习题课

2024 年 4 月 17 日

问题

- 第一章 Problem 19
- 第三章 Problem 13 25 29 33 35
- 第四章 Problem 10

Problem 19

从一副共有 52 张的扑克牌 (去掉大、小王) 中任取 4 张, 求

1. 取出的 4 张是同花色的概率;
2. 取出的 4 张是不同花色的概率;
3. 取出的 4 张中至少有 2 张是同花色的概率;
4. 取出的 4 张中至少有 1 张是 A 的概率.

样本空间 Ω: 从 52 张牌中选取 4 张牌的组合. $|\Omega| = \binom{52}{4}$.

1. 4 张同花色对应事件数为 $|A_1| = \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4}$, 即第一步选择四种花色之一, 第二步在选定花色的 13 张牌中选择 4 张. 从而概率为 $\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = 0.0106$.
2. 4 张牌花色各不相同，即每张牌从某个固定花色的 13 张中选择. 考虑所选的四张牌无顺序, 其对应事件数为 $|A_2| = \binom{13}{1}^4$. 从而概率为 $\frac{\binom{13}{1}^4}{\binom{52}{4}} = 0.1055$
3. 4 张牌至少有 2 张是同花色, 即 4 张花色各不相同之外的任何情况, 对应事件数为 $|A_3| = |\Omega| - |A_2|$, 从而概率为 $\frac{|\Omega|-|A_2|}{|\Omega|} = 0.8945$

3. 若考虑所有情况，此时进行下述分类:
   - 4 张牌中两张花色相同，另两张花色不同: 相同花色的两张牌花色选择数为 $\binom{4}{1}$，点数选择数为 $\binom{13}{2}$，剩余两张的花色选择为 $\binom{3}{2}$，点数选择数为 $\binom{13}{1}^2$，从而对应事件数为 $|C_1| = \binom{4}{1}\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{13}{1}^2$.
   - 四张牌中两张花色相同，另两张花色也相同: 花色选择数为 $\binom{4}{2}$，点数选择数为 $\binom{13}{2}^2$，从而对应事件数为 $|C_2| = \binom{4}{2}\cdot\binom{13}{2}^2$.
   - 四张牌中三张花色相同: 花色选择数为 $\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}$，三张牌的点数选择数为 $\binom{13}{3}$，一张牌的点数选择数为 $\binom{13}{1}$，从而对应事件数为 $|C_3| = \binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}$.
   - 四张牌花色相同: 花色选择数为 $\binom{4}{1}$，点数选择数为 $\binom{13}{4}$，从而对应事件数为 $|C_4| = \binom{4}{1}\cdot\binom{13}{4}$.

从而概率为 $\frac{|C_1|+|C_2|+|C_3|+C_4|}{|\Omega|} = 0.8945$

4. 4 张牌至少有 1 张是 A，即四张牌均不是 A 的事件的补事件, 其样本数为 $|A_4| = |\Omega| - \binom{48}{2}$. 从而概率为 $\frac{|\Omega|-\binom{48}{2}}{|\Omega|} = 0.2813.$

Problem 19

设某医院一天中出生的婴儿个数 X 服从参数为 λ 的泊松分布,Y 是其中的男婴个数. 假设每出生一个婴儿, 其是男婴的概率为 $\frac{1}{2}$, 试求:

1. (X, Y) 的分布律;
2. Y 的分布律;
3. 给定 Y 时 X 的条件分布律.

1. 易知每个婴儿是否为男婴是相互独立的, 故在每天出生婴儿数为 n 时, 男婴 $Y \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
P\{X=n, Y=k\} &= P\{Y=k|X=n\} \cdot P\{X=n\} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{1}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots,n, n \geq 0
\end{aligned}
$$

2.

$$P\{Y=k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{Y=k|X=n\} \cdot P\{X=n\}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k} \cdot e^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k}, k \geq 0$$

3.

$$P\{X=n|Y=k\} = \frac{P\{X=n, Y=k\}}{P\{Y=k\}} = \frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k} e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Problem 25

设二维随机向量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy), & |x| \le 1, |y| \le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求 $Z = X + Y$ 的概率需度

考虑变换

$$\phi : \begin{cases} x = x, \\ y = z - x, \end{cases}, |\det\phi'| = 1$$

在这样的变换下，$f(x, z - x)$ 的支撑集，即取值不为 0 的集合，为 $\{x, z|\ |x| \le 1, |z| \le 2, z - 1 \le x \le z + 1\}$.

