附录G Lie群和Lie代数

Lie群和Lie代数理论对现代理论物理研究意义重大，不可或缺。而利用几何语言表述Lie群和Lie代数理论又具有一系列优点。本附录专门利用熟悉的微分几何语言讨论Lie群和Lie代数理论。

Lie群、Lie代数与Lie导数之间存在深刻的关系。利用Lie群和Lie代数理论，回顾并进一步深入讨论了流形上有关等度规群和Killing矢量场之间的关系，从另一个角度看待了流形上的变换操作。

另外，本附录专辟一节讨论在相对论特别常用的固有Lorentzian群和Lorentzian代数，以及依托Fermi移动和Lorentzian群理论的、在原子物理发展早期占有重要地位的Thomas进动问题。

§G.1 群论基础

2018年5月23日 16:17

一个群（group）（乘法群）是一个集合G配以其上的二元运算“群乘法”：$G \times G \to G$，元素g_1、g_2的结果记为$g_1 g_2$，且该运算映射满足条件：

1. （结合律）$(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3)$，$\forall g_1, g_2, g_3 \in G$；
2. ∃唯一恒等元（identity element）$e \in G$，$eg = ge = g$，$\forall g \in G$；
3. $\forall g \in G$，∃唯一逆元（inverse element）g^{-1}，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$；

若群运算满足交换律：$g_1 g_2 = g_2 g_1$，$\forall g_1, g_2 \in G$，则此时的群成为交换群/Abelian群/加法群，此时的运算也称为“群加法”。此时元素g_1、g_2运算的结果表示为$g_1 + g_2$，单位元是零元为0，对$\forall g \in G$，其逆元表示为$-g$。
只含有限个元素的群称为有限群（finite group），否则叫无限群（infinite group）。

群G的子集H称为子群（subgroup），若H使用G的群乘法也能构成群。

设G和G'是群，映射μ：$G \to G'$称为同态（homomorphism），若保群乘法运算：$\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\mu(g_2)$，$\forall g_1, g_2 \in G$。
同态具有性质：

1. 若G和G'的恒等元分别为e和e'，则$\mu(e) = e'$；
2. $\mu(g^{-1}) = \mu(g)^{-1}$；
3. $\mu[G]$是G'的子群；当是Abelian群时，$\mu[G]$是G'的Abelian子群。

一一到上的同态称为同构（isomorphism）（区别于代数空间，称为群同构）。
同构μ：$G \to G$称为G上的自同构（automorphism）。
$\forall g \in G$，可构造一个称为伴随同构（adjoint isomorphism）的自同构，又称内自同构（inner isomorphism），记作I_g，定义为：
$I_g(h) \coloneqq ghg^{-1}$，$\forall h \in G$。

群G和G'的Cartesian积$G \times G'$按照下述乘法构成的群称为G和G'的直积群（direct product group）：
$(g_1, g_1')(g_2, g_2') \coloneqq (g_1 g_2, g_1' g_2')$，$\forall g_1, g_2 \in G$，$g_1', g_2' \in G'$。
例：以自然加法为群乘法，则$\mathbb{R}$是群。$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$按照上述定义群乘法，就构成直积群，且此群乘法正是$\mathbb{R}^2$上的自然加法。

设H是G的子群，$g \in G$，则$gH \coloneqq \{gh | h \in H\}$是$H$含$g$的左陪集（left coset），$Hg \coloneqq \{hg | h \in H\}$是$H$含$g$的右陪集（right coset）。
若子群H的两个左陪集有交，则这两个左陪集必相等。

G的子群H称为正规（normal）或不变（invariant）子群，若$ghg^{-1} \in H$，$\forall g \in G$，$h \in H$。

设G是群，则$A(G) \coloneqq \{\mu：G \to G | \mu$为自同构映射$\}$按照下述定义群乘法构成群，称为$G$的自同构群：
$\forall \mu\nu \in A(G)$，群乘$\mu\nu \in A(G)$满足$(\mu\nu)(g) \coloneqq \mu(\nu(g))$，$\forall g \in G$（映射复合作为群乘法）。

G上全体内自同构/伴随同构映射的集合：
$A_I(G) \coloneqq \left\{ I_g：G \to G \middle| g \in G \right\}$
满足$A_I(G) \subset A(G)$，且$A_I(G)$是$A(G)$的一个正规子群。

设H和K是群，且存在同态$\mu：K \to A(H)$。$\forall k \in K$，记$\mu_k = \mu(k) \in A(H)$，则$G = H \times K$配以下述的群乘法：
$(h,k)(h',k') \coloneqq (h\,\mu_k(h'), kk')$，$\forall h,h' \in H$，$k,k' \in K$
称为H和K的半直积群，记$G = H \otimes_S K$。

§G.2 Lie群

2018年5月23日　　18:59

若G既是n维（实）流形又是群，且满足：

1. 其群乘法映射$G \times G \to G$（注意$G \times G$也是流形）是$\mathbf{C}^\infty$的；
2. 求逆元映射$G \to G$是$\mathbf{C}^\infty$的，

则其是一个n维（实）Lie群。

例1：以自然加法为群乘法，则$\mathbb{R}$是一维Lie群，逐次直积群$\mathbb{R}^n$是n维Lie群。
例2：ϕ：$\mathbb{R} \times M \to M$是$M$上的单参微分同胚群，则$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$是一维Lie群，同构于$\mathbb{R}$。
例3：易证广义黎曼空间(M, g_{ab})上的两个等度规映射的复合也是等度规映射，则(M, g_{ab})上全体等度规映射以复合为群乘法构成群，称为(M, g_{ab})的等度规群。还可验证它是Lie群。Minkowski时空的等度规群是10维Lie群，
Schwarzschild时空的等度规群是4维Lie群。

Lie群G和G'之间的$\mathbf{C}^\infty$同态μ：$G \to G'$称为Lie群同态（Lie-group homomorphism）。
Lie群同态μ：$G \to G'$称为Lie群同构（Lie-group isomorphism），若μ为微分同胚。实质上就是一一到上、正逆双光滑。

Lie群G的子集H称为G的Lie子群（Lie subgroup），若H既是G的子流形，又是G的子群。

$\forall g \in G$，映射L_g：$G \to G$，$h \mapsto gh$，$\forall h \in G$叫做由g生成的左平移（left translation）。易见：

1. L_e为恒等映射；
2. $L_{gh} = L_g \circ L_h$；
3. $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$；
4. 由Lie群定义中关于群乘法映射和求逆元映射的$\mathbf{C}^\infty$性可知左平移是微分同胚。

以下经常涉及G中一点的矢量和G上的矢量场，常用$A, B, \cdots$代表一点的矢量，$\overline{A}, \overline{B}, \cdots$代表矢量场，$\overline{A}_g$代表矢量场$\overline{A}$在一点$g \in G$处的值。

G上的矢量场$\overline{A}$叫做左不变的（left invariant），若
$L_{g_*}\overline{A} = \overline{A}$，$\forall g \in G$。
其中L_{g_*}是L_g诱导出的推前映射。
注：左不变矢量场必为矢量场。
其等价形式为在点处的取值一样：$\left(L_{g_*}\overline{A}\right)_{gh} = \overline{A}_{gh}$，$\forall g, h \in G$
而利用推前映射的性质可以得到：$\left(L_{g_*}\overline{A}\right)_{gh} = L_{g_*}\overline{A}_h$
则得到$\overline{A}_{gh} = L_{g_*}\overline{A}_h$，可以作为左不变矢量场的等价定义。

不难看出，由于推前映射是线性映射，故Lie群G上全体左不变矢量场的集合$\mathcal{L} \coloneqq \left\{\overline{A}\middle|\overline{A}\text{为}G\text{上左不变矢量场}\right\}$是一个线性空间。

G上全体左不变矢量场的集合$\mathcal{L}$与G的恒等元e的切空间V_e作为矢量空间是同构的。
可以如下定义同构映射η：
$\forall g \in G$，左平移L_g使得$e \mapsto g$，则其诱导出的推前映射L_{g_*}可以将$\forall A \in V_e$推前到$L_{g_*} A \in V_g$。
由此可以将$\forall A \in V_e$对应于一个G上的矢量场$\overline{A}$。即如下定义矢量场：
$\overline{A}_g \coloneqq L_{g_*} A$，$\forall g \in G$，$\forall A \in V_e$。
可见$\overline{A}_e = A$。
可以证明作用定义的矢量场是左不变矢量场，且这个映射η确实是一一到上的线性空间同构。

§G.3 Lie代数

2018年6月10日　　2:09

线性空间$\mathcal{V}$上定义某种二元“乘法”运算得到一个代数系统。
一种重要运算：Lie括号（Lie bracket）$[,]$：$\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$是满足如下条件的双线性映射：

1. 反称性：$[A,B]=-[B,A]$；
2. Jacobian恒等式：$\big[A,[B,C]\big]+\big[C,[A,B]\big]+\big[B,[C,A]\big]=0$。

定义了Lie括号的线性空间称为Lie代数（Lie algebra）。
例：$\mathbb{R}^3$上矢量的外积、同阶方阵空间中矩阵的对易子等。

Lie群G上全体左不变矢量场的集合$\mathcal{L}$是Lie代数：
以矢量场对易子为Lie括号，$\forall\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{L}$有：
$L_{g_*}\left[\overline{A},\overline{B}\right]=\left[L_{g_*}\overline{A},L_{g_*}\overline{B}\right]=\left[\overline{A},\overline{B}\right]$，因此$\left[\overline{A},\overline{B}\right]\in\mathcal{L}$。
对易子的双线性性与反称性是显然的，也可证明其满足Jacobian恒等式。

Lie代数$\mathcal{V}$和$\mathcal{W}$之间的线性映射β：$\mathcal{V}\to\mathcal{W}$称为Lie代数同态（Lie-algebra homomorphism），若它保Lie括号：$\beta\left(\left[\overline{A},\overline{B}\right]\right)=\left[\beta\left(\overline{A}\right),\beta\left(\overline{B}\right)\right]$，$\forall\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{V}$。
Lie代数同态β：$\mathcal{V}\to\mathcal{W}$称为Lie代数同构（Lie-algebra isomorphism），若β为一一到上映射。
两个同构了Lie代数视作相同。

对Lie群G的恒等元e的切空间V_e按如下方法定义Lie括号：
$[A,B]\coloneqq\left[\overline{A},\overline{B}\right]_e$，$\forall A,B\in V_e$，其中$\overline{A}$、$\overline{B}$分别为$A$、$B$对应的左不变矢量场，$\left[\overline{A},\overline{B}\right]$是其对易子，也是一个左不变矢量场，则$V_e$称为成为一个Lie代数，称为Lie群$G$的Lie代数，记作$\mathcal{G}$。
易证$\mathcal{G}$与$\mathcal{L}$Lie代数同构，η可充当同构映射。

以上表明，给定Lie群，即可得到唯一确定的Lie代数。
反之，给定Lie代数，也必定存在Lie群以其为Lie代数。虽然不能保证唯一性（即多个Lie群不同构），但是这些Lie群之间的差别仅仅在于整体拓扑。换句话说，这些Lie群的连通性可能不同（整体拓扑反映在连通性上），但若要找的Lie群要求是单连通的（其流形为单连通流形的Lie群，即流形上的任一闭合曲线总可以通过连续变形缩到一个点），则这个单连通Lie群必定是唯一的。
准确的说，给定一个Lie代数，总可以找到唯一的单连通Lie群使得其Lie代数为所给的Lie代数。

