Optimisation globale d'une fonction oscillante

RANAIVOSON Lanto Mahaliana Finoana

Introduction

Dans ce travail, nous étudions la fonction suivante :

$$f(x, y) = \exp(\sin(50x)) + \exp(\sin(50y)) + \frac{x^2 + y^2}{4},$$

définie sur le domaine $[-1, 1]^2$. Cette fonction combine à la fois des termes hautement oscillants (sin) et une partie quadratique régulière. L'objectif est de visualiser son paysage, d'identifier son minimum global par deux méthodes d'optimisation globale (recuit simulé et CMA-ES), de détecter ses optima locaux, et enfin de formuler une conjecture sur leur nombre moyen.

1 Visualisation du paysage de la fonction

La fonction $f(x, y)$ présente un paysage très complexe. En utilisant une heatmap et des lignes de niveau (iso-lines), on observe :

- Des variations rapides dues aux termes $\exp(\sin(50x))$ et $\exp(\sin(50y))$,
- Un fond légèrement convexe dû au terme quadratique $\frac{x^2+y^2}{4}$,
- De nombreux minima locaux répartis de manière quasi-périodique.

Cela rend l'optimisation globale difficile, car les algorithmes risquent de rester coincés dans un optimum local.

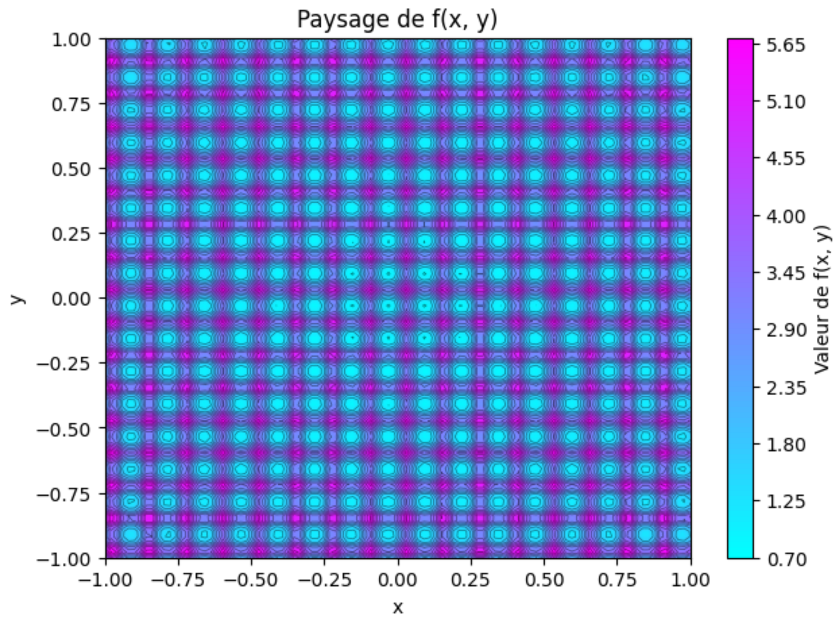

FIGURE 1 – Heatmap de la fonction $f(x, y)$ sur $[-1, 1]^2$.

2 Recherche du minimum global

Deux algorithmes ont été testés pour trouver le minimum global :

Recuit simulé

- Point trouvé : $(x, y) \approx (-0.0314, -0.0314)$
- Valeur minimale : $f(x, y) \approx 0.736$
- Temps d'exécution : 0.226 secondes
- Itérations : 100

CMA-ES

- Point trouvé : $(x, y) \approx (-0.0314, -0.0314)$
- Valeur minimale : $f(x, y) \approx 0.736$
- Temps d'exécution : 0.247 secondes
- Itérations : 697

Les deux méthodes convergent vers le même point, proche de l'origine, mais CMA-ES nécessite plus d'itérations tout en explorant mieux le paysage.

3 Détection des optima locaux

Pour identifier les optima locaux, nous avons lancé CMA-ES à partir de points aléatoires dans $[-1, 1]^2$, avec une tolérance de 10^{-5} pour considérer deux points comme identiques. Résultats obtenus :

Nombre d'essais	Optima locaux distincts
100	79
110	82
120	96

On observe que le nombre d'optima distincts augmente avec le nombre d'essais, mais de façon ralentie, ce qui suggère que la plupart des optima sont découverts après environ 100 essais.

4 Conjecture éclairée : Hiérarchie et répartition périodique des optima locaux

La fonction $f(x,y) = \exp(\sin(50x)) + \exp(\sin(50y)) + \frac{x^2+y^2}{4}$ présente une structure complexe mais ordonnée. Nous conjecturons que ses optima locaux forment une **hiérarchie organisée autour d'une structure périodique**, liée aux termes oscillants.

Structure périodique

Les termes $\exp(\sin(50x))$ et $\exp(\sin(50y))$ sont périodiques avec une période $T = \frac{2\pi}{50} \approx 0.1257$. Sur l'intervalle $[-1, 1]$, cela donne environ $\frac{2}{T} \approx 16$ oscillations complètes par axe. Ainsi, théoriquement, on peut s'attendre à environ $16 \times 16 = 256$ extrema locaux dans le domaine.

Hiérarchie des optima locaux

En pratique, les résultats montrent que les optima locaux ne sont pas tous égaux en profondeur :

- Certains points correspondent à des **minima principaux**, atteints lorsque $\sin(50x) \approx -1$ et $\sin(50y) \approx -1$, ce qui minimise simultanément les deux termes exponentiels.

- D'autres sont des **minima secondaires**, où un seul des deux sinus est proche de -1, entraînant une valeur de $f(x,y)$ légèrement supérieure.

Influence du terme quadratique

Le terme $\frac{x^2+y^2}{4}$ n'affecte pas la périodicité mais recentre légèrement les optima vers l'origine. Il renforce aussi la dominance du minimum global proche de $(0,0)$.

Résultats expérimentaux

À partir de 120 essais aléatoires avec CMA-ES, nous avons identifié 96 optima locaux distincts. Leur distribution suit grossièrement une grille régulière, avec une densité accrue vers le centre. La valeur de $f(x,y)$ varie entre environ 0.73 et 0.93, confirmant cette hiérarchie naturelle.

Nous conjecturons que les optima locaux de $f(x,y)$ forment une structure périodique hiérarchisée, influencée par les termes oscillants et légèrement modifiée par le terme quadratique. Cette structure offre une piste prometteuse pour guider des algorithmes d'optimisation globale dans des paysages similaires.

5 Conclusion

Ce travail illustre la richesse et la complexité du paysage d'une fonction apparemment simple mais hautement oscillante. La combinaison des termes exponentiels périodiques et du terme quadratique crée un paysage parsemé de nombreux optima locaux, rendant l'optimisation globale particulièrement délicate.

Les deux méthodes testées — le recuit simulé et CMA-ES — parviennent à localiser avec précision le minimum global, proche de l'origine $(0, 0)$. Bien que le recuit simulé soit plus rapide en termes d'exécution, CMA-ES montre une meilleure capacité à explorer le paysage, ce qui en fait un choix pertinent pour ce type de problème.

Ce type d'étude est essentiel pour mieux comprendre comment guider les algorithmes d'optimisation dans des fonctions complexes, notamment en présence de multiples minima locaux.