第一章 拓扑空间简介

本章主要介绍点集拓扑的基本知识，即在点集上赋予拓扑结构，以及由此而带来的一系列性质，为之后流形的引入作基础。

§1.1　集论初步
§1.2　拓扑空间
§1.3　紧致性

§1.1 集论初步

2018年6月18日　　0:31

§1.2 拓扑空间

2018年5月29日 18:24

对于非空集合X，其子集可以分为开子集O和非开子集V两大类。可以通过某种指定方式，来指定其哪些子集为开子集。当然，每个指定方式下的开子集都要满足：

1. X本身和空集$\emptyset$都是开子集；
2. 有限个开子集的交是开子集；
3. 任意个开子集的并为开子集。

非空集合X的一个拓扑$\mathcal{T}$（topology）是X若干子集的集合（集族），满足：

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. 若有限个$O_i \in \mathcal{T}$，$i = 1,2,3, \dots, n$，则：$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$；
3. 若任意多个$O_\alpha \in \mathcal{T}$，O_α个数不加限制，则：$\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$。

显然，一个特定拓扑就是在某种特定指定方式下X的所有开子集的集合。
凝聚拓扑（indiscrete topology）：$\mathcal{T}$为X全部子集的集合；
离散拓扑（discrete topology）：$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$;
对于$\mathbb{R}^n$，关注它的通常拓扑（usual topology）：
$\mathcal{T}_\mathrm{u} \coloneqq \{$空集，或$\mathbb{R}^n$中能表示为开球（open ball）之并的子集$\}$。

拓扑空间：指定了拓扑$\mathcal{T}$的集合X称为拓扑空间（topological space），记为$(X, \mathcal{T})$。

设拓扑空间$(X_1, \mathcal{T}_1)$、$(X_2, \mathcal{T}_2)$，$X = X_1 \times X_2$，定义X的拓扑为：
$\mathcal{T} \coloneqq \{O \subseteq X \big| O$可以表示为形如$O_1 \times O_2$的子集之并，即$O = \bigcup_\alpha O_1 \times O_2$，其中$O_1 \in \mathcal{T}_1$，$O_2 \in \mathcal{T}_2\}$
称为X的乘积拓扑（product topology）。

设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间，A是X的任一非空子集（并不一定是开子集），则也可为A指定拓扑：
$\mathcal{S} \coloneqq \{V \subseteq A \big| \exists O \in \mathcal{T}$使得$V = A \cap O\}$
若$A \in \mathcal{T}$，则上述定义自然退化为简单的$\{V \subseteq A | V \in \mathcal{T}\}$，自然有$A \in \mathcal{S}$；
而即使$A \notin \mathcal{T}$，也可以使得$A \in \mathcal{S}$。
$\mathcal{S}$称为A的、由$\mathcal{T}$导出的诱导拓扑（induced topology）。$(A, \mathcal{S})$称为$(X, \mathcal{T})$的拓扑子空间（topological subspace）。

利用开集的概念可以对拓扑空间之间的映射定义连续性，下述两者等价。
定义a：设$(X, \mathcal{T})$和$(Y, \mathcal{S})$是拓扑空间，映射f：$X \to Y$称为是连续的（continuous），若对$\forall O \in \mathcal{S}$，有$f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$。
定义b：设$(X, \mathcal{T})$和$(Y, \mathcal{S})$是拓扑空间，映射f：$X \to Y$称为在点x处是连续的，若对$\forall$满足$f(x) \subset G'$的$G' \in \mathcal{S}$，$\exists G \in \mathcal{T}$使得$x \in G$且$f[G] = G'$。映射$f$：$X \to Y$称为是连续的，若它在所有点都是连续的。

拓扑空间$(X,\mathcal{T})$和$(Y,\mathcal{S})$是互相同胚的（homeomorphic to each other），若$\exists f: X \to Y$，满足：

