QFT 讨论班

张沐华

March 2021

1 旋量群 & Clifford 代数

二重覆盖：存在 $2 \to 1$ 的同态

$$C_d : SU(2) \to SO(3)$$

$$\forall R \in SO(3),\ \exists U \in SU(2),\ s.t.\ C_d(U) = C_d(-U) = R$$

$$\Longrightarrow \ker C_d = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \lhd SU(2)$$

同态基本定理：

$$\text{Im}\ C_d = SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$$

类似地，$SL(2,\mathbb{C}) \to SO^+(1,3)$ 也是一个二重覆盖。

旋量群：定义 $Spin(n)$（$Spin(p,q)$）为正交群 $O(n)$（$O(p,q)$）的**连通李子群**的二重覆盖群。

$Spin(n)$ 与 $O(n)$ 具有相同的李代数 $\mathfrak{g}$，且 $n > 2$ 时旋量群单连通；于是（紧）单连通旋量群 $Spin(n)$ 的表示与李代数 $\mathfrak{g}$ 表示一一对应（指数映射）；于是 $Spin(n)$ 的某些表示可以用作 $O(n)$ 的连通李子群的表示。

考虑到 $Spin(n)$ 群元是 $O(n)$ 的连通李子群的两倍，所以这样的表示关系通常是多值的；多值的二重覆盖群表示就是被覆盖连通李子群的**旋量表示**。$Spin(n)$ 表示空间中的元素就是相对于 $O(n)$ 连通李子群的**旋量**。

如何找到 $Spin(n)$ 的表示？先找 $\mathfrak{spin}(p,q)$ 的表示；如何找 $\mathfrak{spin}(p,q)$ 的表示？Clifford 代数可以生成。

Clifford 代数: 对 n 维线性空间 $V_{s<n} = span(e_1, \ldots, e_n)$ 定义内积: $(e_i, e_j) = \eta_{ij}^{(s)}$, 并引入乘法 uv 满足加法结合律、分配律, 以及 Clifford 条件 $\{u,v\} = uv + vu = 2(u,v) = 2u\eta v$, 则 V_s 中全体元素所有可能的加法、数乘、乘积运算扩张生成 Clifford 代数 $Cl(V,\eta)$；$\dim Cl(V,\eta) = 2^{\dim V}$。

例子：对 $Spin(p,q)$，其二重覆盖下述正交群的一个单连通子群：

$$O(p,q) := \{\Lambda \in GL(p+q,\mathbb{R}) | \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\eta^{(p,q)}_{\mu\nu} = \eta^{(p,q)}_{\rho\sigma}\}$$

度规 $\eta^{\mu\nu}$ 生成共 $p+q$ 个 Clifford 基：$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}1$；任意个 Clifford 基的乘积的线性组合构成的集合就是一个 Clifford 代数 $Cl(p,q)$，$\dim Cl(p,q) = 2^{p+q}$。可见只要任意给定一个不定平直度规的号差，就能生成一个 Clifford 代数。

Clifford 代数重要意义在于可以生成正交群的李代数：由 Clifford 基的对易子定义 $S^{\mu\nu} = [\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \in Cl(p,q)$，满足

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = f^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\lambda\tau}S^{\lambda\tau}$$

$f^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\lambda\tau}$ 是 $\mathfrak{spin}(p,q) = \mathfrak{o}(p,q)$ 的结构常数，于是 S 是 $\mathfrak{o}(p,q)$ 的基矢（$\mathfrak{o}(p,q)$ 是 $Cl(p,q)$ 的子空间）。这样的 S 共 $C^2_{p+q} = \dim \mathfrak{o}(p+q)$ 个。

根据前面的结论，$Cl(p,q)$ **代数的表示**自然诱导 $\mathfrak{o}(p,q)$ 的李代数表示，从而指数映射到 $Spin(p,q)$ 的群表示，从而**就是 $O(p,q)$ 的连通子群的旋量表示**。