设$\mathcal{G}$和$\mathcal{G}'$分别是Lie群G和G'的Lie代数，映射ρ：$G\to G'$是Lie群同态映射，则ρ在点$e\in G$诱导的推前映射ρ_*：$\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$是Lie代数同态映射。

Lie代数$\mathcal{G}$的子空间$\mathcal{H}$称为的Lie子代数（Lie subalgebra），若：
$[A, B] \in \mathcal{H}$，$\forall A, B \in \mathcal{H}$。
其中$[,]$是$\mathcal{G}$的Lie括号，现在也成为$\mathcal{H}$的Lie括号。

设H是G的Lie子群，则H的Lie代数$\mathcal{H}$是G的Lie代数$\mathcal{G}$的Lie子代数。

Lie代数$\mathcal{G}$的Lie子代数$\mathcal{H}$称为$\mathcal{G}$的理想（ideal），若：
$[A, \mu] \in \mathcal{H}$，$\forall A \in \mathcal{G}$，$\mu \in \mathcal{H}$。
注：理想之于Lie代数的意义就像正规子群之于群论。

§G.4 单参子群和指数映射

2018年6月10日　　2:09

$\mathbf{C}^{\infty}$曲线γ：$\mathbb{R}\to G$生成G的一个子群$\{\gamma(t)\,|t\in\mathbb{R}\}$，叫做Lie群的单参子群（one-parameter subgroup），也称映射γ：$\mathbb{R}\to G$是G的一个单参子群，若：$\gamma(s+t)=\gamma(s)\,\gamma(t)$，$\forall s,t\in\mathbb{R}$。
其中$\gamma(s)\,\gamma(t)$是群元$\gamma(s)\,,\gamma(t)\in G$的群乘法。
映射为单参子群，即其像集$\{\gamma(t)\,|t\in\mathbb{R}\}$为单参子群：必含有$G$的恒等元$e$，且参数表示为$e=\gamma(0)$；任一群元$\gamma(t)$的逆元为$\gamma(-t)$；它的群乘法显然具有交换律，因而是一Abelian子群。
以自然加法为$\mathbb{R}$的群乘法，加之$\mathbf{C}^{\infty}$的条件，则单参子群（作为映射）是$\mathbb{R}$到G的Lie群同态。

以后采用如下记号来代表曲线$\gamma(t)$在参数为$t=s$的点处的切矢：
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s}\gamma(t)$$

任一左不变矢量场都是完备的矢量场，即它的每一个不可延积分曲线的参数值都能取遍全$\mathbb{R}$。

若γ：$\mathbb{R}\to G$是左不变矢量场$\bar{A}$的、满足$e=\gamma(0)$的一条积分曲线，则γ是G的一个单参子群。
反之若单参子群γ：$\mathbb{R}\to G$在恒等元e的切矢为A，则$\gamma(t)$是A对应左不变矢量场$\bar{A}$的积分曲线。
可见，Lie群G上的左不变矢量场与单参子群存在一一对应的关系。又注意到$\mathcal{L}$与V_e的同构关系，可知Lie群的Lie代数$\mathcal{G}$（$=V_e$）的每一个元素A生成G的一个单参子群$\gamma(t)$。因此常把$\mathcal{G}$的每一元素（或者一个基底的元素）称为（无限小）生成元。
注：与$\mathcal{G}$的零元对应的单参子群就是只含有e的子群，即满足$\gamma[\mathbb{R}]=e$的独点线/独点子群。

Lie群G上的指数映射（exponential map）$\exp$：$V_e\to G$定义为：
$\exp(A)\coloneqq\gamma(1)$，$\forall A\in V_e$，其中$\gamma$：$\mathbb{R}\to G$是由$A$生成的单参子群。
有结论：$\exp(sA)=\gamma(s)$，$\forall A\in V_e$，$s\in\mathbb{R}$。
注：设$\gamma(t)$是由A生成的单参子群，则$\gamma(t)=\exp(tA)$，故常用$\exp(tA)$代表A生成的单参子群。
设ϕ：$\mathbb{R}\times M\to M$是由$A\in V_e$对应的左不变矢量场$\bar{A}$生成的单参微分同胚群，则
$\phi_t(g)=g\exp(tA)$，$\forall g\in G$，$t\in\mathbb{R}$。

由Lie群的群乘映射与求逆映射的光滑性，注意到微分方程的解对其初值的光滑性依赖，可以知道$\exp$：$V_e\to G$为光滑映射。再用反函数定理可以证明：
V_e中存在含零元的开子集$\hat{V}_e$，G中存在含恒等元e点的开子集N，使$\exp$：$\hat{V}_e\to N$为微分同胚。
类比于流形上的指数映射与法坐标系，可以给Lie群G定义局部坐标系，称为群G的正则坐标（canonical coordinates）。

设$\mathcal{G}$、$\hat{\mathcal{G}}$是Lie群G、$\hat{G}$的Lie代数，ρ_*：$\mathcal{G}\to\hat{\mathcal{G}}$是同态$\rho$：$G\to\hat{G}$在点$e\in G$诱导的推前映射，则：
$\rho(\exp A)=\exp(\rho_* A)$，$\forall A\in\mathcal{G}$。

§G.5 常用Lie群及其Lie代数

2018年7月14日　18:30

G.5.1 $\mathrm{GL}(m)$群（一般线性群，general linear group）

设V是有限m维实矢量空间，$\mathrm{GL}(m)$代表由V到V的全体可逆线性映射的集合，以映射的复合为群乘法，则构成群，称为m阶实一般线性群。

$\mathrm{GL}(m)$的任一群元都是V上的$(1,1)$型张量：$\forall T\in\mathrm{GL}(m)$，$T\in\mathcal{T}_V(1,1)$。

取定V的任一基底及其对偶基底之后，T就有m^2个分量，自然对应于一个$m\times m$实矩阵，也记作T。映射的可逆性保证其矩阵是可逆矩阵，即$\det T\neq 0$。不难看出全体$m\times m$可逆实矩阵在矩阵乘法下构成群（以单位举着为恒等元），且与$\mathrm{GL}(m)$同构。于是：

$\mathrm{GL}(m)=\{m\times m\text{实矩阵}T\mid \det T\neq 0\}$（群同构）。

因此也常把$\mathrm{GL}(m)$看作是实矩阵群。但注意，上述同构关系依赖于基底的选取。

另一方面，集合$\mathbb{R}^{m^2}$的每一点都有m^2个自然坐标可以排成矩阵，因而$\mathrm{GL}(m)$是$\mathbb{R}^{m^2}$的子集。对矩阵求行列式可以看作连续映射$\det:\ \mathbb{R}^{m^2}\to\mathbb{R}$，满足：

$\mathrm{GL}(m)=\det^{-1}(-\infty,0)\cup\det^{-1}(0,+\infty)\subset\mathbb{R}^{m^2}$。这说明：

1. $\mathrm{GL}(m)$是$\mathbb{R}^{m^2}$的开子集；
2. $\det^{-1}(-\infty,0)$、$\det^{-1}(0,+\infty)$是$\mathbb{R}^{m^2}$的开子集。

而又因为互为补集而都是$\mathrm{GL}(m)$的闭子集，因此$\mathrm{GL}(m)$是非连通流形，且只有两个连通分支（connected component）。

可见$\mathrm{GL}(m)$是一个m^2维实Lie群。

记$\mathrm{SL}(m)=\{T\in\mathrm{GL}(m)\mid\det T=1\}$为特殊线性群（spacial linear group）。字母S表示“special”，通常加于任意Lie群符号中，表示强调该Lie子群元素满足$\det T=1$。

记$\mathrm{GL}(m)$Lie代数为$\mathcal{GL}(m)$，即同构于其恒等元（单位映射I）的切空间，$\mathcal{M}=\{m\times m\text{实矩阵}T\}$，则$\mathcal{GL}(m)=\mathcal{M}=\{m\times m\text{实矩阵}T\}$（矢量空间同构）。

证：取定V的任一基底及其对偶基底之后，$\forall T\in\mathrm{GL}(m)$就有$m^2$个分量，可以据此在$\mathrm{GL}(m)$上建立起一个全局坐标系。则$\forall A\in\mathcal{GL}(m)$是$\mathrm{GL}(m)$在$I$点的切矢，在上述坐标系自然有$m^2$个坐标，从而可以看成一个$m\times m$实矩阵$A$。反之，任意$m\times m$实矩阵，都可以对应于一个$m^2$元坐标，因此在$I$点的切空间上对应于一个矢量。即证。

上述定理也可以从另一个角度理解。对$\forall$矩阵$A\in\mathcal{M}$，$t\in\mathbb{R}$，矩阵$\psi(t)=I+tA$，则矩阵I有逆和映射det的连续性保证在t足够小时$\psi(t)$有逆。因此$\psi(t)\in\mathrm{GL}(m)$。当t活动且足够小时，$\psi(t)$是$\mathrm{GL}(m)$中过点I的一条曲线。它在$\psi(0)=I$点的切矢为：

（切矢）$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\psi(t)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I+tA)=A$（矩阵）

所以任一$m\times m$实矩阵A对应于$\mathcal{GL}(m)$的一个切矢。再由$\dim\mathcal{M}=\dim\mathrm{GL}(m)=\dim\mathcal{GL}(m)=m^2$，可知$\mathcal{GL}(m)$和$\mathcal{M}$之间的一一对应关系。

进一步，$\mathcal{GL}(m) = V_I = V_e$中任意两个元素$A, B \in V_e$的Lie括号为$[A, B] = \left[\overline{A}, \overline{B}\right]_e$，而矩阵群的Lie括号为其对易子。有如下定理：

设G是$\mathrm{GL}(m)$的任一Lie子群，则其Lie代数元$A, B \in \mathcal{G} \subset \mathcal{GL}(m)$的Lie括号$[A, B]$对应于矩阵$A$、$B$的对易子，即

$[A, B] = AB - BA$。

则$\mathcal{GL}(m) = \mathcal{M}$（Lie代数同构，而不仅是矢量空间同构）作为结论是显然的。

对任一$m \times m$实矩阵A引入符号：

$$\mathrm{Exp}(A) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 \cdots$$

可以证明：

1. 右边收敛，所以左边有意义，是一个$m \times m$实矩阵；
2. 若矩阵A、B对易，即$AB = BA$，则$\mathrm{Exp}(A + B) = \mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(B)$

对$\mathcal{GL}(m)$的元素，$\mathrm{Exp}(A) = \exp(A)$，$\forall A \in \mathcal{GL}(m)$。

证：根据定义，$\forall s, t \in \mathbb{R}$，$\mathrm{Exp}[(s + t)A] = \mathrm{Exp}(sA)\,\mathrm{Exp}(tA)$，$\forall A \in \mathcal{GL}(m)$。取$s = 1$，$t = -1$，则$\mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(-A) = \mathrm{Exp}(0) = I$，说明$\mathrm{Exp}(A)$有逆，故$\mathrm{Exp}(A) \in \mathrm{GL}(m)$。由$\forall A \in \mathcal{GL}(m)$的任意性：

$\mathrm{Exp}(tA) \in \mathrm{GL}(m)$，$\forall A \in \mathcal{GL}(m)$，$t \in \mathbb{R}$。

