Potenzreihen und Polynome

- Innerhalb Konvergenzbereich

$\Rightarrow$ Ableiten/Integrieren $\Rightarrow$ einzelne Glieder

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

$$\underline{p'(x)} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

$$\underline{\int p(x)} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}$$

- Potenzreihen multiplizieren

$$P_1(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$$

$$P_2(x) = 1 + x/2 + x^2/9 + x^3/28$$

bis Grad 2 : $2x \cdot 1 + 2x \cdot x/2 \cdot 3x^2 \cdot 1 = 2x + x^2 + 3x^2$

Fehlerabschätzung

Eine Formel für Fehlerabschätzung: Der Fehler, der bei der Beschränkung auf die Glieder von Grad $\leq n$ entsteht, bezeichnen wir mit R_n.

$(R_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.)$

Die untenstehende Formel liefert die Obergrenze:

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \max_{z\in[x_0,x]} \left|f^{(n+1)}(z)\right|, \qquad \text{für } x > x_0$$

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \max_{z\in[x,x_0]} \left|f^{(n+1)}(z)\right|, \qquad \text{für } x < x_0$$

Bsp $f(x) = e^x$, Auf $n = 2$ beschränkt, $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$\Rightarrow |R_2(x)| \leq \left|\frac{(x-0)^{2+1}}{(2+1)!}\right| \cdot \max_{z\in[0,x]} (|e^z|)$$

$$= |R_2(x)| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right| \cdot e^x$$

$\Rightarrow$ Fehler bei z.B. $x = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot e^1 \approx 0{,}453$

Funktionswerte berechnen

$\rightarrow$ mit Taylor-Reihe

$\sin(1{,}2) = 0{,}9320$, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

$\Rightarrow 1{,}2 - \frac{1{,}2^3}{3!} + \frac{1{,}2^5}{5!} = 0{,}9327$ $\Rightarrow$ zu wenig Summanden

$\Rightarrow \ldots - \frac{1{,}2^7}{7!} = 0{,}9320$ $\Rightarrow$ 4 Summanden nötig

Approximation für Integral

$\int_0^1 e^{x^2} dx \Rightarrow$ Taylor-Reihe $\underset{1}{1} + \underset{2}{x^2} + \underset{3}{\frac{x^4}{2!}} \ldots$

Ges: Approx mit Taylorpolynom Grad 2

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 (1 + x^2)\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}$$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) \quad \Rightarrow \text{Taylor-Reihe} \quad \cos(x) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right)}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} \ldots \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

oder Bernoulli - Hopital

$\rightarrow$ Anwenden Falls $\lim\limits_{x \to x_0} (?)$ nach "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" konvergiert

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Taylor-Reihe um x_0 Betrachten

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{5\cancel{(x-7)^3} + 9(x-7)^2}{8\cancel{(x-7)^3} + 2(x-7)^3} \right) = \lim_{x \to 7} \left(\frac{5 + 9 \ldots}{8 + 2 \ldots} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

$\rightarrow$ Grenzwert = Verhältnis Summanden mit kleinsten Exponent