Zusammenfassung Vektoren

28 May 2024 15:01

Vektoren

Betrag: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$

Normieren: $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Verbindungsvektor: $P_1(-4, 3, 5)$, $P_2(3, -1, 9)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Abstand: P_1, P_2

$\Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9}}$

Linearkombination

- Geg: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \dots$

  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 \dots$
- Linear unabhängig:
  - Linearkombination $= 0$
  - $\lambda_1, \lambda_2 \dots \neq 0$

Skalarprodukt

Skalarprodukt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \dots$

$\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

$\varphi = \arccos(\cos(\varphi))$

Wenn:

- $|\vec{a}| = 0$, $|\vec{b}| = 0$, $\cos(\pi/2)$ dann:

  $\vec{a}, \vec{b}$ ortogonal wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| < 0$ dann:

  $90° < \varphi < 180°$

Wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.**

(2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(3) *Kommutativ-Gesetz:* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

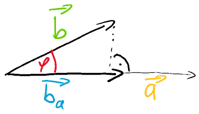
(4) *Distributiv-Gesetze:* $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz:* $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$ Übg 3.1-3

Berechnung des Skalarproduktes aus der Komponentendarstellung der Vektoren

In der Ebene	Im Raum
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Ortogonale Projektion (rechtwinklig)

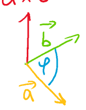


$|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$ Skalarprodukt

$\vec{b}_a = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{e}_a = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Vektorprodukt

↳ Erzeugt rechtwinkligen Vektor zu $\vec{a}, \vec{b}$



$0 \leq \varphi \leq \pi$

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1. \\ =2. \\ 3. \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot -2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - -1 \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.**

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) *Antikommutativ-Gesetz:* $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(4) *Distributiv-Gesetze:* $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz:* $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

(6) Das normale *Assoziativ-Gesetz* gilt im Allgemeinen nicht: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist Fläche von Parallelogram

$A = |\vec{a}| \cdot h$

$\sin(\varphi) = \dfrac{h}{|\vec{b}|} \Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

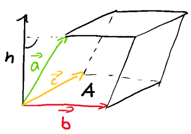
$\Rightarrow A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Spezialfall auf einer Ebene: (zB. x/y)

$A = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Volumen von Spat

$A = |\vec{b} \times \vec{c}|$ $h = \dfrac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$



$V = A \cdot h = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

oder Vektoren als Matrix

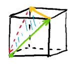
$X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \det(X)$

Kollinear

- Parallel zu Gerade g
  - ↳ $\vec{0}$ kollinear zu jedem Vektor
  - ↳ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear wenn der eine Vielfaches des anderen $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$
- $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right) = 0$

Komplanar

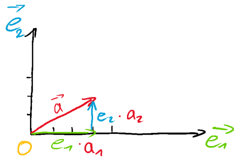
- Ebene zu 3 Vektoren Parallel
  "Wenn 3 Vektoren auf verschiedenen Ebenen verbunden ein Dreieck ergeben"



  - ↳ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind Komplanar
- ↳ $\vec{a}$, $\vec{b}$ nicht Kollinear
  $\Rightarrow \vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ (Linearkombination)
- $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right) = 0$
- Nicht Komplanar
  ↳ $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \upsilon \cdot \vec{c}$

Koordinatensystem

- Punkt O = Ursprung
- Einheitsvektor $\vec{e}$
  Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot e_1 \\ a_2 \cdot e_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2}$
  $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



- Punkt P : $\vec{r}(P) = \vec{OP}$
  Komponenten : x, y $\Rightarrow P = (x; y)$

Geraden

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Gegenseitige Lage prüfen</td><td colspan="2">2. Gibt es einen gemeinsamen Punkt?</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Sind die Richtungs-vektoren kollinear?</td><td>ja</td><td>identisch</td><td>echt parallel</td></tr>
<tr><td>nein</td><td>schneidend</td><td>windschief</td></tr>
</table>

- Parameterdarstellung
  $g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ P: Aufpunkt $\vec{a}$: $\vec{PQ}$ (Richtungsvektor)

  Gerade durch $(3; -1; -4)$ und $(5; 2; 0)$

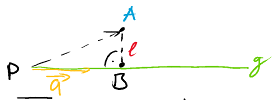
  $g: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-(-1) \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

  Punkt $A(7; 5; 4)$ auf g

  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $7 = 3 + \lambda \cdot 2$ | I
  $5 = -1 + \lambda \cdot 3$ | II
  $4 = -4 + \lambda \cdot 4$ | III

  I nach λ auflösen
  $7 = 3 + 2\lambda \Leftrightarrow 4 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$
  für II und III überprüfen
  $\Rightarrow$ Punkt A ist auf g

- Abstand von Punkt von g
  Fusspunkt, Skalarprodukt, Vektorprodukt



  $\overline{PB}$ = projektion von $\vec{PA}$ auf $\vec{a}$
  $= \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$
  Phytagoras : $\ell = \overline{AB} = \sqrt{(\overline{PA})^2 - (\overline{PB})^2}$
- mit Vektorprodukt
  $\ell = \frac{|\vec{AP} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

- Koordinatendarstellung (nur Ebene)
  $g: ax + by + c = 0$
  a, b : Richtung von g
  c : Parallelenverschiebung
  Vektor Koeffizienten a, b $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
  Ortogonal zu $\vec{a}$

Parameter → Koordinatendarstellung $g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$x = 7 + -2\lambda \Rightarrow 0 = x - 7 + 2\lambda$

$y = 1 + -4\lambda \Rightarrow 0 = y - 1 + 4\lambda$

λ - Eliminieren zB.