由密度卷积公式, 对固定的 z, 有

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$$

当 $-2\le z\le 0$ 时,

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx=\int_{-1}^{1+z} \frac{1}{4}\left(1+zx-x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{z^3}{24}$$

当 $0\le z\le 2$ 时,

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx=\int_{z-1}^{1} \frac{1}{4}\left(1+zx-x^2\right)dx=\frac{1}{3}-\frac{z^3}{24}$$

Problem 29

设随机变量 X, Y 相互独立, 都在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 求:

1. $Z_1 = \max\{X, Y\}$ 的概率密度;
2. $Z_2 = \min\{X, Y\}$ 的概率密度;
3. (Z_1, Z_2) 的概率密度;
4. $R = Z_1 - Z_2$ 的概率密度;

1. 易知 (下仅给出支撑集上的结果)

$$F_{Z_1}(z) = P\{\max\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\}$$
$$= \frac{z-a}{b-a} \cdot \frac{z-a}{b-a}, a \leq z \leq b$$

从而 $f_{Z_1}(z) = \frac{2(z-a)}{(b-a)^2}$

2. 类似地，易知

$$F_{Z_2}(z) = P\{\min\{X, Y\} \le z\} = 1 - P\{X \ge z\} \cdot P\{Y \ge z\}$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{z-a}{b-a}\right)\left(1 - \frac{z-a}{b-a}\right)$$

从而 $f_{Z_2}(z) = \frac{2(b-z)}{(b-a)^2}$

3. 此时有

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= P\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2\} \\ &= P\{\max\{X, Y\} \le z_1, \min\{X, Y\} \le z_2\} \\ &= P\{X \le z_1, Y \le z_1\} - P\{z_2 \le X \le z_1, z_2 \le Y \le z_1\} \\ &= \frac{a^2 - 2az_1 + 2z_1z_2 - z_2^2}{(b-a)^2}, z_2 \le z_1 \end{aligned}$$

从而 $f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{2}{(b-a)^2}, a \le z_2 < z_1 \le b$

4. 考虑变换

$$\varphi \begin{cases} z_1 = z_1, \\ z_2 = z_1 - r, \end{cases} |\det\varphi'| = 1$$

当 $r + a \le z_1 \le b, 0 \le r \le z_1 - a$ 时 $f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_1 - r)$ 不为 0，故

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, z_1 - r)\, dz_1 \\ &= \int_{r+a}^{b} \frac{2}{(b-a)^2} dz_1 = \frac{2(b-a-r)}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

Problem 33

设 X 与 Y 相互独立, 都服从几何分布 $Ge(p)$, 其中 $0<p<1$ 试求:

1. $Z=X+Y$ 的分布律;
2. 给定 Z 时 X 的条件分布律;
3. $W=\max\{X,Y\}$ 的分布律;
4. $V=\min\{X,Y\}$ 的分布律.

1.

$$P\{Z=n\}=P\{X+Y=n\}=\sum_{i=1}^{n-1}P\{X=i,Y=n-i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}P\{X=i\}\cdot P\{Y=n-i\}=\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}p\cdot(1-p)^{n-i-1}p$$

$$=(n-1)(1-p)^{n-2}p^2, n\geq 2$$

2

$$P\{X = k|Z = n\} = \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{Z = n\}} = \frac{(1-p)^{n-2} p^2}{(n-1)(1-p)^{n-2} p^2} = \frac{1}{n-1}$$

3

$$\begin{aligned} P\{W = n\} &= P\{\max\{X, Y\} = n\} \\ &= P\{X = n, Y \le n\} + P\{X < n, Y = n\} \\ &= (1-p)^{n-1} p \left(\sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1} p + \sum_{i=1}^{n} (1-p)^{i-1} p \right) \\ &= (1-p)^{n-1} p \left(2 - (1-p)^{n-1} - (1-p)^n \right) \end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&P\{V=n\}=P\{\min\{X,Y\}=n\}\\
&=P\{X=n,Y\geq n\}+P\{X>n,Y=n\}\\
&=(1-p)^{n-1}p\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}p+1-\sum_{i=1}^{n}(1-p)^{i-1}p\right)\\
&=(2-p)(1-p)^{2n-2}p
\end{aligned}
$$

