概率论2022.6

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$X \sim N(-1,\sigma^2)$且$P(-3<X<-1)=0.4$，则$P(X \geq 1)=$（　　）.

（A） 0.1　　（B） 0.2　　（C） 0.3　　（D）0.4

2. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，即$X \sim Exp(2)$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中随机事件$\{X>1/2\}$ 出现的次数，则$P(Y=2)=$（　　）.

（A）$e^{-2}(1-e^{-1})$　　（B）$3e^{-1}(1-e^{-2})$

（C）$3e^{-2}(1-e^{-1})$　　（D）$e^{-1}(1-e^{-2})$

3. 设随机变量Z的分布函数为$F(z)=\begin{cases}1-e^{-3z}-e^{-4z}+e^{-7z}, & z \geq 0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，则$E(Z)=$（　　）.

（A）$\frac{7}{12}$　　（B）$\frac{37}{84}$　　（C）$-\frac{7}{12}$　　（D）$-\frac{37}{84}$

4. 设随机变量X的期望、方差都存在，并且$E(X)=7$，$D(X)=4$. 随机变量X_1,X_2,X_3相互独立、都与 X 有相同的分布，下面说法正确的是（　　）.

（A）$D(X_1+X_2)=D(2X)=4D(X)=16$　　（B）$D(X_1+X_2)=2D(X)=8$

（C）$P(X_1=X_2=X_3)=0$　　（D）$X_1=X_2=X_3$

5. 在假设检验中，不拒绝原假设意味着（　　）.

（A）原假设肯定是正确的　　（B）原假设肯定是错误的

（C）没有证据证明原假设是正确的　　（D）没有充分证据证明原假设是错误的

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 设事件A,B,C满足$B \subset A$，$B \subset C$，$P(A)=0.8, P(AC)=0.6, P(A-B)=0.5$，则$P(A\bar{B}C)=$____________.

7. 设连续型随机变量X的分布函数为$F_X(x), Y=2X^2+1$，则 Y 的分布函数$F_Y(y)=$____________________.

8. 设 1 小时内进入某图书馆的读者人数服从 Poisson 分布，已知 1 小时内无人进入该图书馆的概率为 0.01，则 1 小时内至少有 2 个读者进入该图书馆的概率为______________.

9. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots)$相互独立且同分布的随机变量序列，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0\end{cases}$. $n \to +\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 以概率收敛于____________.

10. 设两个总体X与Y相互独立且具有相同的分布$N(1,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_5)$分别为来自这两个总体的简单样本，$\overline{X}$、$\overline{Y}$分别为两个样本均值，

$S_1^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$，$S_2^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(Y_k-\overline{Y}\right)^2$，则统计量 $\frac{5(\bar{X}-\bar{Y})^2}{S_1^2+S_2^2}$ 服从的分布为

________________.

三、计算与证明（本大题共 8 小题，共 70 分）

11.（10 分）某企业流水线生产的产品按 100 件装箱，该企业出厂的检验标准是从每箱产品中抽取 10 件进行检验，若没发现不合格产品就通过检验，否则开箱逐个检验. 据统计每箱产品中的次品数不超过 4 件，每箱产品中有 i 件次品的概率如下表所示

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

（1）请帮检验部门估计每箱产品的通过率；

（2）假设按照这个检验方法某箱产品通过了检验，该箱产品中依然有 2 件次品的概率有多大?

12.（10 分） 设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

令$Z=2X-Y$，（1）求Z的分布函数,（2）求$P(Y<1/2\,|X<1/2)$.

13.（8 分） 设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

而且当随机变量$X=x(x>0)$条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-(y-x)}, & y>x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）求条件概率$P(Y>2|X=1)$；　（2）求$P(X+Y<2)$.

14.(6 分) 设总体的二阶矩存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，令$Y=X_i-\bar{X}$，$Z=X_j-\bar{X}$, 求 Y 与 Z 的相关系数.

15.（10 分）据调查某社区 400 个家庭中，每个家庭购买车辆数为 0，1，2 的概率如下表

0	1	2
0.05	0.8	0.15

请利用中心极限定理近似计算：

（1)假设各个家庭购买的车辆数相互独立,求购买的车辆数超过 450 部的概率，

（2）求购买 1 部车的家庭数不多于 340 的概率.

（$\Phi(2.5)=0.9938$, $\Phi(1.15)=0.8749$）

16.（10 分）设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，从总体中抽取简单样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$.

（1）求θ 的矩估计量$\hat{\theta}_1$ ，并判断是否为无偏估计量；

（2）求θ 的最大似然估计量$\hat{\theta}_2$.

