No:

Date:

C7

T1. 证明: ①封闭性: $\forall a,b\in Z$, $a\circ b = a+b-2 \in Z$, $\circ$运算在Z上封闭.

②结合律: $\forall a,b,c\in Z$, $(a\circ b)\circ c = (a+b-2)\circ c = a+b-2+c-2$
$= a+(b+c-2)-2 = a\circ(b\circ c)$, $\circ$满足结合律.

③单位元: $\forall a\in Z$, $a\circ 2 = a+2-2 = 2\circ a = a$, $2\in Z$为单位元.

④逆元: $\forall a\in Z$, $a\circ(4-a) = a+4-a-2 = 2 = (4-a)\circ a$, a逆元为$4-a$.

综上①②③④, $\langle Z,\circ\rangle$是群.

T3. 证明: (1) ①封闭性: $\forall a,b,c,d\in R$, $a,c\neq 0$, 则 ac, $ad+b\in R$,
且$ac\neq 0$. 故$(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)\in G$.

②结合律: $\forall a,b,c,d,e,f\in R, a,c,e\neq 0$, $((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f) = (ac,ad+b)\circ(e,f) = (ace, acf+ad+b)$
$= (a,b)\circ(ce,cf+d) = (a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))$, $\circ$满足结合律.

③单位元: $\forall (a,b)\in G$, 有$(1,0)\in G$, 使得

$(a,b)\circ(1,0) = (a, a\cdot 0+b) = (a,b)$

$(1,0)\circ(a,b) = (a, 1\cdot b+0) = (a,b) = (a,b)\circ(1,0)$

故$(1,0)$为单位元.

④逆元: $\forall (a,b)\in G$, $(a,b)\circ(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}) = (1,0) = (\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\circ(a,b)$

其中$(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\in G$, (a,b)逆元为$(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})$.

综上①②③④, $\langle G,\circ\rangle$是群.

No:

Date:

(2) 易知 $H \subseteq G$，$\forall (1,b)$，$(1,d) \in H$，由(1)得 $(1,d)^{-1} = (1,-d)$

则 $(1,b) \circ (1,d)^{-1} = (1,b) \circ (1,-d) = (1,b-d) \in H$

所以 $\langle H, \circ \rangle$ 是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群.

T8. 证明：$\forall h \in H$，$a \in G$，由 f 为 $G \to G'$ 的群同态，得

$f(aha^{-1}) = f(a)f(h)f(a^{-1}) = f(a)f(h)f(a)^{-1}$，

由 G' 为交换群，得 $f(aha^{-1}) = f(a)f(a)^{-1}f(h) = f(h)$，故

$f(aha^{-1}h^{-1}) = f(h)f(h)^{-1} = e'$，即 $aha^{-1}h^{-1} \in \ker(f)$

又 $\ker(f) \subseteq H$，所以 $aha^{-1}h^{-1} \in H$，即 $aha^{-1} \in Hh = H$

故有 $aHa^{-1} \subseteq H$，等价于 H 是 G 的正规子群.

T9. 证明：(1) ①自反性：H 是 G 的子群，则 $e \in H$，$a^{-1}a = e \in H$，故 aRa，R 具有自反性.

② 对称性：$aRb \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$，由子群的性质，每一元素逆元均在 H 中，$a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H$，即 bRa，R 满足对称性.

③ 传递性：取 $a,b,c \in G$，满足 aRb，bRc，即 $b^{-1}a \in H$，$c^{-1}b \in H$

由封闭性，$(c^{-1}b)(b^{-1}a) = c^{-1}a \in H$，即 aRc，R 满足传递性.

综上①②③，R 是等价关系.

(2) 即证 $b^{-1}a \in H$ 的充要条件是 $aH = bH$.

① 充分性($\Leftarrow$)：设 $aH = bH$，则 $b = be \in bH = aH$，所以存在 $h_1 \in H$，使得 $b = ah_1$，从而 $b^{-1}a = h_1^{-1} \in H$.