令$\gamma(t) = \mathrm{Exp}(tA)$，则$\gamma(s + t) = \gamma(s)\,\gamma(t)$，且根据定义，

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}(tA) = A$$

可见$\gamma(t) = \mathrm{Exp}(tA)$是由$A$唯一决定的单参子群$\exp(A)$，从而$\mathrm{Exp}(A) = \exp(A)$。

注：该定理对之后的$\mathrm{GL}(m)$的Lie子群的Lie代数元素也成立。

对任意矩阵M、N，$N^{-1}\,\mathrm{Exp}(M)\,N = \mathrm{Exp}\left(N^{-1} M N\right)$。

G.5.2 O(m)群（正交群，orthogonal group）

在$\mathrm{GL}(m)$定义的基础上加上某些限制条件，可以得到它的某些子群，如保度规条件。

设(V, g_{ab})是带度规的矢量空间，线性映射Z称为是保度规的，若：

$g_{ab}\left(Z^a{}_c v^c\right)\left(Z^b{}_d u^d\right) = g_{cd} v^c u^d$，$\forall v^c, u^d \in V$。

即$Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab} = g_{cd}$。

取$u = v$，则$g_{ab}\left(Z^a{}_c v^c\right)\left(Z^b{}_d v^d\right) = g_{cd} v^c v^d$，$\forall v^c \in V$。可见保度规的$Z$对矢量的作用必保长度。反之，利用$g_{ab}$的对称性可以证明上述条件也是必要条件，从而保度规性等价于保长性。可以证明，保度规映射一定可逆。

$\mathrm{O}(m) \coloneqq \{Z^a{}_c \in \mathcal{T}_V(1,1) \,|\, Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab} = g_{cd}\}$，
以映射的复合为群乘法，则构成群，称为m阶实正交群，是$\mathrm{GL}(m)$的一个Lie子群。

选取带正定度规的(V, δ_{ab})的一组正交归一基底，将定义改写为分量形式：
$\delta_{\sigma\rho} = Z^\mu{}_\sigma Z^\nu{}_\rho \delta_{\mu\nu} = (Z^\mathrm{T})_\sigma{}^\mu \delta_{\mu\nu} Z^\nu{}_\rho$，其中$Z^\mathrm{T}$是矩阵$Z$的转置。上式的矩阵形式：
$I = Z^\mathrm{T} I Z = Z^\mathrm{T} Z$，即$Z^\mathrm{T} = Z^{-1}$，表明$Z$是正交矩阵。于是：
$\mathrm{O}(m) = \{m \times m$正交矩阵$\}$（群同构，正交矩阵必可逆）。
又由于对任一矩阵T，$\det T = \det T^\mathrm{T}$，故$1 = \det Z \det Z^\mathrm{T} = (\det Z)^2$，即$\det Z = \pm 1$。
这表明群元的行列式是分立的，$\mathrm{O}(m)$的流形是非连通的。

下面逐次按照保长性分析$\mathrm{O}(m)$群的群元结构。
带正定度规的一维矢量空间特例：$(\mathbb{R}, \delta_{ab})$，可用以讨论$\mathrm{O}(1)$群。
只有两个群元：恒等元e：$v^a \mapsto v^a$和反射（reflection）r：$v^a \mapsto -v^a$，即$\mathrm{O}(1) = \{e, r\}$。

带正定度规的二维矢量空间特例：$(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$，可用以讨论$\mathrm{O}(2)$群。
显然，转动（rotation）是其群元：

$$Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

这是行列式为1的情况。
$Z(0) = \mathrm{diag}\{1,1\}$就是恒等元$e = I$。
$Z(\pi) = \mathrm{diag}\{-1,-1\}$相当于关于原点对称的反演（inversion），记作i_{xy}。
另外，如下矩阵也满足条件：

$$Z'(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

这是行列式为-1的情况。它表示先对x轴对称再旋转α角。
$Z'(0) = \mathrm{diag}\{1,-1\}$是关于$x$轴对称的反射，记作$r_y$（只改变$y$分量）；
$Z'(\pi) = \mathrm{diag}\{-1,1\}$是关于$y$轴对称的反射，记作$r_x$（只改变$x$分量）。
对于任一2×2矩阵的四个矩阵元，由$I = Z^\mathrm{T} Z$可以获得三个独立方程，即仅有一个独立变量。事实上它就体现为作为唯一变量的转角α，因此$\mathrm{O}(2)$是一维Lie群。还可证明，$\mathrm{O}(2)$的所有群元都是上述两类之一。这两类分别对应于流形$\mathrm{O}(2)$的两个连通分支。
由三角函数的周期性，这两个连通分支的流形结构都微分同胚于一维的圆周S^1。
只包含群元$Z(\alpha)$的连通分支包含了恒等元$Z(0) = I$，是$\mathrm{O}(2)$的一个Lie子群，称为二维空间的转动群，记作$\mathrm{SO}(2)$。

推广至m维，$\mathrm{O}(m)$的含恒等元e的连通分支是其Lie子群，$\mathrm{SO}(m) = \{Z \in \mathrm{O}(m) \,|\, \det Z = 1\}$，称为特殊正交群（special orthogonal group）。

$\mathrm{SO}(3)$称为三维空间的转动群，它的每一群元表示$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$中绕着某一过矢量空间原点的轴旋转某一角度的映射（且除了恒等元外每一群元的转轴是唯一的）。可以用矢量空间中起自原点的一个箭头来表示一个群元：箭头所在直线代表转轴。箭头长度（规定为0到π）代表旋转角，箭头的方向代表旋转方向。应当注意，任一对反向、等长为π的箭头代表的结果实际上是

同一群元，因此应当将之认同。从而Lie群$\mathrm{SO}(3)$的流形是一个三维实心球体，且球面上位于同一直径两端的点要相互认同（对径认同）。它微分同胚于某种流形（也就认为是$\mathrm{SO}(3)$的流形）：实射影空间$\mathbb{RP}^3$。

下面讨论Lie群$\mathrm{O}(m)$和$\mathrm{SO}(m)$的Lie代数$\mathcal{O}(m)$、$\mathcal{SO}(m)$。
有：$\mathcal{SO}(m)=\mathcal{O}(m)=\{m\times m$实矩阵$A|A^{\mathrm{T}}=-A$（即$A$斜对称）$\}$。
证：设$A\in\mathcal{O}(m)$，则A决定$\mathrm{O}(m)$中过恒等元I的一个单参子群$\exp(tA)$。注意到$\det I=1$，而$\mathrm{O}(m)$上任一点的行列式只能是±1，则由单参子群的连续性可知$\exp(tA)$上任一点行列式都为1，即$\exp(tA)\subset\mathrm{SO}(m)$，从而$A\in\mathcal{SO}(m)$。
$\forall A\in\mathcal{O}(m)$，设$Z(t)$是$\mathrm{O}(m)$中任一条曲线（不一定是单参子群），且满足$Z(0)=I$，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}Z(t)=A$，则$Z(t)$（对每一$t$值）都是满足$I=Z^{\mathrm{T}}(t)Z(t)$的矩阵。对该式在$t=0$处求导得$0=A+A^{\mathrm{T}}$，即$A^{\mathrm{T}}=-A$。
另一方面，$\forall m\times m$斜对称实矩阵A，$[\mathrm{Exp}(A)]^{\mathrm{T}}\mathrm{Exp}(A)=\mathrm{Exp}(A^{\mathrm{T}})\mathrm{Exp}(A)=\mathrm{Exp}(-A)\mathrm{Exp}(A)=I$，即$\mathrm{Exp}(A)\in\mathrm{O}(m)$。从而$\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{O}(m)$，$\forall t\in\mathbb{R}$。对曲线$\mathrm{Exp}(tA)$在$t=0$（恒等元）处求导得切矢为$A$，则$A\in\mathcal{O}(m)$。

据此可以利用斜对称矩阵的独立变量数方便得到：
$$\dim\mathrm{O}(m)=\dim\mathcal{O}(m)=\frac{1}{2}m(m-1)$$

G.5.3 $\mathrm{O}(1,3)/L$群（Lorentzian群）
类似于$\mathrm{O}(m)$的定义，现在对于这样的度规g_{ab}：在正交归一基底下的矩阵对角元有m'个-1，m''个$+1$，则
$\mathrm{O}(m',m''):=\{\Lambda^a{}_c\in\mathcal{T}_V(1,1)\,|\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d g_{ab}=g_{cd}\}$，
以映射的复合为群乘法，则构成$\mathrm{GL}(m'+m'')$的一个Lie子群。$\mathrm{O}(m)$可看作它的一个特例。

选取带Minkowski度规的(V,η_{ab})的一组正交归一基底，将定义改写为分量形式：
$\eta_{\sigma\rho}=\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho\eta_{\mu\nu}=(\Lambda^{\mathrm{T}})_\sigma{}^\mu\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho$，其中$\Lambda^{\mathrm{T}}$是矩阵$Z$的转置。上式的矩阵形式：
$\eta=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda$，其中$\eta$为Minkowski度规在正交归一基底下的矩阵。

带Minkowski度规的二维矢量空间特例：$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$，可用以讨论$\mathrm{O}(1,1)$群。
$\eta=\mathrm{diag}\{-1,1\}$，这表明$\det\Lambda=\pm1$，$\mathrm{O}(1,1)$也是非连通的。
事实上$\mathrm{O}(1,1)$的非连通性还来自于$\Lambda^0{}_0$受到的一个限制：$\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d g_{ab}=g_{cd}$两边作用于正交归一基底的第零基矢$(e_0)^c(e_0)^d$得：$-(\Lambda^0{}_0)^2+(\Lambda^1{}_0)^2=-1$，所以$(\Lambda^0{}_0)^2\geq1$。
上述条件使得$\mathrm{O}(1,1)$有如下四个连通分支：

1. 子集$\mathrm{O}_+^\uparrow(1,1)$，其群元$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{bmatrix}$满足$\det\Lambda=+1$，$\Lambda^0{}_0\geq1$，即伪转动（boost，或Lorentzian变换）；

特例$\Lambda(0)=\mathrm{diag}\{1,1\}$是恒等元$I$：$v^a\mapsto v^a$；

2. 子集$\mathrm{O}_-^{\uparrow}(1,1)$，其群元$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ \sinh\lambda & -\cosh\lambda\end{bmatrix}$满足$\det\Lambda=-1$，$\Lambda^0{}_0\geq 1$；
   特例$\Lambda(0)=\mathrm{diag}\{1,-1\}$，是关于$t$轴对称的，称为空间反射$r_x$（只改变$x$分量）；
3. 子集$\mathrm{O}_-^{\downarrow}(1,1)$，其群元$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\cosh\lambda & \sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{bmatrix}$满足$\det\Lambda=-1$，$\Lambda^0{}_0\leq -1$；
   特例$\Lambda(0)=\mathrm{diag}\{-1,1\}$，是关于$x$轴对称的，称为时间反射$r_t$（只改变$t$分量）；
4. 子集$\mathrm{O}_+^{\downarrow}(1,1)$，其群元$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\cosh\lambda & \sinh\lambda\\ \sinh\lambda & -\cosh\lambda\end{bmatrix}$满足$\det\Lambda=+1$，$\Lambda^0{}_0\leq -1$；
   特例$\Lambda(0)=\mathrm{diag}\{-1,-1\}$，是关于原点对称的，称为时空反演$i_{tx}$；