$\Rightarrow 2 \cdot \text{I} - \text{II} = 2(x - 7 + 2\lambda) - (y - 1 + 4\lambda)$
$= 2x - y - 13$

Koordinaten- → Parameterdarstellung $g: -x + 4y + 3 = 0$
- 2 x-koordinaten bestimmen
  $x_P = -1 \Rightarrow y_P = -1 \Rightarrow P(-1; -1)$
  $x_Q = 1 \Rightarrow y_Q = -0{,}5 \Rightarrow Q(1; -0{,}5)$

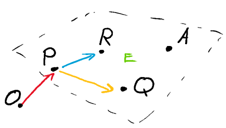
$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$
Achtung, Vektor berechnen

Ebenen

Parameterdarstellung

$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \vec{b}$

$\vec{a} = \vec{PQ} \qquad \vec{b} = \vec{PR}$



Koordinatendarstellung

$E: ax + by + cz + d = 0 \qquad d$ = Parallelverschiebung von E

Vektorkoeffizienten $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ ortogonal zu E = Normalenvektor

→ wenn $|\vec{n}| = 1$ ⇒ Normiert

Winkel φ von $\vec{a}$ auf E:

$\varphi = 90° - \arccos(|\vec{a} \cdot \vec{n}|)$

Normierte Koordinatendarstellung:

1. $\vec{n}$ normiert $= 1/|\vec{n}| \cdot \vec{n}$
2. a, b, c von $\vec{n}$ normiert in koordinatendarstellung

Parameter --> Koordinatendarstellung

(Art 1.)

1. Gleichungen nach x, y, z aufstellen
2. λ, μ eliminieren

(Art 2.)

1. Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ ⇒ gibt Koeffizienten a, b, c
2. Aufpunkt P einsetzen ⇒ gibt d

koordinaten --> Parameterdarstellung

1. Für 3 Punkte x und y wählen

   (zB. $x_P = 0 \; y_P = 0 \;/\; x_Q = 0 \; y_Q = 1 \;/\; x_R = 1 \; y_R = 0$
2. Einsetzen und z berechnen Achtung, Vektor berechnen
3. $E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ} + \mu \cdot \vec{PR}$

$A(-1;4;1)$ auf $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_A \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_A \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda_A - 4\mu_A = -1 \\ -2\lambda_A - 3\mu_A = 4 \\ 1 + \lambda_A + 4\mu_A = 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} -2\lambda_A - 4\mu_A = -5 \\ -2\lambda_A - 3\mu_A = 4 \\ \lambda_A + 4\mu_A = 0 \end{matrix}$ in reduzierte Zeilenstufenform bringen

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} :-2 \\ +2 \cdot I \\ -1 \cdot I - 2 \cdot II \end{matrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -41/2 \end{array}\right)$

Lösbarkeit anhand Rang

$rg(A) = 2 \neq rg(A|c)\; 3$

⇒ A nicht auf E

Identische Ebenen $E_1 \; E_2$

- Faktor p sodass

  $a_1 = p \cdot a_2, \; b_1 = p \cdot b_2, \; c_1 = p c_2, \; d_1 = p \cdot d_2$

Parallel

- Normalvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ kollinear
- Faktor p sodass

  $a_1 = p \cdot a_2, \; b_1 = p \cdot b_2, \; c_1 = p c_2$ (kein d)

Schneiden

- Schittmenge ist Gerade

Schnittpunkt = P auf Ebene und G

↳ LGS Bilden und auflösen

↳ S auf E und g

1. $E\_ = g$
2. Lösbarkeit prüfen
3. Gleichung auflösen

Schittgerade = Alle P auf 2 Ebenen

$E_1: x - 2y + 2z - 1 \qquad E_2: 2x - 3y - z + 2$

$\begin{matrix} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = -2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} +2 \cdot II \\ -2 \cdot I \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{matrix} x = -7 + 8\lambda \\ y = -4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \qquad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Spezielle Lage

Parallel zu Ebene			zu Achse		
x/y	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$	$x, y = 0$	x	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$x = 0$
x/z	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$	$x, z = 0$	y	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$	$y = 0$
y/z	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$y, z = 0$	z	$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$	$z = 0$

Abstand l $A(x;y;z)$ zu E

1. normierte Koordinatendarstellung von E
2. $l = |a x_A + b y_A + c z_A + d|$

(wenn E nicht normiert $l = \dfrac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{|\vec{n}|}$

Abstand von Ursprung $l = \dfrac{|d|}{|\vec{n}|}$