Lösungsverfahren 'Variation der Konstanten' für lineare Differentialgleichungen

(I) Vergleich der *gegebenen* Differentialgleichung mit der *allgemeinen* Form $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ und Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$. (⚠ **Vorzeichen**)

(II) Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$. $\Rightarrow \int f(x) = F(x)$

(III) Einsetzen in die Formel $y_0 = C\cdot e^{-F(x)}$ liefert die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

(IV) Das Ersetzen von C durch eine noch zu bestimmende Funktion $K(x)$ führt zum folgenden *Ansatz* für die *allgemeine* Lösung:

$$y = K(x)\cdot e^{-F(x)}$$

! Vorzeichen $e^{-F(x)}$

(V) Die Funktion $K(x)$ lässt sich durch die folgende Formel berechnen.

$$K(x) = \int g(x)\cdot e^{F(x)}\,\mathrm{d}x$$

! Vorzeichen $e^{F(x)}$

(⚠ Integrationskonstante nicht vergessen!)

(VI) Einsetzen von $K(x)$ in den Ansatz aus **(IV)** ergibt die *allgemeine* Lösung.

Bsp $y' = 4y + e^{3x}$

$\Rightarrow y' - 4y = e^{3x}$

I $f(x) = -4$ $\quad g(x) = e^{3x}$ $\quad$ II $F(x) = -4x$

III $y_0 = C\cdot e^{-(-4x)}$

IV $y = K(x)\cdot e^{4x}$

V $K(x) = \int e^{3x}\cdot e^{-4x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + \tilde{C}$

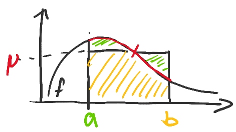
VI $y = (-e^{-x} + \tilde{C})\cdot e^{4x} = -e^{3x} + \tilde{C}e^{4x}$

Integralrechnungen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x)\cdot\Delta x$$

Mittelwert:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\quad f(x)>0,\ x\in[a,b]$$



= höhe vom Rechteck

Arbeitsintegral

$\Rightarrow$ Arbeit = Kraft · Weg $\Rightarrow W = F\cdot s$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\quad W_k = F(x_k)\cdot\Delta x \Rightarrow W_n = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\cdot\Delta x$

Gesamtarbeit $\Rightarrow W = \lim_{n\to\infty} W_n = \int_a^b F(x)\,\Delta x$

Bsp. Raumsonde, $F_G(x) = G\cdot\frac{mM}{x^2}$

Geg: Erdradius R, $F_G(x)$

Ges: Arbeit bei höhe h (bestimmte Strecke)

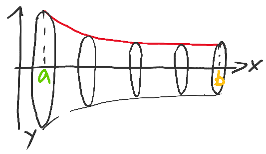
$$W_n = \int_R^h G\cdot\frac{mM}{x^2}\,dx = GmM\int_R^h\frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h}\right)$$

Ges: Grenzprozess $h\to\infty$

$$W_\infty = \lim_{h\to\infty} W_h = \lim_{h\to\infty}\left(G\cdot m\cdot M\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{h}\right)\right) = G\cdot m\cdot M\cdot\frac{1}{R}$$

Volumen Rotationskörper (x-Achse)

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$



V k-te Scheibe:

$$V_k = \Delta x \cdot \pi (f(x)^2)$$

V_n Gesamt (näherung)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} V_k = \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x)^2) \cdot \Delta x$$

V genau

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

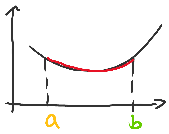
Y-Achse

$g(x) = f^{-1}(x)$ (f nach x auflösen)

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \int_a^b g(y)^2 \, dy$$

Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$



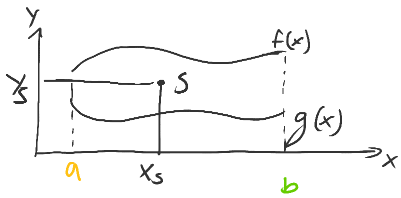
Mantelfläche Rotationskörper

(ohne Deckel und Boden)

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Schwerpunkt zwischen 2 kurven

Fläche $A = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx$



$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 \, dx$$

Schwerpunkt Rotationskörper

- Da Rotation um Achse, sind y (oder x) und z immer 0

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 \, dx$$

Taylor-Reihe

Approximierung an Stützpunkte

- n-Stellen → Polynom Grad $n-1$

Ges: Polynom für Stützstellen $0, 1, 2$, $f(x) = e^{2x}$

$\Rightarrow$ Stützpunkte $(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

$\Rightarrow$ $f(x) = p(x)$

$$1 = a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = a$$

$$e^2 = a + 1 \cdot b + 1^2 c = a + b + c$$

$$e^4 = a + 2 \cdot b + 2^2 c = a + 2b + 4c \quad \Rightarrow a = 1,\ b = -14.02,\ c = 20.41$$