

# Simplex 1

Vyriešené príklady z dokumentu: Simplexová metóda - príklady na cvičenie, ktorý je na Moodle v piatom týždni.

## 1.príklad

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & - & 5x_5 & + & 6x_6 \\
 \text{s.t.} & & & + & 5x_2 & & & + & 3x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & = & 20 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_4 & + & 2x_5 & & & = & 24 \\
 & & & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & & & = & 17 \\
 & & & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

B	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	
0	1	-3	-2	1	2	5	-6	0	$\uparrow +$
6	0	0	5	0	3	3	1	20	$\uparrow +$
1	0	1	4	0	1	2	0	24	$\uparrow +$
3	0	0	-2	1	1	7	0	17	$\cdot(-1)$

B	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	
0	1	0	<b>42</b>	0	22	22	0	175	
6	0	0	<b>5</b>	0	3	3	1	20	$\cdot(1/5)$
1	0	1	4	0	1	2	0	24	
3	0	0	-2	1	1	7	0	17	

B	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	
0	1	0	42	0	22	22	0	175	$\uparrow +$
6	0	0	<b>1</b>	0	$3/5$	$3/5$	$1/5$	4	$\cdot(-42)$
1	0	1	4	0	1	2	0	24	$\cdot(-4)$
3	0	0	-2	1	1	7	0	17	$\cdot 2$

B	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b	
0	1	0	0	0	$-16/5$	$-16/5$	$-42/5$	7	
2	0	0	1	0	$3/5$	$3/5$	$1/5$	4	
1	0	1	0	0	$-7/5$	$-2/5$	$-4/5$	8	
3	0	0	0	1	$11/5$	$41/5$	$2/5$	25	

Riešenie je  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8, 4, 25, 0, 0, 0)$ .

## 2.příklad

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 6x_1 & + & 2x_2 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 \leq 12 \\
 & & & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -6x_1 & - & 2x_2 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 + x_3 = 12 \\
 & & & x_2 + x_4 = 3 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	<b>6</b>	2	0	0	0
3	0	<b>3</b>	1	1	0	12
4	0	0	1	0	1	3

·1/3

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	6	2	0	0	0
3	0	<b>1</b>	1/3	1/3	0	4
4	0	0	1	0	1	3

↖ +  
·(-6)

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	0	0	-2	0	-24
1	0	1	1/3	1/3	0	4
4	0	0	1	0	1	3

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 0, 0, 3), f(x) = 24$$

Existuje aj iné bázické riešenie s rovnakou hodnotou účelovej funkcie.

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	0	0	-2	0	-24
1	0	1	0	1/3	-1/3	3
2	0	0	1	0	1	3

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 3, 0, 0, 0), f(x) = 24$$

Optimálnym riešením je potom aj ľubovoľná konvexná kombinácia týchto dvoch riešení. Úloha má nekonečne veľa riešení.

### 3. príklad

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 4x_1 & - & 5x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 \geq 10 \\
 & x_1 & + & 2x_2 \leq 4 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Úprava úlohy na kanonický tvar.

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 4x_1 & - & 5x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 - x_3 = 10 \\
 & x_1 & + & 2x_2 + x_4 = 4 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

V kanonickom tvare nemáme vyjadrené bázičné riešenie. Na jeho nájdenie riešime pomocnú úlohu, v ktorej použijeme umelú premennú  $x_5$ .

$$\begin{array}{rcll}
 \min & & & x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\
 & x_1 & + & 2x_2 + x_4 = 4 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	0	0	0	0	-1	0	$\hookleftarrow +$
5	0	1	1	-1	0	1	10	
4	0	1	2	0	1	0	4	

