# Zusammenfassung Matrizen

Donnerstag, 14. März 2024 08:24

## Matrizen

- "Zuerst Zeile, später Spalte"

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3$ Matrix

$a_{12} = 1$

- Null-Matrix: alle Elemente $= 0$
- Spaltenmatrix: nur 1 Spalte (Vektor)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

### Addieren:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+2 & 1+3 \\ -4+1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

### Subtrahieren

- gleich wie Addieren

### Skalar Multiplizieren:

$$\lambda \cdot A = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot -4 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

### Matrizenmultiplikation

- Spalten von A muss gleich Zeilen von B

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ 3 \times 2 & & 2 \times 4 & & 3 \times 4 \end{array}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$\begin{array}{c|cc} & \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}2 \\ 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}9 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}8 \\ 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6 = 6{,}4 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2{,}2 & 2{,}8 \\ 4{,}9 & 6{,}4 \end{pmatrix}$$

## Transponieren

$$\begin{pmatrix} Z_1 \rightarrow \\ Z_2 \rightarrow \\ Z_3 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$

## Koeffizientenmatrix

$$\left.\begin{array}{l} -6x + 8y = -3 \\ 3x - 2y = 5 \end{array}\right\} \text{LGS}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \text{ Erweiterte Koeffizientenmatrix}$$

## Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## Zeilenstufenform

- Alle Zeilen mit nur Nullen zuunterst
- Vorderste Zahl eine 1 $\Rightarrow$ Führende Eins
- Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- reduzierte Zeilenstufenform
  - Spalte mit führender 1 hat sonst nur 0

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{array}$$

- Führende Unbekannte: Spalte mit führender 1 $\quad x_1, x_2$
- Freie Unbekannte: Spalte ohne führender 1 $\quad x_3$

## Gaussverfahren

Elementare Umformung

- "Zeilen Tauschen" (nicht die x, y-Matrix $\vec{x}$)

$\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$

- Zeile multiplizieren mit Skalar $(\neq 0)$

$[\cdots] \cdot \lambda \qquad 2y + 3x = 5 \quad | \cdot 2$

- Addition vom vielfachem einer Zeile zu einer anderen Zeile

Pivot Element

$\begin{bmatrix} ① \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} ① \cdot n$

## Lösbarkeit

- Rang bestimmen von $m \times n$ Matrix
  1. Zeilenstufenform
  2. $\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} \cdots \\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\left.\right\}$ keine Nullzeile $\quad r$ - Viele; Nullzeilen $\quad m - r = \text{rang}$ (Anzahl Nicht-Nullzeilen)

- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ $\quad n$ = anz. Unbekannte / Spalten

Lösbar wenn $rg(A) = rg(A | \vec{c})$,

$\rightarrow$ 1 Lösung $rg(A) = n$

(oder wenn $A$ invertierbar oder $\det(A) \neq 0$)

$\rightarrow \infty$ Lösungen $rg(A) < n$

- Homgenes LGS $\vec{c} = \vec{0}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{array}\right)$

# Quadratische Matrizen

- $n = m$

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Einheitsmatrix ändert Ursprung nicht

<u>Upper</u> Triangular : Zahlen Oben

<u>Lower</u> Triangular : Zahlen Unten

<u>Symetric</u> : Zahlen gespiegelt an Hauptdiagonalen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Potenz :

$A^0 = E, \quad A^k = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$

Ausnahmen

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} a^k & k \cdot b \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$

## Rechenregeln

- Komutativ : $A + B = B + A$
- Assoziativ : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Inverse Multiplikation : wenn invertierbar! $A \cdot A^{-1} = E$
- Ausklammern von Zahl : $6X - BX = X(6E - B)$
- Inverse Multiplikation : $X \cdot B = A \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1}$
  $\Rightarrow X \cdot E = A \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B^{-1}$
- Reihenfolge : $X \cdot A + X \cdot B = X \cdot (A + B) \neq (A + B) \cdot X$

## Inverse

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Wenn $A, B$ invertierbar $\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

LGS lösen :

$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{c}$

### Berechnen

<u>2x2</u>

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow$ invertierbar / regulär

Nicht möglich falls $ad - bc = 0$ (singulär)

<u>nxn</u>

1. Erweiterte koeffizientenmatrix erstellen $(A \mid E)$
2. Gauss-Jordan auf reduzierte Zeilenstufenform
   $\Rightarrow (E \mid A^{-1})$ $\Rightarrow$ nicht möglich wenn $rg(A) < rg(A \mid E)$

