)$表示为：
$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$
设一条无限临近类空曲线$C'(t)$参数式满足$x'^\mu(t_1)=x^\mu(t_1)$，$x'^\mu(t_2)=x^\mu(t_2)$，且变分$\delta x^\mu(t)=x'^\mu(t)-x^\mu(t)$为无限小。这一变分导致的度规和切矢的改变量分别为：
$$\delta g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}[x^\sigma(t)+\delta x^\sigma(t)]-g_{\mu\nu}[x^\sigma(t)]=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma(t)$$
$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}(x^\mu+\delta x^\mu)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}t}$$
代入线长表达式得到线长的变分：

$$\delta l=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^\nu)+g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^\mu)+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma(t)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right]}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}}\mathrm{d}t$$

由于线长与参数化无关，尽量选择计算最为简便的参数。放选取线长参数，则此时曲线切矢归一：

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}=1$$

在注意到$g_{\mu\nu}$的对称性，并且$\delta x^\mu(t_1)=\delta x^\mu(t_2)=0$，则原式简化为：

$$\begin{aligned}\delta l&=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^\nu)+g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^\mu)+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right]}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}}\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^\nu)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\delta x^\nu\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)\delta x^\nu+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right](\delta x^\sigma)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

上式表明$\delta l=0$对任意的δx^σ成立的充要条件是

$$0=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}=-g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}$$

以$g^{\rho\sigma}$缩并上式得

$$\begin{aligned}0&=-\frac{\mathrm{d}^2x^\rho}{\mathrm{d}t^2}-g^{\rho\sigma}\left(g_{\mu\sigma,\ \nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\ \sigma}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\\
&=-\frac{\mathrm{d}^2x^\rho}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\ \nu}+g_{\nu\sigma,\ \mu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\ \sigma}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\\
&=-\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\rho}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

正是测地线的坐标分量表达式。

任意时空（意味着采用Lorentz度规）中任两个有类时联系（存在类时曲线相连）的点，有：

1. 两点之间的最长线是类时测地线。
2. 两点之间的类时测地线未必是最长的（对Minkowski空间则一定是）。
3. 两点之间的类时测地线长取极大的充要条件是线上不存在共轭点对。（对于Euclid度规来说，测地线长取极小的充要条件是线上不存在共轭点对）
4. 两点之间没有最短类时线。

某点$p\in M$的指数映射（exponential map）$\exp_p$：V_p（或其子集）$\to M$定义为：
$\forall v^a\in V_p$，$(p,\ v^a)$决定唯一的测地线$\gamma(t)$，选p为仿射参数为零的点，则定义v^a在$\exp_p$下的像为测地线上仿射参数$t=1$的点，即$\exp_p(v^a)\coloneqq\gamma(1)$。定义$\exp_p(\underline{0})=p$。
指数映射不一定是一一的，例如同一点p两个矢量v^a、v'^a决定的两条测地线$\gamma(t)$、$\gamma'(t)$有可能相交，那么适当调整矢量v^a、v'^a的大小就可以使测地线恰好相交于$\gamma(1)=\gamma'(1)$，从而$\exp_p(v^a)=\exp_p(v'^a)$。
指数映射不一定是到上的，有可能存在点$q\in M$，而不存在$u^a\in V_p$在定义域中使得$\exp_p(u^a)=$

q。
但是适当限制其定义域与值域，即可得到一一到上的指数映射。进一步，这还是一个微分同胚。即：$\forall p \in M$，总可以在其上的切空间V_p（看作n维流形）内找到含零元的开子集$\hat{V}_p$，在流形中找到含p的开子集N，使$\exp_p$：$\hat{V}_p \to N$为微分同胚。

$p \in M$的邻域N称为p的法邻域（normal neighborhood），若V_p存在开子集$\hat{V}_p$使得$\exp_p$：$\hat{V}_p \to N$为微分同胚。