由单参性且其不具有周期性，四个连通分支的流形结构都微分同胚于$\mathbb{R}$，整个$\mathrm{O}(1,1)$是一维非连通流形。只有含有恒等元的$\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$是其Lie子群。不同于$\mathrm{O}(2)$的连通分支（由于是闭合的）是紧致的，称为紧致Lie群，$\mathrm{O}(1,1)$的四个连通分支都是非紧致的，$\mathrm{O}(1,1)$称为非紧致Lie群。

下面考虑Lorentzian群$\mathrm{O}(1,3)$，简记为L，其背景空间是四维Minkowski空间。
其群元是4×4实矩阵，同样满足$\eta=\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda$，其中$\eta=\mathrm{diag}\{-1,1,1,1\}$。
L是有如下四个连通分支的6维非连通流形：
$L_+^{\uparrow}=\left\{\Lambda\in L\middle|\det\Lambda=+1,\ \Lambda^0{}_0\geq 1\right\}$，其特征元为恒等元$I$；
$L_-^{\uparrow}=\left\{\Lambda\in L\middle|\det\Lambda=-1,\ \Lambda^0{}_0\geq 1\right\}$，其特征元为空间反射$r_x$；
$L_-^{\downarrow}=\left\{\Lambda\in L\middle|\det\Lambda=-1,\ \Lambda^0{}_0\leq -1\right\}$，其特征元为时间反射$r_t$；
$L_+^{\downarrow}=\left\{\Lambda\in L\middle|\det\Lambda=+1,\ \Lambda^0{}_0\leq -1\right\}$，其特征元为时空反演$i_{tx}$；
只有含有恒等元的$L_+^{\uparrow}$是L的Lie子群，称为固有（proper）-正时（保时向，orthochronous）Lorentzian群。是6维连通流形，流形结构为$\mathbb{R}^3\times\mathrm{SO}(3)$或$\mathbb{R}^3\times\mathbb{RP}^3$。其余连通分支都是$L_+^{\uparrow}$的含相应特征元的左陪集：
$L_-^{\uparrow}=r_xL_+^{\uparrow}$；$L_-^{\downarrow}=r_tL_+^{\uparrow}$；$L_+^{\downarrow}=i_{tx}L_+^{\uparrow}$。

$\mathrm{O}(1,3)$与$L_+^{\uparrow}$有相同的Lie代数$\mathcal{O}(1,3)$，且$\mathcal{O}(1,3)=\left\{4\times 4\text{实矩阵}A\middle|A^{\mathrm{T}}=-\eta A\eta\right\}$。

$\dim\mathrm{O}(m',m'')=\dim\mathrm{O}(m'+m'')$，这一结论只依赖于$\eta$的对称性和非退化性。

G.5.4 U(m)群（酉群，或幺正群，unitary group）

定义在复矢量空间上的一般线性群记作$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$，是$2m^2$维实Lie群。相应地，原来定义在实矢量空间上的一般线性群也记作$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$。与$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$不同，$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$是连通流形。类似于对$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$要求保度规条件得到它的Lie子群，对$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$要求保（复）内积也得到它的Lie子群，即酉群$\mathrm{U}(m)$。

（复）内积是对一元线性，另一元共轭线性的复函数$(\cdot,\cdot)$：$V\times V\to\mathbb{C}$。定义了内积的复矢量空间称为内积空间。此处只讨论有限维内积空间。线性映射A：$V\to V$称为V上的线性算符/算子（linear operator），它在上自然诱导出唯一的A的伴随算符（adjoint operator）$A^{\dagger}$，等价定义为：

$(A^\dagger f, g) = (f, A\, g)$，$\forall f, g \in V$。

内积空间V上算符U称为酉算符（幺正算符，unitary operator），若其作用是保内积的：
$(U\,f, U\,g) = (f, g)$，$\forall f, g \in V$。
算符为酉算符的充要条件是$U^\dagger U = \delta$，其中δ是恒等算符。
证：若$U^\dagger U = \delta$，则$(U\,f, U\,g) = (U^\dagger U\,f, g) = (f, g)$，$\forall f, g \in V$，故$U$为酉算符。
反之，若U为酉算符，则对$\forall f, g \in V$，$0 = (U\,f, U\,g) - (f, g) = (U^\dagger U\,f, g) - (f, g) = ((U^\dagger U - \delta)\,f, g)$。取$g = (U^\dagger U - \delta)\,f$，则$0 = (g, g)$，故$g = 0$即$(U^\dagger U - \delta)\,f = 0$，$\forall f \in V$，即证。

选定V上的一个正交归一基底$\{e_i\}$（其定义为$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$），则V上任一线性算符$\hat{A}$可以诱导出一矩阵$\tilde{A}$，借助内积定义其矩阵元为$\tilde{A}_{ij} \coloneqq (e_i, \hat{A}\, e_j)$，称为算符$\hat{A}$的矩阵$\tilde{A}$。两者可都记为$A$。
注：

1. 若$\hat{A} = O$零算符等价于$\tilde{A} = O$零矩阵。
2. 算符乘积的矩阵等于算符矩阵的乘积：$\widetilde{(\hat{A}\hat{B})} = \tilde{A}\tilde{B}$。

$A_{ij} = (e_i, A\, e_j) = (A^\dagger\, e_i, e_j) = \overline{(e_j, A^\dagger\, e_i)} = \overline{A^\dagger{}_{ji}}$，故在同一正交归一基下矩阵$A^\dagger = \overline{A^{\mathrm{T}}}$。

算符为U酉算符的充要条件是其在正交归一基底下矩阵满足$U^{-1} = U^\dagger$，即$U^{-1} = \overline{U^{\mathrm{T}}}$。
满足$U^{-1} = U^\dagger$的复矩阵U称为酉矩阵（或幺正矩阵，unitary matrix）。
注：若V退化为实空间，则上述定义的就是正交矩阵。酉矩阵可看作正交矩阵的复推广，伴随矩阵可看作转置矩阵的复推广，上述定义的矩阵形式也就是$U^\dagger U = I$。

设U为酉矩阵，则$\det U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，其中$\phi \in \mathbb{R}$，即$|\det U| = 1$。
证：对$U^\dagger U = I$取行列式，$1 = \det \overline{U^{\mathrm{T}}} \det U = \overline{\det U} \det U$，即证。

$\mathrm{U}(m) \coloneqq \{m$维内积空间$V$上的酉算符$\} = \{m \times m$酉矩阵$\}$
以映射复合或矩阵乘法为群乘法，构成$\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$的一个Lie子群。
例：设一维复矢量空间$\mathbb{C}$作为V，定义内积$(f, g) \coloneqq \bar{f} g$，$\forall f, g \in \mathbb{C}$。复数$U \in \mathbb{C}$可看作$\mathbb{C}$上的线性算符，其作用就是复数乘积$Uf$。易证$U$为酉算符的充要条件是$|U| = 1$，因此$\mathbb{C}$上全体酉算符的集合是复平面上的单位圆，可见$\mathrm{U}(1)$的流形是一个紧致的连通流形（圆周）。

复方阵A称为Hermitian的，若$A^\dagger = A$；称为反Hermitian的，若$A^\dagger = -A$。
注：

1. 对实方阵，对称就是Hermitian，斜对称就是反Hermitian；
2. A为Hermitian$\Leftrightarrow$ $\mathrm{i}A$为反Hermitian。

类似于$\mathrm{GL}(m)$的Lie代数$\mathcal{GL}(m)$同构于$m \times m$实矩阵，$\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$的Lie代数$\mathcal{GL}(m, \mathbb{C})$同构于$m \times m$复矩阵，即：

$\mathcal{GL}(m,\mathbb{C}) = \{m\times m$复矩阵$\}$（Lie代数同构）；
酉群$\mathrm{U}(m)$的Lie代数：$\mathcal{U}(m) = \{A\in\mathcal{GL}(m,\mathbb{C})\,|A^\dagger = -A\} = \{m\times m$反Hermitian复矩阵$\}$。

$\dim\mathrm{U}(m) = \dim\mathcal{U}(m) = m^2$。
证：$A\in\mathcal{U}(m)$同构于$m\times m$复矩阵。有$2m^2$个变量。但A的反Hermitian性$A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$产生了$m^2$个独立方程：

1. 反Hermitian性要求对角元全为虚数，即m个实方程：实部$=0$；
2. 每一对非对角元的要求给出了2个实方程，而共有$(m^2-m)/2$对非对角元；

因此只有m^2个变量是独立的。
例：$\mathrm{U}(1) = \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|\theta\in\mathbb{R}\}$，其中$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{Exp}(-\mathrm{i}\theta)$可看作以$\theta$为参数的单参子群（等于$\mathrm{U}(1)$自身），则相应的Lie代数元为
$$A = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = -\mathrm{i}\in\mathcal{U}(1)$$
以A为基矢生成的一维实矢量空间就是$\mathcal{U}(1)$，故$\mathcal{U}(1) = \{-\mathrm{i}\alpha|\alpha\in\mathbb{R}\}$。

酉群$\mathrm{U}(m)$是连通流形（这是由$\det U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$与$\det Z = \pm1$的不同造成的）。
证：任意酉矩阵都可以通过一个酉变换化为一个单位对角矩阵，即：
$\forall U\in\mathrm{U}(m)$，$\exists W\in\mathrm{U}(m)$，s.t.$WUW^{-1} = D$，其中$D = \mathrm{diag}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}\}$，$\phi_1\cdots\phi_m\in\mathbb{R}$。
设$\Phi = \mathrm{diag}\{\phi_1,\cdots,\phi_m\}$，则$D = \mathrm{Exp}(\mathrm{i}\Phi)$，$U = W^{-1}DW = W^{-1}\,\mathrm{Exp}(\mathrm{i}\Phi)\,W = \mathrm{Exp}(\mathrm{i}W^{-1}\Phi W)$，
设$A = \mathrm{i}W^{-1}\Phi W$，则$A^\dagger = \overline{A^\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{i}W^\mathrm{T}\Phi^\mathrm{T}(W^{-1})^\mathrm{T}} = \mathrm{i}\overline{W^\mathrm{T}}\Phi\overline{(W^{-1})^\mathrm{T}} = -\mathrm{i}W^{-1}\Phi W = -A$。
则$A\in\mathcal{U}(m)$。取$\gamma(t)$为A生成的单参子群$\mathrm{Exp}(tA)$，则$I = \gamma(0)$，$U = \mathrm{Exp}(A)$。
即$\forall U\in\mathrm{U}(m)$，存在连续曲线将之与$I$相连，故$\mathrm{U}(m)$是连通流形。
注：上述过程实际上证明了更强的结论：酉群$\mathrm{U}(m)$的任一群元都属于某一单参子群。这说明指数映射Exp是到上的，从而有定理保证，酉群$\mathrm{U}(m)$是紧致的。

酉群的Lie子群$\mathrm{SU}(m) = \{U\in\mathrm{U}(m)\,|\,\det U = 1\}$称为特殊酉群，也是紧致的连通Lie群。

设A为任意$m\times m$矩阵，则$\det[\mathrm{Exp}(A)] = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}$。
证：令$f(t) = \det[\mathrm{Exp}(tA)]$，
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}f(t+s) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\det[\mathrm{Exp}((t+s)A)] = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\det[\mathrm{Exp}(tA)]\det[\mathrm{Exp}(sA)]$$
$$= \det[\mathrm{Exp}(tA)]\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\det[\mathrm{Exp}(sA)] = f(t)\,\mathrm{tr}\,A$$
则$\mathrm{d}\ln f(t)/\mathrm{d}t = \mathrm{tr}\,A$，故$\ln f(t) = t\,\mathrm{tr}\,A$，即$\det[\mathrm{Exp}(A)] = f(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}$。

