

# DISCRIMINATOR REJECTION SAMPLING

**Samaneh Azadi\***  
UC Berkeley

**Catherine Olsson**  
Google Brain

**Trevor Darrell**  
UC Berkeley

**Ian Goodfellow**  
Google Brain

**Augustus Odena**  
Google Brain

김 준 태

# Motivation

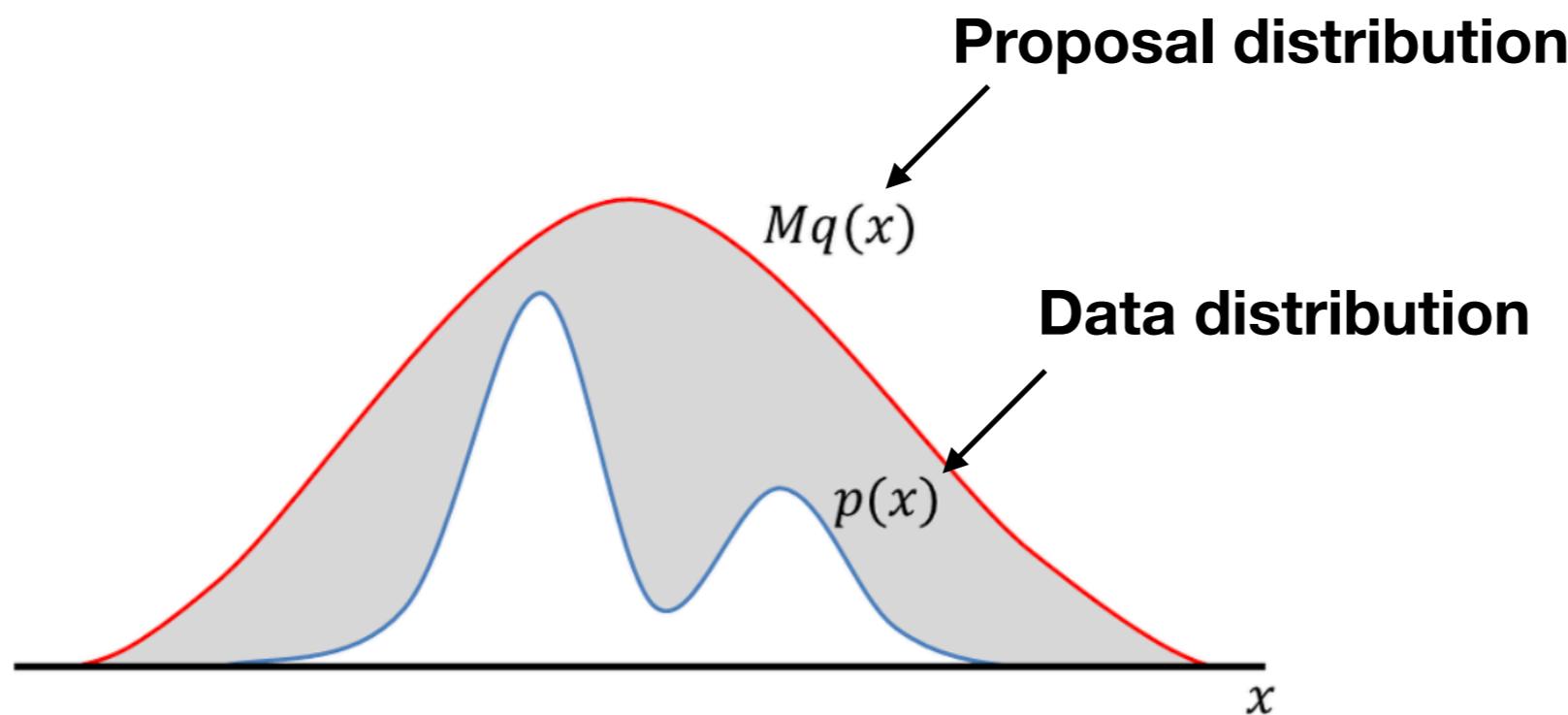
- 이 논문은 학습이 완료된 GAN의 Discriminator를 이용하여 Generator가 생성한 sample들을 post-processing을 통해 퀄리티를 향상시키려 시도한 논문.
- 특히, 이 논문은 GAN의 discriminator를 이용하여 rejection sampling방법을 사용했다.