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	1	<b>1</b>	-1	0	0	10	
5	0	1	1	-1	0	1	10	
4	0	1	<b>2</b>	0	1	0	4	$\cdot 1/2$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	1	1	-1	0	0	10	$\hookleftarrow +$
5	0	1	1	-1	0	1	10	$\hookleftarrow +$
4	0	1/2	<b>1</b>	0	1/2	0	2	$\cdot (-1)$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	<b>1/2</b>	0	-1	-1/2	0	8	
5	0	1/2	0	-1	-1/2	1	8	
2	0	<b>1/2</b>	1	0	1/2	0	2	$\cdot 2$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	1/2	0	-1	-1/2	0	8	$\hookleftarrow +$
5	0	1/2	0	-1	-1/2	1	8	$\hookleftarrow +$
2	0	<b>1</b>	2	0	1	0	4	$\cdot (-1/2)$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	1	0	-1	-1	-1	0	6
5	0	0	-1	-1	-1	1	6
1	0	1	2	0	1	0	4

Riešenie  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 0, 0, 0, 6)$ . Nenašlo sa bázické riešenie bez umelej premennej v báze. Pôvodná úloha preto nemá riešenie.

#### 4.príklad

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -4x_1 & - & 7x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 \geq 10 \\
 & 4x_1 & - & 5x_2 \leq 20 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -4x_1 & - & 7x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 - x_3 = 10 \\
 & 4x_1 & - & 5x_2 + x_4 = 20 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Hľadáme najprv prípustné bázičné riešenie. Zavedieme umelú premennú  $x_5$  a riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & & & x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\
 & 4x_1 & - & 5x_2 + x_4 = 20 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	1	0	0	0	0	-1	0
5	0	1	1	-1	0	1	10
4	0	4	-5	0	1	0	20

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	1	1	1	-1	0	0	10
5	0	1	1	-1	0	1	10
4	0	4	-5	0	1	0	20

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	1	0	0	0	0	-1	0
2	0	1	1	-1	0	1	10
4	0	9	0	-5	1	5	70

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 10, 0, 70, 0), f(x) = 0$$

Našli sme optimálne riešenie pomocnej úlohy, pre ktoré umelá premenná  $x_5 = 0$  a nie je v báze. Vynecháme stĺpec  $x_5$  a vrátime sa k pôvodnej účelovej funkcii.

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	4	7	0	0	0
2	0	1	1	-1	0	10
4	0	9	0	-5	1	70

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
0	1	-3	0	<b>7</b>	0	-70
2	0	1	1	-1	0	10
4	0	9	0	-5	1	70

Z poslednej tabuľky dostávame, že riešenie  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 10, 0, 70, 0)$ ,  $f(x) = -70$  nie je optimálne (v riadku 0 je kladné číslo 7), ale nedá sa nájsť lepšie báziké riešenie (pod 7 v stĺpci  $x_3$  nie sú kladné čísla). Úloha nemá optimálne riešenie kvôli neohraničenosti množiny prípustných riešení.

## 5. príklad

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 12 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\
 & 5x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & & & & & & & & & & x_i \geq & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 12 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\
 & 5x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & & & & & & & & & & x_i \geq & 0
 \end{array}$$

Zavedieme umelú premennú  $x_6$  a riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & & & & & & & & & x_6 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 12 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_6 & = & 6 \\
 & 5x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & & & & & & & & & & x_i \geq & 0
 \end{array}$$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	$\hookleftarrow +$
5	0	1	3	2	0	1	0	12	$\uparrow$
6	0	3	1	1	0	0	1	6	$\nearrow$
4	0	5	-1	-2	1	0	0	10	

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
0	1	<b>3</b>	1	1	0	0	0	6	
5	0	1	3	2	0	1	0	12	
6	0	<b>3</b>	1	1	0	0	1	6	$\cdot 1/3$
4	0	5	-1	-2	1	0	0	10	

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
0	1	3	1	1	0	0	0	6	$\hookleftarrow +$
5	0	1	3	2	0	1	0	12	$\uparrow$
6	0	<b>1</b>	1/3	1/3	0	0	1/3	2	$\cdot (-3)$ $\hookleftarrow +$
4	0	5	-1	-2	1	0	0	10	$\cdot (-1)$ $\cdot (-5)$ $\hookleftarrow$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
0	1	0	0	0	0	0	-1	0
5	0	0	8/3	5/3	0	1	-1/3	10
1	0	1	1/3	1/3	0	0	1/3	2
4	0	0	-8/3	-11/3	1	0	-5/3	0

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 0, 0, 10, 0), \quad f(x) = 0$$

Našli sme optimálne riešenie pomocnej úlohy, pre ktoré umelá premenná  $x_5 = 0$  nie je v báze.

