Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εργασία #2

Ημερομηνία Παράδοσης: *31 Μαΐου 2024*

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική και δεν πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από τους διδάσκοντες. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε ευανάγνωστη μορφή. Μην ξεχνάτε ότι ο κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζετε κάθε φορά. Επιπλέον του .pdf αρχείου παρακαλώ να υποβάλλεται και τα αρχεία με τον κώδικα που αναπτύξατε. Όλα μαζί θα πρέπει να συμπιέζονται και να υποβάλλονται σε ένα αρχείο με το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ σας. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

Άσκηση 1. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4$$

όταν

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 6 \\
3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 10 \\
-x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

(α) Λύστε το πρόβλημα (με κάποιον από τους επιλυτές που αναφέραμε στις διαλέξεις) και περιγράψτε τη βέλτιστη λύση, δηλ. δώστε τις τιμές των μεταβλητών απόφασης και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Δώστε τις βασικές / μη-βασικές μεταβλητές και τον βέλτιστο βασικό πίνακα. Ξεχωρίστε τους δεσμευτικούς από τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς και μέσω αυτών περιγράψτε γεωμετρικά τη βέλτιστη κορυφή.

(β) Επιλέξτε μία βασική και μία μη-βασική μεταβλητή. Περιγράψτε τι θα συμβεί εάν ο συντελεστής της καθεμιάς στην αντικειμενική συνάρτηση (ξεχωριστά) διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής για τους συγκεκριμένους συντελεστές ώστε να παραμείνει η βέλτιστη λύση στην ίδια κορυφή. (**Σημ.** Οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν αναλυτικά) (γ) Επιλέξτε έναν δεσμευτικό και έναν μη δεσμευτικό περιορισμό (ή περιορισμό προσήμου) και περιγράψτε τι θα συμβεί εάν το δεξιό μέρος του καθενός από αυτούς διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής που αντιστοιχούν στους δυο αυτούς περιορισμούς. (**Σημ.** Οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν αναλυτικά)

(δ) Για μία μη βασική μεταβλητή της βέλτιστης λύσης βρείτε την μεταβολή που πρέπει να υποστεί ο συντελεστής της στην αντικειμενική συνάρτηση για να μετατραπεί σε βασική η συγκεκριμένη μεταβλητή.

Άσκηση 2. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 8x_5$$

όταν

$$\begin{aligned}
x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= -6 \\
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &\geq 2 \\
x_1 + 2x_3 - 2x_4 &\leq -5 \\
-2 \leq x_1 &\leq 10 \\
5 \leq x_2 &\leq 25 \\
x_3, x_4 \geq 0,&\quad x_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

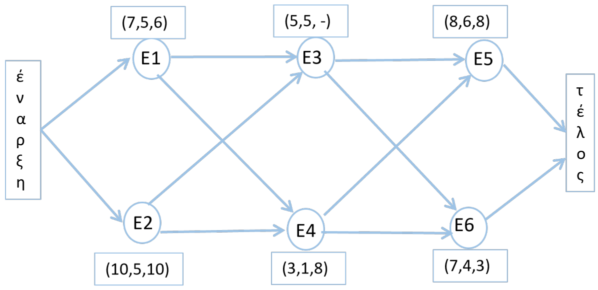
(α) Γράψτε το δυϊκό του παραπάνω προβλήματος.

(β) Αν συμβολίσουμε με x_6 έως x_{12} τις μεταβλητές χαλάρωσης των περιορισμών του πρωτεύοντος, θεωρήστε τη λύση που έχει ως βασικές μεταβλητές τις $x_2, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$. Γράψτε τον βασικό πίνακα B για το πρωτεύον και τον συμπληρωματικό του B^C για το δυϊκό και υπολογίστε τις βασικές λύσεις που αντιστοιχούν στα δύο προβλήματα. Εξετάστε αν ισχύει η συμπληρωματικότητα μεταξύ των δύο λύσεων. Επιπλέον, εξετάστε αν είναι δυνατή η εφαρμογή των θεωρημάτων ασθενούς ή/και ισχυρής δυϊκότητας για τις λύσεις που βρήκατε. Εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας.

(γ) Λύστε τα δύο προβλήματα με κάποιον από τους επιλυτές που διδαχτήκατε.