# Rejection Sampling

- Rejection sampling은 distribution으로부터 샘플을 생성하기 위한 방법이다.
- Rejection sampling은 샘플을 만들 distribution p에서 다음과 같은 조건이 만족될때 효율적으로 사용할 수 있다..
  1. Distribution p의 pdf를 알 수 있다.
  2. 그치만 p에서 직접 sampling하는 것은 어렵다.

# Rejection Sampling

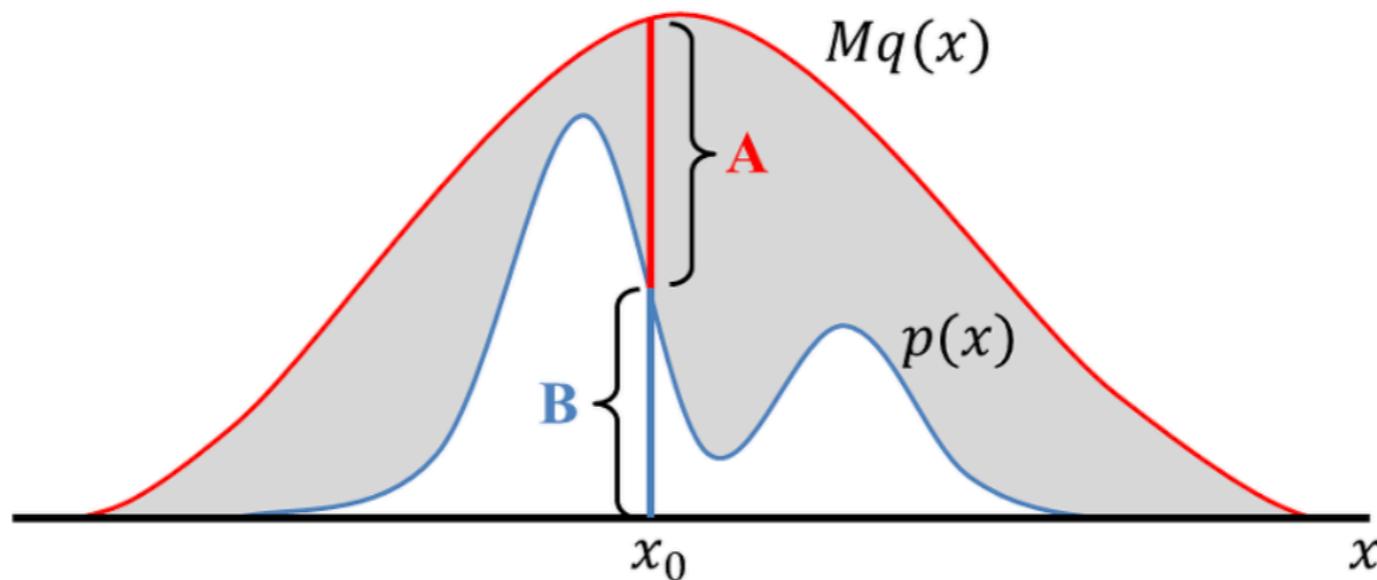
- Rection sampling의 기본 동작은 샘플을 쉽게 생성할수있는  $q(x)$ 에서 샘플들을 생성한 후 샘플들의 분포가  $p(x)$ 를 따르도록 수정하는것.
- 즉 실제로는  $q(x)$ 에서 sample이 생성 되었지만  $p(x)$ 에서 생성된것처럼 만드는것



