No:

Date:

C8

T1. 证明：① (⇒) $\forall a, b, c \in R, a \neq 0$，若 $a \cdot b = a \cdot c$，则

$a \cdot (b-c) = 0$，因为环R无零因子，所以必有

$b-c=0$，即 $b=c$，R中左消去律成立，同理可证

R中右消去律成立，故R中消去律成立.

② (⇐) $\forall a, b \in R, a \neq 0$，若 $ab=0$，则由消去律，

$$ab = a(b-b) = 0 \Rightarrow b = b-b = 0$$

故环R无零因子，证毕.

No.

Date. / /

定理8.2.4（环同态基本定理） 设ϕ是环R到R'的满同态，则存在唯一的$\frac{R}{\ker\phi}$到R'的同构 $\tilde{\phi}:\frac{R}{\ker\phi}\cong R'$.

证明：(1) 记$k=\ker\phi$，k为环R的理想，构造

$\tilde{\phi}:\frac{R}{k}\to R'$，$\bar{a}\to\phi(a)$，其中$\bar{a}=a+k$

(2) 证$\tilde{\phi}$为$\frac{R}{k}$到R'的映射：

设$\bar{a}=\bar{b}$，即$a-b\in k$，则$\phi(a-b)=0$，从而$\phi(a)=\phi(b)$，故

$\tilde{\phi}(\bar{a})=\phi(a)=\phi(b)=\tilde{\phi}(\bar{b})$，$\tilde{\phi}:\frac{R}{k}\to R'$映射.

(3) 证$\tilde{\phi}$为同态映射：

$\forall\bar{a},\bar{b}\in\frac{R}{k}$，有

$\tilde{\phi}(\bar{a}+\bar{b})=\tilde{\phi}(\overline{a+b})=\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)=\tilde{\phi}(\bar{a})+\tilde{\phi}(\bar{b})$

$\tilde{\phi}(\bar{a}\bar{b})=\tilde{\phi}(\overline{ab})=\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)=\tilde{\phi}(\bar{a})\tilde{\phi}(\bar{b})$

所以$\tilde{\phi}$是$\frac{R}{k}$到R'的同态映射

(4) 证$\tilde{\phi}$为满同态：

$\forall a'\in R'$，因为ϕ为满同态，所以$\exists a\in R$使$\phi(a)=a'$，从而

$\tilde{\phi}(\bar{a})=\phi(a)=a'$，$\tilde{\phi}$为满同态.

(5) 证明同构：(1-1映射) 单同态

设$\bar{a},\bar{b}\in\frac{R}{k}$，如果$\tilde{\phi}(\bar{a})=\tilde{\phi}(\bar{b})$，则

$\phi(a-b)=\tilde{\phi}(\overline{a-b})=\tilde{\phi}(\bar{a})-\tilde{\phi}(\bar{b})=0$

从而$a-b\in\ker\phi$，由此得$\bar{a}=\bar{b}$，所以$\tilde{\phi}$为单射，是单同态

综上(1)-(5)，$\tilde{\phi}$为$\frac{R}{k}$到R'的同构映射.

(证明与群同态类似)