例：

$SO(3)$ 的旋量表示，是 $SU(2) \simeq Spin(3)$ 的基础表示，可由的 Clifford 代数 $Cl(3)$ 的表示生成：

三维实空间 $\eta = \mathrm{diag}(1,1,1)$，Clifford 基 σ^1、σ^2、σ^3，生成 $Cl(3)$。显然从它们定义的 3 个 $S^{ij} = [\sigma^i,\sigma^j] = 2i\epsilon^{ij}{}_k\sigma^k$ 也是 Clifford 基之一，构成 $\mathfrak{su}(2)$ 的基础表示。于是通过指数映射提升到 $SU(2)$ 的基础表示 $e^{it\sigma^i n_i}$，也就是 $SO(3)$ 的旋量表示——Pauli 旋量。若取 σ^i 的二维矩阵表示，就是 Pauli 矩阵。

$L^{\uparrow}_{+} = SO^{+}(1,3)$ 的旋量表示，是 $SL(2,\mathbb{C}) \simeq Spin(1,3)$ 的表示，可由的 Clifford 代数 $Cl(1,3)$ 的表示生成：

四维闵氏空间 $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$，Clifford 基取为 γ^0、γ^1、γ^2、γ^3，生成 $Cl(1,3)$。可以证明 $S^{\mu\nu} = [\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$ 满足

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = -(4g^{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - 4g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho} - 4g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} + 4g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho})$$

正是洛伦兹代数的李括号，也就是生成了 $\mathfrak{o}(1,3)$。进而通过指数映射提升到 $SL(2,\mathbb{C}) \simeq Spin(1,3)$ 的表示，即 $L^{\uparrow}_{+} = SO^{+}(1,3)$ 有旋量表示：$\Lambda = e^{2i\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$。

题外话：$\dim Cl(1,3) = 16$，物理上习惯取其 16 个基矢分别为：1、γ^{μ}、$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$、$\gamma^{\mu}\gamma^5$、$\sigma^{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$。它们决定了在洛伦兹变换下所有可能的场变换形式。这些基矢最低阶的忠实矩阵表示是四维表示。

后日谈：另一方面，$SL(2,\mathbb{C})$ 是 $SU(2)$ 的复化，可由两个 $SU(2)$ 分别标记其表示：$\mathfrak{o}_{\mathbb{C}}(1,3)=\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)\otimes\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$，因此 $L_+^\uparrow$ 的旋量表示可记作 $\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$，据不同的取值分为不同的旋量表示。

2 Lorentz 群的各种表示

2.1 标量表示

$SL(2,\mathbb{C})$ 的单位表示诱导 $L_+^\uparrow$ 的一维表示。显然在此表示下表示空间的元素是洛伦兹不变量，在物理上对应于**洛伦兹标量**，因此也叫标量表示。

标量表示用符号记为 $(0,0)$ 表示。

2.2 Weyl 旋量表示

作为 $L_+^\uparrow$ 的二重覆盖群，$SL(2,\mathbb{C})$ 本身存在两个不等价不可约二维表示：基础表示 $\rho: M\mapsto M$ 及其复共轭 $\overline{\rho}: M\mapsto M^*$，分别对应 $L_+^\uparrow$ 的左手/右手 Weyl 旋量表示/手征表示。表示空间中的元素就是左/右手 **Weyl 旋量**：ψ_L、ψ_R，各有 2 个复分量。不难得出 $L_+^\uparrow$ 的左右手 Weyl 旋量表示分别为：

$$\Lambda_L=e^{\frac{1}{2}(-i\theta-\beta)\cdot\sigma}$$

$$\Lambda_R=e^{\frac{1}{2}(-i\theta+\beta)\cdot\sigma}$$

左右手区别仅在于 boost 生成元。两者存在关系：$\sigma^2\Lambda_L^*\sigma^2=\Lambda_R$，$\sigma^2\Lambda_R^*\sigma^2=\Lambda_L$，由此可以实现左右手旋量的转换关系：

$$-i\sigma^2\psi_L^*\xrightarrow{\Lambda}-i\sigma^2(\Lambda_L\psi_L)^*=-i\sigma^2\Lambda_L^*\sigma^2\sigma^2\psi_L^*=\Lambda_R(-i\sigma^2\psi_L^*)$$