Vynecháme stĺpec  $x_6$  a vrátime sa k pôvodnej účelovej funkcii.

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	3	1	5	4	1	0	$\swarrow +$
5	0	0	$8/3$	$5/3$	0	1	10	$\uparrow$
1	0	1	$1/3$	$1/3$	0	0	2	$\uparrow \quad \cdot(-3)$
4	0	0	$-8/3$	$-11/3$	1	0	0	$\cdot(-4)$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	0	8	<b>17</b>	0	0	-16	
5	0	0	$8/3$	$5/3$	0	1	10	
1	0	1	$1/3$	<b><math>1/3</math></b>	0	0	2	$\cdot 3$
4	0	0	$-8/3$	$-11/3$	1	0	0	

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
0	1	0	8	17	0	0	-16	$\swarrow +$
5	0	0	$8/3$	$5/3$	0	1	10	$\uparrow$
1	0	3	1	<b>1</b>	0	0	6	$\cdot(-17) \quad \swarrow +$
4	0	0	$-8/3$	$-11/3$	1	0	0	$\cdot(-5/3) \quad \cdot(11/3) \quad \swarrow +$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	1	-51	-9	0	0	0	-118
5	0	-5	1	0	0	1	0
3	0	3	1	1	0	0	6
4	0	11	1	0	1	0	22

Riešenie je  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6, 22, 0)$ ,  $f(x) = 118$ .



## 6. příklad

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 11x_4 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & & + & 7x_3 & - & 7x_4 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \min & -6x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 11x_4 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4 \\
 & -x_1 & & & + & 7x_3 & - & 7x_4 & & + & x_6 & = & 8 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & + & x_7 & = & 5 \\
 & & & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
0	1	<b>6</b>	-6	1	-11	0	0	0	0
5	0	<b>3</b>	1	-1	2	1	0	0	4
6	0	-1	0	7	-7	0	1	0	8
7	0	2	2	3	-1	0	0	1	5

·1/3

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
0	1	6	-6	1	-11	0	0	0	0
5	0	<b>1</b>	1/3	-1/3	2/3	1/3	0	0	4/3
6	0	-1	0	7	-7	0	1	0	8
7	0	2	2	3	-1	0	0	1	5

↖ +  
 ·(-6) ·1 ·(-2)  
 ↙ + ↘  
 ↙ +

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
0	1	0	-8	<b>3</b>	-15	-2	0	0	-8
1	0	1	1/3	-1/3	2/3	1/3	0	0	4/3
6	0	0	1/3	20/3	-19/3	1/3	1	0	28/3
7	0	0	4/3	<b>11/3</b>	-7/3	-2/3	0	1	7/3

·3/11

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
0	1	0	-8	3	-15	-2	0	0	-8
1	0	1	1/3	-1/3	2/3	1/3	0	0	4/3
6	0	0	1/3	20/3	-19/3	1/3	1	0	28/3
7	0	0	4/11	<b>1</b>	-7/11	-2/11	0	3/11	7/11

↖ +  
 ↑ ↖ +  
 ↑ ↑ ↖ +  
 ·(-3) ·1/3 ·(-20/3)

$B$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
0	1	0	-100/11	0	-144/11	-16/11	0	-9/11	-109/11
1	0	1	5/11	0	5/11	3/11	0	1/11	17/11
6	0	0	-23/11	0	-23/11	17/11	1	-20/11	56/11
3	0	0	4/11	1	-7/11	-2/11	0	3/11	7/11

Riešenie je  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (17/11, 0, 7/11, 0, 0, 56/11, 0)$ ,  $f(x) = 109/11$ .