利用上述微分同指数映射可以在内定义坐标：任选V_p的一个基底$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$，把点$q \in N$在指数映射$\exp_p$下的逆像$v^a = \exp_p^{-1}(q) \in \hat{V}_p$在基底$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$下的分量作为点的坐标。这一定义的坐标系叫做Riemannian法坐标（Riemannian normal coordinate）系，其坐标域为N。

设(N, ψ)是点p的Riemannian法坐标系，则N中过点p的任一测地线$\gamma(t)$在映射ψ下的像$\psi(\gamma(t))$都是$\mathbb{R}^n$中过原点的直线。
证：
认为$\gamma(0) = p$，记$(\partial/\partial t)^a|_p = v_1^a$，$q_1 = \gamma(1) = \exp_p(v_1^a)$。另$q$设为测地线上任一点，$q = \gamma(t_q)$。作重参数化$t' = \alpha^{-1} t$（$\alpha$为常数）仍得测地线$\gamma'(t')$并使得$q = \gamma'(1) = \exp_p(v^a)$，其中$v^a = [(\partial/\partial t')^a\, dt'/dt]|_p = \alpha v_1^a$。于是$q$的Riemannian法坐标为$x^\mu(q) = v^\mu = \alpha v_1^\mu$。又$t_q = \alpha t_q' = \alpha$。因此$x^\mu(q) = t_q v_1^\mu$。也可表为$x^\mu(t_q) = v_1^\mu t_q$。由$q$的任意性，$x^\mu(t) = v_1^\mu t$对任意均成立。注意到$v_1^\mu$为常数，因此以$x^\mu(t) = v_1^\mu t$为参数式的曲线$\psi(\gamma(t))$是$\mathbb{R}^n$中过原点的直线。

(M, g_{ab})的Levi-Civita联络∇_a在Riemannian法坐标系下的Christoffel符号在p点处的值$\left.\Gamma^c{}_{ab}\right|_p = 0$。
证：过p点的任意测地线借助p点的Riemannian法坐标系表达为：
$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} = 0，\mu = 1,2,\cdots,n$$
因为Riemannian法坐标系把$\gamma(t)$映射为$\mathbb{R}^n$中过原点的直线，故二次项为零，化为：
$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} = 0，\mu = 1,2,\cdots,n$$
过p点任一测地线都可表达为上式。以T^a代表测地线在点p处的切矢，则
$$\left.\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\right|_p T^\nu T^\sigma = 0，\mu = 1,2,\cdots,n。$$
它代表了关于n个变量T^ν的二次多项式，导致全部的系数均为零。因此有$\left.\Gamma^c{}_{ab}\right|_p = 0$。

§3.4 Riemannian曲率张量

2018年6月4日 20:47

算符$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$称作导数算符$\nabla_a$的对易子（commutator）。导数算符的无挠性体现为：
$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f = 0$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$。
然而对其他类型的张量场作用的结果却不一定为零，称作导数算符的不可对易性。
显然还有：$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f \omega_c) = f\,(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$，$\forall \omega_c \in \mathcal{F}_M(0,1)$。
另外，若设ω_c，$\omega_c' \in \mathcal{F}_M(0,1)$，$\omega_c\big|_p = \omega_c'\big|_p$，则
$\big[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c\big]\Big|_p = \big[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c'\big]\Big|_p$
这表明，对某一点p的一个对偶矢量μ_c，$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$是一个将其变为$p$点处的$(0,3)$型张量的映射，即先将其延拓为$M$上的对偶矢量场$\omega_c$，再用$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$作用，得到的张量场在$p$点的值$\big[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c\big]\big|_p$就是$\mu_c$的像。上述性质保证了这种映射与其延拓方式无关。
于是由于p点的任意性，算符$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$对应于一个$M$上的$(1,3)$型张量场${R_{abc}}^d$。