1. f是一一到上的；
2. f和f^{-1}都是连续的。

这样的f称为$(X,\mathcal{T})$到$(Y,\mathcal{S})$的同胚映射，简称同胚（homeomorphism）。

$N \subseteq X$称为$x \in X$的一个邻域（neighborhood），若$\exists O \in \mathcal{T}$使得$x \in O \subseteq N$。自身是开集的邻域称为开邻域。
注：例如，若$X = \mathbb{R}$，则$[a,b]$是x的邻域当且仅当$a < x < b$，$[a,b]$不是a或b的邻域。但若$X = [0,+\infty)$，则$[0,1)$是0的开邻域，$[0,1]$是0的邻域。直观地说，若x在X中存在左邻右舍，则它们都应该属于x的邻域。

$N \subseteq X$称为$A \subseteq X$的一个邻域，若对$\forall x \in A$，N是x的邻域。

$A \subseteq X$是开集（open set），当且仅当对$\forall x \in A$，A是x的邻域。

$B \subseteq X$是闭集（closed set），当且仅当$\complement_X B \in \mathcal{T}$。闭集具有性质：

1. X本身和空集$\emptyset$都是闭集；
2. 任意个闭集的交是闭集；
3. 有限个闭集的并为闭集。

可见对任意拓扑空间$(X,\mathcal{T})$，X本身和空集$\emptyset$既开又闭。

拓扑空间$(X,\mathcal{T})$称为联通的（connected），若它除了X和$\emptyset$之外没有既开又闭的子集。
例如：设$\mathbb{R}$的两个开区间A和B，$A \cap B = \emptyset$，$X = A \cup B$，其上的拓扑定义为由$\mathbb{R}$的通常拓扑在X上诱导出的拓扑。则显然除了X和$\emptyset$，A和B也是的既开又闭子集（A和B在自然拓扑的诱导拓扑下是开的，而互为对方的补集，则又是闭的），因此按照定义X不连通。直观上X也不连通。

拓扑空间$(X,\mathcal{T})$称为弧联通的（arcwise connected），若X是任意两点可由X中的一条连续曲线连接。

对拓扑空间，弧联通一定连通，反之则不然。但是在之后的流形之中可以看到，两者等价。

设拓扑空间$(X,\mathcal{T})$，$A \subseteq X$，则：
A的闭包（closure）$\overline{A}$是所有包含A的闭集的交集，即
$$\overline{A} \coloneqq \bigcap_{\alpha} B_\alpha，\ A \subseteq B_\alpha，\ \complement_X B_\alpha \in \mathcal{T}。$$
存在性质：

1. $\overline{A}$为闭集；
2. $A \subseteq \overline{A}$；

3. $A=\overline{A}$当且仅当A为闭集。

A的内部（interior）$\mathrm{i}(A)$是所有包含于A的开集的并集，即

$\mathrm{i}(A)\coloneqq\bigcup_{\alpha}O_{\alpha}$，$O_{\alpha}\subseteq A$，$O_{\alpha}\in\mathcal{T}$。

存在性质：

1. $\mathrm{i}(A)$为开集；
2. $\mathrm{i}(A)\subseteq A$；
3. $\mathrm{i}(A)=A$当且仅当A为开集。

A的边界（boundary）$\dot{A}\coloneqq\overline{A}-\mathrm{i}(A)$，$x\in\dot{A}$称为边界点，$\dot{A}$也记为$\partial A$。

存在性质：$\dot{A}$为闭集。证：$X-\dot{A}\coloneqq X-\left[\overline{A}-\mathrm{i}(A)\right]=\left(X-\overline{A}\right)\cup\mathrm{i}(A)$为开集（利用$X-(B-A)=(X-B)\cup A$），因而$\dot{A}$为闭集。

记的X开子集的集合为$\{O_{\alpha}\}$。$\{O_{\alpha}\}$称为$A\subset X$的一个开覆盖（open cover），若

$A\subseteq\bigcup_{\alpha}O_{\alpha}$

§1.3 紧致性

2018年5月29日 22:16

设$\{O_\alpha\}$是$A \subseteq X$的一个开覆盖。若的有限个元素$\{O_\alpha\}$构成的子集$\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \cdots, O_{\alpha_n}\}$也覆盖$A$，就说$\{O_\alpha\}$有$A$的有限子覆盖（finite subcover）。
$A \subseteq X$是紧致的（compact），若它的任意开覆盖都有有限子覆盖。
例如，独点子集$\{x\}$，$x \in X$是紧致的。
$\mathbb{R}$中任意开区间都不是紧致的。$\mathbb{R}$本身也不是紧致的。