17.（10 分）假设某型号彩色显像管的寿命服从正态分布,并且已知标准差$\sigma=40$小时。从这批显像管中随机抽取 100 只，算得其平均寿命为 10000 小时，试求

(1)显像管平均寿命 μ 的置信度为 0.99 的置信区间；

(2)若显像管的平均寿命不小于 10100 小时被认为合格，试在显著性水平$\alpha=0.005$下检验这批显像管是否合格？（$\Phi(2.576)=0.995,\quad \Phi(2.33)=0.99$）

18.（6 分）设总体X的分布函数为$F(x)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的简单随机样本，$X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 证明：

（1）当$x\le y$时，$P\{X_{(1)}>x，X_{(n)}\le y\}=\left(F(y)-F(x)\right)^n$.

（2）随机变量$\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)$的分布函数为

$$G(x，y)=\begin{cases}F^n(y)-\left(F(y)-F(x)\right)^n, & x\le y\\ F^n(y), & x>y\end{cases}.$$

2022.2

备用数据：$\Phi(\cdot)$:标准正态分布函数，$t_\alpha(n)$ 和 $\chi^2_\alpha(n)$：相应分布的上侧α 分位数.

$\Phi(1)=0.841, \Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2)=0.977$；

$t_{0.025}(8)=2.306,\ t_{0.05}(8)=1.860;\quad \chi^2_{0.05}(8)=15.507,\ \chi^2_{0.95}(8)=2.733.$

一、完成下列各题 （每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必然发生，B 与 C 互不相容， 且 $P(A)$=0.2, $P(B)$=0.4, $P(C)$=0.3，求 $P(A\cup B\cup C)$；判断 A 与 C 是否独立？说明理由.

2. 设 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.4, & -1<x<0,\\ cx, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求(1) c 的值；(2) X 的分布函数.

3. 设随机变量 X 服从均值为 2 的指数分布，求(1) X 的方差；(2) $P(X<3|X>1)$.

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，同服从均值为 2 的泊松分布，求：

(1) $P\{X+Y=2\}$；　　(2) $P\{\min(X,Y)=1\}$.

5. 设总体 $X\sim N(\theta,\theta^2)$， $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本， $\bar{X}, S^2$ 分别是其样本均值和样本方差，a, b 是实数，设 $T(a,b)=a\bar{X}^2+bS^2$，求：(1) $T(a,b)$ 是 θ^2 的无偏估计量的充要条件；　　(2) $T(0,1)$的方差.

二. (10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间(0, 2)上的均匀分布， $Y\sim B(2, 0.5)$, 令 $Z=XY$，求：(1) Z 的数学期望与方差；(2) Z 的分布函数.

三. (8 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, 1<x<3,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$，对 X 独立重复观察 396 次，观察值为 $X_1,\cdots,X_{396}$，记 $Y=X_1+\cdots+X_{396}$. 试由中心极限定理，求 $P\{Y<880\}$的近似值.

四. (12 分) 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(2-xy), & 0<x<2, -1<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

(1) 求 $P(X+Y>1)$；(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；

(3) 判断 X 与$|Y|$是否独立？说明理由.

五. (10 分) 设(X,Y)服从二维正态分布，$X \sim N(2,4)$，$Y \sim N(1,9)$，X与Y的相关系数为ρ．(1) 若$\rho = 0$，求$P(2X > Y-2)$，问a取何值时，$aX+Y$与$X-2Y$独立？(2) 若$\rho = 0.5$，求$2X-Y$的概率密度.

六.(10 分)设总体X的分布律为$P(X=0)=(1-\theta)^2$，$P(X=1)=2\theta(1-\theta)$，$P(X=2)=\frac{2}{3}\theta^2$，$P(X=3)=\frac{1}{3}\theta^2$，未知参数 0<$\theta$<1，从总体中抽取容量为 25 的简单随机样本，观测到“0”, “1”, “2”, “3”出现的次数分别为 3，13，7，2，分别求θ的矩估计值和最大似然估计值.

七.(10 分)设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, 0 < x \le \theta, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$，未知参数$\theta > 0$. $X_1,\cdots,X_n$为来自X的样本，$\bar{X}$是样本均值. (1) 判断$\frac{9}{4}\bar{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量，说明理由；(2) 判断$\frac{9}{4}\bar{X}^2$是否为θ^2的相合(一致)估计量，说明理由.

