Approximierung an Stelle

- Tangentengleichung $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Taylorpolynom 1. Grades: $(f'(x_0) = p_1(x_0))$

Geg: $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

$\Rightarrow p_1(x) = e^{2x} + 2e^{2x}(x-1)$

2. Grades

- $p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$

$\Rightarrow f''(x) = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$

$f_2''(x) = (a_1 + 2a_2(x-1))' = 2a_2 \overset{!}{=} f''(x_0) = 4e^2$

$\Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2} = 2e^2$

$\Rightarrow p_2(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2$

Grad k

- $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k$
- $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\Rightarrow$ bei $f(x) = e^{2x}$

$a_k = \frac{2^k e^2}{k!}$

Definition

Wir betrachten eine Funktion f und eine Stelle x_0 in ihrem Definitionsbereich.

- Das *Taylor-Polynom vom Grad n von f um x_0* bezeichnet das Polynom

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

- Die *Taylor-Reihe* von f um x_0 bezeichnet die unendliche Reihe

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

(k) = Ableitungsgrad

$f^{(k)}(x_0) \Rightarrow$ k-te Ableitung für x_0

! $(x - x_0)^k$ nicht vergessen

Vorzeichenwechsel : $(-1)^k$

Nur gerade k : $2k$

Nur ungerade k : $2k+1$

$0! = 1$

Taylor-Reihen

$e^x \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k$

$\sin(x) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)} \cdot x^{2k+1}$, $x_0 = 0$

Bsp 1. $f(x) = \frac{1}{(1-7x)} = (1-7x)^{-1}$ für $x_0 = 0$

Ableiten mit Kettenregel

$f'(x) = 7(1-7x)^{-2}$

$f''(x) = 7^2 \cdot 2(1-7x)^{-3}$

$f'''(x) = 7^3 \cdot 2 \cdot 3(1-7x)^{-4}$

$\Rightarrow f^{(k)} = 7^k \cdot k! \cdot (1-7x)^{-(k+1)}$

In $t_f(x)$ einsetzen

$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{7^k \cdot k! \cdot 1^{-(k+1)}}{k!} \cdot x^k = \underline{\underline{7^k \cdot x^k}}$