<u>Diagonalmatrix</u>

- Invertierbar wenn $a_{ii} \neq 0$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{ii} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/a_{ii} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/a_{ii} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

## Determinante

<u>2x2</u> : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = |A| = ad - bc$

<u>1x1</u> $\det((a_{11})) = a_{11}$

<u>3x3</u>

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$
$\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

**Wichtige Eigenschaften der Determinante**

(1) Für die Einheitsmatrix $E$ gilt: $\det(E) = 1$

(2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix $U$ gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

(3) Für jede quadratische Matrix $A$ gilt: $\det(A^T) = \det(A)$

(4) Für alle $n \times n$ -Matrizen $A$ und $B$ gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(5) Für jede invertierbare Matrix $A$ gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(6) Für jede $n \times n$ -Matrix $A$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

<u>nxn</u>

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

1. Spalte / Zeile mit meisten 0-en
   $\rightarrow$ danach Entwickeln
2. Rekursiv anwenden

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{array} = \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot 2}_{2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \underbrace{(-1)^{2+3} \cdot 3}_{-3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

<u>3x3</u>

$= 2 \cdot -3 \cdot (8 - 9 - 30 - 30 + 6 + 12) = \underline{258}$

## Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Menge $V$ ist ein Vektorraum

1. $x, y \in V \Rightarrow (x + y) \in V$
2. Skalare Multiplikation : $\lambda \cdot x \in V$
3. Neutralelement existiert

Bsp : $V$ = Datenworte mit $n$-Bits

1. Addition $0110 + 0101 = 0011 \in V$
2. Skalar Multiplikation $1 \cdot 01 = 01 \in V$
3. Neutralelement : $0000$

$\Rightarrow V$ ist ein Vektorraum

## Unterraum $U$

1. $x, y \in U \Rightarrow (x + y) \in U$
2. Skalare Multiplikation : $\lambda \cdot x \in U$
3. $\vec{0} \in U$

Nullvektorraum : $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$

Bsp : $U = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}$

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in U$
2. $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in U$

## Linearer Spann / Hülle

- Menge aller Linearkombinationen

Geg $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

1. Lineare abhängigkeit prüfen

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\1&3&2&0\\1&3&3&0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x_1 \; x_2 \; x_3$

$x_2 = \lambda$

$x_1 + 3\lambda + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3\lambda$

$x_3 = 0 \Rightarrow \vec{b}$ abhängig von $\vec{a}$

$\text{Span}(\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}) = \text{Span}(\vec{a}\;\vec{c}) = \left\{ \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \middle| \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}$

## Koordinatensystem definieren

Vektormenge $V$ der Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n\}$

1. Jeder Vektor $a \in V$ als Linearkomb.

$a = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda \cdot \vec{b}_2 \dots$

$\Rightarrow V = \text{span}(b_1; b_2 \dots b_n)$ (Erzeugendensystem)

2. Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ sind Eindeutig

Bilden $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$

oder $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&d_1\\2&0&4&d_2\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}\\-2\cdot\mathrm{I}\end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&d_1\\0&-6&4&d_2-2d_1\end{array}\right)$$

$\Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A|d) \rightarrow 2 < n = 3$

$\Rightarrow$ unendliche Lösungen

$\Rightarrow \vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}$ sind Erzeugendensystem $\mathbb{R}^2$

für $m \times n$ - Matrix $B$

- $rg(B) = m \Rightarrow$ Ist Erzeugendensystem

$m$ = Zeilen von $B$

### Basis wechseln

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}_S \right\}$

$B \Rightarrow S$ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_B = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S + 1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}_S$

$S \Rightarrow B$ $\left(\begin{array}{cc|c}1&4&2\\1&3&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\,/\cdot(-1)\end{array} \;\; -4\cdot\mathrm{II} = \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_B$

## Basis

$\Rightarrow$ Alle Vektoren in einem Raum können mit Basis gebildet werden

zB. $\{(1,0),(0,1)\}$ $(2,3) = 2\cdot(1,0)\;\; 3\cdot(0,1)$

Standartbasis: $\mathbb{R}^n$ $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$

Monombasis: $P_n[x]$ $M = \{1, x, x^2 \dots x^n\}$ (Polynome)

Menge $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \dots b_n\}$

1. $B$ ist Erzeugendensystem
2. alle Vektoren $\vec{b} \in B$ sind linear unabhängig