八. (10 分) 设一工厂生产的某种型号无缝钢管的内径$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从某日生产的钢管中随机抽出 9 根，测得内径(单位：cm)的样本均值为 53.84，样本标准差为 1.32. (1) 在显著水平 0.05 下检验$H_0:\sigma^2=1, H_1:\sigma^2>1$. (2) 求$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间. (保留两位小数)

2021.6

（标准正态分布函数$\Phi(x):\Phi(1.50)=0.9332,\Phi(2.5)=0.9938$，
$\chi^2_{0.975}(14)=5.629$，$\chi^2_{0.025}(14)=26.119$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$，$\chi^2_{0.025}$（15） $=27.488$
$t_{0.025}(14)=2.1448, t_{0.025}(15)=2.1314, t_{0.05}(14)=1.7613, t_{0.05}(15)=1.7531$）

一．填空题 （每小题 3 分，共 30 分）

1. 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$，则该射手进行一次射击的命中率为____________.

2. 随机变量X和Y独立同分布于参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布，令$U=2X+Y,V=2X-Y$， 则U和V的相关系数为___________.

3. 随机变量$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，设$p_1=P(X\le\mu-4)$, $p_2=P(Y\ge\mu+5)$，则比较p_1________p_2 (填$\le$, $\ge$或=).

4. 设有事件A, B, $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$, 则$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______.

5. 随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$E[\mathrm{e}^X]=$___________.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ，σ^2是未知参数，样本均值记为$\overline{X}$, 样本方差为S^2， 则参数μ的置信水平为$1\text{-}\alpha$的置信区间长度为__________________________.

7. 设总体$X\sim N(0,1)$, ($X_1,X_2,...,X_6$)是来自X的样本, 设$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$, 若$CY\sim\chi^2(2)$, 则$C=$___________.

8. 设随机变量X服从参数为9的泊松分布，$Y\sim N(9,4)$，且X,Y相互独立，则根据切比雪夫不等式有：$P(|X-Y|\ge 4)\le$___________.

9. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$，则$Y=-2\ln X$的概率密度$f_Y(y)=$____________________________.

10. 设 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 1 的指数分布，则$P\{1<\min(X,Y)\le 2\}=$________________.

二.（8 分）已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，今从男、女人数相等的人群中随机挑选一人，发现恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多大？

三.（8 分）某箱装 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80，10 和 10 件. 现从中随机取一件，定义三个随机变量 X_1, X_2, X_3 如下：

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到 } i \text{ 等品} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $i = 1, 2, 3$. 求 X_1 和 X_2 的相关系数.

四.（14 分）二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2, \max\{0, x-1\} \le y \le \min\{1, x\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

求（1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）协方差 $Cov(X, Y)$；

（3）对 $y \in (0,1)$，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

五.（10 分）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 服从区间(0, 4)上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

六.（10 分）从一台车床加工的一批轴料中取 15 件测量其椭圆度，计算得椭圆度的样本标准差 $s = 0.025$, 问该批轴料椭圆度的方差与规定的 $\sigma^2 = 0.0004$ 有无显著差别（$\alpha = 0.05$，椭圆度服从正态分布）？

七.（10 分）有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m, 现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？

八.（10 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta, & 0 \le x < 1; \\ 1-\theta, & 1 \le x \le 2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，记 N 是样本观测值中小于 1 的个数，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$，并试计算极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 的无偏性.

2021.1

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列说法错误的是（　　　）。

(A) A, B 互为对立事件, 则 A, B 一定互不相容

(B) A, B 互不相容，且 $P(A), P(B)$均不为 0，则 A, B 一定不是相互独立的

(C) 同一个试验的基本事件（即由单个样本点构成的随机事件）一定互不相容

(D) 同一个试验的基本事件一定相互独立

2. 连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 必满足条件（　　　）。

(A) $0 \le f(x) \le 1$　　　　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(C) 是单调不减函数　　　　(D) 是连续函数

3. 下列说法错误的是（　　　）。

(A) 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 和 Y 都服从一维正态分布；

(B) 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 $X+Y$ 服从一维正态分布；

(C) 若 X 和 Y 都服从一维正态分布，且 X, Y 相互独立，则 $X+Y$ 服从一维正态分布；

(D) 若 X 和 Y 都服从一维正态分布，且 $\rho_{XY} = 0$，则 X, Y 相互独立。

4. 设总体 X 的均值 μ、方差 σ^2 均未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自该总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 σ^2 的**矩估计量**是（　　　）。

(A) $\overline{X}$　　(B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$　　(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

5.设 (X_1, X_2) 是来自总体 X 的样本，则总体均值 μ 最有效的无偏估计是（　　）。

(A) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$　　　　(B) $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$

(C) $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$　　　　(D) $\hat{\mu}_4 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 若 $P(A \cup B) = \frac{3}{5}, P(\overline{A} \cup B) = \frac{9}{10}$, 则 $P(B) =$ ______________。

7. 随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1 \\ 0.4, & 1\le x<2 \\ 0.5, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，则