即 $-i\sigma^2\psi_L^*$ 是右手旋量；同理 $-i\sigma^2\phi_R^*$ 是左手旋量，即左右手总是差一个厄米共轭。

/*

旋量也常用旋量分量指标记号，习惯上把右手用 † 标记，

$$\psi_L=\xi_\alpha\qquad\phi_R=(\chi^\dagger)^{\dot\alpha}\equiv\chi^{\dagger\dot\alpha}$$

作为二维空间的元素，指标 $\alpha,\dot\alpha=1,2$。按此记号，

$$(\xi_\alpha)^\dagger=(\xi^\dagger)_{\dot\alpha}\equiv\xi^\dagger_{\dot\alpha}\qquad(\chi^{\dagger\dot\alpha})^\dagger=\chi^\alpha$$

即左手总是 undaggered & undotted；右手则 daggerd & dotted。在旋量空间的自然矩阵表示下，ξ_α 和 $\chi^{\dagger\dot\alpha}$ 可以视作二分量列矩阵，而经厄米共轭后 $\xi^\dagger_{\dot\alpha}$ 和 χ^α 可以视作二分量行矩阵。

“旋量度规” $\epsilon = i\sigma^2$ 在由旋量构造洛伦兹不变量时非常常见，以左手旋量的自然矩阵表示为例，用 ϵ 可以实现旋量指标的升降，但不能改变手征（因为只有属于同一空间的指标才能缩并）:

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad \xi^\beta = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\alpha = \begin{pmatrix} \xi^2 & -\xi^1 \end{pmatrix}$$

约定：对不带点的重复指标按照“左上-右下”的方式缩并，对带点的重复指标按照“左下-右上”的方式缩并，这样可以与前述行列矩阵的记法自洽；旋量分量都是 grassmann 数，交换会产生一个负号，而旋量度规分量是纯数，与 grassmann 数交换不产生负号。

*/

两个同手征旋量的指标完全缩并后得到纯数，即洛伦兹不变量：

$$\chi^\alpha\xi_\alpha \xrightarrow{\Lambda} \epsilon^{\alpha\beta}(\Lambda_L)^\rho{}_\alpha(\Lambda_L)^\sigma{}_\beta\chi_\rho\xi_\sigma = \det(\Lambda_L)\epsilon^{\alpha\beta}\chi_\alpha\xi_\beta = \chi^\beta\xi_\beta$$

或用更简单的记号记为

$$i\psi_L^T\sigma^2\phi_L = (-i\sigma^2\psi_L^*)^\dagger\phi_L = \psi_R^\dagger\phi_L$$

同理 $i\psi_R^T\sigma^2\phi_R = \psi_L^\dagger\phi_R$ 也是洛伦兹不变量；但形如 $\psi_R^\dagger\phi_R$ 的则不是不变量，因为根本没有相同指标可以缩并。

左/右手 Weyl 旋量表示分别记为 $(1/2,0)$、$(0,1/2)$ 表示。

2.3 矢量表示

$L_+^\uparrow$ 存在唯一的四维不可约表示即自身的基础表示，表示空间的元素即**洛伦兹矢量**，因此也称矢量表示。

另一方面也可以从 Weyl 旋量表示通过张量积构造 $L_+^\uparrow$ 的其它维表示。例如各取一个左手和右手 Weyl 旋量做张量积（$\overline{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$）

$$\begin{aligned}(\psi_L \otimes \phi_R)^{\alpha\dot\beta} &= (\psi_L)^\rho(\phi_R)^{\dot\lambda}\delta_\rho^\alpha\delta_{\dot\lambda}^{\dot\beta} = \frac{1}{2}(\psi_L)^\rho(\sigma^\mu)_{\rho\dot\lambda}(\phi_R)^{\dot\lambda}(\overline{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\psi_L\sigma^\mu\phi_R)(\overline{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot\beta} \equiv \frac{1}{2}[(\psi_L\sigma\phi_R)^\mu(\overline{\sigma}_\mu)]^{\alpha\dot\beta}\end{aligned}$$