导数算符∇_a的Riemannian曲率张量场（Riemannian curvature tensor field）${R_{abc}}^d$由下式定义：
$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c = {R_{abc}}^d \omega_d$，$\forall \omega_c \in \mathcal{F}_M(0,1)$。
Riemannian张量场反映了导数算符的不可对易性，描述(M, ∇_a)的内禀性质。对于广义Riemannian空间(M, g_{ab})，其Riemannian曲率张量为与度规g_{ab}适配的导数算符的Riemannian曲率张量。

Riemannian张量场为零的度规称为平直度规（flat metric）。附加平直度规的空间叫平直空间（flat space）。
与Euclidean、Lorentzian度规适配的导数算符分别为任一Cartesian、Lorentzian坐标系的普通导数算符。而已知普通导数算符是对易的：对任一张量都有$\partial_a \partial_b T^{\cdots}{}_{\cdots} = \partial_b \partial_a T^{\cdots}{}_{\cdots}$，因此Euclidean、Minkowski空间均为平直空间，Euclidean、Lorentzian度规均为平直度规。

另外，对易子作用于其他类型的张量有：
$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,v^c = -{R_{abd}}^c v^d$，$\forall v^c \in \mathcal{F}_M(1,0)$。
$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,T^{e_1 \cdots e_k}{}_{c_1 \cdots c_l} = -\sum_{1 \le i \le k} {R_{abd}}^{e_i} T^{e_1 \cdots d \cdots e_k}{}_{c_1 \cdots c_l} + \sum_{1 \le i \le k} {R_{abc_j}}^d T^{e_1 \cdots e_k}{}_{c_1 \cdots d \cdots c_l}$，$\forall T \in \mathcal{F}_M(k,l)$
差别表现为${R_{abc}}^d$参与缩并运算的$k+l$项，其中与上指标缩并的项前面为负号，与下指标缩并的项前面为正号。

对于(M, g_{ab})，且$\nabla_a g_{bc} = 0$，则可以定义$R_{abcd} = g_{de} {R_{abc}}^e$。${R_{abc}}^d$和$R_{abcd}$满足如下性质：
1. ${R_{abc}}^d = -{R_{bac}}^d$，$R_{abcd} = -R_{bacd}$（关于前两个指标反称）；
2. ${R_{[abc]}}^d = 0$，$R_{[abc]d} = 0$（循环（cyclic）恒等式）；
   证：${R_{[abc]}}^d \omega_d = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]}$，利用$\nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]} = -\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]}$，可知只需证

$R_{[abc]}{}^{d}\omega_d = 2\nabla_{[a}\nabla_b\,\omega_{c]} = 0$。而：
$\nabla_a(\nabla_b\,\omega_c) = \partial_a(\nabla_b\,\omega_c) - \Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\,\omega_c - \Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\,\omega_d = \partial_a(\partial_b\,\omega_c - \Gamma^e{}_{bc}\omega_e) -$
$\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\,\omega_c - \Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\,\omega_d = \partial_a\partial_b\,\omega_c - \omega_e\,\partial_a\,\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^e{}_{bc}\,\partial_a\,\omega_e - \Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\,\omega_c -$
$\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\,\omega_d$，
故$\nabla_{[a}\nabla_b\,\omega_{c]} = \partial_{[a}\partial_b\,\omega_{c]} - \omega_e\,\partial_{[a}\Gamma^e{}_{bc]} - \Gamma^e{}_{[bc}\,\partial_{a]}\,\omega_e - \Gamma^d{}_{[ab}\nabla_{|d|}\,\omega_{c]} - \Gamma^d{}_{[ac}\nabla_{b]}\,\omega_d$。
再利用上述张量下指标的对称性，可得：$\nabla_{[a}\nabla_b\,\omega_{c]} = \partial_{[(a}\partial_{b)}\,\omega_{c]} - \omega_e\,\partial_{[a}\Gamma^e{}_{(bc)]} -$
$\Gamma^e{}_{[(bc)}\,\partial_{a]}\,\omega_e - \Gamma^d{}_{[(ab)}\nabla_{|d|}\,\omega_{c]} - \Gamma^d{}_{[(ac)}\nabla_{b]}\,\omega_d = 0 - 0 - 0 - 0 - 0 = 0$。即证。