$P\{X=1\}=$______________，$P\{X=2\}=$______________，

$P\{X=3\}=$______________。

8. 设随机变量 $X\sim N(\frac{1}{2},2)$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$______________。（结果用分数表示）

9. 设某种病菌在人群中的带菌率为 10%，检测时带菌者呈阳性、阴性反应的概率分别为 0.95 和 0.05，不带菌者呈阳性、阴性反应的概率分别为 0.01 和 0.99。今某人检测一次呈阳性，则他是带菌者的概率为______________。（结果用分数表示）

10. 设两总体 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,4)$ 相互独立，X_1,X_2,X_3,X_4 和 $Y_1,Y_2,Y_3\cdots,Y_9$ 分别为来自总体 X 和 Y 的样本，则统计量 $Z=\dfrac{3(X_1+X_2+X_3+X_4)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}$ 服从分布____________。（给出分布类型和参数）

三、判断题：判断以下说法正确与否,正确的打√，错误的打 X（**每小题 2 分，共 10 分**）

11. 若 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，则 $AB=\varnothing$。 (　　)

12. $P(A|B)$ 的含义是事件 A,B 都发生的概率。 (　　)

13. 取值范围为连续区间的随机变量就是连续型随机变量。 (　　)

14. 伯努利大数定律为实际中用频率近似代替概率提供了理论依据。 (　　)

15. 假设检验可能犯弃真错误和纳伪错误，在样本容量一定时，不能同时减小犯这两类错误的概率。(　　)

四、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

16. 加法器在做加法运算时,根据四舍五入原则先对每个数取整后再运算， 这样产生的误差服从区间[-0.5,0.5]上的均匀分布。问：要使误差总和的绝对值不超过 10 的概率大于 0.95，最多能有多少个数相加?（$\Phi(0.95)=0.829$，$\Phi(0.05)=0.52$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$）

17. 设随机变量 X，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},(\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1\ne\lambda_2)，$$

且 X，Y 相互独立。

(1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度；

(2) 根据(1)中结论回答指数分布是否具有可加性，并列举两种具有可加性的分布类型。

18. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}c, & |y|<x,0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1) 求常数 c；　　(2) 求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

(3) 问 X 与 Y 是否相互独立？是否不相关？请说明理由。

19. 设某校女生的身高服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今从该校随机抽取 9 名女生，计算身高样本均值和样本标准差为：$\overline{x}=162.67cm$，$s=4.20cm$，求身高方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

$(\chi_{0.025}{}^2(8)=17.535,\ \chi_{0.975}{}^2(8)=2.18;\ \chi_{0.025}{}^2(9)=19.02,\ \chi_{0.975}{}^2(9)=2.7)$

20. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，其中 $\sigma>0$ 未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本，求 σ 的极大似然估计量。

21. 已知人每分钟的脉搏次数服从正态分布，正常人的平均脉搏为 72 次/每分钟，现测得 9 例酏剂中毒患者的脉搏，算得平均次数为 66.4 次，样本方差为 5.92^2。试问：中毒患者与正常人的平均脉搏有无显著差异?（$\alpha=0.05$）

$(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.65)=0.95,t_{0.025}(8)=2.306,t_{0.05}(8)=1.8595,t_{0.025}(9)=2.2622,t_{0.05}(9)=1.8331)$

2020.6

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A，B 是两个随机事件，且 0<P(A)<1, P(B)>0, $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有（　）.

（A）$P(A|B)=P(\bar{A}|B)$（B）$P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$

2. 设随机变量 $X\sim N(\mu,2^2), Y\sim N(\mu,4^2)$，记 $p_1=P\{X\le\mu-2\}$，$p_2=P\{Y\ge\mu+4\}$，则（　）.

（A）对任意实数 μ，有 $p_1=p_2$（B）对任意实数 μ，有 $p_1<p_2$

（C）对任意实数 μ，有 $p_1>p_2$（D）对个别 μ 的取值，有 $p_1=p_2$

3.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1/2, 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, x\ge 1\end{cases}$，则 P{X=1}=(　　).

（A）0（B）$\dfrac{1}{2}$（C）$\dfrac{1}{2}-e^{-1}$（D）$1-e^{-1}$

4. 设随机变量 X 的取值范围是（-1，1），则以下可作为 X 概率密度的是（　）.

（A）$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$（B）$f(x)=\begin{cases}2, & -1\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（C）$f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$（D）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

5.下列说法**不**正确的是（　）.