这和一般洛伦兹矢量的行为是相同的(通过 $\rho: M \to \mathbb{H}(2,\mathbb{C})$, $x_\mu \mapsto x_\mu\sigma^\mu$),因此 $V^\mu = \psi_L\sigma^\mu\phi_R$ 是洛伦兹矢量，此时的 $L_+^\uparrow$ 表示是 $\Lambda_{LR} = \Lambda_L \otimes \Lambda_R$，这一结论可记为 $(1/2,0)\otimes(0,1/2) = (1/2,1/2)$。

此外，两个左手或右手 Weyl 旋量也可以构造 $i\psi_L^\dagger\overline{\sigma}^\mu\psi_L$、$i\phi_R^\dagger\sigma^\mu\phi_R$，即 $(1/2,0)\otimes(1/2,0) = (0,0)\oplus(1,0)$，h.c.。

2.4 Dirac 旋量表示

再来考虑 $SL(2,\mathbb{C})$ 的其他可约四维表示；最直接的通过将两个不等价的二维 Weyl 旋量表示空间直和就可以得到新的四维表示空间：$(1/2,0)\oplus(0,1/2)$，这样得到 **Dirac 旋量** $\psi=\psi_L\oplus\phi_R$，有 4 个复分量；$L_+^\uparrow$ 的 Dirac 旋量表示就是 $\Lambda_D=\Lambda_L\oplus\Lambda_R$。

通过 Dirac 旋量构造洛伦兹不变量更复杂一些，已知 $\psi_R^\dagger\psi_L$、$\psi_L^\dagger\psi_R$ 是洛伦兹不变的，但 $\psi^\dagger\psi\xrightarrow{\Lambda}\psi^\dagger\Lambda_D^\dagger\Lambda_D\psi$ 不是,因为 Λ_D 不是幺正的($L_+^\uparrow$ 非紧)。但考虑到赝幺正关系 $\gamma^0\Lambda_D^\dagger\gamma^0=\Lambda_D^{-1}$ 可令 $\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$，有 $\overline{\psi}\psi\xrightarrow{\Lambda}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\Lambda_D^\dagger\gamma^0\Lambda_D\psi=\overline{\psi}\psi$ 是洛伦兹不变量。

注意到 $SL(2,\mathbb{C})$ 有几个等价的四维表示，分别对应 $Cl(1,3)$ 代数的不同四维矩阵表示（始终有 $(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0$，$(\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i$）：

2.4.1 Weyl 手征表示

在 Weyl 基的手征表示下

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad\gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}$$

这时写为矩阵形式有 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_L\\\phi_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_\alpha\\\chi^{\dagger\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$。由 Dirac 旋量得到 Weyl 旋量可通过构造手征投影算符：

$$P_L\psi=\frac{1-\gamma^5}{2}\psi=\begin{pmatrix}\psi_L\\0\end{pmatrix},\qquad P_R\psi=\frac{1+\gamma^5}{2}\psi=\begin{pmatrix}0\\\phi_R\end{pmatrix}$$

注：仅在 Weyl 手征表示下会投影到左右手 Weyl 旋量；在其它表示下，按照上式定义 Dirac 旋量的左右手征分量。

通过 $L_+^\uparrow$ 的表示可以得到 **Dirac 方程**

$$(i\partial\!\!\!/-m)\psi=\begin{pmatrix}-m&i\sigma^\mu\partial_\mu\\i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu&-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\\phi_R\end{pmatrix}=0$$

Dirac 方程是可以描述质量的，仅在 $m=0$ 时左右手旋量脱耦为 **Weyl 方程**：

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L=0$$
$$\sigma^\mu\partial_\mu\phi_R=0$$

质量项必须是一个洛伦兹标量，而根据前面的分析，构造这样的双线性型必须各取一个左右手旋量，这就必然导致左右手的混合，不可能由单个 Weyl 旋量构造质量项，因此标准模型中 Dirac 旋量和 Weyl 旋量分别用来描述有质量和无质量的费米子（带电轻子/中微子）。

2.4.2 helicity

consider the operator $h = \dfrac{\sigma \cdot p}{|p|}$, since $E = |p|$ for massless particle, it is clear that purleft-hand and right-hand Weyl spinors are both eigenstates of h with opposite eigenvalue ± 1; that's called **helicity**. However, for massed particle, the concepts helicity and chirality are not always the same.

