T1. 证明：若 $a|b$ 且 $c|d$，则 $ac|bd$.

证明：由 $a|b$ 且 $c|d$，存在 $q_1, q_2 \in Z$，使得 $b=aq_1$，$d=cq_2$.

则 $bd = aq_1 \cdot cq_2 = (ac)(q_1q_2)$，即存在 $q=q_1q_2$ 使得 $bd=acq$.

所以 $ac|bd$.

T2. 设 $n\neq1$，证明：$(n-1)^2 | n^k-1 \Leftrightarrow (n-1)|k$.

证明：根据二项式定理，$n^k-1 = [(n-1)+1]^k-1 = (n-1)^k + C_k^1(n-1)^{k-1} + \cdots + C_k^{k-2}(n-1)^2 + C_k^{k-1}(n-1) + 1 - 1 = (n-1)^2[(n-1)^{k-2} + C_k^1(n-1)^{k-3} + \cdots + C_k^{k-2}] + C_k^{k-1}(n-1)$.

必要性 $(\Rightarrow)$：易知 $(n-1)^2 | (n-1)^2[(n-1)^{k-2} + C_k^1(n-1)^{k-3} + \cdots + C_k^{k-2}]$，又 $(n-1)^2 | n^k-1$

故 $(n-1)^2 | C_k^{k-1}(n-1)$，得 $(n-1) | C_k^{k-1} = k$.

充分性 $(\Leftarrow)$：由 $(n-1)|k$ 可得 $(n-1)^2 | k(n-1)$，又已知 $(n-1)^2 | (n-1)^2 \cdot [(n-1)^{k-2} + C_k^1(n-1)^{k-3} + \cdots + C_k^{k-2}]$. 所以 $(n-1)^2 | n^k-1$.

综上所述，$(n-1)^2 | n^k-1 \Leftrightarrow (n-1)|k$.

T3. 设 $q\neq0, \pm1$，若对任意的 a, b，由 $q|ab$ 可推出 $q|a$ 或 $q|b$ 至少有一个成立，证明：q 一定是素数。

证明：（反证法）假设 q 不是素数，不妨令 $q=n_1n_2$，其中 $2\leq n_1, n_2 < q$，$n_1, n_2 \in Z$

$q_1, q_2 \in Z$

取 $a=n_1q_1$，其中 $n_2 \nmid q_1$，$b=n_2q_2$，其中 $n_1 \nmid q_2$，则 $ab = n_1n_2q_1q_2 = q \cdot q_1q_2$，得 $q|ab$，又 $n_2 \nmid q_1$，故 $q \nmid n_1q_1$，即 $q\nmid a$，同理得 $q\nmid b$，与条件矛盾！故假设不成立，q 一定是素数。

T4. 证明：(1) $3k+1$ 形式的奇数一定是 $6h+1$ 形式。

证明：不妨令该奇数为 m，则 m 可表示为 $2n+1$，$n\in Z$

由题意，$\begin{cases} m=3k+1 \\ m=2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1=3k \\ m-1=2n \end{cases} \Rightarrow 3\mid m-1 \wedge 2\mid m-1$

所以 $6\mid m-1$，即 $\exists h\in Z$，使得 $m-1=6h$，$m=6h+1$，证毕

T5. 证明：(1) 形如 $4k-1$ 的素数有无穷多个。

证明：(反证法) 假设形如 $4k-1$ 的素数只有有限个，设为 $p_1, p_2, \cdots p_m$，

由于 k 取 1, 2 时 3, 7 均为素数，显然 $m>1$。由假设，考虑 $N=4p_1p_2\cdots p_m-1$，

由 $m>1$ 得 $N>1$，N 有素因子。又对任意 $k_1, k_2\in Z$，$(4k_1+1)(4k_2+1)$

$=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1$ 仍具有 $4k+1$ 形式，

而素因子中除了2均可表示为 $4k+1$ 或 $4k-1$ 的形式，N 形式为 $4k-1$ 不

可能为偶数，且必有一个 $4k-1$ 形式的素因子 p，则 $p\in\{p_1, p_2, \cdots p_m\}$

进而 $p\mid N-4p_1\cdots p_m$，即 $p\mid 1$，矛盾！假设不成立，形如 $4k-1$ 的

素数有无穷多个。

(第(2)问同理)