$$M = \max_x \frac{p(x)}{q(x)}$$

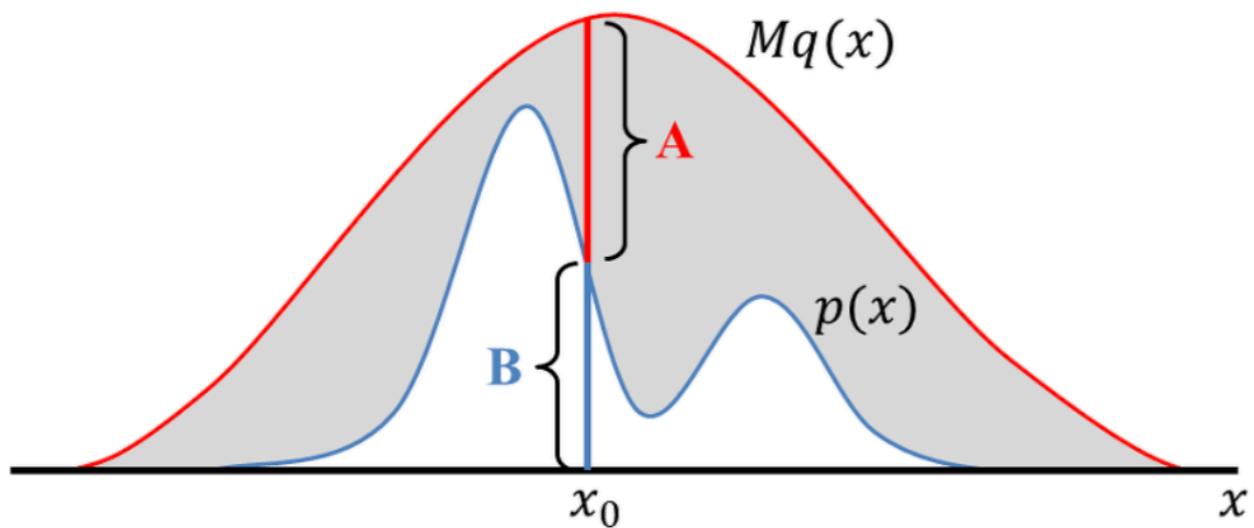
$$p(x) \leq Mq(x)$$

# Rejection Sampling



$[0, Mq(x_0)]$  사이의 uniform distribution에서  $u$ 를 생성하여 A영역에 존재하면  
reject B영역에 존재하면 accept

# Rejection Sampling



---

**Algorithm 1:** Rejection sampling

---

**Input** : the number of samples  $N$ ,  
target distribution  $p$ ,  
proposal distribution  $q$ ,  
a given constant  $M$

**Output**: samples  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

```
1  $X = \{\}$ 
2 while  $n < N$  do
3    $x_0 \sim q(x)$ 
4    $u \sim U(0, 1)$ 
5   if  $u < \frac{p(x_0)}{Mq(x_0)}$  then
6      $X \leftarrow X \cup \{x_0\}$ 
7      $n \leftarrow n + 1$ 
8   end
9 end
```

---

# Assumption

## Assumption1.

$p_g(x)$ ,  $p_d(x)$ 는 같은 support를 가진다.

-> 만약 같은 support를 가지지 않으면 대부분 0이 된다.

## Assumption2.

어떤 방법을 통해  $M = \max_x \frac{p(x)}{q(x)}$  를 계산할수 있다.

## Assumption3.

- Discriminator는 마지막 layer가 sigmoid고 cross-entropy로 학습한다.
- Optimal Discriminator의 식은  $D^*(x) = \frac{p_d(x)}{p_d(x) + p_g(x)}$  이다.

# Discriminator Rejection Sampling

- 이 논문에서는 **proposal distribution**을 학습이 완료된 **generator**로 한다.
- $M = \max_x \frac{p_d(x)}{p_g(x)}$
- $p_g(x)$ ,  $p_d(x)$  모두 **implicit**하게 정의된 값이기 때문에 정확한 값을 알수 없어
- **acceptance probability?**

$$1 \quad D^*(x) = \frac{p_d(x)}{p_d(x) + p_g(x)}$$

$$2 \quad D(x) = \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-\tilde{D}(x)}}$$

$$3 \quad D^*(x) = \frac{1}{1 + e^{-\tilde{D}^*(x)}} = \frac{p_d(x)}{p_d(x) + p_g(x)}$$