2.4.3 Dirac-Pauli 正则表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

其优点在于将能量对角化，非相对论极限下比较方便。

2.4.4 Majorana 表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = i\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = -i\begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}$$

该表示下 Dirac 方程是实的，$L_+^\uparrow$ 群元的表示也是实的；从而只要取一个实旋量 $\psi = \psi^*$，在该表示下 Dirac 方程就有纯实解，它被 $L_+^\uparrow$ 的任何作用的结果都是实旋量（这就是**（4 分量的）Majorana 旋量**的定义方式之一）。

3 CPT for spinor

3.1 Parity

Parity：$\mathcal{P} : (t, \mathbf{x}) \mapsto (t, -\mathbf{x})$;

Recall the concept of helicity $h = \dfrac{\sigma \cdot p}{|p|}$, since parity commutes with spin, σ, and energy but flips the momentum, it will take left/right-hand spinors to another type. Therefore parity cannot be irreducibly represented by either Weyl spinor representation alone.

For Dirac spinors, which comprise left- and right-handed spinors, we can see that parity just swaps left and right components:

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = 0 \overset{\mathcal{P}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -m & i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu \\ i\sigma^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = 0$$

the result is equivalent to exchanging the status of ψ_L and ψ_R , but keeping the Dirac spinor invariant. Hence the parity transformation can be written in the simple form

$$P : \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \eta_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x})$$

in the Weyl basis, so as known as chirality representation. Specifically $\eta_p^* \eta_p = 1$.

3.2 Time reversal

Time reversal： $\mathcal{T} : (t, \mathbf{x}) \mapsto (-t, \mathbf{x})$;

Consider what a spinor should be like such that at least the kinetic term of Lagrangian is invariant under $\mathcal{T}$; specifically, $\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi$ should transform as a 4-vector, which leads to $\overline{\psi}\gamma^0\psi \rightarrow -\overline{\psi}\gamma^0\psi$, also can be written as $\psi^\dagger\psi \rightarrow -\psi^\dagger\psi$ —it says we need to turn a positive definite quantity into a negative definite quantity, which is impossible for any **linear unitary** transformation.

To solve this we have to try some nonlinear operator, for example, let $\mathcal{T}$ act on c-numbers as well as operators (so-called an ”anti-linear operator”),

$$\mathcal{T}(a + ib) = \mathcal{T}a - i\mathcal{T}b$$

also this T affects the γ matrices

$$\mathcal{T} : \gamma^{0,1,3} \mapsto \gamma^{0,1,3} \quad \gamma^2 \mapsto -\gamma^2$$

Then, for $i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi$ to be invariant, we need $\overline{\psi}\gamma^0\psi$ to be invariant while $\overline{\psi}\gamma^i\psi \rightarrow -\overline{\psi}\gamma^i\psi$. Thus, in $\mathcal{T} : \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto T\psi(-t, \mathbf{x})$,

$$\{T, \gamma^{1,3}\} = [T, \gamma^{0,2}] = 0$$

under the chirality representation define $T = \gamma^1\gamma^3 = -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$,then

$$\mathcal{T} : \psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \gamma^1\gamma^3\psi(-t, \mathbf{x})$$

3.3 Charge conjugation

一般而言会存在外场。考虑与矢量场 A^μ 耦合的 Dirac 方程

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

某些理论中可能存在耦合系数（荷）e 相反而 m 相同的两个旋量解

$$(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi^c = 0$$

希望找到一种构造能自然地从原式得到荷共轭式。自然的想法是取原式的复共轭，再找到一种变换 $\mathscr{C}$ 使 $\gamma^{\mu*} \to -\gamma^{\mu}$，同时 $\psi^* \to \psi^c$。设 $\psi^c = \mathscr{C}\psi^*$，则

$$\Big[-\gamma^{\mu*}(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/) - m\Big]\mathscr{C}^{-1}\psi^c = 0$$

$$\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}\Big[-\gamma^{\mu*}\mathscr{C}^{-1}(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/) - m\mathscr{C}^{-1}\Big]\psi^c = 0$$

$$\mathscr{C}^{-1}\Big[-\mathscr{C}\gamma^{\mu*}\mathscr{C}^{-1}(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/) - m\Big]\psi^c = 0$$