↳ Vektoren $\vec{b}$ als Matrix $X$ schreiben

$\rightarrow rg(X) = n$

## Dimensionen

$\Rightarrow$ Anz. Vektoren die Basis bilden

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ $\dim(P_n[x]) = n+1$ $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$

Bsp. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\dim(\text{span}(\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c})) = \dim(\text{span}(\vec{a}\;\vec{c})) = \underline{\underline{2}}$

$\Rightarrow$ 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$

## Kern

- Lösungsmenge von $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\vec{0}$ immer $\in \ker(A)$

$$A = \begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&3\\1&-1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \ker(A)$$

## Bild

- $\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$
- Wenn $\vec{y} \in \text{im}(A)$

$\Rightarrow \vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$

$= A \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)$

$x$ = Skalare

- Für $m \times n$ Matrizen:
  - $\dim(\text{im}(A)) = rg(A)$
  - $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$

## Abbildungen

- Funktionen um von Vektorraum in anderen zu kommen, muss linear sein (für nicht linear siehe Homogene Koordinaten)

Linear wenn:

$\vec{x}, \vec{y} \in V$

1. $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\lambda\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot f(\vec{x})$

Beweis dass

- nicht Linear: 1 Gegenbeweis

$f(x) = e^x$

② $f(2\cdot 0) = e^0 = 1$

$2\cdot f(0) = 2\cdot e^0 = 2$

- ist Linear: Allgemein

$f(x) = m\cdot x$, $m \in \mathbb{R}$

① $f(x+y) = m\cdot(x+y) = m\cdot x + m\cdot y = f(x) + f(y)$

② $f(\lambda\cdot x) = m\cdot(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(m\cdot x) = \lambda\cdot f(x)$

<u>Abbildungsmatrix</u>

- "In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren"

Standardbasen:

$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2 \cdot x_1 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

① $f(\vec{e_1}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{e_2}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Beliebige Basen:

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{S_2} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2 \cdot x_1 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}_{S_3}$ $\quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{S_2} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{S_2} \right\}$ $\quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}_{S_3} \right\}$

Ges: ${}_C A_B$ , Bild $f(\vec{x})$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

① $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{S_2}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{S_3}$ $\qquad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{S_2}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{S_3}$

② $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}_C$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}_C$

③ $\Rightarrow {}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$ $\qquad \Rightarrow f(\vec{x}) = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix}_C$

# <u>Verknüpfen von Abbildungen</u>

- $f: U \mapsto V$ , Abbildungsmatrix $A$

  $g: V \mapsto W$ , Abbildungsmatrix $B$

  $g \circ f$:

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

$$x \mapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

$$x \mapsto A \cdot x \longmapsto B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x$$

Achtung $\quad g \circ f \Rightarrow B \cdot A \quad , \quad f \circ g = A \cdot B$

<u>Inverse Abbildung</u>

- Invertierbare $A$
- $(g \circ f) = E \Rightarrow B \cdot A = E \Rightarrow B = A^{-1}$

<u>Basiswechsel</u>

$${}_C A_C = {}_C T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_C = {}_C T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_C T_B$$

$C$:

$V \longrightarrow V$

$x \longmapsto f(x)$

$x_C \quad x \longmapsto {}_C A_C \cdot x \quad x_C$

${}_B T_C \downarrow \qquad\qquad \uparrow {}_C T_B$

$B$:

$V \longrightarrow V \quad x_B$

$x_B \quad x \longmapsto f(x)$

$x \longmapsto {}_B A_B \cdot x$

Bsp:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}$ $\quad {}_B A_B = {}_B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B$

Basis wechsel $B \to S$

${}_S T_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

${}_S T_B^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = {}_B\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}_S$

${}_S A_S = {}_S\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}_S$

$= {}_S\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_S$

<u>Homogene Koordinaten</u>

- Nicht lineare Abbildungen → Translation

  ⇒ Verschiebung mit Erweiterung

  Ortsvektor (Vom Ursprung aus) : 1

  Freie Vektoren : 0

  Matrizen : unten rechts 1

1. Bei Vektoren/Punkte

   $P = (2;2) \quad Q = (1;3) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P)$

   $= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\vec{r}(P) + \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r}(R)$ (neuer Ortsvektor)

2. Bei Abbildungsmatrizen

   Punkt $P = (1;0)$

   Rotation $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $P = (5;7;0)$ verschieben um $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Abbilden + Translation

   $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$