（A）二维正态分布的边缘分布是一维正态分布

（B）二维均匀分布的边缘分布是一维均匀分布

（C）二维正态分布的条件分布是一维正态分布

（D）二维均匀分布的条件分布是一维均匀分布

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.某出版社调查读者阅读习惯，设 A 表示喜欢艺术类，B 表示喜欢文学类，C 表示喜欢科技类，比例如下表。

事件	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
比例	0.14	0.23	0.37	0.08	0.09	0.13	0.05

现随机抽取一位读者，发现该读者喜欢科技类，则他**不**喜欢艺术类**和**文学类的概率是_______。

2.请列举三种具有**可加性**（再生性）的分布：_______、_______、_______。

3.关于随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的**相互独立**、**两两独立**、**两两不相关**，一般情况下，三者的关系是：_______ ⇒_______⇒_______。

4.设随机变量 X~U(0,1),则由切比雪夫不等式可得 $P\{|X-\frac{1}{2}|\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\}\le$_______。

5.设总体 $X\sim N(\mu,4)$，则样本容量至少为_______时，才能以 95%的把握保证 μ 的置信区间长度不大于 4？（$u_{0.025}=1.96, u_{0.05}=1.65$）

三、计算题（每题 10 分，共 70 分）

1.设 X 和 Y 的分布律如下，且 P{XY=0}=1,

X	-1	0	1
p	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
p	1/2	1/2

（1） 求(X,Y)的联合分布律；（2）判断 X,Y 的独立性。

2.随机变量(*X*, *Y*)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>x, x>0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$，求

（1） $f_{X|Y}(x\,|\,y)$；（2） $E(XY)$(化为二次（累次）积分即可，不必计算结果)。

3.设 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$， $Y\sim U(0,1)$，且 X，Y 相互独立，求 X+Y 的概率密度函数。

4.独立重复地抛掷一枚均匀硬币 10000 次，每次观察出现正面还是反面，用中心极限定理估算：在 99%的把握之下，能够保证正面出现的频率与概率的误差控制在什么范围之内？

（$u_{0.01}=2.33, u_{0.005}=2.58$）(10 分)

5.设 X_1, X_2 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$的样本，试讨论：

(1) X_1+X_2 与 X_1-X_2 是否相互独立? (2) $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 服从什么分布?

6. 设测量误差服从零均值的正态分布，进行 4 次独立测量，各次误差为 0.1, -0.06, 0.04, -0.12。求测量误差方差的矩估计值和极大似然估计值。

7.设某班车在两点间固定路线上的运行时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：分钟）。现测得该班车 16 次运行时间， 计算得 $\overline{x}=41.5, s^2=7.8$。在 0.1 的显著性水平下, 能否认为班车的平均运行时间为 40 分钟？（$u_{0.05}=1.645, u_{0.1}=1.28,$， $t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459$）

概率统计期末模拟题（三）2020.1

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 设A,B互不相容，$P(A)=0.3, P(B)=0.5$，则$P(\bar{B}|\bar{A})=$______________.

2. 设 X 服从二项分布 $B(2,p)$，Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k=1,2,\cdots$,

   若已知$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，则$D(Y)=$ __________.

3. 设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布，则

   $P\left(\min(X,Y)\geq -\frac{1}{2}, \max(X,Y)\leq \frac{1}{2}\right)=$ ________________.

4. 若X_1,X_2,X_3独立同分布，$P(X_n=1)=\frac{1}{4}, P(X_n=-1)=\frac{3}{4}, Y_n=X_nX_{n+1}, n=1,2$，

   则$P(Y_2=1|Y_1=1)=$________________.

5. 若有一个容量为 11 的样本，其样本均值为 2，样本二阶原点矩为 10，则样本方差为________________.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$是取自总体$N(0,1)$的样本，统计量$T=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{C(X_3+X_4)^2+X_5^2}}$，则当

   $C=$________________时，T服从$t(2)$分布.

二、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.4\Phi(x)+0.6\Phi(x-1)$，$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)=$(　　　).

   (A) 0　　(B) 0.4　　(C) 0.5　　(D) 0.6

2. 将长为 1 米的木棍随机截成两段，则此两段长度的相关系数等于(　　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1

3. 设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}, i=1,2$, 且满足$P(X_1+X_2=0)=1$，则

$P(X_1=X_2)=$(　　　).

   (A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

4. 设$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$独立同分布于 Poisson 分布$P(\lambda)$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则有（　　　　）.

(A) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{n\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$　　(B) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$

(C) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$　　(D) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$

5 下面说法中正确的是（　　）.