可见只要满足 $\mathscr{C}\gamma^{\mu*}\mathscr{C}^{-1} = -\gamma^{\mu}$，这样的 $\psi^c = \mathscr{C}\psi^*$ 就的确满足 $(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi^c = 0$。在矩阵表示下为了简便，也取 $\psi^c = \mathcal{C}\overline{\psi}^T$。

手征表示下由 $(\gamma^{\mu})^T = \begin{cases} -\gamma^{\mu} & \text{for} \quad \mu = 1,3 \\ \gamma^{\mu} & \text{for} \quad \mu = 0,2 \end{cases}$，则 $\mathcal{C}$ 要与 $\gamma^{1,3}$ 对易，与 $\gamma^{0,2}$ 反对易。可取

$$\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$$

$$\psi^c = i\gamma^2\psi^* = -i(\overline{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T$$

不难验证这样的确满足要求，且 $-\mathcal{C} = \mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}$。

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \qquad \psi^c = \begin{pmatrix} i\sigma^2\phi_R^* \\ -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix}$$

3.4 CPT & Dirac bilinears

Consider the transform $\mathcal{CPT}$:

$$\mathcal{CPT} : \psi(x) \mapsto -i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-x) \equiv -\gamma^5\psi^*(-x)$$

it sends particles into antiparticles moving as if been watched in reverse in a mirror.

Now consider the so-called "Dirac bilinear" form $\overline{\psi}\Gamma\psi$ where Γ represents all 16 base "vectors" of $Cl(1,3)$. Not only they satisfy the definite law under the continuous Lorentz transformation, but with a specific sign under C, P and T. Calculation is tedious but not difficult (I've checked):

	$\overline{\psi}\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
P	1	$(-1)^\mu$	-1	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	1	$(-1)^\mu$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	1	-1	1	1	1
CPT	1	-1	1	-1	-1

That's why the 5 type of Lorentz invariant are called scalar, vector, pseudo-scalar, pseudo-vector, tensor respectively.

Define two current:

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \qquad j^{\mu 5}(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

they are also the Noether currents corresponding to the **global $U(1)$ gauge transformation** and the **global $U_A(1)$ chiral transformation**:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \qquad \psi(x) \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$$

The vector current is always conversed if ψ satisfies the Dirac equation:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = im\overline{\psi}\psi + \overline{\psi}(-im\psi) = 0$$

if couple the Dirac field to the electromagnetic field, j^μ will become the electric current density. On the other hand,

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi$$

the axial vector current conserve only if $m = 0$. These two current can be combined as

$$j_L^\mu = \frac{1}{2}(j^\mu - j^{\mu 5}) = \overline{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu P_L\psi = \overline{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi = \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$$

$$j_R^\mu = \frac{1}{2}(j^\mu + j^{\mu 5}) = \overline{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

respectively represents the current density caused by left/right-hand particle.

Products of Dirac bilinears obey Fierz identities. In the simplest of cases:

$$\begin{pmatrix} (\overline{u}_1 u_2)(\overline{u}_3 u_4) \\ (\overline{u}_1 \gamma^\mu u_2)(\overline{u}_3 \gamma_\mu u_4) \\ (\overline{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_2)(\overline{u}_3 \sigma_{\mu\nu} u_4) \\ (\overline{u}_1 \gamma^\mu \gamma_5 u_2)(\overline{u}_3 \gamma_\mu \gamma_5 u_4) \\ (\overline{u}_1 \gamma_5 u_2)(\overline{u}_3 \gamma_5 u_4) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\overline{u}_1 u_4)(\overline{u}_3 u_2) \\ (\overline{u}_1 \gamma^\mu u_4)(\overline{u}_3 \gamma_\mu u_2) \\ (\overline{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_4)(\overline{u}_3 \sigma_{\mu\nu} u_2) \\ (\overline{u}_1 \gamma^\mu \gamma_5 u_4)(\overline{u}_3 \gamma_\mu \gamma_5 u_2) \\ (\overline{u}_1 \gamma_5 u_4)(\overline{u}_3 \gamma_5 u_2) \end{pmatrix}$$

in which the “+” is for boson statistics and “−” for fermion statistics.

