

Simplex 2

Vyriešené príklady z dokumentu: Simplexová metóda s umelou bázou, príklady na cvičenie, ktorý je na Moodli v piatom týždni.

1. príklad

$$\begin{array}{ll}
 \min & 5x_1 + 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 12 \\
 & x_1 - 3x_2 \geq 4 \\
 & x_1 + 5x_2 \leq 36 \\
 & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & 5x_1 + 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\
 & x_1 - 3x_2 - x_4 = 4 \\
 & x_1 + 5x_2 + x_5 = 36 \\
 & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Hľadáme najprv prípustné bázičné riešenie. Zavedieme umelé premenné x_6, x_7 a riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 12 \\
 & x_1 - 3x_2 - x_4 + x_7 = 4 \\
 & x_1 + 5x_2 + x_5 = 36 \\
 & x_i \geq 0
 \end{array}$$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$\hookleftarrow + \hookleftarrow +$
6	0	1	1	-1	0	0	1	0	12	$\uparrow \nearrow$
7	0	1	-3	0	-1	0	0	1	4	\nearrow
5	0	1	5	0	0	1	0	0	36	

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	2	-2	-1	-1	0	0	0	16	$\hookleftarrow +$
6	0	1	1	-1	0	0	1	0	12	$\uparrow \hookleftarrow +$
7	0	1	-3	0	-1	0	0	1	4	$\cdot(-2) \cdot(-1) \cdot(-1)$
5	0	1	5	0	0	1	0	0	36	$\nwarrow +$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	0	4	-1	1	0	0	-2	8	
6	0	0	4	-1	1	0	1	-1	8	$\cdot 1/4$
1	0	1	-3	0	-1	0	0	1	4	
5	0	0	8	0	1	1	0	-1	32	

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	1	0	4	-1	1	0	0	-2	8
6	0	0	1	-1/4	1/4	0	1/4	-1/4	2
1	0	1	-3	0	-1	0	0	1	4
5	0	0	8	0	1	1	0	-1	32

$\swarrow +$
 $\cdot(-4)$ $\cdot 3$ $\cdot(-8)$
 $\swarrow +$ \downarrow
 $\swarrow +$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	1/4	-1/4	2
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	3/4	1/4	10
5	0	0	0	2	-1	1	-2	1	16

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (10, 2, 0, 0, 16, 0, 0), f(x) = 0$$

Našli sme optimálne riešenie pomocnej úlohy, pre ktoré umelé premenné $x_6 = x_7 = 0$ a nie sú v báze. Vynecháme stĺpce x_6, x_7 a vrátime sa k pôvodnej účelovej funkcii.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	-5	-8	0	0	0	0
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	2
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10
5	0	0	0	2	-1	1	16

$\swarrow +$ $\swarrow +$
 \uparrow $\cdot 8$
 $\cdot 5$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	0	-23/4	3/4	0	66
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	2
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10
5	0	0	0	2	-1	1	16

$\cdot 4$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	0	-23/4	3/4	0	66
2	0	0	4	-1	1	0	8
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10
5	0	0	0	2	-1	1	16

$\swarrow +$
 $\cdot(-3/4)$ $\cdot 1/4$ $\cdot 1$
 $\swarrow +$ \downarrow
 $\swarrow +$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-3	-5	0	0	60
4	0	0	4	-1	1	0	8
1	0	1	1	-1	0	0	12
5	0	0	4	1	0	1	24

Riešenie je $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12, 0, 0, 8, 24)$, $f(x) = 60$.