① 样本均值是总体期望的无偏估计

② 样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的无偏估计

③ 样本方差是总体方差的无偏估计

④ 样本 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的无偏估计

（A）①②③　　（B）①③④　　（C）①②④　　（D）①②③④

三、（10 分）设某地区移动、电信、联通的用户比例为 4:3:2，一份对运营商的抽样调查数据表明：移动、电信、联通的好评率分别为 80%、60%、70%. 现从这些数据资料中任取一位用户的评价，

（1）求该评价为好评的概率；

（2）若该评价是好评，求该用户是电信用户的概率.

四、（10 分）设 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1, \\ 1, & x\ge 1, \end{cases}$

（1）a,b满足什么条件时，$F(x)$为某随机变量的分布函数？

（2）若$F(x)$为连续型随机变量的分布函数，求a,b.

五、（10 分）设X服从参数为λ的指数分布，$Y=[X]+1$, $[x]$为不超过x的最大整数.（1）求Y的分布；　（2）求在已知$Y=2$的条件下，X的条件概率密度.

六、（12 分）设随机变量ξ,η独立同分布，$\xi\sim U\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）求$\xi+\eta$的概率密度；　（2）若$X=\xi\cos\eta, Y=\xi\sin\eta$, 问$X,Y$是否不相关？

七、（10 分）设总体X的密度

$f(x)=\begin{cases} a|x-\mu|, & \mu-\theta\le x\le\mu+\theta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体$X$的样本.

（1）求a；　　　（2）若μ已知，求θ的矩估计量.

八、（15 分）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本.

（1）若μ已知, σ^2未知，求σ^2的极大似然估计量；

（2）若μ已知，由（1）构造σ的置信水平为 95%的双侧置信区间；

（3）若已知$\sigma=2$, 考虑如下的假设检验问题,

$$H_0:\mu=2 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu=3$$

检验由拒绝域$W=\{\bar{x}\ge 2.8\}$确定，当$n=36$时，求检验犯两类错误的概率.
(用$\Phi(\cdot)$表示，不用计算)

2019.6

（标准正态分布函数 $\Phi(x):\Phi(1.56)=0.941,\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$；

$\chi^2_{0.975}(9)=2.70$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.02$，$\chi^2_{0.975}(10)=3.25$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.48$,

$t_{0.025}(9)=2.26, t_{0.025}(10)=2.23, t_{0.05}(9)=1.83, t_{0.05}(10)=1.81$）

一、完成下列各题 （共 36 分）

1. （5 分）某大厦有四部电梯，已知某时刻 T, 每部电梯正在运行的概率为 0.7,求 T 时刻至少两部电梯运行的概率.

2.（5 分）随机变量 X 的分布列为

X	0	$\pi/2$	π
P	0.2	0.5	0.3

求 $D(\sin X)$.

3.（5 分）已知 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.4$, $P(\overline{AB})=0.8$，求 $P(A\,|\,A\cup\overline{B})$.

4.（6 分）成箱出售的玻璃杯，每箱 20 只。设每箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1。顾客购买时，售货员随意取一箱，而顾客随意取四只检查，若无残次品则买下，否则退回。现售货员随意取一箱玻璃杯，求顾客买下的概率（保留小数点后三位小数）.

5.（7 分）随机变量 X, Y 满足 $EX = 1, EY = 2, D(X) = 1, D(Y) = 4, \rho_{XY}=0.6$,

设 $Z=(2X-Y+1)^2$，求 $E(Z)$.

6.（8 分）设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$， 且 $x_1,\dots,x_{10}$ 为样本观测值，样本方差 $s^2=2$。

分别求 σ^2 和 $\mathrm{Var}(\dfrac{X^2}{\sigma^3})$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

二、（10 分）二维随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), 0\le x\le 2, 0\le y\le 2;\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

三、（10 分）将 2 个球随机地放入 3 个盒子，设 X 为第一个盒子内放入的球数，Y 为有球的盒子的个数，求（1） (X, Y) 的联合分布列；(2) $E(X), D(Y)$.

四、（10 分）二维随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）求 $P(X+Y\le 1)$； (2) X, Y 是否独立？

五、（10 分）某种零件的尺寸标准为$\sigma=5.2$，对一批这类零件检查 9 件得到平均尺寸数据（毫米）：$\bar{x}=26.56$。 设零件尺寸服从正态分布，问这批零件的平均尺寸能否认为是 26 毫米？ （$\alpha=0.05$）

六、（10 分）一条生产线生产的产品合格率为 0.8，要使一批产品的合格率在 76%与 84%之间的概率不小于 90%，问至少要生产多少件产品？

七、（14 分）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k\theta},\theta<x<(k+1)\theta;\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 其中 k 为已知正数，$\theta>0$ 为一个待估参数。$X_1,\ldots X_n$ 为来自总体的样本。