特殊酉群$\mathrm{SU}(m)$Lie代数$\mathcal{SU}(m) = \{A\in\mathcal{U}(m)\,|\,\mathrm{tr}\,A = 0\} = \{m\times m$无迹反Hermitian复矩阵$\}$。
证：$\forall A\in\mathcal{SU}(m)$，则对$\forall t\in\mathbb{R}$，$\mathrm{Exp}(tA)\subset\mathcal{SU}(m)\subset\mathcal{U}(m)\Rightarrow A\in\mathcal{U}(m)$，从而$A^\dagger = -A$。
$1 = \det[\mathrm{Exp}(tA)] = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,tA}\Rightarrow\mathrm{tr}\,tA = 2\pi k\mathrm{i}$是常数。又$\mathrm{tr}\,tA = t\,\mathrm{tr}\,A$是$t$的函数，只能有$\mathrm{tr}\,A = 0$。
另一方面，设A满足$A^\dagger = -A$，$\mathrm{tr}\,A = 0$。则$A\in\mathcal{U}(m)$，可生一个单参子群$\mathrm{Exp}(tA)\subset\mathrm{U}(m)$。

而$\operatorname{tr}A=0\Rightarrow\operatorname{tr}tA=0$，$\forall t\in\mathbb{R}$，从而$\det[\operatorname{Exp}(tA)]=1$。则$\operatorname{Exp}(tA)\subset \mathrm{SU}(m)$，故$A\in \mathcal{SU}(m)$。

$\dim \mathrm{SU}(m)=\dim \mathcal{SU}(m)=m^2-1$。
证：在$A^\dagger=-A$基础上$\operatorname{tr}A=0$提供了一个独立方程。
注：$\mathrm{SU}(m)$其实就是$\mathrm{U}(m)$的一个超曲面。

G.5.5 E(m)群（Euclidean群）

m维Euclidean空间的等度规群称为Euclidean/Galileo群，记作$\mathrm{E}(m)$。等度规群的维数等于独立Killing矢量场的个数。Euclidean空间具有最高对称性，则$\dim \mathrm{E}(m)=m(m+1)/2$。
定义对应于平移Killing场的平移元$T_{\vec{a}}$：$\vec{v}\mapsto\vec{v}+\vec{a}$，则$\mathrm{T}(2)=\{T_{\vec{a}}|\vec{a}\in\mathbb{R}^2\}$以映射复合为群乘法构成Abelian群。易见$\dim\mathrm{T}(2)=2$。另外还有一个转动Killing场，对应于一个$\mathrm{O}(2)$。
设$\forall E\in\mathrm{E}(2)$，其对$\vec{0}$的作用为$E\,\vec{0}=\vec{a}$，则$\exists$平移元$T_{-\vec{a}}\in\mathrm{T}(2)$使得$T_{-\vec{a}}E\,\vec{0}=\vec{0}$。而二维Euclidean空间保持原点不动的等度规映射一定属于$\mathrm{O}(2)$，故$\forall E\in\mathrm{E}(2)$，$\exists T_{-\vec{a}}\in\mathrm{T}(2)$，$Z\in\mathrm{O}(2)$使得$Z=T_{-\vec{a}}E$，即$E=T_{\vec{a}}Z$，记为$E=(T_{\vec{a}},Z)$，故作为集合或拓扑空间，有$\mathrm{E}(2)=\mathrm{T}(2)\times\mathrm{O}(2)$。因其群乘法定义为映射复合，即$(T_{\vec{a}},Z)\,\vec{v}=T_{\vec{a}}Z\,\vec{v}=Z\,\vec{v}+\vec{a}$。设$T_{\vec{a}_1},T_{\vec{a}_2}\in\mathrm{T}(2)$，$Z_1,Z_2\in\mathrm{O}(2)$，则$(T_{\vec{a}_1},Z_1)(T_{\vec{a}_2},Z_2)\,\vec{v}=(T_{\vec{a}_1},Z_1)(Z_2\,\vec{v}+\vec{a}_2)=Z_1Z_2\,\vec{v}+\vec{a}_1+Z_1\,\vec{a}_2=(T_{\vec{a}_1+Z_1\,\vec{a}_2},Z_1Z_2)\,\vec{v}$。若简记$(T_{\vec{a}},Z)$为$(\vec{a},Z)$，则容易看出：
$(\vec{a}_1,Z_1)(\vec{a}_2,Z_2)=(\vec{a}_1+Z_1\,\vec{a}_2,Z_1Z_2)$是半直积群的定义，其中$Z$同态于$\mathrm{T}(2)$的自同构群$\mathcal{A}(\mathrm{T}(2))$的群元$\psi_Z$：$T_{\vec{a}}\mapsto T_{Z\,\vec{a}}$。于是：
$\mathrm{E}(2)=\mathrm{T}(2)\otimes_{\mathrm{S}}\mathrm{O}(2)$。同理$\mathrm{E}(3)=\mathrm{T}(3)\otimes_{\mathrm{S}}\mathrm{O}(3)$。

G.5.6 Poincare群

四维Minkowski空间的等度规群称为Poincare群（庞加莱群），记作P。Minkowski空间的最高对称性导致$\dim P=10$。
四维Minkowski空间有4个平移、三个转动和三个伪转动Killing场。类比于$\mathrm{E}(m)$，有：
$P=\mathrm{T}(4)\otimes_{S}L$。其中$L=\mathrm{O}(1,3)$为六维Lorentzian群。
固有Poincare群：$P_{\mathrm{P}}=\mathrm{T}(4)\otimes_{S}L_+^\uparrow$。

表G-1 某些Lie群的子群关系（$H<G$表示H是G的子群）

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(2) & < & \mathrm{SO}(3) & < & L_+^\uparrow \\ \wedge & & \wedge & & \wedge \\ \mathrm{E}(2) & < & \mathrm{E}(3) & < & P_\mathrm{P} \end{array}$$

表G-2 常用矩阵Lie群一览表

符号	Lie群名称	连通性	矩阵	维数	其Lie代数的矩阵
$\mathrm{GL}(m)$	一般线性群（实）	非连通	$m\times m$可逆实矩阵	m^2	$m\times m$任意实矩阵
$\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$	一般线性群（复）	连通	$m\times m$可逆复矩阵	$2m^2$	$m\times m$任意复矩阵
$\mathrm{SL}(m)$	特殊线性群（实）	连通	行列式为1的 $m\times m$可逆实矩阵	m^2-1	$m\times m$无迹实矩阵
$\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$	特殊线性群（复）	连通	行列式为1的 $m\times m$可逆复矩阵	$2m^2-2$	$m\times m$无迹复矩阵
$\mathrm{O}(m)$	正交群	非连通	正交实矩阵	$\frac{1}{2}m(m-1)$	$m\times m$斜对称实矩阵
$\mathrm{SO}(m)$	转动群 (特殊正交群)	连通	行列式为1的 正交实矩阵	$\frac{1}{2}m(m-1)$	$m\times m$斜对称实矩阵
$\mathrm{O}(1,3)$	Lorentzian群	非连通	4×4实矩阵A， 满足$\eta=A^T\eta A$	6	4×4实矩阵A， 满足$A^\mathrm{T}=-\eta A\eta$
$L_+^\uparrow$	固有Lorentzian群	连通	4×4实矩阵A， 满足$\eta=A^T\eta A$， $\det\Lambda=1$，$\Lambda^0{}_0\geq 1$	6	4×4实矩阵A， 满足$A^\mathrm{T}=-\eta A\eta$
$\mathrm{U}(m)$	酉群	连通	$m\times m$酉矩阵	m^2	$m\times m$反Hermitian 复矩阵
$\mathrm{SU}(m)$	特殊酉群	连通	行列式为1的 $m\times m$酉矩阵	m^2-1	$m\times m$反Hermitian 无迹复矩阵

§G.6 Lie代数的结构常数

2018年7月15日　　2:10

若$\mathcal{V}$是Lie代数，则Lie括号$[,]$：$\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$是一个双线性映射，可看作$\mathcal{V}$上的一个$(1,2)$型张量，记作$C^c{}_{ab}$，便有$[u,v]^c=C^c{}_{ab}u^a v^b$，$\forall u^a,v^b\in\mathcal{V}$。$C^c{}_{ab}$称为Lie括号的结构（常）张量（structure constant tensor）。有性质：

1. 反称性：$C^c{}_{ab}=-C^c{}_{ba}$；
2. $C^c{}_{a[b}C^a{}_{de]}=0$。

设$\left\{\left(e_\mu\right)^a\right\}$是$\mathcal{V}$的任一基底，则$\left[e_\mu,e_\nu\right]^c=C^c{}_{ab}\left(e_\mu\right)^a\left(e_\nu\right)^b=C^c{}_{\mu\nu}$是一组$n^2$个矢量。将编号$\mu\nu$的矢量在基底下展开为$C^\sigma{}_{\mu\nu}\left(e_\sigma\right)^c$。这样的一组$n^3$个数$C^\sigma{}_{\mu\nu}$就是Lie括号的结构常数，它依赖于基底的选择。基底变换时它按照张量分量变换律变换。定理：若存在一组数满足$C^\sigma{}_{\mu\nu}=-C^\sigma{}_{\nu\mu}$和$C^\sigma{}_{\mu[\nu}C^\mu{}_{\rho\tau]}=0$，则必存在以其为Lie代数结构常数的Lie群。

例1：$\mathbb{R}^2$以自然加法为群乘法构成二维Abelian Lie群，有性质：

1. γ是任一过恒等元e的直线$\Leftrightarrow\gamma$是任一单参子群；
2. $\mathbb{R}^2$上任一左不变矢量场$\bar{A}$满足$\partial_a\bar{A}^b=0$。等价地，$\bar{A}$的积分曲线族是平行直线族。

注：由其可知任意两个左不变矢量场的对易子$[u,v]^\mu=u^\nu\partial_\nu v^\mu-v^\nu\partial_\nu u^\mu=0$，从而其Lie代数的Lie括号为零：$\left[\bar{A},\bar{B}\right]_e=0$，则其结构张量$C^c{}_{ab}=0$。这样的Lie代数称为Abelian代数。Abelian代数的任何两个元素的Lie括号为零，则Abelian代数的结构张量显然为零。可以证明，连通Lie群为Abelian群当且仅当其Lie代数为Abelian代数。

例2：$\mathcal{SO}(3)$。已知$\dim\mathcal{SO}(3)=3$，则其三个基矢可以借助SO(3)的三个单参子群定义：

$$Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix},\ Z_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&0\\0&1&\sin\alpha\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix},\ Z_z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

每一子群在恒等元I处的切矢给出一个$\mathcal{SO}(3)$的元素（该单参子群的生成元）：

$$A_1=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

显然线性独立，构成$\mathcal{SO}(3)$的一个基底。注意到矩阵Lie群的Lie代数的Lie括号为矩阵对易子：

$[A_1,A_2]=A_3$，$[A_2,A_3]=A_1$，$[A_3,A_1]=A_2$，

即$\left[A_i,A_j\right]=\varepsilon^k{}_{ij}A_k$，在基底$\{A_1,A_2,A_3\}$下的结构常数为Levi-Civita记号$\varepsilon^k{}_{ij}$。