Άσκηση 3. Θεωρήστε το πρόβλημα του προγραμματισμού εργασιών που σας ζητήθηκε να μοντελοποιήσετε στην Άσκηση 3 της Εργασίας ♯1 και παρατίθεται για διευκόλυνσή σας πιο κάτω. Χρησιμοποιήστε έναν από τους επιλυτές (solvers) γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρθηκαν στις διαλέξεις για την επίλυσή του. (**Σημείωση.** Σε περίπτωση που η μοντελοποίηση που είχατε προηγουμένως δεν σας ικανοποιεί μπορείτε να την αλλάξετε/βελτιώσετε στην παρούσα Εργασία.)

Θεωρήστε ένα έργο το οποίο για να ολοκληρωθεί απαιτεί την διεκπεραίωση 6 επί μέρους εργασίες (Ε1 - Ε6). Οι εργασίες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και οι εξαρτήσεις δίνονται με το παρακάτω σχήμα:



Σύμφωνα με το σχήμα οι εργασίες E1 και E2 μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα, όμως για να εκτελεστεί η εργασία E3 θα πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί οι εργασίες E1 και E2. Ομοίως και για τις υπόλοιπες εργασίες. Το έργο ολοκληρώνεται όταν εκτελεστούν (παράλληλα) οι εργασίες E5 και E6. Για κάθε εργασία δίνονται ο κανονικός χρόνος διεκπεραίωσης της εργασίας (σε εβδομάδες), το απόλυτο ελάχιστο για τον χρόνο αυτό, και το κόστος που θα προκύψει αν προσπαθήσουμε να μειώσουμε τον κανονικό χρόνο κατά μία εβδομάδα.

Η εταιρεία που έχει αναλάβει το έργο ενδιαφέρεται να μειώσει τον συνολικό χρόνο διεκπεραίωσης του (αν είναι εφικτό) σε 19 εβδομάδες, επομένως η διάρκεια μίας ή περισσοτέρων εργασιών θα πρέπει να μειωθεί σε σχέση με την κανονική τους διάρκεια. Προφανώς ο στόχος αυτός θα πρέπει να επιτευχθεί με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Μοντελοποιήστε το συγκεκριμένο σενάριο προγραμματισμού εργασιών ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ορίστε κατάλληλες μεταβλητές απόφασης και διαμορφώστε τους περιορισμούς όπως περιγράφονται στο σχήμα. Περιγράψτε και μοντελοποιήστε τον αντικειμενικό στόχο της εταιρείας. Δώστε την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Άσκηση 4. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + x_6 - x_7$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 - 2x_7 &\le 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 &\le 4 \\ x_2 + x_3 + x_6 - x_7 &\le 2 \\ x_2 - x_4 - x_6 + x_7 &\le 1 \\ x_1, \ldots, x_7 &\ge 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε τη δυϊκή θεωρία για να εξετάσετε αν η λύση $\mathbf{x} = (\frac{15}{2}, 0, \frac{11}{4}, 0, \frac{5}{2}, 0, \frac{3}{4})$ είναι βέλτιστη για το παραπάνω πρόβλημα γ.π. χωρίς όμως την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex (ή οποιουδήποτε επιλυτή) είτε στο ίδιο το πρόβλημα είτε στο δυϊκό του.

Άσκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα του σακιδίου:

$$\max z = 23x_1 + 17x_2 + 30x_3 + 14x_4 + 9x_5$$

όταν

$$6x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 14$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4,5$$

(α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Branch & Bound για την επίλυσή του. Φροντίστε η επιλογή του επόμενου κόμβου για διακλάδωση να γίνεται κάθε φορά με κριτήριο την καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (Jumbtracking or Best First).

(β) Για το παραπάνω πρόβλημα υπάρχει δυνατότητα να συσφίξουμε τον βασικό περιορισμό του προβλήματος ώστε να διευκολυνθεί η αλγοριθμική διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης τιμής;

(γ) Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό του παραπάνω προβλήματος προτείνετε επίπεδα αποκοπής από τρεις διαφορετικές ελάχιστες καλύψεις του. (**Σημ.** Υπάρχουν περισσότερες από τρεις). Πως διαμορφώνεται το δένδρο της Branch & Bound μετά την εισαγωγή των επιπέδων αποκοπής;