(1) 求θ的最大似然估计量和矩估计量；（2）θ的最大似然估计是否无偏？

2019.1

备用数据：$\Phi(\bullet)$:标准正态分布函数，$t_\alpha(n)$:自由度为n的t分布的上α分位数.
$\Phi(1)=0.841, \Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2)=0.977$;
$t_{0.025}(8)=2.306, t_{0.025}(16)=2.120, t_{0.05}(8)=1.860, t_{0.05}(16)=1.746.$

一、完成下列各题 （每小题 6 分，共 30 分）

1. 某学院一、二、三、四年级各有 100 名学生，其中男生分别有 80、70、85、75 名，从该学院随机选一名学生，A 表示选到的是一年级学生，B 表示选到的是男生，则$\overline{A\cup B}$表示什么？其概率是多少？

2. 某小区有 $n(n\geqslant4)$个业主申请停车位，实际停车位有 $m(m+4<n)$个，管理员采用抽签方法确定停车位的使用权，求: (1) 前 4 个排队者中至少有 1 个人抽中的概率; (2) 第 4 个排队者抽中的概率.

3. 某热线电话在 t 小时内接到的呼叫次数 X_t服从参数为 $t/2$ 的泊松分布，设在两个不重叠的时间段接到的呼叫次数相互独立.
(1) 求 8 点到 12 点至少接到 1 次呼叫的概率；
(2) 若已知 8 点到 12 点至少接到 1 次呼叫，求在 8 点到 10 点没有接到呼叫的概率.

4. 二维随机变量(X,Y)在以(1,0)，(1,1)，(0,1)为顶点的三角形区域服从均匀分布. 求：（1）$P(X+Y<1.5)$的值；（2）(X,Y)的分布函数值 $F(1.5, 0.5)$.

5. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$， $X_1,\ldots,X_4$是 X 的简单随机样本， $\bar{X}$ 是样本均值.
(1) 求 $P(|\bar{X}|>\sigma)$；(2) 若 $\dfrac{cX_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}\sim t(3)$，求$c$的值.

二. (10 分) 设随机变量X与Y相互独立，X服从指数分布，$E(X)=2$，$Y\sim B(1, 0.4)$，令$U=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}}$，$V=X+Y$，分别求 U, V 的分布函数.

三. (12 分) 设随机变量X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 对X独立重复观察 100 次，观察值为$X_1,\ldots,X_{100}$，记 Y 为$\{X_i<0.5\}(i=1,\ldots,100)$出现的次数，$Z=X_1+\ldots+X_{100}$. 求: (1) $\sum\limits_{i=1}^{60}X_i$ 与$\sum\limits_{i=41}^{100}X_i$ 的相关系数；(2) $P(Y>45)$的近似值；
(3) Z 的近似分布(要求写出参数).

四. (12 分)设(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y}{2}, & |x|<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 $P(X+Y>1)$ 的值；(2)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.2|Y=0.5)$ 的值；(3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

五. (10 分) 超市中有两种商品，它们每月销售量之间存在相关性，设商品甲月销售件数(单位：千件)$X\sim N(5.25, 0.64)$，商品乙月销售件数(单位：千件)$Y\sim N(2.53, 0.25)$，且(X, Y)服从正态分布，X 与 Y 的相关系数 $\rho=0$. 求: (1) 一个月中这两种商品销售总量超过 7.5 千件的概率；(2) 一个月中甲销售量超过乙销售量 2 倍的概率.(注：结果用$\Phi(\cdot)$表示)

六.（16 分）设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}/\beta^{\alpha}, & 0<x<\beta, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 未知参数 $\alpha>1, \beta>0$，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本. (1) 若 $\alpha=3$，求 β 的矩估计量 $\hat{\beta}$，并判断 $\hat{\beta}$ 是否为 β 的无偏估计量，说明理由；(2) 若 $\beta=3$，求 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}$，并判断 $\hat{\alpha}$ 是否为 α 的相合(一致)估计量，说明理由.

七. (10 分) 某培训班声称经过培训，学员掷实心球的成绩能够提高 1 米以上. 为检验他们的说法是否符合实际，随机选出 9 人，记录他们培训前和培训后的成绩如下（单位：米）：

培训前成绩 xi	9.63 7.61 6.28 8.32 5.40 5.82 6.89 8.17 5.78	$\bar{x}=7.10$	$s_X^2=2.0352$
培训后成绩 yi	10.24 8.75 7.05 8.91 6.51 6.58 8.02 9.08 6.32	$\bar{y}=7.94$	$s_Y^2=1.938$
差值 zi=yi-xi	0.61 1.14 0.77 0.59 1.11 0.76 1.13 0.91 0.54	$\bar{z}=0.84$	$s_Z^2=0.058575$

设差值数据来自正态分布，在显著水平 0.05 下，检验 H_0:平均成绩提高 1 米及以上, H_1:平均成绩提高不到 1 米.