例3：$\mathcal{O}(1,3)$。$L_+^\uparrow$有六个典型的单参子群：

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&0&1&0\\0&-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\lambda & 0 & -\sinh\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & 0 & \cosh\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\lambda & 0 & 0 & -\sinh\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\lambda & 0 & 0 & \cosh\lambda \end{bmatrix},$$

其中前三个代表空间转动，后三个代表伪转动。其生成元：

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

显然线性独立，构成$\mathcal{O}(1,3)$的一个基底。其Lie括号满足下式：

$\left[r_i, r_j\right] = \varepsilon^k{}_{ij} r_k$，$\left[b_i, r_j\right] = \varepsilon^k{}_{ij} b_k$，$\left[b_i, b_j\right] = -\varepsilon^k{}_{ij} r_k$，即$\{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2, b_3\}$下的结构常数。

引入符号$l_{\mu\nu}$，满足反称性和$l_{01} = b_1$，$l_{02} = b_2$，$l_{03} = b_3$，$l_{12} = r_3$，$l_{23} = r_1$，$l_{31} = r_2$，

则$\left[l_{\mu\nu}, l_{\rho\sigma}\right] = \eta_{\mu\rho} l_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} l_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} l_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} l_{\mu\sigma}$，

每个$l_{\mu\nu}$可看作一个反称实矩阵，矩阵元为：$\left(l_{\mu\nu}\right)^\alpha{}_\beta = -\delta^\alpha{}_\mu \eta_{\beta\nu} + \delta^\alpha{}_\nu \eta_{\beta\mu}$。

例4：$\mathcal{SU}(2)$。易知$\dim \mathcal{SU}(2) = 3$。

三个Pauli矩阵：$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$，$\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$为独立的无迹Hermitean复矩阵。

用$-\mathrm{i}/2$（为使结构常数简单）相乘得无迹反Hermitean复矩阵可作为$\mathcal{SU}(2)$的基矢：

$$E_i = -\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_i$$

有$[E_1, E_2] = E_3$，$[E_2, E_3] = E_1$，$[E_3, E_1] = E_2$，

即$\left[E_i, E_j\right] = \varepsilon^k{}_{ij} E_k$，在基底$\{E_1, E_2, E_3\}$下的结构常数为Levi-Civita记号。

注：发现$\mathcal{SU}(2)$与$\mathcal{SO}(3)$的结构常数之间存在相似性。令线性映射ψ：$\mathcal{SU}(2) \to \mathcal{SO}(3)$，$E_i \mapsto A_i$，易见$\psi$是保Lie括号的，则成为Lie代数同构，则$\mathcal{SU}(2) = \mathcal{SO}(3)$。

尽管$\mathrm{SU}(2) \neq \mathrm{SO}(3)$，但是存在一个2到1的投影映射$\pi$：$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$是Lie群同态。

类似的，$\mathcal{SL}(2, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(1,3)$，但只存在2到1的投影映射$\pi$：$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$是Lie群同态。

§G.7 Lie群的流形结构和同伦类

2018年7月16日 1:43

取$U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in \mathrm{U}(2)$，则$U^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，$\Delta=\det U=e^{\mathrm{i}\phi}$，酉条件$U^{-1}=\overline{U^{\mathrm{T}}}$等价于：

$\bar{a}=\dfrac{d}{\Delta}$，$\bar{b}=-\dfrac{c}{\Delta}$，$\bar{c}=-\dfrac{b}{\Delta}$，$\bar{d}=\dfrac{a}{\Delta}$

由于$\bar{\Delta}=e^{-\mathrm{i}\phi}=1/\Delta$，可以得到上面只有两个复方程是独立的，共四个实独立变量。

进一步，若$U\in \mathrm{SU}(2)$，则$\Delta=1$又给出一个实方程，故$\dim \mathcal{SU}(2)=3$。

同时，代入上述方程得$c=-\bar{b}$，$d=\bar{a}$，即$U=\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$，

$1=a\bar{a}+b\bar{b}=(a_1+\mathrm{i}a_2)(a_1-\mathrm{i}a_2)+(b_1+\mathrm{i}b_2)(b_1-\mathrm{i}b_2)=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2$。

可见$\mathrm{SU}(2)$的流形是$\mathbb{R}^4$中的超曲面——单位三维球面S^3。它是连通且单连通的。

取$\mathrm{SU}(2)$的恒等元e作为S^3的“北极点”，则可以确定S^3的“赤道”$\mathcal{S}$（二维球面）。北半球面上的每一点都可以通过垂直于赤道面的投影而一一对应于赤道面（三维实心球体）上的点，即北半球面与不带边赤道面同构。另一方面，$\mathrm{SO}(3)$的流形是做了对径认同的三维实心球体。因此只要对S^3的赤道$\mathcal{S}$做对径认同，$\mathcal{S}$与北半球面之并就同胚于$\mathrm{SO}(3)$的流形。从而直观理解2到1的投影映射π：$\mathrm{SU}(2)\to \mathrm{SO}(3)$是这样的对应关系，由于$\mathcal{S}$与北半球面之并与$\mathrm{SO}(3)$的流形的同胚关系，北半球面上的点$U\in \mathrm{SU}(2)$及其对径的在南半球面上的点$U'=-U\in \mathrm{SU}(2)$都对应于点$U$，赤道上选取一半的点，使之与其对径点都对应于其本身。

$\mathrm{SU}(2)$与$\mathrm{SO}(3)$同态而不同构，却有同样的Lie代数。这是因为两者流形的连通性不同导致的。$\mathrm{SU}(2)$的流形是单连通的，而$\mathrm{SO}(3)$是非单连通的。设曲线μ：$[0,1]\to \mathrm{SO}(3)$（三维实心球体），$0\mapsto e$，然后沿着某条半径增长至参数为$1/2$，此时为球面上点g，再按照原路重合返回到e，参数为1，构成闭合曲线。这条闭合曲线是可以连续变形缩成一点的。但是稍作修改，由于$\mathrm{SO}(3)$流形的对径认同，曲线在$\mathrm{SO}(3)$参数为到达点g后，认同至其对径点，从这条直径的另一侧随着参数增长到达e。则这条曲线的向就是连续的一条直径，它不能通过连续变形缩成一点。因此$\mathrm{SO}(3)$是非单连通流形。

设M为连通流形，M中两条连续闭合曲线C_1，C_2称为是彼此同伦的（homotopic），若它们可以通过连续变形成为对方。M中所有连续闭合曲线可以分为若干同伦类，任何单连通流形中的连续闭合曲线都只有一个同伦类，而$\mathrm{SO}(3)$流形中却有且仅有两个同伦类。

§G.8 Lie变换群和Killing矢量场

2018年6月10日　2:10

按照现在的观点看来，$\mathbb{R}$本质上就是一个一维Lie群，以自然加法为群乘法构成群。
而单参微分同胚群$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$，是以映射复合为群乘法构成群。
按条件$\forall t, s \in \mathbb{R}$，$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$，显然$\phi$：$\mathbb{R} \times M \to M$是一个$\mathbb{R}$到$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$的同态映射。
而进一步，显然映射是一一到上的，因此ϕ是$\mathbb{R}$到$\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$的同构映射。
因此，单参微分同胚群是一个一维Lie群。

按照如下定义推广它的概念：
设G是Lie群，M是流形，$\mathbf{C}^\infty$映射σ：$G \times M \to M$形成M上的无数个Lie变换群（Lie group of transformations）$\{\sigma_g | g \in G\}$，也称映射σ：$G \times M \to M$是M上的一个Lie变换群，若：

1. $\forall g \in G$，σ_g：$M \to M$是微分同胚；
2. $\forall g, h \in G$，$\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh}$。

容易验证$\{\sigma_g | g \in G\}$以映射的复合为群乘法构成群，恒等元就是M到M的恒等映射σ_e，其中e是G的恒等元；且$\sigma_g^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$，$\forall g \in G$。
$\forall p \in M$，有σ_p：$G \to M$。则有关系：
$\sigma_p(g) = \sigma(g, p) = \sigma_g(p)$，$\forall g \in G$，$p \in M$。
注：

1. 当$G = \mathbb{R}$时，流形M上的Lie变换群即为流形M上的单参微分同胚群，可见单参微分同胚群是Lie变换群的一个特例。
2. 虽然Lie群的定义比较抽象，但是Lie变换群却是比较直观的：Lie变换群的每一个群元σ_g都是M上的一个（微分同胚的）点变换。

按照条件$\forall g, h \in G$，$\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh}$，显然$\sigma$：$G \times M \to M$是一个$G$到$\{\sigma_g | g \in G\}$的同态映射。
而进一步，显然映射是一一到上的，因此σ是G到$\{\sigma_g | g \in G\}$的同构映射。
因此，Lie变换群也是是一个Lie群。
从这个角度来看，Lie变换群可以看作是Lie群的某种具体化。

从Lie群$G = \{g\}$到Lie变换群$\{\sigma_g: M \to M | g \in G\}$的任意一个同态映射$G \to \{\sigma_g\}$称为$G$的一个实现（realization），$M$称为实现空间。若此同态为同构，则称为忠实（faithful）实现。
注：因为每一个$g \in G$对应于一个左平移映射L_g：$G \to G$即L：$G \times G \to G$，若将G单纯地看作一个流形M，则该映射就是一个L_g：$M \to M$，因此映射L：$G \to \{L_g: G \to G | g \in G\}$就是$G$的一个实现，$G$本身就是实现空间，而且该实现还是是一个忠实实现。

Lie群G在流形M上的任意一个实现$G \to \{\sigma_g\}$称为Lie群G的一个表示（representation），若M是一个线性空间，即同构于一个平凡流形（trival manifold）$\mathbb{R}^n$，且σ_g：$M \to M$（$\forall g \in G$）

是线性变换。这时称M为表示空间。若忠实实现是表示，则称为忠实表示。
注：

1. 往往也把像集$\left\{\sigma_g\right\}$称为G的表示，但应注意不同的映射存在像相同的情况。
2. 矢量空间上的线性映射相当于$(1,1)$型张量，即该线性映射可以表示为一个矩阵。可见G的每一个表示$G \to \left\{\sigma_g\right\}$都可以看作是同态于一个矩阵群。

设γ：$\mathbb{R} \to G$是G的、对应于$A \in V_e$的单参子群，则$\{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$是$G$中的曲线。把Lie变换群$\left\{\sigma_g \middle| g \in G\right\}$中$g$的取值范围限定在曲线$\gamma(t)$上，则得到Lie变换群的一个子集$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$，其中每一个$\sigma_{\gamma(t)}$：$M \to M$都是$M$上的微分同胚，而且$\forall t, s \in \mathbb{R}$，$\sigma_{\gamma(t)} \circ \sigma_{\gamma(s)} = \sigma_{\gamma(t)\,\gamma(s)} = \sigma_{\gamma(t+s)}$，因而$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$是$M$的一个单参微分同胚群。
可见G的每一个单参子群决定M的一个单参微分同胚群。

设$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$对应的光滑矢量场为$\bar{\xi}$，则$\forall p \in M$，其积分曲线为群$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$过点$p$的轨道：$\sigma_{\gamma(t)}(p)$。而$\bar{\xi}$在$p$点的值$\bar{\xi}_p$正是该点积分曲线的切矢：

$$\bar{\xi}_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sigma_{\gamma(t)}(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sigma_p(\gamma(t)) = \sigma_{p_*}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t)\right) = \sigma_{p_*} A$$