3. $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0$，$\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0$（Bianchi恒等式）；
   证：对$\forall\omega_e \in \mathcal{F}_M(0,1)$，
   $\omega_e\nabla_a R_{bcd}{}^{e} = \nabla_a(R_{bcd}{}^{e}\omega_e) - R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\,\omega_e = \nabla_a(\nabla_b\nabla_c\,\omega_d - \nabla_c\nabla_b\,\omega_d) - R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\,\omega_e$，
   故$\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = \nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\,\omega_d - \nabla_{[a}\nabla_c\nabla_{b]}\,\omega_d - R_{[bc|d|}{}^{e}\nabla_{a]}\,\omega_e = \nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\,\omega_d -$
   $\nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\,\omega_d - R_{[bc|d|}{}^{e}\nabla_{a]}\,\omega_e$；
   而$\nabla_a\nabla_b\nabla_c\,\omega_d - \nabla_b\nabla_a\nabla_c\,\omega_d = R_{abc}{}^{e}\nabla_e\,\omega_d + R_{abd}{}^{e}\nabla_c\,\omega_e$，
   故利用循环恒等式，
   $\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\,\omega_d - \nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\,\omega_d = R_{[abc]}{}^{e}\nabla_e\,\omega_d + R_{[ab|d|}{}^{e}\nabla_{c]}\,\omega_e = R_{[ab|d|}{}^{e}\nabla_{c]}\,\omega_e$。
   则对$\forall\omega_e \in \mathcal{F}_M(0,1)$，$\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0$，即证。
4. $R_{abcd} = -R_{abdc}$（关于后两个指标反称）；
   证：由$\nabla_a\,g_{bc} = 0$得，$0 = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,g_{cd} = R_{abc}{}^{e}g_{ed} + R_{abd}{}^{e}g_{ce} = R_{abcd} +$
   R_{abdc}，即证。
5. $R_{abcd} = R_{cdab}$（关于前后两对指标整体对称）；

注：设$\dim M = n$，则$R_{abc}{}^{d}$的分量共有n^4个。然而由于上述性质，导致独立分量个数仅为：
$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

现在考虑(1,1)型张量，它的指标自缩并可以求“迹”，其实就是它所对应的矩阵的迹。我们已知，坐标变换下张量的矩阵是相似的，其不变量就是迹。因此，“迹”可以看作是张量在坐标变换下的一个不变量。推广到高阶张量，我们也希望通过指标自缩并得到低阶的张量（标量），它能反映张量的一些不依赖于坐标选取的重要性质。

对于R_{abcd}，让某两个指标进行自缩并，就等价于Riemannian曲率张量的上下指标两自缩并，即想要让R_{abcd}的某两个指标缩并，就让其中之一成为上指标并与另一个留在下指标的指标缩并。这个过程可以借助度规的逆来完成，即$g^{ab}R_{abcd} = R_a{}^{a}{}_{cd} = R^b{}_{bcd}$
有六种可能情况：$g^{ab}R_{abcd}$、$g^{ac}R_{abcd}$、$g^{ad}R_{abcd}$、$g^{bc}R_{abcd}$、$g^{bd}R_{abcd}$、$g^{cd}R_{abcd}$，利用性质不难证明其中$g^{ab}R_{abcd}$、$g^{cd}R_{abcd}$为零，第二、第五相同，第三、第四相同，且两组之间相反，即只有一个独立。不妨：
定义$R_{ac} \coloneqq g^{bd}R_{abcd} \coloneqq R_{abc}{}^{b}$为Ricci张量（Ricchi tensor）。
注意Ricci张量的定义是不一定需要度规的，可以直接从Riemannian曲率张量里天然定义，即$R_{ac} = R_{abc}{}^{b}$。