$$1 + e^{-\tilde{D}^*(x)} = \frac{p_d(x) + p_g(x)}{p_d(x)}$$

$$4 \quad p_d(x) + p_d(x)e^{-\tilde{D}^*(x)} = p_d(x) + p_g(x)$$

$$p_d(x)e^{-\tilde{D}^*(x)} = p_g(x)$$

$$\frac{p_d(x)}{p_g(x)} = e^{\tilde{D}^*(x)}$$

# Discriminator Rejection Sampling

## Rejection Sampling

M

$$M = \max_x \frac{p(x)}{q(x)}$$

Acceptance  
Probability

$$\frac{p(x_0)}{Mq(x_0)}$$

Results

$$u < \frac{p(x_0)}{Mq(x_0)}$$

## Discriminator Rejection Sampling

$\frac{p_d(x)}{p_g(x)}$ 를 최대로 하는  $x$ 를  $x^*$ 라 가정하자

$$M = p_d(x^*)/p_g(x^*) = e^{\tilde{D}^*(x^*)}$$

$$e^{\tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^*} \in [0, 1]$$

$$\psi < e^{\tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^*}$$

# Practice Scheme

**Problem 1.**

**optimal D를 구할 수 없다.**

**Problem 2.**

$p_d$  와  $p_g$ 의 support가 같지 않고 intersection이 작을 경우, 많은 부분에서  $p_d/p_g$ 이 0이 된다.

**Solution 1, 2**

**Empirically하게 성공적이게 되었다는걸 증명했다.**

# Practice Scheme

## Problem 2.

샘플이 무한하지 않기 때문에 정확한  $M$ 값을 구할 수 없다.

## Solution 2.

학습이 완료된  $D$ 가 학습이 잘 되었다고 가정한다.  
10000번의 샘플링을 통해  $M$ 을 구한 후 샘플링을 할때마다 갱신한다.

# Practice Scheme

## Problem 3.

**Rejection sampling은 target distribution이 고차원일때  
Acceptance probability가 매우 낮게 나오는 경향이 있다.**

## Solution 3.

$$\frac{1}{1 + e^{-F(x)}} = e^{\tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^*}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \tilde{D}^*(x) - \log(e^{\tilde{D}_M^*} - e^{\tilde{D}^*(x)}) \\ &= \tilde{D}^*(x) - \log\left(\frac{e^{\tilde{D}_M^*}}{e^{\tilde{D}_M^*}}e^{\tilde{D}_M^*} - \frac{e^{\tilde{D}_M^*}}{e^{\tilde{D}_M^*}}e^{\tilde{D}^*(x)}\right) \\ &= \tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^* - \log(1 - e^{\tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^*}) \end{aligned}$$

$$\hat{F}(x) = \tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^* - \log(1 - e^{\tilde{D}^*(x) - \tilde{D}_M^* - \epsilon}) - \gamma$$

# Experiments

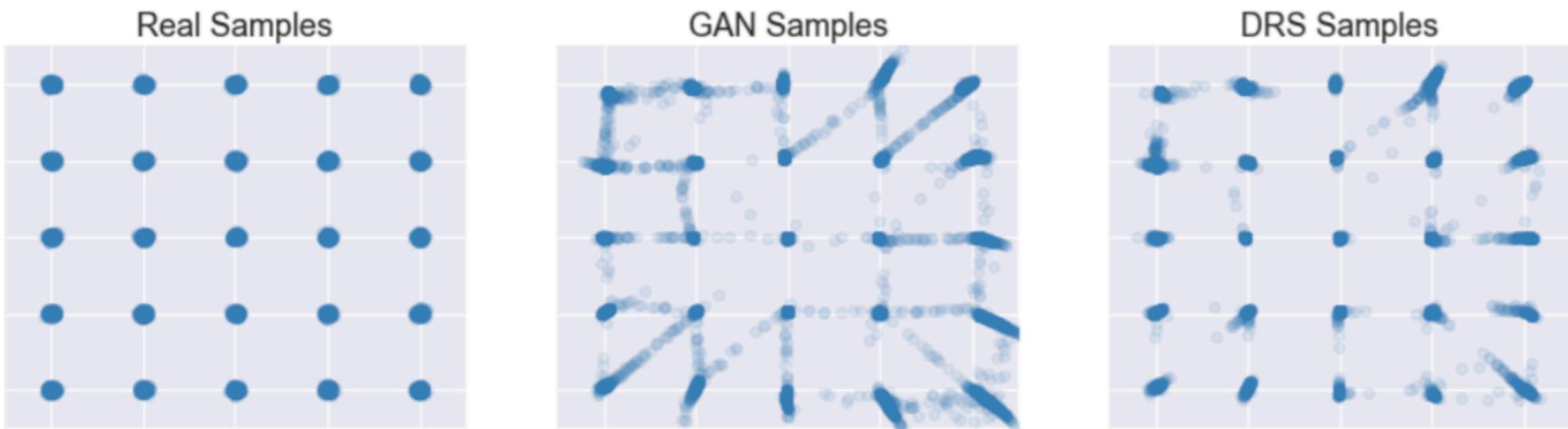


Table 1: Results with and without DRS on 10,000 generated samples from a model of a 2D grid of Gaussian components.

