Min Cost Flow Problem

Μοντελοποίηση και Επίλυση με Τεχνικές Γραμμικού Προγραμματισμού

Γεώργιος Παπουτσάς

ΑΜ:1083738

Έτος: 4ο

Επισκόπηση του Προβλήματος

Το πρόβλημα Ελαχίστου Κόστους Ροής (MCF) είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα στη βελτιστοποίηση δικτύων, το οποίο αφορά στην εξεύρεση της λιγότερο δαπανηρής μεθόδου μεταφοράς μιας συγκεκριμένης ποσότητας ροής μέσω ενός δικτύου από κόμβους προμήθειας (πηγές) προς κόμβους ζήτησης (καταβόθρες). Το δίκτυο αναπαρίσταται ως ένας κατευθυνόμενος Γράφος, όπου κάθε ακμή (ή τόξο) έχει ένα σχετικό κόστος ανά μονάδα ροής και μια χωρητικότητα που περιορίζει τη μέγιστη ροή που μπορεί να μεταφέρει. Ο στόχος του προβλήματος MCF είναι να προσδιορίσει τη βέλτιστη ροή μέσω του δικτύου που ικανοποιεί τους περιορισμούς προμήθειας και ζήτησης με το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος.

Μοντελοποίηση

- Το πρόβλημα διατυπώνεται με ένα γράφο: $G = (V, E)$
- Ροές: $f(u, v)$
- Κόστη: $a(u, v)$
- Χωρητικότητες: $c(u, v)$
- Προσφορά ή ζήτηση κάθε κόμβου: $s(i)$

Όπου $i \in V$

$(u, v) \in E$

Μεταβλητές Απόφασης και Αντικειμενική Συνάρτηση

- Οι ροές των κάθε ακμών αποτελούν τις μεταβλητές απόφασης
- Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\sum_{(u,v)\in E} a(u,v) \cdot f(u,v)$$

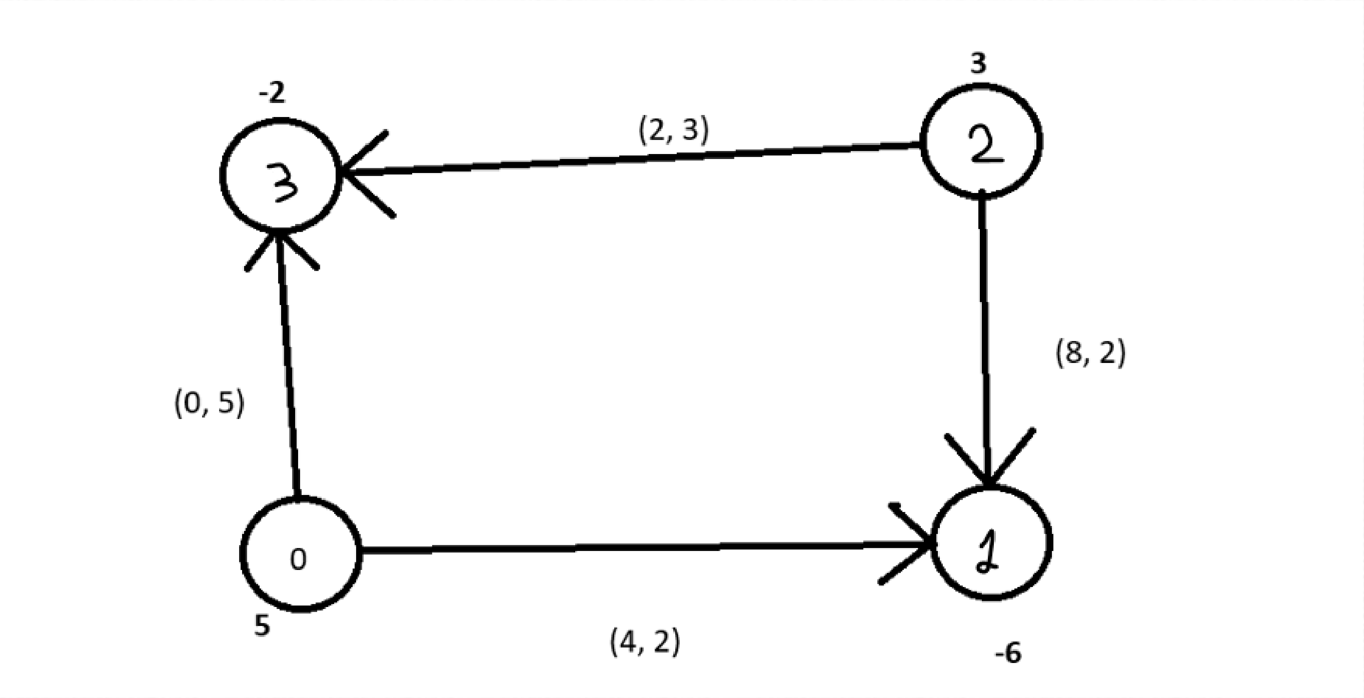
Περιορισμοί

- Προσφορά και ζήτηση καλύπτονται για όλους τους κόμβους:
  - $\sum_{j:(i,j)\in E} f(i,j) - \sum_{k:(k,i)\in E} f(k,i) = s(i)\ για\ καθε\ i \in V$
- Χωρητικότητες ακμών ικανοποιούνται:
  - $f(i,j) \leq c(i,j)\ για\ καθε\ (i,j) \in E$
- Οι ροές σε κάθε ακμή είναι μεγαλύτερες ή ίσες με 0:
  - $f(i,j) \geq 0\ για\ καθε\ (i,j) \in E$

Δεδομένα Εισόδου/Εξόδου υλοποίησης σε Python

- Είσοδοι:
  - Αριθμός κόμβων
  - Κόστος κάθε ακμής
  - Προσφορά ή Ζήτηση κάθε κόμβου
  - Χωρητικότητα κάθε ακμής
- Έξοδος:
  - Το ελάχιστο κόστος

Παράδειγμα απλού Δικτύου



Μοντελοποίηση του Απλού Δικτύου σε Γραμμικό Πρόγραμμα

$$\min Z = 0x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4$$

Υπο τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_3 = 6$$

$$x_3 + x_4 = 3$$

$$-x_2 + x_4 = -2$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_3 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

Λύση του Απλού Δικτύου

- Χρησιμοποιώντας μεθόδους Simplex και συγκεκριμένα για προβλήματα με ακέραιες τιμές παίρνουμε την εξής λύση:
  - $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0$
  - $Z = 14$
- Δηλαδή η ροή από 0 → 1 θα είναι 3, από 0 → 3 θα είναι 2, από 2 → 1 θα είναι 3 και από 2 → 3 θα είναι 0 και το ελάχιστο κόστος θα είναι 14.

Ευχαριστώ για την Προσοχή σας