Bsp 2. $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ Substitution e^z, $z = -x^2$

Taylorreihe von e^x bei $x_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \dots$

$\Rightarrow 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} x^{2k}$

Konvergenz

- Darstellbar: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

  Funktionswert bei x_0 gleich wie Taylor-Reihe

  $\Rightarrow$ Konvergenzbereich

  Bsp $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0 \Rightarrow \mathbb{R}$

  $f(x) = e^x$, $x_0 = 1 \Rightarrow \mathbb{R}$

  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x_0 = 0 \Rightarrow (-1, 1)$

Quotientenkriterium

Für eine beliebige Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ und $r := \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ gilt:

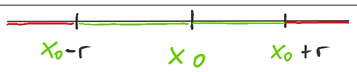
- Alle x mit $|x - x_0| < r$ gehören zum Konvergenzbereich
- Alle x mit $|x - x_0| > r$ gehören *nicht* zum Konvergenzbereich
- Falls $r = \infty \Rightarrow$ Konvergenzbereich $= \mathbb{R}$

Konvergenzradius

Für *jede* Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ gibt es einen Abstand r, so dass

a_0 vernachlässigen falls $\frac{x}{0}$

- alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ zum Konvergenzbereich gehören
- alle $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$ nicht zum Konvergenzbereich gehören



* Konvergiert nicht

Bsp $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

! I a_k ermitteln ($x_0 = 0$)

$a_k \cdot x^k = \frac{x^k}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$

II Radius bestimmen

$r = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{1/k!}{1/(k+1)!} \right| \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{(k+1) \cdot \cancel{k} \cdot \cancel{(k-1)} \cdots}{\cancel{k} \cdot \cancel{(k-1)} \cdots} \right| \right)$

$= \lim_{k \to \infty} (|k+1|) = \infty$

$\Rightarrow$ konvergiert für ganz $\mathbb{R}$

Bsp 2. $S(x) = \frac{x-3}{2{,}5} + \frac{(x-3)^2}{2{,}5^2} + \frac{(x-3)^3}{2{,}5^3} + \dots$

! I $\Rightarrow x_0 = 3$, $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2{,}5^k} \cdot (x-3)^k$ $\quad a_k = \frac{1}{2{,}5^k}$, $a_{k+1} = \frac{1}{2{,}5^{k+1}}$

II $r = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{1/2{,}5^k}{1/2{,}5^{k+1}} \right| \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\left| \frac{2{,}5^{k+1}}{2{,}5^k} \right| \right) = 2{,}5$

$\Rightarrow (x_0 - r, x_0 + r) = (3 - 2{,}5, 3 + 2{,}5) = \underline{\underline{(0{,}5, 5{,}5)}}$