	# of recovered modes	% “high quality”	std of “high quality” samples
Without DRS	$24.8 \pm 0.4$	$70 \pm 9$	$0.11 \pm 0.01$
With DRS	$24.8 \pm 0.4$	$90 \pm 2$	$0.10 \pm 0.01$

# Experiments

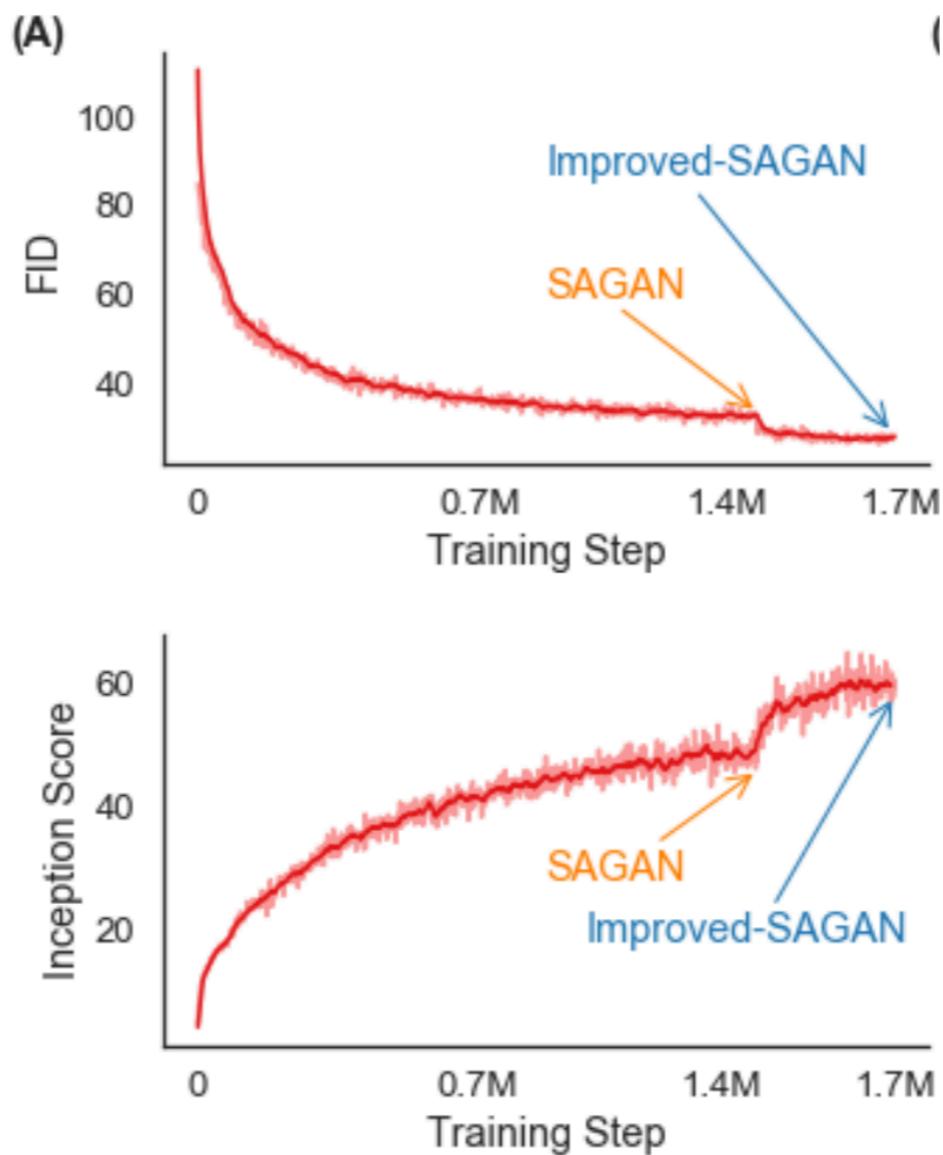


Table 2: Results with and without DRS on 50K ImageNet samples. Low FID and high IS are better.