拓扑空间$(X, \mathcal{T})$称为T_2空间或Hausdorff空间（Hausdorff space），若$\forall x, y \in X$，$x \neq y$，$\exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}$，使得$x \in O_1$，$y \in O_2$，且$O_1 \cap O_2 = \emptyset$。任意两个不同的点有不相交的邻域。
常见的拓扑空间大多是T_2空间，如$\mathbb{R}^n$。其他如凝聚拓扑空间，是非T_2空间。
$A \subset \mathbb{R}^n$是有界的（bounded），若存在开球$B \subset \mathbb{R}^n$使得$A \subset B$。

若$(X, \mathcal{T})$为T_2空间，$A \subseteq X$是紧致的，则A为闭集。

若$(X, \mathcal{T})$是紧致的且$A \subseteq X$为闭集，则A是紧致的。

$A \subset \mathbb{R}^n$是紧致的，当且仅当A是有界闭集。

设$A \subseteq X$紧致，f：$X \to Y$连续，则$f[A] \subseteq Y$紧致。
说明同胚映射保持子集的紧致性。
在同胚映射下不变的性质称为拓扑性质（topological property）或拓扑不变性（topological invariance）。
紧致性、连通性和T_2性都是拓扑性质。有界性不是拓扑性质，如有界开区间和无界的$\mathbb{R}$同胚。

设X紧致，f：$X \to \mathbb{R}$连续，则$f[X] \subset \mathbb{R}$有界并且取得其最大值和最小值。

设$(X_1, \mathcal{T}_1)$、$(X_2, \mathcal{T}_2)$紧致，则$(X_1 \times X_2, \mathcal{T}$（乘积拓扑）$)$紧致。

映射S：$\mathbb{N} \to X$叫做X中的一个序列（sequence），记作$\{x_n\}$，其中$x_n = S(n)$，$n \in \mathbb{N}$。
$x \in X$叫序列$\{x_n\}$的极限（limit），若对x的任一开邻域O，$\exists N \in \mathbb{N}$使得对$\forall n > N$，$x_n \in O$。
称$\{x_n\}$收敛于x。
$x \in X$叫序列$\{x_n\}$的聚点（accumulation point），若x的任一开邻域都含有$\{x_n\}$的无限多点。
x是$\{x_n\}$的极限$\Rightarrow$ x是$\{x_n\}$的聚点，反之不一定。

元素个数有限的集合称为有限集，反之为无限集。
有限集一定是可数集（countable set）。

对于无限集，若能对其元素建立起到正整数的一一到上映射，则称之为可数的，否则不可数。
拓扑空间$(X,\mathcal{T})$称为C_2空间，即是第二可数的（second countable），若$\mathcal{T}$存在可数（有限或无限）子集$\{O_1,O_2,\cdots,O_K\}\subset\mathcal{T}$或$\{O_1,O_2,\cdots\}\subset\mathcal{T}$使得$\forall O\in\mathcal{T}$可以被表示为$\{O_1,O_2,\cdots,O_K\}$或$\{O_1,O_2,\cdots\}$中的元素之并。
例：$(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathrm{u}})$是第二可数的，因为$\mathcal{T}_{\mathrm{u}}$存在这样的子集，其中的元素（均为开球）的球心均是有理点，半径均为有理数。这样的子集（相当于$\mathbb{Q}^{n+1}$的子集）显然是可数的，并且$\forall O\in\mathcal{T}_{\mathrm{u}}$（开球）可被表为其中的开球之并。

若$A\subset X$紧致，则A中任一序列都有在A内的聚点。反之，若X第二可数且$A\subseteq X$中任一序列都有在A内的聚点，则A紧致。