Ricci张量满足：$R_{ac} = R_{ca}$（下指标对称）。

Ricci张量可以继续缩并。定义$R \coloneqq g^{ac}R_{ac}$为标量曲率（scalar curvature）。

Ricci张量和曲率标量都是逐次从Riemannian曲率张量缩并得来。可以类比于“迹”的概念，Ricci张量所代表的就是Riemannian张量的“有迹部分”（trace part），它代表的特性是不依赖于坐标的。另外，张量在分离出有迹部分后还有所谓“无迹部分”（trace-free part），它的“迹”为零。Riemannian张量为其有迹与无迹部分之和。

对于维数$n \geq 3$的广义Riemannian空间，可以得到Riemannian曲率张量的有迹部分为：

$$\frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

则定义Riemannian张量的无迹部分为Weyl张量（Weyl tensor）：

$$C_{abcd} \coloneqq R_{abcd} - \frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

Weyl张量具有性质：

1. $C_{abcd} = -C_{bacd}$（关于前两个指标反称）；
2. $C_{abcd} = -C_{abdc}$（关于后两个指标反称）；
3. $C_{abcd} = C_{cdab}$（关于前后两对指标整体对称）；
4. $C_{[abc]d} = 0$（循环（cyclic）恒等式）；
5. C_{abcd}的各种自缩并均为零，如$g^{ab}C_{abcd} = 0$。

注：前四条性质直接从R_{abcd}得来，从定义式看得很清楚。

流形M上给定度规g_{ab}，就通过$\nabla_a g_{bc} = 0$确定了唯一的导数算符∇_a，进而确定了唯一的Riemannian曲率张量场$R_{abc}{}^{d}$。利用坐标基底可以通过g_{ab}求出Riemannian张量场的分量。给定坐标系，则Chistoffel符在坐标基矢下的分量可由度规表出：

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\ \mu} + g_{\mu\rho,\ \nu} - g_{\mu\nu,\ \rho}\right)$$

而

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^{d}\omega_d &= \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c \\ &= 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c \\ &= 2\left(\partial_{[a}\partial_{b]}\omega_c - \omega_e \partial_{[a}\Gamma^{e}{}_{b]c} - \Gamma^{e}{}_{c[b}\partial_{a]}\omega_e - \Gamma^{d}{}_{[ab]}\nabla_d\omega_c - \Gamma^{d}{}_{c[a}\partial_{b]}\omega_d \right.\end{aligned}$$

注意到$\partial_{[a}\partial_{b]}\omega_c = 0$、$\Gamma^{d}{}_{[ab]} = \Gamma^{d}{}_{[(ab)]} = 0$，

$$R_{abc}{}^{d}\omega_d = 2\left(-\omega_e \partial_{[a}\Gamma^{e}{}_{b]c} - \Gamma^{e}{}_{c[b}\partial_{a]}\omega_e - \Gamma^{d}{}_{c[a}\partial_{b]}\omega_d + \Gamma^{d}{}_{c[a}\Gamma^{e}{}_{b]d}\omega_e\right)$$
$$= -2\omega_d \partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{d}{}_{c[a}\Gamma^{e}{}_{b]d}\omega_e$$

即$R_{abc}{}^{d}\omega_d = -2\omega_d \partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{e}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]e}\omega_d$，$\forall \omega_e \in \mathcal{F}_M(0,1)$

故$R_{abc}{}^{d} = -2\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{e}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]e}$

故可以写出其坐标分量：

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\ \nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\ \mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda};$$

进一步可以得到Ricci张量的坐标分量：

$$R_{\mu\sigma} = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\nu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma,\ \nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma,\ \mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda};$$

若度规g_{ab}在某坐标系的分量为常数，则其Christoffel符分量全为零，则至少在此坐标系的坐标域内其Riemannian张量为零$R_{abc}{}^{d}=0$，即度规g_{ab}在此坐标域内为平直度规。
反之，若已知某度规g_{ab}下的Riemannian张量$R_{abc}{}^{d}=0$，则一定存在某坐标系使得g_{ab}的分量全部为常数。
度规场g_{ab}是（局域）平直的，即$R_{abc}{}^{d}=0$，当且仅当存在坐标系使g_{ab}坐标分量全为常数。