Problem 35

设二维随机向量 (X, Y) 在矩形域 $G = \{(x, y)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ 上服从均匀分布, 试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

$$\begin{aligned}
P\{S \le s\} &= P\{XY \le s\} = P\{Y \le \frac{s}{X}\} \\
&= \int_0^2 dx \int_0^{\min\{\frac{s}{x},1\}} \frac{1}{2} dy = \int_0^s dx \int_0^1 \frac{1}{2} dy + \int_s^2 dx \int_0^{\frac{s}{x}} \frac{1}{2} dy \\
&= \frac{s}{2} + \frac{s\ln 2 - s\ln s}{2}
\end{aligned}$$

从而

$$f(s) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln s)$$

Problem 10

分子运动的速率 X 服从麦克斯韦分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

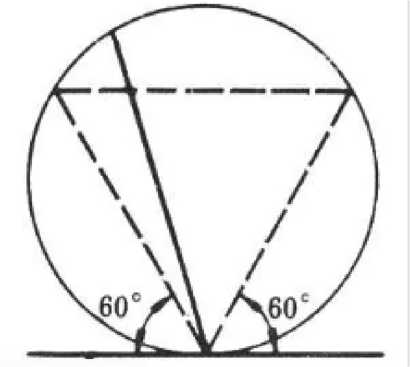
其中 $a > 0$ 是常数. 设分子的质量为 m, 求分子的平均动能.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} m \int_{0}^{+\infty} \frac{4x^4}{a^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= \frac{3}{4} m a^2 \end{aligned}$$

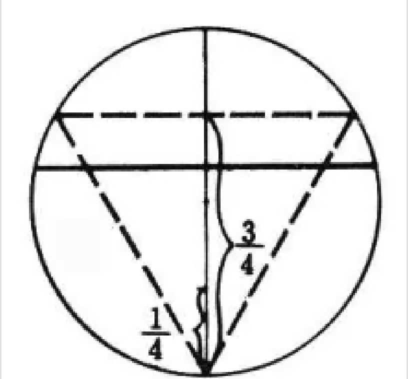
贝特朗悖论 Bertrand paradox

在单位圆内任意取一条弦，弦长大于 $\sqrt{3}$ 的概率是多少?

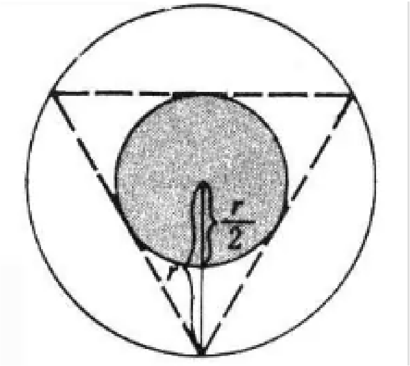
解法一：由对称性，可以固定弦的第一个端点，则弦长大于 $\sqrt{3}$ 当且仅当这条弦与端点处切线的交角介于 $\frac{\pi}{3}$ 到 $\frac{2\pi}{3}$ 之间，从而概率为 $\frac{1}{3}$.



解法二：由对称性，可以固定弦的方向，则弦长大于 $\sqrt{3}$ 当且仅当其与垂直于弦方向的直径的交点距离圆心距离不大于 $\frac{1}{2}$，从而概率为 $\frac{1}{2}$.



解法三：在圆中，弦被其中点唯一确定，则弦长大于 $\sqrt{3}$ 当且仅当弦的中点与圆心的距离不大于 $\frac{1}{2}$，从而概率为 $\frac{1}{4}$.



为什么会有三个完全不同的结果？

贝特朗悖论

考虑一个简单的例子: $\triangle ABC$ 满足 $\angle A = \frac{\pi}{6}, \angle C = \frac{\pi}{2}, AB = 2$. 任意作线段 CD 交边 AB 于 D, 则 $AD < 1$ 的概率是多少?

1. 取边 AB 中点 M, $AD < 1$ 当且仅当 D 在线段 AO 内, 从而概率为 $\frac{1}{2}$.
2. 考虑张角 $\angle ACD$, $AD < 1$ 当且仅当 $\angle ACD < \frac{\pi}{6}$, 从而概率为 $\frac{1}{3}$.
3. 延长 CB 至 E, 满足 $CE = 10000000000$, 连接 AE, 并延长线段 CD 交 AE 于 F, 延长 CM 交 AE 于 M', 则 $AD < 1$ 当且仅当 F 在线段 AM' 内, 其概率约为 0.

贝特朗悖论说明, 在描述随机事件时, 必须明确样本空间. 事实上上述若干概率不一致问题也是选取的样本空间不同所致.