2018.1

可查的分布表

$t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.025}(9)=2.2622, t_{0.05}(8)=1.8595, t_{0.05}(9)=1.8331,\ \chi^2_{0.05}(8)=15.507,$

$\chi^2_{0.95}(8)=2.733,\ \chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.975}(8)=2.180, \chi^2_{0.05}(9)=16.919, \chi^2_{0.025}(9)=19.023$

一、 填空题(共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把答案填在题中横线上)

1．设 A,B 为两个随机事件，且有 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.4, P(\bar{B}|A)=0.5$，则 $P\left(\bar{B}|(A\cup B)\right)$=____________.

2．设某车间有三台机床，在一小时内三台机床不要求工人维修的概率分别为 0.9、0.8、0.85，假设三台机床是否需要维修是相互独立的，则一小时内三台车床至少有一台不需要维护的概率为__________.

3．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布（$\lambda>0$），且已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，则 λ=________.

4．设 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y)$=____________.

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X 在 $(0,2\theta)$ 服从均匀分布，其中 $\theta>0$，则 $D(\bar{X})$=________.

6．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 2\sigma\}\leq$________.

二、选择题（共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．对任意事件 A、B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（　　）.

（A）$A\subset B$　（B）$\bar{B}\subset\bar{A}$　（C）$A\bar{B}=\Phi$　（D）$\bar{A}B=\Phi$

2．设随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 相互独立，设 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$（　　）.

（A）$N(0,5)$　（B）$N(0,-3)$　（C）$N(0,46)$　（D）$N(0,54)$

3．已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（　　）.

（A）$2f_X(-2y)$　（B）$f_X(-\frac{y}{2})$　（C）$-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$　（D）$\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

4．设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 分别为 X、Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（　　）.

（A）$f_X(x)$　　（B）$f_Y(y)$　　（C）$f_X(x)f_Y(y)$　　（D）$\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

5．设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的一个样本，则下列总体均值的估计量中，最有效的为（　　）.

（A）$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{3}X_4$　　（B）$\frac{1}{9}X_1+\frac{1}{9}X_2+\frac{3}{9}X_3+\frac{4}{9}X_4$

（C）$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4$　　（D）$\frac{1}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{1}{5}X_3+\frac{2}{5}X_4$

6．在假设检验中，设 H_1 为备择假设，则（　　）为犯第一类错误.

（A）H_1 正确，接受 H_1　　（B）H_1 正确，拒绝 H_1

（C）H_1 不正确，接受 H_1　　（D）H_1 不正确，拒绝 H_1

三 、解答下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1．仪器中有三个元件,它们损坏的概率都是 0.2,并且损坏与否相互独立.当一个元件损坏时, 仪器发生故障的概率为 0.25,当两个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.6,当三个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.95, 当三个元件都不损坏时,仪器不发生故障.求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

2．一口袋中有 6 个球，在这 6 个球上分别标有数字－3，－3，1，1，1，2，从这袋中任取一球，设各个球被取到的可能性相同，以 X 表示取出的球上标有的数字，求 X 的分布律与分布函数.

3．设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其它\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$.

(1)求 Y 的分布函数，(2) 求 $P\{X\le Y\}$.

4．为了测定一台机床的质量，把它分解成 75 个部件来称量．假定每个部件的称量误差（单位：kg）服从区间（-1,1）上的均匀分布，且每个部件称量误差相互独立，试求机床重量的总误差的绝对值不超过 10kg 的概率．（$\Phi(2)=0.9772$）

5.已知一批零件的长度 X(cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

（$u_{0.025}=1.96, u_{0.05}=1.645, t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.05}(15)=1.7531$）

四、解答下列各题（共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其\ 他.\end{cases}$$

（1）求(X,Y)关于X,关于Y的边缘密度函数；（2） 判断X与Y是否相互独立；

（3）求$P\{X+Y\le 1\}$.

2．已知总体X的概率密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>1$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的一个样本.

（1） 当$\alpha=1$时，求β的矩估计量；

（2） 当$\beta=2$时，求α的极大似然估计量.

3. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水，该自动灌装机正常灌装量$X\sim N(18,0.4^2)$，现测量该厂 9 个灌装样品的灌装量（单位：L）如下：

18. 0, 17. 6, 17. 3, 18. 2, 18. 1, 18. 5, 17. 9, 18. 1, 18. 3.

在显著性水平$\alpha=0.05$下，试问（1）该天灌装是否合格？（2）灌装量精度是否在标准范围内？