对于形如$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}$的“缩并Christoffel符”是很常见的，例如通常定义矢量场v^a的散度为$\nabla_a v^a$，（同理推广到张量场$T^{\cdots a\cdots}{}_{\ldots}$的散度为$\nabla_a T^{\cdots a\cdots}{}_{\ldots}$），其中就会出现$\nabla_a v^a=\partial_a v^a+\Gamma^{a}{}_{ab}v^b$。其分量可被表示为（利用$g^{[\mu\rho]}=0$）：

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\sigma\rho,\ \mu}+g_{\mu\rho,\ \sigma}-g_{\mu\sigma,\ \rho}\right)=\left(\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g_{\mu\rho,\ \sigma}+g^{\mu\rho}g_{\sigma[\rho,\ \mu]}\right)=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g_{\mu\rho,\ \sigma}$$

$$=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}}$$

另一方面，由$g_{\mu\rho}$排成的矩阵可按第μ行展开：$g=g_{\mu\rho}A^{\mu\rho}$（$A^{\mu\rho}$是$g_{\mu\rho}$的代数余子式，只对μ求和）。于是

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\rho}}=A^{\mu\rho}$$

于是由逆矩阵元的表达式$g^{\mu\rho}=A^{\mu\rho}/g$得：

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\rho}}=g g^{\mu\rho}$$

因$g^{\mu\rho}$是坐标x^{σ}的函数，故g也是，且有：

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\sigma}}=\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\rho}}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}}=g g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}}$$

从而给出“缩并Christoffel符”的表达式：

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^{\sigma}}$$

借助$\nabla_a v^a=\partial_a v^a+\Gamma^{a}{}_{ac}v^c$，散度的表达式为：

$$\nabla_a v^a=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\sqrt{|g|}v^{\sigma}\right)$$

§3.5 内禀曲率、外曲率和挠率

2018年6月4日 20:47

将n维流形镶嵌入$n+1$维流形之中，定义它的曲率，这种曲率称为“外曲率”。
而Riemannian曲率是“内禀曲率”，反映的是流形在指定联络后的“内禀弯曲性”，无需镶嵌入高一维的流形去判断就可自然定义。
一般而言，(M, g_{ab})中凡是只由自身度规g_{ab}（而不必嵌入高一维的流形）决定的性质都称为(M, g_{ab})的内禀（intrinsic）性质。

“内禀弯曲性”反映的是如下三个等价性质，具有这些性质的广义Riemannian空间叫做弯曲空间：

1. 导数算符的非对易性，即$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d$，$\forall \omega_c \in \mathcal{F}_M(0,1)$，$R_{abc}{}^d \neq 0$。
2. 矢量平移的曲线依赖性。可以证明，内禀曲率非零的充要条件是存在闭合曲线，使得线上某点的一个矢量沿线平移回到原点时与原矢量不重合。
3. 存在初始平行，而后来不平行的测地线。

本章讨论的都是无挠的情况。事实上若导数算符的定义不加第五条，则称为有挠导数算符，满足：
$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f$，$\forall f \in \mathcal{F}_M$。
其中$T^c{}_{ab}$为挠率（torsion）张量，反映流形的挠率。
导数算符的无挠性等价于$\Gamma^c{}_{ab}$的对称性：$\Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ba}$。而若是抛弃无挠性条件，则相应地也不具有对称性，挠率张量就是联络系数（Christoffel符）的反称部分：$T^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba} = \Gamma^c{}_{[ab]}$。

$\Gamma^c{}_{ab}$体现两个导数算符的差别，其对称部分决定了它们是否具有相同的测地线，其反称部分$T^c{}_{ab}$则体现两个导数算符之间的相对挠率。