No:

Date:

② 必要性 $(\Rightarrow)$：设 $b^{-1}a \in H$，$\exists h_2 \in H$，使得 $b^{-1}a = h_2$，$a = bh_2$，
$b = ah_2^{-1}$。对 $\forall c \in aH$，$\exists h_3 \in H$，使得 $c = ah_3 = bh_2h_3 \in bH$，故 $aH \subseteq bH$；
对 $\forall c \in bH$，$\exists h_4 \in H$，使得 $c = bh_4 = ah_2^{-1}h_4 \in aH$，故 $bH \subseteq aH$。
所以 $aH = bH$

综上，$b^{-1}a \in H \Leftrightarrow aH = bH$。

No.
Date. / /

群同态基本定理

① 构造由来

同态映射 $f(ab)=f(a)f(b)$ 可以尽量保持群之间的"结构" $f: G\to G'$

同态 → 同构 还需 ① 满射 + ② 单射

① 满射： $f(G)\neq G'$，$f(G)\leq G'$，将 G' 缩小至 $f(G)$，即 Imf

构造出 $f: G\to Imf$ 为满同态

② 单射： $f(a)=f(b)$，则 $a=b$

$f(a)=f(b) \Rightarrow f(ab^{-1})=e \Rightarrow \begin{cases} ab^{-1}\in kerf \\ \text{陪集分类下 } a\sim b \end{cases}$

又 $kerf \lhd$，用该正规子群对 G 进行商群分类

∴ 构造 $\tilde{f}: \frac{G}{kerf} \to Imf$ 应为同构

② 同态基本定理的证明

设 $f: G\to G'$ 是群同态，则有群同构：$\tilde{f}: \frac{G}{kerf} \cong Imf$，即 $\tilde{f}(\bar{g}) = f(g)$，其中（$\bar{g}$ 为 g 所在的陪集）

证明：构造映射：$\tilde{f} = \frac{G}{kerf} \to Imf$，$\tilde{f}(\bar{g})=f(g)$

① $\frac{G}{kerf}$ 以陪集为元素，我们需证 $\forall g_1, g_2 \in \bar{g}$，$\tilde{f}(g_1)=\tilde{f}(g_2)$

（即换一代表元后还映射到同一元上）

$g_1, g_2\in\bar{g}$，$g_1\sim g_2$，即 $g_1^{-1}g_2\in kerf$

所以 $f(g_1^{-1}g_2)=f(g_1)^{-1}f(g_2)=e \Rightarrow f(g_1)=f(g_2)$

所以 $\tilde{f}$ 是一个映射

② 下证 $\tilde{f}$ 为同态映射：

$\forall \bar{g}_1, \bar{g}_2 \in \frac{G}{kerf}$，即 $\bar{g}_1 = g_1(kerf)$，$\bar{g}_2=g_2(kerf)$

$\tilde{f}(\bar{g}_1\bar{g}_2) = \tilde{f}(g_1g_2(kerf)) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \tilde{f}(g_1(kerf))\tilde{f}(g_2(kerf))$

∴ $\tilde{f}$ 是一同态映射

③ 下证 $\tilde{f}$ 为单射：

即证 $f(g_1)=f(g_2) \Rightarrow \bar{g}_1=\bar{g}_2$

$f(g_1)=f(g_2) \Rightarrow f(g_1^{-1}g_2)=e \Rightarrow g_1^{-1}g_2\in kerf \Rightarrow g_1\sim g_2 \Rightarrow \bar{g}_1=\bar{g}_2$

No.

Date. / /

④最后证 $\tilde{f}$ 为满射：

即 $\forall f(g) \in \mathrm{Im} f$，均有 $\bar{g} \in \frac{G}{\ker f}$，使得 $\tilde{f}(\bar{g}) = f(g)$

$f(g) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow g \in G \Rightarrow \exists g(\ker f) = \bar{g}$ 使 $\tilde{f}(\bar{g}) = f(g)$

综上①-④，$\tilde{f}: \frac{G}{\ker f} \cong \mathrm{Im} f$

（将陪集分类后的G中的整个陪集映射到（压缩的）一点）

③ 应用：证明同构

步骤：①构造 $f: G \to G'$，并证明 f 为一映射

②证明 f 为同态映射

③证明 f 为满射 } 可交换

④找 $\ker f$

⑤用同态基本定理得 $G/\ker f \cong G'$