2. príklad

$$\begin{array}{rcl}
 \max & x_1 & + \quad 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + \quad x_2 \geq 12 \\
 & x_1 & - \quad 3x_2 \geq 4 \\
 & x_1 & + \quad 5x_2 \leq 36 \\
 & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \min & -x_1 & - \quad 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + \quad x_2 - x_3 = 12 \\
 & x_1 & - \quad 3x_2 - x_4 = 4 \\
 & x_1 & + \quad 5x_2 + x_5 = 36 \\
 & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Hľadáme najprv prípustné bázičné riešenie. Zavedieme umelé premenné x_6, x_7 a riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{array}{rcl}
 \min & & x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 & + x_6 = 12 \\
 & x_1 - 3x_2 - x_4 & + x_7 = 4 \\
 & x_1 + 5x_2 & + x_5 = 36 \\
 & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Keďže sa jedná o rovnakú pomocnú úlohu ako v 1. príklade 1, použijeme toto riešenie aj teraz a pokračujeme našou úlohou vynechaním x_6, x_7 a nahradením účelovej funkcie.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	1	8	0	0	0	0	$\hookleftarrow +$
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	2	$\uparrow \cdot(-8)$
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10	$\cdot(-1)$
5	0	0	0	2	-1	1	16	

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	0	0	11/4	-7/4	0	-26	
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	2	
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10	
5	0	0	0	2	-1	1	16	$\cdot 1/2$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	0	0	11/4	-7/4	0	-26	$\hookleftarrow +$
2	0	0	1	-1/4	1/4	0	2	$\uparrow \hookleftarrow +$
1	0	1	0	-3/4	-1/4	0	10	$\uparrow \hookleftarrow +$
5	0	0	0	1	-1/2	1/2	8	$\cdot(-11/4) \cdot 1/4 \cdot 3/4$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	0	0	$-3/8$	$-11/8$	-48
2	0	0	1	0	$1/8$	$1/8$	4
1	0	1	0	0	$-5/8$	$3/8$	16
3	0	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	8

Riešenie je $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (16, 4, 8, 0, 0)$, $f(x) = 48$.

3. príklad

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 3x_1 & - & 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 \leq 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 \geq 4 \\
 & x_1 & + & 5x_2 \geq 36 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -3x_1 & + & 8x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 + x_3 = 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 - x_4 = 4 \\
 & x_1 & + & 5x_2 - x_5 = 36 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Hľadáme najprv prípustné bázičné riešenie. Zavedieme umelé premenné x_6, x_7 a riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & & & x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 + x_3 = 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 - x_4 + x_6 = 4 \\
 & x_1 & + & 5x_2 - x_5 + x_7 = 36 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$\hookleftarrow + \hookleftarrow +$
3	0	1	1	1	0	0	0	0	12	$\uparrow \uparrow$
6	0	1	-3	0	-1	0	1	0	4	$\uparrow \nearrow$
7	0	1	5	0	0	-1	0	1	36	\nearrow

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	2	2	0	-1	-1	0	0	40	$\hookleftarrow + \hookleftarrow +$
3	0	1	1	1	0	0	0	0	12	$\hookleftarrow + \uparrow$
6	0	1	-3	0	-1	0	1	0	4	$\cdot(-1) \cdot(-2)$
7	0	1	5	0	0	-1	0	1	36	$\hookleftarrow +$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	0	8	0	1	-1	-2	0	32	
3	0	0	4	1	1	0	-1	0	8	$\cdot 1/4$
1	0	1	-3	0	-1	0	1	0	4	
7	0	0	8	0	1	-1	-1	1	32	

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
0	1	0	8	0	1	-1	-2	0	32	$\leftarrow +$
3	0	0	1	1/4	1/4	0	-1/4	0	2	$\cdot(-8) \quad \cdot 3$
1	0	1	-3	0	-1	0	1	0	4	$\downarrow \quad \leftarrow +$
7	0	0	8	0	1	-1	-1	1	32	$\leftarrow +$

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	1	0	0	-2	-1	-1	0	0	16
2	0	0	1	1/4	1/4	0	-1/4	0	2
1	0	1	0	3/4	-1/4	0	1/4	0	10
7	0	0	0	-2	-1	-1	1	1	16

Riešenie pomocnej úlohy je $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (10, 2, 0, 0, 0, 0, 16)$. Nenašlo sa bázické riešenie bez umelej premennej v báze. Pôvodná úloha preto nemá riešenie.