可见给定Lie变换群σ：$G \times M \to M$，G的Lie代数V_e的每一个元素A对应于M上的一个光滑Killing矢量场$\bar{\xi}$。即存在映射χ：$V_e \to \left\{\bar{\xi}\right\}$。

现在考虑广义Riemannian空间$\left(M, g_{bc}\right)$，G是$\left(M, g_{bc}\right)$的等度规群（等度规群是单参微分同胚群，从而G是一个一维Lie群），其每个群元g都是等度规映射（同时也是微分同胚）。而G与M之间可以定义Lie变换群$\left\{\sigma_g \middle| g \in G\right\}$，其每个群元$\sigma_g$也都是$M$上的微分同胚。现在按照如下方式定义Lie变换群，使得$\sigma_g = g$，$\forall g \in G$，从而Lie变换群就是等度规群G，Lie变换群的每一个单参子群γ生成的M的单参微分同胚群$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$成为单参等度规群。这样它所对应的光滑矢量场$\bar{\xi}$就是$M$上的一个光滑Killing场，即$\left\{\bar{\xi}\right\} \subset \mathcal{K}$。从而前述映射成为$\chi$：$V_e \to \mathcal{K}$。
注：原则上不能保证$\left\{\bar{\xi}\right\} = \mathcal{K}$，因为属于$\mathcal{K}$的场，即满足Killing方程的矢量场不一定完备，但是按照上述定义（即由参数t必然能取遍全$\mathbb{R}$的单参微分同胚群$\left\{\sigma_{\gamma(t)} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$生成的矢量场）得到的$\bar{\xi}$中的元素必定完备。因此，对于某些情况，$\left\{\bar{\xi}\right\}$包含于$\mathcal{K}$。关于这一点，有下述讨论。

以矢量场对易子为$\mathcal{K}$的Lie括号，则$\mathcal{K}$成为Lie代数，且可以证明χ：$V_e \to \mathcal{K}$对Lie括号的同态性差一个负号，即：
$\chi([A, B]) = -[\chi(A), \chi(B)]$，$\forall A, B \in V_e$。
按照如下定义映射ψ：$V_e \to \mathcal{K}$：$\psi(A) = -\chi(A)$，$\forall A \in V_e$，则易见ψ为同态，即：
$\psi([A, B]) = \left[\psi(A), \psi(B)\right]$，$\forall A, B \in V_e$。
若每个Killing场都是完备矢量场，则每个都产生一个一维单参等度规群，故等度规Lie变换群G（因而V_e）与$\mathcal{K}$维数相等，ψ：$V_e \to \mathcal{K}$是Lie代数同构。反之，不完备的Killing场的单参等度规群$\{\psi_t$：$M \to M\}$是只含有恒等元ψ_0的零维Lie群，因为无论t取何非零值，总有$p \in M$使得p在ψ_t下无像。于是$\dim G = \dim V_e$减小而$\dim \mathcal{K}$不变，意味着V_e与$\mathcal{K}$只同态不同构。

进一步的规律如下：
(M,g_{bc})的等度规Lie变换群的Lie代数$\mathcal{V}_e$同构于其上全体Killing场的集合$\mathcal{K}$的某个Lie子代数；
当每一Killing场都完备，即$\{\bar{\xi}\}=\mathcal{K}$的时候，$\mathcal{V}_e=\mathcal{K}$（表示$\chi$：$\mathcal{V}_e\to\mathcal{K}$是Lie代数同构），$\dim G=\dim\mathcal{V}_e=\dim\mathcal{K}$。
注：物理上常见后一种情况。

利用Killing场的对易子可以求得等度规群的Lie代数的结构常数。
例1：三维Euclidean空间$(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$中的二维球面$(S^2,h_{ab})$的等度规群是$\mathrm{SO}(3)$。取极坐标$\{\varphi,\theta\}$，则其上全体Killing场的集合$\mathcal{K}$的三个基矢可以取为（均满足Killing方程）：
$\xi_1=\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\cot\theta\cos\varphi$，$\xi_2=-\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\cot\theta\sin\varphi$，$\xi_3=-\frac{\partial}{\partial\varphi}$
其Lie括号（对易子）为：$[\xi_1,\xi_2]=\xi_3$，$[\xi_2,\xi_3]=\xi_1$，$[\xi_3,\xi_1]=\xi_2$，结构常数为$\varepsilon^k{}_{ij}$。
此时的ψ：$\mathcal{SO}(3)\to\mathcal{K}$，$A_i\mapsto\xi_i$正是Lie代数同构。

例2：二维Euclidean空间$(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$的等度规群是$\mathrm{E}(2)$。取Cardesian系$\{x,y\}$，则其上全体Killing矢量场的集合$\mathcal{K}$的三个基矢（两个平移$t$，一个转动$r$）可以取为：
$\xi_{t_1}=\frac{\partial}{\partial x}$，$\xi_{t_2}=\frac{\partial}{\partial y}$，$\xi_r=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$
$[\xi_{t_1},\xi_{t_2}]=0$，$[\xi_r,\xi_{t_1}]=\xi_{t_2}$，$[\xi_r,\xi_{t_2}]=-\xi_{t_1}$，也可看作Lie代数$\mathcal{E}(2)$结构常数表达式。

例3：四维Minkowski空间$(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$的等度规群是P。取Lorentzian系$\{t,x,y,z\}$，则其上全体Killing矢量场的集合$\mathcal{K}$的基矢可以取为：；
$\xi_{t_0}=\frac{\partial}{\partial t}$，$\xi_{t_1}=\frac{\partial}{\partial x}$，$\xi_{t_2}=\frac{\partial}{\partial y}$，$\xi_{t_3}=\frac{\partial}{\partial z}$；
$\xi_{r_1}=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}$，$\xi_{r_2}=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$，$\xi_{r_3}=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}$；
$\xi_{b_1}=t\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial t}$，$\xi_{b_2}=t\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial t}$，$\xi_{b_3}=t\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial t}$；
$[\xi_{r_i},\xi_{r_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{r_k}$，$[\xi_{r_i},\xi_{b_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{b_k}$，$[\xi_{b_i},\xi_{b_j}]=-\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{r_k}$，
$[\xi_{b_i},\xi_{t_0}]=-\xi_{t_i}$，$[\xi_{r_i},\xi_{t_j}]=\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{t_k}$，$[\xi_{b_i},\xi_{t_i}]=-\xi_{t_0}$，其余均为零。
也可以表为：
$[\xi_{l_{\mu\nu}},\xi_{l_{\rho\sigma}}]=\eta_{\mu\rho}\xi_{l_{\nu\sigma}}+\eta_{\nu\sigma}\xi_{l_{\mu\rho}}-\eta_{\mu\sigma}\xi_{l_{\nu\rho}}-\eta_{\nu\rho}\xi_{l_{\mu\sigma}}$，
$[\xi_{l_{\mu\nu}},\xi_{t_\sigma}]=\eta_{\mu\sigma}\xi_{t_\nu}-\eta_{\nu\sigma}\xi_{t_\mu}$。
这也可以看作也是Lie代数$\mathcal{P}$的结构常数表达式。

另外，对于没有指定度规的流形M，只要G是Lie群，就可以定义Lie变换群：σ：$G\times M\to M$。现在定义一个矢量场$\bar{\xi}$：$\bar{\xi}_p=\sigma_{p_*}A$，称为$M$上关于Lie群$G$的Killing矢量场。这一定义无法讨论是否满足Kiling方程，因为没有指定度规就无从定义Killing方程，但是它可以看作是原来Killing场的一种推广：即原本的Killing场在现在的观点看来，实际上是“带度规的流形(M,g_{bc})上关于它的等度规群的Killing矢量场”。这时有如下结论：

1. $\{\bar{\xi}\}$是线性空间，记作$\mathcal{K}$；

2. 仍可用矢量场对易子定义Lie括号使$\mathcal{K}$成为Lie代数（$\mathcal{K}$的任意两元素的Lie括号仍在$\mathcal{K}$内）；
3. χ：$V_e \to \mathcal{K}$仍对Lie括号的同态性只差一个负号。

然而，若对σ：$G \times M \to M$不做要求，有可能$\dim \mathcal{K}$小于$\dim V_e$，从而使χ：$V_e \to \mathcal{K}$不是同构。
映射σ：$G \times M \to M$是有效的（effective），若：
$\sigma_g(p)$，$\forall p \in M$能推出$g = e$。
这等价于Lie变换群的生成映射$g \mapsto \sigma_g$是一一映射，还等价于G在M上的实现是忠实的。
可以证明，只要σ：$G \times M \to M$是有效的，则χ：$V_e \to \mathcal{K}$是线性空间同构，于是ψ：$V_e \to \mathcal{K}$就是Lie代数同构。

§G.9 伴随表示和Killing型

2018年7月16日　　20:32

设V是有限m维实矢量空间，令$\mathcal{L}(V) \coloneqq \{线性映射\psi：V \to V\} = \mathcal{T}_V(1,1)$，则其是$m^2$维实线性空间。其上可自然定义乘法为映射复合：$\psi\varphi \coloneqq \psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(V)$，$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{L}(V)$，即成为一个代数。由此又可自然定义Lie括号为对易子：$[,]：\mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$，$[\psi, \varphi] \coloneqq \psi\varphi - \varphi\psi$，$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{L}(V)$，即成为一个$m^2$维Lie代数，也可以看作$\mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$。

Lie代数同态$\beta：\mathcal{G} \to \mathcal{L}(V)$称为Lie代数$\mathcal{G}$的表示。
注：类似于Lie群G的每一个表示都可以看作是同态于一个矩阵群，Lie代数的每一个表示也可看作是同态于矩阵群$\mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$。而$\mathcal{L}(V)$本质上就是一个$m^2$维实线性空间。

G.9.1 Lie群的伴随表示

对Lie群G，$\forall g \in G$，可构造伴随同构$I_g：G \to G$，$h \mapsto ghg^{-1}$，$\forall h \in G$。它是一个微分同胚，因而是Lie群同构。$I_g(e) = e$，它在点e可以诱导出一个（未经推广的）推前映射（切映射）$I_{g_*}：V_e \to V_e$，记为$\mathcal{A}d_g：\mathcal{G} \to \mathcal{G}$，是Lie代数$\mathcal{G}$上的线性变换。

设$\mathcal{G}$是Lie群G的Lie代数，则$\forall g \in G$，$A \in \mathcal{G}$，有$\exp\left(t\, \mathcal{A}d_g\, A\right) = g \exp(tA)\, g^{-1}$。
注：若$A \in \mathcal{G}$，则$\mathcal{A}d_g\, A$也是$\mathcal{G}$的元素，也是G在点e的另一个切矢量。则A与$\mathcal{A}d_g\, A$都各可以生成G的一个单参子群$\exp\left(t\, \mathcal{A}d_g\, A\right)$和$\exp(tA)$。对$\forall t \in \mathbb{R}$，$\exp(tA)$是$G$的一个群元，因而$g \exp(tA)\, g^{-1}$有意义。
证：令$\gamma(t) = \exp(tA)$，$\gamma'(t) = g \exp(tA)\, g^{-1}$，则由$\gamma(s+t) = \gamma(s)\,\gamma(t)$，易证$g \exp(tA)\, g^{-1}$是单参子群。只需证两边在点$e$的切矢相同。