SAGAN		Improved-SAGAN		
IS	FID	IS	FID	
Without DRS	$52.34 \pm 0.45$	$18.21 \pm 0.14$	$62.36 \pm 0.35$	$14.79 \pm 0.06$
With DRS	$61.44 \pm 0.09$	$17.14 \pm 0.09$	$76.08 \pm 0.30$	$13.57 \pm 0.13$

# Experiments

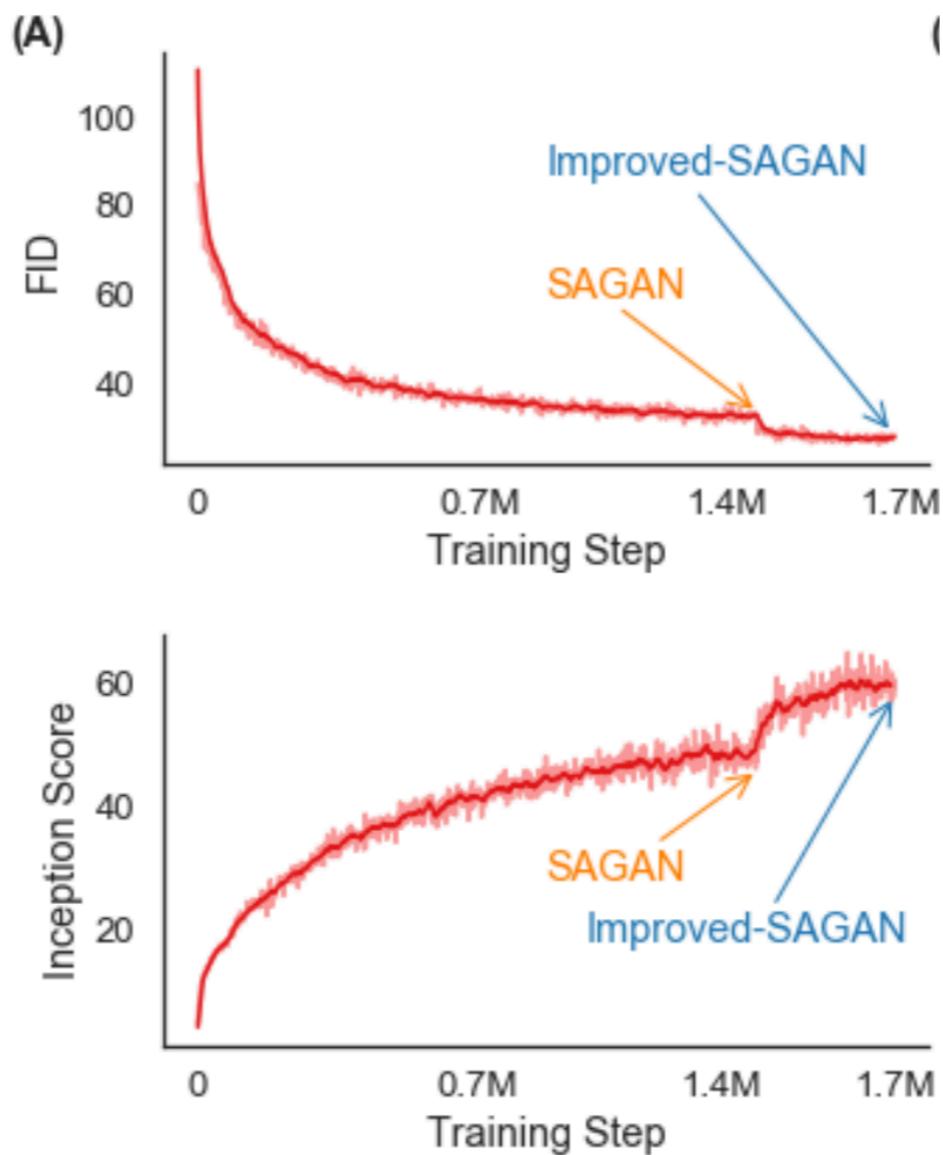
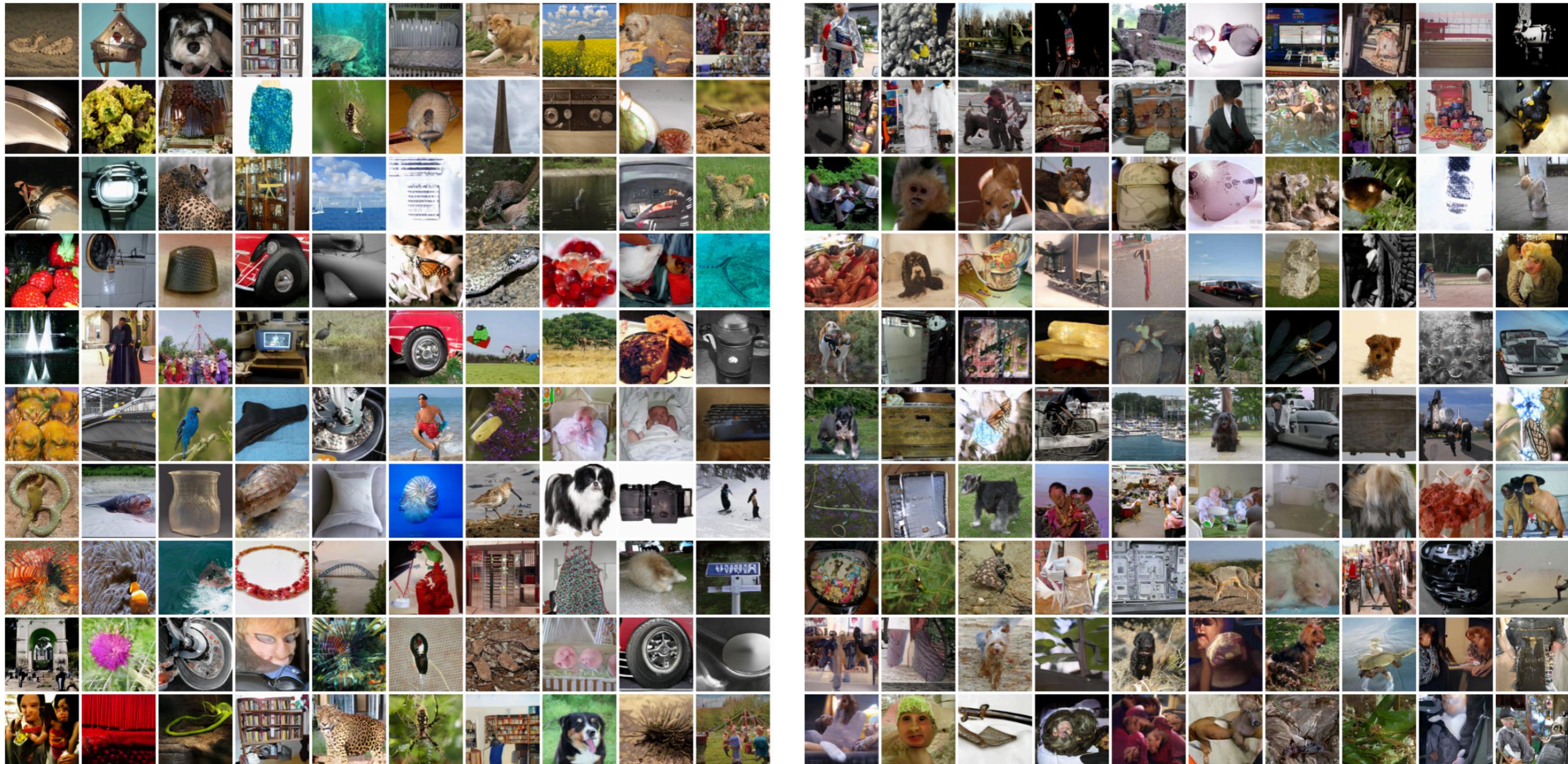


Table 2: Results with and without DRS on 50K ImageNet samples. Low FID and high IS are better.

SAGAN		Improved-SAGAN		
IS	FID	IS	FID	
Without DRS	$52.34 \pm 0.45$	$18.21 \pm 0.14$	$62.36 \pm 0.35$	$14.79 \pm 0.06$
With DRS	$61.44 \pm 0.09$	$17.14 \pm 0.09$	$76.08 \pm 0.30$	$13.57 \pm 0.13$

# Experiments



High acceptance probability

Low acceptance probability

감사합니다.