3.5 Majorana spinor

考虑荷共轭是其本身的 Dirac 旋量：$\psi_M^c = \begin{pmatrix} i\sigma^2\psi_R^* \\ -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \psi_M$，因而其左右手分量并不独立，自由度比一般的 Dirac 旋量少一半：

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \xi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

只有 2 个独立的复分量；从这个意义上来说相当于一个 Weyl 旋量，照此即定义 $\psi = \psi^c$ 的 Dirac 旋量为**（2 分量的）Majorana 旋量**。另一方面，也相当于纯实 Dirac 旋量，因此 Majorana 旋量总可以对应于 Majorana 表示下方程的一个解，所以也有定义 $\psi = \psi^*$ 的 Dirac 旋量为 **（4 分量的）Majorana 旋量**。

将 2 分量 Majorana 旋量带入 Weyl 旋量表示下的 Dirac 方程得到两个方程：

$$\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + m\sigma^2\psi_L^* = 0$$

$$\sigma^\mu \sigma^2 \partial_\mu \psi_L^* - m\psi_L = 0$$

只有一个是独立的（一般去上式）；还可等价地写为右手旋量形式

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + m\sigma^2\psi_R^* = 0$$

另一方面，将 4 分量 Majorana 旋量带入 Majorana 表示下的纯实 Dirac 方程可得

$$i\partial\psi^c - m\psi = 0$$

这些方程都是等价的，统称为 **Majorana 方程**。显然，对于耦合到电磁场的情况，此时荷共轭具体为电荷共轭，表示正反粒子之间的联系；因此电荷 Majorana 旋量只可能用来描述反粒

子是自己的粒子，也即中性粒子。当然，一般的 Dirac 旋量、Weyl 旋量也可以描述中性粒子。为作区分，这三类旋量描述的分别叫 Majorana 费米子、Dirac 费米子、Weyl 费米子。尽管都可描述中性粒子，区别在于：Majorana 费米子的生灭算符相同，从而反粒子即是自身（双 β 无中微子衰变?），Dirac 中性费米子则不然。

4 Free Solution of Dirac Eq.

自由时空平移不变性表明存在平面波解 $e^{\pm ip\cdot x}$。一般的自由解尝试形如（先考虑正能部分）$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}$ with $p^0 > 0$, $p^2 = m^2$,then it satisfies ($\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$)

$$(\not{p} - m)u(p) = 0$$

clearly in the rest frame $u((m,0,0,0)) = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi \end{pmatrix}$, then boost it in any frame with condition $(\not{p} - m)u(p) = 0$. If $u(p) = A(\not{p} + m)u((m,0,0,0))$ then it obeys Dirac Eq., so

$$u(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(m + E_{\mathbf{p}})}} u((m,0,0,0)) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p}\chi \\ \sqrt{\overline{\sigma} \cdot p}\chi \end{pmatrix}$$

Similarly for negative energy solution:

$$v(p) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(m + E_{\mathbf{p}})}} v((m,0,0,0)) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p}\xi \\ -\sqrt{\overline{\sigma} \cdot p}\xi \end{pmatrix}$$

In conclusion there are a total of four linearly independent solutions, for positive/negative energy and up/down spin state respectively, and in useful gauge

$$\overline{u}^{(r)} u^{(s)} = -\overline{v}^{(r)} v^{(s)} = 2m\delta^{rs} \qquad \overline{u}^{(r)} v^{(s)} = -\overline{v}^{(r)} v^{(s)} = 0$$

Constructively, they can be taken as exactly four independent components of the Dirac spinor, and that's why we say Dirac eq. predicts the antiparticle, as well as possesses the superiority of being able to handle spin states naturally.

Especially we have two projection operators

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)} \overline{u}^{(s)} = \not{p} + m$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)} \overline{v}^{(s)} = \not{p} - m$$

acting on the Dirac spinor, they can take out the positive and negative energy parts.