Zusammenfassung

Samstag, 24. Februar 2024 08:54

Substitution

Unbestimmt $\int e^{2x+3}\,dx$

$\hookrightarrow u(x) - 2x+3$

$dx = \frac{du}{(2x+3)'} = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du$

$= \frac{1}{2}(e^u + c) = \frac{1}{2}(e^{2x+3} + c)$

Bestimmt: $\int_0^{\pi/4} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$

$\hookrightarrow u = \sin(x) \qquad u' = \cos(x)$

$dx = \frac{du}{\cos(x)}$

$\Rightarrow \int_{u(0)}^{u(\pi/4)} u^2 \cdot \cos(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int_0^{\sqrt{2}/2} u^2\,du$

$= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

$\Rightarrow$ keine Rücksubstitution

Satz: F mit Konstante a

$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$

(F integration von f $\Rightarrow \int f(x) = F(x)$)

Partielle Integration

$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$

u = einfache Ableitung

v' = Stammfunktion ist nicht komplizierter

$\int x\cdot e^x \qquad u = x \qquad v' = e^x$

$\qquad u' = 1 \qquad v = e^x$

$= x\cdot e^x - \int 1 e^x = x\cdot e^x - 1\int e^x$

$= x\cdot e^x - e^x + c$

Hint

- mehrfach anwenden (zB. $x\cdot e^x$)
- versteckte Produkte finden
- für bestimmte Integrale gleich
- Falls irgend wann

$\int f(x) = ax\ldots - \int f(x) \quad | + \int f(x)$

$2\int f(x) = ax\ldots \quad | \cdot 1/2$

$\int f(x) = \frac{1}{2}ax\ldots$

Bestimmtes Integral

$$\boxed{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x}$$

Partielle Integration vs. Subtitution vs. Partialbruchzerlegung

$\int f(x)\cdot g(x)$ — Produktregel

$\int g(f(x))$ — Kettenregel

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$	$\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(x)$
partielle Integration	$\int \underset{\text{nach Ableiten einfacher}}{\underset{\uparrow}{u}} \cdot \underset{\text{nach Integration nicht komplizierter}}{\underset{\uparrow}{v}}$	$\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int \frac{4x^2+x+17}{4x^3+6x+3}\,\mathrm{d}x$

gebrochenrationale Funktionen

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$ mit $m<n$

Falls $m \geq n$:

$g(x):h(x) \Rightarrow$ Polynomdivision

I „Erraten"

II • $n=1$

Horner

• $n>1$

Polynomdivision

Integration durch Partialbruchzerlegung

I Partialbruchzerlegung

1. Reelle Nullstellen des Nenners $h(x)$ mit Multiplizitäten bestimmen
2. Jeder dieser Nullstellen wird eine Summe von Brüchen zugeordnet:

x_1 ist einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$

x_1 ist doppelte Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

x_1 ist r – fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

Irreduzibel: $\frac{B\cdot x+C}{x-x_1}$

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ sind (zunächst noch unbekannte) reelle Konstanten.

3. $f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt.
4. Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, \ldots A_r$ etc
   (i) Alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
   (ii) Durch Einsetzen von x-Werten (z.B. Nullstellen der entsprechenden Polynome) erhält man ein lineares Gleichungssystem.
   (iii) Gleichungssystem lösen (z.B. mit Gauss-Algorithmus)

II Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = 1\ln|x-x_0|+C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}}+C$$

$h(x)=(x-2)^2\,(x-1)^1$

Vielfachheit: 2 1

Bsp. $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx \Rightarrow m<n$ ✓

1. 1 Ns erraten : 1

Horner :

	1	-5	8	-4
1		+1	-4	+4
	1	-4	4	0

$\Rightarrow x^2-4x+4=(x-2)^2$

2. $x_1 : \frac{A}{(x-1)}$ $\quad x_2 : \frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$

3. $\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$

4. i $=\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$

ii (A,B,C bestimmen)

$x=1$

$1+1=A(1-2)^2 \Rightarrow 2=A(-1)^2 \Rightarrow \underline{A=2}$

$x=2 \Rightarrow C=3$

$x=0 \Rightarrow B=\frac{1-4A+C}{2}=-2$

iii $=\frac{2}{(x-1)}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{3}{(x-2)^2}$

5. $\int\frac{2}{(x-1)}\,dx-\int\frac{2}{(x-2)}\,dx+\int\frac{3}{(x-2)^2}\,dx$

$=2\cdot\ln(x-1)-2\cdot\ln(x-2)+\frac{3}{(1-2)(x-2)^{2-1}}+C$