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left[g \exp(tA)\, g^{-1}\right] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left[I_g \exp(tA)\right] = I_{g_*} \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA)\right] = \mathcal{A}d_g\, A$$

设G是矩阵Lie群，则$\forall g \in G$，$A \in \mathcal{G}$，有：$\mathcal{A}d_g\, A = gAg^{-1}$。

作为实向量空间$\mathcal{G}$上的线性映射，$\mathcal{A}d_g \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$。又由于$I_g$是微分同胚，则可以证明$\mathcal{A}d_g$即$I_{g_*}$是线性同构（也是Lie代数同构），必有逆，故$\mathcal{A}d_g \in \{\mathcal{G}上可逆线性映射\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{G})$。而另一方面，可以类比于单参微分同胚群而抽象出如下映射：$\mathcal{A}d：G \to \{\mathcal{G}上可逆线性映射\}$，$g \mapsto \mathcal{A}d_g$。
选定基底后$\mathcal{G}$上的每一个可逆线性映射对应于一个可逆矩阵，则$\{\mathcal{G}上可逆线性映射\}$对应于一个矩阵群，也就是$\mathrm{GL}(\dim G, \mathbb{R})$。

线性映射$\mathcal{A}d：G \to \{\mathcal{G}上可逆线性映射\}$是一个同态映射，从而是Lie群$G$的一个表示，称为Lie群$G$的伴随表示（adjoint representation）。

证：只需证明映射保群乘法运算。考虑到Lie群$\mathcal{L}(\mathcal{G})$群元的乘法就是映射复合，$\mathcal{Ad}(gh) = \mathcal{Ad}_{gh} = I_{gh_*} = \left(I_g \circ I_h\right)_* = I_{g_*} \circ I_{h_*} = \mathcal{Ad}_g \mathcal{Ad}_h = \mathcal{Ad}\, g\, \mathcal{Ad}\, h$，即证。

设H是Lie群G的正规子群，$\mathcal{H}$是H的Lie代数，则对$\forall B \in \mathcal{H}$：$\mathcal{Ad}_g\, B \in \mathcal{H}$，$\forall g \in G$。
证：由$B \in \mathcal{H}$知$\exp(tB)$是H的单参子群，有正规子群定义知$g \exp(tB)\, g^{-1} \subset H$。于是$\exp\left(t\, \mathcal{Ad}_g\, B\right)$也是$H$的单参子群，因此$\mathcal{Ad}_g\, B \in \mathcal{H}$。

设$\mathcal{G}$是Lie群G的Lie代数，则$\forall A, B \in \mathcal{G}$，有：
$$[A, B] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\mathcal{Ad}_{\exp(tA)}\, B\right)$$
注：$\mathcal{Ad}_{\exp(tA)}\, B$在$t$固定时是$e$点的矢量，在$t$变化时则成为关于$t$的矢量函数，等式右边代表此函数的导函数在$t = 0$处的值（仍是$e$点的矢量），即：
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\mathcal{Ad}_{\exp(tA)}\, B\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\mathcal{Ad}_{\exp(tA)}\, B - \mathcal{Ad}_e\, B\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\mathcal{Ad}_{\exp(tA)}\, B - B\right)$$

设H是连通Lie群G的连通Lie子群，$\mathcal{H}$和$\mathcal{G}$是H和G的Lie代数，则：
H是G的正规子群$\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$是$\mathcal{G}$的理想。

G.9.2 Lie代数的伴随表示

对$\forall A \in \mathcal{G}$定义映射$\mathrm{ad}_A$：$\mathcal{G} \to \mathcal{G}$，$B \mapsto [A, B]$，$\forall B \in \mathcal{G}$。
由Lie括号的双线性性可知ad_A：$\mathcal{G} \to \mathcal{G}$也是线性映射，有性质：

1. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{G}$，$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$，有$\mathrm{ad}_A\left(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2\right) = \beta_1\, \mathrm{ad}_A\left(B_1\right) + \beta_2\, \mathrm{ad}_A\left(B_2\right)$；
2. $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{G}$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$，有$\mathrm{ad}_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \alpha_1 \mathrm{ad}_{A_1} + \alpha_2 \mathrm{ad}_{A_2}$；

这表明ad_A是$\mathcal{G}$上的线性变换，$\mathrm{ad}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$，也可看作$\mathcal{G}$上的$(1,1)$型张量：
$\left(\mathrm{ad}_A\right)^c{}_b B^b = [A, B]^c = C^c{}_{ab} A^a B^b$，$\forall B \in \mathcal{G}$，从而$\left(\mathrm{ad}_A\right)^c{}_b = A^a C^c{}_{ab}$。

映射ad_A（$A \in \mathcal{G}$）与$\mathcal{Ad}_g$（$g \in G$）存在关系：$\mathcal{Ad}_{\exp(A)} = \mathrm{Exp}\left(\mathrm{ad}_A\right)$。其中：
$$\mathrm{Exp}\left(\mathrm{ad}_A\right) = \delta + \mathrm{ad}_A + \frac{1}{2!}\left(\mathrm{ad}_A\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathrm{ad}_A\right)^3 \cdots$$
注：上面两式都是$\mathcal{G}$上的张量等式，δ代表恒等映射$\delta^c{}_b$，$\left(\mathrm{ad}_A\right)^2$代表$\left(\mathrm{ad}_A\right)^c{}_b\left(\mathrm{ad}_A\right)^c{}_b$等。因$\mathrm{ad}_A$是线性Lie代数$\mathcal{L}(\mathcal{G})$的元素，因此$\mathrm{Exp}\left(\mathrm{ad}_A\right) = \exp\left(\mathrm{ad}_A\right)$，即Lie代数$\mathcal{L}(\mathcal{G})$相应的（单连通）Lie群上的指数映射。

而另一方面，可以抽象出如下映射：ad：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$，$A \mapsto \mathrm{ad}_A$，显然也是线性的。
映射ad：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$是一个同态映射，从而是Lie代数$\mathcal{G}$的一个表示，称为Lie代数$\mathcal{G}$的伴随表示。
证：只需证明映射保群乘法运算。由Lie括号满足的Jacobian恒等式，

$\mathrm{ad}_{[A,B]}(C) = -[C,[A,B]] = [A,[B,C]] - [B,[A,C]] = (\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A)(C)$，
即$\mathrm{ad}_{[A,B]} = \mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A = [\mathrm{ad}_A, \mathrm{ad}_B]$，即证。

考虑映射$\mathcal{A}d$：$G \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$，由于$\mathcal{A}d_e$：$\mathcal{G} \to \mathcal{G}$是恒等映射，可知$\mathcal{A}d(e)$是$\mathcal{L}(\mathcal{G})$中的单位矩阵$I$。故$\mathcal{A}d$：$G \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$在点$e \in G$诱导出推前映射$\mathcal{A}d_*$：$V_e \to V_I$。注意到$V_e = \mathcal{G}$，且矢量空间$\mathcal{L}(\mathcal{G})$可以与其中任一点的切空间做认同，因此有$\mathcal{A}d_*$：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$。
映射$\mathcal{A}d_*$：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$与映射$\mathrm{ad}$：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{G})$相等。
证：只需证$\mathcal{A}d_*(A) = \mathrm{ad}_A$。
$\mathcal{A}d_*(A) = \mathcal{A}d_*\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA)\right] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{A}d[\exp(tA)] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{A}d_{\exp(tA)}$
故对$\forall B \in \mathcal{G}$，
$(\mathcal{A}d_*A)(B) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{A}d_{\exp(tA)}\right](B) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{A}d_{\exp(tA)}(B) = [A,B] = \mathrm{ad}_A(B)$

G.9.3 Killing型

定义映射K：$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$，$K(A,B) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)$，$\forall A, B \in \mathcal{G}$。
其中代表两个线性变换的复合$(\mathrm{ad}_A)^a{}_c(\mathrm{ad}_B)^c{}_b = (\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)^a{}_b$，故$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B) = (\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B)^a{}_a$，即(1,1)型张量的迹。利用矩阵求迹的轮换性：$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CBA) = \mathrm{tr}(BCA)$和$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，可证：

1. $K([A,B],C) = K(A,[B,C])$；
2. 对称性：$K(A,B) = K(B,A)$。

可知K是一个将$\mathcal{G}$上两个矢量变为一个实数的对称、双线性映射，因而是$\mathcal{G}$上的(0,2)型张量K_{ab}，称为$\mathcal{G}$上的Killing型（Killing form）。由$K(A,B) = (\mathrm{ad}_A)^c{}_d(\mathrm{ad}_B)^d{}_c = C^c{}_{ad}A^aC^d{}_{bc}B^b$：$K_{ab} = C^c{}_{ad}C^d{}_{bc}$。

只要K_{ab}再满足非退化的条件，就可以成为矢量空间$\mathcal{G}$上的一个度规。可以证明，K_{ab}非退化当且仅当$\mathcal{G}$为半单Lie代数。半单Lie代数$\mathcal{G}$的Killing型K_{ab}称为$\mathcal{G}$上的Cartan度规。原则上其号差因$\mathcal{G}$而异，但是物理上见到的多数是负定的，因而存在正交归一基底$\{(E_\mu)^a\}$，使：
$K_{\mu\nu} = K_{ab}(E_\mu)^a(E_\nu)^b = -\delta_{\mu\nu}$。

Cartan度规常用于给结构张量（或结构常数）升降指标：$C_{\rho\mu\nu} = K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}$。

$C_{\rho\mu\nu}$是全反称的：$C_{\rho\mu\nu} = C_{[\rho\mu\nu]}$。
证：结构常数原本的两个下标就是反称的，只需证$C_{\rho\mu\nu} = -C_{\mu\rho\nu}$。
$C_{\rho\mu\nu} = K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu} = K_{ab}(E_\rho)^a(E_\sigma)^bC^\sigma{}_{\mu\nu} = K(E_\rho, E_\sigma)C^\sigma{}_{\mu\nu} = K(E_\rho, C^\sigma{}_{\mu\nu}E_\sigma) = K(E_\rho, [E_\mu, E_\nu])$，
而$-C_{\mu\rho\nu} = -K(E_\mu, [E_\rho, E_\nu]) = K(E_\mu, [E_\nu, E_\rho]) = K([E_\mu, E_\nu], E_\rho) = K(E_\rho, [E_\mu, E_\nu])$。即证。

Lie代数$\mathcal{G}$的Killing型是用伴随表示ad_A定义的，但是可以推广到任意表示β：$\mathcal{G} \to \mathcal{L}(V)$。定义对称、双线性映射$\widetilde{K}$：$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$，$\widetilde{K}(A,B) \coloneqq \mathrm{tr}\left[\beta(A), \beta(B)\right]$，$\forall A,B \in \mathcal{G}$。它也可看作$\mathcal{G}$上的$(0,2)$型对称张量。当Lie代数$\mathcal{G}$及其伴随表示$\beta$满足一定条件使得$\widetilde{K}$是非退化的，则也可看作矢量空间$\mathcal{G}$上的一个度规，称为广义Cartan度规。它也满足：

1. $\widetilde{K}([A,B],C) = \widetilde{K}(A,[B,C])$；
2. 对称性：$\widetilde{K}(A,B) = \widetilde{K}(B,A)$。

§G.10 固有Lorentzian群和Lorentzian代数

2018年6月10日 2:11