Programación Lineal: Resolución del Ejercicio 3

Juan Pérez, Alejandro Arévalo y Julián García
Universidad de Cundinamarca

26 de septiembre de 2025

Resumen

En este documento se presenta la resolución detallada de un problema de *programación lineal*, cuyo objetivo es determinar el plan de producción óptimo de dos modelos de calculadoras para maximizar la ganancia total, considerando limitaciones en tiempo de fabricación y presupuesto disponible.

Palabras clave: programación lineal, maximización, región factible, función objetivo.

1. Introducción

La programación lineal es una herramienta matemática usada para optimizar una función lineal bajo restricciones también lineales. En este caso se busca encontrar la cantidad óptima de dos tipos de calculadoras a fabricar, de modo que la ganancia total sea máxima sin exceder las horas de trabajo ni los recursos económicos disponibles.

2. Enunciado del problema

Una compañía produce dos tipos de calculadora, el modelo C1 y el modelo C2. El tiempo de fabricación es de 1 hora para el modelo C1 y de 4 horas para el modelo C2. El costo de fabricación es de 30€ para C1 y 20€ para C2. La empresa dispone de 1600 horas para fabricar las calculadoras y 18000€ para gastos viables. La ganancia en cada calculadora C1 es de 10€ y en cada calculadora C2 es de 8€. Se pide determinar el plan de producción que maximice la ganancia.

3. Planteamiento y definición de variables

Definimos las variables de decisión como:

- x: número de calculadoras del modelo C1 a fabricar.
- y: número de calculadoras del modelo C2 a fabricar.

3.1. Función objetivo

Queremos maximizar la ganancia total:

$$Z = 10x + 8y$$

3.2. Restricciones

- Restricción de tiempo: cada calculadora C1 requiere 1 hora y cada C2 requiere 4 horas, con un máximo de 1600 horas disponibles:

$$x + 4y \leq 1600$$

- Restricción de presupuesto: cada calculadora C1 cuesta 30€ y cada C2 cuesta 20€, con un presupuesto máximo de 18000€:

$$30x + 20y \leq 18000$$

- Restricciones de no negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Por tanto, el modelo de programación lineal es:

$$\text{Maximizar } Z = 10x + 8y$$
$$\text{sujeto a: } \begin{cases} x + 4y \leq 1600 \\ 30x + 20y \leq 18000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

4. Método gráfico: determinación de la región factible y vértices

Representamos las restricciones en el plano (x, y) para determinar los puntos de intersección (vértices) que delimitan la región factible.

4.1. Cálculo de intersecciones (vértices candidatos)

1. Intersección con los ejes:

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1600 \text{ (por la 1}^{\text{a}} \text{ restricción)} \\ x = 600 \text{ (por la 2}^{\text{a}} \text{ restricción)} \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4y = 1600 \Rightarrow y = 400 \\ 20y = 18000 \Rightarrow y = 900 \end{cases}$$

La menor de ellas (por ambas restricciones) es $y = 400$.

2. Intersección entre las dos restricciones:

$$\begin{cases} x + 4y = 1600 \\ 30x + 20y = 18000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1600 - 4y \\ 30(1600 - 4y) + 20y = 18000 \end{cases}$$

$$48000 - 120y + 20y = 18000 \Rightarrow -100y = -30000 \Rightarrow y = 300$$

$$x = 1600 - 4(300) = 400$$

Por tanto, el punto de intersección es $(400, 300)$.

4.2. Tabla resumen de vértices candidatos

Vértice	x	y
A	0	0
B	600	0
C	400	300
D	0	400

5. Evaluación de la función objetivo en los vértices

Evaluamos $Z = 10x + 8y$ en cada vértice:

Vértice	(x, y)	Cálculo	Z (€)
A	(0, 0)	$10(0) + 8(0)$	0
B	(600, 0)	$10(600) + 8(0)$	6000
C	(400, 300)	$10(400) + 8(300)$	7600
D	(0, 400)	$10(0) + 8(400)$	3200

$$\text{Máxima ganancia: } Z_{\text{máx}} = 7600 \text{ € en } (x, y) = (400, 300)$$

6. Interpretación de la solución y comprobación

La compañía debe fabricar:

$$x = 400 \text{ calculadoras del modelo C1}, \quad y = 300 \text{ calculadoras del modelo C2.}$$

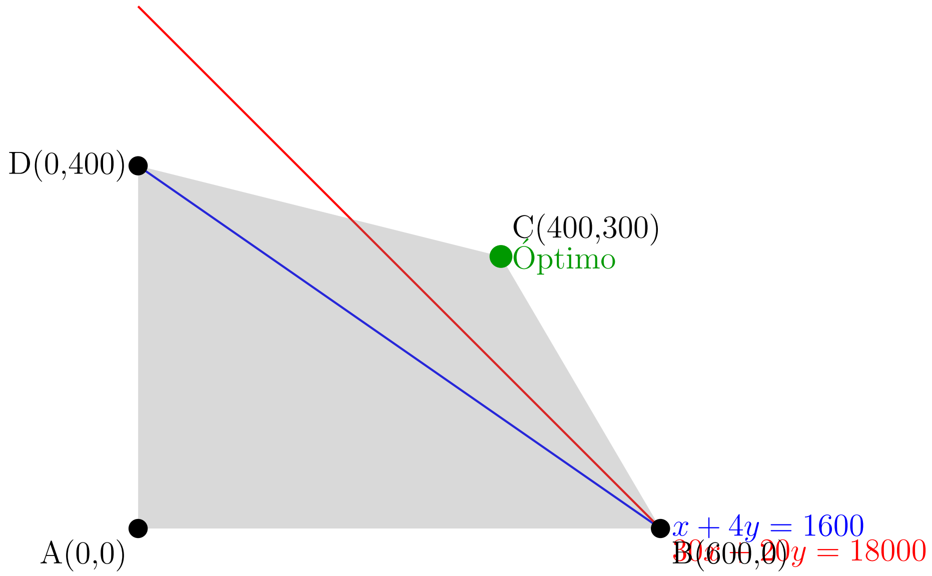
Comprobación de recursos:

$$\text{Horas: } 400(1) + 300(4) = 1600 \text{ horas (justas).}$$

$$\text{Coste: } 30(400) + 20(300) = 12000 + 6000 = 18000 \text{ € (justo).}$$

Por tanto, la solución utiliza completamente los recursos disponibles y maximiza la ganancia.

7. Representación gráfica de la región factible



8. Observaciones adicionales

La solución encontrada aprovecha totalmente las horas disponibles y el presupuesto, sin dejar recursos ociosos. Cualquier cambio en los costos o tiempos de fabricación modificaría las restricciones y, por tanto, el punto óptimo.

9. Conclusión

El análisis muestra que la empresa debe fabricar 400 calculadoras del modelo C1 y 300 del modelo C2 para obtener la ganancia máxima de 7600€. Esta solución cumple todas las restricciones y utiliza de forma óptima los recursos disponibles.