Definície a vety lineárnej algebry použité v lineárnom programovaní

Vektory sú v tomto dokumente písané ***tučnou kurzívou***, *ostatné veličiny kurzívou* (okrem číselných konštánt).

Definície

Lineárna kombinácia *m* vektorov z priestoru *E^n*:

Vektor $\boldsymbol{x}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$, ak existujú reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$ také, že $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$.

Konvexná kombinácia *m* vektorov z priestoru *E^n*:

Vektor $\boldsymbol{x}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$, ak existujú **nezáporné** reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$ také, že $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$.

Lineárna závislosť *m* vektorov z priestoru *E^n*:

Skupina vektorov $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$, $m \geq 2$ je lineárne závislá, ak medzi nimi existuje aspoň jeden, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných vektorov tejto skupiny.

Ak je $m=1$, potom skupina tvorená jediným vektorom je lineárne závislá, ak tento vektor je nulový vektor.

Lineárna nezávislosť *m* vektorov z priestoru *E^n*:

Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$ sú lineárne nezávislé, ak nie sú lineárne závislé.

Báza vektorového priestoru

Každá lineárne nezávislá skupina vektorov, ktorá určuje priestor, sa nazýva **báza** tohto priestoru.

Hodnosť matice

Hodnosť matice je daná maximálnym počtom lineárne nezávislých riadkov matice.

Vety

V1: Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy keď, rovnica $\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ (tu je nula n-rozmerný vektor) má iba triviálne riešenie pre reálne čísla a_i, t.j. má riešenie iba pre všetky $a_i=0$ (tu je nula číslo).

V2: Ak je skupina vektorov $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$ lineárne nezávislá, potom každá podskupina týchto vektorov je lineárne nezávislá.

V3: Ak je skupina vektorov $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{E}^n$ lineárne nezávislá, potom žiaden z nich nie je nulový.

V4: Každý vektor priestoru, v ktorom existuje báza, možno jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu bázy.

V5: Ak má vektorový priestor bázu tvorenú n vektormi, potom každá skupina o viac ako n vektoroch z toho istého vektorového priestoru je lineárne závislá.